

Janusz Brzeszczyński

Heriot-Watt University, Edinburgh, Uniwersytet Łódzki

Jerzy Gajdka, Tomasz Schabek

Uniwersytet Łódzki

APLIKACJA MODELI KLASY ARCH DO ESTYMACJI PARAMETRU BETA PRZY UWZGLĘDNIENIU STÓP ZWROTU DLA RÓŻNYCH INTERWAŁÓW CZASOWYCH

1. Wstęp

Jednym z najważniejszych parametrów finansowych, stanowiących przedmiot zainteresowania zarówno teoretyków, jak i praktyków wykorzystujących dane z rynku kapitałowego, jest współczynnik beta (β). Stosowany jest on m.in. do wyznaczania kosztu kapitału własnego przy użyciu modelu wyceny aktywów kapitałowych (CAPM), identyfikacji akcji zbyt wysoko lub zbyt nisko wycenionych przez rynek oraz konstrukcji portfeli o założonym poziomie ryzyka. Współczynnik beta jest bez wątpienia najważniejszą miarą ryzyka systematycznego i powinien być uwzględniany we wszystkich decyzjach finansowych, w których ten rodzaj ryzyka ma znaczenie.

Pomimo tak dużej roli w badaniach teoretycznych oraz w praktyce współczesnych finansów, z zagadnieniem szacunku współczynnika beta wiąże się wiele problemów, które wciąż pozostają nierozwiązane w sposób jednoznaczny. Do najważniejszych z nich należy wybór samej metody estymacji oraz identyfikacja długości okresu, w którym powinny być definiowane stopy zwrotu dla akcji oraz indeksu giełdowego wykorzystywane następnie w odpowiednich modelach regresji.

Szacunek parametru beta zazwyczaj dokonywany jest na podstawie danych historycznych przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów (MNK). W ten sposób wyznaczana jest linia regresji ilustrująca związek między stopą zwrotu z rynku oraz stopą zwrotu z akcji, na podstawie której określana jest wartość współczynnika beta. Jednym z kluczowych założeń tej metody jest homoskedastyczność, czyli stała w czasie wariancja składnika losowego. Jeśli założenie to nie jest speł-

nione i w modelu występuje heteroskedastyczność, wówczas szacunek parametru β za pomocą MNK jest zwykle błędny.

Heteroskedastyczność oznacza zmienną w czasie wariancję składnika losowego w modelu ekonometrycznym. Gdy zjawisko to jest obecne w modelu regresji liniowej, którego parametry szacowane są za pomocą MNK, wówczas estymatory tych parametrów tracą efektywność. Konsekwencją tego jest błąd szacunku, który objawia się przeszacowaniem lub niedoszacowaniem wartości analizowanych parametrów. W rezultacie więc, jeśli celem analizy jest współczynnik β , wnioski formułowane na temat postaci związku między zmiennością analizowanej akcji oraz zmiennością indeksu rynkowego mogą być całkowicie nieprawidłowe, a wyznaczona wartość β nie jest wartością właściwą.

W przypadku wystąpienia heteroskedastyczności najczęściej stosowaną metodą są modele ARCH oraz GARCH, które umożliwiają odpowiednią korektę oszacowań β (por. [Bollerslev 1986; Engle 1982]; przegląd innych modeli tej klasy można znaleźć w [Brzeszczyński, Kelm 2002]).

Zagadnienie estymacji parametru β przy pomocy modeli ARCH stanowi ważny problem metodologiczny (por. [Braun, Nelson, Sunier 1995; Dillen, Stoltz 1999; Tagliafichi 2002]). Ze względu na swoje własności predykcyjne modele tej klasy zdobyły dużą popularność w praktyce i stosowane są do wyznaczania β w badaniach prowadzonych na wielu różnych rynkach na świecie (także na danych z rynku polskiego, por. m.in. [Brzeszczyński, Gajdka 2007; Fiszeder 2005]).

Celem tego opracowania jest prezentacja wyników badań nad problemem estymacji parametru β dla danych z polskiego rynku kapitałowego przy uwzględnieniu różnych stóp zwrotu wyliczanych dla interwałów czasowych o długości od 1 dnia (1 sesji giełdowej) do 1 miesiąca (21 sesji giełdowych).

W części empirycznej przedstawiono rezultaty analizy dotyczącej różnic w oszacowaniach β w zależności od wybranego interwału oraz przyjętych metod estymacji (MNK i modeli klasy ARCH) dla wszystkich spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie (GPW) w latach 2003-2006.

2. Modele ARCH

W prezentowanym badaniu do szacunku parametru β wykorzystano modele klasy ARCH o następującej postaci:

$$r_t^{akcja} = \alpha + \beta \cdot r_t^{index} + \xi_t, \quad (1)$$

$$\xi_t = \vartheta_t \sqrt{h_t}, \quad (2)$$

$$h_t = \gamma_0 + \sum_{s=1}^S \gamma_s \xi_{t-s}^2, \quad (3)$$

gdzie α i β są odpowiednimi parametrami strukturalnymi modelu oraz $\vartheta_t : \text{IID}(0,1)$, $S > 0$, $\gamma_0 > 0$ i $\gamma_s \geq 0$. Ponadto w modelach tych przyjmuje się zało-

żenia, że $\xi_t : \text{IID}(0, \sigma_\xi^2)$ oraz że składnik losowy nie jest zautokorelowany i nie ma kowariancji między nim a zmienną objaśnianą (lub zmiennymi objaśnianymi). Zmienne r_t^{akcja} oraz r_t^{index} są stopami zwrotu z akcji i z indeksu rynkowego. Rodzaj oraz stopień modelu klasy ARCH determinuje specyfikacja funkcji wariancji warunkowej h_t w równaniu (3). Najczęściej wykorzystywaną modyfikacją jest uogólniony model GARCH(S, Q) o następującej postaci funkcji h_t :

$$h_t = \gamma_0 + \sum_{s=1}^S \gamma_s \xi_{t-s}^2 + \sum_{q=1}^Q \phi_q h_{t-q}, \quad (4)$$

gdzie $S > 0$, $Q \geq 0$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_s \geq 0$ oraz $\phi_q \geq 0$.

Rozbudowa funkcji wariancji warunkowej h_t prowadzi do otrzymania wielu innych wariantów modeli klasy ARCH, w tym np. modeli asymetrycznych i in. (por. [Brzeszczyński, Kelm 2002]).

W przypadku braku heteroskedastyczności składnika losowego parametr β może zostać oszacowany tylko za pomocą równania (1) oraz metody najmniejszych kwadratów. Każdorazowo wymaga to jednak przeprowadzenia testu efektu ARCH (por. [Engle 1982]), co ma na celu sprawdzenie, czy zjawisko to jest obecne w modelu. Stosowanie MNK, gdy występuje heteroskedastyczność, prowadzi bowiem do ryzyka błędnej identyfikacji postaci badanej zależności. Prawidłowe oszacowania β uzyskuje się wtedy poprzez estymację parametrów modelu ARCH opisanego wzorami (1)-(3) lub jego wariantu o innej funkcji wariancji warunkowej h_t , gdzie informacja o zmienności składnika losowego zawarta w (3) wykorzystana jest do korekty β w równaniu (1).

3. Metodologia badania

Celem badania była analiza różnic w oszacowaniach wartości współczynnika beta dokonanych na podstawie danych o różnych częstotliwościach obserwacji oraz przy wykorzystaniu różnych metod estymacji: MNK i modeli klasy ARCH (w tych przypadkach, gdzie występuje heteroskedastyczność składnika losowego).

W analizie tej wykorzystano stopy zwrotu akcji notowanych na GPW w okresie od początku stycznia 2003 r. do końca grudnia 2006 r. Do estymacji wybrano 166 spółek, których akcje znajdowały się w obrocie w całym badanym okresie. Baza danych dotycząca kursów giełdowych pochodzi z GPW.

Parametry beta wyznaczono na podstawie modeli, w których stopy zwrotu z indeksu rynkowego WIG oraz stopy zwrotu dla akcji zdefiniowane były dla różnych interwałów czasowych o długości: 1, 2, 3, 4, 5, 10 oraz 21 sesji (odpowiadających

okresom: 1, 2, 3, 4, 5 dni; 1, 2 tygodni oraz 1 miesiąca)¹. Dla siedmiu wymienionych powyżej częstotliwości (1, 2, 3, 4, 5, 10 oraz 21 sesji) otrzymano 1162 parametrów β (po 166 dla każdego z interwałów).

W prezentowanym badaniu przyjęto następującą procedurę estymacyjną. Najpierw parametr β dla każdej ze spółek w każdym z interwałów został oszacowany za pomocą MNK. Następnie przeprowadzono test mnożników Lagrange'a, mający na celu identyfikację efektu ARCH. Gdy stwierdzona została jego obecność, parametry równania (1) oszacowano za pomocą modelu GARCH(1,1). W kolejnym kroku ponownie przeprowadzono test mnożników Lagrange'a i jeśli wskazał on na występowanie (pozostającej w modelu) heteroskedastyczności, wówczas parametry estymowano za pomocą modelu GARCH wyższego rzędu. Procedura ta była kontynuowana, dopóki test wykazał brak efektu ARCH przy przyjętym poziomie istotności². Dla obu klas modeli przeprowadzono także testy na autokorelację składnika losowego. Jeśli stwierdzona została jej obecność, do modeli wprowadzano składniki AR oraz/lub MA w celu jej usunięcia.

4. Wyniki empiryczne

Tabela 1 prezentuje porównanie różnic w oszacowaniach parametru β pochodzących z modeli MNK i GARCH dla różnych interwałów czasowych, w jakich definiowane były stopy zwrotu.

Pierwszą ważną konkluzją wynikającą z tego zestawienia jest to, że liczba zidentyfikowanych efektów ARCH różniła się znacznie w zależności od częstotliwości danych i była tym większa, im krótsze były interwały czasowe.

Dla danych o interwale 1-sesyjnym efekt ARCH wystąpił w 126 przypadkach spośród wszystkich 166 akcji. W 86 modelach β wyznaczona przy wykorzystaniu MNK była przeszacowana w stosunku do β^* uzyskanej z modelu klasy ARCH, natomiast w 30 modelach beta uzyskana na podstawie MNK była niedoszacowana. W zestawieniu tym uwzględniono wyłącznie oszacowania, które były istotne statystycznie. Gdy wyniki estymacji otrzymane na gruncie przynajmniej jednej z tych dwóch metod nie były istotne na przyjętym poziomie $p = 0,05$, wówczas nie porównywano ich ze sobą.

Dla interwału 1-sesyjnego w 3 przypadkach następuje całkowita zmiana interpretacji bety, tzn. zmiana jej wartości z wyższej od 1 (akcja agresywna) na niższą od 1 (akcja defensywna) lub też na odwrót.

Wartość bezwzględna maksymalnej różnicy oszacowań β oraz β^* (tzn. szacunków uzyskanych za pomocą MNK oraz oszacowań z modelu klasy ARCH) dla tego interwału wynosi ponad 0,3, co stanowi relatywnie dużą wielkość w stosunku

¹ Dla okresów miesięcznych wybrany został interwał o długości 21 sesji, gdyż średnia miesięczna liczba sesji giełdowych wynosi ok. 21. Interwał 5-sesyjny oraz 10-sesyjny odpowiada natomiast okresom 1 oraz 2 tygodni.

² W całym badaniu poziom istotności p wynosi 0,05.

do zakresu zmienności parametrów β . W przypadku estymacji dla krótkich interwałów (1-5 sesji) zastosowanie MNK prowadzi do znacznej różnicy w wynikach w stosunku do „właściwej” wartości współczynnika β (dla tych interwałów rozbieżności stwierdzono w ponad 20% przypadków, przy czym dla interwału 1-sesyjnego aż w 76%).

Jak wynika z tab. 1, dla pozostałych interwałów również częściej występowało przeszacowanie parametru β niż jego niedoszacowanie, gdy metodą estymacji była MNK (w sumie przeszło dwukrotnie, tzn. w 222 wobec 109 przypadków). Z reguły częściej też następowała zmiana bety z ofensywnej na defensywną niż odwrotnie (odpowiednio: 14 przypadków wobec 3). Wraz z wydłużaniem interwału wzrastała także maksymalna wartość bezwzględna różnicy między β oraz β^* .

Tabela 1. Różnice w oszacowaniach parametrów β pochodzących z modeli MNK i GARCH dla różnych interwałów czasowych wykorzystanych do konstrukcji stóp zwrotu

Interwał (liczba sesji)	$\beta < \beta^*$	$\beta > \beta^*$	Zmiana bety z defensywnej ($\beta < 1$) na ofensywną ($\beta > 1$)	Zmiana bety z ofensywnej ($\beta > 1$) na defensywną ($\beta < 1$)	Maksimum $ \beta^* - \beta $	Minimum $ \beta^* - \beta $	Liczba efektów ARCH	$\bar{\beta}$
1	30	86	2	1	0,308	0	126	0,60
2	27	59	0	3	0,524	0	96	0,69
3	21	25	1	2	0,402	0,001	58	0,72
4	15	19	0	1	0,243	0	48	0,72
5	7	23	0	2	0,536	0,008	40	0,81
10	7	9	0	4	0,804	0,023	25	0,90
21	2	1	0	1	1,057	0,002	11	1,09
Suma	109	222	3	14				

Uwagi: Przez β^* oznaczono prawidłowe oszacowanie parametru beta, uzyskane za pomocą odpowiedniego modelu GARCH (jeżeli test mnożników Lagrange’a wykazał istnienie efektu ARCH), natomiast β oznacza szacunek otrzymany za pomocą MNK. Przez $\bar{\beta}$ oznaczono średni parametr beta dla danego interwału czasowego.

Źródło: opracowanie własne.

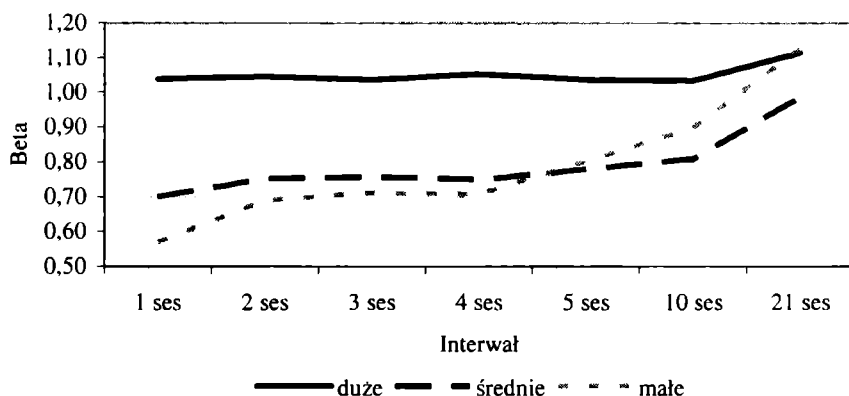
Dla każdego z interwałów przeprowadzono test różnic między β^* a β . Hipotezę zerową odrzucono dla interwałów 1-, 2- i 5-sesyjnych przy poziomie istotności $p = 0,05$.

Wnioski wynikające z informacji zawartych w tab. 1 wskazują na to, że posługiwanie się metodą MNK w większości przypadków prowadzi do przeszacowania wartości współczynnika β . Dotyczy to wszystkich częstotliwości danych z wyjątkiem najdłuższego interwału 21-sesyjnego, w odniesieniu do którego zaobserwowana liczba efektów ARCH była zdecydowanie najmniejsza.

Analiza wpływu długości interwału czasowego na otrzymaną wielkość współczynnika β w analizowanej próbie wskazuje na generalny wzrost wartości oszacowań tego parametru wraz z wydłużaniem interwału. W rezultacie najwyższe śred-

nie wartości współczynnika β uzyskano wówczas, gdy był on wyznaczany na podstawie stóp zwrotu zdefiniowanych w okresie 21 sesji.

Na rys. 1 przedstawiono zależność między średnią wartością współczynnika β a długością interwału czasowego dla spółek dużych (będących częścią składową indeksu WIG20 na koniec badanego okresu), średnich (będących częścią składową indeksu MIDWIG na koniec badanego okresu) oraz małych (będących częścią składową indeksu WIRR na koniec badanego okresu).



Rys. 1. Średnia wartość współczynnika β w zależności od wielkości spółki oraz długości interwału czasowego służącego do konstrukcji stóp zwrotu

Źródło: opracowanie własne.

Przy wyznaczaniu wartości średnich za „właściwą” betę przyjmowano oszacowanie uzyskane za pomocą modelu ARCH (jeśli występowała heteroskedastyczność) lub MNK (jeśli zastosowany test efektu ARCH wskazywał na brak heteroskedastyczności). W obu przypadkach uwzględniono także problem autokorelacji.

Jak ilustruje rys. 1, największy wzrost średniej wartości współczynnika β między oszacowaniami dla interwałów 1-sesyjnych i 21-sesyjnych miał miejsce w przypadku spółek małych, a najmniejszy w przypadku spółek dużych.

5. Podsumowanie

Artykuł prezentuje wyniki badań dotyczących różnic w oszacowaniach wartości współczynnika β dokonanych na podstawie danych o różnych częstotliwościach obserwacji oraz przy wykorzystaniu MNK i modeli ARCH.

Otrzymane rezultaty dowodzą, że gdy występuje efekt ARCH, zwłaszcza w modelach, w których oszacowania β dokonywane były na podstawie krótkich interwałów czasowych (1-5 sesji), znaczna część parametrów β wyznaczona za pomocą MNK przyjmuje nieprawidłowe wartości. Różnice między nimi a właściwymi parametrami β (tj. uwzględniającymi heteroskedastyczność składnika losowe-

go) są istotnie różne od zera. Różnice te mogą przybierać znaczne wartości i powodować nawet zmianę konkluzji na temat wrażliwości spółki względem ryzyka rynkowego.

Głównym ograniczeniem w zastosowaniu modeli klasy ARCH w praktyce może być liczba obserwacji, która musi być wystarczająco duża, aby zagwarantować zbieżność odpowiednich procedur numerycznych. Jednak w przypadku krótkich prób statystycznych efekt ARCH jest zwykle bardzo słaby lub w ogóle nie występuje, a więc brak jest heteroskedastyczności i wówczas parametry modeli mogą być szacowane za pomocą klasycznej MNK. W przypadku estymacji β sytuacja taka będzie miała miejsce tylko wtedy, gdy szacunek będzie oparty na danych o bardzo niskiej częstotliwości obserwacji (tj. miesięczna lub jeszcze niższa).

Zaprezentowane rezultaty demonstrowają skalę problemu, gdy wobec występowania heteroskedastyczności składnika losowego w modelu regresji metodą stosowaną do wyznaczania wartości współczynnika β jest MNK. Prowadzić to może do poważnych błędów w szacunkach kosztu kapitału własnego czy też w innych kluczowych decyzjach finansowych podejmowanych na podstawie modelu wyceny aktywów kapitałowych CAPM.

Drugim ważnym wnioskiem wynikającym z tego badania jest istnienie związku między wartością oszacowania współczynnika β a długością interwału czasowego wykorzystywanego do konstrukcji stóp zwrotu akcji i indeksu rynkowego. W badanej próbie wzrastała ona wraz z wydłużaniem tego interwału, a efekt ten był najsilniejszy w przypadku małych i średnich spółek.

Literatura

- Bollerslev T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, „Journal of Econometrics” 1986 no 31.
- Braun P.A., Nelson D.B., Sunier A.M., *Good News, Bad News, Volatility, and Betas*, „Journal of Finance” 1995 no 50.
- Brzeszczyński J., Gajdka J., *Estymacja parametru beta przy użyciu modeli klasy ARCH*, [w:] W. Tarczyński (red.), *Rynek kapitałowy – skuteczne inwestowanie*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 462, Szczecin 2007.
- Brzeszczyński J., Kelm R., *Ekonometryczne modele rynków finansowych. Modele kursów akcji i kursów walutowych*, WIG-Press, Warszawa 2002.
- Dillen H., Stoltz B., *The Distribution of Stock Market Returns and the Market Model*, „Finnish Economic Papers” 1999 no 12.
- Engle R.F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, „Econometrica” 1982 no 50.
- Fiszeder P., *Estymacja współczynników beta na podstawie wielorównaniowego modelu GARCH*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, *Ekonomia* XXXVI, UMK, Toruń 2005.
- Tagliafichi R., *Beta Calculated with Garch Models Provides New Parameters for a Portfolio Selection with an Efficient Frontier*, ASTIN Colloquium (working paper), 2002.

APPLICATION OF ARCH MODELS FOR THE ESTIMATION OF BETA PARAMETERS USING DIFFERENT TIME INTERVALS FOR RETURNS

Summary

The estimation of beta coefficient (β), a basic measure of systematic risk, is central to the implementation of the capital assets pricing model (CAPM) and is of great importance from both theoretical and practical viewpoints. The most frequently used tool for estimation of the β parameter is a regression model and the ordinary least squares method (OLS). Its application is justified, however, only when all standard assumptions of the OLS are fulfilled, including the assumption about homoscedasticity of the variance of an error term. The consequences of using the OLS under the existence of heteroscedasticity can be serious and usually lead to obtaining incorrect estimates of the model's parameters, which may result in the formulation of wrong conclusions about the analyzed relationships.

This paper presents empirical results from the estimation of the β parameters for stocks listed on the Warsaw Stock Exchange (WSE) between 2003 and 2006 using the OLS and ARCH models as well as different intervals over which the returns have been measured. Our findings provide evidence that those estimates considerably differ with the intervals length. They indicate also that in the sample of data the estimates of β increased as the returns interval was lengthened and that the application of the OLS, whenever heteroscedasticity was present, usually resulted in overestimation of beta coefficients.