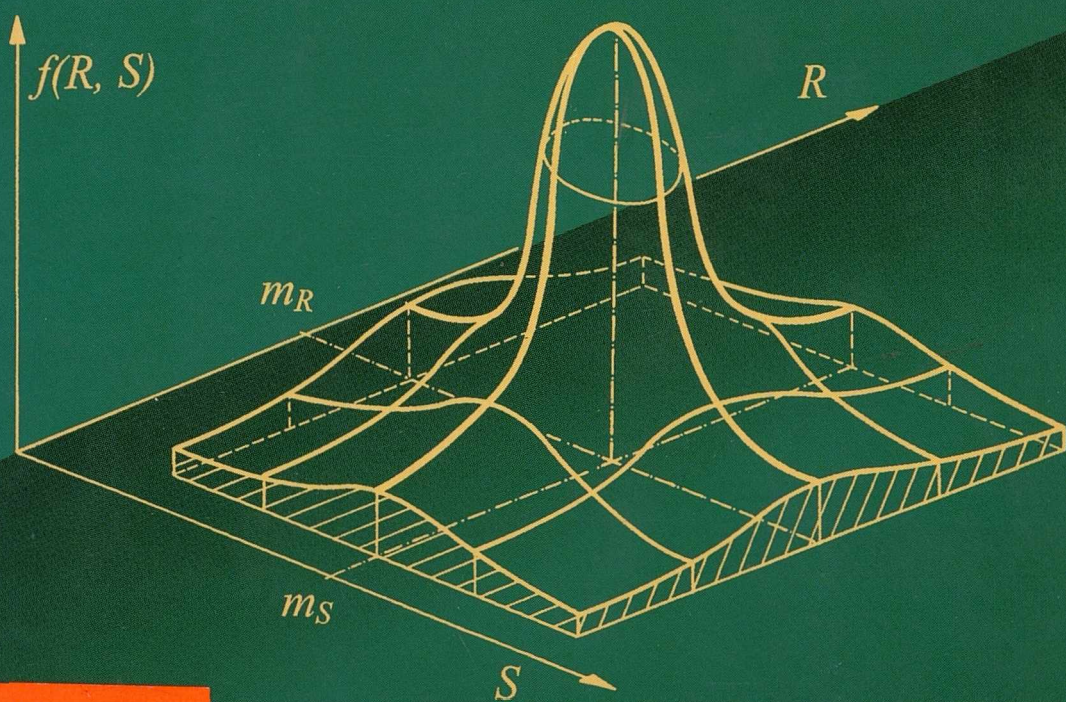


Antoni Biegus

# PROBABILISTYCZNA ANALIZA KONSTRUKCJI STALOWYCH







PROBABILISTYCZNA  
ANALIZA  
KONSTRUKCJI  
STALOWYCH





Antoni Biegus

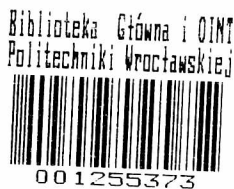
**PROBABILISTYCZNA  
ANALIZA  
KONSTRUKCJI  
STALOWYCH**

Publikację dofinansował  
**Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej**

Recenzent **Zbigniew Kowal**

Projekt okładki i stron tytułowych  
**Danuta Błahut-Biegańska**

Redakcja **Bogumiła Madej**  
Korekta **Anna Kurzyca**



Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa – Wrocław 1999

ISBN 83-01-12987-5

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10  
tel. (0-22) 695-43-21  
faks: (0-22) 826-71-63  
e-mail: [pwn@pwn.com.pl](mailto:pwn@pwn.com.pl)  
<http://www.pwn.com.pl>



301328L/1

# Spis treści

|                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Przedmowa</b>                                                                                      | 7   |
| <b>1. Wstęp do probabilistycznej analizy konstrukcji</b>                                              |     |
| 1.1. Wprowadzenie                                                                                     | 9   |
| 1.2. Próba losowa                                                                                     | 10  |
| 1.3. Dyskretne zmienne losowe                                                                         | 11  |
| 1.4. Ciągłe zmienne losowe                                                                            | 15  |
| 1.5. Rozkład normalny                                                                                 | 19  |
| 1.6. Kombinacja niezależnych zmiennych losowych normalnych                                            | 23  |
| 1.7. Estymatory zmiennych losowych                                                                    | 28  |
| <b>2. Oszacowanie bezpieczeństwa konstrukcji</b>                                                      |     |
| 2.1. Wprowadzenie                                                                                     | 33  |
| 2.2. Bezpieczeństwo konstrukcji                                                                       | 41  |
| 2.3. Szacowanie bezpieczeństwa w metodzie stanów granicznych                                          | 44  |
| 2.4. Szacowanie bezpieczeństwa konstrukcji metodą probabilistyczną poziomu 2                          | 56  |
| 2.5. Szacowanie bezpieczeństwa konstrukcji metodą probabilistyczną poziomu 3                          | 62  |
| 2.6. Podsumowanie                                                                                     | 67  |
| <b>3. Parametry losowej nośności elementów konstrukcyjnych</b>                                        |     |
| 3.1. Wprowadzenie                                                                                     | 68  |
| 3.2. Losowa nośność pręta rozciąganego                                                                | 69  |
| 3.3. Losowa nośność pręta zginanego                                                                   | 71  |
| 3.4. Losowa nośność pręta zginanego i rozciąganego                                                    | 77  |
| 3.5. Losowa nośność pręta ściskanego osiowo                                                           | 79  |
| 3.6. Losowa nośność pręta ściskanego i zginanego                                                      | 88  |
| 3.7. Losowa nośność konstrukcji jako iloczyn zmiennych losowych o różnych rozkładach funkcji gęstości | 91  |
| <b>4. Losowe imperfekcje elementów konstrukcyjnych</b>                                                |     |
| 4.1. Wprowadzenie                                                                                     | 95  |
| 4.2. Losowe odchyłki geometryczne przekrojów poprzecznych prętów                                      | 96  |
| 4.3. Imperfekcje osi podłużnych oraz płaszczyzn środkowych elementów                                  | 109 |
| 4.3.1. Wstęp                                                                                          | 109 |
| 4.3.2. Dopuszczalne normowe odchyłki geometryczne                                                     | 114 |
| 4.3.3. Analiza wytrzymałościowych następstw imperfekcji geometrycznych                                | 122 |
| 4.3.4. Oszacowanie nośności elementów z uwzględnieniem ich imperfekcji geometrycznych                 | 129 |
| 4.4. Imperfekcje strukturalne materiałów i parametry wytrzymałościowe stali                           | 136 |

## 5. Bezpieczeństwo i nośność graniczna prętowych systemów konstrukcyjnych

|                                                                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.1. Wprowadzenie . . . . .                                                                                     | 145        |
| 5.2. Nośność graniczna elementów sprawczych i konstrukcji . . . . .                                             | 147        |
| 5.2.1. Nośność graniczna przekrojów prętów . . . . .                                                            | 147        |
| 5.2.2. Ścieżki równowagi statycznej prętów . . . . .                                                            | 150        |
| 5.2.3. Ścieżki równowagi statycznej węzłów . . . . .                                                            | 152        |
| 5.2.4. Ścieżki równowagi statycznej konstrukcji prętowych . . . . .                                             | 155        |
| 5.2.5. Nośność graniczna prętowych systemów konstrukcyjnych . . . . .                                           | 157        |
| 5.3. Minimalne krytyczne zbiory elementów stowarzyszone z mechanizmami zniszczenia konstrukcji . . . . .        | 165        |
| 5.4. Dyskretne modele niezawodności konstrukcji . . . . .                                                       | 168        |
| 5.5. Modele konstrukcji o szeregowo połączonych elementach sprawczych . . . . .                                 | 171        |
| 5.6. Modele konstrukcji o równolegle połączonych elementach sprawczych . . . . .                                | 176        |
| 5.7. Modele konstrukcji o szeregowo połączonych minimalnych krytycznych zbiorach elementów sprawczych . . . . . | 182        |
| 5.8. Modele konstrukcji o minimalnych zbiorach krytycznych z elementami wspólnymi . . . . .                     | 187        |
| <b>Literatura . . . . .</b>                                                                                     | <b>193</b> |



# Przedmowa

Problem oceny bezpieczeństwa i niezawodności użytkowania budowli jest podstawowym zadaniem projektowania i realizacji obiektów budowlanych. Istniał on tak dawno, jak dawno człowiek zaczął wznosić budowle. Ten oczywisty wymóg społeczny znalazł swoje odzwierciedlenie w najstarszych uregulowaniach prawnych. Między innymi w Kodeksie Hammurabiego [59] czytamy: *Jeśli dom się zawali i zabije właściciela, to budowniczy domu ma być skazany na karę śmierci. Jeśli dom zabije syna właściciela, to syn budowniczego niech będzie uśmiercony*. Dopiero jednak w ostatnich czasach rozwój mechaniki stosowanej, wytrzymałości materiałów, teorii sprężystości i plastyczności, a także identyfikacji obciążeń pozwolił na poznanie zachowania się konstrukcji i ekonomiczne jej projektowanie z uwzględnieniem postulatu niezawodności. Istotny postęp w tej dziedzinie uzyskano dopiero wówczas, gdy rozwinęła się nowa dyscyplina naukowa — *teoria bezpieczeństwa konstrukcji*, uwzględniająca metody probabilistyczne w ocenie niezawodności. Pierwsze prace na temat bezpieczeństwa budowli z zastosowaniem metod probabilistycznych opublikował w Polsce w latach trzydziestych profesor Witold Wierzbicki. W Polsce po II wojnie światowej badania w tym zakresie były prowadzone głównie w dwóch ośrodkach: w Politechnice Krakowskiej przez profesora Janusza Murzewskiego i Politechnice Wrocławskiej przez profesora Zbigniewa Kowala.

Zagadnienia niezawodności i probabilistycznej analizy konstrukcji są nowymi przedmiotami na wydziałach budowlanych uczelni technicznych. W Politechnice Wrocławskiej przedmiot ten wprowadził w latach siedemdziesiątych profesor Zbigniew Kowal i zasadnicze treści tej pracy są w duchu prezentowanej przez Niego szkoły naukowej.

Praca zawiera syntezę zagadnień związanych z bezpieczeństwem i probabilistyczną analizą konstrukcji budowlanych. Powstała ona jako istotne rozwinięcie, uzupełnienie i przeredagowanie monografii dydaktycznej pt. *Podstawy probabilistycznej analizy bezpieczeństwa konstrukcji*, wydanej w 1996 r. w Oficynie Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Celem książki jest przybliżenie zagadnień probabilistycznej analizy konstrukcji budowlanych jako obiektywnej informacji o niezawodności budowli oraz sposobu kalibrowania „zapasów” bezpieczeństwa w ujęciu stosowanych norm projektowania według stanów granicznych.

Zagadnienia bezpieczeństwa i niezawodności konstrukcji są analizowane za pomocą zaawansowanych metod z teorii rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, co stanowi często barierę poznawczą problemu dla Czytelnika o słab-

szym przygotowaniu matematycznym. Jednocześnie istnieje zapotrzebowanie na uwzględnienie probabilistycznego podejścia do projektowania budowli (zwłaszcza że obecnie obowiązujące normy projektowania są oparte na metodzie półprobabilistycznej). W prezentowanej pracy zamieszczono podstawy probabilistycznej analizy konstrukcji, której głównym zadaniem jest wdrożenie „probabilistycznego myślenia” inżyniera w trakcie projektowania i realizacji konstrukcji budowlanych oraz przybliżenie trudnych zagadnień prognozowania i szacowania jakości, niezawodności i bezpieczeństwa konstrukcji. W celu ułatwienia opanowania i zobrazowania fizycznego sensu omawianych zagadnień podano wiele prostych przykładów obliczeniowych. Układ treści poszczególnych rozdziałów książki został tak dobrany, aby Czytelnik po opanowaniu wiadomości o podstawach omawianych zagadnień mógł indywidualnie rozwiązać analizowany przez siebie problem. Kolejne rozdziały stanowią samodzielne wykłady, których przyswojenie w miarę możliwości nie wymaga sięgania do innych źródłowych materiałów.

W rozdziale 1 podano podstawowe wzory statystyki matematycznej, na które powoływano się w dalszej części pracy. Takie podejście umożliwia Czytelnikowi zrozumienie omawianych treści bez konieczności studiowania literatury matematycznej.

W rozdziale 2 przedstawiono metody szacowania bezpieczeństwa konstrukcji (metody poziomu 1, poziomu 2 i poziomu 3). Podano matematyczne podstawy kalibrowania normowych współczynników bezpieczeństwa w półprobabilistycznej metodzie stanów granicznych.

Rozdział 3 poświęcono szacowaniu parametrów losowej nośności granicznej elementów: rozciąganych, zginanych, ściskanych oraz rozciąganych i zginanych, a także zginanych i ściskanych.

W rozdziale 4 omówiono podstawowe imperfekcje decydujące o losowej nośności elementu. Przeanalizowano losowe imperfekcje geometryczne przekroju, losowe odchyłki osi podłużnych elementów prętowych i płaszczyzn środkowych elementów powierzchniowych oraz losowe imperfekcje strukturalne materiałów.

W rozdziale 5 podano sposób szacowania bezpieczeństwa i nośności granicznej systemów konstrukcyjnych o niezawodnościowych modelach: szeregowym, równoległym i mieszanych. W rozdziale tym ponadto omówiono zagadnienia ścieżek równowagi statycznej i nośności granicznej przekrojów prętów, węzłów i prętowych systemów konstrukcyjnych.

# 1. Wstęp do probabilistycznej analizy konstrukcji

## 1.1. Wprowadzenie

Deterministyczna analiza właściwości obiektu, konstrukcji, elementu polega, ogólnie biorąc, na analizie jednego obiektu, konstrukcji lub elementu. O tak ustalonej właściwości można mówić jak o przypisanej tylko temu analizowanemu obiektowi, konstrukcji czy elementowi. Nie ma zaś podstaw do wnioskowania o innych obiektach, konstrukcjach czy elementach, gdyż te charakteryzują się innymi właściwościami.

Probabilistyczna analiza właściwości konstrukcji zajmuje się metodami wnioskowania o całej zbiorowości (populacji generalnej) na podstawie statystycznych badań cech pewnej części populacji (próby, próbki) obiektów realizowanych według takich samych projektów, z takich samych materiałów, spełniających tę samą funkcję.

Badanie statystyczne, np. bezpieczeństwa konstrukcji, polega na ewidencjonowaniu katastrof, awarii i innych niebezpiecznych stanów budowli i stanowi jej ocenę *a posteriori* (po skończeniu okresu eksploatacji). W projektowaniu konstrukcji budowlanych ma się do czynienia z podejściem probabilistycznym, polegającym na przewidywaniu prawdopodobieństwa *a priori* — na podstawie znajomości mechaniki budowli, parametrów losowych właściwości materiałów i obciążeń. Probabilistyczna analiza konstrukcji dotyczy prognozy właściwości, natomiast statystyczna analiza konstrukcji dotyczy zbadanych parametrów obiektów budowlanych.

W celu uzyskania obiektywnych informacji o właściwościach obiektu (budowli, elementu konstrukcyjnego, materiałów budowlanych) należy zaplanować eksperyment. Po sprecyzowaniu celu badań należy określić metodologię badań, ustalić, które obiekty badać, jakie wykonać obserwacje i pomiary na tych obiektach oraz jak uzyskane informacje przetworzyć, aby osiągnąć zamierzony cel. Populacją generalną określa się zbiór obiektów mających przynajmniej jedną właściwość wspólną dla wszystkich jego elementów, kwalifikującą je do tego zbioru oraz przynajmniej jedną właściwość, ze względu na którą elementy tego zbioru mogą się różnić między sobą. Populacja generalna jest przedmiotem badania statystycznego. Przystępując do badań statystycznych, należy zdawać sobie sprawę z tego, jak liczna jest populacja generalna, której badania mają dotyczyć, oraz jakie parametry ją charakteryzują.

Elementy populacji nazywa się jednostkami populacji. Każda jednostka populacji ma właściwości nazywane cechami, które ją charakteryzują w określonym przedziale czasu. Cechy można podzielić na ilościowe (mieralne), wyrażające się liczbą i jednostką miary, oraz jakościowe (niemieralne).

Jednostka populacji ma wiele właściwości wspólnych dla wszystkich jednostek należących do danej populacji, ale ma też właściwości, które różnią między sobą jednostki należące do tej samej populacji. W im mniejszym stopniu występują właściwości drugiego typu, tym populacja jest bardziej jednorodna. Gdyby nie występowały one w ogóle, wówczas wyczerpującą informację o populacji można uzyskać na podstawie poznania właściwości jednej, dowolnej jednostki (takie podejście stanowi podstawę ujęcia deterministycznego). W praktyce występuje jednak najczęściej sytuacja pośrednia i w konsekwencji istnieje możliwość wnioskowania o całej populacji na podstawie znajomości tylko określonej części tej populacji, którą nazywa się populacją próbną (krótko: próbą lub próbką). Na podstawie analizy właściwości próby można wyciągnąć wnioski dotyczące całej populacji, którą w tej sytuacji nazywa się populacją ogólną lub generalną.

W budownictwie często wykonuje się badania atestacyjne właściwości materiałów lub elementów budowlanych, realizowanych na skończonej liczbie jednostek wybranych z populacji generalnej. Takie badania statystyczne wykonują np. producenci materiałów budowlanych (np. wykonuje się badania właściwości stali w hucie).

Badania populacji, obejmujące wszystkie jednostki, nazywa się całkowitymi lub wyczerpującymi i w praktyce inżynierskiej występują rzadko. Badania częściowe obejmują tylko wybrane do próby jednostki populacji, co ma wiele zalet, takich jak niższe koszty oraz krótszy czas badań. Badania te nie mogą zapewnić takiej dokładności jak badania całkowite, jednak można zaplanować eksperyment tak, aby ryzyko błędnej opinii, opartej na badaniach częściowych, nie przekroczyło z góry dopuszczalnego ryzyka. Ponadto badania całkowite populacji niekiedy traciłyby sens, np. niszczące badania nośności prowadzące do bezużytecznego stanu ustroju.

Należy jednak podkreślić, iż wyraźnie trzeba odróżnić informacje o cechach jednostki w populacji od wniosków dotyczących całej populacji. Statystyka matematyczna jest podstawą metod wnioskowania o właściwościach wszystkich obiektów populacji ogólnej na podstawie znajomości poznanych właściwości obiektów należących do zbioru próby. Metody statystyki matematycznej podają pewne reguły, których należy przestrzegać, aby uniknąć formułowania na podstawie badań statystycznych wniosków błędnych lub mało przydatnych.

## 1.2. Próba losowa

Wyodrębniona do badań część populacji ogólnej, nazwana próbą, powinna przede wszystkim być reprezentatywna. Cechy ilościowe czy jakościowe próby nie powinny znacznie odbiegać od częstości występowania tych cech w populacji ogólnej. Aby zapewnić reprezentatywność próby, należy pobierać ją z populacji generalnej w sposób losowy. Znaczy to, że dobór jej z populacji generalnej powinien odbywać się drogą losowania, by wyeliminować udział czynnika subiektywnego (przypadek decyduje o kwalifikacji do próby).

Przeciwnieństwem próby reprezentatywnej są próby tendencyjne, celowe. Świadomie odstępuje się wówczas od wymagania reprezentatywności, gdy chodzi o znalezienie oceny ekstremalnej wartości cechy (np. w przypadku analizy stateczności bada się pręty ściskane z imperfekcjami geometrycznymi osi podłużnych).

Praktyczny sposób losowania jednostek do próby, uwzględniający możliwości techniczne, koszt i efektywność uzyskiwanych wyników nosi nazwę schematu losowania próby. Różnymi schematami losowań zajmuje się dział statystyki matematycznej, zwany metodą reprezentacyjną. Zajmuje się on głównie schematami losowań z populacji skończonej. W zdecydowanej większości analiz statystycznych problemów technicznych dokonuje się prób prostych doboru zbioru jednostek do badań, to znaczy uzyskanych w losowaniu niezależnym.

Drugim ważnym elementem w doborze próby jest jej liczebność, czyli liczba jednostek wytypowanych do badań. Najczęściej jest ona ograniczona względami ekonomicznymi, technicznymi czy też czasowymi. Liczebność próby zależy od żądanej dokładności oceny badanej cechy oraz od prawdopodobieństwa dopuszczalnego ryzyka nieobjęcia przez przedział ufności szacowanej wielkości. Należy ustalić kryterium, według którego dokonuje się losowanie próby. Jednym z takich kryteriów jest dokładność oceny wyrażona za pomocą z góry założonej dokładności oszacowania badanej wielkości. Wtedy liczebność próby zależy od żądanej dokładności oceny oraz od prawdopodobieństwa dopuszczalnego ryzyka nieobjęcia przez przedział ufności szacowanego parametru. Odpowiedź na tak postawione pytania dają metody statystyki matematycznej. Jeśli z góry założy się dokładność oszacowania, jakie na podstawie próby chce się uzyskać o populacji ogólnej, to można wyliczyć niezbędną liczebność próby.

### 1.3. Dyskretne zmienne losowe

Z badań eksperymentalnych cech jednostek wchodzących w skład próby otrzymuje się wielkości — zmienne losowe  $x(\omega)$ , wyrażające wartość badanej cechy. Zmienna losowa jest to funkcja określona na przestrzeni zdarzeń elementarnych, przyporządkowująca tym zdarzeniom wartości liczb rzeczywistych. Zbiór uzyskanych z badań danych liczbowych, dotyczących badanej cechy, jest podstawą dalszych czynności (analiz statystycznych).

Zagadnienie to będzie analizowane na przykładzie statystycznego badania właściwości granicy plastyczności stali (por. tabl. 1.1).

W statycznej próbie rozciągania  $n$  (35 sztuk) próbek stalowych otrzymano zmienne losowe granicy plastyczności stali  $f_{yi}$ , które zakwalifikowano do przedziałów klasowych (klas), o wartościach  $x_i$  (tabl. 1.1 oraz rys. 1.1). Klasa jest to każdy odcinek obszaru zmienności właściwości zawarty między dwoma sąsiednimi wyrazami skończonego ciągu wartości należących do tego obszaru. W badaniach granicy plastyczności stali, przedstawionych na rys. 1.1, przedziały klasowe od  $x_i$  do  $x_{i+1}$  (klasy) wynosiły

Tablica 1.1. Wyniki badań granicy plastyczności stali

| $n_i$<br>[szt.] | Granica plastyczności stali $f_y$ [MPa] |         |         |         |         |         |
|-----------------|-----------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                 | $x_1$                                   | $x_2$   | $x_3$   | $x_4$   | $x_5$   | $x_6$   |
|                 | 290–295                                 | 295–300 | 300–305 | 305–310 | 310–315 | 315–320 |
| 12              |                                         |         | 303,2   |         |         |         |
| 11              |                                         |         | 304,9   |         |         |         |
| 10              |                                         |         | 303,5   |         |         |         |
| 9               |                                         |         | 304,1   | 308,8   |         |         |
| 8               |                                         |         | 302,5   | 306,9   |         |         |
| 7               |                                         |         | 301,1   | 307,3   |         |         |
| 6               |                                         | 298,8   | 304,1   | 309,2   |         |         |
| 5               |                                         | 295,7   | 302,7   | 309,0   | 313,9   |         |
| 4               |                                         | 297,9   | 304,2   | 307,4   | 314,4   |         |
| 3               |                                         | 299,0   | 303,3   | 309,8   | 313,4   |         |
| 2               | 294,2                                   | 296,6   | 303,9   | 308,5   | 311,8   |         |
| 1               | 292,8                                   | 298,3   | 302,0   | 306,6   | 312,9   | 318,7   |

5 MPa. Liczebności badanych próbek stalowych o wartościach klasy granicy plastyczności stali  $x_i$  podano w pierwszej kolumnie tabl. 1.1.

Zmienne losowe  $x_i$  w postaci dyskretnej, których jest  $m$ , uszeregowano według rosnących wartości (szereg pozycyjny, statystyka pozycyjna)

$$x_1, x_2, \dots, x_m. \quad (1.1)$$

Liczbę pomiarów otrzymanych w badaniach zdarzeń o wartości  $x_i$  oznaczono przez

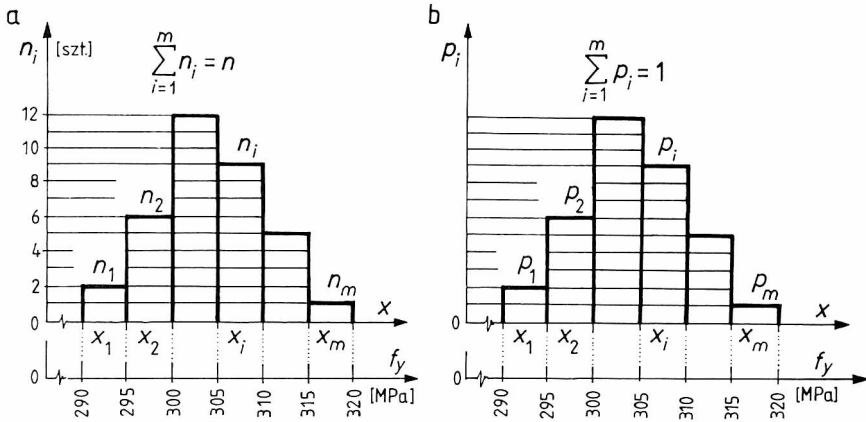
$$n_1, n_2, \dots, n_m. \quad (1.2)$$

Sumę liczebności badanej próby  $n$  opisuje więc wzór

$$n = \sum_{i=1}^m n_i. \quad (1.3)$$

Rozkład liczebności zbioru  $n_i$ , według tabl. 1.1, o wartościach  $x_i$  przedstawiono na rys. 1.1. Funkcja, która przyporządkowuje każdej wartości (klasie) badanej właściwości częstość występowania tych wartości (klas), nazywa się szeregiem rozdzielczym. Wykres na rys. 1.1a nazywa się histogramem i jest graficznym przedstawieniem szeregu rozdzielczego. Histogram sporządza się przez umieszczenie nad odpowiednią częścią osi liczbowej prostokątów, o podstawach równych przedziałom klasowym wartości od  $x_i$  do  $x_{i+1}$  i wysokościach proporcjonalnych do liczebności badanych klas (liczbowo lub w %).

Dyskretne wartości, uzyskane eksperymentalnie, umożliwiają scharakteryzowanie badanej właściwości losowej w postaci parametru próbki (statystyki) jako jednoznacznej funkcji wyników badania. Parametr próbki jako funkcja zmiennych losowych jest również zmienną losową. Parametrami próbki są m.in.: wartość średnia w próbce, wariancja w próbce, suma kwadratów wyników badania, rozstęp w próbce. W celu oszacowania parametrów próbki wyznacza się momenty.



Rys. 1.1. Wyniki badań statystycznych granicy plastyczności stali: a – histogram szeregu rozdzielczego, b – rozkład prawdopodobieństw

Moment w próbce rzędu  $k$  względem stałej  $c$  określa wzór

$$M_k(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - c)^k, \quad (1.4)$$

gdzie:

$n$  – liczebność próbki,

$x_i$  –  $i$ -ty wynik badania próbki ( $i$ -ta obserwacja).

Wartość średnia w próbce (nazwa zarezerwowana bez zastrzeżeń dla rozkładu normalnego [63]) jest momentem zerowym (dla  $c = 0$ ) rzędu pierwszego w próbce i określa przeciętną wielkość badanej zmiennej losowej  $x$ . W literaturze nazywany jest wartością przeciętną, średnią. W przypadku cechy mierzalnej wartość średnia jest liczbą wyrażającą cechę w odpowiedniej jednostce miary. Wartość cechy równą średniej może mieć jedna lub więcej jednostek w próbce, może też być to liczba, która nie przysługuje żadnej jednostce próby. Wartość średnią  $\bar{x}$  zmiennej losowej (będzie się ją oznaczać kreską nad literą określającą badaną cechę) oblicza się ze wzoru

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (n_i x_i). \quad (1.5)$$

Wartość średnią  $\bar{x}$  spełnia w odniesieniu do szeregu pozycyjnego (1.1) tę samą rolę, jaką spełnia środek masy dla układu mas skupionych w punktach prostej lub środek ciężkości przekroju (patrz rys. 1.4).

Moment centralny w próbce ( $M_k$ ) rzędu  $k$  jest obliczony względem stałej  $c$  równej wartości średniej  $\bar{x}$  w próbce. Wariancja w próbce  $s^2$  jest momentem centralnym rzędu drugiego w próbce.

Jedną z miar rozproszenia (rozrzutu) w rozkładzie zmiennej losowej badanej cechy testowanej próby jest odchylenie standardowe (nazwa zarezerwowana bez zastrzeżeń

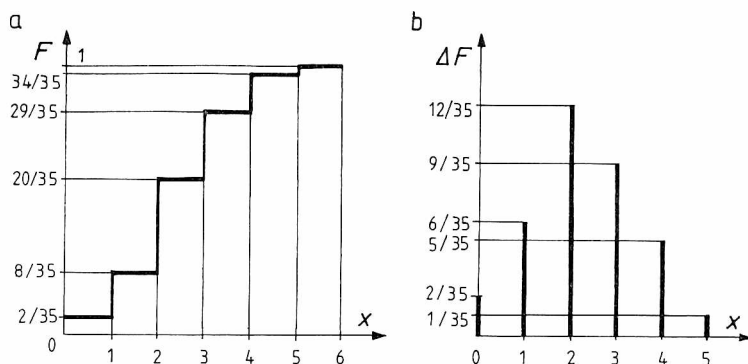
dla rozkładu normalnego [63]) lub charakterystyczne (dla innych rozkładów). Jest to parametr szeregu pozycyjnego (1.1) stanowiący charakterystykę rozproszenia, który informuje o tym „jak daleko” od punktu odpowiadającego przyjętej charakterystyce położenia (np. wartości średniej  $\bar{x}$ ) sięgają jeszcze punkty odpowiadające jednostkom próby. Odchylenie standardowe w próbce  $s$  jest to dodatnia wartość pierwiastka kwadratowego z wariancji w próbce. Będzie się je oznaczać literą  $s$  z indeksem u dołu, opisującym badaną wielkość i wyznacza się je ze wzoru

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m [n_i (x_i - \bar{x})^2]}. \quad (1.6)$$

Odchylenie standardowe badanej cechy jest liczbą wyrażającą właściwość cechy w odpowiedniej jednostce miary (tej samej, co wartość średnią). W realizacji rozwiązań technicznych zazwyczaj dąży się, aby rozrzut badanej cechy był jak najmniej, co wyraża się małym odchyleniem standardowym. Duże odchylenie standardowe świadczy o niejednorodności badanej cechy. W celu zobiektywizowania miary rozrzutu obserwacji w próbce oblicza się współczynnik zmienności  $v_x$  badanej cechy. Jest on stosunkiem odchylenia standardowego do wartości średniej i opisuje go wzór

$$v_s = \frac{s_x}{\bar{x}}. \quad (1.7)$$

Parametry  $\bar{x}$ ,  $s_x$  można wyznaczyć korzystając z kalkulatorów kieszonkowych do obliczeń inżynierskich. Dla zamieszczonych w tabl. 1.1 wyników pomiarów granicy plastyczności stali parametry statystyczne wynoszą:  $\bar{x} = 304,49$  MPa,  $s_x = 5,63$  MPa.



Rys. 1.2. Dystrybuanta empiryczna (a) oraz przyrosty dystrybuanty empirycznej (b)

Dystrybuanta empiryczna  $F(x)$  jest funkcją, która przyporządkowuje każdej wartości (klasie) badanej właściwości sumę częstości względnych odpowiadających wszystkim wartościom właściwości nie większym od tej wartości (górnej granicy klasy). Szereg pozycyjny (1.1) można przedstawić za pomocą dystrybuanty empirycznej  $F(x)$



definiowanej w następujący sposób:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_1, \\ \frac{i}{n} & \text{dla } x_i < x < x_{i+1}, \\ 1 & \text{dla } x_n < x. \end{cases} \quad (1.8)$$

Wykresem dystrybucyjnej empirycznej jest charakterystyczna linia schodkowa (krzywa kumulacyjna) pokazana na rys. 1.2a.

Znajomość dystrybucyjnej empirycznej umożliwia łatwe obliczenie, jaka część jednostek próby przypada na poszczególne przedziały  $(x_i - x_j)$ . Suma długości wszystkich odcinków reprezentujących skoki dystrybucyjnej (rys. 1.2b) równa się jedności.

Na podstawie wykonanych badań statystycznych, np. granicy plastyczności stali, można wnioskować, jaka jest szansa, iż w niezbadanej części populacji wyrobów stalowych wystąpi stal o granicy plastyczności  $x_i$ . Szansę takiego zdarzenia określa się jako prawdopodobieństwo.

Każdemu zdarzeniu losowemu odpowiada liczba  $p$  nazwana jego prawdopodobieństwem, spełniająca nierówność  $0 \leq p \leq 1$ . Prawdopodobieństwo  $p_i$  zdarzenia, iż w kolejnych badaniach otrzyma się pomiar cechy o wartości  $x_i$  (lub w zrealizowanym obiekcie wystąpi cecha o tej wartości), wynosi

$$p_i = \frac{n_i}{n}. \quad (1.9)$$

Rozkład prawdopodobieństwa  $p_i$  jest taki sam, jak rozkład liczebności klas  $n_i$ , co pokazano na rys. 1.1b, a więc rozkład właściwości w populacji odpowiada rozkładowi prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

Suma prawdopodobieństw  $p_i$  (całkowite pole pokazane na rys. 1.1b) wynosi 1.

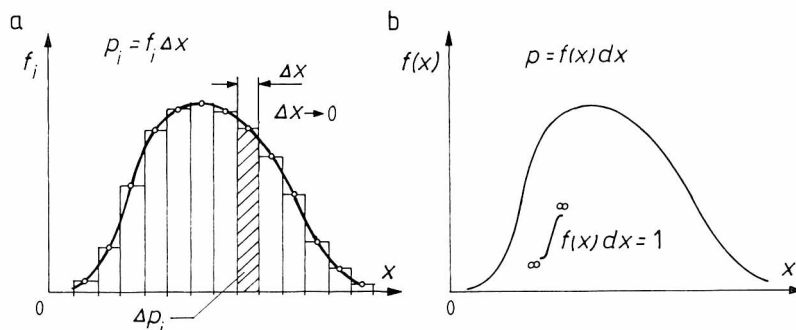
## 1.4. Ciągłe zmienne losowe

Gdy zmienna losowa  $x$  jest ciągłą, wówczas histogram (rys. 1.3a) zamienia się w funkcję ciągłą gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  (rys. 1.3b), krzywa kumulacyjna (rys. 1.2a) zaś w funkcję ciągłą dystrybucyjną  $F(x)$  (rys. 1.8b). Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa (rozkład prawdopodobieństwa) jest to funkcja określająca prawdopodobieństwo zdarzenia, polegające na tym, że zmienna losowa przyjmie określoną wartość  $x_i$  lub wartość należącą do przedziału  $(x_1, x_2)$ . Funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $p(x)$  zmiennej losowej (gęstość prawdopodobieństwa  $f(x)$ ) dla zmiennej losowej ciągłej wyraża zależność

$$p(x) = f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n_i}{n} \Delta x. \quad (1.10)$$

Jest to prawdopodobieństwo występowania wielkości  $x$  rozważanego przedziału w granicach  $\Delta x$ . Znaczenie funkcji gęstości prawdopodobieństwa można zilustrować

w następujący sposób: jeśli na osi liczbowej ustali się w dowolnym punkcie  $x$  dostatecznie mały przedział o długości  $\Delta x$ , wówczas prawdopodobieństwo, że zmienna losowa o funkcji gęstości  $f(x)$  przybierze wartość z tego przedziału jest w przybliżeniu równe iloczynowi  $f(x)\Delta x$ .

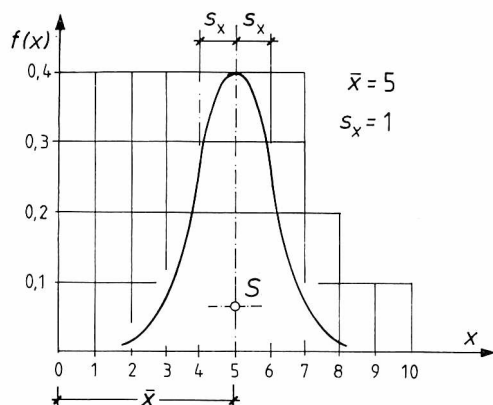


Rys. 1.3. Aproxymacja histogramu (a) oraz ciągła funkcja (b) rozkładu prawdopodobieństwa

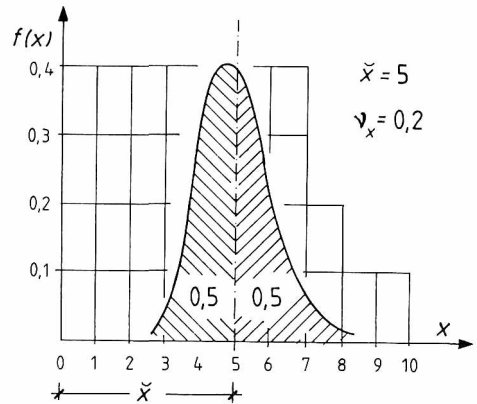
Dystrybuanta jest to funkcja  $F(x)$  określająca prawdopodobieństwo zdarzenia polegające na tym, że zmienna losowa przyjmie wartość mniejszą od ustalonej wartości rzeczywistej  $x_1$ . Jeśli funkcja gęstości  $f(x)$  jest ciągła w punkcie  $x$ , to jest ona w tym punkcie pochodną dystrybuanty  $F(x)$ .

Znanych jest wiele opisów funkcji gęstości rozkładów prawdopodobieństwa, które aproksymują szeroki wachlarz kształtów funkcji gęstości zmiennych losowych (przykładowe pokazano na rys. 1.4–1.6 i 1.12–1.14).

Na rys. 1.4 pokazano symetryczną krzywą rozkładu normalnego (Gaussa), którą opisują dwa parametry: wartość średnia  $\bar{x}$  i odchylenie standardowe  $s_x$ .



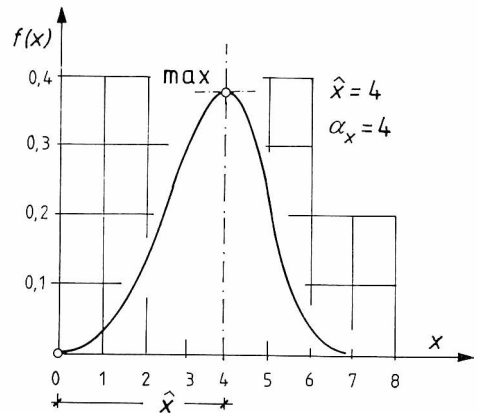
Rys. 1.4. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego



Rys. 1.5. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu logarytmo-normalnego

Na rys. 1.5 pokazano logarytmo-normalną krzywą rozkładu. Jest to rozkład niesymetryczny, który charakteryzuje mediana  $\tilde{x}$  oraz wskaźnik zmienności  $v_x$ . Medianą nazywa się wartość zmiennej losowej dzielącą ogólną liczebność na połowy. Jeśli zmienna losowa jest ciągła, to medianą jest wartość dzieląca wykres  $f(x)$  na dwie równe co do obszaru powierzchnie i spełniająca równość  $F(\tilde{x}) = 0,5$  ( $F(x)$  — dystrybuanta).

Moda (wartość modalna, dominanta) zmiennej losowej ciągłej  $x$  to taka wartość  $\hat{x}$  tej zmiennej, której odpowiada największa wartość funkcji gęstości  $f(x)$ . Moda zmiennej losowej nieciągłej  $x$  to taka wartość  $\hat{x}$  tej zmiennej, której odpowiada największe prawdopodobieństwo.



Rys. 1.6. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu ekstremalnego

Na rys. 1.6 przedstawiono krzywą ekstremalną rozkładu prawdopodobieństwa Weibulla. Parametrami opisującymi ten rozkład jest wartość równa w przybliżeniu wartości modalnej, odpowiadającej maksimum wykresu funkcji gęstości  $f(x)$  oraz współczynnik  $\alpha_x$  charakteryzujący zmienność (rozrzut) zmiennej losowej  $x$ .

W celu identyfikacji typu rozkładu badanej zmiennej losowej (tj. określenia kształtu funkcji dystrybuanty) korzysta się z nieparametrycznych testów istotności. Polegają one na wstępnym założeniu typu rozkładu i weryfikacji przyjętej krzywej hipotetycznej dla założonego poziomu dokładności opisu badanego zjawiska.

Parametrami probabilistycznymi rozkładów zmiennych losowych są stałe wielkości charakteryzujące funkcję tego rozkładu (np. dla rozkładu normalnego wartość oczekiwana  $m$  i odchylenie średnie zmiennej losowej  $\sigma$ ). W przypadku rozkładu normalnego zmiennej losowej, pojęciowo wartość oczekiwana  $m$  w rozkładzie odpowiada średniej  $\bar{x}$ , a odchylenie średnie zmiennej losowej  $\sigma$  odpowiada odchyleniu standardowemu  $s_x$ . Dlatego w dalszej części książki używać się będzie w przypadku rozkładu normalnego określeń:  $\bar{x}$  – wartość średnia i  $s_x$  – odchylenie standardowe. Parametry te dla ciągłej zmiennej losowej  $x$  o funkcji  $f(x)$  oblicza się ze wzorów

$$m = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x \, dx, \quad (1.11)$$

$$\sigma = s_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x - \bar{x})^2 \, dx}. \quad (1.12)$$

Tak więc znając funkcję rozkładu prawdopodobieństwa  $f(x)$ , można określić parametry statystyczne (statystyki), np.: wartość oczekiwaną (centralną), odchylenie standardowe zmiennej losowej  $x$ . Należy jednak zauważyć, że funkcja rozkładu prawdopodobieństwa  $f(x)$  nie jest zdeterminowana, gdy dysponuje się tylko parametrami w postaci wartości centralnej i odchylenia charakterystycznego. Zidentyfikowanie to jest możliwe, gdy dla badanej próbki z populacji można przyjąć rozkład normalny. Rozkład normalny jest powszechnie stosowany w wielu analizach statystycznych (szczegółowo omówiono ten rozkład w następnym punkcie).

Drugą grupę charakterystyk zmiennej losowej (oprócz momentów i parametrów określonych za pomocą momentów) stanowią parametry pozycyjne. Wśród nich ważną rolę w analizach probabilistycznych spełniają kwantyle zmiennej losowej.

Liczbę  $x_p$  nazywa się kwantylem  $p$ -tego rzędu ( $0 < p < 1$ ) zmiennej losowej  $x$ , która spełnia nierówność

$$\Pr \{x \leq x_p\} \geq p, \quad \Pr \{x \geq x_p\} \geq 1 - p \quad (1.13)$$

(Pr oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia). Tak więc kwantyl rzędu  $p$  jest to taka wartość zmiennej losowej, która nie jest przewyższona z prawdopodobieństwem  $p$ .

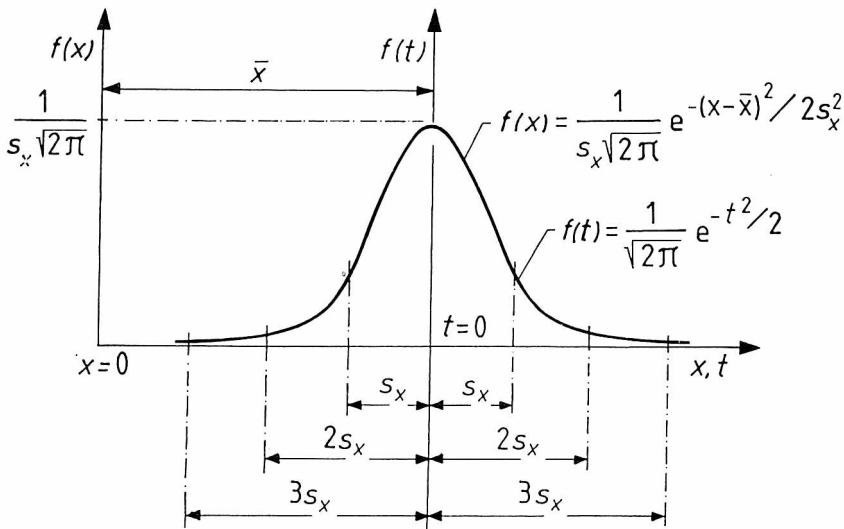
Mediana jest szczególnym przypadkiem parametru pozycyjnego, zwanego kwantylem rzędu  $p = 0,5$ . Kwantyle rzędu  $k/4$  ( $k = 1, 2, 3$ ) nazywa się kwartylami.

Gdy dystrybuenta  $F(x)$  jako całka rozkładu  $f(x)$  jest ciągła w punkcie  $x_p$ , wówczas kwantyl  $x_p$  jest pierwiastkiem równania

$$F(x_p) = p. \quad (1.14)$$

## 1.5. Rozkład normalny

Rozkład normalny (rys. 1.7) jest bez wątpienia najczęściej stosowany w zastosowaniach technicznych (w analizach statystycznych) i rachunku prawdopodobieństwa. Wiele zjawisk fizycznych, choć nie podlega ściśle rozkładowi normalnemu, można po odpowiedniej transformacji aproksymować za jego pomocą. Istotną cechą tego rozkładu jest właściwość, iż każda liniowa kombinacja niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych jest również zmienną losową o rozkładzie normalnym.



Rys. 1.7. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego  $N(\bar{x}, s_x)$  i  $N(0, 1)$

Funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego pokazano na rys. 1.7. Rozkład normalny o parametrach wartości średniej  $\bar{x}$  i odchyleniu standardowym  $s_x$  oznacza się  $N(\bar{x}, s_x)$ . Gęstość prawdopodobieństwa  $f(x)$  zmiennej losowej o rozkładzie normalnym  $N(\bar{x}, s_x)$  jest określona wzorem

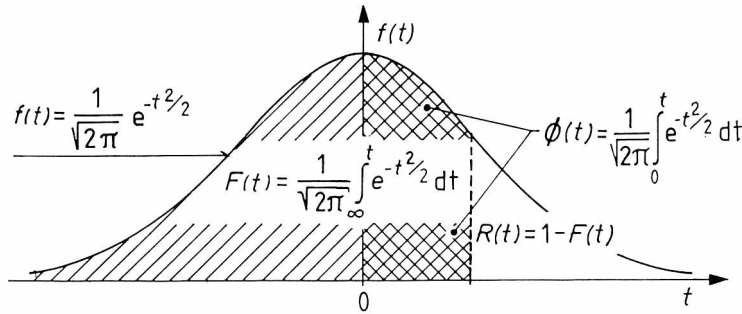
$$f(x) = \frac{1}{s_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x - \bar{x})^2 / 2s_x^2}, \quad (1.15)$$

gdzie:

$\bar{x}$  — wartość średnia,

$s_x$  — odchylenie standardowe.

Tablica 1.2. Wartości funkcji rozkładu normalnego



| <i>t</i> | <i>f(t)</i> | <i>F(t)</i> | <i>R(t)</i> | 2 <i>R(t)</i> |
|----------|-------------|-------------|-------------|---------------|
| 0,0      | 0,398 942   | 0,500 000   | 0,500 000   | 1,000 000     |
| 0,1      | 0,396 952   | 0,539 827   | 0,460 173   | 0,920 344     |
| 0,2      | 0,391 043   | 0,579 260   | 0,420 740   | 0,841 481     |
| 0,3      | 0,381 388   | 0,617 911   | 0,382 089   | 0,764 177     |
| 0,4      | 0,368 270   | 0,655 422   | 0,344 578   | 0,689 156     |
| 0,5      | 0,352 065   | 0,691 465   | 0,308 535   | 0,617 075     |
| 0,6      | 0,333 225   | 0,725 747   | 0,274 253   | 0,548 506     |
| 0,7      | 0,312 254   | 0,758 036   | 0,241 964   | 0,483 927     |
| 0,8      | 0,289 692   | 0,788 145   | 0,211 855   | 0,423 711     |
| 0,9      | 0,266 085   | 0,815 940   | 0,184 060   | 0,368 110     |
| 1,0      | 0,241 971   | 0,841 345   | 0,158 655   | 0,317 311     |
| 1,1      | 0,217 852   | 0,864 334   | 0,135 666   | 0,271 332     |
| 1,2      | 0,194 186   | 0,884 930   | 0,115 070   | 0,230 139     |
| 1,3      | 0,171 369   | 0,903 195   | 0,096 805   | 0,193 601     |
| 1,4      | 0,149 727   | 0,919 243   | 0,080 757   | 0,161 513     |
| 1,5      | 0,129 518   | 0,933 193   | 0,066 807   | 0,133 614     |
| 1,6      | 0,110 921   | 0,945 201   | 0,054 799   | 0,109 599     |
| 1,7      | 0,094 049   | 0,955 435   | 0,044 565   | 0,089 131     |
| 1,8      | 0,078 950   | 0,964 069   | 0,035 931   | 0,071 861     |
| 1,9      | 0,065 616   | 0,971 284   | 0,028 716   | 0,057 433     |
| 2,0      | 0,053 991   | 0,977 250   | 0,022 750   | 0,045 500     |
| 2,1      | 0,043 984   | 0,982 136   | 0,017 864   | 0,035 729     |
| 2,2      | 0,035 475   | 0,986 097   | 0,013 903   | 0,027 807     |
| 2,3      | 0,028 327   | 0,989 276   | 0,010 724   | 0,021 548     |
| 2,4      | 0,022 395   | 0,991 803   | 0,008 197   | 0,016 395     |
| 2,5      | 0,017 528   | 0,993 791   | 0,006 209   | 0,012 419     |
| 2,6      | 0,013 583   | 0,995 339   | 0,004 661   | 0,009 322     |
| 2,7      | 0,010 421   | 0,996 533   | 0,003 467   | 0,006 934     |
| 2,8      | 0,007 915   | 0,997 495   | 0,002 505   | 0,005 110     |
| 2,9      | 0,005 952   | 0,998 134   | 0,001 866   | 0,003 732     |
| 3,0      | 0,004 432   | 0,998 650   | 0,001 350   | 0,002 700     |
| 3,5      | 0,000 873   | 0,999 768   | 0,000 232   | 0,000 465     |
| 4,0      | 0,000 134   | 0,999 968   | 0,000 032   | 0,000 063     |
| 4,5      | 0,000 016   | 0,999 996   | 0,000 004   | 0,000 008     |
| 5,0      | 0,000 001 5 | 0,999 999 7 | 0,000 000 3 | 0,000 000 6   |

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że  $x < x_1$  otrzymuje się przez scałkowanie rozkładu normalnego w granicach od  $-\infty$  do  $x_1$

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \frac{1}{s_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-(x-\bar{x})^2/2s_x^2} dx. \quad (1.16)$$

Rozważana funkcja rozkładu normalnego  $N(\bar{x}, s_x)$  nie jest elementarna, więc całkowanie nie jest proste. Dlatego też korzysta się z tablic [23, 32, 69] rozkładu normalnego, gdzie podane są wartości funkcji przydatne w obliczeniach technicznych. W takim przypadku należy dokonać standaryzacji zmiennej losowej.

Standaryzacja rozkładu normalnego jest transformacją rozkładu  $N(\bar{x}, s_x)$  na rozkład normalny standaryzowany  $N(0, 1)$  i polega na przekształceniu zmiennej losowej  $x$  o wartości oczekiwanej  $\bar{x}$  oraz odchyleniu standardowym  $s_x$  do zmiennej losowej  $t$  o wartości oczekiwanej  $\bar{t} = 0$  oraz odchyleniu standardowym  $s_t = 1$ . Zmiana ta odbywa się poprzez odjęcie wartości średniej  $\bar{x}$  od  $x$  i podzielenie przez odchylenie standardowe  $s_x$ . Przekształcenie to (patrz rys. 1.7 i 1.8a) należy interpretować jako zmianę punktu zerowego zmiennej losowej (przez odjęcie wartości średniej) i zmianę jednostki skali (w wyniku podzielenia przez odchylenie standardowe).

Gdy zmienna losowa  $x$  ma rozkład  $N(\bar{x}, s_x)$ , wówczas odpowiadająca jej standaryzowana zmienna losowa  $t$  ma rozkład  $N(0, 1)$ .

Gęstość prawdopodobieństwa dla standaryzowanej zmiennej losowej

$$t = \frac{x - \bar{x}}{s_x}, \quad (1.17)$$

wyznacza się ze wzoru

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}. \quad (1.18)$$

Dystrybuenta  $F(t)$  rozkładu normalnego standaryzowanego  $N(0, 1)$ , dla  $\bar{t} = 0$  i  $s_t = 1$ , wynosi

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-t^2/2} dt. \quad (1.19)$$

lub w postaci równoważnej

$$F(t) = 0,5 + \phi(t), \quad (1.20)$$

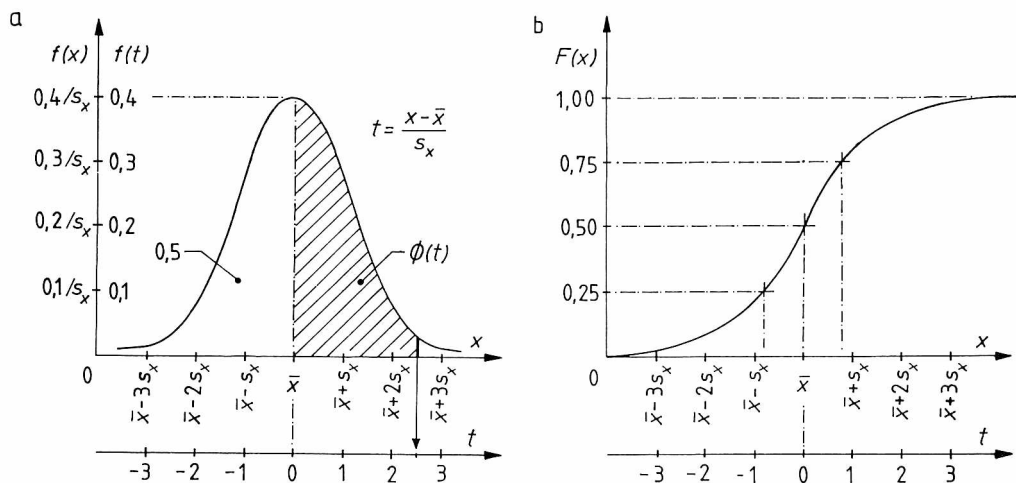
gdzie  $\phi(t)$  jest całką błędów (nazywaną funkcją Laplace'a), opisaną wzorem

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt. \quad (1.21)$$

Funkcja  $\phi(t)$  jest równa polu ograniczonemu przez oś odciętych i krzywą  $f(t)$  w przedziale od 0 do  $t$  (patrz rysunek w tabl. 1.2). Dzięki tak prostej transformacji (standaryzacji) dla wielu rozkładów zmiennych losowych (w tym dla rozkładu normalnego) tablice wartości dystrybuenty czy też gęstości sporządza się tylko dla

rozkładu zmiennej losowej standaryzowanej. W literaturze dotyczącej statystyki matematycznej jest dostępnych wiele tablic z wyznaczonymi wartościami funkcji  $\phi(t)$  różniących się dokładnością, z jaką podane są argumenty i wartości funkcji. Tablice takie umożliwiają badanie właściwości zmiennych losowych bez konieczności obliczania całki (1.16).

W tabl. 1.2 podano wartości funkcji  $F(t)$  wyznaczone według zależności (1.19), w przedziale  $0 \leq t \leq 5$ .



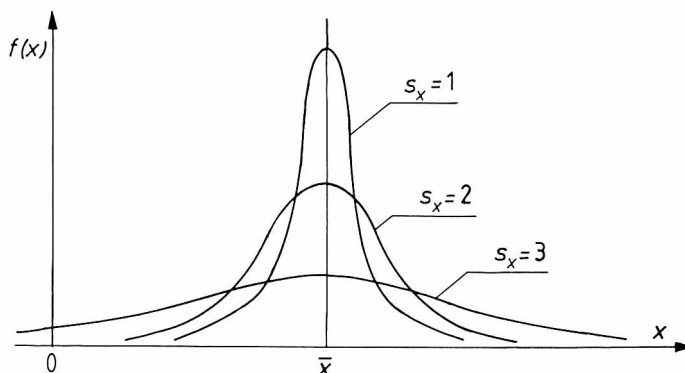
Rys. 1.8. Gęstość prawdopodobieństwa (a) i dystrybuanta (b) standaryzowanego rozkładu normalnego

Na rys. 1.8 pokazano wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  i  $f(t)$  oraz dystrybuanty  $F(x)$  i  $F(t)$  standaryzowanego rozkładu normalnego.

Wzory opisujące funkcje gęstości prawdopodobieństwa i parametry statystyczne dla innych rozkładów niż normalny (logarytmiczno-normalnego, Gumbela, Weibulla), tj. wartości centralne i odchylenia charakterystyczne, podano w tabl. 1.4. Na rys. 1.12–1.14 pokazano wykresy asymptotycznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa Gumbela, Frécheta i Weibulla.

Wpływ parametru  $s_x$  — odchylenia standardowego na gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego ilustruje rys. 1.9. Badane cechy jednostek populacji (na przykład wytrzymałość materiału, nośność elementu) charakteryzujące się dużym rozrzutem mają „spłaszczone” rozkłady prawdopodobieństwa. W przypadku zaś małej wartości odchylenia standardowego  $s_x$  rozkłady gęstości prawdopodobieństwa są „strome”. Chcąc porównać rozrzut badanych cech, umieszcza się rozkłady na wspólnej osi. Jeśli zmieniać się będzie tylko wartość  $\bar{x}$ , to krzywa będąca wykresem prawdopodobieństwa będzie przesuwać się równolegle wzdłuż osi odciętych, nie zmieniając kształtu.





Rys. 1.9. Wpływ odchylenia standardowego na gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego

## 1.6. Kombinacja niezależnych zmiennych losowych normalnych

Modelem populacji ogólnej badanej ze względu na dwie lub więcej cech jest zmienna losowa wielowymiarowa (dwuwymiarową funkcję zmienną losową pokazano na rys. 3.16). Między zmiennymi losowymi może zachodzić zależność stochastyczna polegająca na tym, że jedna ze zmiennych losowych reaguje zmianą swego rozkładu na zmianę drugiej zmiennej. Zmiany rozkładu mogą polegać na zmianie kształtu funkcji rozkładu lub na zmianie wartości jej parametrów. Podstawowymi pojęciami służącymi do analizy zależności między zmiennymi losowymi są korelacja i regresja. Korelacja wyraża stopień zależności między zmiennymi losowymi (*siłę* zależności), regresja jest funkcyjnym odzwierciedleniem tej zależności (*jej kształtem*).

Korelacja zmiennych losowych jest to taka zależność stochastyczna, przy której jedna ze zmiennych reaguje zmianą swej wartości oczekiwanej na zmianę drugiej. Miarą nieliniowej zależności korelacyjnej między zmiennymi losowymi jest stosunek korelacyjny [116]. Korelacja liniowa to zależność, przy której stałym przyrostom wartości jednej zmiennej losowej towarzyszą stałe przyrosty (dodatnie lub ujemne) wartości oczekiwanych drugiej zmiennej. Miarą liniowej korelacji zmiennych losowych  $x, y$  jest współczynnik korelacji liniowej  $\varrho_{xy}$ . Współczynnik korelacji liniowej próby  $\varrho_{xy}$  na podstawie badań z  $n$  par wyników

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n), \quad (1.22)$$

oblicza się według wzoru

$$\varrho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (1.23)$$

gdzie:

$x_i, y_i$  —  $i$ -te wyniki badania próby,

$\bar{x}, \bar{y}$  — wartości średnie zmiennych losowych.

Współczynnik korelacji liniowej  $\varrho_{xy}$  przyjmuje wartości z przedziału domkniętego

$$-1 \leq \varrho_{xy} \leq 1. \quad (1.24)$$

Jeśli stałym dodatnim (ujemnym) przyrostom wartości jednej ze zmiennych towarzyszą stałe dodatnie (ujemne) przyrosty wartości oczekiwanej drugiej zmiennej, to zmienne te są skorelowane dodatnio (ujemnie). Gdy współczynnik korelacji  $\varrho_{xy} = -1$  lub  $\varrho_{xy} = 1$ , wtedy między zmiennymi losowymi  $x$  i  $y$  istnieje ścisła zależność w postaci funkcji liniowej. Jeśli współczynnik korelacji  $\varrho_{xy} = 0$ , to między zmiennymi nie zachodzi korelacja liniowa (są nieskorelowane). Im współczynnik korelacji  $|\varrho_{xy}|$  jest bliższy 1, tym korelacja jest mocniejsza. Należy jednak pamiętać, że pojęcie korelacji różni się zarówno od związku przyczynowego, jak i od pojęcia zależności stochastycznej między zmiennymi losowymi. Zmienne niezależne w sensie probabilistycznym są zawsze nieskorelowane, natomiast zmienne nieskorelowane nie muszą być niezależne (chyba że ich rozkład dwuwymiarowy jest normalny [32]).

Rozpatruje się zmienne losowe  $x(\omega)$  oraz  $y(\omega)$  o rozkładach normalnych, które są probabilistycznie niezależne. Parametrem  $\omega$  będzie się oznaczać losowy charakter analizowanej cechy.

Jedna z istotnych właściwości rozkładu normalnego polega na tym, iż każda liniowa kombinacja oraz suma i różnica dwóch (a w konsekwencji dowolnej skończonej liczby) niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych ma również rozkład normalny [23]. Mówi się, że rozkład normalny jest stabilny względem dodawania (odejmowania) zmiennych losowych, to znaczy, iż rozkład sumy (różnicy) zmiennych losowych pozostaje normalny, lecz o innych parametrach.

Dwuskładnikowa suma lub różnica niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych  $x(\omega)$  (o parametrach  $\bar{x}$  i  $s_x$ ) oraz  $y(\omega)$  (o parametrach  $\bar{y}$ ,  $s_y$ ) daje w rezultacie nową zmienną losową  $z(\omega)$ , o rozkładzie normalnym i parametrach wartości średniej  $\bar{z}$  i odchylenia standardowego  $s_z$ .

Parametry zmiennej losowej  $z(\omega)$  sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych  $x(\omega)$  i  $y(\omega)$  o rozkładach normalnych opisują wzory

$$z(\omega) = x(\omega) + y(\omega), \quad (1.25)$$

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}, \quad (1.26)$$

$$s_z = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}, \quad (1.27)$$

$$v_z = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\bar{x} + \bar{y}}. \quad (1.28)$$

Parametry zmiennej losowej  $z(\omega)$  różnicy dwóch niezależnych zmiennych losowych  $x(\omega)$  i  $y(\omega)$  o rozkładach normalnych opisują wzory

$$z(\omega) = x(\omega) - y(\omega), \quad (1.29)$$

$$\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}, \quad (1.30)$$

$$s_z = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}, \quad (1.31)$$

$$v_z = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\bar{x} - \bar{y}}. \quad (1.32)$$

Należy zauważyć, iż odchylenie standardowe  $s_z$  zmiennej losowej  $z(\omega)$ , niezależnie, czy dotyczy to sumowania, czy też odejmowania, jest zawsze większe od odchyżeń składowych  $s_x$  i  $s_y$ .

W przypadku iloczynu lub ilorazu zmiennych losowych  $x(\omega)$  oraz  $y(\omega)$ , o rozkładach normalnych nowa zmienna losowa  $z(\omega)$  ma rozkład niesymetryczny. W technicznych obliczeniach możliwa jest aproksymacja iloczynu oraz ilorazu zmiennych losowych o rozkładach normalnych również rozkładem normalnym [23], [27] lub wzięcie pod uwagę aproksymacji innym rozkładem.

Jeśli przyjmie się aproksymację za pomocą rozkładu normalnego iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych  $x(\omega)$  i  $y(\omega)$  o rozkładach normalnych, to jego parametry wyznacza się ze wzorów

$$z(\omega) = x(\omega) y(\omega), \quad (1.33)$$

$$\bar{z} = \bar{x} \bar{y}, \quad (1.34)$$

$$s_z = \sqrt{(\bar{x})^2 s_y^2 + s_x^2 s_y^2 + (\bar{y})^2 s_x^2}, \quad (1.35)$$

$$v_z = \sqrt{v_x^2 + v_x^2 v_y^2 + v_y^2}, \quad (1.36)$$

gdzie:

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}, \quad (1.37)$$

$$v_y = \frac{s_y}{\bar{y}}. \quad (1.38)$$

Przyjmując podobne założenie jak w przypadku iloczynu parametry ilorazu dwóch niezależnych zmiennych losowych  $x(\omega)$  i  $y(\omega)$  wynoszą

$$z(\omega) = \frac{x(\omega)}{y(\omega)}, \quad (1.39)$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \quad (1.40)$$

$$s_z = \frac{1}{\bar{y}} \sqrt{\frac{(\bar{x})^2 s_y^2 + s_x^2 (\bar{y})^2}{(\bar{y})^2 + s_y^2}}, \quad (1.41)$$

$$v_z = \sqrt{\frac{v_x^2 + v_y^2}{1 + v_y^2}}, \quad (1.42)$$

gdzie  $v_x$  i  $v_y$  według (1.37) i (1.38).

Należy nadmienić, że w przypadku iloczynu oraz ilorazu zmiennych losowych  $x(\omega)$  i  $y(\omega)$  należy w zasadzie rozważyć zastosowanie lepszych aproksymacji  $z(\omega)$  na przykład za pomocą rozkładów logarytmiczno-normalnych. Rozkłady logarytmiczno-normalne są stabilne względem mnożenia i dzielenia [63].

W ogólnym przypadku parametry funkcji wielu zmiennych losowych o rozkładach normalnych można oszacować [23, 27] za pomocą aproksymacyjnych

wzorów

$$z(\omega) = f[x_1(\omega), x_2(\omega), \dots, x_m(\omega)], \quad (1.43)$$

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m), \quad (1.44)$$

$$s_z \approx \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s_{x_i}^2}. \quad (1.45)$$

Z analizy wzorów (1.27), (1.31), (1.35), (1.41) i (1.45) wynika, iż odchylenie standardowe  $s_z$  zmiennej losowej  $z(\omega)$  jest zawsze większe od odchyleń składowych zmiennych losowych  $s_x$  i  $s_y$ .

Szacowania wartości obliczeniowych analizowanych wielkości  $x_0$ , o parametrach  $\bar{x}$ ,  $s_x$  wyznacza się jako kwantyle dla argumentu  $t$  rozkładu ze wzoru

$$x_0 = \bar{x} \pm t s_x. \quad (1.46)$$

Argument  $t$  rozkładu przyjmuje się w zależności od założonego prawdopodobieństwa ryzyka i dokładności oceny oszacowania badanej wielkości. Żądana dokładność oszacowania analizowanego parametru ma związek z liczebnością próby  $n$ .

Eurokod 3 [92] proponuje w przypadku doświadczalnego wyznaczania nośności charakterystycznej  $x_k$  konstrukcji stosować wzory

$$x_k = \bar{x} - t s_{xe}, \quad (1.47)$$

gdzie:

$$s_{xe} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1.48)$$

w których

$n$  — liczebność próby,

$x_i$  —  $i$ -ty wynik badania próbki ( $i$ -ta obserwacja),

$\bar{x}$  — wartość średnia próby.

Argument rozkładu  $t$  we wzorze (1.47) należy przyjmować według tabl. 1.3 w zależności od liczebności próby  $n$ .

Tablica 1.3. Wartości argumentu rozkładu  $t$  w zależności od liczebności próby  $n$

| $n$ | 4    | 5    | 6    | 8    | 10   | 20   | 30   | $\infty$ |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| $t$ | 2,63 | 2,33 | 2,18 | 2,00 | 1,92 | 1,76 | 1,73 | 1,64     |

### Przykład 1.1

Aproksymować za pomocą rozkładu normalnego parametry prostokątnego pola przekroju poprzecznego belki drewnianej  $\bar{A}$  i  $s_A$ . Z badań statystycznych wymiarów poprzecznych belek drewnianych otrzymano następujące parametry losowej wysokości:  $\bar{h} = 100$  mm i  $s_h = 3$  mm oraz losowej szerokości:  $\bar{b} = 60$  mm i  $s_b = 2$  mm (założono, iż zmienne losowe  $h(\omega)$  i  $b(\omega)$  mają rozkład normalny).

Średnie pole przekroju poprzecznego belki obliczone ze wzoru (1.34) i jego odchylenie standardowe obliczone ze wzoru (1.35) wynoszą

$$\bar{A} = \bar{h} \cdot \bar{b} = 10,0 \cdot 6,0 = 60 \text{ cm}^2,$$

$$s_A = \sqrt{(\bar{h})^2 s_b^2 + s_h^2 \bar{b}^2 + (\bar{b})^2 s_h^2} = \sqrt{10^2 \cdot 0,2^2 + 0,2^2 \cdot 0,3^2 + 6^2 \cdot 0,3^2} = 2,69 \text{ cm}^2.$$

W analizowanym przykładzie współczynniki zmienności (1.7) wysokości, szerokości i pola przekroju poprzecznego belki wynoszą

$$v_h = s_h/\bar{h} = 3/100 = 0,03,$$

$$v_b = s_b/\bar{b} = 2/60 = 0,033,$$

$$v_A = s_A/\bar{A} = 2,69/60 = 0,0448.$$

Tak więc współczynnik zmienności pola przekroju poprzecznego belki  $v_A > (v_h, v_b)$ .

### Przykład 1.2

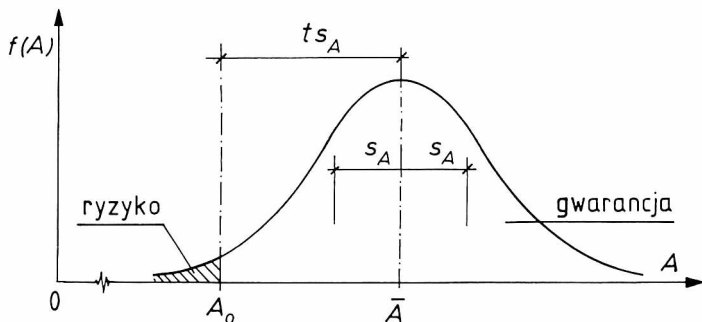
Dla danych z przykładu 1.1 należy wyznaczyć obliczeniowe pole przekroju poprzecznego  $A_0$ , aby prawdopodobieństwo wystąpienia przekroju mniejszego niż  $A_0$  nie przekraczało 0,01 (bezpieczeństwo 0,99).

Z tablic rozkładu normalnego (tabl. 1.2) odczytano, że wartość dystrybucyjnej 0,99 występuje dla  $t \cong 2,3$ . Kwantyln  $A_0$  wyznaczony ze wzoru (1.46) wynosi

$$A_0 = \bar{A} - t s_A = 60,0 - 2,3 \cdot 2,69 = 53,813 \text{ cm}^2.$$

Tak więc, aby prawdopodobieństwo wystąpienia mniejszego przekroju poprzecznego analizowanej belki nie przekroczyło 1%, należy przyjąć do obliczeń  $A_0 = 53,813 \text{ cm}^2$ , to jest pole przekroju mniejsze od wartości średniej o 10,3%.

Graficzną ilustrację przykładu 1.2 pokazano na rys. 1.10.



Rys. 1.10. Graficzna ilustracja przykładu 1.2

**Przykład 1.3**

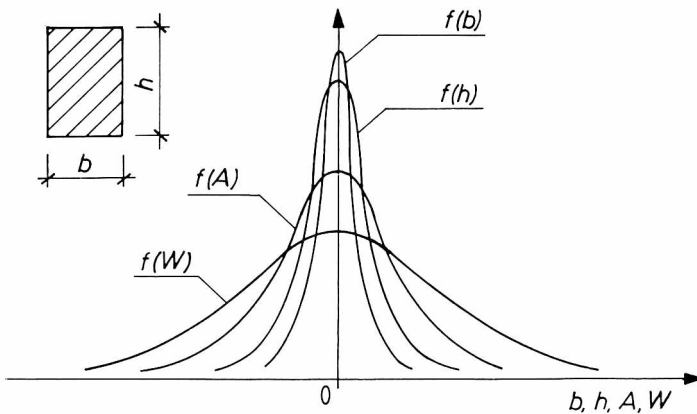
Wyznaczyć parametry wskaźnika zginania  $\bar{W}$  i  $s_W$  belki o przekroju prostokątnym, o losowych parametrach wysokości i szerokości podanych w przykładzie 1.1.

Średni wskaźnik zginania oraz odchylenie standardowe wskaźnika zginania przekroju prostokątnego wyznaczone wg (1.44) i (1.45) wynoszą

$$\bar{W} = \frac{1}{6} \bar{b} \cdot (\bar{h})^2 = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 10^2 = 100 \text{ cm}^3,$$

$$s_W = \sqrt{\frac{1}{36} [(\bar{h})^4 s_b^2 + 4(\bar{b})^2 (\bar{h})^2 s_h^2]} = \sqrt{\frac{1}{36} (10^4 \cdot 0,2^2 + 4 \cdot 6^2 \cdot 10^2 \cdot 0,3^2)} = 6,86 \text{ cm}^3.$$

Należy zauważyć, że współczynniki zmienności pomierzonych parametrów geometrycznych przekroju poprzecznego belek wynosiły  $v_h = 0,03$ ,  $v_b = 0,033$ , a wskaźnika zginania przekroju –  $v_W = 0,0686$ .



Rys. 1.11. Graficzna ilustracja przykładów 1.1, 1.2 i 1.3

Na rys. 1.11 pokazano funkcje rozkładu  $f(h)$ ,  $f(b)$ ,  $f(A)$  i  $f(W)$ , które stanowią graficzną ilustrację analizowanych przykładów.

Przykłady obliczania ilorazu zmiennych losowych podano w rozdziale 3.5.

## 1.7. Estymatory zmiennych losowych

Teoria estymacji jest działem statystyki matematycznej poświęconej zagadnieniom szacowania (estymacji, oceny) nieznanym parametrów (np. wartości centralnej) badanej populacji generalnej, estymator zaś jest funkcją służącą do oceny (estymowania)

Tablica 1.4. Parametry zmiennej losowej rozkładów  $N$ ,  $L$ ,  $G$  i  $W$  [63]

| Typ rozkładu<br>prawdopodobieństw                    | Parametry rozkładu                                     |                                                                       |                                                      | Gęstość prawdopodobieństwa<br>$f(x) = dF(x)/dx$                                            | Estymatory wartości centralnej<br>( $c = \bar{x}, \tilde{x}, \hat{x}, \check{x}$ )                   |
|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                      | Wartość<br>centralna<br>(średnia) <sup>1)</sup><br>$c$ | Odchylenie<br>charakterystyczne<br>(standardowe) <sup>1)</sup><br>$d$ | Współczynnik<br>zmienności <sup>1)</sup><br>$\delta$ |                                                                                            |                                                                                                      |
| $N$<br>Gausa<br>(normalny)                           | $\bar{x}$                                              | $s_x$                                                                 | $v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}$                          | $\frac{1}{s_x \sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-\bar{x})^2}{2s_x^2}$                             | $\bar{x} \cong \sum_{i=1}^n x_i$                                                                     |
| $L$<br>log-normalny <sup>2)</sup><br>(logarytmiczny) | $\check{x}$                                            | $\check{x} v_x$                                                       | $v_x$                                                | $\frac{1}{\sqrt{2\pi} v_x x} \exp \frac{-\ln^2(x/\check{x})}{2 v_x}$                       | $\check{x} \cong \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$ |
| $G$<br>Gumbela<br>(I rodzaju – max)                  | $\tilde{x}$                                            | $u_x$                                                                 | $u_x/\tilde{x}$                                      | $\frac{1}{u_x} \exp \left( \frac{\tilde{x}-x}{u_x} - \exp \frac{\tilde{x}-x}{u_x} \right)$ | $\tilde{x} \cong \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-x_i/u_x} \right)^{-u_x}$                    |
| $W$<br>Weibulla <sup>2)</sup><br>(III rodzaju – min) | $\hat{x}$                                              | $\hat{x} v_x$                                                         | $v_x$                                                | $\frac{1}{v_x x} \sqrt{\frac{x}{\hat{x}}} \exp \left( -\sqrt{\frac{x}{\hat{x}}} \right)$   | $\hat{x} \cong \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{v x_i} \right)^v$                               |

<sup>1)</sup> Nazwy używane bez zastrzeżeń w przypadku rozkładu Gaussa.<sup>2)</sup> Stosuje się, gdy wykluczone są wartości ujemne ( $x \geq 0$ ).

nieznanego parametru populacji generalnej. Estymacja jest więc procesem wnioskowania o numerycznych wartościach nieznanymi wielkości charakteryzujących populację generalną na podstawie niekompletnych danych, takich jak próba.

Podstawowym parametrem szacującym zmienną losową jest wartość oczekiwana (centralna), pokrywająca się ze środkiem skupienia zmiennej losowej  $x$ . Jest to więc wartość, do której dąży zmienna losowa  $x$ , gdy bada się coraz bardziej jednorodne zbiory. Zakładając, że typ rozkładu pozostaje ten sam, a współczynnik zmienności dąży do zera, stwierdza się, że środkiem skupienia jest parametr  $c$ .

W tabl. 1.4 [63] podano estymatory wartości centralnych  $c$ , tzn. funkcje służące do jej szacowania. Środki skupienia  $c$  oznaczono różnymi nadkreśleniami ( $\bar{x}$ ,  $\check{x}$ ,  $\tilde{x}$ ,  $\hat{x}$ ). W tablicy tej podano też funkcje gęstości rozkładu  $f(x)$  oraz estymatory wartości centralnych dla rozkładów:  $N$  – normalnego,  $L$  – log-normalnego,  $G$  – Gumbela,  $W$  – Weibulla.

Parametr  $\bar{x}$  (dla rozkładu normalnego) jest wartością oczekiwaną, czyli średnią (1.11). Prawdopodobieństwo  $p$  nie przewyższa wartości centralnych:  $\bar{x}$  i  $\check{x}$ , wynosi  $p = 0,5$  w przypadku zmiennych losowych normalnych ( $N$  oraz  $L$ ).

Parametr  $\tilde{x}$  rozkładu Gumbela jest wartością modalną, czyli najbardziej prawdopodobną, przy czym  $p = e^{-1}$ . Nie dotyczy to jednak centralnych wartości  $\hat{x}$  w rozkładzie Weibulla, które nie są modami, lecz kwantylami rzędu  $1 - 1/e$  [59], [63].

W badaniach statystycznych, oprócz wartości centralnych, bardzo często należy oszacować wartości ekstremalne (skrajne). Często bowiem mierzy się wartość  $x_j$  ekstremalną w zbiorze zmiennych losowych, na przykład wytrzymałość minimalną  $x_{\min}$  uszkodzonych korozyjnie elementów, lub szczytową wartość maksymalną  $x_{\max}$  obciążeń wskazywanych przez urządzenia pomiarowe w określonym przedziale czasu (obciążenie wiatrem). Wartości skrajne  $x_{\min}$  oraz  $x_{\max}$  nie stabilizują się w kolejnych próbach (wraz ze wzrostem liczebności  $n_i$ ), tak jak jest w przypadku wartości centralnych; wręcz przeciwnie – są rozbieżne. W statystyce ekstremów zamiast gęstości prawdopodobieństwa lub dystrybuanty ciągłej zmiennej losowej, wygodniej jest posługiwać się innymi charakterystykami prawdopodobieństwa, na przykład intensywnością  $r(x)$  oraz okresem powtarzalności  $t(x)$ . W przypadku analizy losowej funkcji, np. obciążenia wiatrem, należy określić częstość (powtarzalność  $t(x)$ ) występowania obciążeń większych od wartości progowej o intensywności  $r(x)$ . Zagadnienia te są szerzej omówione w pracach [29, 59, 63].

Do oszacowania parametrów ekstremalnych zmiennych losowych stosuje się rozkłady asymptotyczne, np. rozkłady Gumbela, Frécheta i Weibulla, których wykresy przedstawiono na rys. 1.12, 1.13 i 1.14.

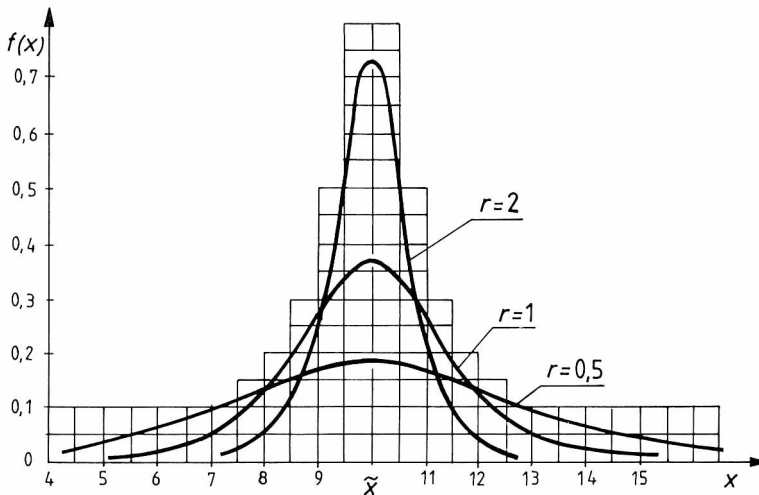
W tabl. 1.5 [59] zestawiono ekstremalne funkcje rozkładów dotyczące maksimów (ważne w badaniach największych obciążeń) i minimów (znajdują zastosowanie w zagadnieniach analizy minimalnych wytrzymałości). Szczególna przydatność asymptotycznych rozkładów ekstremalnych polega na tym, że umożliwiają one prognozę probabilistyczną bez znajomości macierzystych rozkładów prawdopodobieństw.

W tabl. 1.5 parametr  $c$ , który ogranicza jednostronnie rozkłady ekstremalne II i III rodzaju, wynika zazwyczaj z fizycznej interpretacji zmiennej losowej. Gdy roz-



Tablica 1.5. Klasyfikacja asymptotycznych rozkładów ekstremalnych [59]

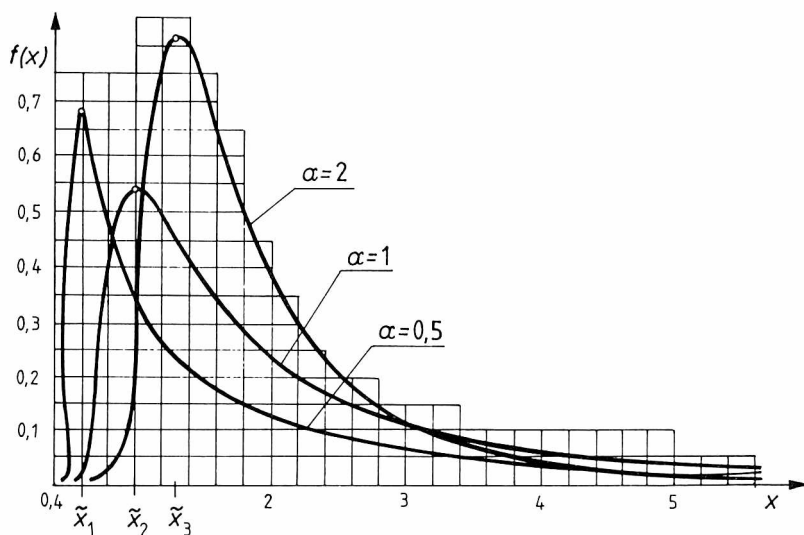
| Rodzaj dystrybuanty | Rozkład minimów                                                                                                   | Rozkład maksimów                                                                                              |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I. Gumbela          | $1 - \exp[-e^{r(x-\tilde{x})}]$<br>$r > 0$                                                                        | $\exp[-e^{r(x-\tilde{x})}]$<br>$r > 0$                                                                        |
| II. Fréchet         | $1 - \exp\left[-\left(\frac{c-x}{c-\tilde{x}}\right)^{-\alpha}\right]$<br>$x \leq c, \alpha = (c-\tilde{x})r > 0$ | $\exp\left[-\left(\frac{x-c}{\tilde{x}-c}\right)^{-\alpha}\right]$<br>$x \geq c, \alpha = (\tilde{x}-c)r > 0$ |
| III. Weibulla       | $1 - \exp\left[-\left(\frac{x-c}{\tilde{x}-c}\right)^{\alpha}\right]$<br>$x \geq c, \alpha = (\tilde{x}-c)r > 0$  | $\exp\left[-\left(\frac{c-x}{c-\tilde{x}}\right)^{\alpha}\right]$<br>$x \leq c, \alpha = (c-\tilde{x})r > 0$  |

Rys. 1.12. Wykresy funkcji rozkładu asymptotycznego maksimów Gumbela dla zmiennych parametrów  $r$ 

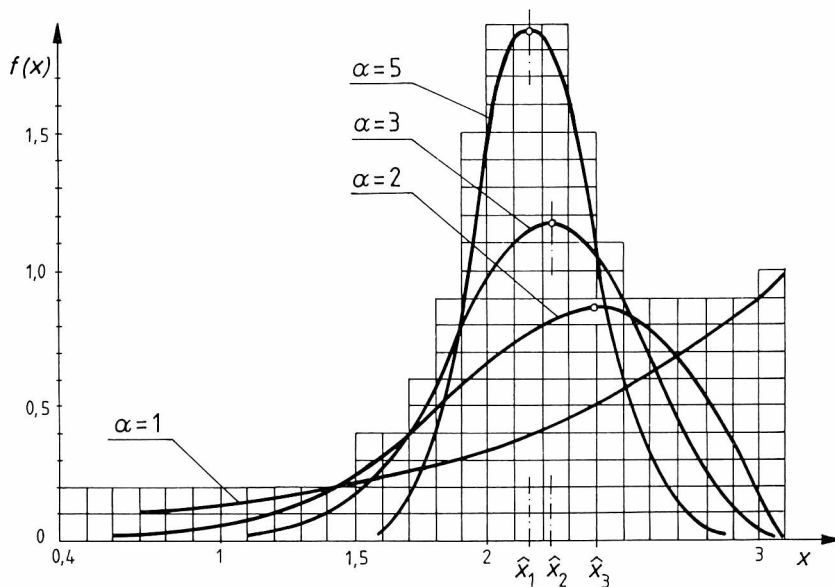
kłady dotyczą zmiennej losowej dodatniej (II/max i III/min) bądź ujemnej (II/min, III/max), często przyjmuje się  $c = 0$ . Wyboru jednej z trzech rodzajów funkcji ekstremalnych dokonuje się na podstawie rozeznania, czy wartości ekstremalne są nieograniczone, czy ograniczone lewostronnie, czy też prawostronnie [59].

Do szacowania wytrzymałości materiałów i nośności systemów konstrukcyjnych używa się na ogół rozkładów normalnych i logarytmiczno-normalnych.

Do estymacji losowych parametrów obciążeń zmiennych (np. pochodzenia klimatycznego: obciążenie wiatrem, śniegiem) stosuje się rozkłady niesymetryczne i ekstremalne. Do szacowania tych obciążeń używa się zazwyczaj asymptotycznych rozkładów wartości skrajnych. Parametry losowe obciążeń zmieniają się w czasie i muszą być analizowane zgodnie z zasadami teorii procesów stochastycznych. Teoria procesów stochastycznych zajmuje się uogólnieniem rachunku prawdopodobieństwa



Rys. 1.13. Wykresy funkcji rozkładu asymptotycznego maksimów Fréchet dla różnych parametrów  $\alpha$



Rys. 1.14. Wykresy funkcji rozkładu asymptotycznego maksimów Weibulla dla zmiennych parametrów  $\alpha$

na przypadek zmiennych losowych, których rozkłady zależą od zmiennych parametrów (np. czasu).

Obciążenia stałe są skutkiem masy poddanej przyciąganiu ziemskiemu (pochodzą one zarówno od części nośnych budowli, jak i jej wyposażenia). Opisuje się je zazwyczaj rozkładami symetrycznymi.

## 2. Oszacowanie bezpieczeństwa konstrukcji

### 2.1. Wprowadzenie

Konstrukcje i elementy konstrukcyjne powinny być zaprojektowane tak, żeby z odpowiednim stopniem niezawodności mogły się oprzeć działaniom, które mogą zajść w czasie budowy i eksploatacji, zachowując swe parametry użytkowe. Zawodność jest stanem konstrukcji, w którym przestaje ona spełniać wymagania projektowe związane z jej funkcjonowaniem. Podstawowym postulatem w projektowaniu jest więc bezpieczeństwo konstrukcji. Zawodność rozumiana jest nie tylko jako katastrofa, awaria czy inne formy wyczerpania nośności konstrukcji, a także sytuacje, gdy przestają być spełniane wymogi użytkowe (np. deformacje, drgania).

Katastrofa jest to nagłe zniszczenie budowli lub jej elementu w formie utraty nośności (wytrzymałości, stateczności, sztywności), o tragicznych następstwach społecznych i ekonomicznych.

Awaria jest to uszkodzenie uniemożliwiające lub ograniczające użytkowanie obiektu. Taka niesprawność budowli może być przyczyną jej dyskwalifikacji (skutkującej nakazem rozbiórki) lub potrzebą wzmocnienia czy naprawy ustroju nośnego.

Bezpieczeństwo konstrukcji jest determinowane przez dwa zasadnicze parametry: nośność konstrukcji  $N$  (rozumianą jako graniczna wytrzymałość lub sztywność konstrukcji) oraz działające obciążenia  $P$ , których efektem jest wyężenie konstrukcji (występowanie sił wewnętrznych, ugięć, deformacji, drgań). W deterministycznym sensie bezpieczeństwo konstrukcji sprowadza się do spełnienia warunku

$$N > P, \quad (2.1)$$

niesprawność zaś opisuje nierówność

$$N \leq P. \quad (2.2)$$

Z nierównościami (2.1) i (2.2) koresponduje deterministyczny współczynnik bezpieczeństwa (*pewności*)

$$n_d = \frac{N}{P} > 1. \quad (2.3)$$

Deterministycznym warunkiem bezpieczeństwa konstrukcji jest, aby współczynnik *pewności* spełniał warunek  $n_d > 1$ .

Takie podejście do zapewnienia bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych, zaproponowane przez Ch. A. Coulomba (1736–1806) z pewnymi modyfikacjami wprowadzonymi przez L. M. Naviera (1785–1836) jest znane pod nazwą metody naprężeń dopuszczalnych.

W metodzie naprężeń dopuszczalnych konstrukcję uważa się za bezpieczną, jeśli wyężenie  $\sigma$  powstające w jej elementach w wyniku działania obciążeń nie przekracza wytrzymałości dopuszczalnej materiału  $\sigma_{\text{dop}}$ . Prowadzi to do warunku bezpieczeństwa

$$\sigma \leq \sigma_{\text{dop}}. \quad (2.4)$$

W tym podejściu *zapas* bezpieczeństwa uzyskuje się przez odpowiednie zmniejszenie charakterystycznej wytrzymałości materiału  $R^*$  do naprężeń dopuszczalnych  $\sigma_{\text{dop}}$ , w wyniku dzielenia jej wytrzymałości przez przyjęty dla danego materiału arbitralny współczynnik  $n_d > 1$ . Dopuszczalne wyężenie materiału opisuje zależność

$$\sigma_{\text{dop}} = \frac{R^*}{n_d}. \quad (2.5)$$

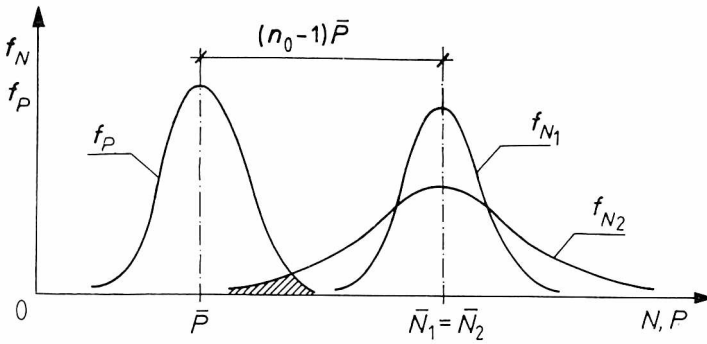
Metoda naprężeń dopuszczalnych osiągnęła swój szczytowy rozkwit w związku z rozwojem konstrukcji metalowych, zwłaszcza stalowych. Materiał ten bowiem najlepiej odpowiada, do pewnych granic, modelowi ciała liniowo-sprężystego, a więc modelowi, którym posługuje się klasyczna teoria sprężystości. Dla konstrukcji stalowych wytrzymałość dopuszczalną  $\sigma_{\text{dop}}$  wyznacza się jako iloraz granicy plastyczności stali i współczynnika bezpieczeństwa  $n_d$ . W praktyce, dla celów norm projektowania konstrukcji, współczynnik bezpieczeństwa  $n_d$  jest ustalany jako iloczyn cząstkowych współczynników  $n_i$  (gdzie  $n_i > 1$ ) uwzględniających czynniki przypadkowe (losowe):

- $n_1$  — zmienność parametrów wytrzymałościowych materiału,
- $n_2$  — przekroczenie wartości obciążeń charakterystycznych,
- $n_3$  — rozrzut geometrii przekroju poprzecznego elementów,
- $n_4$  — nieścisłości w przyjmowaniu schematów statycznych itp.

W ten zakamuflowany sposób zostały uwzględnione czynniki przypadkowe, wpływające na bezpieczeństwo konstrukcji. Należy zaznaczyć, iż współczynnik bezpieczeństwa  $n_d$ , ustalony arbitralnie, nie uwzględnia indywidualnych cech budowli i specyfiki systemu konstrukcyjnego oraz działających na nią obciążeń. Ponadto maksymalne wyężenie elementu konstrukcji stalowych zbudowanych z materiałów sprężysto-plastycznych nie musi prowadzić do wyczerpania nośności systemu. Niedoskonałość więc tej metody polega przede wszystkim na tym, że operuje ona bezpieczeństwem ustalonym arbitralnie i nie uwzględnia modelu niezawodnościowego systemu konstrukcyjnego. Wymienione czynniki sprawiają, iż wymiarowanie konstrukcji stalowych metodą naprężeń dopuszczalnych prowadzi do znacznego różnicowania rzeczywistych zapasów bezpieczeństwa ustrojów nośnych. Różnicowanie to spowodowane jest między innymi faktem, iż poszczególne rodzaje obciążeń, podobnie jak różne rodzaje (gatunki) materiałów mają różnicowane rozrzuty swych parametrów charakterystycznych. Na przykład ten sam cząstkowy współczynnik bezpieczeństwa  $n_i$ , uwzględniający zmienność obciążeń obowiązywał, gdy projektowało się zarówno budynek wysokościowy, na którego działa obciążenie wiatrem o dużej zmienności, jak i belkę nadproża obciążoną ciężarem własnym muru, o niedużym losowym rozrzucie masy własnej.

Sformułowane w metodzie naprężeń dopuszczalnych zasady zapewnienia bezpieczeństwa można by uznać za zupełnie poprawne i słuszne obecnie (na przykład dla

konstrukcji sprężysto-kruchych), gdyby występujące we wzorze (2.3) wielkości były określone obiektywnie. Wielkości cząstkowych współczynników bezpieczeństwa  $n_i$  mają jednak charakter losowy.



Rys. 2.1. Losowe rozkłady obciążeń i nośności

O nośności konstrukcji w granicznym stanie wytężenia (wytrzymałości materiału) można mówić jako o losowej wartości własnej konstrukcji  $N(\omega)$ . Zależy ona od losowych parametrów wytrzymałościowych materiału, z którego jest zbudowana, losowej geometrii przekrojów poprzecznych elementów składowych ustroju, imperfekcji konstrukcyjnych, geometrycznych, a także procesów starzenia i korozji. Obciążenie działające na konstrukcję  $P(\omega)$  ma również losowy charakter (obciążenie użytkowe, obciążenie od ciężaru własnego, obciążenie śniegiem, obciążenie wiatrem itp.). Współczynnik bezpieczeństwa  $N/P$  zmienia się w czasie wskutek losowego charakteru nośności  $N(\omega)$  i losowego obciążenia  $P(\omega)$ . Tak więc zarówno obciążenie  $P(\omega)$ , jak i nośność  $N(\omega)$ , są funkcjami losowymi o rozkładach:  $f_P$  i  $f_N$ . Pokazano to na rys. 2.1.

Stosunek wartości średniej nośności  $\bar{N}$  i obciążenia  $\bar{P}$  (patrz rys. 2.1) wynosi

$$n_0 = \frac{\bar{N}}{\bar{P}}, \quad (2.6)$$

jest jednym, lecz niewystarczającym parametrem do obiektywnego oszacowania bezpieczeństwa konstrukcji (prawdopodobieństwo wystąpienia parametrów wytrzymałości elementów ustroju i sił wewnętrznych o wartościach centralnych wynosi 0,5).

Rozpatruje się przypadek (rys. 2.1), gdy to samo obciążenie  $P(\omega)$  działa na dwie różne konstrukcje o nośnościach  $N_1(\omega)$  i  $N_2(\omega)$  charakteryzujące się tym, iż obie mają taką samą średnią nośności  $\bar{N}$ , lecz różnią się odchyleniem standardowym nośności.

W ujęciu deterministycznym obie konstrukcje mają taki sam stosunek wartości średnich nośności do wartości średniego obciążenia (2.6).

W interpretacji probabilistycznej, z analizy wykresów rozkładów nośności pokazanych na rys. 2.1 wynika, że bezpieczeństwo konstrukcji o losowej nośności  $N_1$ ,

charakteryzującej się mniejszym rozproszeniem nośności (odchyleniem standardowym), jest większe od konstrukcji, której losową nośność  $N_2$  cechuje większa zmienność.

Na rysunku 2.1 obszar wspólny funkcji obciążenia  $f_P$  i nośności  $f_{N_2}$ , gdzie nośność  $N_i$  może być mniejsza od obciążenia  $P_i$  zakreskowano jako obszar zawodności [23], [27], [59].

Awaryjność konstrukcji jest więc prawdopodobieństwem stanu jej niesprawności, gdy nośność ustroju jest mniejsza od efektu działania obciążenia  $N < P$ .

Niezawodność konstrukcji definiuje się jako prawdopodobieństwo, że jej losowa nośność będzie większa od jej losowego obciążenia

$$p_{f1} = \Pr[N(\omega) > P(\omega)], \quad (2.7)$$

gdzie:

$N(\omega)$  – losowa nośność konstrukcji,

$P(\omega)$  – losowe obciążenie konstrukcji.

Rozpatruje się, przypadek (rys. 2.2), gdzie losowe obciążenie  $P(\omega)$  działa na dwie konstrukcje o różnych rozkładach losowych nośności  $N_1(\omega)$  i  $N_2(\omega)$  oraz  $\bar{N}_1 < \bar{N}_2$ .

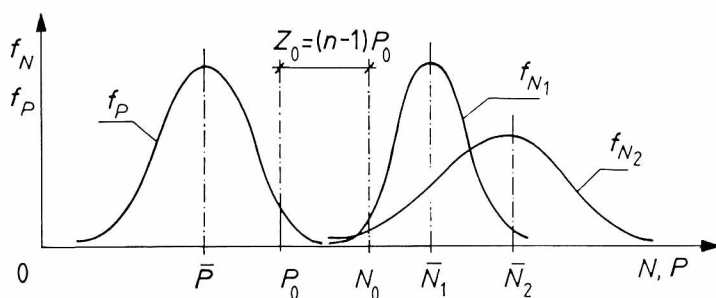
W ujęciu probabilistycznym, aby uzyskać określone bezpieczeństwo konstrukcji, ustala się kontrolowane wartości progowe (kwantyle) losowego obciążenia  $P_0$  i losowej nośności  $N_0$ , które spełniają warunek nieprzekraczania losowych obciążeń i niewystąpienia losowych nośności mniejszych z odpowiednim prawdopodobieństwem (rys. 2.2). Miarę bezpieczeństwa konstrukcji [63] można zdefiniować jako prawdopodobieństwo nieprzekroczenia kontrolowanych wartości granicznych

$$p_{f2} = \Pr[N(\omega) > N_0, P(\omega) < P_0], \quad (2.8)$$

gdzie:

$N(\omega), P(\omega)$  – jak w (2.7),

$N_0, P_0$  – kontrolowane wartości progowe nośności i obciążenia konstrukcji.



Rys. 2.2. Analiza bezpieczeństwa konstrukcji o różnych losowych nośnościach

Aby zachować ten sam zapas bezpieczeństwa  $Z_0$  (rys. 2.2), to jest przedział między kwantylami obciążenia  $P_0$  i nośności  $N_0$  (gwarantującymi wystąpienie wartości zmiennej losowej z prawdopodobieństwem  $p_{f2}$ ), dla analizowanych konstrukcji o losowych nośnościach  $N_1(\omega)$  i  $N_2(\omega)$ , średnia nośności konstrukcji, charakteryzu-

jąca się większą zmiennością, musi być odpowiednio większa od średniej nośności konstrukcji, która ma mniejsze rozproszenie. Ten oczywisty fakt nie ma właściwego odzwierciedlenia w deterministycznym podejściu do analizy zagadnień bezpieczeństwa ustrojów budowlanych, to jest w globalnym współczynniku bezpieczeństwa (w metodzie naprężeń dopuszczalnych).

Przedstawione analizy wskazują, iż jedynie probabilistyczne ujęcie zagadnienia bezpieczeństwa konstrukcji jest właściwe w prognozowaniu jej zawodności.

Z niedeterministycznego charakteru wytrzymałości i obciążeń konstrukcji budowlanych zaczęto sobie zdawać sprawę dopiero w latach trzydziestych XX wieku.

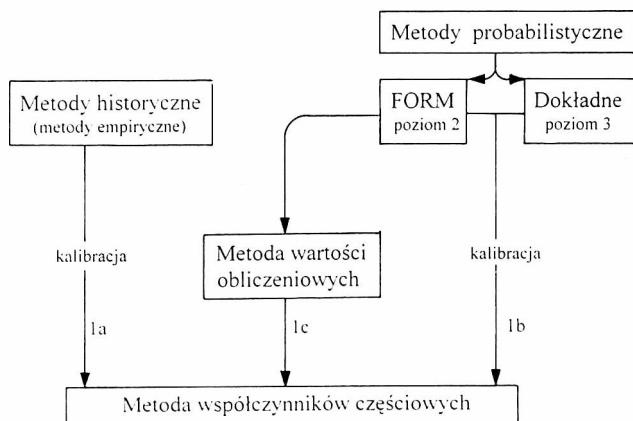
Przełomowe myśli w zakresie bezpieczeństwa budowlanej, by uważać katastrofę, awarię, uszkodzenie za zdarzenie losowe i analizować niezawodność metodami rachunku prawdopodobieństwa, jako pierwsi podali M. Mayer (1926), N. S. Strelecki (1935) [76] i W. Wierzbicki (1937) [81]. Przedstawione przez nich koncepcje były podstawą stosowanej obecnie półprobabilistycznej metody stanów granicznych.

A. M. Freudenthal (1947) i A. R. Rżanicyn (1947) pierwsi zdefiniowali bezpieczeństwo konstrukcji jako prawdopodobieństwo zniszczenia  $p_f$ .

Rozwój nauki o bezpieczeństwie konstrukcji budowlanych doprowadził do zaproponowania bardziej racjonalnego podejścia do rozwiązywania występujących w praktyce problemów. W tym celu wykorzystuje się trzy uzupełniające się, a nawet częściowo przenikające się dziedziny: statystyczną ocenę jakości, teorię niezawodności oraz probabilistyczną teorię bezpieczeństwa.

Optymalna miara bezpieczeństwa powinna być tak sformułowana, aby przy minimalnych nakładach ekonomicznych bądź społecznych, niezbędnych do powstania i utrzymania budowli zgodnie z jej przeznaczeniem, był uzyskany stopień niezawodności, gwarantujący małe prawdopodobieństwo zniszczenia. Równocześnie skutki ewentualnego zniszczenia budowli byłyby do zaakceptowania ze względów zagrożenia życia ludzkiego lub strat ekonomicznych.

Na rys. 2.3 przedstawiono wzajemne relacje stosowanych metod sprawdzania niezawodności konstrukcji budowlanych [91].



Rys. 2.3. Metody sprawdzania niezawodności konstrukcji budowlanych

Obowiązujące przepisy normowe projektowania konstrukcji oparte są na metodzie półprobabilistycznej, to jest częściowo korzystają z wyników probabilistycznych analiz bezpieczeństwa budowli. Mimo że w normach wykorzystane są badania statystyczne i metody probabilistyczne do kalibrowania współczynników bezpieczeństwa, to sformułowano je tak, że nie trzeba znać rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, aby je stosować (normowe wzory są podane w kategoriach deterministycznych).

Sprawdzenie bezpieczeństwa metodą współczynników częściowych (poziom 1) polega na wykazaniu, że w przypadku kiedy do obliczeń przyjęto wartości obliczeniowe oddziaływań, właściwości materiałów i danych geometrycznych, żaden z istotnych stanów granicznych nośności nie zostanie przekroczony. Wartości obliczeniowe są iloczynami lub ilorazami wartości reprezentatywnych i odpowiednich częściowych współczynników bezpieczeństwa  $\gamma_i$ , odnoszonych do obciążeń  $\gamma_P$ , nośności  $\gamma_N$  i konsekwencji zniszczenia systemu  $\gamma_n$ . Globalny współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji  $\gamma$  jest iloczynem tych częściowych współczynników  $\gamma = \gamma_P \gamma_N \gamma_n$ .

Reprezentatywną jest wartość charakterystyczna określana z przyjętym *a priori* prawdopodobieństwem  $p$  nieprzekroczenia w stronę wartości niekorzystnych, podczas przyjętego okresu odniesienia z uwzględnieniem okresu użytkowania i trwania założonej sytuacji projektowej. Są to kwantyle na założonym poziomie tolerancji  $t_i$ .

Ogólnie rzecz biorąc, częściowe współczynniki  $\gamma_i$  mają na celu uwzględnienie niekorzystnych odchyłek od wartości reprezentatywnych, niedokładności modeli oddziaływań i modeli identyfikujących wytrzymałość konstrukcji oraz niedokładności współczynników konwersji. Zaleca się, aby wartość współczynników częściowych zależała od stopnia niepewności oszacowania oddziaływań, wielkości geometrycznych i przyjętych modeli obliczeniowych, a także od rodzaju stanu granicznego. Niektóre częściowe współczynniki są kalibrowane przez głosowanie nad ustaleniami normowymi. W zasadzie istnieją dwie metody określenia numerycznych współczynników częściowych:

- na podstawie kalibracji z wykorzystaniem doświadczenia długiej historii tradycji budowlanej (dla większości współczynników proponowanych w Eurokodach jest to zasada wiodąca);

- na podstawie statystycznej oceny wyników doświadczeń i obserwacji (wówczas należy stosować probabilistyczną teorię niezawodności).

W praktyce obie metody można stosować także w kombinacji.

W szczególnych przypadkach, dla pełnej oceny statystycznej (probabilistycznej) brak zwykle dostatecznej liczby danych z badań empirycznych i trzeba zawsze nawiązać do tradycyjnych metod wymiarowania. Tam, gdzie istnieje długa i dobra tradycja budowlana, ma ona wielką wartość dla zrozumienia osiągniętego powodzenia. Zrozumienie to uzasadniać może, że dla określonych okoliczności wprowadza się redukcję pewnych współczynników, co w efekcie pozwala na oszczędności w projektowanych konstrukcjach. Z tego punktu widzenia metody statystyczne rozumieć należy jako źródło dodatkowych informacji dla podejścia tradycyjnego. Ustalając wartości zarówno charakterystyczne, jak i obliczeniowe, mimo wykorzystywania rachunku prawdopodobieństwa, wprowadza się arbitralny wybór kwantyli rozkładów i częściowych współczynników  $\gamma_i$ .



W kalibrowaniu współczynników bezpieczeństwa w metodzie półprobabilistycznej wykorzystuje się wiadomości i doświadczenia metod probabilistycznych. Jednak należy wyraźnie podkreślić, że w normach projektowania konstrukcji budowlanych wzory są napisane w kategoriach deterministycznych.

Teoretyczne podstawy szacowania bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych poziomu 1 i sposób przyjmowania częściowych współczynników bezpieczeństwa w półprobabilistycznej metodzie stanów granicznych podano w rozdziale 2.3.

Dzięki lepszemu zbadaniu właściwości materiałów poza granicami sprężystości oraz rozwojowi teorii plastyczności ważnym etapem rozwoju metod projektowania było wprowadzenie metody obciążeń granicznych (niszczących). Fizycznym aspektem tej metody jest obliczenie nośności granicznej ustroju z wykorzystaniem plastycznej redystrybucji sił wewnętrznych w przekrojach (powstanie przegubów plastycznych) i między przekrojami w konstrukcji. Takie obliczanie konstrukcji (omówione w rozdziale 5) umożliwia obowiązująca półprobabilistyczna metoda stanów granicznych.

W metodzie naprężeń dopuszczalnych bezpieczeństwo zależy od stanu wyężenia materiału w poszczególnych punktach ustroju, czyli ma charakter lokalny. Ponadto dopuszcza się jedynie sprężysty zakres jego wyężenia. W metodzie obciążeń granicznych dopuszcza się plastyczne wyężenie materiału, a współczynnik bezpieczeństwa ma charakter ogólny, odnoszony do całego ustroju nośnego. W metodzie naprężeń dopuszczalnych do zagadnienia bezpieczeństwa podchodzi się od strony stanów bezpiecznych, w metodzie nośności granicznej od analizy stanów zniszczenia.

W teorii niezawodności miary bezpieczeństwa wyraża się za pomocą funkcji prawdopodobieństwa dystrybuanty  $F(x)$ , gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  lub funkcji zagrożenia  $h(x)$ .

W metodach probabilistycznych analizy niezawodności konstrukcji miarą bezpieczeństwa jest prawdopodobieństwo zawodności  $p_f$  (przy założonym modelu zniszczenia i odpowiednio przyjętym okresie eksploatacji). Wartości te oblicza się i porównuje z wartością docelową  $p_0$ . Jeśli  $p_f < p_0$ , to konstrukcję uważa się za bezpieczną.

Metody probabilistycznego sprawdzania bezpieczeństwa konstrukcji podzielić można na dwie klasy:

- metody poziomu 2 zapewnienia niezawodności (FORM – first order reliability methods);
- metody poziomu 3 (dokładne).

Metody probabilistyczne poziomu 2 posługują się ogólnie alternatywną miarą bezpieczeństwa, tak zwanym wskaźnikiem [63] (lub indeksem [91]) niezawodności  $\beta$ , który wiąże się z prawdopodobieństwem zawodności  $p_f$  w postaci

$$p_f = \phi(-\beta), \quad (2.9)$$

gdzie  $\phi$  jest funkcją rozkładu normalnego.

Związek między  $\beta$  i  $p_f$  podano w tabl. 2.2, orientacyjne wartości docelowe  $\beta$  według Eurokodu 1 [91] podano zaś w tabl. 2.1.

Wartości wskaźnika niezawodności  $\beta$  i odpowiadające im prawdopodobieństwa zniszczenia są wartościami formalnymi lub pojęciowymi, których zadaniem jest

w zasadzie służyć raczej jako narzędzie do opracowywania spójnych reguł wymiarowania (niż jako docelowy opis częstotliwości zniszczenia konstrukcji).

W tej metodzie analogicznie do współczynników  $\gamma_i$  w metodzie półprobabilistycznej określa się globalny wskaźnik niezawodności  $\beta$  i wskaźniki składowe odnoszące się do obciążeń  $\beta_S$  i nośności  $\beta_R$ . Według [91] rozdzielone wskaźniki niezawodności powinny wynosić  $\beta_S = 0,7\beta$  i  $\beta_R = 0,8\beta$ . Wartości obliczeniowe efektów działań obciążeń  $S_d$  i nośności konstrukcji  $R_d$  wyznacza się tak, aby prawdopodobieństwo wystąpienia bardziej niekorzystnych wartości wynosiło dla obciążeń  $\phi(-0,7\beta)$  i dla nośności  $\phi(-0,8\beta)$ . Szacowanie bezpieczeństwa metodą probabilistyczną poziomu 2 omówiono w rozdziale 2.4.

Tablica 2.1. Orientacyjne wartości docelowego wskaźnika niezawodności  $\beta$  według [91]

| Stan graniczny                 | Docelowy indeks niezawodnościowy (obliczeniowy okres użytkowania) | Docelowy indeks niezawodnościowy (jeden rok) |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| nośności                       | 3,8                                                               | 4,7                                          |
| zmęczenia                      | 1,5–3,8                                                           | —                                            |
| użytkowalności (nieodwracalny) | 1,5                                                               | 3,0                                          |

Wartości podane w tabl. 2.1 należy uważać za racjonalne wymagania minimalne, wynikające z obliczeń kalibracyjnych norm projektowania różnych krajów. W obliczeniach tych przyjmowano zwykle dla parametrów wytrzymałościowych i niepewności modelu rozkłady logarytmiczno-normalne lub Weibulla. Rozkłady normalne przyjmowano zwykle dla ciężaru własnego, a dla obciążeń zmiennych rozkłady ekstremalne. Należy podkreślić, że obliczenia kalibracyjne wykazały duży rozrzut wartości, rodzaju komponentu konstrukcji i kwantyfikacji różnych niepewności. Wartość wskaźnika niezawodności 3,8 dla stanu granicznego nośności przyjęta została w wielu zastosowaniach, dotyczących głównie nośności. Nie oznacza to jednak, że standardowe wymiarowanie zgodnie z Eurokodami prowadzi do wartości  $\beta$  równych lub bliskich takiemu założeniu. W rzeczywistości nie dokonano dotychczas jeszcze oceny Eurokodów z tego punktu widzenia.

Prawdopodobieństwo zawodności  $p_f$  w klasycznej formacji obliczeń probabilistycznych poziomu 2, bez reguły optymalizacyjnej, jest arbitralną miarą bezpieczeństwa. Taki charakter ma obliczony ze wzoru (2.9) wskaźnik  $\beta$  [34], [63].

W rozdziale 2.5 podane zostało, zaproponowane przez J. Murzewskiego [58] (ponad 30 lat temu) inne podejście, które ujmuje zagadnienia optymalizacyjne. Jest to metoda probabilistyczna poziomu 3.

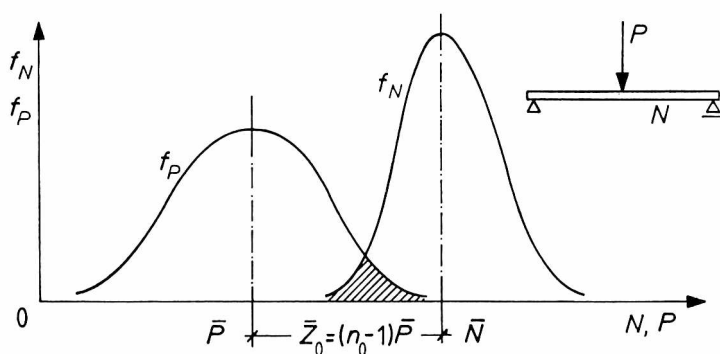
Optymalną ocenę bezpieczeństwa konstrukcji wprowadził J. Murzewski [58], w którym miarą niebezpieczeństwa konstrukcji jest całkowite prawdopodobieństwo zawodu (ryzyka). W metodzie tej wprowadza się funkcję ryzyka  $h(x)$  i analizuje się prawdopodobieństwo przekroczenia wartości nośności  $R_d$  w dół i obciążenia  $S_d$  w górę. Miarą bezpieczeństwa w tej metodzie jest skala zagrożenia  $1/k$ , wyprowadzona przez

optymalizację zawodności konstrukcji [63]. Podstawowym założeniem tej metody jest postulat stałego i jednakowego dla nośności, obciążeń i błędów projektowych ryzyka względnego przekroczenia odpowiednich wartości granicznych.

## 2.2. Bezpieczeństwo konstrukcji

Niezawodność konstrukcji zależy od losowego rozkładu dwóch podstawowych wielkości ją generujących: nośności  $N(\omega)$  i obciążenia  $P(\omega)$ . W celu szacowania niezawodności należy znać rozkłady losowych funkcji nośności  $f_N$  i obciążenia  $f_P$ . Obie te funkcje są losowymi funkcjami czasu.

W probabilistycznym sensie niezawodność definiuje się jako prawdopodobieństwo, że konstrukcja jest zdolna przenieść obciążenia, które na nią działają bez zniszczenia, w określonym przedziale czasu (z uwzględnieniem funkcji czasu).



Rys. 2.4. Analiza niezawodności elementu konstrukcji

Miara niezawodności konstrukcji  $R$  rozumiana jest tu jako prawdopodobieństwo dla ustalonego czasu (bez uwzględnienia funkcji czasu) i jest definiowana [59] w następujący sposób

$$R = \Pr \{N(\omega) > P(\omega)\}. \quad (2.10)$$

W przypadku gdy  $P(\omega) > N(\omega)$ , mamy do czynienia z zawodnością ustroju, a prawdopodobieństwo takiego zdarzenia, tj. awarii (pole zakreskowane na rys. 2.4 [23], [27], [59]), wynosi

$$A = \Pr \{N(\omega) < P(\omega)\}. \quad (2.11)$$

Niezawodność konstrukcji jest więc łącznym prawdopodobieństwem losowej nośności  $N(\omega)$  i obciążenia  $P(\omega)$ , spełniającym warunek  $N > P$ . Wyznacza się ją

ze wzoru

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_P(P) \left[ \int_P^{\infty} f_N(N) dN \right] dP = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(N) \left[ \int_{-\infty}^N f_P(P) dP \right] dN. \quad (2.12)$$

Gęstości prawdopodobieństwa zarówno losowego obciążenia, jak i losowej nośności mogą być opisane funkcjami o różnych rozkładach. Dla prostoty prezentacji omawianych zagadnień zakłada się, że obie wielkości  $P(\omega)$  i  $N(\omega)$  mają rozkłady normalne w postaci

$$f_N(N) = \frac{1}{s_N \sqrt{2\pi}} e^{-(N - \bar{N})^2 / 2s_N^2}, \quad (2.13)$$

$$f_P(P) = \frac{1}{s_P \sqrt{2\pi}} e^{-(P - \bar{P})^2 / 2s_P^2}, \quad (2.14)$$

gdzie:

$\bar{N}$ ,  $s_N$  – wartość średnia i odchylenie standardowe nośności,

$\bar{P}$ ,  $s_P$  – wartość średnia i odchylenie standardowe obciążenia.

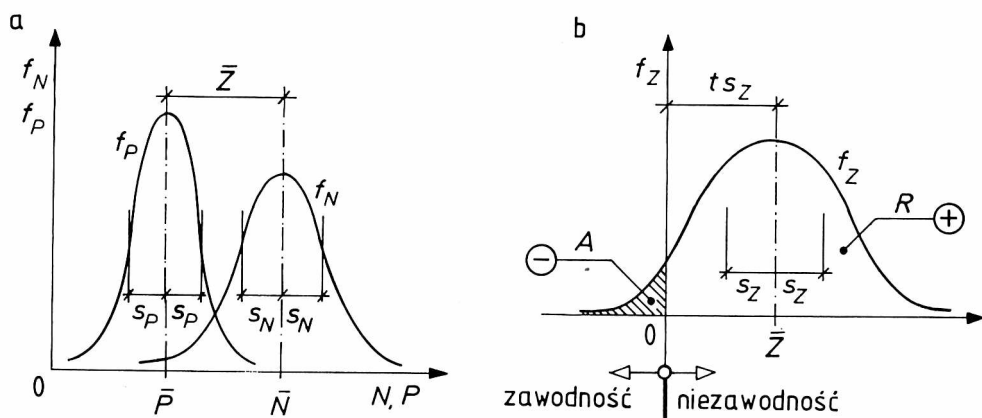
Jedną z miar niezawodności elementu konstrukcji jest jej losowy zapas nośności  $Z(\omega)$  odnoszony do efektów działających na ustrój obciążeń (funkcja *niezniszczenia* – pokazana na rys. 2.5), który określa bezpieczeństwo konstrukcji, gdy

$$Z(\omega) = N(\omega) - P(\omega) > 0, \quad (2.15)$$

stan niesprawności zaś, gdy

$$Z(\omega) = N(\omega) - P(\omega) \leq 0. \quad (2.16)$$

Losowa funkcja *niezniszczenia* konstrukcji  $Z(\omega)$  (funkcja „zapasu” nośności), może więc przybierać wartości dodatnie, ujemne i zero (patrz rys. 2.5 a i b).



Rys. 2.5. Analiza losowej funkcji *niezniszczenia* (zapasu nośności) konstrukcji

Funkcję *niezniszczenia* konstrukcji jako zmienną losową  $Z(\omega)$  wyznacza się korzystając ze wzorów podanych w rozdziale 1.6. Zakładając, że zmienne losowe nośności konstrukcji  $N(\omega)$  i jej losowego obciążenia  $P(\omega)$  mają rozkład normalny, to zmienną losową  $Z(\omega)$  opisuje również rozkład normalny

$$f(Z) = \frac{1}{s_Z \sqrt{2\pi}} e^{-(Z - \bar{Z})^2 / 2s_Z^2} \quad (2.17)$$

o parametrach wartości średniej  $\bar{Z}$  i odchylenia standardowego  $s_Z$

$$\bar{Z} = \bar{N} - \bar{P}, \quad (2.18)$$

$$s_Z = \sqrt{s_N^2 + s_P^2}. \quad (2.19)$$

Niezawodność elementu konstrukcji wyraża się przez prawdopodobieństwo, że funkcja zapasu nośności (*niezniszczenia*)  $Z(\omega)$  nie przybierze ujemnych wartości (rys. 2.5b). Oblicza się je jako prawdopodobieństwo (pole niezakreskowane na rys. 2.5b) ze wzoru

$$R = \int_0^{\infty} f(Z) dZ = \frac{1}{s_Z \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(Z - \bar{Z})^2 / 2s_Z^2} dZ. \quad (2.20)$$

Awaryjność (zawodność) konstrukcji, pole zakreskowane na rys. 2.5b, wyraża całka

$$A = \int_{-\infty}^0 f(Z) dZ. \quad (2.21)$$

Niezawodność konstrukcji można oszacować, analizując, dla jakiej wartości parametru  $t$  funkcja *niezniszczenia*  $Z(\omega)$  przybiera wartość równą zero, przyjmując jako miarę odchylenie standardowe zapasu nośności  $s_Z$ . Należy więc rozwiązać równanie

$$\bar{Z} - ts_Z = 0. \quad (2.22)$$

Indeks niezawodności  $t$  określa się współczynnikiem ufności lub współczynnikiem niezawodności Cornella (ufności) i wyznacza się ze wzoru

$$t = \frac{\bar{Z}}{s_Z} = \frac{\bar{N} - \bar{P}}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}}. \quad (2.23)$$

Dla wyznaczonego parametru  $t$ , z tablic rozkładu normalnego można odczytać dystrybuantę  $F(t)$ , to jest bezpieczeństwo konstrukcji.

Indeks niezawodności Cornella (2.23) stanowi obiektywną miarę bezpieczeństwa konstrukcji. Równocześnie umożliwia przejście od probabilistycznej do deterministycznej miary bezpieczeństwa. Jeśli indeks niezawodności  $t$  przybiera duże wartości, to konstrukcja ma większe bezpieczeństwo.

Awaryjność konstrukcji (dla rozkładu normalnego) w zależności od indeksu niezawodnościowego zestawiono w tabl. 2.2.

Tablica 2.2. Związek między indeksem niezawodności  $t$  i awaryjnością konstrukcji  $A$ 

|     |           |           |           |           |           |           |         |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| $t$ | 5,2       | 4,7       | 4,2       | 3,7       | 3,2       | 2,3       | $\beta$ |
| $A$ | $10^{-7}$ | $10^{-6}$ | $10^{-5}$ | $10^{-4}$ | $10^{-3}$ | $10^{-2}$ | $p_f$   |

W numerycznych szacowaniach bezpieczeństwa konstrukcji, można korzystać z tabl. 1.2, w której podano wartości funkcji rozkładu normalnego. W tym przypadku wskaźnik ufności  $t$  jest indeksem niezawodności Cornella. Dla konstrukcji o losowych parametrach nośności  $\bar{N}$ ,  $s_N$  i obciążenia  $\bar{P}$ ,  $s_P$  należy wówczas obliczyć indeks niezawodności ze wzoru

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{P}}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}}, \quad (2.24)$$

i odczytać dystrybuantę dla  $F(t)$

$$R = F(t). \quad (2.25)$$

Prezentowane podejście do analizy szacowania bezpieczeństwa konstrukcji umożliwia projektantowi w sposób świadomy generowanie *zapasu* nośności konstrukcji przez indywidualne przyjmowanie indeksu niezawodności w zależności od prognozowanych następstw zniszczenia ustroju. W zależności od skutków awarii (zagrożenia dla ludzi, strat materialnych) można więc przyjąć optymalny w analizowanym obiekcie indeks niezawodności  $t$ .

Przedstawiona analiza szacowania bezpieczeństwa może być wykorzystana w prognozowaniu niezawodności nietypowych obiektów budowlanych (na przykład ekspertyzach obiektów projektowanych według nieaktualnych obecnie przepisów normowych, obiektów niekonwencjonalnie obciążonych lub konstrukcji, których nośność została określona metodami eksperymentalnymi).

Przepisy niemieckie [71] zalecają przyjmować wartości  $t$  w zależności od następstw zniszczenia ustroju, dzieląc je na małe, średnie i duże, oraz różnicując je dla sprawdzenia stanów granicznych nośności i użytkowania. Zamieszczono je w tablicy 2.3.

Tablica 2.3. Indeks niezawodności  $t$  według [71]

| Sprawdzenie stanu granicznego | Następstwo zniszczenia |         |      |
|-------------------------------|------------------------|---------|------|
|                               | małe                   | średnie | duże |
| nośności                      | 4,2                    | 4,7     | 5,2  |
| użytkowania                   | 2,0                    | 2,5     | 3,0  |

## 2.3. Szacowanie bezpieczeństwa w metodzie stanów granicznych

Wynikiem naturalnego dążenia do budowania konstrukcji o losowej nośności (wytrzymałości)  $N(\omega)$  większej od efektów oddziaływania na nią losowego obciążenia  $P(\omega)$  jest zagwarantowanie odpowiedniego *zapasu* nośności konstrukcji  $Z(\omega)$ , to

jest odpowiedniej „odległości” pomiędzy maksymalnym obciążeniem a minimalną nośnością. Normowanie *zapasów* bezpieczeństwa ustrojów budowlanych  $Z(\omega)$  jest uzależnione od konsekwencji zniszczenia konstrukcji.

Niezawodność elementu ustroju budowlanego, definiowana według (2.10) oraz rys. 2.6, opiera się na koncepcji „najsłabszego ogniwa w łańcuchu”, czyli na założeniu, że o bezpieczeństwie decyduje najsłabszy element konstrukcji, to jest minimalna losowa nośność oraz maksymalne losowe obciążenie. Prawdopodobieństwo  $R$  jest obiektywną probabilistyczną miarą bezpieczeństwa konstrukcji, która jednak nie jest akceptowana przez inżynierów. Inżynierowie preferują miary o wydźwięku deterministycznym i wolą określać bezpieczeństwo budowli na przykład na podstawie kwantyli obliczeniowych nośności  $N_0$  i kwantyli obliczeniowych obciążeń  $P_0$ , które spełniają warunek

$$N_0 > P_0, \quad (2.26)$$

a współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji rozumiany jako

$$n = \frac{N_0}{P_0} > 1. \quad (2.27)$$

Schemat ideowy prowadzonej analizy pokazano na rys. 2.6. Szacowanie bezpieczeństwa konstrukcji na podstawie kwantyli nośności i obciążenia łączy deterministyczne i probabilistyczne miary bezpieczeństwa.

Bezpieczeństwo konstrukcji, opierające się na idei „najsłabszego ogniwa”, pozwala przyjąć za wartości „progowe” kwantyle nośności i obciążenia w następującej postaci

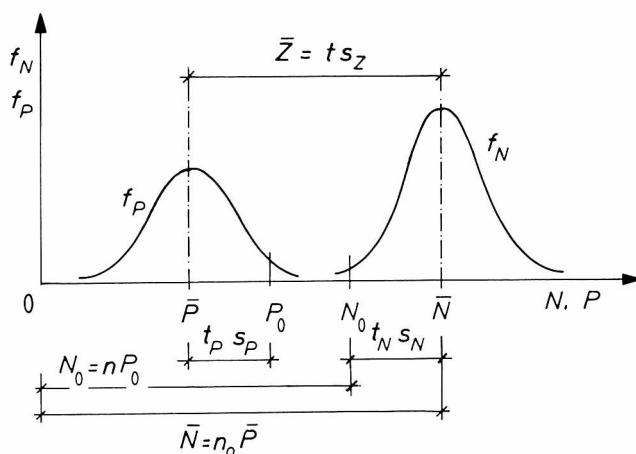
$$N_0 = \bar{N} - t_N s_N, \quad (2.28)$$

$$P_0 = \bar{P} + t_P s_P, \quad (2.29)$$

gdzie:

$\bar{N}, \bar{P}, s_N, s_P$  — jak we wzorach (2.13) i (2.14),

$t_N, t_P$  — wskaźniki tolerancji nośności i obciążenia.



Rys. 2.6. Schemat analizy bezpieczeństwa w metodzie stanów granicznych

Na przykład dla rozkładu normalnego cech losowych, przyjmując wskaźniki tolerancji  $t_P = 1,645$  i  $t_N = 1,645$  prawdopodobieństwo wystąpienia obciążenia większego od  $P_0$  i elementu słabszego od  $N_0$  wynosi 5,0%.

W dalszej części analizowany będzie sposób kalibrowania wartości progowych  $P_0$  i  $N_0$ , stanowiących podstawę półprobabilistycznej oceny bezpieczeństwa w metodzie stanów granicznych według norm [89, 90, 92, 101].

Współczynnik  $n_0$  (2.6) dla wartości średnich nośności i obciążenia, po przekształceniu wzorów (2.28) i (2.29), wynosi

$$n_0 = \frac{\bar{N}}{\bar{P}} = \frac{\bar{P} + \bar{Z}}{\bar{P}} = 1 + \frac{\bar{Z}}{\bar{P}} = 1 + \frac{ts_Z}{\bar{P}} = 1 + t \frac{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}}{\bar{P}}. \quad (2.30)$$

Przekształcając wyrażenie (2.30), otrzymuje się równanie współczynnika  $n_0$  w postaci

$$n_0 = 1 + t \sqrt{n_0^2 \frac{s_N^2}{\bar{N}^2} + \frac{s_P^2}{\bar{P}^2}} = 1 + t \sqrt{n_0^2 v_N^2 + v_P^2}, \quad (2.31)$$

gdzie  $v_N$  i  $v_P$  są współczynnikami zmienności nośności i obciążenia

$$v_N = \frac{s_N}{\bar{N}}, \quad (2.32)$$

$$v_P = \frac{s_P}{\bar{P}}. \quad (2.33)$$

Po rozwiązaniu równania kwadratowego (2.31) otrzymuje się wzór określający współczynnik  $n_0$  w następującej postaci

$$n_0 = \frac{1 + t \sqrt{v_N^2 + v_P^2 - t^2 v_N^2 v_P^2}}{1 - t^2 v_N^2}. \quad (2.34)$$

Równanie (2.34) może być znacząco uproszczone, gdy wprowadzi się następującą linearyzację

$$\sqrt{s_N^2 + s_P^2} = \alpha_N s_N + \alpha_P s_P, \quad (2.35)$$

gdzie:

$$\alpha_P = \frac{s_P}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}}, \quad (2.36)$$

$$\alpha_N = \frac{s_N}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}}. \quad (2.37)$$

Uwzględniając (2.35), można przekształcić współczynnik niezawodności Cornella (2.23) do następującej postaci

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{P}}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}} = \frac{\bar{N} - \bar{P}}{s_N \alpha_N + s_P \alpha_P}. \quad (2.38)$$



Po przekształceniach i uwzględnieniu (2.34)–(2.37) wyrażenie (2.6) przybiera następującą postać

$$n_0 = \frac{\bar{N}}{\bar{P}} = \frac{1 + t\alpha_P v_P}{1 - t\alpha_N v_N}. \quad (2.39)$$

Przyjmując równe prawdopodobieństwo dla wartości „progowych” (kwantyli) nośności konstrukcji  $N_0$  i jej obciążenia ustroju  $P_0$ , współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji  $n$  (2.27) wynosi

$$n = \frac{N_0}{P_0} = \frac{\bar{N} - t_N s_N}{\bar{P} + t_P s_P} = \frac{\bar{N} (1 - t_N v_N)}{\bar{P} (1 + t_P v_P)}. \quad (2.40)$$

Po zastosowaniu (2.39) w zależności (2.40) otrzymuje się wzór na współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji w następującej postaci

$$n = \frac{N_0}{P_0} = \frac{(1 + t\alpha_P v_P)}{(1 + t_P v_P)} \cdot \frac{(1 - t_N v_N)}{(1 - t\alpha_N v_N)} = \gamma_P \gamma_N. \quad (2.41)$$

W ten sposób otrzymano współczynnik bezpieczeństwa  $n$  jako iloczyn współczynnika bezpieczeństwa obciążenia  $\gamma_P$  i współczynnika bezpieczeństwa nośności  $\gamma_N$

$$n = \gamma_P \gamma_N, \quad (2.42)$$

gdzie:

$$\gamma_P = \frac{1 + t\alpha_P v_P}{1 + t_P v_P}, \quad (2.43)$$

$$\gamma_N = \frac{1 - t_N v_N}{1 - t\alpha_N v_N}. \quad (2.44)$$

Globalny współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji  $n$  rozdzielono na współczynniki częściowe:

1) współczynnik bezpieczeństwa obciążenia  $\gamma_P$ , który charakteryzuje losowe właściwości obciążenia oraz

2) współczynnik bezpieczeństwa nośności  $\gamma_N$ , uwzględniający losowe cechy nośności konstrukcji.

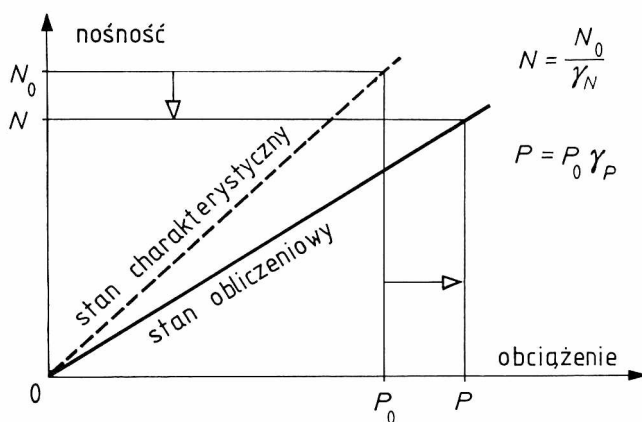
Rozdzielenie globalnego współczynnika bezpieczeństwa  $n$  na częściowe współczynniki  $\gamma_P$  i  $\gamma_N$  (faktycznie istnieje sprzężenie  $\gamma_P$  i  $\gamma_N$  – (2.36), (2.37)) stanowi podstawę półprobabilistycznej miary bezpieczeństwa przyjętej w obowiązujących normach projektowania konstrukcji. Warunek bezpieczeństwa konstrukcji można zapisać w następującej postaci

$$P_0 \gamma_P \leq \frac{N_0}{\gamma_N}. \quad (2.45)$$

Przyjmując, iż  $(\gamma_P, \gamma_N) > 1$  fizyczny sens zależności (2.45) tkwi w tym, że losowy charakter obciążeń uwzględnia się przez zwiększenie ich mnożnikiem  $\gamma_P$ , losowe cechy nośności zaś aproksymuje się przez jej zmniejszenie mnożnikiem  $1/\gamma_N$ . Jedno-

częściej  $\gamma_P$  i  $\gamma_N$  są kalibrowane indywidualnie metodami probabilistycznymi w zależności od rodzaju obciążenia i sprawdzanego stanu granicznego (nośności, użytkowania) konstrukcji. Obliczeniowe nośności konstrukcji  $N$  wyznacza się, dzieląc jej wartości charakterystyczne  $N_0$  przez  $\gamma_N$ . Obliczeniowe parametry obciążeń ustroju  $P$  szacuje się mnożąc ich wartości charakterystyczne  $P_0$  przez  $\gamma_P$ . W ujęciu teorii niezawodności ten sposób szacowania bezpieczeństwa jest określany metodą probabilistyczną poziomu 1.

Sposób podejścia do zagadnienia analizy bezpieczeństwa konstrukcji w półprobabilistycznej metodzie stanów granicznych umożliwia uwzględnienie specyfiki nośności granicznej ustroju w różnych stanach wyężenia (rozciąganie, utrata stateczności ogólnej, utrata stateczności lokalnej, zmęczenie) oraz indywidualnego charakteru obciążeń projektowanej budowli (różną losową zmienność oddziaływań na budowlę). Takich możliwości uwzględnienia indywidualnych cech nośności i obciążenia konstrukcji nie stwarzała metoda naprężeń dopuszczalnych, gdzie przyjmuje się dla różnych ustrojów i różnie obciążonych budowli wspólny współczynnik bezpieczeństwa. Graficzną ilustrację (2.45) analizy bezpieczeństwa w półprobabilistycznej metodzie stanów granicznych konstrukcji budowlanych pokazano na rys. 2.7.



Rys. 2.7. Graficzna interpretacja bezpieczeństwa konstrukcji w ujęciu stanów granicznych

W półprobabilistycznej metodzie stanów granicznych współczynniki bezpieczeństwa  $\gamma_P$  i  $\gamma_N$  występują w postaci wielu cząstkowych współczynników. W normach projektowania częściowe współczynniki bezpieczeństwa występują jako jawne współczynniki obciążenia  $\gamma_P = \gamma_f$ , współczynniki konsekwencji zniszczenia  $\gamma_n$  i współczynniki materiałowe  $\gamma_m = \gamma_s$  oraz jako niejawne w różnych modelach obliczeniowych, np. w postaci wielorakich krzywych wybozeniowych albo jako ograniczenie nośności do zakresu dokrytycznego lub dopuszczenie nadkrytycznego.

Współczynniki obciążenia  $\gamma_P = \gamma_f$  uwzględniające losowy charakter efektów działań obciążeń na konstrukcję są dodatkowo korygowane przez współczynniki jednoczesności występowania obciążeń  $\psi$ .

Zgodnie z założeniami metody stanów granicznych efekty działania losowych obciążeń na budowlę uwzględnia się jako sumę ich iloczynów i odpowiednio wykalibrowanych współczynników obciążeń  $\gamma_p = \gamma_f$  (w zasadzie większych od 1), z uwzględnieniem jednoczesności ich oddziaływań i konsekwencji zniszczenia ustroju

$$P = \gamma_n \sum_{i=1}^n P_{k,i} \gamma_{f,i} \psi_i \alpha_i, \quad (2.46)$$

gdzie:

- $P_{k,i}$  — obciążenie charakterystyczne,
- $\gamma_{f,i}$  — współczynnik obciążenia,
- $\psi_i$  — współczynnik jednoczesności obciążeń zmiennych,
- $\alpha_i$  — współczynnik redukcji obciążeń zmiennych,
- $\gamma_n$  — współczynnik konsekwencji zniszczenia.

Współczynniki obciążenia  $\gamma_{f,i}$  uwzględniają możliwość niekorzystnych odchyśleń od ich wartości charakterystycznych oraz niepewność modelu teoretycznego obciążenia. Wartości ich według norm polskich [94–100] podano w tabl. 2.4 [63].

Według Eurokodu 3 [92] oraz normy niemieckiej [90] należy przyjmować współczynnik obciążenia dla obciążeń stałych  $\gamma_{f,s} = 1,35$ , dla obciążeń zmiennych: w przypadku występowania jednego obciążenia zmiennego  $\gamma_{f,z} = 1,50$  i wielu obciążeń zmiennych  $\gamma_{f,z} = 1,35$ .

Tablica 2.4. Współczynniki obciążenia  $\gamma_{f,i}$  z norm polskich [63]

| Normy PKNMiJ                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                              | $\gamma_{f,i}$<br>gdy obciążenie działa |            |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|------------|
| Numer normy                                     | Rodzaj obciążenia                                                                                                                                                                                                                                                            | niekorzystnie                           | korzystnie |
| PN-82/B-02001                                   | ciężar własny konstrukcji, obciążenie gruntem rodzimym siły na skutek tarcia <sup>1)</sup> , obciążenie gruntem nasypowym<br>ciężar betonów lekkich, materiałów izolacyjnych i wykończeniowych wykonanych w warunkach fabrycznych jak wyżej, lecz wykonanych na placu budowy | 1,1                                     | 0,9        |
|                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1,2                                     | 0,8        |
|                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1,2                                     | 0,9        |
|                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1,3                                     | 0,8        |
| PN-82/B-02003                                   | ciężar materiałów ciekłych w rurociągach                                                                                                                                                                                                                                     | 1,05                                    | 0          |
|                                                 | ciężar materiałów innych w rurociągach                                                                                                                                                                                                                                       | 1,1                                     | 0          |
|                                                 | ciężar materiałów ciekłych w zbiornikach                                                                                                                                                                                                                                     | 1,1                                     | 0          |
|                                                 | ciężar materiałów innych w zbiornikach                                                                                                                                                                                                                                       | 1,2                                     | 0          |
|                                                 | ciężary własne urządzeń i inne obciążenia technologiczne                                                                                                                                                                                                                     | 1,2                                     | 0          |
|                                                 | obciążenia użytkowe stropów do 2 kN/m <sup>2</sup>                                                                                                                                                                                                                           | 1,4                                     | 0          |
|                                                 | obciążenia użytkowe stropów od 2,0 do 5,0 kN/m <sup>2</sup>                                                                                                                                                                                                                  | 1,3                                     | 0          |
|                                                 | obciążenie użytkowe stropów ponad 5,0 kN/m <sup>2</sup>                                                                                                                                                                                                                      | 1,2                                     | 0          |
| PN-86/B-02005<br>PN-82/B-02004                  | obciążenia pionowe i poziome od działania suwnic                                                                                                                                                                                                                             | 1,1 ÷ 1,2 <sup>2)</sup>                 | 0          |
|                                                 | ciężar suwnic pomostowych, wciągarek i wciągników                                                                                                                                                                                                                            | 1,1                                     | 0          |
|                                                 | ciężar wózków podnośnikowych o udźwigu ponad 50 kN                                                                                                                                                                                                                           | 1,1                                     | 0          |
|                                                 | ciężar wózków podnośnikowych o udźwigu do 50 kN                                                                                                                                                                                                                              | 1,2                                     | 0          |
|                                                 | ciężar pojazdów samochodowych o masie ponad 5 Mg                                                                                                                                                                                                                             | 1,2                                     | 0          |
| PN-86/B-02015<br>PN-77/B-02011<br>PN-80/B-02010 | ciężar pojazdów samochodowych o masie do 5 Mg                                                                                                                                                                                                                                | 1,3                                     | 0          |
|                                                 | wpływ zmian temperatury                                                                                                                                                                                                                                                      | 1,2                                     | 0          |
|                                                 | obciążenie wiatrem                                                                                                                                                                                                                                                           | 1,3                                     | 0          |
|                                                 | obciążenie śniegiem                                                                                                                                                                                                                                                          | 1,4                                     | 0          |

<sup>1)</sup> Według PN-82/B-02003.

<sup>2)</sup> W zależności od natężenia pracy suwnicy.

Prognozowane efekty oddziaływań na konstrukcję wyznacza się dla najniekorzystniejszego układu obciążeń ustroju. Ustalając obciążenia zmienne, należy zastosować współczynnik jednoczesności obciążeń  $\psi_i$ , uwzględniający prawdopodobieństwo równoczesnego wystąpienia kilku różnych obciążeń jednocześnie o wartościach charakterystycznych w pełnej wielkości. W przypadku więc jednoczesnego wystąpienia dwóch lub więcej obciążeń (oprócz obciążeń stałych, dla których  $\psi_i = 1$ ) należy przyjmować współczynniki jednoczesności obciążeń zmiennych  $\psi_i$ . W tab. 2.5 podano współczynniki jednoczesności obciążeń zmiennych według [94].

Tablica 2.5. Współczynniki jednoczesności obciążeń zmiennych  $\psi_i$  według [94]

| Lp. | Znaczenie obciążenia zmiennego | $\psi_i$ |
|-----|--------------------------------|----------|
| 1   | podstawowe                     | 1,0      |
| 2   | drugie                         | 0,9      |
| 3   | trzecie                        | 0,8      |
| 4   | wszystkie pozostałe            | 0,7      |

Oprócz współczynników jednoczesności obciążeń w wyznaczaniu obliczeniowych obciążeń są uwzględniane współczynniki redukcji użytkowych obciążeń zmiennych  $\alpha_i$ . Uwzględniają one prawdopodobieństwo wystąpienia wartości charakterystycznych jednego obciążenia w pełnej jego wartości na dużej powierzchni jednego stropu lub na kilku poziomach jednego ustroju nośnego. W tab. 2.6 podano współczynniki redukcji użytkowych obciążeń zmiennych konstrukcji  $\alpha_i$  według [96].

Współczynnik konsekwencji zniszczenia ustroju jest przyjmowany w metodzie stanów granicznych w celu dodatkowego zwiększenia lub zmniejszenia bezpieczeń-

Tablica 2.6. Współczynniki redukcji użytkowych obciążeń zmiennych  $\alpha_i$  według [96]

| Lp. | Określenie budowli i pomieszczeń                                                                                                                                                                                                                             | Współczynnik redukcji $\alpha_i$ dla obciążenia belek i podciągów | Współczynnik redukcji $\alpha_i$ dla obciążenia słupów ścian i fundamentów |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1   | Domy mieszkalne, internaty, schroniska turystyczne, więzienia — bez pomieszczeń specjalnych, gdy powierzchnia pomieszczenia $A > A_{01} = 18 \text{ m}^2$                                                                                                    | $0,3 + \frac{0,7}{\sqrt{A/A_{01}}}$                               | $0,3 + \frac{0,6}{\sqrt{m}}$ ,<br>lecz nie mniej niż 0,5                   |
| 2   | Hotele, biura, pracownie i zakłady naukowe, audytoria, stołówki, kawiarnie, domy kultury, hale koncertowe, kina, kluby, sale wystaw, trybuny o stałych miejscach — bez pomieszczeń specjalnych, gdy powierzchnia pomieszczenia $A > A_{02} = 36 \text{ m}^2$ | $0,5 + \frac{0,5}{\sqrt{A/A_{02}}}$                               | $0,5 + \frac{0,6}{\sqrt{m}}$ ,<br>lecz nie mniej niż 0,75                  |

$A$  — powierzchnia obciążenia belki (podciagu) w  $\text{m}^2$ ,  
 $m$  — liczba poziomów obciążenia (kondygnacji uwzględnionych w obciążeniu elementów)

stwa konstrukcji, w zależności od stopnia zagrożenia życia ludzkiego i wielkości strat gospodarczych. Uwzględnianie tych współczynników w obliczeniach dotyczy między innymi budynków wysokich, budynków użyteczności publicznej i obiektów przemysłowych o dużym znaczeniu społecznym lub gospodarczym (np. elektrowni atomowych czy zapór wodnych). Współczynniki konsekwencji zniszczenia konstrukcji należy traktować jako mnożnik obciążeń charakterystycznych, podobnie jak inne współczynniki obciążenia.

Według normy PN-82/B-02000 [94] przewiduje się następujące współczynniki konsekwencji zniszczenia

- dla budowli, których zniszczenie pociągnęłoby katastrofalne skutki materialne i społeczne (np. zapory wodne, wieżowce)  $\gamma_n > 1,0$ ;
- dla budowli nie przeznaczonych na stały pobyt ludzi  $\gamma_n < 1,0$ ;
- dla wszystkich pozostałych przypadków  $\gamma_n = 1,0$ .

Norma PN-B-03202: 1996 [103], dotycząca projektowania silosów na materiały sypkie, zaleca przyjmować następujące współczynniki konsekwencji zniszczenia:

- $\gamma_n = 1,1$  – dla silosów spawanych o pojemności  $V \geq 1000 \text{ m}^3$  oraz silosów znajdujących się w bezpośredniej bliskości pomieszczeń wykorzystywanych w sposób ciągły, gdzie w sytuacji katastrofy występuje zagrożenie życia ludzkiego lub groźne skutki skażenia środowiska;
- $\gamma_n = 0,9$  – dla silosów o pojemności  $V \leq 200 \text{ m}^3$  obsługiwanych okresowo, zabezpieczonych przed dostępem osób postronnych;
- $\gamma_n = 1,0$  – dla pozostałych silosów.

Współczynniki konsekwencji zniszczenia mogą być kalibrowane dla klas bezpieczeństwa obiektów budowlanych lub podzespołów jednej konstrukcji (tabl. 2.7).

Tablica 2.7. Współczynniki konsekwencji zniszczenia według propozycji DIN 1091/1981 [63]

| Klasa | Możliwe konsekwencje zakłóceń dotyczące                                  |                                                                               | $\gamma_n$ |
|-------|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
|       | nośności                                                                 | użytkowości                                                                   |            |
| 1     | zagrożenie życia ludzkiego – nie ma następstwa ekonomiczne – nieznaczne  | konsekwencje ekonomiczne – nieznaczne niedogodności w użytkowaniu – małe      | 0,9        |
| 2     | zagrożenie życia ludzkiego – zachodzi konsekwencje ekonomiczne – znaczne | konsekwencje ekonomiczne – znaczne niedogodności w użytkowaniu – duże         | 1,0        |
| 3     | obiekty o bardzo dużym znaczeniu dla kraju                               | konsekwencje ekonomiczne – dotkliwe niedogodności w użytkowaniu – bardzo duże | 1,2        |

Współczynnik konsekwencji zniszczenia  $\gamma_n$ , przewidywany na ogólnych zasadach obliczeń konstrukcji nie jest jeszcze powszechnie stosowany, a normy projektowania przewidują raczej różnicowanie obciążeń.

W metodzie stanów granicznych wymiarowania konstrukcji budowlanych, dla wyznaczonych obciążeń według (2.46) oblicza się siły wewnętrzne w elementach ustroju

$$N_w = N_w(P) \quad (2.47)$$

i sprawdza się warunek stanu granicznego nośności ze wzoru

$$\frac{N_w}{N_R} \leq 1, \quad (2.48)$$

gdzie  $N_R$  jest nośnością graniczną elementu.

Warunek bezpieczeństwa w ujęciu normowym [101] rozumiany jest więc jako stopień wykorzystania nośności elementu.

Nośność graniczna elementu

$$N_R = \varphi N, \quad (2.49)$$

zależy od nośności granicznej jego przekroju poprzecznego

$$N = a C w, \quad (2.50)$$

gdzie:

- $a$  – współczynnik uwzględniający specyfikę wyężenia części składowych przekroju poprzecznego ( $\psi$ ,  $\varphi_p$ ),
- $\varphi$  – współczynnik niestateczności ogólnej (wyboczeniowy, zwichrzenia),
- $C$  – charakterystyka geometryczna przekroju poprzecznego ( $W$  – wskaźnik zginania dla elementów obciążonych giętnie,  $A$  – pole przekroju elementów obciążonych osiowo,  $A_v$  – pole przekroju czynnego przy ścinaniu),
- $w$  – parametr wytrzymałościowy materiału.

Globalny współczynnik bezpieczeństwa nośności  $\gamma_N$  rozumiany jest w normach budowlanych według metody stanów granicznych [92], [101] jako pomniejszenie wytrzymałości granicznej elementu. Na wartość globalną  $\gamma_N$  składa się kilka częściowych współczynników nośności  $\gamma_i$ .

Przede wszystkim, przyjmuje się go w normach budowlanych w postaci tak zwanego współczynnika materiałowego  $\gamma_m$  (w normie [101] współczynnik materiałowy

Tablica 2.8. Współczynniki materiałowe wytrzymałości stali i betonu  $\gamma_m$  [63]

| Numer normy   | Materiał konstrukcyjny                                                                                                                                                                                                                                          | Współczynnik $\gamma_m$                         |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| PN-90/B-03200 | stal konstrukcyjna węglowa $\left\{ \begin{array}{l} \text{St0S} \\ \text{St3S itp.} \\ \text{St4S itp.} \end{array} \right.$                                                                                                                                   | 1,11–1,12 <sup>1)</sup>                         |
|               |                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1,09–1,10 <sup>1)</sup>                         |
|               |                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1,08–1,09 <sup>1)</sup>                         |
|               | stal konstrukcyjna niskostopowa<br>stale nie ujęte normą, gdy ich<br>wytrzymałość charakterystyczna $f_{yk}$ $\left\{ \begin{array}{l} 18\text{G2 itp.} \\ < 355 \text{ MPa} \\ 355\text{--}460 \text{ MPa} \\ 460\text{--}590 \text{ MPa} \end{array} \right.$ | 1,16–1,18 <sup>2)</sup><br>1,15<br>1,20<br>1,25 |
| PN-84/B-03264 | stal zbrojeniowa gładka klasy A-0                                                                                                                                                                                                                               | 1,16                                            |
|               | stal zbrojeniowa gładka klasy A-1                                                                                                                                                                                                                               | 1,14                                            |
|               | stal zbrojeniowa żebrowana A-II i A-III                                                                                                                                                                                                                         | 1,16–1,21 <sup>1)</sup>                         |
|               | stal zbrojeniowa żebrowana A-IV                                                                                                                                                                                                                                 | 1,20                                            |
|               | beton zwykły w konstrukcjach żelbetowych i sprężonych                                                                                                                                                                                                           | 1,3 <sup>3)</sup>                               |
|               | beton zwykły w konstrukcjach betonowych niezbrojonych                                                                                                                                                                                                           | 1,5                                             |

<sup>1)</sup> Zależnie od grubości.

<sup>2)</sup> Zależnie od grubości i asortymentu.

<sup>3)</sup> Na ściskanie, a 1,5 – na rozciąganie.

wy oznaczono  $\gamma_s$ ). Współczynnik materiałowy  $\gamma_m$  uwzględnia możliwość niekorzystnych odchyżeń losowych wytrzymałości materiału od ich wartości charakterystycznych, niepewności parametrów geometrycznych (jeśli nie uwzględnia się w inny sposób), niepewności relacji między właściwościami materiału w konstrukcji i wartościami pomierzonymi na próbkach lub podczas kontroli. Współczynniki materiałowe stali i betonu według polskich norm podano w tabl. 2.8 [63].

W projektowaniu konstrukcji stalowych wyznacza się parametr wytrzymałościowy materiału w jako wytrzymałość obliczeniową stali  $f_d$ , która zależy od minimalnej granicy plastyczności  $f_{yk}$ .

Właściwości mechaniczne metali, badane w próbach wytrzymałościowych na rozciąganie (określonej populacji próbek  $n$ ), są ustalone metodami statystycznymi, przy czym zasadnicze znaczenie ma tu wartość granicy plastyczności  $f_y$ . Jej wartość charakterystyczną  $f_{yk}$  ustala się jako kwantyl dla przyjętego poziomu tolerancji (istotności), o prawdopodobieństwie nieprzewyższenia  $p$ . Kwantyle  $f_{yk}$  opisują wzory

– dla rozkładu normalnego

$$f_{yk} = \bar{f}_y (1 - t_{fy} v_{fy}), \quad (2.51)$$

– dla rozkładu logarytmiczno-normalnego

$$f_{yk} = \check{f}_y \exp(-t_{fy} v_{fy}), \quad (2.52)$$

gdzie:

- $\bar{f}_y$  – wartość średnia granicy plastyczności stali,
- $\check{f}_y$  – mediana granicy plastyczności stali (wartość dzieląca pole pod wykresem  $f(f_y)$  na dwie równe części),
- $t_{fy}$  – wskaźnik tolerancji,
- $v_{fy} = s_{fy}/\bar{f}_y$  – współczynnik zmienności granicy plastyczności stali,
- $s_{fy}$  – odchylenie standardowe granicy plastyczności stali,
- $v_{fy}$  – logarytmiczny wskaźnik zmienności granicy plastyczności stali obliczony według wzoru

$$v_{fy} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \ln^2 \frac{f_{yi}}{\check{f}_y}}. \quad (2.53a)$$

Zazwyczaj zakłada się logarytmiczno-normalny (patrz tabl. 1.4) rozkład granicy plastyczności stali. Wartość charakterystyczna  $f_{yk}$  często utożsamiana jest z minimalną granicą plastyczności stali  $f_{ymin}$ . W polskiej normie projektowania konstrukcji stalowych PN-90/B-03200 [101] przyjęto modyfikację podanego rozumowania, gdyż minimalną granicę plastyczności stali ustalono korzystając z (2.52) dla skorygowanego wskaźnika zmienności ( $v_{fy} = v_f$ ), gdzie  $v_f$  wynosi

$$v_f = \sqrt{v_{fy}^2 + v_t^2}, \quad (2.53b)$$

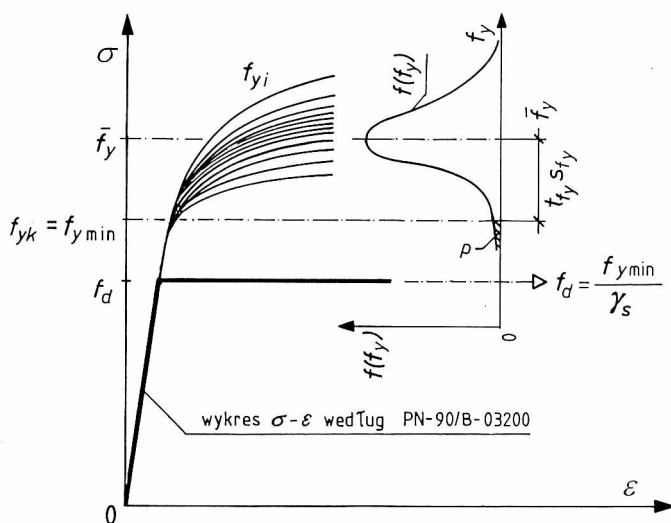
w którym  $v_{fy}$  wyznacza się według (2.53a).

Skorygowany współczynnik zmienności  $v_f$  (2.53b) uwzględnia losowy charakter granicy plastyczności stali  $v_{fy}$  (wyznaczony według (2.53a);  $v_{fy} \cong 8,0\%$ ) oraz losowość geometrii przekroju poprzecznego ( $v_t$ ) wyrobów hutniczych ( $v_t \cong 6,0\%$ ).

W projektowaniu konstrukcji stalowych według półprobabilistycznej metody stanów granicznych, aby określić wytrzymałość obliczeniową stali  $f_d$ , wprowadza się częściowy, materiałowy współczynnik bezpieczeństwa  $\gamma_s$ . Wytrzymałość obliczeniową stali  $f_d$  oblicza się z zależności

$$f_d = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}. \quad (2.54)$$

Graficzną ilustrację wyznaczenia wytrzymałości obliczeniowej stali  $f_d$  przedstawiono na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Wykres  $\sigma$ - $\varepsilon$  stali w ujęciu PN-90/B-03200 [101]

Współczynnik materiałowy  $\gamma_s$  w polskiej normie projektowania konstrukcji stalowych PN-90/B-03200 [101] nie występuje w sposób „jawny”. Norma PN-90/B-03200 podaje wytrzymałości obliczeniowe  $f_d$  dla poszczególnych gatunków stali (wyznaczone dla współczynników materiałowych  $\gamma_s$  o wartościach od 1,08 do 1,25 – tabl. 2.8). Dla stali nie ujętych w normie PN-90/B-03200 należy przyjmować następujące współczynniki materiałowe

- $\gamma_s = 1,15$  – dla stali o  $f_y \leq 355$  MPa,
- $\gamma_s = 1,20$  – dla stali o  $355 < f_y \leq 460$  MPa,
- $\gamma_s = 1,25$  – dla stali o  $460 < f_y \leq 590$  MPa.

Odpowiednikiem współczynnika materiałowego  $\gamma_s$  stali według PN-90/B-03200 jest w Eurokodzie [92] i normie niemieckiej [90] częściowy współczynnik bezpieczeństwa  $\gamma_m$ . Wykonując obliczenia konstrukcji stalowych według przepisów [90] i [92] wytrzymałość obliczeniową stali otrzymuje się dzieląc jej wytrzymałość charakterystyczną przez współczynnik materiałowy  $\gamma_m$ , występujący w obliczeniach w sposób „jawny” (według wzoru (2.54) przyjmując  $\gamma_s = \gamma_m$ ). Częściowy, materiałowy współ-



czynnik bezpieczeństwa  $\gamma_m$  w [90] i [92] wynosi przy sprawdzaniu: przekrojów uplastycznionych  $\gamma_m = \gamma_{M0} = 1,10$ , elementów wyczerpujących nośność w wyniku wybożenia  $\gamma_m = \gamma_{M1} = 1,10$ , nośności przekrojów osłabionych otworami oraz połączeń śrubowych, nitowych, spawanych  $\gamma_m = \gamma_{M2} = 1,25$ . W tabl. 2.9 podano wartości współczynników materiałowych  $\gamma_{Mi}$  przyjmowanych w normach zagranicznych.

Tablica 2.9. Współczynniki materiałowe  $\gamma_{Mi}$  przyjmowane w normach zagranicznych

| $\gamma_{Mi}$ | EC3  | B    | CH   | D    | DK   | EI   | F    | GR   | I    | L    | N    | NL   | P    | S    | SF   | TR   | UK   |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\gamma_{M0}$ | 1,10 | 1,00 | 1,10 | 1,10 | 1,00 | 1,10 | 1,00 | 1,10 | 1,10 | 1,00 | 1,10 | 1,00 | 1,10 | 1,00 | 1,10 | 1,10 | 1,05 |
| $\gamma_{M1}$ | 1,10 | 1,10 | 1,10 | 1,10 | 1,10 | 1,10 | 1,10 | 1,10 | 1,10 | 1,10 | 1,10 | 1,00 | 1,10 | 1,00 | 1,10 | 1,10 | 1,05 |
| $\gamma_{M2}$ | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,25 | 1,20 | 1,25 | 1,25 | 1,20 |

EC3 – według [92].

B, CH, D, ..., UK – według norm belgijskiej, szwajcarskiej, niemieckiej, ..., brytyjskiej.

W półprobabilistycznej metodzie stanów granicznych oprócz współczynnika materiałowego ( $\gamma_s$ ,  $\gamma_m$ ) stosuje się współczynniki korygujące nośność nie występujące w sposób jawny. Są one uwzględniane w modelach obliczeniowych, np. utraty stateczności ogólnej elementów ściskanych, zginanych, gdzie kalibrując krzywe wybożeniowe przyjmuje się obliczeniowy moduł sprężystości

$$E_0 = E/\gamma. \quad (2.55)$$

Częściowy współczynnik bezpieczeństwa  $\gamma$  we wzorze (2.55) uwzględnia nie tylko losowe odchyłki modułu sprężystości  $E$  od wartości średniej, lecz także bifurkacyjny model zmiany stanu równowagi prętów ściskanych oraz inne losowe czynniki wpływające na rozrzut statystyczny nośności z warunku utraty stateczności ogólnej. W kalibrowaniu krzywych wybożeniowych w normie PN-90/B-03200 wynosi on

$$\gamma = 4/3 \cong 1,333 \cong 1,15^2. \quad (2.56)$$

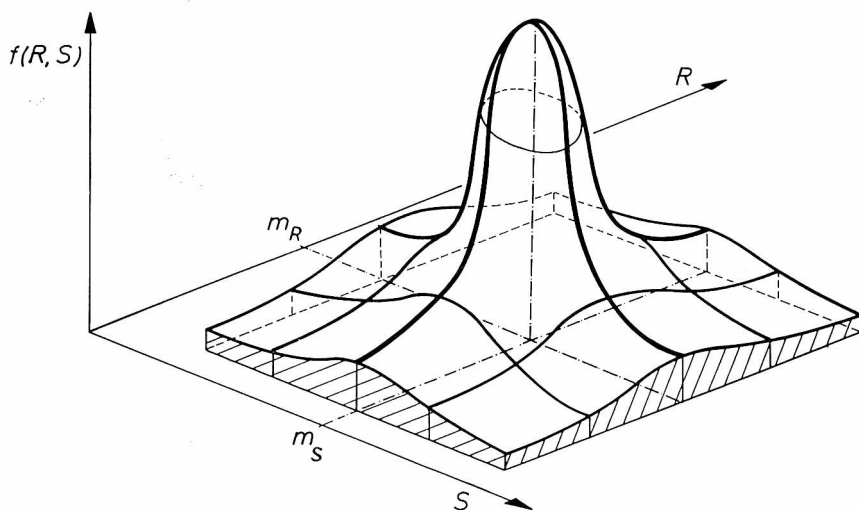
Częściowe współczynniki bezpieczeństwa  $\gamma_i$  uwzględniane są również w określaniu nośności śrub (według PN-90/B-03200) jako współczynniki: niejednorodności materiału śrub (przy określaniu nośności z warunku ścięcia lub zerwania trzpienia)  $\gamma_1 = 1,25$ , rozrzutu sprężenia połączenia  $\gamma_2 = 1,33$ , a także relaksacji naprężeń  $\gamma_3 = 1,15$  (1,06) i rozwarcia styku  $\gamma_4 = 1,07$  (0,8) w połączeniu sprężanym (wartości podane w nawiasach dotyczą połączeń obciążonych dynamicznie).

Również obliczając nośność konstrukcji stalowych ze względu na zmęczenie materiału według PN-90/B-03200 uwzględnia się częściowy współczynnik bezpieczeństwa  $\gamma_{fat}$ , który należy przyjmować w zależności od warunków eksploatacji, inspekcji i konserwacji konstrukcji. Gdy wymienione warunki nie odbiegają od przeciętnych, można przyjmować  $\gamma_{fat} = 1,0$ , natomiast w warunkach skrajnie niekorzystnych  $\gamma_{fat} = 1,2$ .

Podsumowując omawianie współczynników bezpieczeństwa stosowanych w pół-probabilistycznej metodzie stanów granicznych, należy podkreślić, iż zarówno współczynnik obciążenia  $\gamma_P$ , jak i współczynnik nośności  $\gamma_N$  występują w normach projektowania w postaci zmodyfikowanej (tj. w formie wielu współczynników). Współczynniki te są różnie wyspecyfikowane w normach krajowych i zagranicznych. Dlatego też bardzo trudno jest przenosić zasady obliczania konstrukcji z jednych norm do drugich bez kompleksowego ujęcia zasad harmonizacji. Niedopuszczalne jest przenoszenie cząstkowych współczynników, np. zasad ustalania obciążeń obliczeniowych bez rozpatrywania zasad ustalania nośności obliczeniowej lub odwrotnie. Należy zwrócić również uwagę na fakt, że w różnych normach według pół-probabilistycznej metody stanów granicznych częściowe współczynniki bezpieczeństwa często występują w sposób niejawnny. Zagadnieniami harmonizacji norm polskich i europejskich w dziedzinie konstrukcji stalowych zajmował się i podał wiele propozycji w tym zakresie Zbigniew Mendera [49, 51, 52, 53, 54, 55].

## 2.4. Szacowanie bezpieczeństwa konstrukcji metodą probabilistyczną poziomą 2

Podstawą obliczeń probabilistycznych poziomu 2 bezpieczeństwa konstrukcji [63] są dwa parametry statystyczne: wartość centralna  $m_x$  (w szczególności  $\bar{x}$  — średnia lub  $\check{x}$  — medialna) oraz miara rozrzutu  $\sigma_x$  (w szczególności  $s_x$  — odchylenie standardowe lub charakterystyczne,  $v_x$  — logarytmiczny współczynnik zmienności).



Rys. 2.9. Dwuwymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f(R, S)$

Parametry  $m_x$  i  $\sigma_x$  opisują w pełni rozkład normalny. Do oceny niezawodności w tej metodzie jest jednak niepotrzebna identyfikacja typu rozkładu prawdopodobieństwa. Są to obliczenia „bezrozkładowe”, to znaczy nie wymagają hipotez o typie rozkładu prawdopodobieństw. Dlatego w dalszej części tego rozdziału w analizach będą stosowane parametry statystyczne  $m_x$  i  $\sigma_x$ .

Metody probabilistyczne poziomu 2 służą do kalibrowania częściowych współczynników bezpieczeństwa występujących w metodzie probabilistycznej poziomu 1 (najczęściej w celu nowelizacji norm obciążenia i wymiarowania konstrukcji).

Rozpatruje się przypadek analizy niezawodności konstrukcji, w której o bezpieczeństwie decydują dwa pojedyncze i niezależne czynniki losowe: wytrzymałość  $R(\omega)$  i obciążenie  $S(\omega)$ .

Dwuwymiarową gęstość prawdopodobieństwa funkcji niezawodności konstrukcji  $f(R, S)$  przedstawiono na rys. 2.9.

Geometryczną interpretację bezpieczeństwa w metodzie probabilistycznej poziomu 2, przy założeniu liniowości stanu granicznego, pokazano na rys. 2.10.

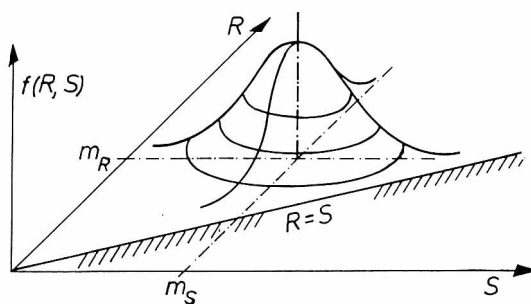
W przypadku dwóch wpływów losowych  $f(S)$  i  $f(W)$  otrzymuje się dwuwymiarowy rozkład prawdopodobieństwa niezawodności konstrukcji w postaci

$$f(R, S) = f(R) f(S). \quad (2.57)$$

Przy założeniu liniowości brzeg stanu granicznego opisuje linia prosta

$$R = S. \quad (2.58)$$

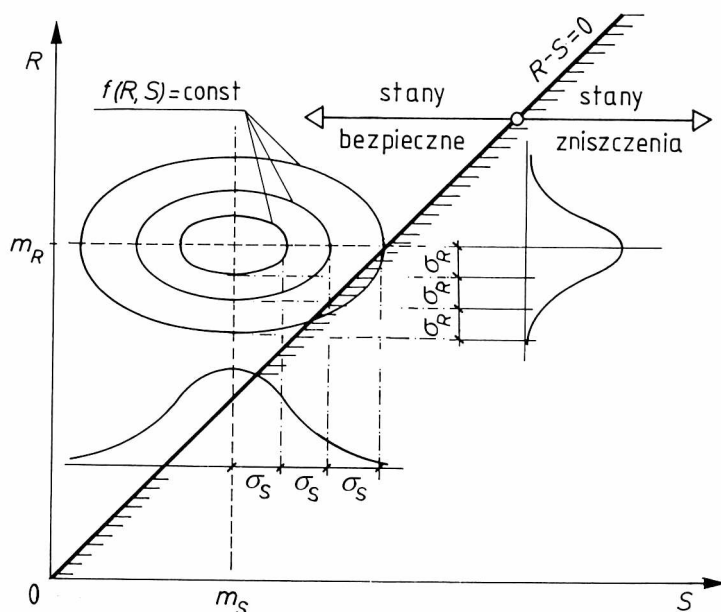
Objętość gęstości prawdopodobieństwa  $f(R, S)$  poniżej tej prostej (patrz rys. 2.10) odpowiada obszarowi awaryjnemu (stanom zawodności konstrukcji).



Rys. 2.10. Określenie bezawaryjnych i awaryjnych stanów konstrukcji

Dla rozkładów normalnych wytrzymałości i obciążenia otrzymuje się dla przypadku  $f(R, S) = \text{const}$  warstwy w postaci elips, co pokazano na rys. 2.11.

Obliczając ilorazy nośności i obciążeń do przynależnych im odchyłeń standardowych  $S/\sigma_S$  oraz  $R/\sigma_R$ , a następnie przechodząc do nowego układu współrzędnych, elipsy na rys. 2.11 zmieniają się w koła (rys. 2.12), przy czym zmienia się również nachylenie prostej stanu granicznego.



Rys. 2.11. Stany bezawaryjne konstrukcji na płaszczyźnie fazowej

Przenosząc dodatkowo początek układu współrzędnych na rys. 2.12 do środka koła  $(m_S/\sigma_S, m_R/\sigma_R)$ , otrzymuje się nowe współrzędne.

$$\hat{S} = \frac{S - m_S}{\sigma_S}, \quad (2.59)$$

$$\hat{R} = \frac{R - m_R}{\sigma_R}. \quad (2.60)$$

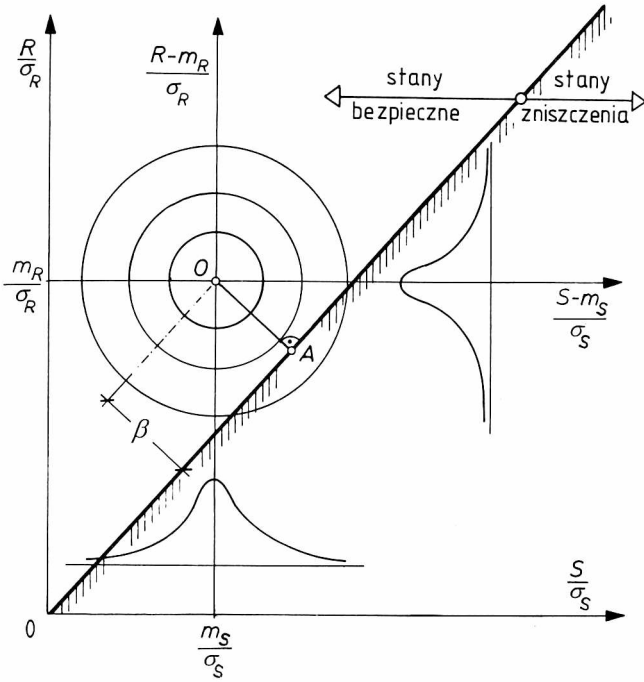
Równanie stanu granicznego konstrukcji (2.58) ma wówczas następującą postać

$$\hat{R}\sigma_R + m_R - \hat{S}\sigma_S - m_S = 0. \quad (2.61)$$

Im bliżej początku zmienionego układu współrzędnych leży prosta stanu granicznego, tym większe jest prawdopodobieństwo  $p_f$ , że stan graniczny zostanie przekroczony. Najmniejsza odległość między środkiem  $O$  przeniesionego układu współrzędnych a prostą stanu granicznego (w punkcie  $A$ ) jest miarą bezpieczeństwa  $\beta$ . Równanie (2.61) można przedstawić w następującej postaci

$$\hat{R} \frac{-\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} + \hat{S} \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} - \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = 0 \quad (2.62)$$

Współczynniki przy wartościach  $\hat{R}$  i  $\hat{S}$  w równaniu (2.62) są kosinusami kierunkowymi (nazywanymi współczynnikami wrażliwości  $\alpha_S, \alpha_R$ ) wersora prostopadłego do linii stanu granicznego w punkcie  $A$  (rys. 2.13)



Rys. 2.12. Stany bezawaryjne konstrukcji na płaszczyźnie fazowej we współrzędnych zredukowanych

$$|\cos \delta_S| = |\alpha_S| = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_R^2}}, \quad (2.63)$$

$$|\cos \delta_R| = |\alpha_R| = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_R^2}} \quad (2.64)$$

i dlatego musi zachodzić związek

$$\alpha_R^2 + \alpha_S^2 = 1. \quad (2.65)$$

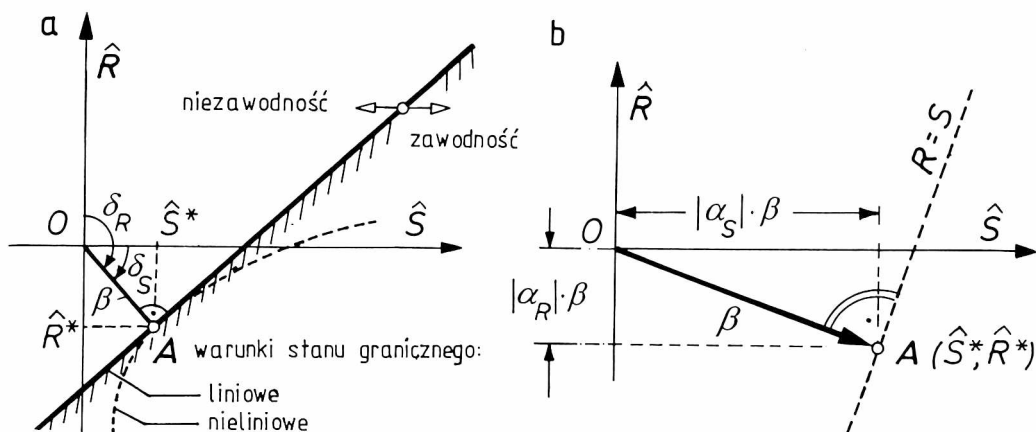
Wraz z kosinusami kierunkowymi i odległością  $\beta$  otrzymuje się współrzędne dolnego punktu  $A$  (nazywanego punktem kontrolnym), prostopadłej do prostej stanu granicznego. Gdy stan graniczny jest formą nieliniową, otrzymuje się krzywoliniowy brzeg obszaru granicznego (rys. 2.13a).

Współrzędne punktu kontrolnego  $A$  na rys. 2.13b są następujące

$$\hat{S}^* = |\cos \delta_S| \beta = |\alpha_S| \beta, \quad (2.66)$$

$$\hat{R}^* = |\cos \delta_R| \beta = |\alpha_R| \beta \quad (\alpha_R \text{ jest ujemne}). \quad (2.67)$$

Należy zaznaczyć, że  $\alpha_S$  i  $\alpha_R$ , jako kosinusy kierunkowe  $\beta$ , zasadniczo wpływają na współrzędne punktu kontrolnego  $A$  (patrz rys. 2.13b).

Rys. 2.13. Określenie indeksu niezawodności  $\beta$ 

W punkcie kontrolnym  $A$  o współrzędnych  $(\hat{S}^*, \hat{R}^*)$  istnieje największe prawdopodobieństwo, że brzeg obszaru granicznego zostanie przekroczony. Sprawdzając bezpieczeństwo elementu, wystarczy więc wyznaczyć najmniejszy wskaźnik niezawodności  $\beta$ . Miarą bezpieczeństwa konstrukcji jest wskaźnik niezawodności  $\beta$  równy odległości linii stanów granicznych  $R = S$  w punkcie  $A$ , od początku układu  $O$  (w układzie współrzędnych standaryzowanych  $\hat{R}, \hat{S}$ ). Jest to probabilistyczne sprawdzenie bezpieczeństwa konstrukcji poziomu 2.

W układzie współrzędnych  $S, R$  współrzędne punktu kontrolnego  $A(\hat{S}^*, \hat{R}^*)$  wyznaczają wartości obliczeniowe  $S_d, R_d$ , które wynoszą

$$\hat{S}^* = S_d = m_S + \alpha_S \beta \sigma_S, \quad (2.68)$$

$$\hat{R}^* = R_d = m_R - \alpha_R \beta \sigma_R. \quad (2.69)$$

Z równania warunku stanu granicznego  $\hat{R}^* = \hat{S}^*$  otrzymuje się wzór na probabilistyczny wskaźnik niezawodności konstrukcji

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\alpha_R \sigma_R + \alpha_S \sigma_S}. \quad (2.70)$$

Wyrażenie (2.70) jest tożsame ze wzorem (2.38).

Praktyczne zastosowania probabilistycznych obliczeń poziomu 2 są łatwiejsze, gdy zrezygnuje się z jednolitej miary niezawodności  $\beta$  i osobno sprawdza się rozdzielone wskaźniki odnoszące się do nośności  $\beta_R$  i obciążeń  $\beta_S$  (rys. 2.13b) w następującej postaci

$$\beta_R = \alpha_R \beta, \quad (2.71)$$

$$\beta_S = \alpha_S \beta. \quad (2.72)$$

Wówczas równanie podstawowe sprzężonej teorii niezawodności (rys. 2.14) ma postać

$$\beta = \alpha_R \beta_R + \alpha_S \beta_S, \quad (2.73)$$

gdzie:

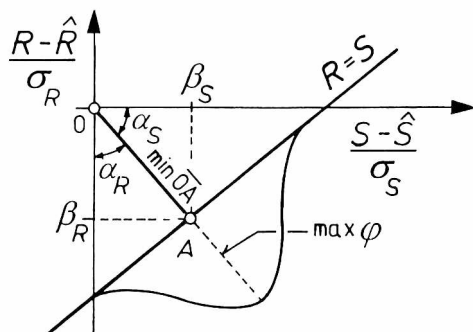
$$\beta_R = \frac{m_R - R_d}{\sigma_R} \quad (\text{wskaźnik nośności}), \quad (2.74)$$

$$\beta_S = \frac{S_d - m_S}{\sigma_S} \quad (\text{wskaźnik skutku działań}). \quad (2.75)$$

Wartości obliczeniowe efektów działań obciążeń  $S_d$  i nośności  $R_d$  wyznacza się tak, aby prawdopodobieństwo wystąpienia bardziej niekorzystnych według Eurokodu 1 [91] wynosiło

$$\Pr(S > S_d) = \varphi(+\alpha_S \beta) = \varphi(-0,7 \beta), \quad (2.76)$$

$$\Pr(R < R_d) = \varphi(-\alpha_R \beta) = \varphi(-0,8 \beta). \quad (2.77)$$



Rys. 2.14. Określenie punktu obliczeniowego zapewnienia niezawodności konstrukcji w metodzie probabilistycznej poziomu 2

Zazwyczaj dla budowli tej samej klasy bezpieczeństwa przyjmuje się  $\beta = \text{const.}$  Według Eurokodu 1 [91] dla stanu granicznego nośności zaleca się przyjmować  $\beta = 3,8$ .

J. Murzewski [63] zaproponował modyfikację wzoru na wskaźnik niezawodności (2.73), uwzględniając oprócz losowej nośności  $R$  i efektu działań  $S$  błąd modelu obliczeniowego  $C$ . Wówczas wskaźnik niezawodności opisuje zależność

$$\beta = \alpha_R \beta_R + \alpha_S \beta_S + \alpha_C \beta_C, \quad (2.78)$$

gdzie:

$\alpha_C$  – współczynnik wrażliwości modelu obliczeniowego,

$\beta_C$  – częściowy współczynnik bezpieczeństwa błędu projektowania.

W ten sposób proponuje się uwzględnić trzy zakresy odpowiedzialności w budownictwie, jakie ponoszą wykonawca ( $R$ ), użytkownik ( $S$ ) i projektant ( $C$ ).

W przypadku nieliniowych warunków brzegowych stanu granicznego nośności współczynniki  $\alpha_S$ ,  $\alpha_R$  (czyli kosinusy kierunkowe) wyraża się przez tangensy punktu kontrolnego  $A$  (czyli przez pochodne cząstkowe) – zgodnie z elementarnymi zasadami geometrii analitycznej.

Sposób szacowania bezpieczeństwa metodą probabilistyczną poziomu 2 przy trzech i więcej niezależnych wpływach losowych jest podobny. W przypadku na przykład trzech czynników losowych w miejsce koła na rys. 2.12 otrzymuje się kulę, w miejsce zaś prostej na rys. 2.13 otrzymuje się płaszczyznę graniczną. Prosta wprowadzona ze środka kuli, prostopadła do powierzchni granicznej, jest wówczas miarą bezpieczeństwa  $\beta$  [34].

Zagadnienie szacowania bezpieczeństwa według obliczeń poziomu 2 omówiono szerzej w pracach m.in. J. Murzewskiego [59, 60, 63] i M. Gwoździa [34].

## 2.5. Szacowanie bezpieczeństwa konstrukcji metodą probabilistyczną poziomu 3

Warunki bezpieczeństwa budowli (wyłączając przypadki niezależne od człowieka, np. eksplozje, ruchy tektoniczne, powódź lub inne klęski żywiołowe) można sformułować, wprowadzając postulat warunkowej pewności. Polega on na zapewnieniu skutecznej kontroli i czujności od strony jednostek odpowiedzialnych za bezpieczeństwo budowli. Tradycja społecznej gwarancji bezpieczeństwa wymaga zachowania zasady rozgraniczenia odpowiedzialności polegającej na ustaleniu dla każdej strony (projektanta, wykonawcy i użytkownika) nieprzekraczalnych (gwarantowanych) granicznych wartości parametrów bezpieczeństwa, za które dana jednostka odpowiada. Przez parametry bezpieczeństwa ustroju rozumie się wszelkie wielkości, które mają wpływ na bezpieczeństwo konstrukcji, tj. nośność budowli  $R$  (gwarantowana przez wykonawcę), obciążenie  $S$  (dopuszczone w trakcie eksploatacji przez użytkownika), błąd modelu obliczeniowego  $C$  (niedoskonałości w modelu analizy wytrzymałości ustroju zastosowanym przez projektanta).

Wielkości  $R(\omega)$ ,  $S(\omega)$ ,  $C(\omega)$  są losowe ( $\omega$ ) i wspólnie generują bezpieczeństwo ustroju. Należy jednak określić, kto i w jakim zakresie jest odpowiedzialny za niezawodność obiektu, i jak każdy z nich wpływa na bezpieczeństwo budowli. Ta identyfikacja odpowiedzialności jest niezbędna, gdyż na przykład bardzo poprawnie zaprojektowana ( $C$ ) i wykonana konstrukcja ( $R$ ) może ulec awarii, gdy użytkownik dopuści do wystąpienia przeciążenia ( $S$ ) obiektu. Stany zawodności ustroju występują również, gdy poprawnie wykonana konstrukcja ( $R$ ) i eksploatowana zgodnie z przeznaczeniem ( $S$ ) została zrealizowana według projektu z błędami obliczeniowymi ( $C$ ). Podobnie poprawnie zaprojektowany ( $C$ ) i eksploatowany ( $S$ ) obiekt może ulec awarii, gdy został wadliwie wykonany ( $R$ ).

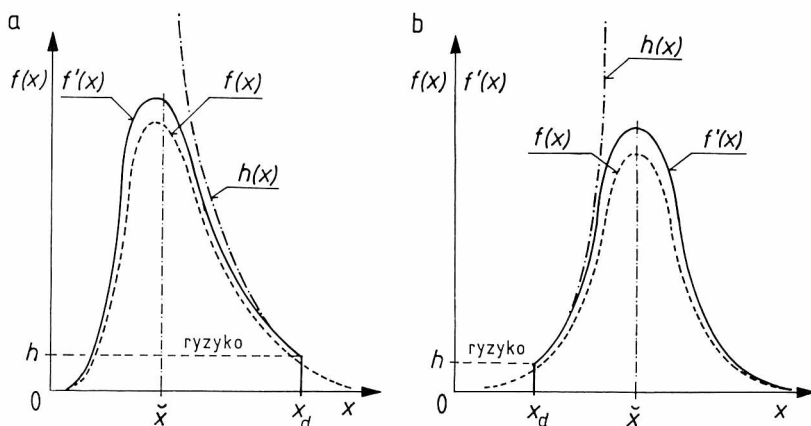
Optymalną sytuacją jest, gdy każda ze stron ( $R$ ,  $S$ ,  $C$ ) gwarantuje podobne bezpieczeństwo przez określenie nieprzekraczalnych parametrów  $R_d$ ,  $S_d$ ,  $C_d$ . Rozwiązanie tak postawionego zadania optymalizacyjnego niezawodności konstrukcji podał J. Murzewski [63].

Zakłada się, że zmienna losowa  $x$ , o funkcji rozkładu  $f(x)$  i dystrybuancie  $F(x)$  przedstawia jakiś parametr bezpieczeństwa ( $R$ ,  $S$ ,  $C$ ). Zakres wartości  $x$  jest nie-



ograniczony, tzn. że skrajne wartości  $x_i$  różniące się od centralnej są mało prawdopodobne, jednak możliwe. Nieograniczone krzywe rozkładu  $f(x)$  uważa się za bezwzględne charakterystyki rozkładów i oznaczono je na rys. 2.15 liniami przerywanymi.

Ponadto rozróżnia się warunkowe charakterystyki rozkładów  $f'(x)$ , oznaczone na rys. 2.15 liniami ciągłymi, dla których zakres zmienności  $x$  leży po jednej stronie zmienności  $x_d$ .



Rys. 2.15. Warunkowe krzywe rozkładu prawdopodobieństw

Warunkowa charakterystyka rozkładu  $f'(x)$  pokazana na rys. 2.15a jest ograniczona prawostronnie wartością graniczną  $x_d$  i opisują ją zależności

$$f'(x) = \frac{f(x)}{F(x_d)} \quad \text{dla } x < x_d, \quad (2.79)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla } x \geq x_d. \quad (2.80)$$

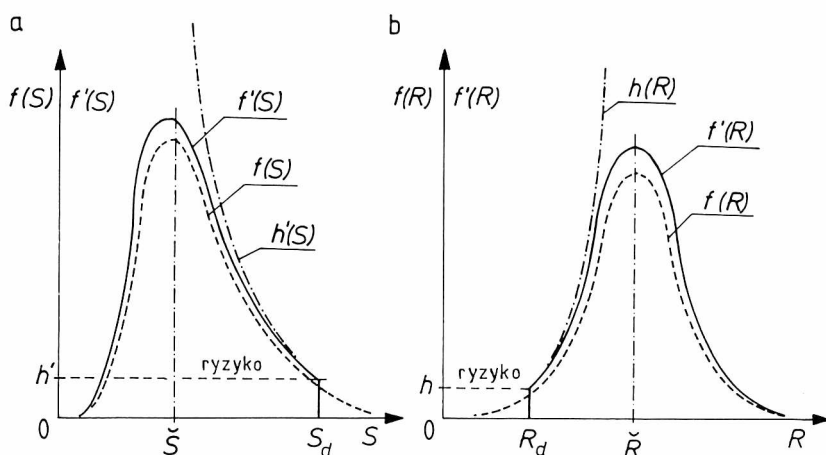
Warunkową charakterystykę rozkładu  $f'(x)$  pokazaną na rys. 2.15b ograniczoną lewostronnie wartością graniczną  $x_d$  opisują wzory

$$f'(x) = 0 \quad \text{dla } x \leq x_d, \quad (2.81)$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x_d)} \quad \text{dla } x > x_d. \quad (2.82)$$

Skorygowane funkcje  $f'(x)$  zostały dobrane tak, aby pola pod krzywymi gęstości  $f(x)$  i  $f'(x)$  były sobie równe i wynosiły 1. Położenie wartości granicznych  $x_d$  z lewej lub prawej strony wykresów pokazanych na rys. 2.15 zależy od tego, czy dany parametr bezpieczeństwa powinien być — tak jak nośność — większy od granicznego  $R_d$ , czy też jak dla obciążeń — mniejszy od granicznego  $S_d$ , co pokazano na rys. 2.16.

Na rys. 2.16a i b liniami przerywanymi oznaczono funkcje gęstości rozkładów  $f(R)$  i  $f(S)$ , liniami ciągłymi — warunkowe krzywe rozkładów  $f'(R)$  i  $f'(S)$ . Ograniczone rozkłady prawdopodobieństwa nośności  $f'(R)$  i obciążeń  $f'(S)$  są warunkowane należytą kontrolą ze strony jednostek za nie odpowiedzialnych.



Rys. 2.16. Warunkowe krzywe rozkładu prawdopodobieństw obciążenia (a) i nośności (b)

W probabilistycznej metodzie poziomu 3 zaproponowanej przez J. Murzewskiego [58], [63] wprowadza się miary bezpieczeństwa w postaci funkcji ryzyka przekroczenia  $h(x)$  (*hazard function*) i skali zagrożenia  $1/k$ .

Funkcja ryzyka  $h(x)$  bywa nazywana intensywnością prawdopodobieństwa i jest ona równa rzędnej granicznej (progowej) rozkładu prawdopodobieństwa uciętego w punkcie  $x_d$  (patrz rys. 2.15). W przypadku analizy bezpieczeństwa konstrukcji ryzyka  $h$  dotyczą przekroczenia wartości  $R_d$  w dół (wystąpienia mniejszej nośności budowli), a  $h'$  wartości  $S_d$  w górę (działania większych obciążeń na konstrukcję). Ryzyka te są związane z gęstością prawdopodobieństwa  $f$  i dystrybucyjami  $F$  następująco

$$h(R_d) = \frac{f(R_d)}{1 - F(R_d)} \quad (\text{zaniżenie}), \quad (2.83)$$

$$h'(S_d) = \frac{f(S_d)}{F(S_d)} \quad (\text{przekroczenie}), \quad (2.84)$$

gdzie:

$R_d$  — wartość obliczeniowa nośności,

$S_d$  — wartość obliczeniowa obciążenia.

Ryzyko  $h(\cdot)$  wyraża się [63] funkcją:

- Millsa w przypadku rozkładów normalnych;
- wykładniczą dla rozkładów Gumbela;
- potęgową, gdy  $R$  ma rozkład Weibulla, a  $S$  Fréchet'a.

Skalę zagrożenia  $1/k_i$  współrzędnej stanu konstrukcji określono [63] w następujący sposób

$$\frac{1}{k_R} = R_d h(R_d), \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{k_S} = S_d h'(S_d). \quad (2.86)$$

Skala zagrożenia  $1/k_i$  równa się funkcji zagrożenia (2.85), (2.86) w punktach obliczeniowych  $S_d, R_d$ . Wartości obliczeniowe  $S_d, R_d$  interpretuje się jako kresy uciętych rozkładów prawdopodobieństw. Z warunku minimalnej zawodności uzyskuje się zasadę równej skali zagrożenia.

Przyjmując jako kryterium optymalizacji stałą skalę zagrożenia  $1/k = \text{const}$ , otrzymuje się równania

$$\frac{R_d f(R_d)}{1 - F(R_d)} = \frac{S_d f(S_d)}{F(S_d)} = \frac{1}{k} = \text{const} \quad (2.87)$$

lub postaci równoważnej

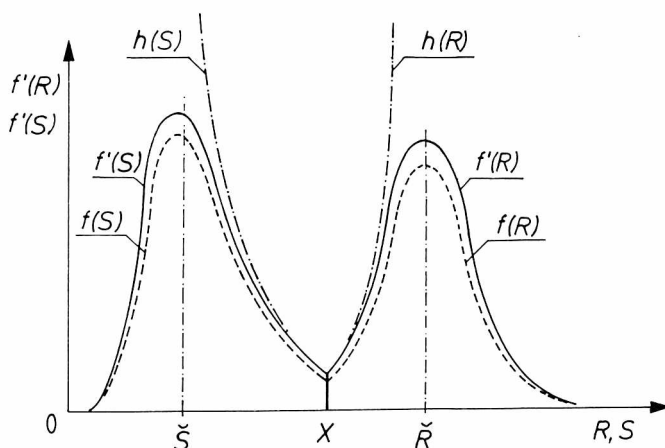
$$R_d h(R_d) = S_d h(S_d) = 1/k. \quad (2.88)$$

Krzywe rozkładu prawdopodobieństw obciążeń i nośności dla stałej skali zagrożenia  $1/k$  oraz  $S_d = R_d = X$  (tj. graficzną interpretację równań (2.87) i (2.88)) pokazano na rys. 2.17. Wówczas prawdopodobieństwo niebezpiecznego stanu konstrukcji wynosi

$$p_f = 1 - [1 - F_R(X)] \cdot F_S(X), \quad (2.89)$$

gdzie  $F_R(X), F_S(X)$  oznaczają dystrybuantę nośności i obciążeń.

Z równania (2.88) wynika zasada, że iloczyny optymalnych wartości obliczeniowych i ryzyka ich przekroczenia są sobie równe. Ta metoda oceny bezpie-



Rys. 2.17. Krzywe rozkładu prawdopodobieństw obciążenia i nośności dla stałej skali zagrożenia  $1/k$

czeństwa wymaga tylko arbitralnego ustalenia jednego parametru, jakim jest skala zagrożenia  $1/k$ . Równocześnie skala zagrożenia  $1/k$  ma tę szczególną cechę, że odpowiada optymalnym proporcjom wartości obliczeniowych, jeśli charakterystyczne wartości ekstremalne zostały ustalone dla aktualnych założeń projektowych.

W metodzie probabilistycznej poziomu 2 globalny wskaźnik niezawodności  $\beta$  zastępują wskaźniki rozdzielone  $\beta_R$  i  $\beta_S$  według zależności (2.73) lub zgodnie z propozycją J. Murzewskiego  $\beta_R$ ,  $\beta_S$  i  $\beta_C$  odpowiednio do trzech zakresów odpowiedzialności, czyli nośności  $R$ , obciążeń  $S$  i błędów projektowych  $C$  według wzoru (2.78). Współczynniki wrażliwości  $\alpha_R$ ,  $\alpha_S$  i  $\alpha_C$  we wzorze (2.78) są proporcjonalne do odchyłeń standardowych. Zasadnicza różnica między podejściem w metodzie probabilistycznej poziomu 2 i poziomie 3 polega na inaczej rozłożonych elementach (miarach) bezpieczeństwa, a także sposobie ich kalibrowania. Wskaźnik globalny niezawodności  $\beta$  oblicza się ze wzoru (2.78) dla zadanego prawdopodobieństwa przekroczenia stanu granicznego i przyjmuje się jako wartość stałą. Prawdopodobieństwo zawodności konstrukcji  $p_f$  jest miarą bezpieczeństwa w metodzie poziomu 2, która bez reguł optymalizacji jest miarą arbitralną. W prezentowanej metodzie probabilistycznej poziomu 3 zaproponowanej przez J. Murzewskiego [63] postuluje się jednakowe i stałe ryzyka względne przekroczenia wartości granicznych.

Optymalną miarą bezpieczeństwa w omawianej metodzie probabilistycznej poziomu 3, polegającą na minimalizacji zawodności  $p_f = \min$  dla trzech parametrów: nośności  $R$ , obciążeń  $S$  i błędu modelu obliczeń  $C$  wprowadził J. Murzewski [63] formułując w postaci wzoru

$$\frac{R_d f(R_d)}{1 - F(R_d)} = \frac{C_d f(C_d)}{1 - F(C_d)} = \frac{S_d f(S_d)}{F(S_d)} = \frac{1}{k} = \text{const} \quad (2.90)$$

lub w równoważnej postaci

$$R_d h(R_d) = S_d h(S_d) = C_d h(C_d) = \frac{1}{k}, \quad (2.91)$$

gdzie:

$S_d, R_d$  — jak w (2.83) i (2.84),

$C_d$  — wartość obliczeniowa niepewności modelu obliczeniowego,

$1/k$  — skala zagrożenia.

Ze wzorów (2.90) i (2.91) wynika, że względne ryzyko zagrożenia, czyli skala zagrożenia  $1/k$  powinna być taka sama dla nośności konstrukcji, efektu działania obciążeń i niepewności zastosowanego modelu obliczeniowego. Wzór (2.90) odpowiada lepiej podziałowi odpowiedzialności za bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych niż wcześniej analizowane dwa ( $R$  i  $S$ ) zakresy odpowiedzialności za niezawodność budowli. W budownictwie są bowiem trzy główne jednostki odpowiedzialne: projektant —  $C$ , wykonawca —  $R$  i użytkownik —  $S$ . Szersze omówienie szacowania bezpieczeństwa metodą probabilistyczną poziomu 3 można znaleźć w pracach J. Murzewskiego (szczególnie w [63]).

## 2.6. Podsumowanie

Obiektywne oszacowanie bezpieczeństwa konstrukcji możliwe jest jedynie przy założeniu probabilistycznego modelu analizy jej niezawodności. Probabilistyczna analiza bezpieczeństwa elementów konstrukcyjnych jest w pełni możliwa na podstawie aktualnego stanu wiedzy. W tym celu należy znać losowe charakterystyki nośności elementów lub systemu konstrukcyjnego oraz rozkłady losowych obciążeń, które pozwolą wyznaczyć losowe siły wewnętrzne.

Sposób wyznaczania parametrów losowych nośności elementów konstrukcyjnych podano w rozdziale 3, czynniki zaś wpływające na losowy ich charakter omówiono w rozdziale 4. W rozdziale 5 podano sposób szacowania bezpieczeństwa i nośności granicznej systemów konstrukcyjnych złożonych z elementów o losowych nośnościach.

Parametry losowe obciążeń zmieniają się w czasie i muszą być analizowane zgodnie z zasadami teorii procesów stochastycznych. Do estymacji losowych parametrów obciążeń zmiennych stosuje się rozkłady niesymetryczne i ekstremalne (patrz rozdział 1.7).

Probabilistyczna ocena obciążenia budowli służy do ustalenia wartości ekstremalnych charakteryzujących się małym prawdopodobieństwem ich wystąpienia.

Zagadnienie losowego charakteru obciążeń konstrukcji budowlanych przedstawiono m.in. w pracach L. Engela i J. Sieczkowskiego [29], J. A. Żurańskiego [88] oraz J. Murzewskiego [58, 59, 61, 63].

### 3. Parametry losowej nośności elementów konstrukcyjnych

#### 3.1. Wprowadzenie

Parametrami losowej nośności elementu konstrukcyjnego  $N(\omega)$ , który może być częścią ustroju nośnego, nazwano momenty statystyczne pierwszego i drugiego rzędu, to znaczy wartość centralną (średnią) oraz wariancję, jak również wielkości pochodne: odchylenie charakterystyczne (standardowe) i współczynnik zmienności. W zastosowaniach praktycznych ograniczono się do analizy wariancji nośności elementu, a obliczeniowe nośności będą szacowane dla przyjętych wskaźników tolerancji  $t$ , odpowiadających argumentowi standaryzowanej funkcji rozkładu.

Zakłada się, że moduł Younga  $E(\omega)$ , pole przekroju poprzecznego  $A(\omega)$ , wskaźnik zginania  $W(\omega)$  i moment bezwładności  $J(\omega)$  są funkcjami losowymi silnie autokorelowanymi po długości pręta. Takie podejście ma swoje uzasadnienie doświadczalne, gdyż losowe rozproszenie właściwości po długości jednego elementu jest znacznie mniejsze niż wyniki pomiarów tych wielkości na losowo wybranych prętach. Założono ponadto, iż badane wielkości losowe można aproksymować rozkładem normalnym. Założenie to nie jest konieczne, gdyż sposób postępowania dla innych rozkładów zmiennej losowej jest podobny, a poczyniono je ze względu na prezentację prostych przykładów obliczeniowych. W podrozdziale 3.7 analizowano losową nośność elementu, która jest generowana parametrami losowymi o dwóch różnych rozkładach funkcji gęstości.

W rozdziale tym będzie się analizować losową nośność elementów (przekroju, pręta) dla prostych przypadków wytrzymałościowych w zakresie sprężystej i plastycznej fazy wyężenia materiału oraz losowe ścieżki równowagi statycznej prętów rozciąganych, zginanych, ściskanych, a także w złożonych stanach wyężenia.

Tak określoną losową nośność  $N(\omega)$  elementu można zapisać w postaci iloczynu trzech, w zasadzie niezależnych, wielkości losowych

$$N(\omega) = a(\omega) C(\omega) w(\omega), \quad (3.1)$$

gdzie:

- $C(\omega)$  — losowa charakterystyka geometryczna przekroju poprzecznego elementu (np.: pole przekroju poprzecznego  $A(\omega)$ , wskaźnik zginania  $W(\omega)$ , pole części przekroju czynnego przy ścinaniu  $A_v(\omega)$  — w zależności od sytuacji obliczeniowej),
- $w(\omega)$  — losowa wytrzymałość materiału,
- $a(\omega)$  — współczynnik modelu wyężenia elementu (np. współczynnik: wyboczeniowy  $\varphi$ , zwirzenia  $\varphi_L$ , niestateczności miejscowej  $\varphi_p$ ).

Na losowość nośności  $N(\omega)$  elementu konstrukcyjnego, jako niezależnej części ustroju nośnego, składa się wiele czynników, z których najważniejsze to:

- losowe parametry wytrzymałości materiału (naprężenia walcownicze, naprężenia spawalnicze),
- losowe charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego pręta,
- losowe imperfekcje geometryczne osi pręta (mimośrodów technologiczne i konstrukcyjne osi pręta),
- losowe mimośrodów obciążeń (wady geometryczne styków i węzłów).

Wymienione czynniki sprawiają, iż nośność elementu nie jest deterministyczna jak liczba, lecz powinna być traktowana sposobem probabilistycznym jako funkcja. Dlatego też w analizie nośności w ujęciu deterministycznym używa się określenia — wyznaczenie nośności, w ujęciu zaś probabilistycznym — oszacowanie nośności.

Wpływ wymienionych losowych czynników na nośność  $N(\omega)$  elementów konstrukcyjnych oraz ich charakter omówiono w rozdziale 4.

## 3.2. Losowa nośność pręta rozciąganego

Losową nośność pręta rozciąganego osiowo o losowym polu przekroju poprzecznego, zbudowanego z materiału o losowej wytrzymałości można określić ze wzoru

$$N_{Rt}(\omega) = A(\omega)w(\omega), \quad (3.2)$$

gdzie  $A(\omega)$  — losowe pole przekroju poprzecznego netto,  $w(\omega)$  — jak w (3.1).

Losową nośność  $N_{Rt}(\omega)$  takiego pręta charakteryzują następujące parametry: wartość średnia nośności  $\bar{N}_{Rt}$  i odchylenie standardowe nośności  $s_{N_{Rt}}$ .

Uwzględniając związki (1.34) i (1.35), można oszacować wartość średnią nośności pręta rozciąganego

$$\bar{N}_{Rt} = \bar{A}\bar{w} \quad (3.3)$$

oraz odchylenie standardowe nośności

$$s_{N_{Rt}} = \sqrt{(\bar{A})^2 s_w^2 + s_A^2 \bar{w}^2 + (\bar{w})^2 s_A^2}, \quad (3.4)$$

gdzie:

$\bar{A}, s_A$  — wartość średnia i odchylenie standardowe losowego pola przekroju poprzecznego pręta,

$\bar{w}, s_w$  — wartość średnia i odchylenie standardowe losowej wytrzymałości materiału.

Wzór (3.4), opisujący odchylenie standardowe losowej nośności pręta rozciąganego, jest ważny, gdy pole przekroju poprzecznego opisuje jeden parametr geometryczny (np. pole przekroju poprzecznego pełnego pręta okrągłego opisuje tylko losowa średnica  $d(\omega)$ ). Dla prętów o przekrojach prostokątnych, dwuteowych, zetowych, kątowników itp. pole przekroju poprzecznego zależy od kilku losowych parametrów

geometrycznych:  $A[a_1(\omega), a_2(\omega), \dots, a_i(\omega)]$ . Wówczas wartość średnią  $\bar{A}$  i odchylenie standardowe pola przekroju poprzecznego  $s_A$  we wzorze (3.4) należy oszacować korzystając ze wzoru (1.44) i (1.45). Wynoszą one

$$\bar{A} = A(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_i), \quad (3.5)$$

$$s_A = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial A}{\partial a_i} \right)^2 s_{a_i}^2}, \quad (3.6)$$

gdzie:

$\bar{a}_i, s_{a_i}$  — wartość średnia i odchylenie standardowe losowego  $i$ -tego wymiaru geometrycznego przekroju poprzecznego.

Na przykład dla pręta o prostokątnym losowym polu poprzecznym:  $h(\omega) \times b(\omega)$  i parametrach losowych wysokości ( $\bar{h}, s_h$ ) i szerokości ( $\bar{b}, s_b$ ), wartość średnia pola przekroju poprzecznego wynosi

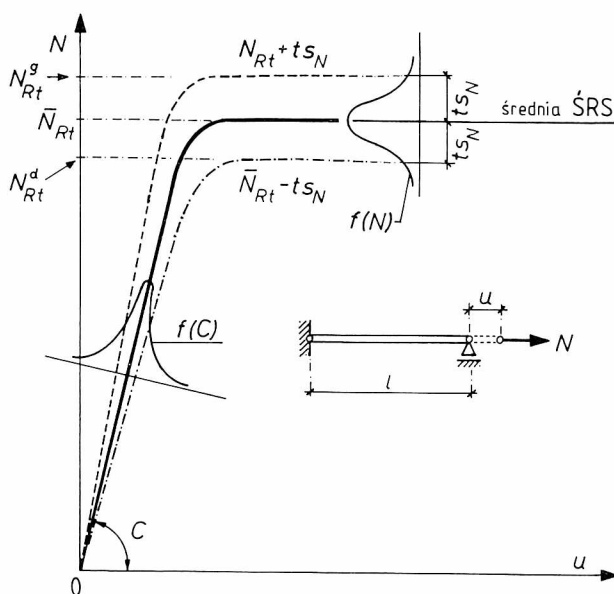
$$\bar{A} = \bar{h}\bar{b}, \quad (3.7a)$$

odchylenie standardowe pola przekroju poprzecznego zaś opisuje wzór

$$s_A = \sqrt{(\bar{h})^2 s_b^2 + s_h^2 \bar{b}^2 + (\bar{b})^2 s_h^2}. \quad (3.7b)$$

Korzystając ze wzorów (3.3) i (3.4), można również wyznaczyć parametry losowej nośności pręta ścinanego  $N_{Rv}(\omega)$ , o przekroju czynnym przy ścinaniu  $A_v(\omega)$ , wykonanego z materiału o wytrzymałości na ścinanie  $w_v(\omega)$ .

Na rys. 3.1 pokazano losową ścieżkę równowagi statycznej  $N(u)$  pręta rozciąganego. Wyróżnić w niej można sprężystą i plastyczną fazę wyłączenia elementu rozciąganego. Na rys. 3.1 linią ciągłą oznaczono średnią ścieżkę równowagi statycznej



Rys. 3.1. Ścieżka równowagi statycznej pręta rozciąganego



elementu rozciąganego. Dysponując wartością średnią  $\bar{N}_{Rt}$  i odchyleniem standardowym  $s_{N_{Rt}}$  losowej nośności elementu można oszacować na założonym poziomie tolerancji  $t$  dolną nośność na rozciąganie. Na rys. 3.1 linią kropka–kreska oznaczono dolne oszacowanie nośności pręta na rozciąganie.

### Przykład 3.1

Oszacować bezpieczeństwo stalowego płaskownika o losowej szerokości  $b(\omega)$ :  $(\bar{b}; s_b) = (6; 0,2)$  mm i wysokości  $h(\omega)$ :  $(\bar{h}; s_h) = (10; 0,3)$  mm, wykonanego z materiału o parametrach wytrzymałości  $w(\omega)$ :  $(\bar{w}; s_w) = (300; 15)$  MPa, obciążonego losową siłą rozciągającą  $P(\omega)$ :  $(\bar{P}; s_p) = (15; 1,59)$  kN.

Wartość średnia (3.7a) i odchylenie standardowe (3.7b) prostokątnego pola przekroju poprzecznego analizowanego płaskownika wynoszą

$$\bar{A} = \bar{b} \cdot \bar{h} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ mm}^2,$$

$$s_A = \sqrt{(\bar{b})^2 s_h^2 + s_b^2 \bar{h}^2 + (\bar{h})^2 s_b^2} = \sqrt{6^2 \cdot 0,3^2 + 0,2^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 0,2^2} = 2,69 \text{ mm}^2.$$

Wartość średnia (3.3) i odchylenie standardowe (3.4) nośności analizowanego pręta rozciąganego wynoszą

$$\bar{N}_{Rt} = \bar{A} \cdot \bar{w} = 60 \cdot 300 \cdot 10^{-3} = 18 \text{ kN},$$

$$\begin{aligned} s_{N_{Rt}} &= \sqrt{(\bar{A})^2 s_w^2 + s_A^2 \bar{w}^2 + (\bar{w})^2 s_A^2} = \\ &= \sqrt{(60^2 \cdot 15^2 + 2,69^2 \cdot 300^2 + 300^2 \cdot 2,69^2) \cdot 10^{-6}} = 1,209 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Indeks niezawodności (zapasu bezpieczeństwa) tego pręta obciążonego rozciągającą siłą  $P(\omega)$  wynosi

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{P}}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}} = \frac{18 - 15}{\sqrt{1,209^2 + 1,59^2}} = \frac{3}{2,00} = 1,50.$$

Z tablicy 1.2 odczytano  $p(t) = p(1,5) = 0,933$ .

W analizowanym przykładzie pręta rozciąganego oszacowane bezpieczeństwo wynosi  $R = 0,933$ , prawdopodobieństwo zaś awarii wynosi 6,7%.

Należy zauważyć, iż deterministyczna interpretacja niezawodności badanego pręta rozciąganego (współczynnik bezpieczeństwa obliczony dla wartości średnich) daje wartość  $n_0 = \bar{N}/\bar{P} = 1,20$ , co mogłoby sugerować 20-procentowy „zapas” nośności.

## 3.3. Losowa nośność pręta zginanego

Analizowana będzie losowa nośność pręta zginanego czystym momentem zginającym, zabezpieczonego przed utratą płaskiej postaci zginania (przed zwichrzeniem). W praktyce chodzi o obciążenie poprzeczne działające w płaszczyźnie środkowej

przekroju (brak skręcania wywołanego mimośrodowym obciążeniem) pręta o dostatecznej sztywności względem słabszej osi. Ponadto o przypadek, gdy wpływ sił poprzecznych nie redukuje nośności elementu na zginanie (czyste zginanie).

Losową nośność przekroju pręta zginanego, o losowym wskaźniku zginania, zbudowanego z materiału o losowej wytrzymałości określa się ze wzoru

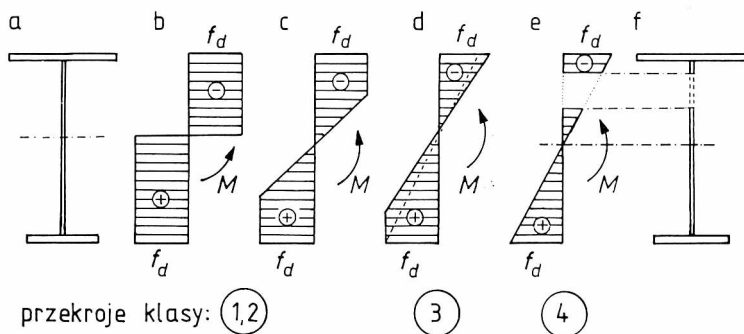
$$M_R(\omega) = W(\omega) w(\omega), \quad (3.8)$$

gdzie:

$W(\omega)$  – losowy wskaźnik zginania przekroju,

$w(\omega)$  – jak w (3.1).

Na rys. 3.2 pokazano rozkłady naprężeń w zginanym momentem  $M$  elemencie dwuteowym (rys. 3.2a) w zależności od klasy przekroju poprzecznego. W przypadku zginania, gdy występuje siła poprzeczna  $V$ , należy pozostawić sprężyste jądro przekroju do przeniesienia naprężeń stycznych  $\tau$  według rys. 3.2c.



Rys. 3.2. Rozkłady naprężeń w przekroju zginanym

W przekrojach klasy 1 i 2 można według [92] dopuścić do pełnego uplastycznienia elementu zginanego (rys. 3.2b) i wówczas w analizach losowej nośności przekroju obciążonego czystym momentem zginającym w (3.8) można przyjąć

$$W(\omega) = W_{pl}(\omega), \quad (3.9)$$

gdzie  $W_{pl}(\omega)$  jest losowym wskaźnikiem oporu plastycznego.

Wykorzystanie rezerwy plastycznej przekrojów klasy 1 i 2 według [92] oraz normy PN-90/B-03200 [101] jest uwarunkowane nie tylko wymogami odnoszącymi się do geometrii przekrojów poprzecznych, ale również do właściwości materiału [10].

Norma [101] dopuszcza dla zginanych poprzecznie elementów prętowych klasy 1 i 2 ograniczone uplastycznienie przekroju (rys. 3.2c). We wzorze (3.8) należy wówczas przyjąć

$$W(\omega) = \alpha_p W_{el}(\omega), \quad (3.10)$$

w którym:

$$\alpha_p = 0,5(1 + \alpha), \quad (3.11)$$

$$\alpha = \frac{W_{pl}(\omega)}{W_{el}(\omega)}, \quad (3.12)$$

gdzie  $W_{el}(\omega)$  oznacza losowy, sprężysty wskaźnik zginania przekroju.

Przekroje klasy 3 charakteryzują się tym, że ich nośność jest ograniczona początkiem uplastycznienia się strefy ściskanej (rys. 3.2d). Strefa rozciągana takich przekrojów może być częściowo uplastyczniona. W losowej analizie zginanych bisymetrycznych przekrojów klasy 3 można we wzorze (3.8) przyjąć

$$W(\omega) = W_{el}(\omega). \quad (3.13)$$

Analizując losową nośność graniczną zginanych prętów cienkościennych klasy 4, wrażliwych na lokalną utratę stateczności ściskanych półek (rys. 3.2e) należy zredukować pole przekroju poprzecznego (rys. 3.2f), a we wzorze (3.8) przyjąć

$$W(\omega) = \psi W_{el}(\omega), \quad (3.14)$$

w którym:

$$\psi = W_{ef}(\omega)/W_{el}(\omega), \quad (3.15)$$

gdzie  $W_{ef}(\omega)$  oznacza losowy, efektywny wskaźnik zginania przekroju.

Losową nośność przekroju elementu zginanego opisują parametry: wartość średnia nośności  $\bar{M}_R$  oraz odchylenie standardowe nośności  $s_{M_R}$ . Wartość średnią  $\bar{M}_R$  i odchylenie standardowe  $s_{M_R}$  nośności przekroju pręta zginanego otrzymuje się uwzględniając związki (1.34)–(1.35) we wzorze (3.8) i opisują je zależności

$$\bar{M}_R = \bar{W} \cdot \bar{w}, \quad (3.16)$$

$$s_{M_R} = \sqrt{(\bar{W})^2 s_w^2 + \bar{W}^2 s_w^2 + (\bar{w})^2 s_W^2}, \quad (3.17)$$

gdzie:

$\bar{W}, s_W$  — wartość średnia i odchylenie standardowe losowego wskaźnika zginania przekroju poprzecznego elementu,

$\bar{w}, s_w$  — wartość średnia i odchylenie standardowe losowej wytrzymałości materiału.

Podobnie jak dla pręta rozciąganego, gdy wskaźnik zginania przekroju zginanego zależy od kilku parametrów geometrycznych  $a_i$ , wartość średnią i odchylenie standardowe wskaźnika zginania  $s_W$  we wzorze (3.17) należy wyznaczyć, korzystając ze wzorów (1.44) i (1.45).

Dla analizowanego w podrozdziale 3.2 prostokątnego, zginanego przekroju poprzecznego otrzymano następujące wzory na losowe parametry sprężystego wskaźnika zginania

$$\bar{W} = \frac{\bar{b} \cdot (\bar{h})^2}{6}, \quad (3.18)$$

$$s_W = \sqrt{\frac{1}{36} [(\bar{h})^4 s_b^2 + 4(\bar{b})^2 (\bar{h})^2 s_h^2]}. \quad (3.19)$$

Wyprowadzone wzory określające parametry losowej nośności (3.8), (3.16) i (3.17) dotyczą przekroju zginanego w przypadku czystego zginania (nie uwzględnia się sił tnących). Można je stosować również do oszacowania nośności prętów zginanych, gdy są one zabezpieczone przed utratą płaskiej postaci zginania (zwichrzenia).

Według ideologii normy PN-90/B-03200 [101] losową nośność krytyczną z warunku zwichrzenia elementu zginanego oszacuje się ze wzoru

$$M_R = \varphi_L W w, \quad (3.20)$$

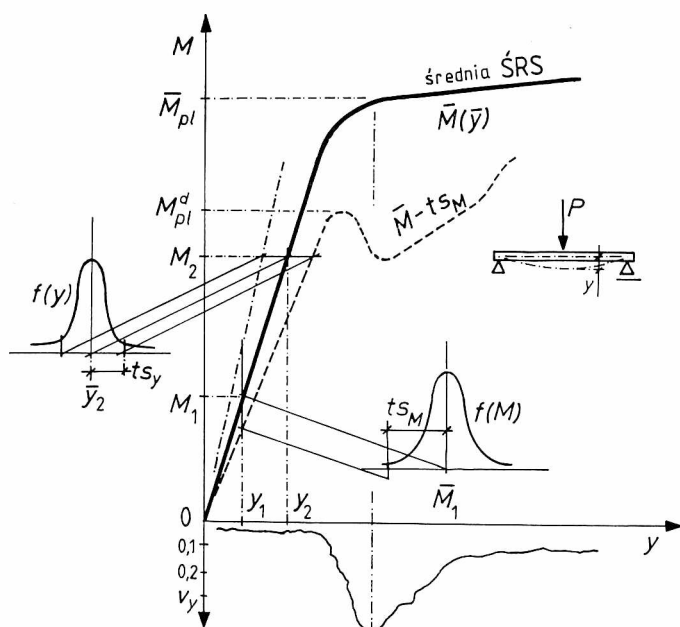
gdzie  $\varphi_L$  oznacza współczynnik niestateczności ogólnej (zwichrzenia).

Biorąc pod uwagę, że  $\varphi_L$ ,  $W$  oraz  $w$  są losowe, również  $M_R$  jest losowe. Wtedy wzór (3.20) przyjmuje postać

$$M_R(\omega) = \varphi_L(\omega) W(\omega) w(\omega), \quad (3.21)$$

gdzie  $\varphi_L$  jest losowym współczynnikiem niestateczności ogólnej (zwichrzenia).

Sposób podejścia do zagadnienia oszacowania nośności elementu zginanego z uwzględnieniem zwichrzenia jest podobny jak dla przypadku utraty stateczności pręta ściskanego, które to zagadnienie przedstawiono szerzej w podrozdziale 3.4.



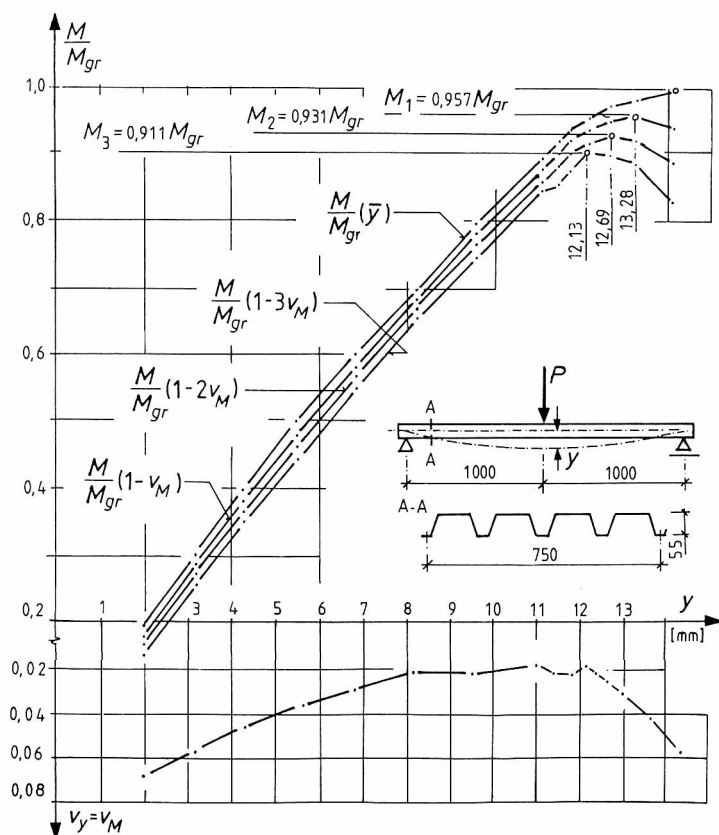
Rys. 3.3. Ścieżka równowagi statycznej pręta zginanego o przekroju klasy 1

Na rys. 3.3 pokazano ścieżkę (zależność obciążenie–przemieszczenie) równowagi statycznej (ŚRS) stalowego pręta zginanego, o przekroju klasy 1, o losowej geometrii przekroju poprzecznego oraz wytrzymałości materiału belki. W dolnej części rys. 3.3 pokazano wykres współczynnika zmienności przemieszczeń  $v_y$  zginanych

belek, zidentyfikowany doświadczalnie [18]. W badaniach [18], na populacji 5 modeli belek jednoprzęsłowych o przekroju prostokątnym  $10 \times 20$  mm, mierzono ugięcia wywołane siłą skupioną przyłożoną w środku rozpiętości elementów zginanych.

W przedstawionej na rys. 3.3 ŚRS można wyróżnić sprężystą (liniową) i plastyczną fazę wyężenia ustroju. Przejściu ze sprężystej w plastyczną fazę wyężenia ustroju towarzyszy wzrost współczynnika zmienności przemieszczeń [18]. W opisie losowego przebiegu procesu zginania badanych belek można wyróżnić średnią ścieżkę równowagi statycznej (oznaczoną na rys. 3.3 linią grubą) oraz górne i dolne oszacowanie nośności (oznaczone na rys. 3.3 linią przerywaną). Na rys. 3.3 pokazano ponadto rozkład losowej nośności pręta zginanego  $f(M)$  przy wymuszeniu zdeterminowanego przemieszczenia  $y_1$  oraz rozkład losowego przemieszczenia  $f(y)$  przy zginaniu go zdeterminowanym momentem zginającym  $M_2$ .

Na rys. 3.4 pokazano ścieżki równowagi statycznej zginanego pręta cienkościennego [7], o przekroju klasy 4 (o ściankach wrażliwych na lokalną utratę stateczności). Sporządzono je we współrzędnych  $M/M_{gr} - y$  (gdzie  $M_{gr}$  oznacza obciążenie graniczne belki mierzone momentem zginającym,  $y$  – ugięcie w środku rozpiętości belki).



Rys. 3.4. Ścieżki równowagi statycznej zginanych blach fałdowych

Badania przeprowadzono na zginanych jednoprzęsłowych blachach fałdowych, o wysokości profilu (płyty) 55 mm, rozstawie fałd 188 mm i grubościach (ścianek) blach 0,75 mm (5 szt.) i 1,00 mm (5 szt.). W badaniach [7] mierzono przemieszczenia elementów zginanych wywołane siłą skupioną przyłożoną w środku ich rozpiętości. W dolnej części rys. 3.4 pokazano wykres współczynnika zmienności przemieszczeń  $v_y$  zginanych elementów cienkościennych. W przedstawionych ŚRS można wyróżnić sprężystą nieliniową fazę wyężenia ustroju, charakterystyczną dla zginanych prętów cienkościennych. Wyczerpanie nośności zginanych blach fałdowych polegało na nagłym zniszczeniu ściskanej półki i powstaniu załomu plastycznego w ściskanej strefie przekroju, czemu towarzyszyło gwałtowne obniżenie nośności. Ścieżkę równowagi statycznej zginanych blach fałdowych można opisać modelem nieliniowo-sprężysto-kruchym. W fazie poprzedzającej zmianę stanu równowagi ustroju (której można przypisać model kruchy) towarzyszył wzrost współczynnika zmienności przemieszczeń zginanych blach fałdowanych  $v_y$  [7].

### Przykład 3.2

Oszacować nośność graniczną (mierzoną momentem zginającym) przekroju dwuteowego (I 200), dla prognozowanego bezpieczeństwa  $R = 0,99865$  ( $t = 3$ ). Belka jest wykonana ze stali o parametrach wytrzymałościowych:  $\bar{w} = 332$  MPa i  $v_w = 0,09$  (stal St3). Jej średni sprężysty wskaźnik zginania oraz współczynnik zmienności wskaźnika zginania wynoszą:  $\bar{W} = 214$  cm<sup>3</sup>,  $v_w = 0,07$ .

Analizowany przekrój spełnia według PN-90/B-03200 warunki przekroju klasy 1. Losową nośność graniczną przekroju zginanego (moment plastyczny) oszacowano ze wzoru

$$M_{pl}(\omega) = W_{pl}(\omega) w(\omega) = \alpha W_{el}(\omega) w(\omega),$$

gdzie  $\alpha$  oznacza współczynnik rezerwy plastycznej, który przyjęto  $\alpha = 1,14$ .

Średni plastyczny wskaźnik wytrzymałości analizowanego przekroju wynosi

$$\bar{W}_{pl} = \alpha \cdot \bar{W} = 1,14 \cdot 214 = 244 \text{ cm}^3,$$

odchylenie standardowe obliczono wg wzoru:

$$s_{W_{pl}} = \bar{W}_{pl} \cdot v_w = 244 \cdot 0,07 = 17,08 \text{ cm}^3.$$

Plastyczna nośność średnia na zginanie belki z I 200, ze stali St3 wynosi

$$\bar{M}_{pl} = \bar{W}_{pl} \cdot \bar{w} = 244 \cdot 332 \cdot 10^{-3} \approx 81,0 \text{ kNm},$$

oraz jej odchylenie standardowe (dla  $s_w = 0,09 \cdot 332 = 30$  MPa), obliczone według (3.17) wynosi

$$\begin{aligned} s_{M_{pl}} &= \sqrt{(\bar{W})^2 s_w^2 + s_{\bar{W}}^2 s_w^2 + (\bar{w})^2 s_{\bar{W}}^2} = \\ &= \sqrt{(244^2 \cdot 30^2 + 17,08^2 \cdot 30^2 + 332^2 \cdot 17,08^2) \cdot 10^{-6}} = 9,26 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Kwantyl nośności plastycznej zginanego I 200, na poziomie  $p(t = 3) = 0,99865$  wynosi

$$M_0 = \bar{M}_{pl} - t_{S_{M_{pl}}} = 81,0 - 3 \cdot 9,26 = 53,22 \text{ kNm}.$$

W analizowanym przypadku kwantyl nośności przekroju zginanego  $M_0$  jest o 34,3% mniejszy od nośności średniej elementu.

### 3.4. Losowa nośność pręta zginanego i rozciąganego

W zależności od wrażliwości przekroju poprzecznego na lokalną utratę stateczności ściskanych pól i środników (proporcji geometrycznych elementów składowych — ścianek) można dopuścić do sprężystego bądź plastycznego wyężenia przekroju pręta zginanego i rozciąganego.

Losową nośność sprężystą przekroju pręta zginanego momentem  $M(\omega)$  i rozciąganego siłą  $N(\omega)$ , o losowych charakterystykach geometrycznych przekroju poprzecznego  $A(\omega)$  i  $W(\omega)$ , wykonanego z materiału o losowej wytrzymałości  $w(\omega)$  szacuje się z następującego związku interakcyjnego

$$\frac{N(\omega)}{N_{Rt}(\omega)} + \frac{M(\omega)}{M_R(\omega)} \leq 1, \quad (3.22)$$

gdzie:

$N_{Rt}(\omega)$  — losowa, sprężysta nośność graniczna przekroju pręta rozciąganego (p. 3.2),

$M_R(\omega)$  — losowa, sprężysta nośność graniczna przekroju pręta zginanego (p. 3.3),

$N(\omega)$  — losowa siła osiowa działająca w przekroju pręta,

$M(\omega)$  — losowy moment zginający działający w przekroju pręta.

W prętach o losowych przekrojach klasy 1 i 2, w których można wykorzystać plastyczną rezerwę nośności, interakcję równoczesnego zginania i rozciągania według ideologii [92] opisuje zależność

$$\left[ \frac{N(\omega)}{N_{Rt,pl}(\omega)} \right]^\beta + \frac{M(\omega)}{M_{R,pl}(\omega)} \leq 1, \quad (3.23)$$

gdzie:

$N_{R,pl}(\omega)$  — losowa, plastyczna nośność graniczna przekroju pręta rozciąganego,

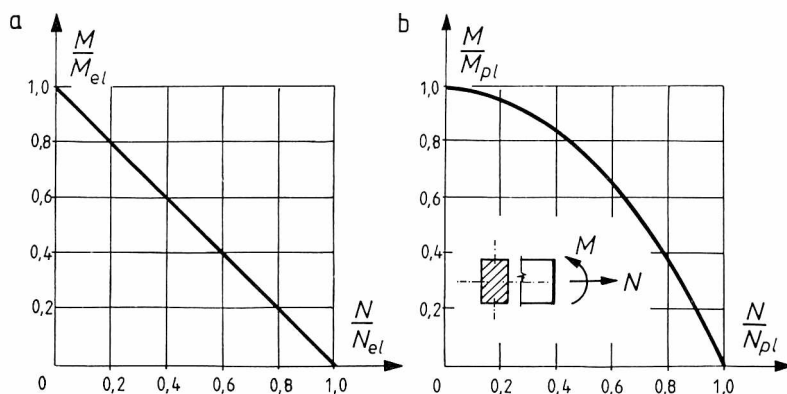
$M_{R,pl}(\omega)$  — losowa, plastyczna nośność graniczna przekroju pręta zginanego (p. 3.3),

$M(\omega), N(\omega)$  — jak w (3.22).

Współczynnik  $\beta$  we wzorze (3.23) zależy od kształtu przekroju poprzecznego i na przykład dla prostokąta  $\beta = 2$ .

Bezwymiarowy wykres interakcji zginania  $M$  i rozciągania  $N$  pręta o przekroju prostokątnym w sprężystym zakresie wyężenia materiału pokazano na rys. 3.5a. Na rys. 3.5b pokazano interakcyjną zależność  $M$ – $N$  analizowanego przekroju z uwzględnieniem plastycznej rezerwy nośności. Na rys. 3.5 sprężyste nośności oznaczono

indeksem *el*, plastyczne zaś *pl*. Krzywa interakcyjna w sprężystym zakresie wyężenia materiału jest funkcją liniową, a z uwzględnieniem rezerwy plastycznej — nieliniową.



Rys. 3.5. Krzywe interakcji  $M$ – $N$  zginanych i rozciąganych prostokątnych przekrojów prętów w sprężystej (a) i plastycznej (b) fazie wyężenia

W przypadku gdy w przekroju działa znana rozciągająca osiowa siła  $N$ , zredukowaną losową nośność na zginanie w zakresie sprężystym oszacuje się ze wzoru

$$M(\omega) = \left(1 - \frac{N}{N_{Rt}(\omega)}\right) M_R(\omega). \quad (3.24)$$

Jeśli zaś znany jest moment zginający przekrój poprzeczny  $M$ , zredukowaną, sprężystą losową nośność na rozciąganie oszacuje się ze wzoru

$$N(\omega) = \left(1 - \frac{M}{M_R(\omega)}\right) N_{Rt}(\omega). \quad (3.25)$$

Parametry losowych nośności (3.24) i (3.25), to jest  $\bar{M}$  i  $s_M$  lub  $\bar{N}$  i  $s_N$  wynoszą odpowiednio

$$\bar{M} = \bar{M}_R \left(1 - \frac{N}{\bar{N}_{Rt}}\right), \quad (3.26)$$

$$\bar{N} = \bar{N}_{Rt} \left(1 - \frac{M}{\bar{M}_R}\right), \quad (3.27)$$

$$s_M = \sqrt{[1 - N(\bar{N}_{Rt})^{-1}]^2 s_{M_R}^2 + [N\bar{M}_R(\bar{N}_{Rt})^{-2}]^2 s_{N_{Rt}}^2}, \quad (3.28)$$

$$s_N = \sqrt{[1 - M(\bar{M}_R)^{-1}]^2 s_{N_{Rt}}^2 + [M\bar{N}_{Rt}(\bar{M}_R)^{-2}]^2 s_{M_R}^2}, \quad (3.29)$$

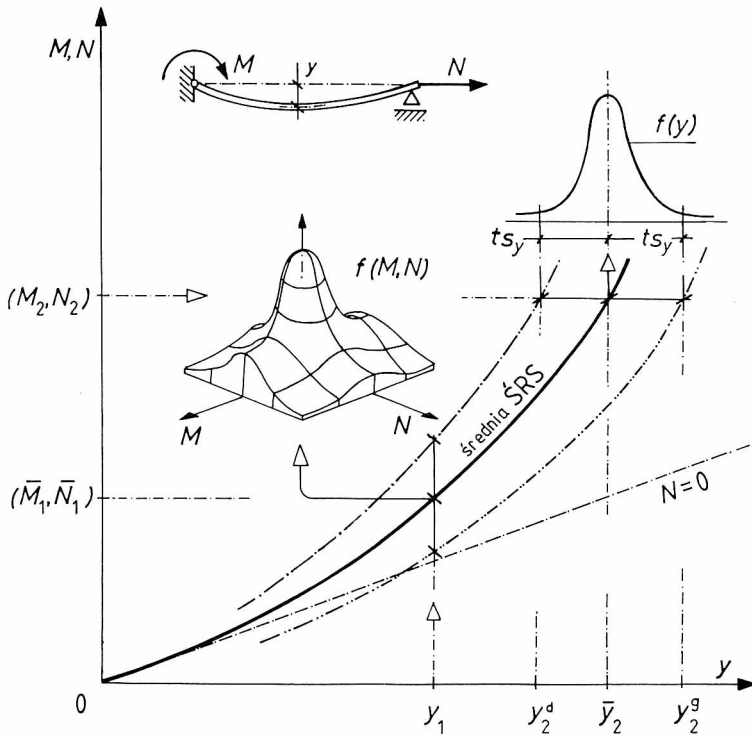
gdzie:

$\bar{M}_R, s_{M_R}$  — średnia i odchylenie standardowe nośności przekroju na zginanie,

$\bar{N}_{Rt}, s_{N_{Rt}}$  — średnia i odchylenie standardowe nośności przekroju na rozciąganie.

Należy tu zauważyć, iż podobnie jak w poprzednich rozdziałach, odchylenia standardowe charakterystyk geometrycznych ( $A, W$ ) przekrojów poprzecznych stoso-





Rys. 3.6. Ścieżka równowagi statycznej przekroju pręta zginanego i rozciąganego

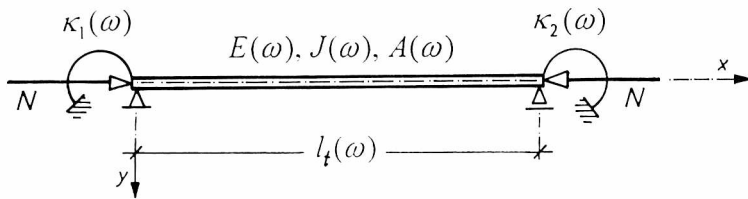
wanych na elementy prętowe konstrukcji budowlanych są wieloparametrowe. Wówczas odchylenia standardowe należy wyznaczyć według (3.28) i (3.29) z zastosowaniem (1.45).

Na rys. 3.6 pokazano ścieżkę równowagi statycznej przekroju pręta zginanego i rozciąganego w sprężystym zakresie wyężenia materiału. Linia ciągłą oznaczono średnią ścieżkę równowagi statycznej, liniami kreska-kropka — górne i dolne oszacowania nośności. Na rys. 3.6 pokazano ponadto gęstość  $f(y)$  losowego rozkładu ugięć pod zdefiniowanym obciążeniem  $(M_2, N_2)$ . Z kolei przedstawioną na rys. 3.6 dwuwymiarową gęstość losowego rozkładu  $f(M, N)$  interakcyjnej nośności przekroju pręta zginanego i rozciąganego, uzyskuje się wymuszając jego przemieszczenia  $y_1$ .

### 3.5. Losowa nośność pręta ściskanego osiowo

Rozpatrzono eulerowski model pręta idealnego (bez imperfekcji), ściskanego osiowo, pokazany na rys. 3.7.

Losową nośność sprężystą pręta ściskanego osiowo [43], wykonanego z materiału o losowej wytrzymałości i losowym przekroju poprzecznym, wyznacza się



Rys. 3.7. Schemat idealnego pręta ściskanego osiowo

ze wzoru

$$N_{cr}(\omega) = \frac{\pi^2 E(\omega) J(\omega)}{[l(\omega)]^2}, \quad (3.30)$$

gdzie:

- $J(\omega)$  – losowy moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta,
- $E(\omega)$  – losowy moduł sprężystości podłużnej materiału,
- $l(\omega)$  – losowa długość wyboczeniowa pręta, która wynosi

$$l(\omega) = l_t(\omega) \mu [\kappa_1(\omega), \kappa_2(\omega)], \quad (3.31)$$

w którym:

- $l_t(\omega)$  – losowa długość pręta,
- $\mu(\omega)$  – losowy współczynnik długości wyboczeniowej pręta, która zależy od losowych charakterystyk sztywnościowych  $\kappa_1(\omega)$ ,  $\kappa_2(\omega)$ , opisujących zamocowanie go na końcach.

Średnią sprężystą nośność krytyczną  $\bar{N}_{cr}$  takiego pręta [43] można wyznaczyć ze wzoru

$$\bar{N}_{cr} = \pi^2 \frac{\bar{E}\bar{J}}{(\bar{l})^2}, \quad (3.32)$$

gdzie:

- $\bar{E}$  – średni moduł sprężystości podłużnej materiału,
- $\bar{J}$  – średni moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta,
- $\bar{l}$  – średnia długość wyboczeniowa pręta.

Odchylenie standardowe  $s_{N_{cr}}$  nośności krytycznej takiego pręta w zakresie sprężystym [43] można oszacować, korzystając ze wzoru (1.45), i wynosi ono

$$s_{N_{cr}} = \pi^2 \sqrt{\left[ \frac{\bar{J}}{(\bar{l})^2} \right]^2 s_E^2 + \left[ \frac{\bar{E}}{(\bar{l})^2} \right]^2 s_J^2 + 4 \left[ \frac{\bar{E}\bar{J}}{(\bar{l})^3} \right]^2 s_l^2}, \quad (3.33)$$

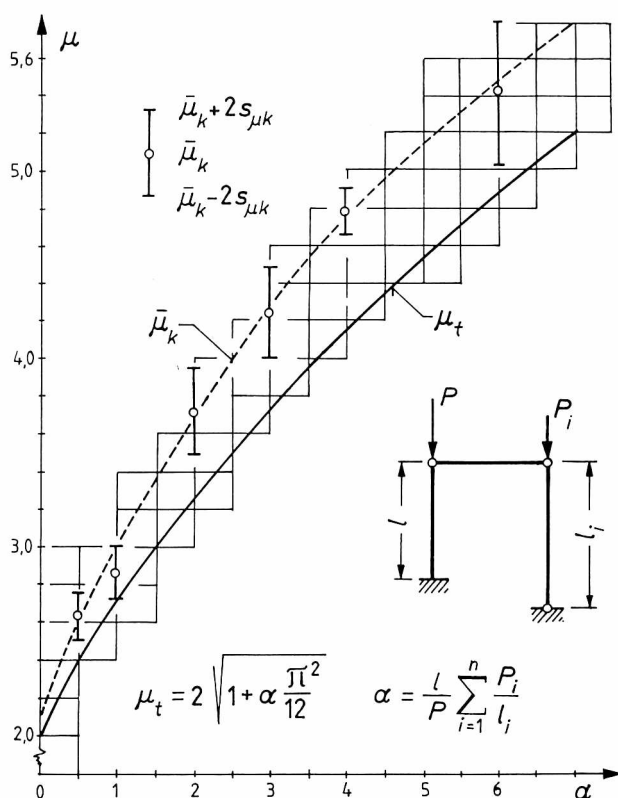
gdzie:

- $s_E$  – odchylenie standardowe modułu sprężystości podłużnej,
- $s_J$  – odchylenie standardowe momentu bezwładności przekroju poprzecznego pręta,
- $s_l$  – odchylenie standardowe długości wyboczeniowej pręta.

Wzór (3.33) opisujący odchylenie standardowe nośności krytycznej pręta ściskanego osiowo w zakresie sprężystym ma stosunkowo prostą postać, gdyż w powyższej

analizie przyjęto, iż długość wybowoczeniowa  $l(\omega)$  jest funkcją jednej zmiennej losowej. W rzeczywistości długość wybowoczeniowa  $l(\omega)$  jest funkcją trzech zmiennych losowych i należy uwzględnić wzór (3.31). Analiza zależności (3.33) wskazuje, że losowa długość wybowoczeniowa  $l(\omega)$  ma istotny wpływ na odchylenie standardowe nośności krytycznej ściskanego pręta [6, 43]. Tak zwana teoretyczna długość pręta  $l_t$  zazwyczaj charakteryzuje się niedużym współczynnikiem zmienności i jej losowe cechy nie wpływają istotnie na odchylenie standardowe nośności. Istotna i ważna ze względów bezpieczeństwa jest natomiast właściwa ocena charakterystyk losowego współczynnika długości wybowoczeniowej ściskanych prętów  $\mu(\omega) = \mu[\kappa_1(\omega), \kappa_2(\omega)]$ . Na zagadnienie wagi właściwej identyfikacji losowych charakterystyk zamocowania prętów na ich końcach w oszacowaniu nośności prętów ściskanych zwrócił uwagę Z. Kowal [43].

Na rys. 3.8 przedstawiono wyniki badań doświadczalnie wyznaczonych zintegrowanych współczynników długości wybowoczeniowej słupów utwierdzonych sztywno w fundamencie i przegubowo połączonych z ryglem [6]. Badania przeprowadzono na serii 30 modeli ram przechyłowych składających się z analizowanych słupów, do których dołączono za pośrednictwem rygli słupy przegubowo-przegubowe.



Rys. 3.8. Współczynnik długości wybowoczeniowej słupów sztywno utwierdzonych ram przechyłowych

Dla rozpatrywanego schematu ramy współczynnik długości wybocheniowej słupów sztywno zamocowanych w fundamencie  $\mu(\omega)$  jest funkcją wielu imperfekcji (m.in. losowych mimośrodków przekazywania obciążenia, losowych przemieszczeń głowic słupów przegubowo-przegubowych, błędów montażowych, wydłużeń termicznych rygli itp.). W badaniach wyznaczono zintegrowany współczynnik wybocheniowy słupów utwierdzonych  $\bar{\mu}_k$  uwzględniający łącznie wymienione wpływy losowe. Teoretyczny współczynnik wybocheniowy słupa utwierdzonego  $\mu_t$  jest funkcją parametru  $\alpha$  opisującego obciążenia słupów i geometrię ramy. Na rys. 3.8 linią ciągłą oznaczono wykres teoretycznego współczynnika długości wybocheniowej  $\mu_t$ , linią przerywaną zaś wykres średniego, zintegrowanego współczynnika, wyznaczonego doświadczalnie  $\bar{\mu}_k$ . Doświadczalne współczynniki długości wybocheniowej analizowanych słupów utwierdzonych rozpatrywanych ram są większe niż współczynniki wybocheniowe wyznaczone teoretycznie. Różnice te rosną w miarę zwiększania parametru  $\alpha$ . Jeśli długości słupów i ich obciążenia są jednakowe ( $\alpha = 1$ ), to  $\mu_t = 2,7$ . Wyznaczona doświadczalnie zaś na poziomie dwóch odchyień standardowych wartość  $\mu_0 = 3,0$  (błąd oszacowania nośności słupów wynosi 23,5%).

Nośność prętów ściskanych jest zagadnieniem znacznie bardziej złożonym niż prezentowany model eulerowski. W modelu obliczeniowym oszacowania nośności pręta ściskanego należy uwzględnić wybochenie w zakresie sprężysto-plastycznym, imperfekcje konstrukcyjne, geometryczne i technologiczne (zagadnienia omawiane w rozdziale 4), gdyż eulerowskie obciążenie krytyczne dotyczy pręta idealnego i stanowi oszacowanie nośności od góry.

Losową nośność ściskanych prętów stalowych szacuje się według ideologii normy PN-90/B-03200 [101] ze wzoru

$$N_{Rc}(\omega) = \varphi(\omega) A(\omega) w(\omega), \quad (3.34)$$

gdzie:

$A(\omega)$ ,  $w(\omega)$  — jak w (3.2),

$\varphi(\omega)$  — losowy współczynnik wybocheniowy.

Losowy współczynnik wybocheniowy prętów ściskanych zależy od długości elementu oraz losowych charakterystyk: geometrycznych jego przekroju poprzecznego i sztywnościowych zamocowania go na końcach

$$\varphi(\omega) = \varphi[\kappa_1(\omega), \kappa_2(\omega), l_t(\omega), i(\omega)] = \varphi[\lambda(\omega), n], \quad (3.35)$$

gdzie:

$\kappa_1(\omega)$ ,  $\kappa_2(\omega)$  — losowe współczynniki zamocowania pręta w węzłach,

$i(\omega)$  — losowy promień bezwładności przekroju pręta,

$\lambda(\omega)$  — losowa smukłość pręta,

$l_t(\omega)$  — jak we wzorze (3.31).

Współczynnik wybocheniowy  $\varphi$  szacuje się na podstawie smukłości  $\lambda$ , która w przypadku uwzględnienia losowych cech pręta ma postać

$$\lambda(\omega) = \frac{\mu(\omega) l_t(\omega)}{i(\omega)}. \quad (3.36)$$

Występujące losowe imperfekcje konstrukcyjne (np. wstępne odchylenia od osi podłużnych prętów, mimośrodowość przekazywania obciążeń) i technologiczne (np. naprężenia spawalnicze, walcownicze) uwzględnia w [101] uogólniony parametr imperfekcji  $n$  i odpowiednie wykalibrowanie współczynnika wyboczeniowego prętów ściskanych  $\varphi$  w stosunku do krzywej Eulera. Zagadnienia mechanizmów powstawania i oddziaływania imperfekcji na nośność prętów ściskanych omówiono w rozdziale 4. W pracy [10] przedstawiono sposób kalibrowania krzywych wyboczeniowych według Eurokodu 3 [92] oraz normy PN-90/B-3200 [101].

Według normy PN-90/B-3200 współczynnik wyboczeniowy  $\varphi$  jest parametryczną funkcją smukłości względnej i opisują go zależności w postaci

$$\varphi(\lambda_1) = 1 \quad \text{dla} \quad \lambda_1 < \sim 0,15, \quad (3.37)$$

$$\varphi(\lambda_1) = [1 + (\lambda_1)^{2n}]^{-\frac{1}{n}} \quad \text{dla} \quad \lambda_1 > \sim 0,15, \quad (3.38)$$

gdzie:

$n$  — uogólniony parametr imperfekcji (uwzględniający niedoskonałości geometryczne, strukturalne i technologiczne), który wynosi

$n = 2,0$  — dla krzywej wyboczeniowej a,

$n = 1,6$  — dla krzywej wyboczeniowej b,

$n = 1,2$  — dla krzywej wyboczeniowej c,

$\lambda_1$  — smukłość względna (oznaczona w [101] jako  $\bar{\lambda}$ ), która wynosi

$$\lambda_1 = \bar{\lambda} = \lambda/\lambda_p, \quad (3.39)$$

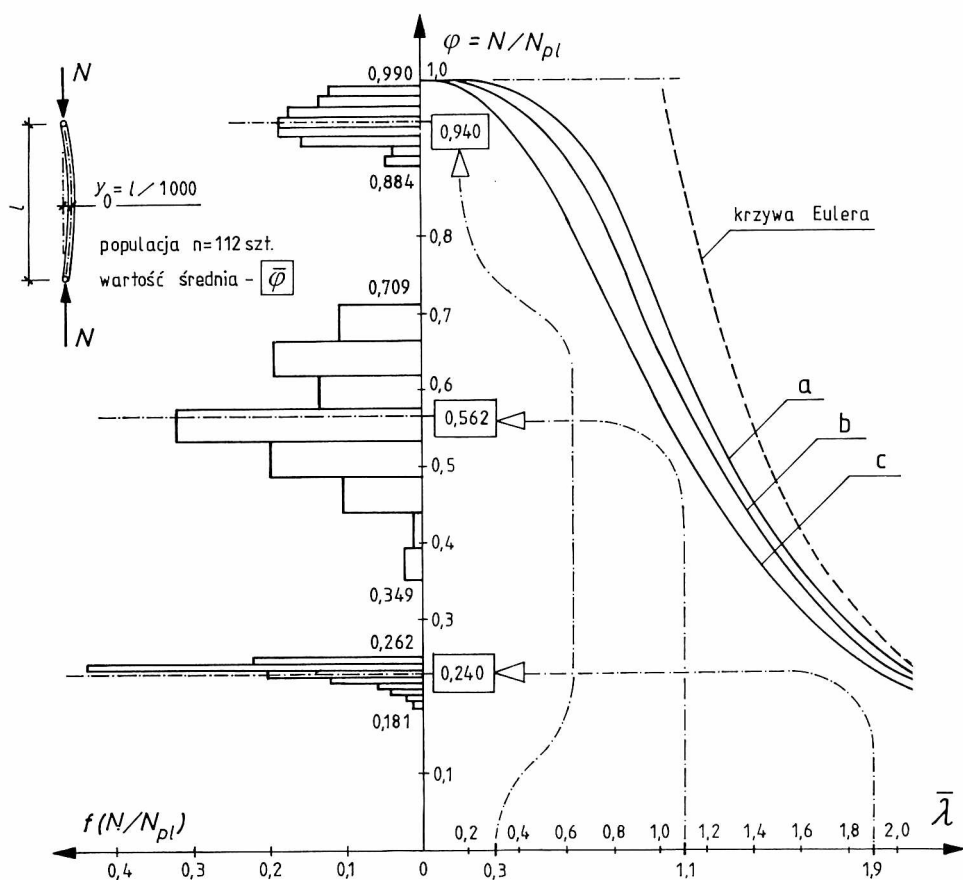
$$\lambda_p = 84 \sqrt{215/f_d}, \quad (3.40)$$

$$\lambda = \frac{\mu l_t}{i}, \quad (3.41)$$

przy czym w normie [101]  $f_d$  oznacza wytrzymałość obliczeniową stali.

W normie PN-90/B-3200 przyjęto dla ściskanych prętów trzy krzywe wyboczeniowe (a, b i c) w zależności od kształtu przekroju, wrażliwości na wstępne imperfekcje geometryczne, technologii wykonania — wpływu imperfekcji technologicznych (naprężeń walcowniczych, spawalniczych). Przedstawiono je w prawej części rys. 3.9.

Ściskane pręty *krótkie* (o małych smukłościach) wyczerpują swą nośność w wyniku uplastycznienia, pręty *długie* (o dużych smukłościach) ulegają wyboczeniu sprężystemu. Większość prętów ściskanych spotykanych w konstrukcjach budowlanych charakteryzuje się smukłościami pośrednimi i mogą one tracić nośność w wyniku sprężysto-plastycznej formy wyboczenia. Na nośność graniczną prętów ściskanych o takich smukłościach mają bardzo duży wpływ wstępne imperfekcje, co przedstawiono w lewej części rys. 3.9. Na rysunku tym [27] pokazano histogramy współczynnika wyboczeniowego  $\varphi$  (wyznaczonego jako stosunek nośności granicznej  $N$  do nośności plastycznej  $N_p$ ) prętów ściskanych o trzech charakterystycznych smukłościach. Badane pręty *krótkie* o smukłości względnej 0,30, pręty *długie* o smukłości względnej 1,90 oraz pręty o pośredniej smukłości względnej 1,10. Przedstawione na rys. 3.9 histogramy uzyskano na podstawie badań 112 prętów ze wstępnymi imperfekcjami osi podłużnej w postaci wygięć o strzałce  $y_0 = l/1000$  (gdzie  $l$  jest długością elementu).



Rys. 3.9. Typowe histogramy nośności [27] i krzywe wyoboczeniowe prętów ściskanych wg [101]

Wpływ wstępnego wygięcia osi podłużnej prętów  $y_0$  na losową nośność graniczną elementów ściskanych może stanowić model wyjściowy do analizy następstw innego typu imperfekcji.

Z analizy przedstawionych na rys. 3.9 histogramów wynika, że gęstość rozkładu nośności rzeczywistych prętów ściskanych (z wstępnymi imperfekcjami), o smukłościach najczęściej spotykanych w konstrukcjach budowlanych, cechuje duża zmienność (duży rozrzut) w porównaniu z prętami krępy i smukłymi.

Średnia oraz odchylenie standardowe (obliczone z uwzględnieniem wzoru (1.45)) smukłości pręta ściskanego opisanej zależnością (3.36) wynoszą

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\mu} \bar{l}_t}{\bar{i}}, \quad (3.42)$$

$$s_{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\bar{l}_t}{\bar{i}}\right)^2 s_{\mu}^2 + \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{i}}\right)^2 s_{l_t}^2 + \left(\frac{\bar{\mu} \bar{l}_t}{\bar{i}^2}\right)^2 s_{\bar{i}}^2}, \quad (3.43)$$

gdzie:

- $\bar{l}_t, s_{l_t}$  — wartość średnia i odchylenie standardowe długości pręta,
- $\bar{\mu}, s_{\mu}$  — wartość średnia i odchylenie standardowe współczynnika długości wyboczeniowej pręta,
- $\bar{i}, s_i$  — wartość średnia i odchylenie standardowe promienia bezwładności przekroju pręta.

Dysponując parametrami losowej smukłości pręta  $\bar{\lambda}$  i  $s_{\lambda}$ , można ze wzoru (3.38) oraz korzystając ze wzorów (1.43), (1.44) i (1.45) wyznaczyć parametry losowego współczynnika wyboczeniowego  $\bar{\varphi}$  oraz  $s_{\varphi}$ .

Średnia nośność  $\bar{N}_{Rc}$  i odchylenie standardowe  $s_{N_{Rc}}$  nośności pręta ściskanego wynoszą

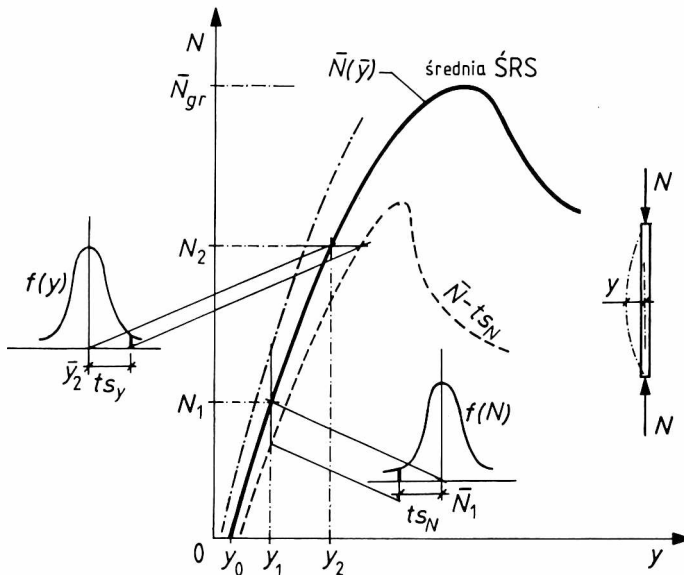
$$\bar{N}_{Rc} = \bar{\varphi} \bar{A} \bar{w}, \quad (3.44)$$

$$s_{N_{Rc}} = \sqrt{(\bar{\varphi})^2 (\bar{A})^2 s_w^2 + (\bar{A})^2 (\bar{w})^2 s_{\varphi}^2 + (\bar{\varphi})^2 (\bar{w})^2 s_A^2}, \quad (3.45)$$

gdzie:

- $\bar{\varphi}, s_{\varphi}$  — wartość średnia i odchylenie standardowe współczynnika wyboczeniowego,
- $\bar{A}, s_A$  — wartość średnia i odchylenie standardowe pola przekroju poprzecznego pręta,
- $\bar{w}, s_w$  — wartość średnia i odchylenie standardowe wytrzymałości materiału.

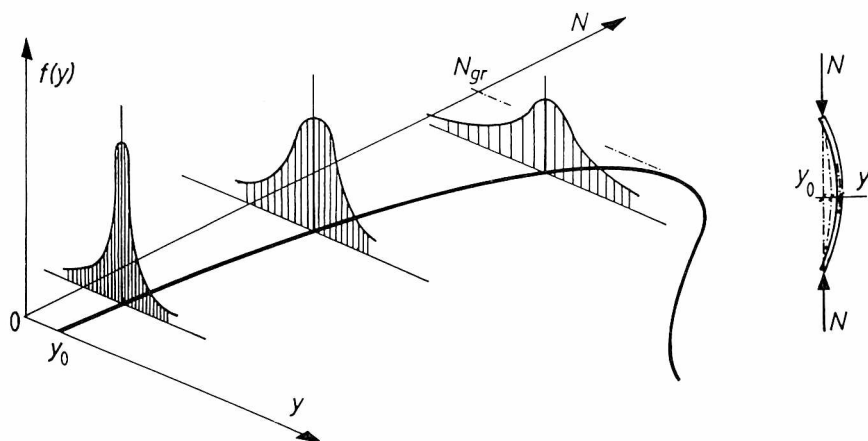
Na rys. 3.10 pokazano doświadczalnie zidentyfikowaną [7], o parametrach  $\bar{N}, s_N$ , ścieżkę równowagi statycznej (ŚRS) pręta ściskanego. Badano pręty o losowych cechach geometrycznych przekroju poprzecznego oraz wytrzymałościowych



Rys. 3.10. Ścieżka równowagi statycznej pręta ściskanego

materiału elementu ze wstępnymi losowymi imperfekcjami geometrycznymi osi podłużnej  $y_0$ . Losowe cechy analizowanych prętów ściskanych sprawiają, iż ścieżki równowagi statycznej poszczególnych prętów są realizacjami funkcji losowej  $f(N)$ . Wyróżnić w niej można: średnią ŚRS (oznaczoną na rys. 3.10 linią grubą) oraz górne i dolne oszacowanie nośności (oznaczone na rys. 3.10 linią przerywaną). Na rys. 3.10 pokazano też rozkład losowej nośności pręta ściskanego  $f(N)$  przy wymuszaniu przemieszczeń poprzecznych osi podłużnej elementu  $y_1$  oraz rozkład losowych ugięć  $f(y)$  przy ściskaniu pręta siłą podłużną  $N_2$ .

Na uwagę zasługuje również fakt, iż rozkład właściwości losowej ścieżki równowagi statycznej pręta ściskanego zmienia się wraz ze zmianą jego obciążenia, co pokazano na rys. 3.11. Wraz ze wzrostem obciążenia ściskającego prętów obserwuje się większy rozrzut krzywej ŚRS.



Rys. 3.11. Zmiany gęstości rozkładu nośności prętów ściskanych

### Przykład 3.3

Oszacować średnią  $\bar{N}_{cr}$ , odchylenie standardowe  $s_{N_{cr}}$ , współczynnik zmienności  $v_N$  oraz kwantyl  $N_0$  na poziomie tolerancji  $t = 3$  obciążenia krytycznego pręta ściskanego osiowo. Pręt zamocowany jest obustronnie przegubowo ( $\mu = 1$ ). Losowe parametry pręta wynoszą

$l(\omega)$ :  $(\bar{l}, s_l) = (6000 \text{ mm}, 120 \text{ mm})$ ;

$E(\omega)$ :  $(\bar{E}, s_E) = (206\,000 \text{ MPa}, 3000 \text{ MPa})$ ;

$J(\omega)$ :  $(\bar{J}, s_J) = (652 \text{ cm}^4, 40 \text{ cm}^4)$ .

Sprawdzić bezpieczeństwo badanego pręta, gdy jest on obciążony losową siłą ściskającą o parametrach  $P(\omega)$ :  $(\bar{P}, s_P) = (300 \text{ kN}, 44 \text{ kN})$ .

Średnie obciążenie krytyczne pręta ściskanego osiowo (3.32) wynosi

$$\bar{N}_{cr} = \pi^2 \frac{\bar{E}\bar{J}}{(\bar{l})^2} = \pi^2 \frac{206000 \cdot 652 \cdot 10^{-1}}{600^2} = 368,2 \text{ kN}.$$



Odchylenie standardowe (3.33) oraz współczynnik zmienności obciążenia krytycznego wynoszą

$$\begin{aligned} s_{N_{cr}} &= \pi^2 \sqrt{\left[\frac{J}{(l)^2}\right]^2 s_E^2 + \left[\frac{E}{(l)^2}\right]^2 s_J^2 + 4 \left[\frac{EJ}{(l)^3}\right]^2 s_l^2} = \\ &= \pi^2 \sqrt{\left[\left(\frac{652}{600^2}\right)^2 3000^2 + \left(\frac{206000}{600^2}\right)^2 40^2 + 4 \left(\frac{206000 \cdot 652}{600^3}\right)^2 12^2\right] 10^{-2}} = \\ &= 27,49 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$v_N = \frac{s_{N_{cr}}}{\bar{N}_{cr}} = \frac{27,49}{368,2} = 0,075.$$

Kwantyl nośności krytycznej analizowanego pręta ściskanego na poziomie  $t = 3$  wynosi

$$N_0 = \bar{N}_{cr} - 3 s_{N_{cr}} = 368,2 - 3 \cdot 27,49 = 285,73 \text{ kN}.$$

Bezpieczeństwo badanego pręta obciążonego losową, osiową siłą ściskającą o parametrach  $P(\omega)$ : (300, 44) kN wyznaczono obliczając indeks niezawodności Cornella

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{P}}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}} = \frac{368,2 - 300}{\sqrt{27,49^2 + 44^2}} = 1,30.$$

Z tablicy 1.2 rozkładu normalnego odczytano  $p(t) = p(1,3) = 0,903$ .

Bezpieczeństwo badanego pręta wynosi  $R = 0,903$ , prawdopodobieństwo zaś awarii wynosi 9,7%. W interpretacji deterministycznej współczynnik bezpieczeństwa obliczony dla wartości średnich wynosi  $n = \bar{N}/\bar{P} = 1,23$ , co sugerowałoby, że analizowany element ściskany ma 23-procentowy „zapas” nośności.

W przedstawionym przykładzie duże prawdopodobieństwo awarii ( $A = 0,097$ ) wynika m.in. z dużej wartości współczynnika zmienności obciążenia ściskającego, który wynosił  $v_P = 14,7\%$ .

Aby prognozowane bezpieczeństwo analizowanego pręta ściskanego wynosiło  $R = 0,99865$  (na poziomie trzech odchyłeń standardowych), należałoby (przy założonym odchyleniu standardowym obciążenia  $s_X = s_P = 44$  kN) obciążyć go siłą, o wartości średniej  $\bar{X}$ , którą oszacowano w następujący sposób

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{X}}{\sqrt{s_N^2 + s_X^2}} = 3,$$

stąd

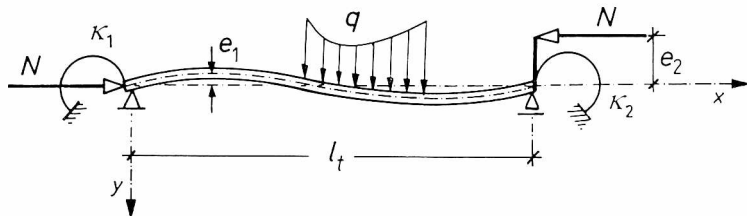
$$\bar{X} = \bar{N} - t \sqrt{s_N^2 + s_X^2} = 368,2 - 3 \sqrt{27,49^2 + 44^2} = 212 \text{ kN}.$$

Dla średniego obciążenia  $\bar{X} = 212$  kN i jego odchylenia standardowego  $s_X = 44$  kN, prawdopodobieństwo awarii badanego pręta ściskanego wynosi  $A = 0,00135$ .

### 3.6. Losowa nośność pręta ściskanego i zginanego

Rozpatruje się losową nośność pręta o losowych charakterystykach geometrycznych przekroju poprzecznego:  $A(\omega)$ ,  $J(\omega)$ ,  $W(\omega)$ , obciążonego momentem  $M(\omega)$  i obciążeniem ściskającym  $N(\omega)$  działającym na mimośrodku  $e(\omega)$ . Mimośrodek obciążenia ściskającego  $e(\omega)$  może być następstwem losowej geometrii osi podłużnej pręta ściskanego  $e_1(\omega)$ , a także losowego, mimośrodowego przyłożenia obciążenia  $e_2(\omega)$ .

Schemat analizowanego pręta ściskanego i zginanego z imperfekcjami geometrycznymi pokazano na rys. 3.12.



Rys. 3.12. Schemat pręta ściskanego i zginanego z imperfekcjami geometrycznymi

Podobnie jak dla pręta rozciąganego i zginanego, badany przypadek wyłączenia opisuje związek interakcyjny

$$\frac{N(\omega)}{N_c(\omega)} + \frac{1}{1 - \frac{N(\omega)}{N_{cr}(\omega)}} \frac{\beta_M(\omega) M(\omega) + N(\omega) e(\omega)}{M_R(\omega)} \leq 1, \quad (3.46)$$

gdzie:

$N(\omega)$  — losowa siła ściskająca,

$M(\omega)$  — losowy moment zginający wyznaczony według teorii pierwszego rzędu,

$N_c(\omega)$  — losowa nośność plastyczna przekroju ściskanego według (3.2),

$M_R(\omega)$  — losowa nośność przekroju na zginanie według (3.8),

$N_{cr}(\omega)$  — losowa nośność krytyczna pręta ściskanego według (3.30),

$\beta_M(\omega)$  — współczynnik zależny od kształtu wykresu momentu zginającego na długości pręta,

$e(\omega)$  — losowy mimośrodek obciążenia ściskającego (suma wstępnego wygięcia osi podłużnej pręta  $e_1(\omega)$  i mimośrodu przyłożenia obciążenia  $e_2(\omega)$ ).

Z równania (3.46) dla znanego momentu zginającego  $M$  można oszacować losową nośność na ściskanie  $N(\omega)$  lub dla znanego wartości siły ściskającej  $N$  — losową nośność na zginanie  $M(\omega)$ , jak to pokazano dla przypadku pręta rozciąganego i zginanego. Parametry losowej nośności  $N(\omega)$  lub  $M(\omega)$ , tj. wartości średnie  $\bar{N}$ ,  $\bar{M}$  wyznacza się jako funkcje średnich parametrów we wzorze (3.46), odchylenie standardowe zaś interakcyjnych nośności  $s_N$  i  $s_M$  — korzystając ze wzoru (1.45).

Zagadnienie interakcyjnej nośności prętów ściskanych i zginanych jest jednym z bardziej skomplikowanych problemów wytrzymałościowych. Na jego złożoność składa się kilka zjawisk, które są interakcyjnie połączone: stateczność ogólna pręta ściskanego (wyboczenie), utrata płaskiej postaci zginania (zwichrzenie), zmniejszenie nośności granicznej w stosunku do teoretycznego oszacowania obciążenia krytycznego pręta ściskanego (wpływ imperfekcji geometrycznych i technologicznych na utratę stateczności), zapasy nośności plastycznej pręta zginanego, wpływ przemieszczeń na wielkość sił wewnętrznych w pręcie oraz wpływ rozkładu momentu zginającego na długości pręta ściskanego na jego nośność. Zagadnienia te omówiono w [10].

Rozwiązanie zagadnienia interakcyjnej nośności zginanych i ściskanych prętów cienkościennych dla różnych kombinacji obciążenia (kształtu momentu zginającego na długości pręta) oraz różnych warunków brzegowych zamocowania elementu na podporach podał Z. Kowal w [41]. Zagadnienie rozwiązano dzięki wprowadzeniu parametrycznego momentu granicznego pręta  $M_k$ , który jest funkcją obciążenia ściskającego  $N$  i wyznacza się go ze wzoru

$$M_k = (f_y - N/A) W, \quad (3.47a)$$

gdzie:

$A, W$  — pole przekroju poprzecznego i wskaźnik zginania przekroju pręta,  
 $f_y$  — granica plastyczności stali.

Otrzymane przez Z. Kowala [41] równania krzywych interakcji przy współdziałaniu siły osiowej  $N$  i momentu zginającego  $M$  w pręcie cienkościennym podano w tabl. 4.4 w [10]. Na przykład dla pręta zamocowanego obustronnie przegubowo, ściskanego siłą  $N$  i zginanego równomiernym obciążeniem poprzecznym  $q$  otrzymano zależność interakcyjną w postaci

$$\frac{M}{M_k} = \frac{N}{N_{cr}} \frac{\pi^2}{8} \frac{\cos(0,5 \pi \sqrt{N/N_{cr}})}{1 - \cos(0,5 \pi \sqrt{N/N_{cr}})}, \quad (3.48a)$$

gdzie:

$M = 0,125 q l^2$  — moment zginający w środku pręta,  
 $N_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$  — nośność krytyczna pręta.

Zaproponowane przez Z. Kowala [41] podejście do wyznaczania interakcyjnej nośności elementów ściskanych i zginanych może być zastosowane w przypadku szacowania losowej nośności tak wyjęzonych prętów. Wówczas wzory (3.47a) i (3.48a) będą miały następującą postać

$$M_k(\omega) = [f_y(\omega) - N(\omega)/A(\omega)] W(\omega), \quad (3.47b)$$

$$\frac{M(\omega)}{M_k(\omega)} = \frac{N(\omega)}{N_{cr}(\omega)} \frac{\pi^2}{8} \frac{\cos[0,5 \pi \sqrt{N(\omega)/N_{cr}(\omega)}}{1 - \cos[0,5 \pi \sqrt{N(\omega)/N_{cr}(\omega)}}. \quad (3.48b)$$

We wzorach (3.47b) i (3.48b) należy przyjąć:

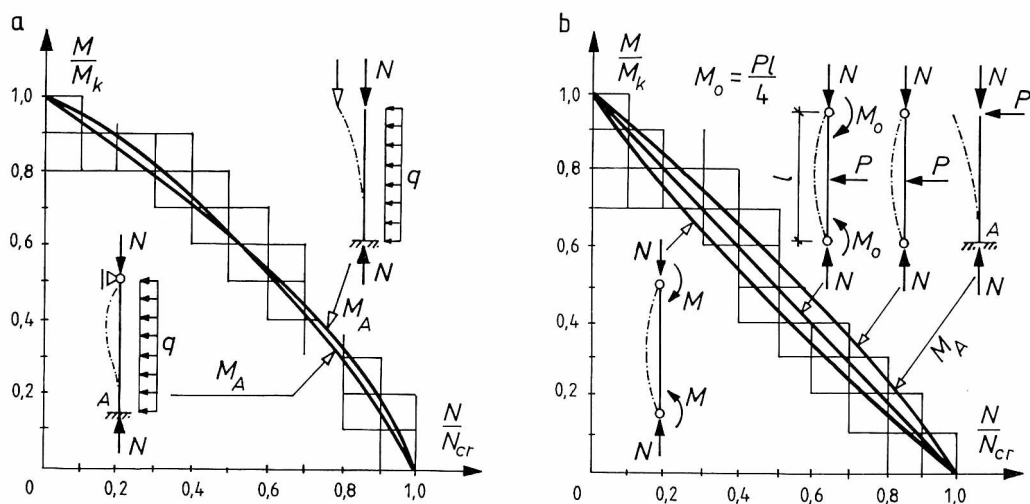
$A(\omega), W(\omega)$  — losowe pole przekroju poprzecznego i losowy wskaźnik zginania przekroju pręta,  
 $f_y(\omega)$  — losową granicę plastyczności stali,

$M(\omega)$  — losowy moment zginający w środku pręta,

$N_{cr}(\omega)$  — losową nośność krytyczną pręta.

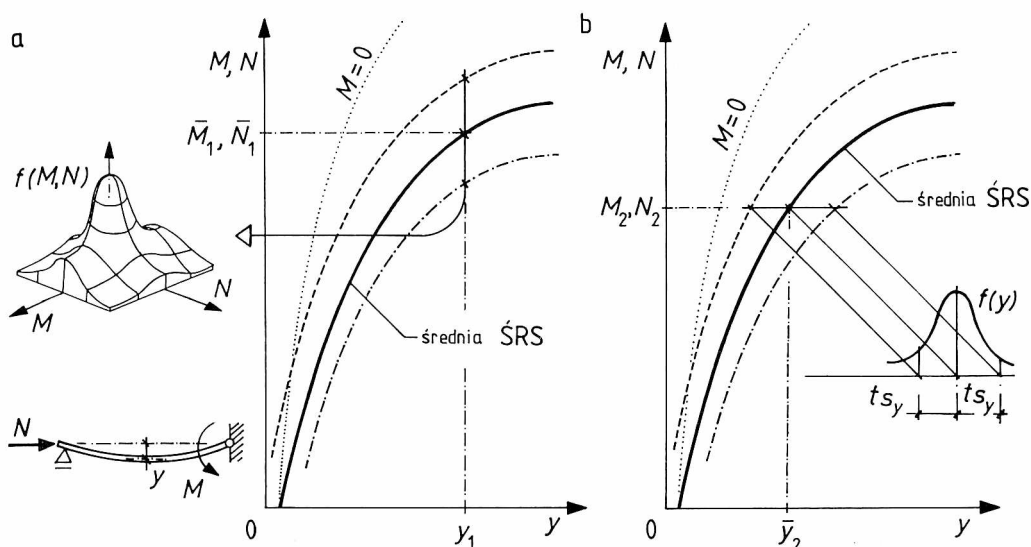
Graficzną interpretację krzywych interakcji podanych w tabl. 4.4 w [10] pokazano na rys. 3.13 [41]. Krzywe interakcji sporządzono w bezwymiarowych współrzędnych  $M/M_k$  i  $N/N_{cr}$ , gdzie  $M_k$  liczy się według (3.47a),  $N_{cr}$  zaś jest eulerowskim obciążeniem krytycznym pręta.

Podane na rys. 3.13 oraz w tabl. 4.4 w [10] krzywe interakcji prętów cienkościennych przy współdziałaniu siły osiowej i momentu zginającego różnią się między sobą w zależności od kombinacji obciążeń zginających i ściskających oraz różnych warunków brzegowych podparcia pręta. Z porównania krzywych interakcji analizowanych w [41] wynika, że zależą one silnie od rozkładu momentu zginającego na długości pręta ściskanego. Najmniejsze współrzędne krzywych interakcji (wykres wklęsły) otrzymuje się w przypadku obciążenia momentem skupionym na końcach. W przypadku obciążenia momentem według sinusoidy otrzymujemy prostoliniowy wykres interakcji. Dla obciążenia pręta siłą skupioną w środku rozpiętości otrzymano wykres wypukły.



Rys. 3.13. Krzywe interakcji  $M-N$  prętów cienkościennych ściskanych i zginanych [41]

Na rys. 3.14 pokazano ścieżkę równowagi statycznej pręta ściskanego i zginanego w sprężystym zakresie wyężenia materiału. Linia ciągłą oznaczono średnią ścieżkę równowagi statycznej, liniami przerywaną oraz kreska-kropka górne i dolne oszacowania nośności. Na rys. 3.14b pokazano ponadto gęstość  $f(y)$  losowego rozkładu ugięć pod zdefiniowanym obciążeniem ( $M_2$ ,  $N_2$ ). Dwuwymiarową gęstość losowego rozkładu  $f(M, N)$  interakcyjnej nośności pręta ściskanego i zginanego (przedstawioną na rys. 3.14a), uzyskuje się wymuszając jego zdefiniowane przemieszczenia  $y_1$ .



Rys. 3.14. Ścieżki równowagi statycznej pręta ściskanego i zginanego

Losową nośność elementów ściskanych i zginanych według ideologii normy projektowania konstrukcji stalowych PN-90/B-03200 można oszacować z zależności

$$\frac{N(\omega)}{N_{Rc}(\omega)} + \frac{\beta M(\omega)}{M_R(\omega)} = 1 - \Delta(\omega), \quad (3.49)$$

gdzie:

$N_{Rc}(\omega)$  — według (3.34),

$M_R(\omega)$  — według (3.21),

$\beta$  — współczynnik zależny od kształtu wykresu momentu zginającego działającego wzdłuż osi pręta (według PN-90/B-03200 [101]),

$\Delta(\omega)$  — współczynnik poprawkowy zależny od parametrów wyężenia i geometrii pręta (według PN-90/B-03200 [101]).

### 3.7. Losowa nośność konstrukcji jako iloczyn zmiennych losowych o różnych rozkładach funkcji gęstości

Rozważane będzie zagadnienie szacowania losowej nośności granicznej konstrukcji, opisaney iloczynem dwóch funkcji losowych o różnych rozkładach gęstości zmiennych losowych.

Analizowane w poprzednich podrozdziałach proste przypadki losowej nośności elementów (np. prętów rozciąganych, zginanych, ścinanych) można opisać iloczynem

dwóch czynników losowych

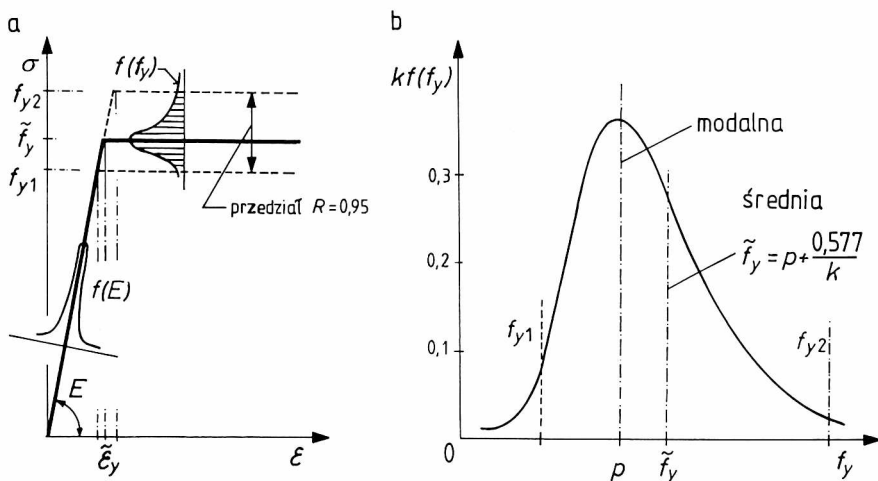
$$N(\omega) = C(\omega) w(\omega), \quad (3.50)$$

gdzie  $C(\omega)$ ,  $w(\omega)$  – jak we wzorze (3.1).

Zakładając sprężysto-plastyczny model wyężenia materiału, w granicznym stanie nośności elementu przyjmuje się  $w(\omega) = f_y(\omega)$ , gdzie  $f_y$  oznacza granicę plastyczności materiału. Sprężysto-plastyczny model materiału (zależność  $\sigma$ – $\epsilon$ ) opisują dwa parametry: granica plastyczności  $f_y$  i moduł sprężystości podłużnej  $E$ .

Losowa zmienność modułu sprężystości stali  $E$  jest nieduża i można w analizach przyjąć  $E = \text{const}$  (z badań wynika, iż  $v_E < 0,015$ ), (rys. 3.15a).

Rozproszenie granicy plastyczności stali natomiast uzyskiwane w badaniach eksperymentalnych jest zdecydowanie większe (rys. 3.15a i b).



Rys. 3.15. Wykres  $\sigma$ – $\epsilon$  stali (a) oraz losowy, niesymetryczny rozkład granicy plastyczności stali (b)

Z badań statystycznych prób rozciągania stali wynika, że granicę plastyczności materiału  $f_y$  opisuje się rozkładami niesymetrycznymi (na przykład rozkładem logarytmiczno-normalnym, Gumbela). Jeśli przyjmie się rozkład niesymetryczny Gumbela [2], [27], to gęstość prawdopodobieństwa opisuje funkcja

$$f(f_y) = k e^{-k(f_y - p)} - e^{-k(f_y - p)}, \quad (3.51)$$

gdzie:

- $p$  – wartość modalna granicy plastyczności stali,
- $k$  – współczynnik dyspersji granicy plastyczności stali.

Estymatorami rozkładu Gumbela są wartość modalna  $p$  i współczynnik dyspersji (rozrzutu)  $k$ . Wartość średnia (centralna) i odchylenie standardowe granicy



Losową nośność według wzoru (3.50) (dla  $w(\omega) = f_y(\omega)$ ) opisuje zależność

$$f(N) = f(C) f(f_y). \quad (3.57)$$

Po uwzględnieniu zależności (3.51) i (3.56) rozkład prawdopodobieństwa losowej nośności elementu według wzoru (3.50) opisuje funkcja

$$f(N) = \frac{k}{s_C \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{C - \bar{C}}{s_C} \right)^2 - k(f_y - p) - e^{-k(f_y - p)} \right]. \quad (3.58)$$

Na rys. 3.16 pokazano dwuparametrową, trójwymiarową funkcję gęstości (3.58) losowej nośności  $f(N)$  analizowanego elementu, którego losową charakterystykę przekroju poprzecznego opisano rozkładem normalnym, granicę plastyczności stali zaś rozkładem niesymetrycznym Gumbela.

Funkcja powierzchni gęstości rozkładu losowej nośności elementu (3.58) może być wykorzystana do szacowania bezpieczeństwa w analizowanym zagadnieniu. Takie podejście zaproponowano w pracy [13] do analizy uszkodzonych korozyjnie stalowych zbiorników walcowych.

W badaniach [13] oprócz dużych ubytków płaszczy badanych zbiorników stalowych stwierdzono istotne zmiany parametrów wytrzymałościowych stali wywołane korozją wżerową. Losowa nośność graniczna płaszcza zbiornika  $N_R(\omega)$  jest funkcją losowej grubości płaszcza zbiornika  $t_p(\omega)$  i losowej granicy plastyczności stali  $f_y(\omega)$ . Zakładając, iż współczynnik wytrzymałości spoiny czołowej  $\alpha_\perp$  nie jest losowy, nośność płaszcza walcowych zbiorników  $N_R(\omega)$  opisuje zależność

$$N_R(\omega) = \alpha_\perp t_p(\omega) f_y(\omega). \quad (3.59)$$

Losowe cechy granicy plastyczności stali  $f_y$  opisano rozkładem niesymetrycznym Gumbela, a grubości płaszczy zbiorników  $t_p$  można aproksymować rozkładem normalnym.



## 4. Losowe imperfekcje elementów konstrukcyjnych

### 4.1. Wprowadzenie

W podejściu deterministycznym do projektowania ustrojów budowlanych przyjmuje się modele obliczeniowe konstrukcji, zakładające idealne kształty przekrojów poprzecznych i osi elementów składowych, jednorodne właściwości mechaniczne materiałów, beznaprężeniowe stany wyężenia przekrojów (bez naprężeń własnych przed przyłożeniem obciążeń zewnętrznych), a także poprawne wykonawstwo warsztatowe i montaż oraz eksploatację obiektu, zgodną z założeniami projektowymi. Wyznacza się więc nośności elementów i konstrukcji idealnych, gdyż są one w rzeczywistości obarczone niedoskonałościami lub wadami początkowymi, które nazywa się imperfekcjami. Można je podzielić na strukturalne, technologiczne i geometryczne. Powstają one zarówno w procesie kształtowania prętów (np. podczas produkcji wyrobów hutniczych w prętach powstają wstępne naprężenia własne), jak też w trakcie zespawania wyrobów hutniczych w wytwórni konstrukcji (np. łącząc elementy składowe w podzespoły popelnia się błędy geometryczne), a także podczas transportu (odkształcenia transportowe), scalania i montażu na placu budowy. Wstępnymi imperfekcjami są obarczone zarówno elementy składowe prętów (np. blachy tworzące blachownice), podzespoły montażowe (np. słupy, kratownice), jak i całe budowlane ustroje nośne (szkielety nośne). Charakter imperfekcji jest losowy, a wiele z nich zostało stosunkowo dobrze rozpoznanych.

We wzorze (3.1), określającym losową nośność elementu konstrukcyjnego, zostały one dla celów obliczeniowych rozdzielone na: losowe imperfekcje związane z parametrami wytrzymałościowymi materiału  $w(\omega)$ , parametry losowe geometrycznych charakterystyk przekroju  $C(\omega)$  i parametry losowego współczynnika  $a(\omega)$  uwzględniającego model wyężenia elementu. W tym modelu analizy losowej nośności elementu parametry losowego współczynnika  $a(\omega)$  we wzorze (3.1) są generowane przez wady geometryczne osi (płaszczyzn) oraz naprężeniowe imperfekcje technologiczne prętów.

W normowych modelach obliczeniowych projektowania konstrukcji stalowych najczęściej losowe cechy geometryczne przekroju poprzecznego prętów uwzględnia się łącznie z parametrami losowej wytrzymałości materiału. Pozostałe niedoskonałości początkowe o charakterze geometrycznym, technologicznym, konstrukcyjnym, montażowym uwzględnia się za pomocą odpowiedniego wyspecyfikowania na przykład współczynników niestateczności (wyboczenia, zwichrzenia) lub analizy statyczno-wytrzymałościowej ustrojów z uwzględnieniem imperfekcji.

W dalszej części tego rozdziału analizowane będą losowe odchyłki geometryczne przekroju poprzecznego elementów (rozdz. 4.2), losowe imperfekcje wytrzymałości

materiałów (rozdz. 4.4) oraz losowe imperfekcje geometryczne osi i powierzchni środkowych elementów (rozdz. 4.3). Zasadniczym celem tych analiz jest prezentacja miejsc i przyczyn powstawania wad początkowych, ich struktury oraz statyczno-wytrzymałościowych skutków imperfekcji, a także zabiegów i sposobów ich ograniczania w realizowanych budowlach.

Przez naprężeniowe (wytężeniowe) imperfekcje technologiczne rozumie się między innymi naprężenia wstępne, rozłożone nierównomiernie w obszarze przekroju poprzecznego elementu, a także na jego długości. Są to naprężenia normalne, zwykle działające wzdłuż osi pręta, które w przekroju poprzecznym tworzą układ zrównoważony, tak że ich wypadkowa równa się zeru. Przy dużych naprężeniach wstępnych oś podłużna pręta może ulec wyraźnemu zakrzywieniu i element konstrukcyjny jest wygięty. Powstanie wstępnych naprężeń własnych powoduje, że elementy (pręty, płyty, powłoki) jeszcze przed przyłożeniem obciążeń zewnętrznych mogą wykazywać, w licznych strefach przekrojów poprzecznych, naprężenia normalne o dużych wartościach, nawet osiagających granicę plastyczności materiału. Naprężenia te, w przypadku zmęczenia materiału lub wystąpienia warunków kruchego pęknięcia, dodając się do naprężeń od przyłożonych obciążeń zewnętrznych, mogą spowodować wyczerpanie nośności materiału. W tym sensie występujące naprężenia wstępne są imperfekcją zmniejszającą nośność elementu.

Przyczyną powstawania wstępnych naprężeń własnych (rezydualnych, pozostających, resztkowych) jest nierównomierne odkształcenie plastyczne podczas nierównomiernego nagrzewania i ostygania. Najważniejszymi procesami wytwórczymi, w których powstają naprężenia wstępne, są: walcowanie i spawanie. Pochodzenie tych naprężeń jest więc natury termicznej. Zagadnienia wpływu naprężeń walcowniczych i spawalniczych na nośność elementów omówiono w pracach [3] i [72]. Norma [101] uwzględnia wpływ imperfekcji technologicznych przez wprowadzenie uogólnionego parametru imperfekcji  $n$ , w krzywych wyboczenia (patrz rozdz. 3.5).

## 4.2. Losowe odchyłki geometryczne przekrojów poprzecznych prętów

Odchyłki geometryczne przekrojów poprzecznych prętów od wartości nominalnych są podstawowym czynnikiem generującym losowe wartości współczynnika  $C(\omega)$  we wzorze (3.1) na losową nośność elementu.

Wymiary, sztywności i charakterystyki geometryczne (pole przekroju poprzecznego, wskaźnik zginania, moment bezwładności itd.) elementów składowych konstrukcji budowlanych (np. wyrobów hutniczych) podawane w normach i katalogach do projektowania dotyczą tak zwanych wartości nominalnych. W rzeczywistości wymiary przekrojów poprzecznych prętów są obarczone losowymi odchyłkami geometrycznymi, zazwyczaj mieszczącymi się w zakresie dopuszczalnych, określonych przez warunki techniczne tolerancji wymiarowych wykonania kształtowników. Wielkość

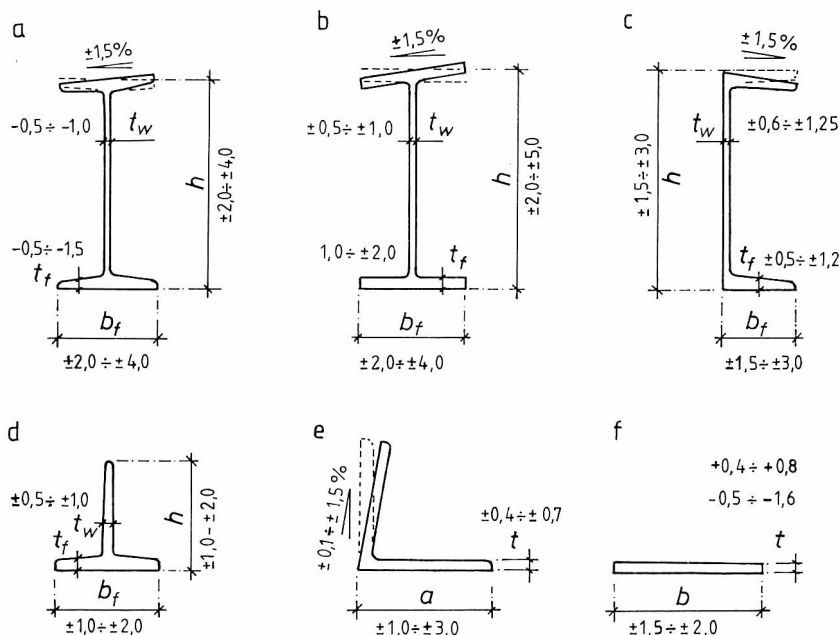
odstępstw od parametrów nominalnych wymiarów przekrojów poprzecznych elementów stosowanych na prętowe i powierzchniowe ustroje nośne są podane w normach i nie powinny być przekraczane przez ich producentów. Są one elementami gwarancji jakości wyrobów hutniczych.

W przypadku konstrukcji stalowych wymiary i tolerancje wymiarów wyrobów walcowanych na gorąco są określone w normach hutniczych podanych w tabl. 4.1.

Na rys. 4.1 pokazano tolerancje wymiarów geometrycznych przekrojów poprzecznych wyrobów walcowanych na gorąco według polskich norm hutniczych.

Tablica 4.1. Zestawienie norm dotyczących wymiarów i tolerancji wymiarów wyrobów hutniczych walcowanych na gorąco

| Lp. | Rodzaj wyrobu              | Wymiary wyrobu według normy | Tolerancje wyrobu według normy |
|-----|----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| 1   | blachy grube i uniwersalne | PN-79/H-92 200              | PN-79/H-92 203                 |
| 2   | blachy cienkie             | PN-79/H-92 201              | PN-79/H-92 202                 |
| 3   | dwuteowniki                | PN-91/H-93 407              | PN-91/H-93 419                 |
| 4   | ceowniki                   | PN-86/H-93 403              | PN-86/H-93 451                 |
| 5   | kątowniki                  | PN-84/H-93 401              | PN-84/H-93 402                 |
| 6   | teowniki                   | PN-91/H-93 406              | PN-91/H-93 406                 |
| 7   | rury                       | PN-80/H-74 219              | PN-80/H-74 219                 |



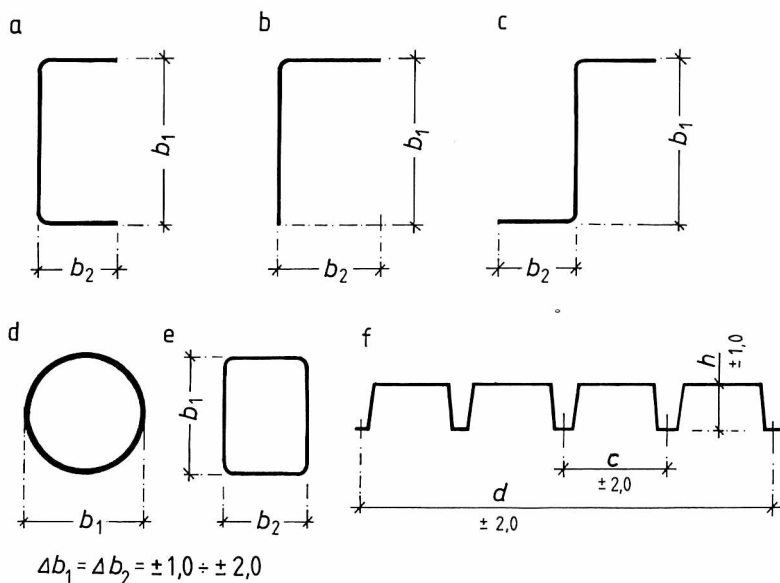
Rys. 4.1. Tolerancje wymiarów geometrycznych przekrojów poprzecznych wyrobów walcowanych na gorąco według polskich norm hutniczych

Normy hutnicze dopuszczają dla wyrobów walcowanych na gorąco odchyłki grubości i szerokości ścianek, brak prostokątności elementów składowych profili, które nominalnie powinny być ortogonalne, oraz *skręcenia* ścianek kształtowników.

Wymiary i tolerancje wymiarów kształtowników i blach profilowanych na zimno są określone w normach zestawionych w tabl. 4.2. Na rys. 4.2 przedstawiono wielkości odchyłek kształtowników giętych na zimno.

Tablica 4.2. Zestawienie norm dotyczących wymiarów i tolerancji wymiarów kształtowników i blach profilowanych na zimno

| Lp. | Rodzaj wyrobu           | Wymiary wyrobu według normy       | Tolerancje wyrobu według normy    |
|-----|-------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1   | kształtowniki otwarte   | PN-78/H-93 460                    | PN-78/H-93 461                    |
| 2   | kształtowniki zamknięte | BN-75/0644-22                     | BN-75/0644-22                     |
| 3   | blachy profilowane      | PN-84/H-92 126<br>i BN-76/0642-34 | PN-84/H-92 126<br>i BN-76/0642-34 |



Rys. 4.2. Tolerancje wymiarów geometrycznych przekrojów poprzecznych wyrobów giętych na zimno

Dopuszczane przez polskie normy hutnicze odchyłki wymiarów przekroju poprzecznego dwuteowników normalnych i równoległościennych podano w tabl. 4.3. Dla porównania w tabl. 4.4 podano tolerancje wymiarowe dwuteowników szerokostopowych według wymagań zachodnioeuropejskich [27]. Z analizy dopuszczalnych odchyłek wymiarowych przedstawionych w tabl. 4.3 i 4.4 wynika, iż są one podobne.

Polskie normy hutnicze dopuszczają odchyłki wykonawcze wysokości dwuteowników (2,0–5,0 mm), szerokości ich pólek (1,5–4,0 mm), nieprostokątności pólek do średników (do 1,5%), a także grubości ścianek profilu (0,5–2,0 mm). Wartości tych dopuszczalnych odchyłek wykonawczych w normach hutniczych uzależniono od wysokości dwuteowników.

Podobnych do pokazanych na rys. 4.1 losowych odchyłek przekroju poprzecznego kształtowników należy spodziewać się w przypadku dźwigarów (słupów, belek) spawanych z blach o losowych wymiarach grubości i szerokości. Norma [104] dopuszcza następujące odchyłki wykonania dźwigarów spawanych z blach:

- brak prostokątności pasów (patrz tabl. 4.5 wiersz 1),

Tablica 4.3. Dopuszczalne tolerancje wykonania dwuteowników normalnych i równoległościennych według polskich norm hutniczych

| Dwuteowniki normalne<br>według PN-91/H-93407          |                            |                  |            |           |
|-------------------------------------------------------|----------------------------|------------------|------------|-----------|
| Wyróżnik<br>oznaczenia I                              | Dopuszczalne odchyłki [mm] |                  |            |           |
|                                                       | $h$                        | $b_f$            | $t_w$      | $t_f$     |
| 80–140                                                | $\pm 2,0$                  | $\pm 1,5$        | $\pm 0,5$  | $-0,5$    |
| 160                                                   |                            |                  |            | $-1,0$    |
| 180–200                                               |                            | $\pm 2,0$        |            |           |
| 220                                                   | $\pm 3,0$                  | $\pm 2,5$        | $\pm 0,6$  | $-1,5$    |
| 240–260                                               |                            |                  |            |           |
| 280–300                                               |                            | $\pm 3,0$        | $\pm 0,7$  |           |
| 320                                                   |                            |                  | $\pm 0,8$  |           |
| 340–380                                               |                            |                  | $\pm 0,9$  |           |
| 400                                                   | $\pm 4,0$                  | $\pm 3,0$        | $\pm 1,0$  |           |
| 425                                                   |                            |                  |            |           |
| 450–500                                               |                            |                  |            |           |
| 550–600                                               |                            |                  |            |           |
| Dwuteowniki równoległościenne<br>według PN-91/H-93406 |                            |                  |            |           |
| Wyróżnik<br>oznaczenia IPE                            | Dopuszczalne odchyłki [mm] |                  |            |           |
|                                                       | $h$                        | $b_f$            | $t_w$      | $t_f$     |
| 80–120                                                | $\pm 2,0$                  | $\pm 2,0$        | $\pm 0,5$  | $\pm 1,0$ |
| 140–180                                               | $+3,0$<br>$-2,0$           | $+3,0$<br>$-2,0$ | $\pm 0,75$ | $\pm 1,5$ |
| 200–270                                               | $\pm 3,0$                  | $+3,0$           |            |           |
| 300–360                                               |                            | $\pm 4,0$        | $\pm 1,0$  | $\pm 2,0$ |
| 400                                                   |                            |                  |            |           |
| 450–500                                               | $\pm 4,0$                  |                  |            |           |
| 550–600                                               | $\pm 5,0$                  |                  |            |           |

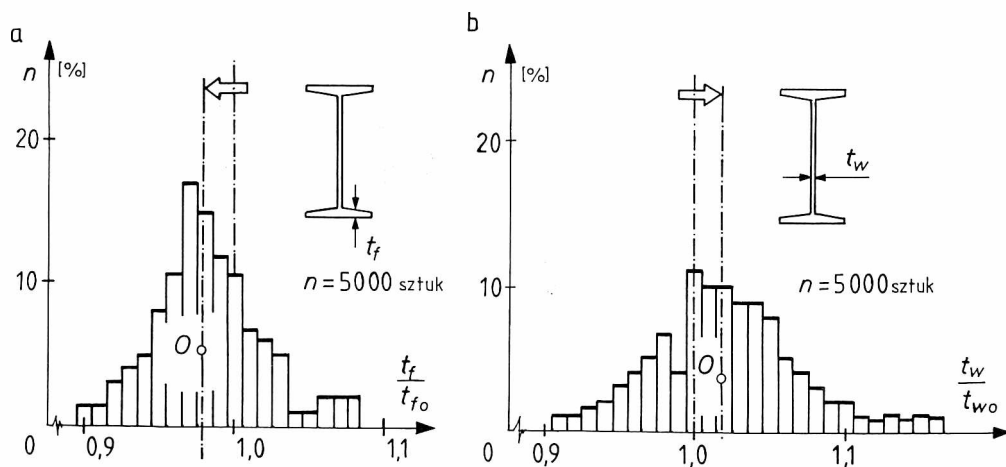
- brak płaskości pasów (patrz tabl. 4.5 wiersz 2),
- mimośród położenia pasa względem środka  $\Delta = \pm 5$  mm,
- odchyłka wysokości  $h$  dźwigara

$$\Delta = \begin{cases} \pm 3 \text{ mm} & \text{dla } h \leq 900 \text{ mm}, \\ \pm 5 \text{ mm} & \text{dla } 900 < h \leq 1800 \text{ mm}, \\ (+8 \text{ mm}; -5 \text{ mm}) & \text{dla } h > 1800 \text{ mm}. \end{cases}$$

Imperfekcje przekroju poprzecznego kształtowników walcowanych na gorąco są skutkiem zużycia walców, na których następuje kształtowanie wyrobów

Tablica 4.4. Tolerancje wymiarowe dwuteowników szerokostopowych według wymagań zachodnioeuropejskich [27]

| Szerokość półki | Wysokość dwuteownika | Odchyłki       |                  |               |                  |                        |
|-----------------|----------------------|----------------|------------------|---------------|------------------|------------------------|
|                 |                      | Szerokość pasa | Wysokość profilu | Grubość półki | Grubość średnika | Powierzchnia przekroju |
| mm              | mm                   | mm             | mm               | mm            | nm               | %                      |
| 160             | 160                  | ± 3,0          | + 4,0<br>− 2,0   | ± 1,5         | ± 1,0            | ± 6,0                  |
|                 | 220                  |                | ± 3,0            |               |                  |                        |
| 220             | 260                  |                |                  | ± 2,0         | ± 1,5            |                        |
| 260             | 300                  |                |                  |               |                  |                        |
| 300             | 400                  |                |                  |               |                  |                        |
| 400             | 500                  |                |                  |               |                  |                        |
| 500             | 700                  |                |                  |               |                  |                        |
| 700             | 1000                 |                | ± 5,0            | ± 2,0         |                  |                        |



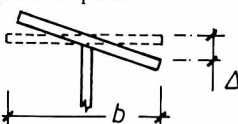
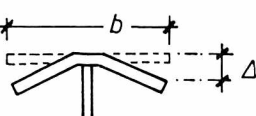
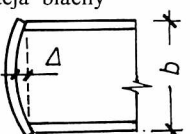
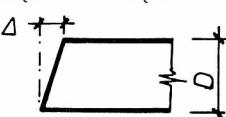
Rys. 4.3. Histogram grubości pasów (a) i grubości średników (b) dwuteowników walcowanych [1]

hutniczych. Zmiany szerokości stopek i wysokości dwuteowników, ceowników, kątowników są bardzo małe, zmiany grubości stopek i środników natomiast mogą być duże. Na przykład stopki dwuteowników mają tendencję do pocieniania się, środniki zaś do pogrubiania się. Zjawisko to ilustrują histogramy grubości pólki i środników dwuteowników na rys. 4.3 [1], wykonane dla populacji około 5000 sztuk badanych profili.

Na rys. 4.3 nominalne grubości pólki i środników badanych dwuteowników oznaczono  $t_{fo}$ ,  $t_{wo}$ . Na osiach poziomych przedstawionych na rys. 4.3 histogramów podano stosunek mierzonych w badaniach grubości ścianek ( $t_f$ ,  $t_w$ ) do ich grubości nominalnych ( $t_{fo}$ ,  $t_{wo}$ ). Środek ciężkości  $O$  histogramu grubości pasów (rys. 4.3a) jest przesunięty na lewo w stosunku do wartości odniesienia równej 1, co oznacza, iż przeciętna ich grubość była mniejsza od nominalnej. Dla badanych grubości środników środek ciężkości histogramu  $O$  jest przesunięty na prawo w stosunku do wartości odniesienia równej 1 (rys. 4.3b), co wskazuje, iż były one grubsze w porównaniu z wymiarami nominalnymi. W tym przypadku, w związku z pocienieniem grubości pasów, należy liczyć się ze zmniejszeniem między innymi momentu bezwładności przekroju, a co za tym idzie zmniejszeniem nośności dwuteowników na zginanie (w stosunku do nośności prętów o przekroju nominalnym).

Losowość wymiarów geometrycznych przekrojów poprzecznych kształtowników zarówno walcowanych na gorąco, jak i profilowanych na zimno jest powodem zmian

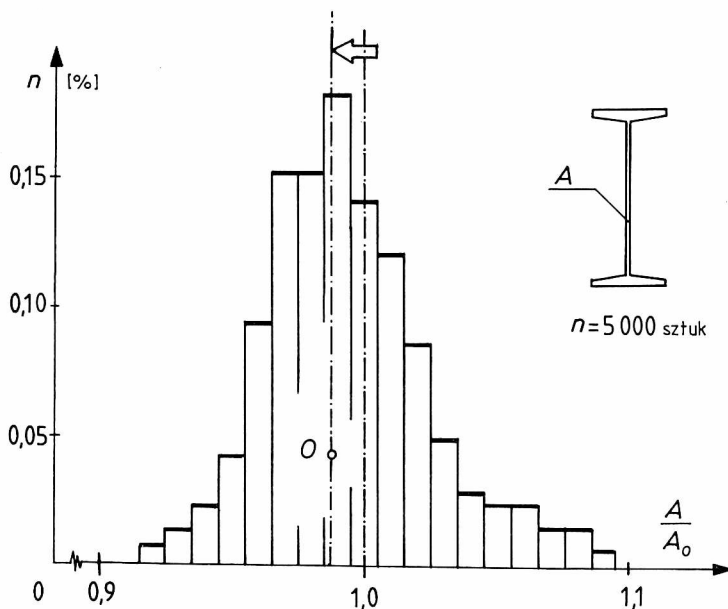
Tablica 4.5. Wybrane odchyłki dopuszczalne według PN-B-06200:1997 [104]

| Nr | Rodzaj odchyłki                                                                                               | Parametr                                                                                                                          | Odchyłka dopuszczalna                           |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1  | Prostopadłość pasów<br>    | Odchyłka od kąta prostego                                                                                                         | $ \Delta  = \text{większa z:}$<br>(0,01b; 5 mm) |
| 2  | Płaskość pasów<br>         | Odchyłka od płaskości                                                                                                             | $ \Delta  = \text{większa z:}$<br>(b/150; 3 mm) |
| 3  | Deformacja blachy<br>      | Deformacja $\Delta$ blachy                                                                                                        | $ \Delta  = \text{większa z:}$<br>(b/150; 3 mm) |
| 4  | Prostokątność krawędzi<br> | Prostopadłość do osi podłużnej:<br>– część nieobrobiona dla podparcia dociskowego,<br>– część obrobiona dla podparcia dociskowego | $\Delta = \pm D/300$<br>$\Delta = \pm D/1000$   |

sztywności i charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego prętów, takich jak: pole  $A(\omega)$ , promień bezwładności  $i(\omega)$ , wskaźnik zginania  $W(\omega)$ , moment bezwładności  $J(\omega)$ , wskaźniki oporu plastycznego  $W_{pl}(\omega)$  itp.

Na rys. 4.4 pokazano histogram pola przekroju poprzecznego dwuteowników walcowanych [1], obliczony na podstawie wyników badań grubości pól i średników pokazanych na rys. 4.3 (populacja ponad 5000 szt.). Na osi poziomej przedstawionego na rys. 4.4 histogramu podano stosunek obliczonych pól  $A$  (dla zmierzonych w badaniach grubości ścianek) do nominalnego pola przekroju  $A_0$  analizowanych dwuteowników. Środek ciężkości  $O$  histogramu pola przekroju poprzecznego jest przesunięty na lewo w stosunku do wartości odniesienia równej 1 (rys. 4.4), co oznacza, iż przeciętne ich pola powierzchni były mniejsze od nominalnych. W związku ze zmniejszonym polem przekroju poprzecznego, należy więc liczyć się ze zmniejszoną nośnością podłużną badanych dwuteowników w stosunku do nośności prętów o przekroju nominalnym. Histogramy pozostałych (np.  $i(\omega)$ ,  $W(\omega)$ ,  $J(\omega)$ ,  $W_{pl}(\omega)$ ) charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego prętów są bardzo podobne do pokazanych na rys. 4.4.

Z analizy histogramów grubości ścianek oraz charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego badanych dwuteowników wynika, iż występuje przesunięcie osi głównej histogramów w stosunku do wartości nominalnej (wartości rzeczywiste badanych parametrów były często mniejsze od wartości nominalnych). Wartości tych losowych zmian cech geometrycznych dwuteowników (zidentyfikowane doświadczalnie) są na tyle duże, iż należy je uwzględnić w szacowaniu nośności prętów.

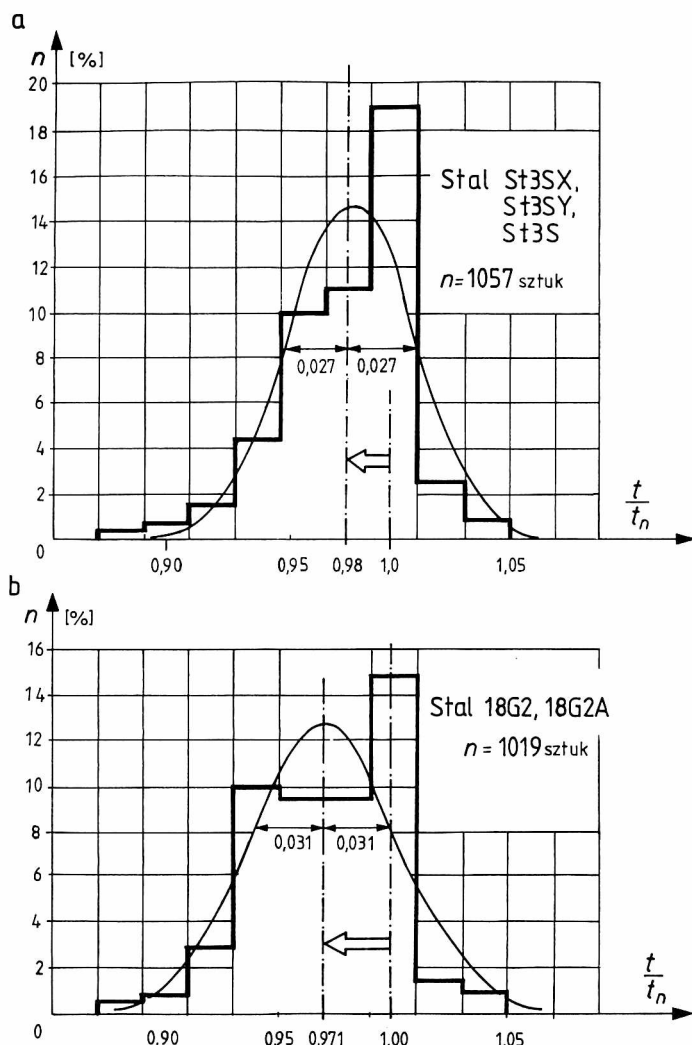


Rys. 4.4. Histogram pola przekroju poprzecznego dwuteowników walcowanych [1]

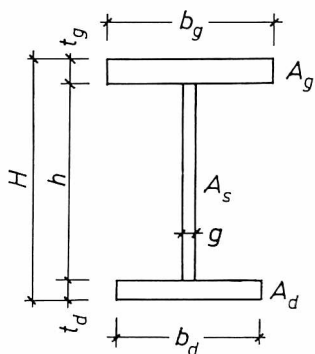


Wymiary geometryczne przekrojów poprzecznych elementów spawanych zależą przede wszystkim od losowych zmian grubości użytych blach. W przypadku blach najczęściej stosowanych na spawane przekroje blachownicowe prętów, o grubościach 6–50 mm, odchylenia standardowe ich grubości wynoszą 0,2–0,4 mm, a współczynniki zmienności są małe i wynoszą 1–4%.

Statystyczną zmienność grubości stalowych wyrobów hutniczych stosowanych na budowlane konstrukcje metalowe szacuje się na około  $v_t = 6,0\%$ . Wyniki badań grubości  $t$  blach stalowych gatunku St3 i 18G2, otrzymane przez Z. Menderę [57], dla zbadanych populacji ponad 1000 szt. próbek pokazano na rys. 4.5. Na osiach poziomych histogramów podano stosunek mierzonych w badaniach grubości blach  $t$  do ich grubości nominalnych  $t_n$ . Również i w tym przypadku (podobnie jak dla



Rys. 4.5. Wyniki badań grubości  $t$  blach gatunku St3 i 18G2



Rys. 4.6. Dwuteowy przekrój poprzeczny pręta spawanego z blach

pasów dwuteowników – rys. 4.3a) środek ciężkości  $O$  obu histogramów grubości blach jest przesunięty na lewo w stosunku do wartości odniesienia równej 1 (rys. 4.5), co oznacza, iż przeciętna ich grubość była mniejsza od nominalnej.

W przypadku prętów o przekrojach spawanych z blach stosunkowo nieduże współczynniki zmienności grubości blach użytych na pasy i środniki mogą mieć duży wpływ na ich losowe charakterystyki geometryczne przekrojów poprzecznych.

Analizowane będą niektóre charakterystyki geometryczne pręta dwuteowego o przekroju poprzecznym spawanym z blach pokazanym na rys. 4.6. Założono, iż wymiary blach, z których są zbudowane, są losowe i mogą być opisane rozkładem normalnym.

Losowe pola przekrojów poszczególnych blach  $A_i(\omega)$ , z których zbudowany będzie pręt dwuteowy (rys. 4.6), wynoszą

$$A_g(\omega) = b_g(\omega) t_g(\omega), \quad (4.1)$$

$$A_s(\omega) = h(\omega) g(\omega), \quad (4.2)$$

$$A_d(\omega) = b_d(\omega) t_d(\omega). \quad (4.3)$$

Wartości średnie oraz odchylenia standardowe przekrojów poprzecznych pól blach wynoszą

$$\bar{A}_g = \bar{b}_g \bar{t}_g, \quad (4.4)$$

$$\bar{A}_s = \bar{h} \bar{g}, \quad (4.5)$$

$$\bar{A}_d = \bar{b}_d \bar{t}_d, \quad (4.6)$$

$$s_{A_g} = \sqrt{s_{b_g}^2 + s_{t_g}^2}, \quad (4.7)$$

$$s_{A_s} = \sqrt{s_h^2 + s_g^2}, \quad (4.8)$$

$$s_{A_d} = \sqrt{s_{b_d}^2 + s_{t_d}^2}, \quad (4.9)$$

gdzie:

$\bar{b}_g, \bar{h}, \bar{b}_d, \bar{t}_g, \bar{g}, \bar{t}_d$  – wartości średnie szerokości i grubości blach,  
 $s_{b_g}, s_h, s_{b_d}, s_{t_g}, s_g, s_{t_d}$  – odchylenia standardowe szerokości i grubości blach.  
 Losowe pole przekroju poprzecznego pręta dwuteowego wynosi

$$A(\omega) = A_g(\omega) + A_s(\omega) + A_d(\omega). \quad (4.10)$$

Wartość średnia oraz odchylenie standardowe dwuteowego przekroju poprzecznego pręta (rys. 4.6) wynoszą

$$\bar{A} = \bar{A}_g + \bar{A}_s + \bar{A}_d, \quad (4.11)$$

$$s_A = \sqrt{s_{A_g}^2 + s_{A_s}^2 + s_{A_d}^2}. \quad (4.12)$$

Jeśli średnie pola przekrojów poprzecznych pasów są sobie równe i wynoszą  $\bar{A}_p$ , to pole przekroju dwuteowego pręta opisuje zależność

$$\bar{A} = 2\bar{A}_p + \bar{A}_s. \quad (4.13)$$

Odchylenie standardowe pola przekroju poprzecznego wynosi wówczas

– dla nieskorelowanych pól przekrojów poprzecznych pasów ( $\varrho_{A_g, A_d} = 0$ )

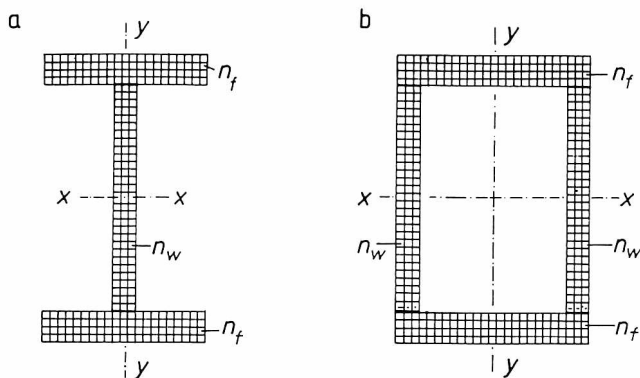
$$s_A = \sqrt{2s_{A_p}^2 + s_{A_s}^2}, \quad (4.14)$$

– dla skorelowanych pól przekrojów poprzecznych pasów ( $\varrho_{A_g, A_d} = 1$ )

$$s_A = \sqrt{4s_{A_p}^2 + s_{A_s}^2}, \quad (4.15)$$

gdzie  $s_{A_p}$  oznacza odchylenie standardowe pola powierzchni pasów.

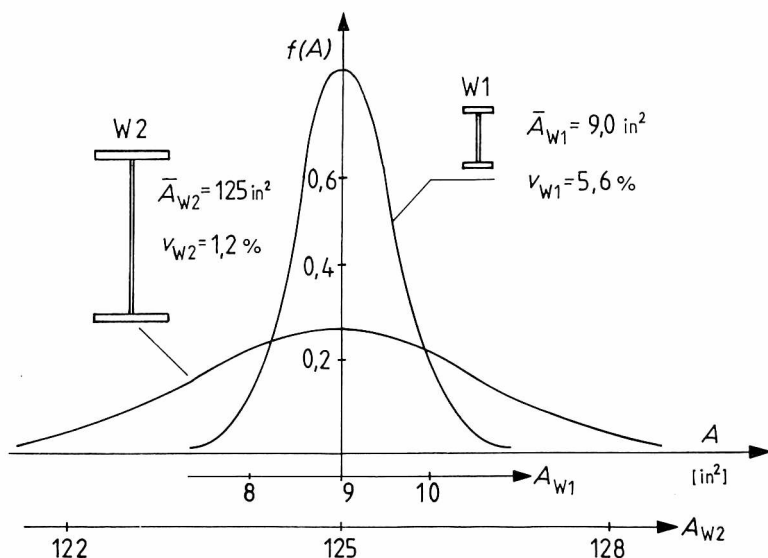
Obliczenia losowych charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych prętów można również wykonać z wykorzystaniem elektronicznych maszyn cyfrowych. Sposób taki przedstawiono w [27]. Przekrój poprzeczny dzieli się na elementarne pola poprzeczne (elementy skończone), jak to pokazano na rys. 4.7a i b (gdzie  $n_f$  jest liczbą elementarnych pól póltek,  $n_w$  – liczbą elementarnych pól środników).



Rys. 4.7. Podział dwuteowego (a) i skrzynkowego (b) przekroju spawanego z blach na pola elementarne

Zakładając [27], iż losowe wartości wymiarów geometrycznych przekroju poprzecznego mogą być opisane rozkładem normalnym, wyznacza się wartości średnie i odchylenia standardowe elementarnych pól powierzchni póltek i środników, a następnie oblicza się parametry losowych charakterystyk geometrycznych  $A(\omega)$ ,  $J(\omega)$ ,  $W(\omega)$ .

Na rys. 4.8 [27] pokazano funkcje gęstości prawdopodobieństw pól przekrojów poprzecznych dwóch blachownic dwuteowych W1 i W2 różniących się polami przekroju poprzecznego. Krzywe rozkładu uzyskano na podstawie badań statystycznych grubości póltek i środników analizowanych dwuteowników. Na uwagę zasługuje to, iż współczynnik zmienności pola przekroju poprzecznego profilu niższego



Rys. 4.8. Funkcje gęstości prawdopodobieństw pól przekrojów poprzecznych prętów dwuteowych [27]

Tablica 4.6. Wyniki badań cech geometrycznych blach fałdowych [7]

| Lp. | Wymiary nominalne<br>$B_n$ [mm] | $t_n = 0,75$ mm   |               |        | $t_n = 1$ mm      |               |        |
|-----|---------------------------------|-------------------|---------------|--------|-------------------|---------------|--------|
|     |                                 | $\bar{B}$<br>[mm] | $s_B$<br>[mm] | $v_B$  | $\bar{B}$<br>[mm] | $s_B$<br>[mm] | $v_B$  |
| 1   | $t_i$                           | 0,719             | 0,0011        | 0,0139 | 0,946             | 0,0019        | 0,0193 |
| 2   | $h_n = 55$                      | 55,397            | 0,305         | 0,0056 | 56,053            | 0,3746        | 0,0067 |
| 3   | $b_n = 126,5$                   | 125,86            | 1,5755        | 0,0129 | 126,45            | 1,8953        | 0,0149 |
| 4   | $a_n = 44$                      | 42,871            | 0,906         | 0,0211 | 43,254            | 1,024         | 0,0237 |
| 5   | $c_n = 187,5$                   | 183,51            | 2,622         | 0,0143 | 184,38            | 2,931         | 0,0121 |

( $v_{A1} = 5,6\%$ ) jest około 5 razy większy od tegoż współczynnika dla profilu wyższego ( $v_{A2} = 1,2\%$ ).

Przykład kompleksowych badań statystycznych parametrów geometrycznych przekrojów poprzecznych blach fałdowych przedstawiono w tabl. 4.6 i 4.7 [7].

W tabl. 4.6 zamieszczono parametry statystyczne podstawowych wymiarów geometrycznych blach fałdowych T 55 × 188 grubości 0,75 i 1,00 mm, otrzymanych z badań populacji 15 sztuk każdej grubości.

Na podstawie otrzymanych z badań statystyk obliczono parametry charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych ( $A$  – pole przekroju,  $J$  – moment

Tablica 4.7. Parametry losowych charakterystyk geometrycznych blach fałdowych o szerokości 1,0 m, obliczone na podstawie wyników badań zamieszczonych w tabl. 4.6 [7]

| Lp. | Rodzaj płyty      | Oznaczenia | $t$<br>[ $\mu\text{m}$ ] | $A$<br>[ $\text{cm}^2$ ] | $J$<br>[ $\text{cm}^4$ ] | $W_{xg}$<br>[ $\text{cm}^3$ ] | $W_{xd}$<br>[ $\text{cm}^3$ ] | $i$<br>[cm] |
|-----|-------------------|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------|
| 1   | T 55 × 188 × 0,75 | $B_n$      | 750                      | 8,200                    | 40,304                   | 20,448                        | 11,421                        | 2,217       |
| 2   |                   | $\bar{B}$  | 719,3                    | 7,884                    | 39,236                   | 19,766                        | 11,162                        | 2,231       |
| 3   |                   | $s_B$      | 9,999                    | 0,134                    | 1,420                    | 0,716                         | 0,404                         | 0,044       |
| 4   |                   | $v_B$      | 0,0139                   | 0,0157                   | 0,0362                   | 0,0362                        | 0,0362                        | 0,0197      |
| 5   | T 55 × 188 × 1,0  | $B_n$      | 1000                     | 10,960                   | 53,492                   | 27,057                        | 15,184                        | 2,209       |
| 6   |                   | $\bar{B}$  | 945,9                    | 10,424                   | 51,548                   | 25,903                        | 14,686                        | 2,223       |
| 7   |                   | $s_B$      | 18,350                   | 0,177                    | 2,069                    | 1,044                         | 0,592                         | 0,048       |
| 8   |                   | $v_B$      | 0,0194                   | 0,017                    | 0,0403                   | 0,0403                        | 0,0403                        | 0,0218      |

bezwładności,  $W_{xg}$ ,  $W_{xd}$  — wskaźniki zginania,  $i$  — promień bezwładności) badanych blach fałdowych, które zamieszczono w tabl. 4.7. W tabl. 4.6 i 4.7 geometryczne parametry statystyczne przekrojów poprzecznych badanych blach oznaczono:  $B_n$  — wartość nominalna,  $\bar{B}$  — wartość średnia,  $s_B$  — odchylenie standardowe,  $v_B$  — współczynnik zmienności pomierzonych lub obliczonych wielkości.

Z analizowanym zagadnieniem losowych właściwości charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych koresponduje zagadnienie zmniejszenia się parametrów geometrycznych na skutek eksploatacji, ścierania i korozji. Nie dotyczy to blach fałdowych (jako konstrukcji typu powierzchniowego), gdyż są one zazwyczaj dobrze zabezpieczone przed korozją. W innych przypadkach, gdy należy spodziewać się istotnych zmian przekrojów poprzecznych, prognozuje się „zużycie” profilu na podstawie badań i zaleceń literaturowych lub normowych. Wytyczne zużycia korozyjnego płaszcza przewodu kominowego podaje na przykład norma [102].

Omówione zagadnienie jest szczególnie istotne dla metalowych konstrukcji powierzchniowych (rurociągów, zbiorników, kominów), w których jako elementy nośne występują cienkie blachy, charakteryzujące się niekorzystnym modułem powierzchniowym  $k$  ( $k$  — stosunek pola przekroju poprzecznego do jego obwodu), eksploatowanych w środowisku oddziałującym korozyjnie.

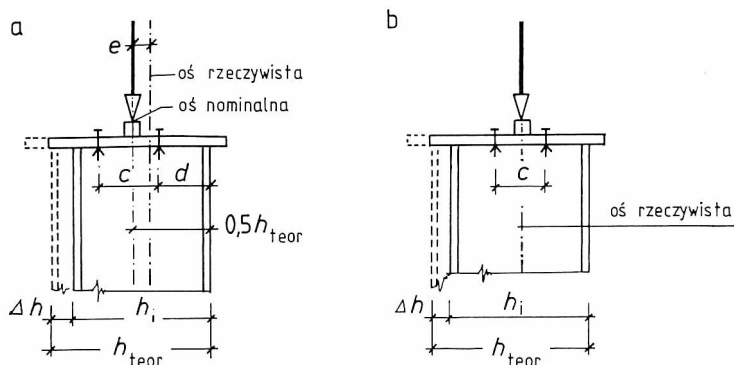
Zmniejszenie nośności stalowych konstrukcji powierzchniowych wywołane korozją może być również spowodowane oddziaływaniem mediów technologicznych (np. korozyjne zużycie kominów wywołane skroplonymi spalinami emitowanymi z kotłowni opalanymi paliwami zawierającymi siarkę) [13]. Innym przykładem zmniejszenia nośności ustroju związanej z ubytkiem pola przekroju poprzecznego stanowiącej skutek procesów technologicznych są elementy ulegające ścieraniu (np. szyny jezdne belek podsuwnicowych *włączone* do współpracy z dźwigarami nośnymi).

Odchyłki wymiarowe geometrii wyrobów hutniczych mają również niepożądane reperkusje wytrzymałościowe i montażowe w przypadku nieuwzględnienia ich w sporządzaniu rysunków warsztatowych.

Pomijanie w teorii projektowania i rysowania konstrukcji metalowych losowych wymiarów geometrycznych elementów oraz losowych odchyłek wymiarowych, powstających w trakcie wykonawstwa (tzn. trasowania, cięcia, nawiercania) oraz w trakcie łączenia za pomocą spoin, śrub, zgrzewania, jest często spotykanym błędem

grafiki inżynierskiej. Błąd ten jest często przyczyną zmniejszania jakości i nośności konstrukcji. Znanych jest wiele przykładów awarii spowodowanych niewłaściwą prezentacją graficzną konstrukcji przez projektanta na rysunkach budowlanych.

Zagadnienie analizowane będzie na przykładzie głowicy słupa o przekroju dwuteowym [42], na który należy przekazać ściskające obciążenie osiowe za pośrednictwem elementu centrującego (patrz rys. 4.9a).



Rys. 4.9. Błędne (a) i poprawne (b) wymiarowanie geometryczne głowicy słupa

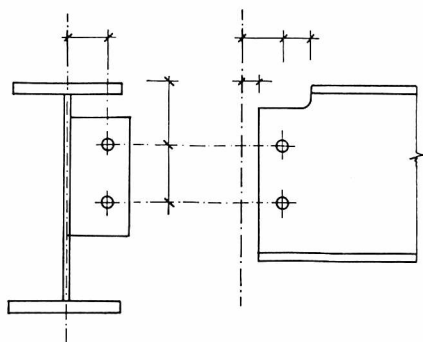
Żądanie dotrzymania przez wykonawcę usytuowania elementu centrującego w odległości połowy wysokości teoretycznej walcowanego lub spawanego przekroju dwuteowego, obarczonego odchyłką  $\Delta h$ , spowoduje nieosiowe przekazanie obciążenia i w konsekwencji zmniejszenie nośności słupa (gdyż słup będzie wówczas zginany mimośrodowo). Inną reperkusją zaistniałej sytuacji będą nie tylko kłopoty montażowe, gdyż otwory na śruby do połączenia słupa z belką będą *przesunięte* względem położenia teoretycznego. Zmieni się również schemat statyczny konstrukcji, gdyż w wyidealizowanym modelu obliczeniowym nie zakładano odchyłek montażowych.

Właściwe sporządzenie rysunków warsztatowych polega na zasadzie *gubienia* odchyłek. Sposób wymiarowania geometrycznego omawianego styku słupa z belką, pokazany na rys. 4.9a, jest błędny. Poprawny sposób zwymiarowania głowicy słupa pokazano na rys. 4.9b. Nie podając wymiaru usytuowania elementu centrującego na blasze poziomej głowicy słupa (rys. 4.9b), żąda się od wykonawcy symetrycznego ułożenia tego elementu, otwory na śruby zaś wymiaruje się względem wytrasowanej, rzeczywistej osi słupa o losowej wysokości przekroju poprzecznego.

Na hierarchię ważności wymiarów należy zwracać pilną uwagę podczas sporządzania rysunków. Zasady geometryczne wymiarowania konstrukcji umożliwiają poprawne wytrasowanie, wykonanie i montaż konstrukcji i zminimalizowanie skutków losowych odchyłek wymiarowych profili hutniczych.

Dla przykładu na rys. 4.10 pokazano poprawny sposób geometryczny wymiarowania usytuowania otworów potrzebnych do połączenia belki z podciągami, w którym

wymaga się, aby górna powierzchnia podciągu i belki była na jednym poziomie. Sposób pokazany na rys. 4.10 spełnia postawiony postulat *gubienia* odchyłek. Istotnym elementem wpływającym na dokładność wykonania styków konstrukcji jest odpowiednia prezentacja graficzna ustroju nośnego na rysunkach warsztatowych. Uznając losowy kształt przekrojów poprzecznych prętów i wymiarów części składowych styków oraz powstawanie odchyłek geometrycznych w kolejnych operacjach technologicznych wykonawstwa styków, należy uwzględniać w sporządzaniu rysunków hierarchię ważności wymiarów. Dobrze zwymiarowane geometrycznie na rysunkach warsztatowych elementy konstrukcyjne sugerują wykonawcy sposób trasowania i scalania części składowych elementów wysyłkowo-montażowych.



Rys. 4.10. Przykład poprawnego geometrycznego wymiarowania połączenia belek

Właściwe sporządzanie rysunków warsztatowych, stwarzające warunki minimalizacji odchyłek geometrycznych elementów, polega na stosowaniu zasady *gubienia* odchyłek wymiarowych oraz *dowiązywania* linii wymiarowych do punktów i płaszczyzn zapewniających poprawne scalanie elementów wysyłkowo-montażowych podczas montażu. Przykłady wymiarowania styków, gdzie uwzględniono wymienione postulaty, przedstawiono na rys. 4.9b i 4.10.

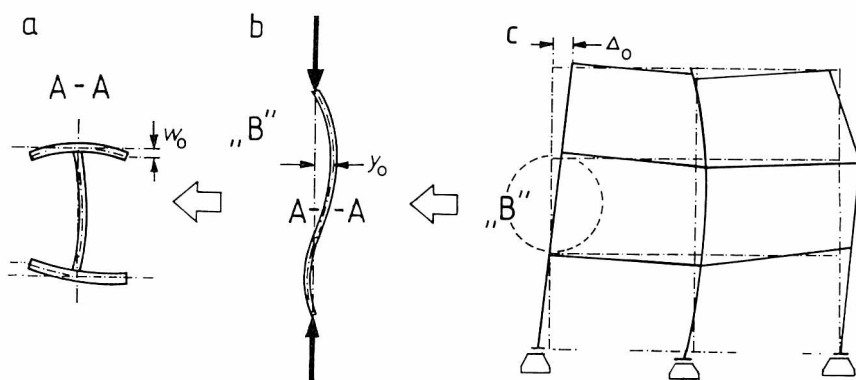
## 4.3. Imperfekcje osi podłużnych oraz płaszczyzn środkowych elementów

### 4.3.1. Wstęp

Imperfekcje geometryczne konstrukcji prętowych można odnosić do przekroju poprzecznego prętów, ich osi podłużnych, a także do całego ustroju nośnego. Imperfekcje geometryczne prętowych konstrukcji stalowych mają głównie postać wstępnych zniekształceń przekroju poprzecznego ( $w_0$  na rys. 4.11a) lub początkowych wygięć osi podłużnych elementów prętowych ( $y_0$  na rys. 4.11b), a także zmienionych (np.

przechylonych) w stosunku do założeń teoretycznych głównych osi ustroju nośnego ( $\Delta_0$  na rys. 4.11c). W metalowych konstrukcjach powierzchniowych występują wady geometryczne powierzchni środkowych elementów powłokowych, a także odchyłki osi systemu konstrukcyjnego.

Losowe odchyłki kształtu przekroju poprzecznego  $w_0$  wpływają na losowe charakterystyki geometryczne przekroju elementu  $A$ ,  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_s$ ,  $J_\omega$ . Imperfekcje osi podłużnych prętów  $y_0$  i płaszczyzn środkowych konstrukcji powłokowych skutkują zmianą współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  oraz kąta skręcenia  $\varphi$  przekrojów poprzecznych, co często zmniejsza nośność graniczną tych elementów. Losowe odchyłki systemu konstrukcyjnego od geometrii oczekiwanej powodują zmianę współrzędnych  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  oraz kąta skręcenia  $\varphi_i$  węzłów ustroju. Następstwem takich imperfekcji jest zmiana sił wewnętrznych w stosunku do założonego modelu teoretycznego (bez wad).



Rys. 4.11. Imperfekcje geometryczne przekroju (a), pręta (b), systemu konstrukcyjnego (c)

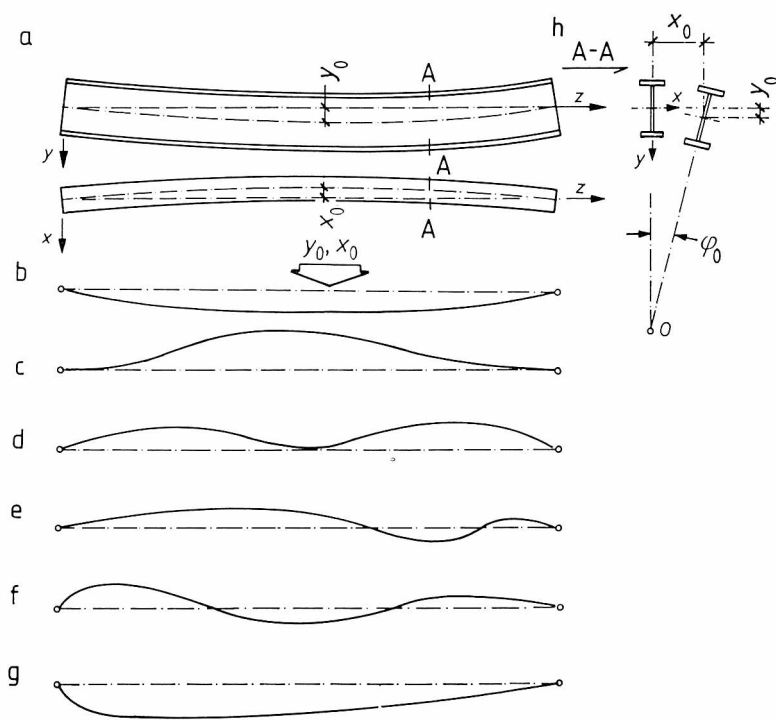
Imperfekcje osi podłużnych prętów dotyczą przede wszystkim odchylenia rzeczywistych osi od ich teoretycznego położenia. W przypadku prętów prostych odchyłka ta mierzona jest od teoretycznej osi podłużnej w postaci linii prostej (mimośród  $y_0$ ), dla prętów zakrzywionych zaś od teoretycznej krzywizny elementu (strzałka wygięcia  $e_0$ ). Idealna (teoretyczna) oś pręta ( $y_0 = e_0 = 0$ ) to taka, która nie wykazuje również skręcenia głównych płaszczyzn kształtownika (kąt skręcenia  $\varphi_0 = 0$ ). Do imperfekcji zalicza się również odchyłki geometryczne płaszczyzn środkowych płyt i powierzchni krzywoliniowych (np. powierzchni walcowych płaszczy zbiorników, kominów, rurociągów), od założonego kształtu teoretycznego. Odchylenia od założonej, idealnej (teoretycznej) osi, płaszczyzny czy powierzchni mają często zasadniczy wpływ na nośność graniczną elementu lub systemu konstrukcyjnego.

Zbadane oraz statystycznie opracowane odchyłki geometryczne stanowią podstawę do normowego kalibrowania, na przykład współczynników: niestateczności ogólnej, stateczności miejscowej czy utraty płaskiej zginania (zwichrzenia). Odchylenia geometryczne od założonego idealnego modelu teoretycznego są wynikiem zarówno losowej geometrii przekroju poprzecznego pręta (np. są skutkiem procesów



wytwórczych elementów podczas walcowania profilu na gorąco lub kształtowania na zimno wyrobów cienkościennych), poddawania elementów wysyłkowo-montażowych procesom termicznym (w trakcie spawania części składowych elementów w podzespoły) i mechanicznym w wytwórni, a także podczas transportu oraz montażu konstrukcji na placu budowy.

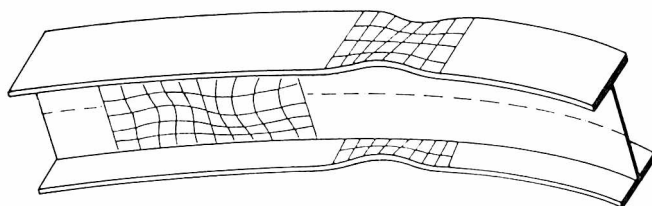
Na rys. 4.12a–g pokazano przykładowe wygięcia wstępne osi podłużnych prętów. Kształty wygiętych osi podłużnych prętów, które oznaczono na rys. 4.12a–g linią ciągłą odnoszą się zarówno do silniejszej, jak i słabszej osi oporu przy zginaniu. Oprócz dwukierunkowych wstępnych wygięć przekroje prętów mogą być dodatkowo skręcone o kąt  $\varphi_0$ . Na rys. 4.12h pokazano przykład skręcenia belki. Tak więc w ogólnym przypadku imperfekcje osi podłużnych objawiają się odchyłkami  $x_0$ ,  $y_0$  i  $\varphi_0$ .



Rys. 4.12. Wstępne imperfekcje osi podłużnych prętów

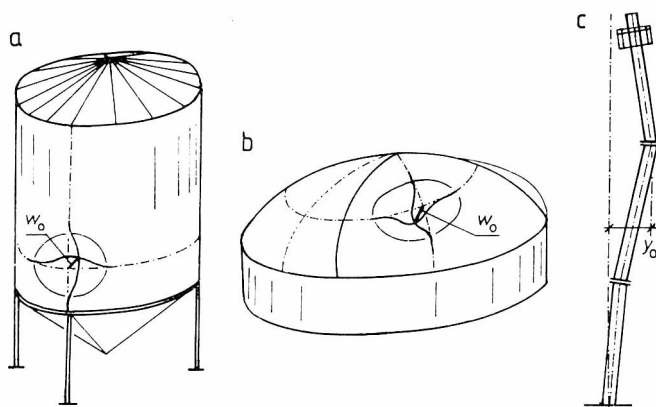
Oprócz tych wad pręty mogą być obarczone wstępnymi imperfekcjami geometrycznymi o charakterze lokalnym, w postaci wybrzuszeń i wygięć ścianek kształtownika (półek, środkników). Są to odchyłki powierzchni środkowych elementów składowych (ścianek) przekrojów poprzecznych prętów od płaszczyzny.

Na rys. 4.13 pokazano oprócz wygiętej osi podłużnej pręta o przekroju dwuteowym jego imperfekcje lokalne w postaci wstępnego wygięcia pasów i wstępnego wybrzuszenia środknika.



Rys. 4.13. Wstępne imperfekcje płaszczyzn środkowych elementów składowych prętów

W przypadku stalowych konstrukcji powierzchniowych ich lokalne imperfekcje geometryczne mają przede wszystkim postać wstępnych przemieszczeń (wypukłości i wklęsnięć) w odniesieniu do założonej teoretycznie powierzchni środkowej. W takich konstrukcjach, podobnie jak w ustrojach prętowych, mogą wystąpić odchyłki osi podłużnych, co pokazano na przykładzie konstrukcji komina (rys. 4.14c). Wstępne wady płaszczyzn środkowych elementów powierzchniowych pokazano na przykładach powłoki walcowej silosu (rys. 4.14a) i dwukrzywiznowego przekrycia (rys. 4.14b).



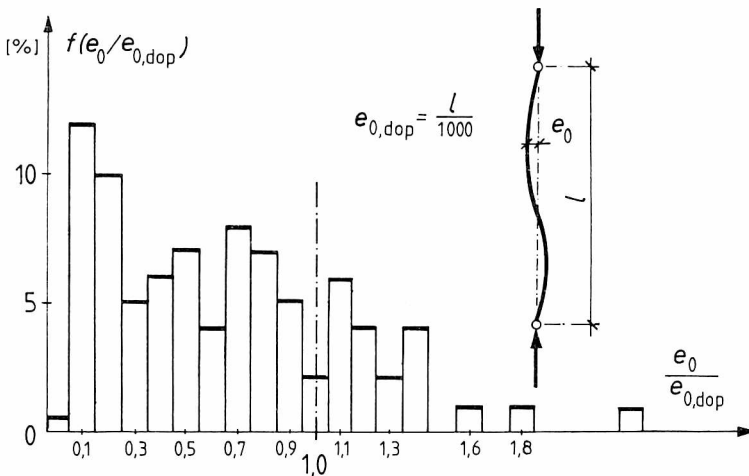
Rys. 4.14. Wstępne imperfekcje płaszczyzn środkowych silosu (a) i powłoki (b) oraz osi komina (a)

Występowanie losowych imperfekcji geometrycznych jest szczególnie istotne dla ściskanych elementów konstrukcyjnych (prętów lub ich części składowych, tj. pasów, środników, a także płyt i powłok), które ulegają wyboczeniu. W zasadzie tylko dla elementów rozciąganych oraz zginanych zabezpieczonych przed utratą płaskiej postaci zginania oraz niestatecznością lokalną wpływ imperfekcji osi i płaszczyzn środkowych może być pomijalnie mały. Dla elementów ściskanych ulegających wyboczeniu (utracie stateczności), zginanych, gdzie jedną z form wyczerpania nośności jest zwichrzenie, ściskanych i zginanych (nośność graniczna jest osiągnięta w wyniku zginania drugiego rzędu) oraz ścianek ściskanych przekroju poprzecznego kształtowników (występuje utrata stateczności miejscowej) imperfekcje:  $y_0$ ,  $x_0$ ,  $\varphi_0$  i  $w_0$  w istotny sposób zmniejszają nośność. W każdym przypadku ściskania konstrukcji obciążonych imperfekcjami (zarówno na poziomie przekroju pręta, jak i systemu) odchyłki

$y_0$ ,  $x_0$ ,  $z_0$ ,  $\varphi_0$  i  $w_0$  powodują mimośrodowe ściskanie (jednoczesne zginanie i ściskanie konstrukcji). Nośności takich ustrojów ze wstępnymi imperfekcjami są mniejsze niż ich oszacowania dla modelu konstrukcji idealnej bez wad. Podsumowując, należy stwierdzić, iż fenomenowi utraty stateczności towarzyszą imperfekcje, które obniżają nośność graniczną. Można wyróżnić imperfekcje na poziomie przekroju, elementu i całej konstrukcji. Imperfekcje istotne dla nośności to takie, które są zgodne z formą utraty stateczności przekroju, elementu lub całej konstrukcji.

Nieuniknione występowanie wad i imperfekcji, które powstają w kolejnych etapach (w wytwórni, transporcie, montażu) realizacji konstrukcji budowlanych jest oczywiste. Występowanie wstępnych ograniczonych mimośródów osi prętów lub płaszczyzn płyt, a także skręceń i przemieszczeń początkowych i wpływ tych imperfekcji na nośność w normach projektowania konstrukcji uwzględniony jest przez odpowiednie wykalibrowanie współczynników niestateczności. Dlatego też normy odbioru konstrukcji budowlanych uwzględniają fakt występowania wstępnych niedoskonałości początkowych ustroju przez ograniczenie dopuszczalnych wstępnych imperfekcji. Wartości tych dopuszczalnych wstępnych wad mogą być zaakceptowane jako nie zmniejszające w sposób znaczący nośności i bezpieczeństwa ustroju.

Na rys. 4.15 pokazano histogram losowych wstępnych wygięć osi prętów [73]. Na osi poziomej rys. 4.15 podano pomierzone wygięcia prętów  $e_0$ , odniesione do dopuszczalnej ich wartości normowej  $e_{0,dop}$ .

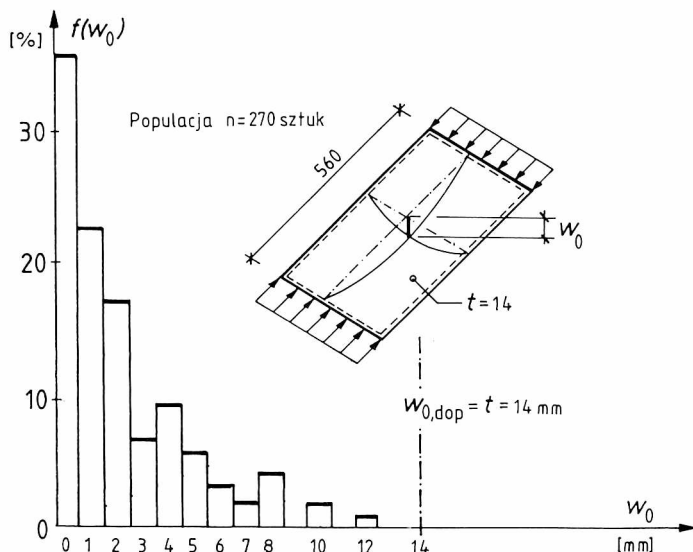


Rys. 4.15. Histogram wstępnych losowych odchyłek osi podłużnej prętów [73]

W badanym przypadku [73] zdecydowana większość losowych realizacji wstępnych wygięć osi prętów była mniejsza od ich wartości dopuszczalnych. Występowała jednak dość duża populacja prętów o odchyłkach osi podłużnych przekraczających dopuszczalną wartość  $e_{0,dop}$ . Z analizy kształtu histogramu losowych, wstępnych imperfekcji geometrycznych osi prętów pokazanych na rys. 4.15 wynika,

iz można je aproksymować rozkładem niesymetrycznym oraz że w prętowych konstrukcjach budowlanych należy liczyć się z występowaniem odchyłek osi podłużnych prętów, przekraczających normowe wartości dopuszczalne.

Na rys. 4.16 pokazano histogram losowych wstępnych wybrzuszeń (odchyłek od płaszczyzny środkowej) płyt (270 średników belek dwuteowych) [73]. Na osi poziomej podano wartości pomierzonych, wstępnych wybrzuszeń i wklęśnięć średników belek dwuteowych  $w_0$  w odniesieniu do teoretycznej płaszczyzny środkowej płyty, a także oznaczono ich dopuszczalną wartość normową  $w_{0,dop}$ .



Rys. 4.16. Histogram wstępnych losowych odchyłek płaszczyzny środkowej płyty [73]

W badanych urządzeniach wszystkie losowe wstępne odchyłki płaszczyzny środkowej płyt były mniejsze od wartości dopuszczalnych wstępnych wygięć. Z analizy kształtu histogramu losowych, wstępnych imperfekcji geometrycznych badanych płyt (rys. 4.16) wynika, iż podobnie jak dla prętów można je aproksymować rozkładem niesymetrycznym.

### 4.3.2. Dopuszczalne normowe odchyłki geometryczne

Imperfekcje osi prętów w postaci *przesunięcia osi* (np. kształtowników walcowanych) czy też płaszczyzny środkowej płyt i powłok (blach), stanowiące następstwo losowych odchyłek grubości i szerokości ścianek profilu (związane z losową geometrią wymiarów elementów składowych profili prętów — zagadnienie omawiane w rozdziale 4.2) są pomijalnie małe. W probabilistycznych analizach nośności ele-

mentów konstrukcyjnych nie uwzględnia się ich, zakładając stochastyczną jednorodność (pełną autokorelację geometrii przekrojów) elementów na ich długości.

Wstępne odkształcenia osi podłużnych powstające w trakcie formowania kształowników walcowanych na gorąco (np. dwuteowników, ceowników, kątowników) lub formowanych na zimno na walcarkach rolkowych, giętarkach (np. kątowników, ceowników; zetowników) nie przekraczają wartości: 0,0018  $l$  dla kształtowników walcowanych oraz 0,0015  $l$  dla prętów o przekrojach giętych na zimno (gdzie  $l$  jest długością elementów prętowych).

Wstępnego wygięcia osi podłużnych 0,0015  $l$  można się spodziewać dla profili kształtowanych na giętarkach rolkowych (np. w blachach fałdowych). Normy hutnicze ograniczają wielkość wstępnych imperfekcji osi podłużnych wyrobów hutniczych stosowanych w budownictwie do 1 mm na 1 m ich długości, tj. do 0,001  $l$ .

Wstępne wygięcia osi podłużnych prętów lub wklęsnięcia elementów płytowych i powłokowych powstają w trakcie formowania podzespołów w elementy wysyłkowo-montażowe w wytwórni, podczas transportu części składowych ustroju na plac budowy, a także w trakcie scalania ich na montażu. Są one zdecydowanie większe od omawianych wcześniej. Normy wykonawstwa i odbioru konstrukcji stalowych ograniczają wielkość niedoskonałości początkowych ustroju w odniesieniu do osi elementu lub płaszczyzny środkowej podając górną ich granicę, czasami sposób postępowania, gdy są one przekroczone.

Podstawową normą w tym zakresie jest PN-B-06200:1997 *Konstrukcje stalowe budowlane. Warunki wykonania i odbioru. Wymagania podstawowe* [104]. Z jej analizy wynika, iż polska norma odbioru konstrukcji ogranicza wstępne wygięcia, skręcenia osi elementów prętowych oraz odkształcenia (wklęsnięcia i wypukłości) składowych części elementów (średników, pasów, pólek, krawędzi), podając strzałki dopuszczalne. Wartości dopuszczalne wstępnych niedoskonałości są uzależnione od wymiarów elementu, z ograniczeniem w postaci wartości granicznej. Podstawowe wymagania w odniesieniu do omawianych typów wad geometrycznych konstrukcji stalowych zostaną przedstawione w dalszej części tego rozdziału.

Dla budowlanych konstrukcji stalowych rozróżnia się tolerancje: *normalne*, *specjalne* i *szczególne*.

Normy dotyczące wytwarzania i montażu konstrukcji stalowych określają tolerancje *normalne*, które stanowią podstawowe ograniczenie odchyłek wymiarowych koniecznych ze względu na spełnienie założeń projektowych (przyjmowanych w modelach teoretycznych aproksymujących wyężenie ustroju) dla konstrukcji obciążonych statycznie, a także możliwych do zaakceptowania niedoskonałości początkowych przy braku innych wymagań. Są to więc wymagania, które powinny być spełnione w zdecydowanej większości stalowych konstrukcji budowlanych.

Tolerancje *specjalne* są to tolerancje ostrzejsze, konieczne ze względu na spełnienie założeń projektowych dotyczących konstrukcji innych niż zwykle konstrukcje budowlane, a także narażonych na zmęczenie materiału.

Tolerancje *szczególne* są to tolerancje zazwyczaj ostrzejsze, konieczne ze względu na spełnienie określonych wymagań funkcjonalnych dla konstrukcji lub ich części, a dotyczące między innymi:

- przymocowania innych elementów konstrukcyjnych i niekonstrukcyjnych,

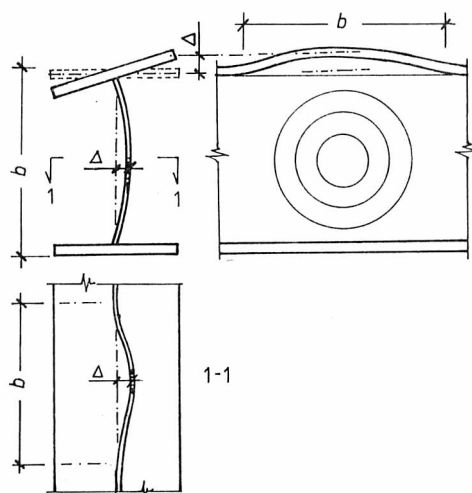
- szybów dźwigowych,
- jezdni podsuwnicowych,
- innych wymagań, takich jak prześwity zewnętrznej odbudowy budynku.

Normy [102–106] podają tolerancje *normalne* i mają one zastosowanie do tradycyjnych jedno- i wielokondygnacyjnych konstrukcji szkieletowych budynków mieszkalnych, administracyjnych, handlowych, z wyjątkiem obiektów, dla których określono tolerancje *specjalne* lub *szczególne*.

Tolerancje *specjalne* lub *szczególne* powinny być określone w specyfikacji technicznej, dokumentacji projektowej, a zwłaszcza na rysunkach.

W dalszej części tego rozdziału będzie przedstawiona analiza przyczyn ograniczeń wielkości podstawowych tolerancji *normalnych*.

Dopuszczalna odchyłka  $\Delta$  deformacji (płaskości) środników i pasów na przykład dwuteowych lub skrzynkowych przekrojów spawanych według PN-B-06200:1997 [104] nie powinna przekraczać wartości większej z:  $\pm(b/150, 3 \text{ mm})$  – dla pasów, oraz wartości mniejszej z:  $\pm(b/100, t \text{ mm})$  – dla środników, gdzie  $b$  jest długością pomiarową (rys. 4.17),  $t$  jest grubością środnika.



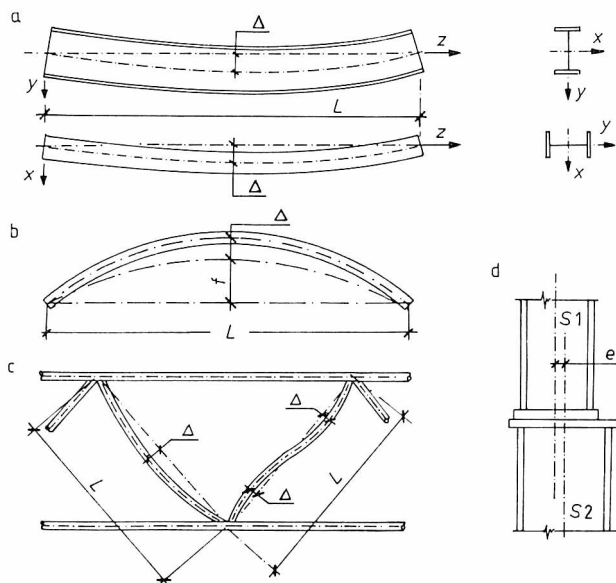
Rys. 4.17. Odchyłki płaskości pasów i środników

Reperkusją odchyłek geometrycznych kształtu przekroju poprzecznego prętów (patrz np. rys. 4.1, 4.2, tabl. 4.5) mogą być kłopoty montażowe, gdyż w konstruowaniu systemu nośnego nie zawsze pamięta się o możliwości wystąpienia tego typu imperfekcji geometrycznych. Innym następstwem zmian geometrii kształtu przekroju poprzecznego jest zmiana usytuowania osi profilu, co wiąże się z mimośrodowym obciążeniem zmniejszającym nośność elementów ściskanych (zginanie drugiego rzędu) lub zginanych (skręcanie).

Dopuszczalna odchyłka  $\Delta$  prostoliniowości (strzałka wstępnego wygięcia) obu osi prętów prostych według PN-B-06200:1997 [104] nie powinna przekraczać wartości większej z  $(L/1000, 3 \text{ mm})$ , gdzie  $L$  jest długością pręta (rys. 4.18a). Eurokod 3 [92]

w odniesieniu do tego typu wstępnej wady geometrycznej ogranicza strzałkę wstępnego wygięcia do  $\pm L/1000$ , z tym że dla ściskanych elementów o przekroju rurowym (słupów, ściskanych pasów belek) do  $\pm L/500$ .

Dopuszczalna odchyłka  $\Delta$  pręta krzywoliniowego o projektowanej strzałce  $f$ , mierzona w środku rozpiętości elementu, według PN-B-06200:1997 [104] nie powinna przekraczać wartości większej z  $\pm(L/1000, 6 \text{ mm})$ , gdzie  $L$  jest rozpiętością pręta (rys. 4.18b).



Rys. 4.18. Odchyłki geometryczne osi podłużnych elementów prętowych

Dla prętów kratownic oraz elementów skratowań dopuszczalna odchyłka  $\Delta$  prostoliniowości według PN-B-06200:1997 [104] nie powinna przekraczać wartości większej z  $(L/500, 6 \text{ mm})$ , gdzie  $L$  jest długością pręta (rys. 4.18c).

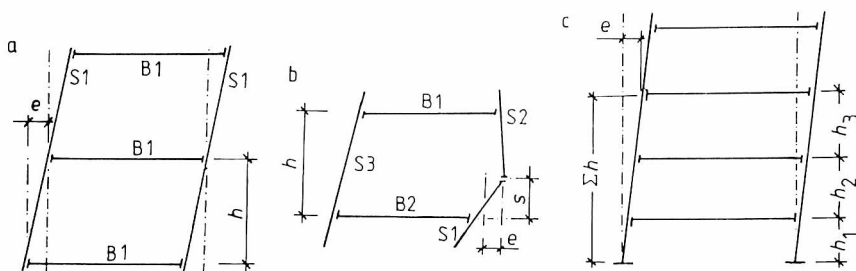
Pokazany na rys. 4.18d niezamierzony mimośród względem każdej z osi styku słupa, według PN-B-06200:1997 nie powinien przekraczać  $e = 5 \text{ mm}$ . Ten typ imperfekcji sprawia, iż mamy do czynienia ze skokową zmianą położenia osi podłużnej elementu, co powoduje mimośrodowe obciążenie pręta ściskanego.

Na rys. 4.19 zestawiono wybrane dopuszczalne według [92] i [104] odchyłki montażu słupów w budynkach wielokondygnacyjnych względem linii pionowej, przeprowadzonej od projektowanego położenia środka podstawy.

Według zarówno [92], jak i [104] pochylenie słupa  $e$  między poziomami sąsiednich stropów (rys. 4.19a) nie powinno przekraczać  $\pm 0,002 h$  (gdzie  $h$  – wysokość słupa).

Mimośród  $e$  położenia styku słupa względem linii prostej, łączącej punkty połączeń na poziomie sąsiednich stropów (rys. 4.19b), według [104] nie może być większy niż  $\pm 0,002 s$  (gdzie  $s$  jest odległością styku od poziomu stropu spełniającą warunek  $s \leq h/2$ ).

Sumaryczna odchyłka  $e$  (na poziomie stropu) położenia słupów względem linii pionowej poprowadzonej przez jego środek na poziomie fundamentu według [104] (rys. 4.19c) nie powinna przekraczać  $\Sigma h/(300n^{0,5})$ , (gdzie  $\Sigma h$  jest sumą wysokości kondygnacji,  $n$  – liczbą kondygnacji). Takie samo ograniczenie tej początkowej wady geometrycznej słupów szkieletów wielokondygnacyjnych podaje [92].



Rys. 4.19. Odchyłki od pionu słupów budynków wielokondygnacyjnych

Na rys. 4.20 zestawiono dopuszczalne według [92] i [104] odchyłki montażu słupów w obiektach jednokondygnacyjnych względem linii pionowej, przeprowadzonej od projektowanego położenia środka podstawy.

Pochylenie  $e$  słupa o wysokości  $h$  w budynku jednokondygnacyjnym, bez belki podsuwnicowej oprócz słupa ramy portalowej (rys. 4.20a) nie powinno według [104] przekraczać  $\pm h/300$ .

Dopuszczalne [104] pochylenie  $e$  słupa o wysokości  $h$  podpierającego belkę podsuwnicową w budynku jednokondygnacyjnym, w tym także słupów ram portalowych (rys. 4.20b), wynosi:

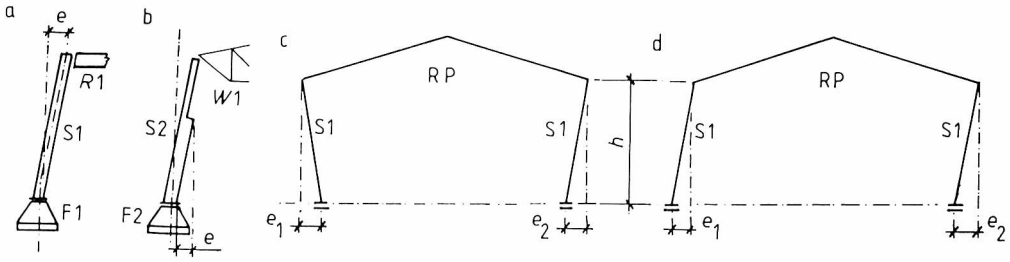
$$e = \begin{cases} \pm 5 \text{ mm} & \text{dla } h < 5 \text{ m}, \\ \pm h/1000 & \text{dla } 5 \leq h \leq 25 \text{ m}, \\ \pm 25 \text{ mm} & \text{dla } h > 25 \text{ m}. \end{cases}$$

Według zarówno [92], jak i [104] pochylenia słupów  $e_i$  ram portalowych (rys. 4.20c i d) nie powinny przekraczać  $e_i = \pm 0,01 h$  dla pojedynczego słupa oraz średnie pochylenie ramy  $0,5(e_1 + e_2) = \pm 0,002 h$  (gdzie  $h$  wysokość kondygnacji).

Normowe [104] ograniczenia odchyłek geometrycznych dotyczą przypadków, nie tylko gdy skutki ich występowania wywołują dodatkowe wyężenie systemu konstrukcyjnego, ale również sytuacji, gdy imperfekcje geometryczne zakłóca prawidłową eksploatację konstrukcji. Do pierwszej grupy wymienionych przypadków należy zaliczyć ograniczenie wychylenia od pionu słupów, wież, kominów oraz strzałek wygięć (sierpowatość), słupów, ściskanych pasów dźwigarów pełnościennych i kratowych. Przykładem drugiego typu wad geometrycznych konstrukcji, które wpływają ujemnie na eksploatację obiektu są niedoskonałości torów jezdni podsuwnicowych.

Dopuszczalne wartości imperfekcji geometrycznych belek podsuwnicowych oraz podtorza suwnic dotyczą ograniczenia ujemnych skutków: skręcania mimośrodowo zginanych elementów nośnych, klinowania się suwnicy, przekazywania zwiększo-





Rys. 4.20. Odchyłki od pionu słupów ram portalowych

Tablica 4.8. Dopuszczalne odchyłki montażu szyn i belek podsuwnicowych [104]

| Nr | Rodzaj odchyłki | Parametr                                                       | Odchyłka dopuszczalna                                                                                          |
|----|-----------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  |                 | Lokalna odchyłka szyny od prostej na odcinku $L = 2 \text{ m}$ | Poziomo<br>$\Delta = \pm 1 \text{ mm}$ ;<br>pionowo<br>$\Delta = \pm 2 \text{ mm}$                             |
| 2  |                 | Różnica poziomów szyny na długości $L$ między podporami        | $ \Delta  = \text{większa z wartości: } (L/1000, 10 \text{ mm})$                                               |
| 3  |                 | Równoległość szyn                                              | Dla $B \leq 15 \text{ m}$ : $ \Delta  = 5 \text{ mm}$ ;<br>dla $B > 15 \text{ m}$ : $ \Delta  = 10 \text{ mm}$ |
| 4  |                 | Różnica w poziomie szyn                                        | $ \Delta  = \text{większa z wartości: } (B/1000, 10 \text{ mm})$                                               |
| 5  |                 | Mimośrodowość szyny względem środka                            | Dla $t_w \geq 12 \text{ mm}$<br>$e = \pm 0,5 t_w$ ;<br>dla $t_w < 12 \text{ mm}$<br>$e = \pm 6 \text{ mm}$     |
| 6  |                 | Nachylenie główki szyny do poziomu                             | $\beta = \pm 1/100 \text{ arc}$                                                                                |
| 7  |                 | Uskok w styku szyn                                             | $ \Delta  = 0,5 \text{ mm}$                                                                                    |

nych obciążeń na konstrukcję wsporczą jezdni podsuwnicowej, ale przede wszystkim zapewnienia bezawaryjnego użytkowania suwnicy (zapewnienie płynnej jazdy suwnicy po torze, w tym wyeliminowanie przyczyn *klinowania* suwnic).

Parametry dopuszczalnych odchyłek geometrycznych montażu szyn i belek podsuwnicowych według normy PN-B-06200:1997 [104] podano w tabl. 4.8. Norma ta dodatkowo w tym przypadku wymaga, aby rozwiązania konstrukcyjne oparcia belek podsuwnicowych na słupach umożliwiały regulacje usytuowania dźwigarów. Wymóg ten jest oczywisty, gdyż w trakcie eksploatacji dynamiczne oddziaływanie suwnicy powoduje zmiany geometrii podtorza i istnieje konieczność rektyfikacji jezdni suwnicy. W poprawnie zaprojektowanym rozwiązaniu konstrukcyjnym suwnic o dużym natężeniu pracy należy przewidzieć również możliwość regulacji w połączeniu szyny jezdnej z belką podsuwnicową.

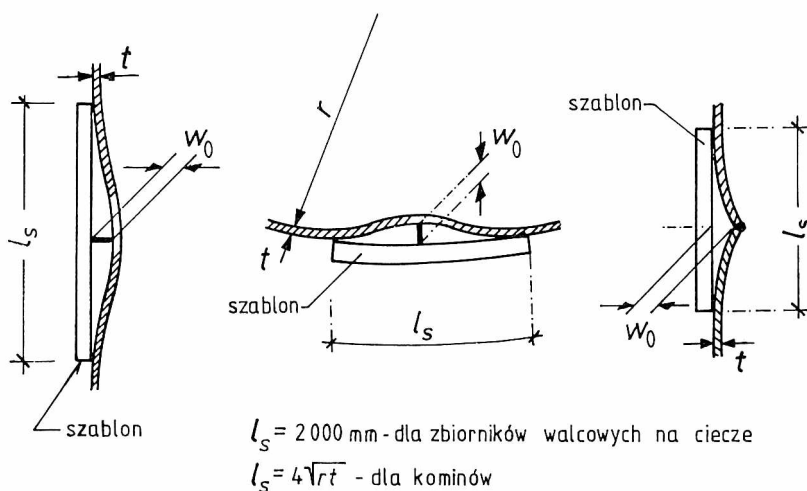
Konsekwencją nierównoległości szyn jezdnych jezdni podsuwnicowej (parametr podany w tabl. 4.8 poz. 3) jest nie tylko brak *płynności* jazdy i klinowanie się suwnicy, ale zdecydowany wzrost poziomych, prostopadłych do toru, dynamicznych obciążeń konstrukcji wsporczej (skręcania belek podsuwnicowych i zginania słupów).

Przykładem regulowanego połączenia szyny jezdnej z belką podsuwnicową są śrubowe klemy typu *Gantrail* [11]. Umożliwiają one regulację poziomego położenia szyn jezdnych do 20 mm.

Wybrane odchyłki geometryczne płaszczy zbiorników według normy odbioru konstrukcji [106] podano w tabl. 4.9.

Sposób kontroli (badania) odchyłek geometrycznych powłokowych konstrukcji stalowych (zbiorników, kominów, rurociągów) pokazano na rys. 4.21.

W badaniach takich mierzy się wgniecenia miejscowe w połowie długości  $l_s$  szablonu o określonym kształcie (dopasowanym do tworzącej lub do łuku). Pomiary wklęsłości i wypukłości powłoki walcowej pionowych zbiorników walcowych na cieczy według normy [106] wykonuje się w połowie długości  $l_s = 2000$  mm do tworzącej albo do łuku o promieniu  $r$ . Norma dotycząca stalowych zbiorników pionowych na cieczy [106] ogranicza liczbę lokalnych wklęsłości (wypukłości) na powierzchni płaszcza w obrębie jednego pierścienia oraz strzałkę wygięcia powierzchni odkształconych do 20 mm. Należy zwrócić uwagę, iż ilość dopuszczalnych lokalnych odkształceń w pionie według normy [106] jest zdecydowanie mniejsza niż w poziomie. Powyższe postano-



Rys. 4.21. Sposób kontroli wad geometrycznych powłok walcowych

Tablica 4.9. Dopuszczalne odchyłki geometryczne płaszczy zbiorników wg [106]

| Poz. | Rodzaj odchyłki                                                                                                                |                                                     | Średnica wewnętrzna zbiornika $d$ [m]      |                  |                  |                  |                |   |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------|------------------|------------------|----------------|---|
|      |                                                                                                                                |                                                     | $d \leq 10$                                | $10 < d \leq 20$ | $20 < d \leq 30$ | $30 < d \leq 50$ | $d > 50$       |   |
|      |                                                                                                                                |                                                     | Dopuszczalna odchyłka                      |                  |                  |                  |                |   |
| a    | Odchyłka średnicy wewnętrznej płaszcza w odległości 300 mm od dna zbiornika <sup>1)</sup>                                      |                                                     | $\pm 20$ mm                                | $\pm 25$ mm      | $\pm 40$ mm      | $\pm 45$ mm      | $\pm 60$ mm    |   |
| b    | Odchyłka średnicy wewnętrznej płaszcza na poziomie górnej krawędzi ostatniego pasa <sup>1)</sup>                               |                                                     | $\pm 25$ mm                                | $\pm 30$ mm      | $\pm 0,002 d$    | $\pm 0,002 d$    | $\pm 0,002 d$  |   |
| c    | Różnica średnic dwóch sąsiednich pasów w tej samej płaszczyźnie pomiarowej <sup>1)</sup>                                       | zbiornik z dachem stałym                            | 20 mm                                      | 20 mm            | $0,0015 d$       | $0,0015 d$       | —              |   |
|      |                                                                                                                                | zbiornik z dachem pływającym                        | 10 mm                                      | $0,0010 d$       | $0,0010 d$       | $0,0010 d$       | $0,0010 d$     |   |
| d    | Różnica średnic płaszcza zbiornika na tej samej wysokości (w tej samej płaszczyźnie poziomej) <sup>1)</sup>                    | zbiornik z dachem stałym                            | 20 mm                                      | 20 mm            | $0,0015 d$       | $0,0015 d$       | —              |   |
|      |                                                                                                                                | zbiornik z dachem pływającym                        | $0,0010d$                                  | $0,0010 d$       | $0,0010 d$       | $0,0010 d$       | $0,0010 d$     |   |
| e    | Odchyłka wysokości płaszcza zbiornika <sup>1), 2)</sup>                                                                        |                                                     | $\pm 0,0020 h$                             |                  |                  |                  |                |   |
| f    | Strzałka odchylenia tworzących płaszcza od pionu <sup>2)</sup>                                                                 |                                                     | $\pm 0,0050 h$                             |                  |                  |                  | $\pm 0,0045 h$ |   |
| g    | Lokalne odkształcenia (wypukłości i wklęsnięcia na powierzchni w obrębie jednego pasa)                                         | mierzone szalonym kołowym o długości 2 m            | strzałka ugięcia powierzchni odkształconej | 20 mm            |                  |                  |                |   |
|      |                                                                                                                                |                                                     | ilość powierzchni odkształconych           | 4                | 4                | 6                | 6              | 6 |
|      |                                                                                                                                | mierzone pionowym szablonem liniowym o długości 2 m | strzałka ugięcia powierzchni odkształconej | 20 mm            |                  |                  |                |   |
|      |                                                                                                                                |                                                     | ilość powierzchni odkształconych           | 2                | 2                | 2                | 4              | 4 |
| h    | Różnica obwodów płaszcza w dwu sąsiednich pasach mierzona w środku pasa (dotyczy zbiorników z dachem pływającym) <sup>2)</sup> |                                                     | 0,001 obwodu                               |                  |                  |                  |                |   |

<sup>1)</sup> Pomiary wykonać co najmniej w czterech punktach pomiarowych równomiernie rozłożonych na obwodzie, maksymalna odległość punktów pomiarowych  $l_{\max} = 6$  m.

<sup>2)</sup> Pomiary należy wykonać po próbie wodnej.

wienie normowe jest zrozumiałe w świetle analizy statyczno-wytrzymałościowej (możliwość utraty stateczności powłoki walcowej).

Strzałka wstępnych deformacji ścianki (powłoki walcowej o promieniu  $r$ ) komina  $w_0$  (sposób pomiaru pokazano na rys. 4.21), wynikająca z niedokładności wykonania według normy kominowej [102], nie powinna przekraczać grubości ścianki  $t$ , a także  $0,01 l_s$  (gdzie  $l_s = 4(rt)^{0,5}$  jest długością odniesienia). Należy zwrócić uwagę, iż bazę pomiarową strzałki deformacji powłoki walcowej norma [102] uzależnia od geometrii komina. Według normy kominowej [102], jeżeli strzałka wstępnych deformacji ścianki  $w_0$  przekracza  $0,01 l_s$ , lecz jest mniejsza od wartości  $0,02 l_s$  (i nie można jej zmniejszyć zabiegami technologicznymi), to należy zredukować współczynnik niestateczności miejscowej powłoki  $\varphi_p$  proporcjonalnie do wartości  $w_0/0,01 l$ . Norma [102] nie dopuszcza do eksploatacji kominów jeśli  $w_0 > 0,02 l_s$  lub  $w_0 > 2t$ .

Ponadto w kominach w miejscach styków spawanych prostopadle do kierunku spoiny należy mierzyć deformacje szablonem o długości  $l_s = 50$  cm, w pozostałych zaś miejscach płaszcza po obwodzie lub w kierunku do tworzącej powłoki można przyjąć  $50 \text{ cm} < l_s < 200 \text{ cm}$ . Mimośród w stykach spawanych blach płaszczy kominów o grubościach ścianek  $t$  nie powinien przekraczać  $0,2t$  lub 3 mm.

Dopuszczalne odchyłki geometryczne stalowych konstrukcji budowlanych według polskich norm są podobne do wymagań przepisów europejskich. W projekcie Euronormy EN-1090-1:1996 [117], dotyczącej wykonawstwa konstrukcji stalowych, jest obszerny rozdział podający w systematycznym układzie, w licznych tablicach i rysunkach, wykonawcze odchyłki dopuszczalne. Porównując tolerancje według projektu EN-1090-1:1996 [117] oraz według polskiej normy odbioru konstrukcji stalowych PN-B-06200:1997 [104], można stwierdzić, iż wiele tolerancji obydwu porównywalnych norm mieści się w tych samych przedziałach.

Wstępne odchyłki geometryczne wykonawcze i montażowe budowlanych konstrukcji stalowych powodują nie tylko zmniejszenie nośności elementów, ale również wywołują wzrost losowych sił wewnętrznych [8, 12, 15, 16, 46, 75, 79, 80]. Imperfekcje geometryczne z reguły zmieniają zagadnienia stateczności w zagadnienia zginania drugiego rzędu. Losowa mechanika konstrukcji zajmuje się między innymi następstwami losowej geometrii systemów konstrukcyjnych na zmianę sił w ustroju. Wpływ wad geometrycznych powinien być uwzględniany przy wyznaczaniu wartości losowych sił wewnętrznych w elementach ustroju.

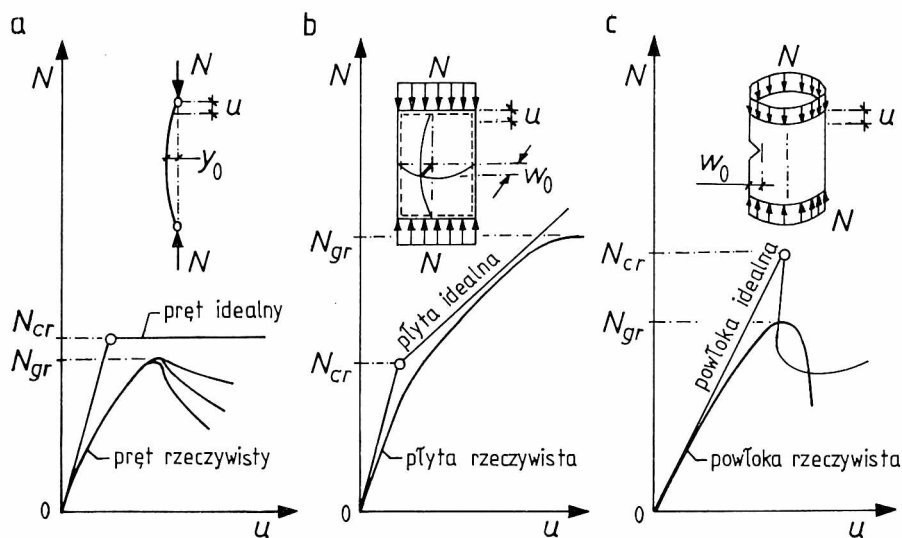
Podsumowując omawianie normowych dopuszczalnych imperfekcji geometrycznych, należy stwierdzić, iż zdając sobie sprawę z losowego charakteru tych nieuniknionych wad i niedoskonałości początkowych ustrojów nośnych autorzy norm ograniczają ich wartości dla przypadków elementów konstrukcyjnych lub części składowych tych elementów, w których może nastąpić przede wszystkim utrata stateczności ogólnej (wyboczenie, zwichrzenie), lokalnej, przeskok węzła w powłoce prętowej, a także, gdy ich skutkiem jest niezamierzony wzrost sił wewnętrznych.

### 4.3.3. Analiza wytrzymałościowych następstw imperfekcji geometrycznych

Aby zrozumieć wrażliwość na imperfekcje ściskanych prętów płyt i powłok, należy zwrócić uwagę na istotne różnice w ich zachowaniu się i nośności w zakresie pozakrytycznym (po utracie stateczności). Teoretyczne ścieżki równowagi statycznej

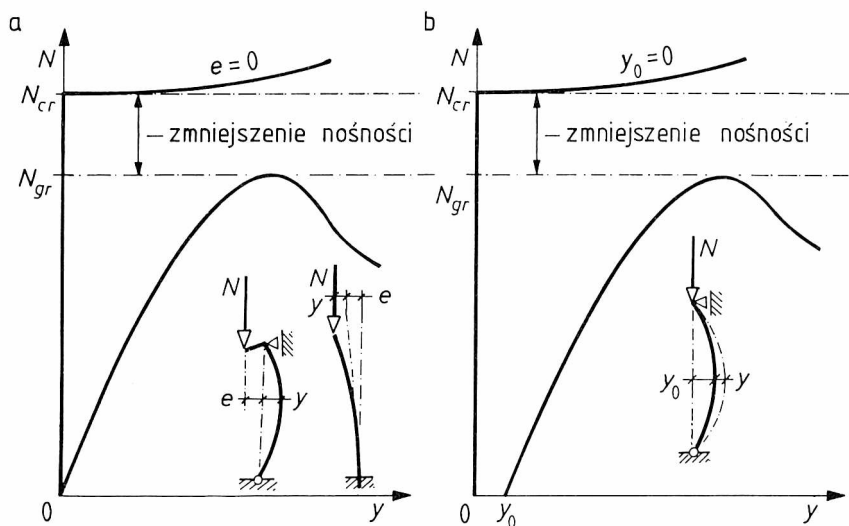
(zależności obciążenie — skrócenie) ściskanych *idealnych* prętów, płyt i powłok przedstawiają na rys. 4.22 linie cienkie, odpowiednio linie grube dotyczą konstrukcji rzeczywistych, obarczonych wstępnymi imperfekcjami geometrycznymi (w których obciążenie ściskające wywołuje również zginanie ustroju). Ścieżki równowagi statycznej (ŚRS) konstrukcji idealnych i rzeczywistych pokazane na rys. 4.22 różnią się zasadniczo, szczególnie w zakresie pozakrytycznym (po utracie stateczności).

Na rys. 4.22a pokazano ścieżkę równowagi statycznej (ŚRS) ściskanego pręta idealnego (linią cienką) i pręta rzeczywistego (linią grubą). Eulerowski model ściskanego pręta idealnego zakłada prostą oś pręta oraz osiowość przekazywania obciążenia ściskającego, a wyczerpanie nośności w takim przypadku ma charakter bifurkacyjny przy obciążeniu określanym jako krytyczne  $N_{cr}$ . Przedstawiony eulerowski model teoretyczny wyężenia pręta ściskanego nie znajduje pełnego potwierdzenia aplikacyjnego. Rzeczywiste pręty ściskane osiągają nośność graniczną  $N_{gr}$  mniejszą od ich oszacowania teoretycznego  $N_{cr}$ .



Rys. 4.22. Ścieżki równowagi statycznej: a — pręta, b — płyty, c — powłoki

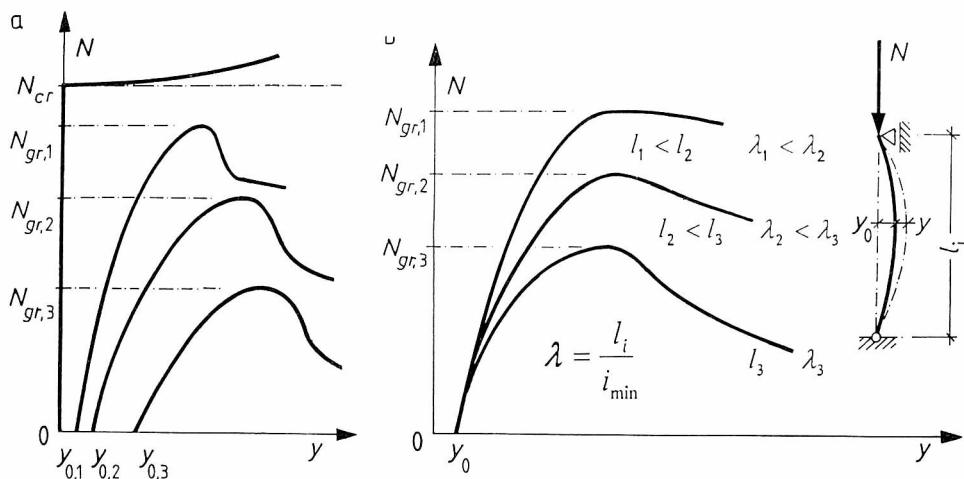
Zasadniczą przyczyną różnic pomiędzy założonym modelem matematycznym pręta idealnego jest występowanie w ustrojach rzeczywistych imperfekcji wstępnych (tzw. czynnika giętnego). Ściskane pręty rzeczywiste są obarczone nie tylko imperfekcjami geometrycznymi ich osi podłużnej, ale również obciążenie może być przekazywane na pręt w sposób losowy na mimośrodzie. Wpływ imperfekcji wygiętej osi podłużnej oraz mimośrodowego przyłożenia obciążenia na nośność ściskanego pręta pokazano na rys. 4.23. Na rys. 4.23a pokazano krzywą równowagi statycznej pręta prostego, ściskanego siłą  $N$  na mimośrodku  $e$ , na rys. 4.23b zaś krzywą pręta wstępnie wygiętego o strzałkę  $y_0$ , ściskanego siłą  $N$  przyłożoną osiowo. Ścieżki równowagi statycznej na rys. 4.23 mają ten sam kształt (są krzywoliniowe) i podobne właściwości. W obu przypadkach ściskane pręty są nie tylko



Rys. 4.23. ŚRS prętów ściskanych mimośrodowo (a) i ze wstępną krzywizną (b)

obciążone osiowo, ale i gięte (zginanie drugiego rzędu), a ich ŚRS są funkcjami nieliniowymi. Nośność takich prętów jest określana jako obciążenie graniczne  $N_{gr}$ , które jest zdecydowanie mniejsze od teoretycznego oszacowania, tj. obciążenia krytycznego  $N_{cr}$ .

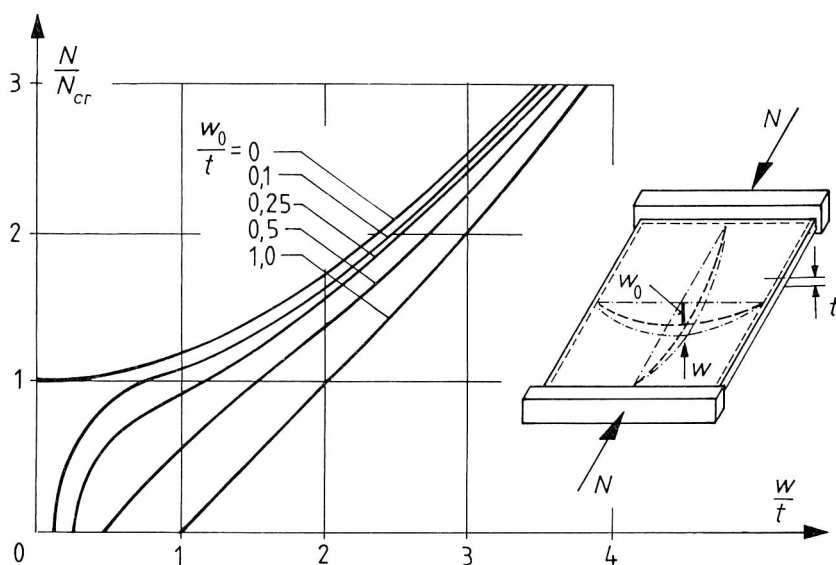
Dla prętów ściskanych różnice między  $N_{cr}$  i  $N_{gr}$  wzrastają nieliniowo ze wzrostem imperfekcji osi podłużnej prętów oraz mimośródów przyłożenia obciążeń ściskających. Na rys. 4.24a przedstawiono zmniejszanie się nośności granicznej prętów ści-



Rys. 4.24. Ścieżki równowagi statycznej prętów ściskanych o różnych imperfekcjach geometrycznych (a) oraz o różnych smukłościach (b)

skanych w miarę zwiększania się wstępnych imperfekcji geometrycznych. Pręty o dużej smukłości są bardziej niż pręty krępe wrażliwe na oddziaływanie wstępnych imperfekcji geometrycznych. Wpływ imperfekcji geometrycznych na zmniejszenie nośności (z  $N_{cr}$  na  $N_{gr}$ ) jest większy dla prętów smukłych niż w przypadku prętów krępych, jak to pokazano na rys. 4.24b.

W analizie ścieżki równowagi statycznej pręta ściskanego należy zwrócić również uwagę na fakt, iż ściskany pręt po osiągnięciu obciążenia granicznego  $N_{gr}$  traci nośność (występuje *cofanie* się nośności). Porównując modele wyczerpania nośności pręta zginanego zabezpieczonego przez zwichrzenie, wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego, o przekroju klasy 1 oraz pręta ściskanego, należy stwierdzić, iż zginany pręt zachowuje swą nośność (zdolność do przenoszenia obciążeń). Ściskany zaś pręt, wskutek gwałtownego przyrostu przemieszczeń poprzecznych wywołującego dodatkowe zginanie mimośrodowe, traci nośność w granicznym stanie wyężenia. Przyrost przemieszczeń po osiągnięciu nośności granicznej  $N_{gr}$  pręta ściskanego zmniejsza zdolność do przenoszenia przyłożonych obciążeń, gdyż działające obciążenie ma charakter zachowawczy, a mimośród wzrasta. W efekcie prowadzi to do przyspieszonego, lawinowego wyczerpania nośności pręta ściskanego.

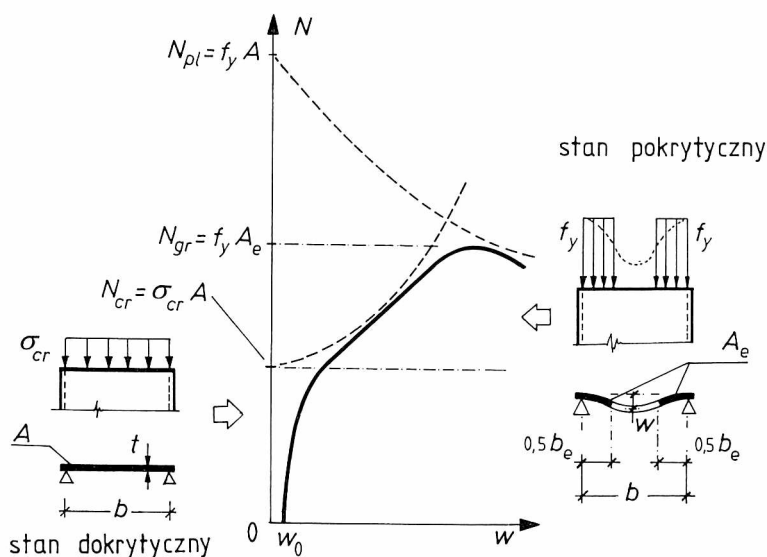


Rys. 4.25. Ścieżki równowagi granicznej płyt ściskanych z imperfekcjami geometrycznymi  $w_0$

Na rysunku 4.22b pokazano ścieżki równowagi statycznej płyty idealnej — linia cienka oraz płyty rzeczywistej — linia gruba. W przypadku ściskanych płyt ich imperfekcje geometryczne powierzchni środkowych (którymi są obarczone ustroje rzeczywiste) nie powodują zmniejszenia nośności granicznej, jak to ma miejsce dla prętów i powłok (porównaj ścieżki równowagi statycznej na rys. 4.22). Ścieżki równowagi statycznej płyt ściskanych z wstępnymi imperfekcjami geometrycznymi  $w_0$

pokazano na rys. 4.25. Z wykresów pokazanych na rys. 4.25 wynika, że wartość imperfekcji płyty  $w_0$  nie wpływa na jej nośność graniczną  $N_{gr}$ , która może być kilkakrotnie większa od nośności krytycznej  $N_{cr}$ .

Podobnie jak dla pręta, przyjmując eulerowski model płyty idealnej, obciążonej osiowo w swej płaszczyźnie środkowej wyznacza się jej ściskające (ścinające) obciążenie krytyczne  $N_{cr}$ . Płaskie cienkie ścianki stalowych ściskanych elementów konstrukcyjnych (o przekroju klasy 4) mogą tracić stateczność przy naprężeniach ściskających mniejszych od wytrzymałości materiału na ściskanie lub ścinanie. Na podstawie licznych badań teoretycznych i eksperymentalnych wykazano, że osiągnięcie naprężeń krytycznych w płycie usztywnionej (podpartej) wzdłuż krawędzi równoległych do działającego obciążenia nie wyczerpuje jej nośności, a zapasy nośności nadkrytycznej (po wystąpieniu wyboczenia) są znaczne. W przeciwieństwie do prętów nośność nadkrytyczna (nazywana również pokrytyczną) płyt jest większa od nośności krytycznej. Nośność płyty w dokrytycznej fazie jej wyężenia (traktowanej jako wyężenie sprężyste) stanowi zazwyczaj niewielkie wykorzystanie pełnego zakresu nośności tego elementu, a lokalna utrata stateczności (wybrzuszenie ścianki ściskanej lub ścinanej) nie prowadzi do powstania mechanizmu zniszczenia konstrukcji. Dlatego też wykorzystuje się zdolność płyt do przenoszenia znacznych obciążeń w zakresie pozakrytycznym. Nadkrytyczny stan wyężenia charakteryzuje krzywoliniowy rozkład naprężeń na szerokości płyty. Wyczerpanie jej nośności (zniszczenie) następuje, gdy uplastycznieniu ulegną krawędzie podtrzymujące płytę (równoległe do kierunku obciążenia). Z takim modelem wyężenia płyty jest związana koncepcja tzw. szerokości efektywnych (współpracujących) ściskanych pól, stanowiąca podstawę teorii nośności nadkrytycznej. Zakłada ona możliwość istnienia innej jakościowo nadkrytycznej postaci równowagi płyty, która realizuje się w warunkach skończonych ugięć.



Rys. 4.26. Ścieżka równowagi statycznej płyty



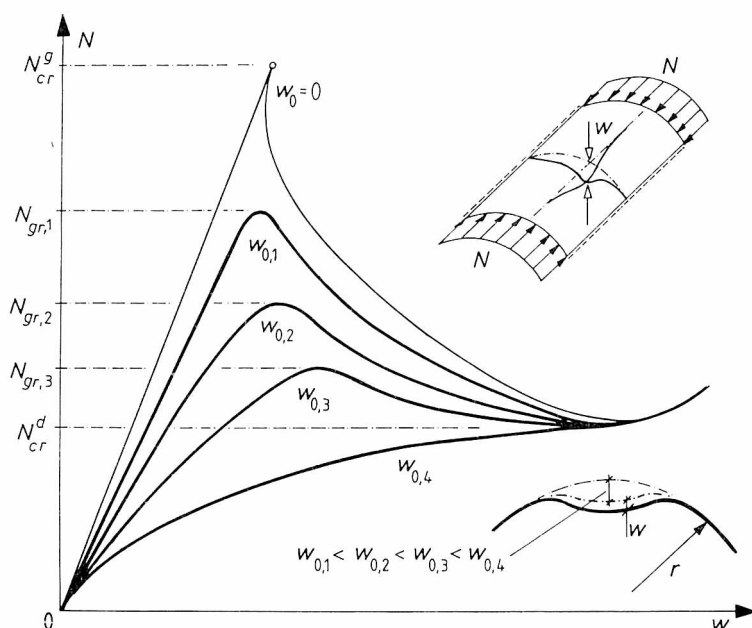
Ścieżkę równowagi statycznej rzeczywistych podpartych obustronnie płyt ściskanych przedstawiono na rys. 4.26. Wskutek nieuniknionych imperfekcji geometrycznych  $w_0$  rzeczywista ścieżka stalowego elementu (średnika, półki) odbiega oczywiście od modelu eulerowskiej płyty. Osiągnięcie przez płytę nośności krytycznej nie oznacza jednak wyczerpania jej nośności w sensie wykorzystania maksymalnej zdolności przenoszenia przez nią obciążenia. Następuje bowiem przejście ścianki w stan nadkrytyczny, czego symptomem jest łatwo dostrzegalny przyrost ugięć  $w$  oraz towarzysząca redystrybucja naprężeń w przekroju pręta. W stanie granicznym wyczerpanie się nośności konstrukcji i w konsekwencji ujemny przyrost, czyli spadek nośności przy  $w > w_{gr}$ , są skutkiem nieliniowej amplifikacji i zgięciowego mechanizmu zniszczenia, który towarzyszy zmianie stanu równowagi. W przypadku prętów o przekroju cienkościennym klasy 4 mechanizm zniszczenia wystąpi wskutek plastycznej utraty stateczności krawędzi podtrzymujących ściskanie ścianki.

Rekapitułując analizę wyężenia ściskanych pasm płytowych (zwłaszcza cienkościennych) podpartych obustronnie (np. średników belek dwuteowych, pasów i średników dźwigarów skrzynkowych), należy podkreślić, iż mają one znaczne zapasy nośności w fazie po wystąpieniu wyboczenia lokalnego. Ich nośność graniczna jest zdecydowanie większa od nośności krytycznej  $N_{gr} > N_{cr}$ . Wstępne imperfekcje geometryczne płyt nie mają tak zasadniczego wpływu na nośność graniczną  $N_{gr}$ , jak w przypadku ściskanych prętów. Nadkrytyczną nośność płyt podpartych wzdłuż kierunku wyężenia (ściskanych ścianek elementów konstrukcyjnych budowlanych ustrojów metalowych) wykorzystuje się w szacowaniu nośności prętów cienkościennych (o przekrojach klasy 4). Wyężenie pokrytyczne płyt dopuszczają współcześnie obowiązujące normy projektowania konstrukcji stalowych.

W pasmach płytowych podpartych jednostronnie (np. w półkach kątowników, pasach dwuteowników) osiągnięciu stanu krytycznego towarzyszą duże przemieszczenia nie podpartych krawędzi płyt, a wzrost nośności nadkrytycznej jest zdecydowanie mniejszy niż dla ścianek podpartych obustronnie. Dlatego też dla ściskanych kształtowników, w których występują wyłącznie ścianki podparte jednostronnie (kątowniki, przekroje krzyżowe), stan graniczny ich nośności wyznacza obciążenie krytyczne ściskanej ścianki.

Mimo powierzchniowego charakteru konstrukcji powłokowych, jedno- lub dwukrzywiznowych zachowanie się ich w stanie wyężenia ściskającego różni się zasadniczo w porównaniu z płytami. Ścieżkę równowagi statycznej ściskanej powłoki idealnej (oznaczono linią cienką) i powłoki rzeczywistej (oznaczono linią grubą) pokazano na rys. 4.22c i rys. 4.27. Teoretycznie w powłoce idealnej (bez wstępnych imperfekcji geometrycznych) zależność przemieszczenie–obciążenie jest liniowa aż do osiągnięcia tzw. górnego obciążenia krytycznego  $N_{cr}^g$ , które wyznacza się z liniowej teorii powłok. Teoretyczne oszacowanie nośności krytycznej powłok według teorii liniowej obarczone jest nieraz ogromnymi błędami (do kilku razy). Dlatego w praktyce należy wykorzystywać wyniki badań doświadczalnych lub poszukiwać minimalnej nośności krytycznej powłok obarczonych imperfekcjami. Imperfekcje wywołują przyrost odkształceń ustroju i zmniejszenie nośności do tzw. dolnego obciążenia krytycznego  $N_{cr}^d$ . Analiza ścieżki równowagi statycznej w zakresie między  $N_{cr}^g$  a  $N_{cr}^d$  wymaga stosowania nieliniowej teorii powłok.

Ścieżki równowagi statycznej powłok rzeczywistych, obarczonych losowymi wstępnymi imperfekcjami geometrycznymi (wkłęśnięciami), pokazano na rys. 4.27. Z analizy przedstawionych wykresów wynika, że wraz ze wzrostem imperfekcji geometrycznych oraz z narastaniem przemieszczeń następuje zmniejszenie nośności granicznej ściskanej powłoki. Po osiągnięciu nośności granicznej następuje spadek nośności powłoki.

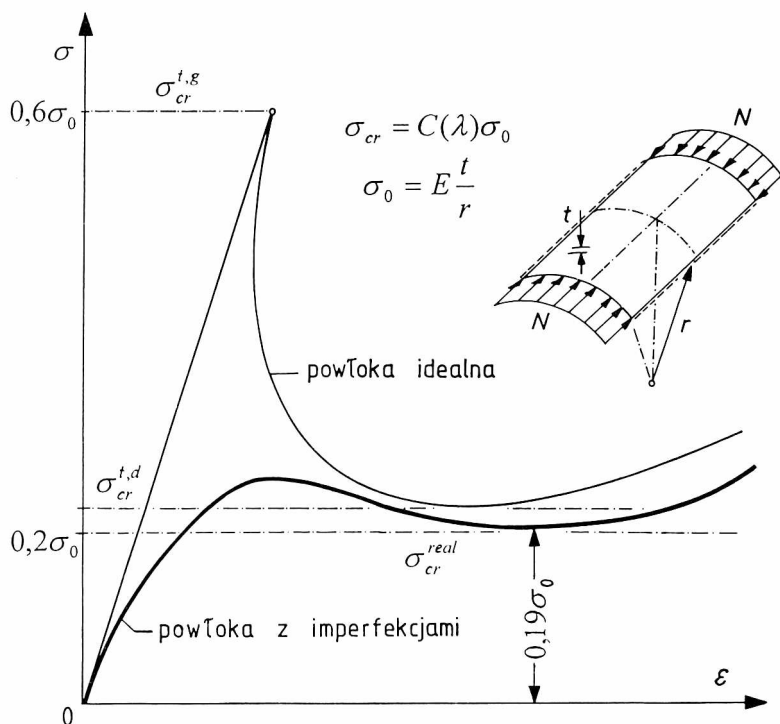


Rys. 4.27. Ścieżki równowagi granicznej powłok z różnymi imperfekcjami geometrycznymi

Rzeczywista nośność powłoki  $N_{gr}$  jest zdecydowanie mniejsza od teoretycznego oszacowania jej nośności krytycznej  $N_{cr}^g > N_{gr}$ . Ścieżki równowagi statycznej rzeczywistych (obarczonych wstępnymi imperfekcjami) ściskanych powłok i ściskanych prętów są jakościowo podobne, jednak wpływ imperfekcji geometrycznych na obciążenie graniczne w ściskanych powłokach jest zdecydowanie większy. Spowodowane jest to występowaniem wielu różnych źródeł nieliniowości fizycznych i geometrycznych, ale przede wszystkim oddziaływaniem wstępnych odchyłek od teoretycznego kształtu powłoki, czyli imperfekcji geometrycznych ustroju powłokowego. Omawiany model obliczeniowy ma zastosowanie w przypadku zbiorników walcowych i kulistych, kominów, rurociągów, a także walcowych powłok prętowych oraz kopuł prętowych.

Na rys. 4.28 pokazano ilościowe różnice nośności teoretycznej powłoki idealnej  $\sigma_{cr}^{t,g}$  (górne oszacowanie nośności teoretycznej),  $\sigma_{cr}^{t,d}$  (dolne oszacowanie nośności teoretycznej) i powłoki rzeczywistej  $\sigma_{cr}^{real}$  (powłoki z imperfekcjami).

Z analizy nośności powłok wynika, iż nośności takich ustrojów rzeczywistych mogą być wielokrotnie mniejsze od ich górnego oszacowania teoretycznego.



Rys. 4.28. Teoretyczne i rzeczywiste nośności powłok walcowych

#### 4.3.4. Oszacowanie nośności elementów z uwzględnieniem ich imperfekcji geometrycznych

Obszerne badania teoretyczne i doświadczalne metalowych konstrukcji budowlanych przeprowadzone na zlecenie Europejskiej Konwencji Konstrukcji Stalowych (ECCS) umożliwiły przyjęcie w rozwiązaniach normowych projektowania konstrukcji stalowych modeli uwzględniających rzeczywiste wyężenie ściskanych prętów, płyt, powłok (obarczonych wstępными imperfekcjami strukturalnymi, technologicznymi i geometrycznymi).

W kalibrowaniu normowych współczynników niestateczności stalowych elementów ściskanych, w modelach opisujących ich wyężenie, przyjmuje się między innymi występowanie w ustrojach rzeczywistych nieuniknionych imperfekcji technologicznych i geometrycznych osi podłużnych elementów (np. w postaci wstępnych mimośrodków obciążenia ściskającego te elementy).

Dla prętów ściskanych osiowo zakłada się w modelu obliczeniowym szacowania jego nośności sinusoidalny (jako najniekorzystniejszy) przebieg wstępnego wyięcia osi podłużnej pręta, o strzałce na przykład według Stüsięgo [27]

$$y_{02} = 0,002 l \quad (4.16)$$

lub według [71, 77, 90]

$$y_{02} = 0,05 i_{\min} + 0,002 l, \quad (4.17)$$

gdzie:

$l$  — długość pręta,

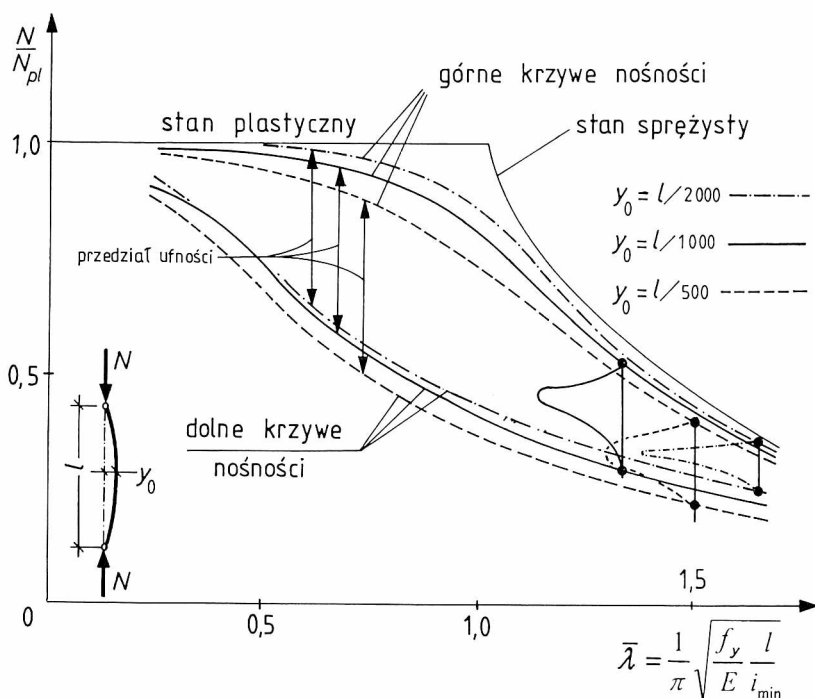
$i_{\min}$  — minimalny promień bezwładności przekroju pręta.

Jeśli są zidentyfikowane losowe imperfekcje osi pręta lub płaszczyzny środkowej płyty lub powłoki można wykonać probabilistyczną analizę wyężenia jednoczesnego ściskania i zginania ustroju (zginanie drugiego rzędu pręta, płyty, powłoki), z ustaloną wartością wady geometrycznej osi lub płaszczyzny środkowej ustroju.

Przykład takiej analizy pokazano na rys. 4.29 [27] dla prętów ściskanych, o wstępnych krzywiznach osi podłużnych w kształcie sinusoidy i strzałkach wygięcia  $y_0$  w środku ich rozpiętości, które wynosiły:  $l/500$ ,  $l/1000$  i  $l/2000$  (gdzie  $l$  oznacza długość pręta ściskanego).

Krzywe wyboczeniowe pokazane na rys. 4.29 sporządzono, przyjmując na osi poziomej parametr opisujący umowną smukłość elementu ściskanego, na osi pionowej zaś stosunek nośności pręta ściskanego  $N$  z imperfekcją geometryczną osi podłużnej do jego nośności plastycznej  $N_{pl}$ . Na rysunku tym pokazano górne i dolne krzywe nośności prętów z imperfekcjami.

Należy zauważyć, że wzrost strzałki  $y_0$  wstępnego wygięcia osi podłużnej pręta ściskanego zmniejsza nie tylko nośność średnią badanych elementów, ale i dolną



Rys. 4.29. Krzywe wyboczeniowe ściskanych prętów z imperfekcjami geometrycznymi [27]

krzywą nośności oraz zmniejsza przedział ufności dla założonej wartości prawdopodobieństwa awarii  $p$ .

Wpływ losowych imperfekcji geometrycznych osi podłużnych prętów ściskanych oraz skręceń płaszczyzn głównych elementów zginanych niezabezpieczonych przed zwichrzeniem, na ich nośność graniczną jest zdecydowanie negatywny.

Z badań losowych imperfekcji geometrycznych osi podłużnych prętów (rys. 4.15) wynika, iż można je opisać rozkładami niesymetrycznymi. Dla imperfekcji geometrii osi podłużnych (strzałki wygięcia pręta) można przyjąć [27] na przykład rozkład Gumbela

$$f(y_0) = v e^{-v(y_0 - q) - e^{v(y_0 - q)}}. \quad (4.18)$$

Wartość centralna  $\bar{y}_0$  i odchylenie charakterystyczne  $s_{y_0}$  wygięcia osi pręta wynoszą

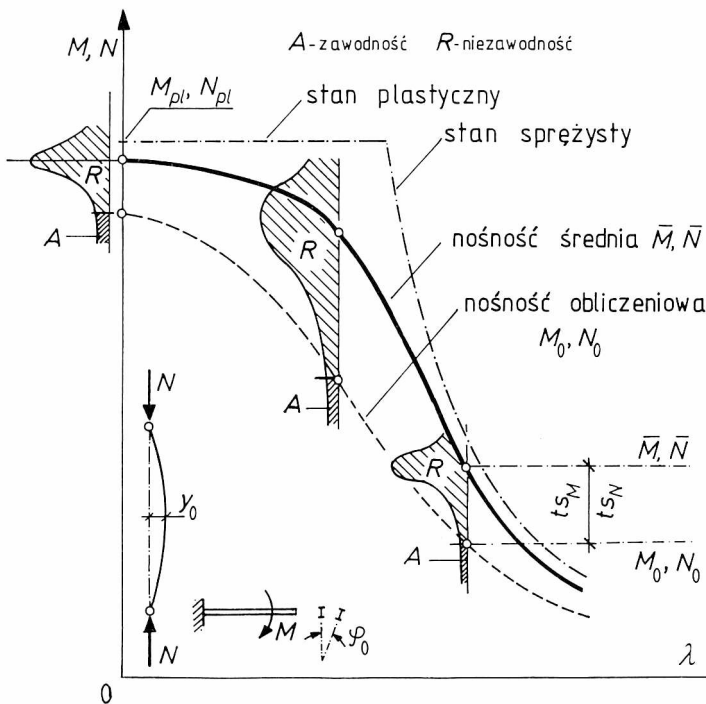
$$\bar{y}_0 \approx q - \frac{0,577}{v}, \quad (4.19)$$

$$s_{y_0} \approx \frac{1,282}{v}, \quad (4.20)$$

gdzie:

$q$  — wartość modalna strzałki wstępnego wygięcia osi pręta,

$v$  — miara dyspersji strzałki wstępnego wygięcia osi pręta ściskanego.



Rys. 4.30. Wyznaczanie krzywych wyboczeniowych utraty stateczności ogólnej

Na rys. 4.30 pokazano sposób szacowania nośności z warunku utraty stateczności ogólnej prętów ściskanych i belek zginanych (niezabezpieczonych przed zwichrzeniem) z imperfekcjami w metodach półprobabilistycznych. Krzywe wyboczeniowe na rys. 4.30 sporządzono przyjmując na osi pionowej nośność elementu ściskanego  $N$  lub zginanego  $M$ , na osi poziomej zaś smukłość  $\lambda$ . Linia grubą na rys. 4.30 oznaczono średnią krzywą nośności wyznaczoną doświadczalnie lub teoretycznie dla założonej wstępnej krzywizny osi podłużnej o strzałce wygięcia  $y_0$ . Linia przerywaną oznaczono obliczeniową nośność ściskanych lub zginanych prętów na założonym poziomie bezpieczeństwa.

Badania doświadczalne ściskanych słupów wykonane na zlecenie Europejskiej Konwencji Konstrukcji Stalowych (ECCS) doprowadziły do uzgodnienia krzywych wyboczeniowych prętów rzeczywistych. Zaproponowane przez ECCS podejście pozwala na wierniejsze odwzorowanie wyężenia tak obciążonych elementów w zależności od kształtu przekroju poprzecznego, technologii jego wykonania oraz wpływu imperfekcji geometrycznych.

Rekomendowane przez ECCS krzywe wyboczeniowe prętów ściskanych przyjęto z pewnymi modyfikacjami w Eurokodzie 3 [92], a także w normach [89, 90, 101].

W zależności od stopnia wrażliwości na wstępne, losowe imperfekcje geometryczne i technologiczne dla ściskanych prętów Eurokod 3 [92] proponuje cztery krzywe wyboczeniowe: a, b, c oraz d. Krzywe wyboczeniowe prętów ściskanych w [92] wyznaczono rozpatrując model pręta ściskanego ze wstępnymi ekwiwalentnymi krzywiznami  $y_0$ , które wynoszą odpowiednio dla krzywych wyboczeniowych:

$$a - y_0 = l/500,$$

$$b - y_0 = l/250,$$

$$c - y_0 = l/200,$$

$$d - y_0 = l/150,$$

gdzie:  $l$  jest długością pręta.

Wstępna ekwiwalentna krzywizna prętów ściskanych uwzględnia wpływ imperfekcji geometrycznych i technologicznych na nośność prętów ściskanych.

W normie [101] przyjęto dla ściskanych prętów stalowych trzy krzywe wyboczeniowe (a, b i c) w zależności od kształtu przekroju, wrażliwości na wstępne imperfekcje geometryczne, technologii wykonania – wpływu imperfekcji technologicznych (naprężeń spawalniczych). Przyporządkowanie krzywych wyboczeniowych dokonuje się w zależności od kształtu przekroju poprzecznego pręta, technologii jego wykonania i płaszczyzny wyboczenia. Krzywe wyboczeniowe a, b, c elementów ściskanych opisują wzory (3.37) i (3.38). Są one funkcją smukłości względnej  $\bar{\lambda}$  (3.39) pręta oraz uogólnionego parametru imperfekcji  $n$  (uwzględniającego wstępne niedoskonałości geometryczne, strukturalne i technologiczne). Parametr imperfekcji  $n$  wynosi

$$n = \begin{cases} 2,0 & \text{dla krzywej wyboczeniowej a,} \\ 1,6 & \text{dla krzywej wyboczeniowej b,} \\ 1,2 & \text{dla krzywej wyboczeniowej c.} \end{cases}$$

Prętom o przekrojach poprzecznych *wrażliwych* na wstępne imperfekcje geometryczne (prętom okrągłym, kątownikom, ceownikom), elementom, które wybaczą się względem słabszej osi oporu, a także z naprężeniami spawalniczymi przyporządkowuje się według [101] krzywe b i c.

Zagadnienie wpływu wstępnych imperfekcji geometrycznych na nośność ściskanych płyt ma nieco inny charakter niż w przypadku ściskanych prętów i powłok. Wynika to z faktu, iż ściskane płyty mają zapasy nośności pokrytycznej. O ile imperfekcje geometryczne prętów i powłok zmniejszają ich nośność na ściskanie, to w przypadku płyt ściskanych specyficznie ułożone wklęsnięcia i wypukłości mogą niekiedy zwiększyć ich nośność.

Według normy [101] punktem wyjścia do ustalenia współczynników niestateczności ściskanych płyt jest eulerowskie obciążenie krytyczne. Przyjęte normowe krzywe niestateczności [36] odbiegają od analogicznych krzywych teoretycznych, gdyż uwzględniają bogaty międzynarodowy dorobek badawczy w tej dziedzinie. Uwzględniają one bowiem wpływ imperfekcji technologicznych, materiałowych i geometrycznych, jakie występują w ściskanych ściankach rzeczywistych elementów konstrukcyjnych. O nieco innej wadze wpływu imperfekcji geometrycznych płaszczyzny środkowej na nośność płyt świadczy dopuszczenie według [101] jako bezpiecznego wyłączenia ich w zakresie pokrytycznym (płyt lokalnie wyboczonych). Należy podkreślić, iż stan pokrytyczny jest dopuszczony dla płyt (ściskanych ścianek przekroju poprzecznego) opartych obustronnie na odpowiednio sztywnych podporach, umożliwiających redystrybucję naprężeń w przekroju ściskanej płyty.

Zagadnienie wpływu imperfekcji geometrycznych na nośność jest szczególnie istotne dla ściskanych powłok walcowych (np. płaszczy zbiorników, silosów, komínów), a także powłok kulistych (np. zbiorników, kopuł), gdzie teoretyczne nośności dają oszacowania kilkakrotnie większe w stosunku do nośności konstrukcji rzeczywistych z imperfekcjami geometrycznymi. Zmniejszenie nośności takich konstrukcji w wyniku wystąpienia wstępnych wklęsnięć powłok rośnie ze zmniejszeniem ich grubości. Dlatego też na przykład normowe przepisy brytyjskie [89] podają minimalną grubość płaszczy powłok zbiorników  $t_{\min} = 6 \text{ mm}$  oraz  $t > r/300$  ( $r$  — promień krzywizny powłoki).

Na wstępne imperfekcje geometryczne są bardziej narażone powłoki o dużej smukłości, stąd też wielu autorów [30, 33, 50, 56] teoretyczne naprężenia krytyczne powłok koryguje współczynnikami  $C_i$  zależnymi od smukłości ich  $\lambda$ .

Naprężenia krytyczne w powłoce walcowej, o promieniu krzywizny  $r$  i grubości  $t$ , z imperfekcjami geometrycznymi wyznacza się wówczas ze wzoru

$$\sigma_{cr} = C_1(\lambda) \frac{E}{\lambda}, \quad (4.21)$$

w którym

$$\lambda = \frac{r}{t}, \quad (4.22)$$

gdzie:

$E$  — moduł Younga,

$C_1(\lambda)$  — współczynnik stateczności powłoki, podany w tabl. 4.10.

Naprężenia krytyczne w powłoce kulistej, o promieniu  $r$ , grubości  $t$  wyznacza się [70] ze wzoru

$$\sigma_{cr} = C_2(\lambda) \frac{E}{\lambda^2}, \quad (4.23)$$

gdzie:

$\lambda$  — według (4.22),

$C_2(\lambda)$  — współczynnik stateczności powłoki podany w tabl. 4.10.

Współczynniki stateczności  $C_1(\lambda)$  starannie wykonanych powłok walcowych, tj. o imperfekcjach (wkłęśnięciach, wypukłościach) spełniających warunek  $w_0 < t$ , wg propozycji B. M. Broudiego [33], z prawdopodobieństwem 0,95 podano w tabl. 4.10.

W przypadku gdy wstępne strzałki wkłęśnięć są rzędu grubości powłoki  $w_0 = t$ , B. M. Broude [33] proponuje zmniejszyć dwukrotnie jej naprężenia krytyczne.

Tablica 4.10. Współczynniki obciążenia krytycznego powłok walcowych i kulistych

| $\lambda = r/t$ | 250  | 500  | 750  | 1000 | 1500 |
|-----------------|------|------|------|------|------|
| $C_1(\lambda)$  | 0,18 | 0,14 | 0,12 | 0,10 | 0,09 |
| $C_2(\lambda)$  | 0,30 | 0,24 | 0,20 | 0,16 | 0,15 |

Norma projektowania konstrukcji stalowych [101] nie ustosunkowuje się do zagadnienia stateczności powłok. Propozycje obliczeniowe powłok z imperfekcjami podaje między innymi Z. Mendera [49, 50, 51, 56].

Norma niemiecka [90] podaje procedurę obliczania stateczności i szacowania nośności powłok rzeczywistych (z imperfekcjami), w której można wyróżnić następujące etapy obliczeniowe. W pierwszym etapie obliczeń wyznacza się naprężenia krytyczne dla powłoki idealnej  $\sigma_{si}$  — według oszacowań teoretycznych dla powłoki bez imperfekcji. Następnie dla wyznaczonej smukłości względnej ( $\bar{\lambda}_s$ ) powłoki określa się współczynnik niestateczności  $\kappa_i$ . Współczynnik ten zależy od smukłości względnej powłoki oraz od jej wrażliwości na imperfekcje dla danego przypadku obciążenia konstrukcji. Norma [90] rozróżnia dwie sytuacje obliczeniowe wyznaczania współczynnika niestateczności  $\kappa_i$  w zależności od staranności wykonania powłoki. Przypadek pierwszy, gdy prognozowane strzałki wkłęśnięcia (wypukłości) powłoki nie przekroczą wartości

$$w_0 < 0,001 l_s, \quad (4.24)$$

gdzie  $l_s$  jest długością odniesienia (pokazaną na rys. 4.21) i wynosi

$$l_s = 4\sqrt{rt} \leq 2000 \text{ mm}, \quad (4.25)$$

oraz mimośrodowość połączeń blach spełniają warunek  $w_0 < 0,2 t$ , a także  $w_0 < 3 \text{ mm}$ . Ponadto w strefie deformacji spoin  $l_s \leq 500 \text{ mm}$ .



Gdy prognozuje się wystąpienie w konstrukcji większych niż podano w [90] imperfekcji geometrycznych powłok, należy odpowiednio zredukować współczynnik  $\kappa_i$ .

Kolejnymi etapami sprawdzenia stateczności według [90] jest wyznaczenie obliczeniowych realnych naprężeń krytycznych

$$\sigma_{s,R,k} = \kappa_i \cdot f_y / \gamma_m, \quad (4.26)$$

to jest naprężeń dla powłoki z realnymi imperfekcjami geometrycznymi i porównanie ich z naprężeniami w powłoce wyznaczonymi dla obciążeń obliczeniowych ( $f_y$  – granica plastyczności stali,  $\gamma_m$  – współczynnik materiałowy).

Do zagadnienia szacowania utraty stateczności powłoki walcowej ustosunkowuje się norma [103], dotycząca projektowania silosów na materiały sypkie. Norma ta określa dopuszczalne odchyłki geometryczne powłok walcowych ustroju  $\delta_i$  (błędów kołowości przekroju poprzecznego  $K_0$ , błędów mimośrodków spawanych połączeń czołowych blach w płaszczu ściskanym  $e_0$ , strzałek wstępnych deformacji  $t_{v0} = w_0$ ) i w zależności od ich wielkości określa się klasy dokładności wykonania:

- klasa 1, gdy dokładności wykonania dla odchyłek  $\delta$  spełniają zależność

$$\delta \leq \delta_1 = \delta_0, \quad (4.27)$$

- klasa 2, gdy dokładności wykonania dla odchyłek  $\delta$  spełniają zależność

$$\delta_0 < \delta \leq \delta_2 = 2\delta_0, \quad (4.28)$$

gdzie  $\delta_0 = (t_{v0}, K_0, e_0)$  – wartości graniczne odchyłek w klasie 1 dokładności.

Powłoki walcowe płaszczy silosów o odchyłkach większych niż  $2\delta_0$  nie mogą być dopuszczone do użytkowania.

Według normy [103] sprawdzenie stateczności silosu przeprowadza się z uwzględnieniem imperfekcji walcowego płaszcza (powłoki). Po wyznaczeniu naprężeń krytycznych ściskanej powłoki  $\sigma_{cr}$  nośność jej koryguje się współczynnikami odchyłek geometrycznych  $k_1$  i  $k_2$ , które zależą od klasy dokładności wykonania płaszcza silosu. Dla powłok klasy 2 wykonania współczynnik odchyłek geometrycznych  $k_2$  zmniejsza nośność ściskanej powłoki. Ponadto w zależności od smukłości względnej  $\bar{\lambda}_s$  i dokładności wykonania powłoki  $\delta_i$  w obliczeniach stateczności płaszcza silosu uwzględnia się częściowy współczynnik bezpieczeństwa  $\gamma_d \geq 1,1$  przez który dzieli się oszacowaną nośność. Współczynniki  $k_1$  i  $k_2$  oraz  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  wynoszą:

- dla powłok 1 klasy dokładności wykonania ( $\delta \leq \delta_0$ )

$$k_1 = 1,0, \quad (4.29)$$

$$\gamma_d = \gamma_1 = 1,1, \quad (4.30)$$

– dla powłok 2 klasy dokładności wykonania ( $\delta_0 \leq \delta = 2\delta_0$ )

$$k_2 = 1 - \frac{\bar{\lambda}_s}{3} \left( \frac{\delta}{\delta_0} - 1 \right) \quad \text{dla } \bar{\lambda}_s < 1,5, \quad (4.31)$$

$$k_2 = 1,5 - 0,5 \frac{\delta}{\delta_0} \quad \text{dla } \bar{\lambda}_s \geq 1,5, \quad (4.32)$$

$$\gamma_d = \gamma_2 = 1,1 \quad \text{dla } \bar{\lambda}_s \leq 0,25, \quad (4.33)$$

$$\gamma_d = \gamma_2 = 1,1 \left( 1 + 0,318 \frac{\bar{\lambda}_s - 0,25}{1,75} \right) \quad \text{dla } 0,25 < \bar{\lambda}_s < 2,0, \quad (4.34)$$

$$\gamma_d = \gamma_2 = 1,45 \quad \text{dla } \bar{\lambda}_s \geq 2,0. \quad (4.35)$$

Norma [102] nakazuje zmniejszyć współczynnik niestateczności miejscowej ścianki komina  $\varphi_p$  ze wstępną imperfekcją  $w_0 < (0,02 l_s, 2t)$ , (patrz rys. 4.21) proporcjonalnie do wartości  $w_0/0,01 l_s$ .

## 4.4. Imperfekcje strukturalne materiałów i parametry wytrzymałościowe stali

Wyroby przemysłu metalurgicznego, stosowane na metalowe konstrukcje budowlane, można podzielić ze względu na ich właściwości fizyczne na dwie grupy:

- stale niskowęglowe charakteryzujące się wyraźną granicą plastyczności  $f_y$ ,
- stale niskostopowe i stopy aluminium, a także stale niskowęglowe w temperaturach pożarowych, dla których miarą jest najczęściej wyężenie próbki rozciąganej  $\sigma_{0,2} = f_y$ , odpowiadające odkształceniom trwałym  $\varepsilon_0 = 0,2\%$ .

Stopy metali pierwszej grupy dobrze modeluje „bilinearny” wykres ciała sprężysto-plastycznego bez wzmocnienia plastycznego (rys. 4.36a), który opisują dwa parametry: moduł sprężystości podłużnej  $E$  oraz granica plastyczności  $f_y$ . Reprezentatywne badania statystyczne między innymi przeprowadzone w latach 1976–1980 w Politechnice Krakowskiej [34], [57], [62], [68] dostarczyły danych do wiarygodnej prognozy parametrów wytrzymałościowych polskich stali konstrukcyjnych. Z badań tych wynika, iż stosunek granicy plastyczności stali do jej wartości charakterystycznej rozumianej jako minimum hutnicze wynosi  $\check{f}_y/f_{yk} = 1,22$ , oraz wartość współczynnika zmienności granicy plastyczności  $v_{fy} = 8,0\%$ .

Do grupy stopów metali charakteryzujących się nieliniową zależnością ( $\sigma$ – $\varepsilon$ ) należą oprócz stopów aluminium (np. PA 7, AlCuMg2) także stale niskowęglowe, które w temperaturze  $T > 300$  K tracą wyraźną granicę plastyczności.

Statystycznie wyznaczone parametry wytrzymałościowe stopów aluminium podano między innymi w [34].

Stopy metali drugiej grupy, o wykresie  $(\sigma-\varepsilon)$  jak na rys. 4.36c, opisuje się zależnością

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma}{f_y} \right)^m, \quad (4.36)$$

gdzie:

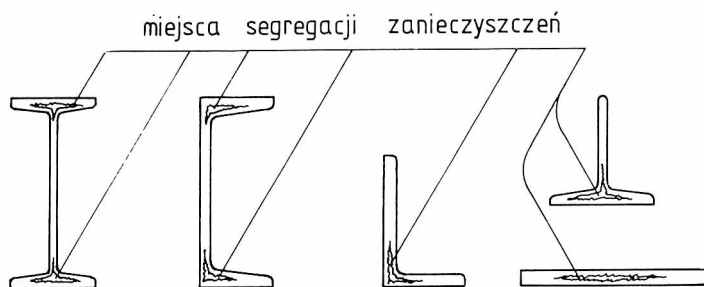
- $E_0$  — moduł *początkowy*, który określa kąt nachylenia stycznej do krzywej  $(\sigma-\varepsilon)$  w punkcie 0 (rys. 4.36c),
- $\varepsilon_0$  — umowne odkształcenie trwałe,
- $f_y$  — umowna granica plastyczności o wartości centralnej  $\check{f}_y$ , lub charakterystycznej  $f_{yk}$ , odpowiadająca  $\varepsilon_0$ .

W modelu sprężysto-plastycznym, opisującym zależność wyężenie–odkształcenie  $(\sigma-\varepsilon)$  materiału istotne są dwa parametry: moduł sprężystości podłużnej  $E$  oraz granica plastyczności  $f_y$ . Obie te wielkości fizyczne w ujęciu probabilistycznym są losowe  $E(\omega)$  i  $f_y(\omega)$ , a ich rozkłady i wartości są dość dobrze rozpoznane. Na losowy charakter tych parametrów materiałowych zasadniczy wpływ mają przede wszystkim imperfekcje typu strukturalnego. Przez imperfekcje strukturalne rozumie się przede wszystkim niejednorodny rozkład właściwości mechanicznych materiału w obszarze przekroju poprzecznego elementu, a także na długości wyrobu hutniczego (pręta).

Głównymi właściwościami mechanicznymi materiału, które mają wpływ na nośność elementów konstrukcji lub na ich zachowanie się są: granica plastyczności  $f_y$ , granica wytrzymałości  $f_m$ , wydłużalność towarzysząca zerwaniu, uderalność, twardość. Te właściwości budowlanych materiałów metalowych są wzajemnie ze sobą powiązane. Zależą one przede wszystkim od składu chemicznego materiału oraz jego budowy wewnętrznej w stanie pierwotnym lub przerobionym. Parametry wytrzymałościowe metalu ulegają zmianom wskutek procesów wytwórczych, jakim materiał w części lub miejscowo został poddany w hutach lub innych zakładach przeróbki. Najważniejszymi procesami metalurgicznymi i wytwórczymi, w których powstają imperfekcje strukturalne, są: wytapianie, walcowanie i obróbka warsztatowa (np. cięcie, gięcie, spawanie).

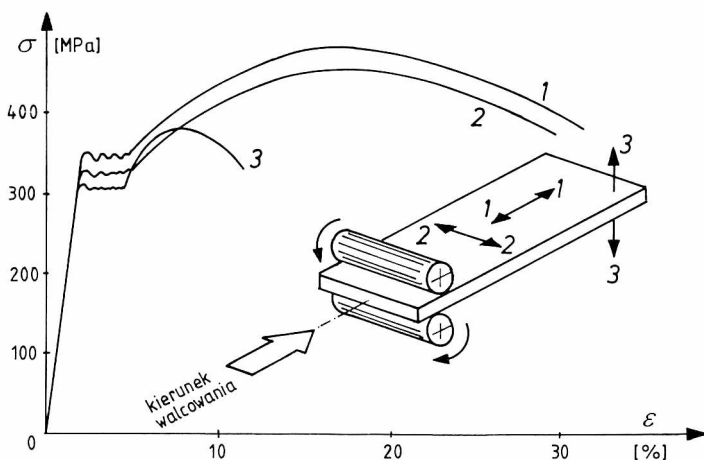
Różnice składu chemicznego stali powstają w procesie metalurgicznym podczas jej wytapiania. Przede wszystkim od tego procesu zależy zawartość w materiale szkodliwych zanieczyszczeń, takich jak związki siarki, fosforu, tlenu. Nierównomierne rozmieszczenie tych niepożądanych składników zależy w dużym stopniu od sposobu (technologii) odlewania stali. Wskutek powstającej wówczas segregacji w materiale wyroby walcowane, pochodzące z różnej części wlewka, różnią się swoim składem chemicznym, jak też od przeciętnego (średniego) składu chemicznego stali.

Dalsza segregacja składu chemicznego następuje podczas walcowania na gorąco wyrobów hutniczych, zwiększając anizotropowość właściwości mechanicznych materiału. Szkodliwe domieszki w materiale podczas walcowania na gorąco tworzą skupiska segregacji w częściach środkowych wyrobów hutniczych stygnących wolniej od części powierzchniowych. Miejsca o zwiększonej segregacji zanieczyszczeń stalowych walcowanych na gorąco kształtowników i blach pokazano na rys. 4.31.



Rys. 4.31. Miejsca segregacji zanieczyszczeń w wyrobach hutniczych walcowanych na gorąco

Podczas walcowania na gorąco w materiale następuje znaczne odkształcenie kryształów, uformowanych pierwotnie we wlewk. W trakcie takiej przeróbki przybierają one kształt włókien w kształtownikach i płytek w blachach. Z takiego ukierunkowania makrostruktury w materiale wynika anizotropia właściwości mechanicznych, którą przedstawiono na rys. 4.32. Parametry wytrzymałościowe stali poprawiają się w kierunku walcowania (krzywa 1); są nieco gorsze w kierunku prostopadłym do kierunku walcowania (krzywa 2), zdecydowanie zaś gorsze są w kierunku po grubości blachy lub ścianki wyrobu hutniczego (krzywa 3).



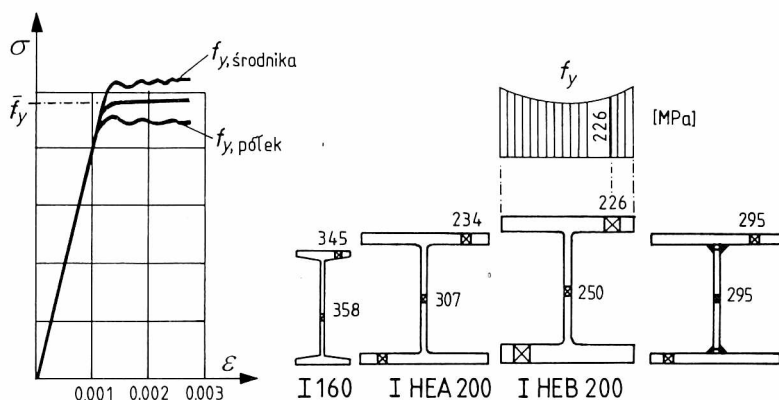
Rys. 4.32. Wykresy ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) stali w zależności od kierunku walcowania

Zmiana właściwości mechanicznych materiału zależy od grubości ścianek walcowanych kształtowników i grubości blach. W walcowanych elementach grubych zmniejszenie ich parametrów wytrzymałościowych jest większe niż w wyrobach o ściankach cieńszych. Zmniejszenie parametrów wytrzymałościowych stali w kierunku 3 (patrz rys. 4.32) na przykład blach o grubości 40 mm może sięgać nawet 40% parametrów wytrzymałościowych materiału w kierunku 1.

Uwzględniając zmienność parametrów wytrzymałościowych materiału związaną m.in. z tym zjawiskiem, normy projektowania konstrukcji stalowych [89, 90, 92, 101] różnicują wytrzymałość obliczeniową stali w zależności od grubości (dla elementów grubszych przyjmuje się mniejszą wytrzymałość). Na przykład dla stali gatunku St3 według normy PN-90/B-03200 [101] przyjmuje się następujące ich wytrzymałości obliczeniowe w zależności od grubości ścianki wyrobu

$$f_d = \begin{cases} 215 \text{ MPa} & \text{dla } t \leq 16, \\ 205 \text{ MPa} & \text{dla } 16 < t \leq 40, \\ 195 \text{ MPa} & \text{dla } 40 < t \leq 100. \end{cases}$$

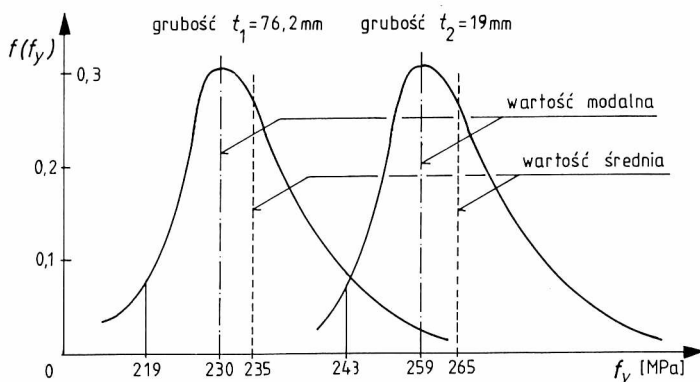
Opisane zjawiska, zachodzące w procesie wytwarzania hutniczych wyrobów stalowych powodują, że rozkłady właściwości mechanicznych kształtowników są nierównomierne na szerokościach części składowych (ścianek) ich przekrojów poprzecznych. Na rys. 4.33 pokazano zmienność granicy plastyczności materiału środników i pasów walcowanych oraz spawanych elementów o przekrojach dwuteowych [71].



Rys. 4.33. Wykresy ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) stali półek i środników dwuteowników [71]

Mniejsze zróżnicowanie granicy plastyczności stali poszczególnych ścianek występuje w wyrobach walcowanych o cieńszych półkach i środnikach. Z analizy parametrów wytrzymałościowych kształtowników dwuteowych (walcowanych i spawanych) przedstawionych na rys. 4.33 wynika, iż granica plastyczności grubszych półek jest mniejsza od granicy plastyczności cieńszych środników. Jak wykazały badania, dla przekrojów grubościennych (np. I HEB) różnice granicy plastyczności pasów i środników sięgają do 18%. W elementach grubszych (np. pasach dwuteowników) powstają większe ziarna, o niższej granicy plastyczności, elementy cieńsze zaś są o budowie włóknistej, o wyższej granicy plastyczności. Podobne zjawisko jak w kształtownikach walcowanych na gorąco występuje w przypadku blach.

Na rys. 4.34 [27] pokazano wyniki badań statystycznych granicy plastyczności  $f_y$  blach o różnych grubościach.

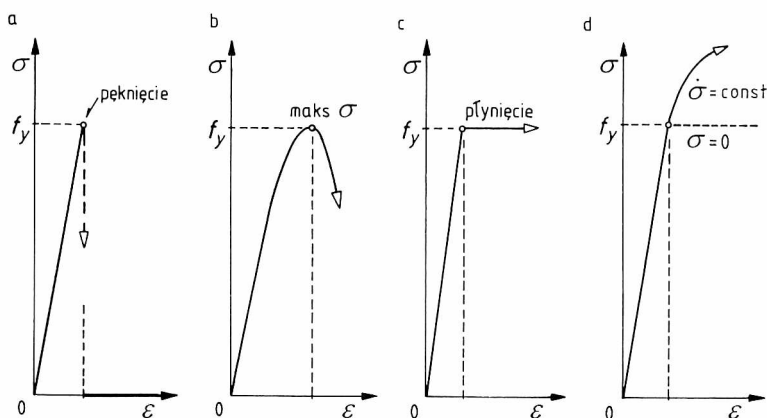


Rys. 4.34. Rozkłady granicy plastyczności  $f_y$  blach stalowych o różnych grubościach [27]

Do podstawowych właściwości materiału zalicza się: moduł sprężystości podłużnej  $E$ , granicę plastyczności  $f_y$ , wytrzymałość na rozciąganie  $f_m$ , a także granicę sprężystości  $f_e$ , wytrzymałość na zmęczenie po określonej liczbie cykli obciążenia, uderność oraz twardość. Oprócz tych parametrów nie bez znaczenia jest również identyfikacja modelu zniszczenia materiału, tj. mechanizmu zmiany stanu równowagi.

Na rys. 4.35 pokazano modele wyczerpania nośności materiału w wyniku:

- osiągnięcia wytrzymałości rozdzielczej (kruche pęknięcie, rys. 4.35a);
- utruty stateczności (wyluczanie się kolejnych włókien w materiale; rys. 4.35b);
- plastycznego płynięcia bez przyrostu obciążenia (rys. 4.35c);
- pełzania (nieliniowego przyrostu odkształceń; rys. 4.35d).

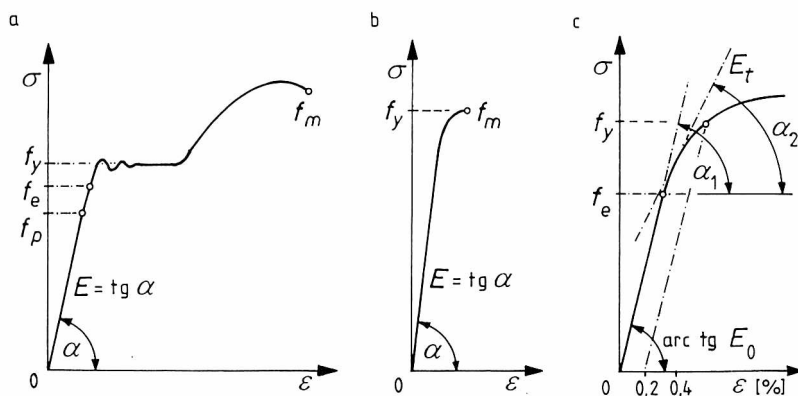


Rys. 4.35. Modele wyczerpania nośności materiału

Wiele zasadniczych informacji o materiale uzyskuje się w badaniach na jednokierunkowe rozciąganie statyczne. Prowadzi się je na znormalizowanych próbkach, na maszynie wytrzymałościowej.

Na rysunku 4.36 pokazano charakterystyczne wykresy dla stali niskowęglowej i niskostopowej — rys. 4.36a (np. gatunku St0, St3, 18G2), a także stali wysokowęglowej stosowanej na liny i druty — rys. 4.36b oraz dla stopów aluminium stosowanych w budownictwie — rys. 4.36c.

Należy zauważyć, iż ścieżkę równowagi statycznej stali wysokowęglowej, o modelu pokazanym na rys. 4.36b, charakteryzuje brak plastycznej rezerwy nośności (model sprężysto-kruchy).



Rys. 4.36. Wykresy ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) stali (a, b) oraz stopu aluminium (c)

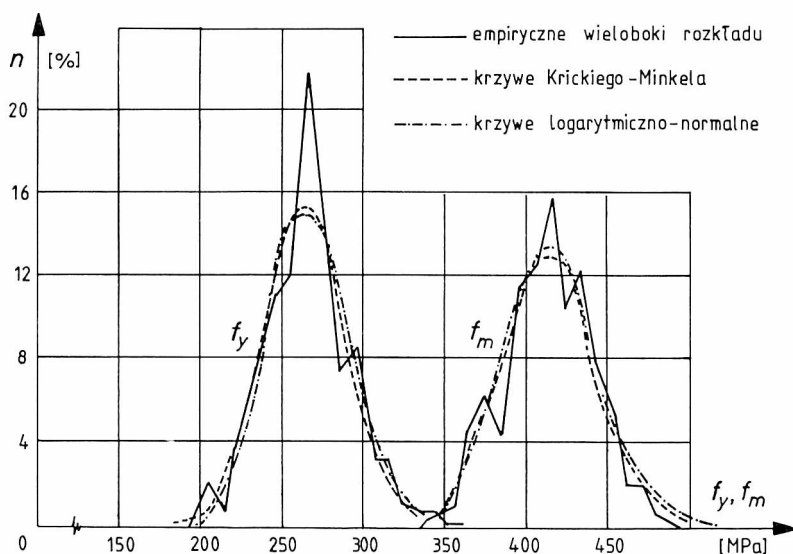
W probabilistycznych metodach szacowania nośności elementów lub konstrukcji wymagana jest znajomość co najmniej dwóch parametrów statystycznych rozkładu cech wytrzymałościowych materiału charakteryzujących: ośrodek skupienia  $\bar{w}$  i rozrzut tej cechy  $s_w$ . Określenie wytrzymałości materiału za pomocą parametrów statystycznych  $\bar{w}$  i  $s_w$  jest możliwe do zrealizowania, gdyż powszechnie stosuje się statystyczną kontrolę jakości stali wykonywaną przez producenta (w hutach). Takie dane statystyczne pochodzą z działów jakości producentów wyrobów hutniczych oraz z laboratoriów Instytutu Metali Nieżelaznych.

W probabilistycznych analizach nośności i bezpieczeństwa wprowadza się do obliczeń funkcję rozkładu wytrzymałości materiału (patrz rozdział 3). W statystycznej analizie losowych parametrów materiału najczęściej stosuje się półempiryczne metody wyznaczania typu rozkładu badanej cechy. Po opracowaniu histogramu badanej cechy materiałowej stawia się hipotezę dotyczącą kształtu funkcji rozkładu, następnie dokonuje się estymacji parametrów rozkładu i w końcu stosuje się test zgodności założonej hipotetycznej funkcji rozkładu z danymi statystycznymi. Na tej podstawie hipotezę przyjmuje się lub odrzuca. Zazwyczaj do opisu losowego charakteru cech materiałowych stosuje się rozkłady: logarytmiczno-normalny, Gumbela (w przypadku badania

małych populacji rozkład normalny). Testy wiarygodności założonych hipotetycznie rozkładów są szeroko omówione w podręcznikach dotyczących statystyki matematycznej. Najczęściej statystyczne opracowanie danych materiałowych stali stosowanych w budownictwie przeprowadza się w zapisie logarytmiczno-normalnym.

Przykład rozkładów granicy plastyczności  $f_y$  i wytrzymałości materiału  $f_m$  polskiej stali przedstawiono na rys. 4.37 [57]. Na uwagę zasługuje fakt, iż są to rozkłady niesymetryczne.

W tablicy 4.10 podano statystyki parametrów wytrzymałościowych stali (granicy plastyczności  $f_y$  oraz wytrzymałości doraźnej  $f_m$ ) polskich hut [59].



Rys. 4.37. Rozkłady granicy plastyczności  $f_y$  i wytrzymałości doraźnej  $f_m$  polskiej stali [57]

W analizach odkształceń (ugięć, przemieszczeń) oraz nośności krytycznej konstrukcji stalowych wartość charakterystyczną modułu sprężystości podłużnej stali przyjmuje się:  $E = 205$  GPa według normy [101],  $E = 210$  GPa według [91].

Tymczasem dokładne badania zarówno starsze, jak i najnowsze wskazują, że wartość średnia modułu sprężystości  $\bar{E} = 204$  GPa przy współczynniku zmienności modułu sprężystości podłużnej  $v_E = 0,013$ . Pozwala to na ustalenie wartości charakterystycznej modułu sprężystości podłużnej stali konstrukcyjnych (jako 95% kwantyla rozkładu normalnego lub logarytmiczno-normalnego)

$$E_k = E = 204(1 - 1,64 \cdot 0,013) = 200 \text{ GPa.} \quad (4.37)$$

Różnica 5% między 210 i 200 GPa (na niekorzyść bezpieczeństwa według [91]) może być uważana za nieistotną [52], jednak podważa to zasadność stosowania złożonych modeli imperfekcyjnych konstrukcji, zbliżających się do warunków rzeczywistych.

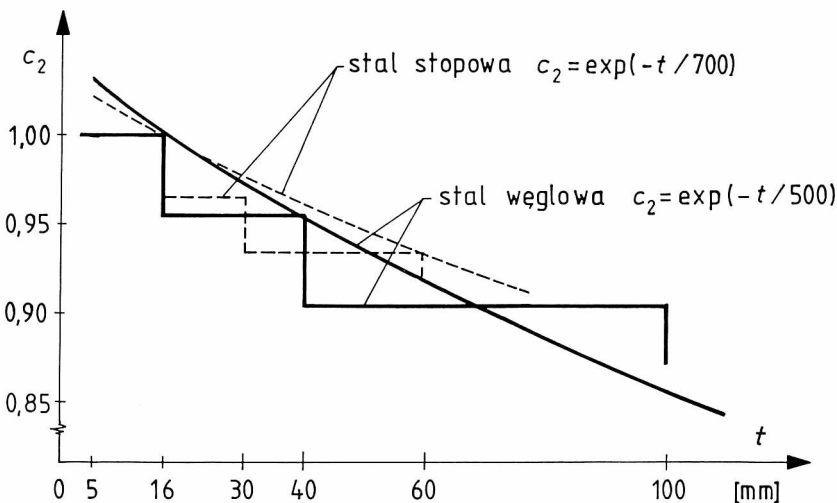


Tablica 4.11. Cechy wytrzymałościowe polskich stali konstrukcyjnych węglowych i niskostopowych [59]

| Gatunek stali | Grubość próbek<br>$t$<br>[mm] | Liczba próby<br>$n$<br>[szt.] | Granica plastyczności |                 | Granica wytrzymałości |                 | Granica wydłużalności |              | Huty      |
|---------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------------|--------------|-----------|
|               |                               |                               | $f_y$<br>[MPa]        | $v_{fy}$<br>[%] | $f_m$<br>[MPa]        | $v_{fm}$<br>[%] | $a_s$<br>[%]          | $v_a$<br>[%] |           |
| St3S          |                               | 532                           | 332,0                 | 8,96            | 457,6                 | 6,41            | 34,03                 | 8,61         | śląskie   |
| St3SX         |                               | 92                            | 315,7                 | 8,04            | 425,8                 | 6,52            | 35,27                 | 6,39         | „         |
| St3SY         |                               | —                             | 309,5                 | 8,46            | 448,7                 | 6,21            | —                     | —            | „         |
| 18G2A         |                               | 874                           | 415,0                 | 7,8             | 567,7                 | 6,3             | 27,38                 | 10,5         | krakowska |
|               | 8                             | 92                            | 400,0                 | 5,8             | 565,0                 | 5,4             | —                     | —            | „         |
|               | 10                            | 118                           | 390,0                 | 6,5             | 556,4                 | 4,8             | —                     | —            | „         |
|               | 12 ÷ 16                       | 149                           | 397,8                 | 7,2             | 575,0                 | 5,7             | 26,65                 | 9,5          | śląskie   |
|               | 18 ÷ 22                       | 66                            | 387,0                 | 7,1             | 572,4                 | 5,8             | —                     | —            | „         |
|               | 24 ÷ 30                       | 268                           | 386,0                 | 6,3             | 569,0                 | 5,7             | 26,74                 | 8,9          | „         |

Badania cienkich blach stalowych (np. blach fałdowych) [8] wykazują, że wartość ich modułu sprężystości podłużnej może być zdecydowanie (o 10–15%) mniejsza niż uzyskiwana dla walcowanych wyrobów hutniczych o grubościach ścianek  $t > 3$  mm, współczynnik zmienności  $v_E$  zaś może być większy.

Mediana granicy plastyczności wyrobu hutniczego jest na ogół mniejsza niż mediana tej granicy uzyskana z badań laboratoryjnych próbek. Zmniejszenie to zależy od grupy wyrobów hutniczych (blachy, kształtowniki, rury walcowane), wielkości elementów w grupie oraz od procesu technologicznego (procesu stalowniczego, sposobu walcowania i ewentualnej obróbki cieplnej). Główną rolę w redukcji wartości granicy plastyczności wyrobów hutniczych należy przypisywać naprężeniom

Rys. 4.38. Współczynnik konwersji  $c_2$  granicy plastyczności stali

własnym walcowniczym. W celu uwzględnienia tego efektu zmniejszenia nośności, przechodząc od wytrzymałości próbek laboratoryjnych do wytrzymałości elementów konstrukcji można stosować zalecane przez normę [93] współczynniki konwersji

$$c = c_1 c_2 c_3. \quad (4.38)$$

Współczynnik  $c_1$  uwzględnia rodzaj wyrobu, współczynnik  $c_2$  ujmuje wpływ grubości  $t$  wyrobu hutniczego, współczynnik  $c_3$  zaś uwzględnia skalę konstrukcji. Współczynnik konwersji grubości wyrobu  $c_2$  wypływa ze statystycznego efektu skali Weibulla. Współczynnik  $c_2$  pokazany na rys. 4.38 jest funkcją ciągłą.

W normach projektowania konstrukcji stalowych przyjęto skokową zmianę granicy plastyczności, co oczywiście jest przybliżeniem prowadzącym do niepotrzebnych strat ekonomicznych.

W praktyce projektowania konstrukcji stalowych stosuje się dotychczas inną drogę postępowania dla ustalenia minimalnej granicy plastyczności stali elementów na podstawie zbadanych wartości na próbkach. Oblicza się mianowicie skorygowany logarytmiczny wskaźnik zmienności ze wzoru (2.53b) lub według propozycji J. Murzewskiego

$$v'_f = \sqrt{v_{fy}^2 + v_t^2 + v_i^2}, \quad (4.39)$$

gdzie:

- $v_{fy}$  — wskaźnik zmienności granicy plastyczności próbek,
- $v_t$  — wskaźnik zmienności przekroju poprzecznego wyrobu,
- $v_i$  — wskaźnik zmienności innych imperfekcji.

## 5. Bezpieczeństwo i nośność graniczna prętowych systemów konstrukcyjnych

### 5.1. Wprowadzenie

W analizie wytrzymałości budowlanych prętowych systemów konstrukcyjnych wyróżnia się elementy sprawcze (krytyczne). Mogą być nimi przekroje elementów, pręty (belki, słupy) oraz węzły (połączenia, styki). Zazwyczaj elementami sprawczymi (lub krytycznymi) są przekroje prętów lub pręty będące przedmiotem wymiarowania i normowego sprawdzania ich bezpieczeństwa. Elementy sprawcze są to takie części składowe ustroju nośnego, w których wskutek przyrostu obciążeń dochodzi do wyczerpania ich nośności, prowadzącego do zmiany systemu konstrukcyjnego w ustrój geometrycznie zmienny (łańcuch kinematyczny).

Elementy sprawcze są charakteryzowane parametrami ich nośności. Bezpieczeństwo systemu konstrukcyjnego w ujęciu normy [101] sprowadza się do kontroli stopnia wykorzystania nośności elementów sprawczych w odniesieniu do prognozowanych sił wewnętrznych, które mogą w nich wystąpić. W takim ujęciu analizy bezpieczeństwa ustroju nośnego nie mają odzwierciedlenia wzajemne probabilistyczne relacje i oddziaływania elementów sprawczych tworzących system konstrukcyjny. Jest oczywiste, iż liczba oraz wzajemne sprzężenia (połączenia) elementów w systemie nośnym wpływają na bezpieczeństwo i niezawodność ustroju konstrukcyjnego. Dlatego też w analizie bezpieczeństwa ustroju nośnego należy uwzględnić jego niezawodnościową budowę strukturalną, tj. wpływ właściwości systemu konstrukcyjnego (schematu statycznego, liczby i wzajemnych relacji elementów sprawczych) na niezawodność i bezpieczeństwo ustroju. Normy i przepisy projektowania nie uwzględniają na przykład wpływu liczby elementów (np. prętów) w konstrukcji, sposobu ich zespolenia w ustrój oraz skutków statycznej niewyznaczalności szkieletu nośnego.

W deterministycznym ujęciu normowym, statycznie niewyznaczalne i statycznie wyznaczalne układy konstrukcyjne o różnej liczebności elementów sprawczych, w których stopień wykorzystania nośności najbardziej wytężonych elementów jest identyczny, mają to samo bezpieczeństwo. Wiadomo jednak, że prawdopodobieństwo awarii może się zwiększać ze wzrostem liczby elementów. Ponadto występują zapasy nośności konstrukcji zależnie od cech systemu konstrukcyjnego. Podobnie jest szacowane bezpieczeństwo połączenia elementu w styku, na przykład na jeden łącznik i wiele łączników. W ujęciu deterministycznym, jeśli nośności styków są identyczne, to ich bezpieczeństwo jest takie samo, mimo iż skutki losowego uszkodzenia jednego łącznika w obu przypadkach są różne.

Analizy niezawodności w ujęciu probabilistycznym konstrukcji o różnej liczbie elementów sprawczych, ustrojów statycznie wyznaczalnych i statycznie niewyznaczalnych wykazują, że bezpieczeństwo ich jest różne i zależy od sposobu sprzężenia elementów w system.

W rozdziale tym będzie analizowany sposób szacowania nośności granicznej i bezpieczeństwa konstrukcji prętowych z uwzględnieniem budowy strukturalnej systemu (wzajemnych relacji i powiązań elementów sprawczych), zaproponowany i przedstawiony w sposób uporządkowany w pracach Z. Kowala [37–40, 44, 45, 47].

Bezpieczeństwo ustroju prętowego będzie się rozumieć jako prawdopodobieństwo niewystąpienia żadnego z kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia konstrukcji. Mechanizmy zniszczenia prętowego ustroju nośnego wyznacza się na podstawie geometrycznych i fizycznych cech konstrukcji oraz charakterystyki oddziałujących na nią zbiorów obciążeń.

Oszacowanie bezpieczeństwa prętowego systemu konstrukcyjnego wykonuje się, przyjmując następujące założenia:

- w konstrukcji można wydzielić elementy sprawcze (krytyczne);
- znane są zbiory losowych obciążeń oddziałujących na ustrój;
- nośność elementów sprawczych (krytycznych – decydujących o bezpieczeństwie) jest losowa;
- znane są modele ścieżek równowagi statycznej ŚRS (zależności: obciążenie–przemieszczenie; obciążenie–odkształcenie) elementów sprawczych oraz ich nośności graniczne;
- zidentyfikowane są minimalne zbiory krytyczne (MZK) elementów sprawczych (których wyczerpanie nośności zamienia ustrój w mechanizm).

Przez element sprawczy (krytyczny) będzie się rozumieć część konstrukcji, na przykład pręt, przekrój elementu, połączenie, których niezawodność można badać niezależnie. Prętowy ustrój nośny traktowany będzie jako zbiór elementów sprawczych. Nośność graniczna elementów sprawczych konstrukcji jest funkcją losową  $N(\omega)$ . Parametrami losowej nośności granicznej elementów sprawczych  $N(\omega)$  nazywano momenty statystyczne pierwszego i drugiego rzędu, to jest wartość centralną  $\bar{N}$  (którą oznaczono nadkreśleniem) oraz wariancję, jak również pochodne: odchylenie standardowe  $s_N$  i współczynnik zmienności  $v_N = \bar{N}/s_N$ . Sposób szacowania parametrów losowej nośności granicznej elementów: rozciąganych, zginanych, ściskanych oraz rozciąganych i zginanych, a także ściskanych i zginanych podano w rozdziale 3.

Zgodnie z założeniami przyjmuje się, iż znane są modele ŚRS oraz parametry rozkładów losowych nośności granicznych elementów sprawczych, na przykład nośności plastycznej dla pręta rozciąganego; momentu plastycznego dla przekroju zginanego; obciążenia krytycznego dla pręta ściskanego. Analizowana więc będzie nośność graniczna i bezpieczeństwo konstrukcji prętowych, o elementach sprawczych zbudowanych z materiałów sprężysto-plastycznych. Model niezawodnościowy ustroju będzie się wyznaczać na podstawie analizy kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia (KDMZ) szkieletu nośnego.

Każdemu mechanizmowi zniszczenia konstrukcji prętowej będzie się przyporządkowywać minimalny krytyczny zbiór elementów sprawczych, nazywany w skrócie MKZ.

Minimalny krytyczny zbiór to taki, w którym, jeśli choć jeden element jest sprawny, to cały zbiór jest sprawny [40]. Bezpieczeństwo konstrukcji prętowej rozumiane jest tu jako prawdopodobieństwo niewystąpienia żadnego z analizowanych minimalnych krytycznych zbiorów elementów sprawczych ustroju. W przypadku prętowych systemów konstrukcyjnych minimalne krytyczne zbiory (MKZ) są stowarzyszone z ich kinematycznie dopuszczalnymi mechanizmami zniszczenia (KDMZ). Metody kinematyczne (analiza KDMZ) służą do określenia minimalnych krytycznych zbiorów elementów sprawczych ustroju, do wyznaczenia zaś nośności granicznej konstrukcji służą metody statyki budowli.

W celu uszeregowania ważności elementów sprawczych w systemie konstrukcyjnym (ich roli i oddziaływania na nośność ustroju) wprowadzono pojęcie wagi elementu  $a_i$  i będzie się je rozumieć jako stosunek siły wewnętrznej w elemencie do obciążenia zewnętrznego, stanowiącego miarę nośności granicznej systemu.

Dla przejrzystości omawianych zagadnień oraz prostoty prezentowanych przykładów założono, że zarówno losowe nośności graniczne elementów sprawczych, jak i losowe obciążenia mogą być opisane rozkładem normalnym.

W przypadku innych rozkładów sposób podejścia do omawianych zagadnień szacowania nośności granicznej i bezpieczeństwa prętowych systemów konstrukcyjnych jest podobny, a komplikuje się jedynie matematyczna część analiz.

## 5.2. Nośność graniczna elementów sprawczych i konstrukcji

### 5.2.1. Nośność graniczna przekrojów prętów

W prętowych ustrojach nośnych można wyróżnić ich części, których wyczerpanie nośności może wpływać na nośność całej konstrukcji. Tak wytypowane części konstrukcji nazwano elementami sprawczymi (krytycznymi), gdyż mogą one decydować o bezpieczeństwie ustroju nośnego. Mogą to być przekroje elementów, w których można spodziewać się ich ekstremalnego wyężenia, węzły (miejsca połączeń prętów), styki warsztatowe lub montażowe, jak również pręty. Analiza nośności granicznej konstrukcji jest uwarunkowana między innymi znajomością ścieżek równowagi statycznej oraz nośności granicznej elementów sprawczych. Identyfikację modeli ścieżek równowagi statycznej przekrojów, prętów i konstrukcji przedstawiono kompleksowo w pracy [10].

Proporcje geometryczne ściskanych części składowych przekrojów poprzecznych (pólek i środników) elementów zginanych, ściskanych, zginanych i ściskanych sprawiają, iż w granicznych stanach wyężenia ich ścieżki równowagi (np. zależność

obciążenie–przemieszczenie) mogą się zasadniczo różnić. Podstawowe typy przekrojów poprzecznych prętów to: krępe, grubościennie i cienkościennie.

Za cienkościennie uważa się elementy konstrukcyjne, w których występująca lokalna utrata stateczności części składowych profilu zmniejsza ich nośność poniżej granicznego wyężenia sprężystego.

Przekroje grubościennie to profile, w których nie występuje lokalna utrata stateczności ściskanych ścianek (nie wpływa na wyczerpanie ich nośności). W zależności od smukłości części składowych przekrojów mogą one osiągać częściowe lub pełne uplastycznienie w granicznym stanie wyężenia.

Przekroje krępe (lub zwarte) nie wymagają badania lokalnej utraty stateczności.

Klasyfikacja przekrojów prętów została usystematyzowana w normach projektowania konstrukcji stalowych według stanów granicznych [89, 90, 92, 101]. W Eurokodzie 3 [92], jak i normie PN-90/B-03200 projektowania konstrukcji stalowych [101] wprowadzono pojęcie klas przekrojów poprzecznych elementów. Podstawowym kryterium zaliczania przekroju do poszczególnych klas (klasyfikacji) jest smukłość ścianki elementów składowych (pólek, środników) kształtownika. Zarówno w Eurokodzie 3, jak i normie [101] podzielono profile na 4 klasy, przy czym przekroje klasy 1, 2, 3 są zaliczane do grubościennych, klasy 4 do cienkościennych. Do wyznaczania nośności każdej z badanych klas profili (w związku z ich różną ścieżką równowagi statycznej), stosuje się inne procedury obliczeniowe. Podział profili na 4 klasy pozwala na dostosowanie (uzgodnienie) modeli fizycznych do modeli obliczeniowych elementów konstrukcyjnych. Aby pręty można było obliczać zgodnie z zasadami formułowanymi w mechanice konstrukcji, narzuca się ich przekrojom poprzecznym takie wymogi wymiarowe, aby analizę wyężenia konstrukcji można było prowadzić w stanie plastycznym, sprężystym bądź nadkrytycznym. Służą do tego warunki zapewnienia zdolności przekroju prętów do obrotu. Wprowadzenie klas przekrojów umożliwia ściśle powiązanie modeli z metodami obliczania konstrukcji.

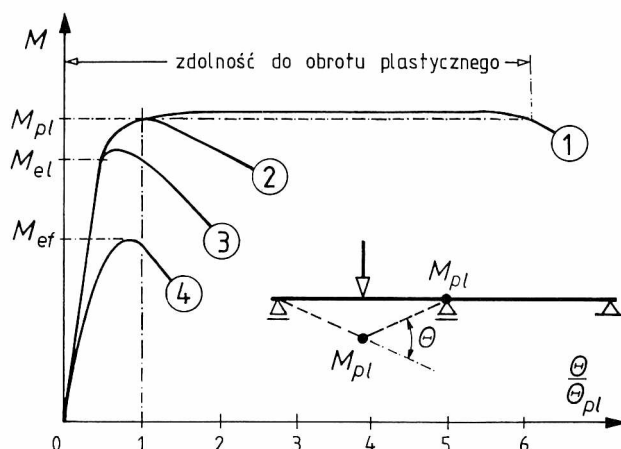
Na rys. 5.1 pokazano wykresy ścieżek równowagi statycznej elementów zginanych o przekrojach klasy 1, 2, 3 i 4, w których wyróżnić można fazę sprężystą i fazę plastyczną. Na osi poziomej naniesiono bezwymiarową rzędną kąta obrotu przekroju zginanego do kąta obrotu w stanie uplastycznienia, na osi pionowej zaś nośności mierzone momentem zginającym: plastycznym  $M_{pl}$ , sprężystym  $M_{el}$ , efektywnym  $M_{ef}$ .

Przekroje klasy 1 mogą osiągnąć nośność uogólnionego przegubu plastycznego, a w stanie pełnego uplastycznienia przy zginaniu wykazują zdolność do obrotu, niezbędną do plastycznej redystrybucji momentów zginających w ustroju.

Przekroje klasy 2 mogą osiągać nośność uogólnionego przegubu plastycznego, lecz skutek miejscowej niestateczności ścianek w fazie plastycznej wykazują ograniczoną zdolność do obrotu, uniemożliwiającą redystrybucję momentów zginających w ustrojach statycznie niewyznaczalnych.

Przekroje klasy 3 charakteryzują się tym, że ich nośność jest ograniczona początkiem uplastycznienia się strefy ściskanej.

Przekroje klasy 4 są wrażliwe na miejscową utratę stateczności i gdy wzrasta ich wyężenie nie zachowują pierwotnego kształtu przekroju poprzecznego. Ponadto osiągają one nośność krytyczną przy naprężeniach mniejszych niż granica pla-



Rys. 5.1. Ścieżki równowagi statycznej elementów zginanych o przekrojach klasy 1, 2, 3, 4

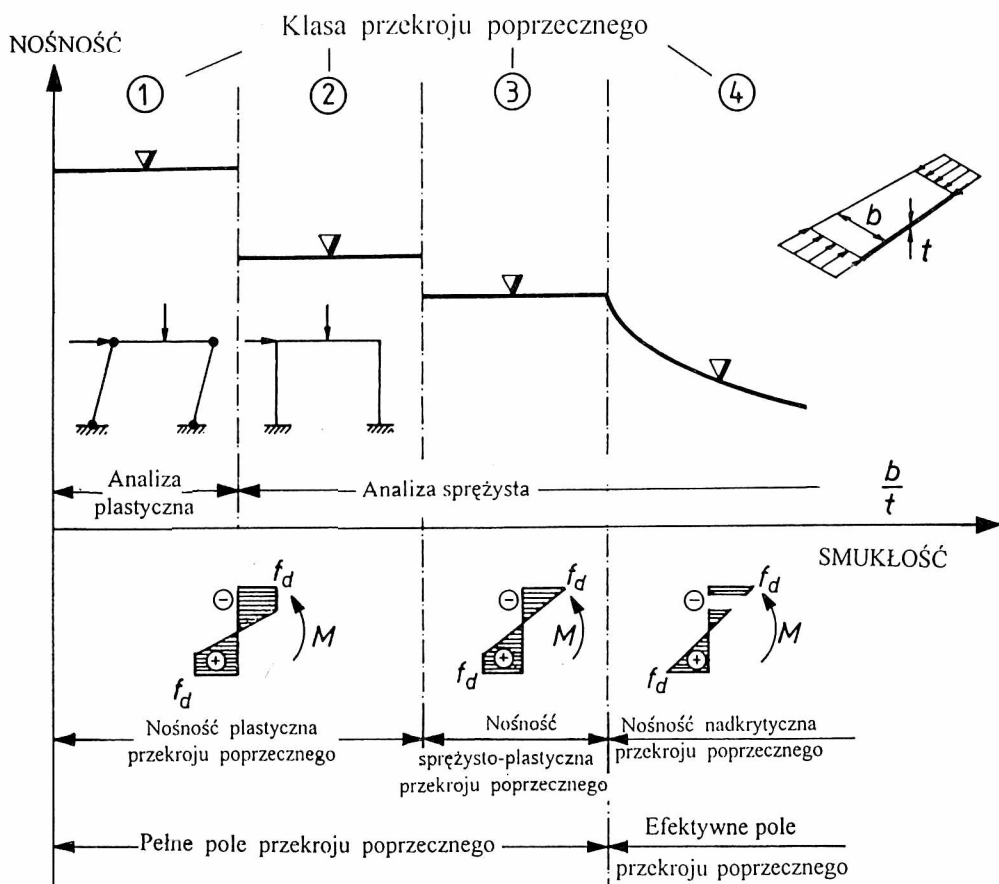
styczności. Nadkrytyczną nośność przekrojów takich kształtowników oblicza się przy zredukowanej sztywności giętej przekroju.

Klasę przekroju ustala się w zależności od wrażliwości (odporności) elementu na miejscową utratę stateczności. Wrażliwość przekroju na lokalne wyboczenie zależy od warunków podparcia, rozkładu naprężeń oraz smukłości ściskanych ścianek profilu  $\lambda = b/t$  (gdzie:  $b$  – szerokość ścianki;  $t$  – grubość ścianki).

Wprowadzenie klasyfikacji przekrojów poprzecznych prętów, w ujęciu współcześnie obowiązujących norm projektowania konstrukcji stalowych, wyznacza możliwości prowadzenia obliczania sił wewnętrznych (w Eurokodie 3: według globalnej analizy sprężystej lub globalnej analizy plastycznej), a także projektowania (wyznaczania nośności) elementów w zakresie sprężystym lub plastycznym.

Wyznaczenie sił wewnętrznych w ustroju według analizy plastycznej jest warunkowane w normach między innymi wymaganiami co do kształtu (sztywności) przekroju poprzecznego (klasy przekroju), w którym mogą powstać przeguby plastyczne. Według Eurokodu 3 [92] i normy [101] analizę plastyczną wyznaczania sił wewnętrznych można prowadzić dla konstrukcji o przekrojach poprzecznych prętów klasy 1, gdyż charakteryzuje je zdolność do obrotu uplastycznionego przekroju (rys. 5.1), umożliwiającą redystrybucję sił wewnętrznych w ustroju przy równoczesnym zachowaniu nośności uplastycznionych przekrojów. Analizę sprężystą wyznaczania sił wewnętrznych natomiast można prowadzić dla ustrojów, których przekroje poprzeczne prętów są klasy 2, 3 i 4 (także klasy 1, gdyż ten przekrój spełnia wymagania przekroju klasy 2). Graficzną interpretację omawianych zagadnień nośności i metod analizy konstrukcji w funkcji klas przekrojów poprzecznych prętów (smukłości ściskanych ścianek elementów składowych kształtowników stalowych) przedstawiono na rys. 5.2.

W projektowaniu elementów konstrukcji stalowych (wyznaczaniu nośności elementów) można wykorzystać na przykład dla przekrojów zginanych:



Rys. 5.2. Nośności i metody analizy konstrukcji w funkcji klas przekrojów poprzecznych prętów

- klasy 1 i 2 — według polskiej normy [101] częściowe uplastycznienie (stan sprężysto-plastyczny), według Eurokodu 3 [92] oraz normy niemieckiej [90] pełne uplastycznienie przekroju;
- klasy 3 — sprężysty zakres wyężenia przekroju;
- klasy 4 — z uwzględnieniem nadkrytycznej nośności lokalnie wyboczonych ścianek przekroju poprzecznego.

### 5.2.2. Ścieżki równowagi statycznej prętów

Ścieżki równowagi statycznej (ŚRS) konstrukcji są generowane przez ŚRS prętów i ŚRS węzłów. Kształt ścieżek równowagi statycznej (ŚRS) prętów, zależy od wielu okoliczności: wytrzymałości materiału, geometrii ścianek, imperfekcji geometrycznych, sprężystości połączeń prętów w węzłach, charakterystyk geometrycznych i sztywnościowych, rodzaju obciążenia (stałego, zmęczeniowego, udarowego, dynamicznego) i rodzaju wyężenia (ściskanie, rozciąganie, zginanie).



Na rys. 5.3 pokazano ścieżki równowagi statycznej prętów w zależności od poziomu analizy oraz właściwości materiału, rodzaju obciążenia i klasy (geometrii) przekroju poprzecznego. Przedstawione ścieżki równowagi statycznej prętów sporządzono w umownych współrzędnych obciążenie–przemieszczenie (np. dla pręta rozciąganego: siła osiowa  $N$  – wydłużenie  $\Delta l$ ; dla pręta zginanego: moment zginający  $M$  – ugięcie  $y$ ; dla pręta ściskanego: siła osiowa  $N$  – wygięcie osi pręta  $y$  lub skrócenie  $\Delta l$ ). ŚRS niezależnie od rodzaju wyteżenia mają podobny kształt, a tylko drugorzędne cechy wpływają na ich przebieg.

Takie umowne zestawienie ścieżek równowagi statycznej umożliwia analizę porównawczą nośności i sztywności prętów oraz prezentację stosowanych modeli teoretycznych ich szacowania.

Identyfikując modele matematyczne zachowania się prętów, najczęściej przypisuje się im następujące właściwości:

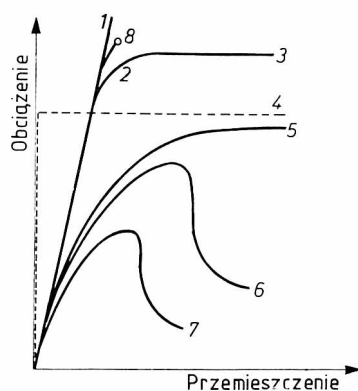
- geometrycznie i materiałowo liniowe,
- geometrycznie nieliniowe,
- materiałowo nieliniowe,
- geometrycznie i materiałowo nieliniowe,

a także uwzględnia się utratę stateczności i kruche pękanie.

Na rys. 5.3 linią 1 oznaczono liniowo-sprężystą ŚRS pręta. Sprężysta nośność graniczna pręta jest wyznaczana z warunku, iż ekstremalne naprężenia w przekroju są równe granicy proporcjonalności materiału. W liniowym modelu opisującym wyteżenia pręta zakłada się, iż zmiany geometryczne są pomijane i że zbudowany jest on z materiału liniowo-sprężystego. Taki model można przyjąć na przykład dla grubościennego pręta: rozciąganego osiowo; zginanego zabezpieczonego przed zwichrzeniem; skręcanego, w sprężystym zakresie wyteżenia materiału. Sztywność giętą  $EJ$  i podłużną  $EA$  pręta, dla modelu liniowo-sprężystego nie zmienia się ze wzrostem jego wyteżenia.

Linią 2 na rys. 5.3 oznaczono nieliniową ŚRS pręta z uwzględnieniem ograniczonych plastycznych właściwości materiału. W przypadku wykorzystania pełnego uplastycznienia przekroju ŚRS opisuje linia 3. Taki model ścieżki równowagi statycznej, można przypisać zginanym prętom o przekrojach klasy 1 i 2, zbudowanych z materiału sprężysto-plastycznego. W ścieżce równowagi statycznej zginanego pręta grubościennego można wyróżnić fazy: liniowo-sprężystą (sztywność przekroju  $EJ = \text{const}$ ), nieliniowo-sprężysto-plastyczną (sztywność przekroju częściowo ulega redukcji) oraz liniowo-plastyczną (sztywność przekroju  $EJ = 0$ ).

Przerywaną linią 4 na rys. 5.3 oznaczono ŚRS ściskanego pręta idealnego (bez imperfekcji geometrycznych, strukturalnych, technologicznych), który ulega wyboczeniu ogólnemu (model eulerowski).



Rys. 5.3. Ścieżki równowagi statycznej prętów

Ścieżka równowagi statycznej oznaczona linią 5 opisuje przypadek wyężenia pręta z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej. Taki model zachowania się pręta można przypisać ściskanyim prętom rzeczywistym z imperfekcjami (geometrycznymi, strukturalnymi, technologicznymi), prętom ściskanyim i zginanyim (z uwzględnieniem teorii drugiego rzędu). W tym przypadku występuje nieliniowość sprężysta ze względu na geometrię. ŚRS uwzględniającą oprócz nieliniowości geometrycznej pręta plastyczne właściwości materiału opisuje krzywa 6 (rys. 5.3).

Krzywa 7 (rys. 5.3) charakteryzuje zachowanie się pręta cienkościennego (ściskanego, zginanego), gdy o wyczerpaniu jego nośności decyduje lokalna utrata stateczności ściskanej ścianki przekroju poprzecznego. Ścieżka równowagi statycznej jest nieliniowo-sprężysta ze względu na redukcję sztywności giętnej  $EJ$  i podłużnej  $EA$  przekroju pręta, które są malejącymi funkcjami wyężenia.

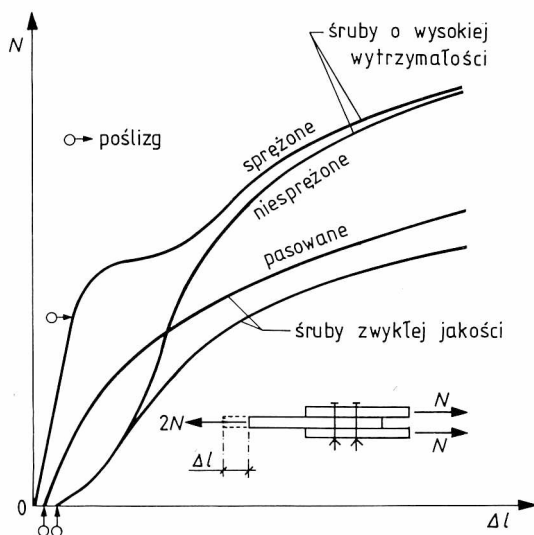
Kółkiem oznaczono na linii 8 (rys. 5.3) kruche wyczerpanie nośności pręta zbudowanego z materiału o sprężysto-kruchym modelu  $\sigma(\epsilon)$ . W takim przypadku zmiana stanu równowagi z bezpiecznej w awaryjną zachodzi w sposób nagły, a element traci swą nośność i nie jest zdolny do przenoszenia występujących w nim sił wewnętrznych.

### 5.2.3. Ścieżki równowagi statycznej węzłów

Przemieszczenia konstrukcji złożonej z prętów połączonych w węzłach są generowane zarówno przez ŚRS prętów, jak i ŚRS węzłów oraz styków warsztatowych i montażowych. Ścieżki równowagi statycznej węzłów i styków mogą być liniowe bądź nieliniowe. Nieliniowość charakterystyk ścieżek równowagi statycznej węzłów i styków może wynikać z budowy tych elementów konstrukcyjnych. Jedną z przyczyn nieliniowości charakterystyk jest występowanie na przykład luzów w połączeniach styków śrubowych lub odształceń blach (ścianek, pólek) w obrębie połączenia.

Na rys. 5.4. pokazano ścieżki równowagi statycznej (charakterystyki odkształcalności) zakładkowych połączeń śrubowych, obciążonych prostopadle do osi łączników. Z analizy tych wykresów wynika, iż w szerokim zakresie wyężenia połączeń ich ŚRS opisują nieliniowe związki obciążenie — odkształcenie. Są one następstwem luzów w połączeniach, poślizgu po pokonaniu sił tarcia, odkształcalności łączników oraz składowych części połączenia i lokalnej koncentracji naprężeń w sprężysto-plastycznej fazie wyężenia materiału.

Połączenia elementów konstrukcji stalowych w zdecydowanej większości wypadków modelowane są w analizie statycznej jako przegubowe lub w pełni utwierdzone, czyli sztywne. Stosowane w praktyce połączenia nie spełniają w ścisły sposób wymagań określonych w odniesieniu do węzłów sztywnych lub przegubowych, a ich właściwości przybliżają się do wymagań ekstremalnych. Rzeczywiste węzły i styki są połączeniami podatnymi. Stosowanie węzłów podatnych (odkształcalnych), odbie-



Rys. 5.4. Ścieżki równowagi śrubowych połączeń zakładkowych

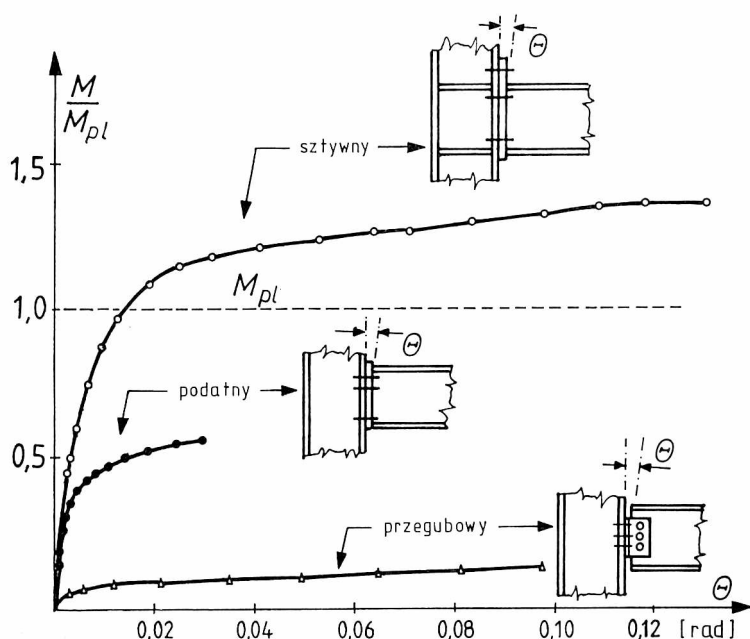
gających od skrajnego przypadku połączenia sztywnego, wynika z dążenia do uproszczeń technologicznych (eliminowanie żeber, usztywnień, zastępowanie węzłów spawanych połączeniami na śruby). Konstruowane w ustrojach nośnych przeguby techniczne wykazują pewien stopień zamocowania pręta w węźle.

Na rys. 5.5 pokazano wyniki badań doświadczalnych doczołowych styków belek ze słupami, o różnych sztywnościach złączy. Przedstawione na rys. 5.5 przykłady połączeń należy traktować umownie, gdyż o podatności węzłów decyduje nie tylko typ styku, ale liczba śrub, uźebrowania, grubości elementów przylgowych złączy. Ścieżki równowagi statycznej połączeń podatnych są zwykle nieliniowe.

Znajomość ścieżek równowagi statycznej połączeń umożliwia uwzględnienie w przyjmowanych schematach obliczeniowych wyznaczania sił wewnętrznych precyzyjniejszych modeli, opisujących sztywności i przemieszczenia węzłów i styków. Badania doświadczalne izolowanych węzłów ram umożliwiają: sporządzenie ścieżek równowagi statycznej w postaci krzywych  $M(\theta)$ , określenie nośności granicznej na zginanie  $M_{Ri}$ , sztywności  $R_{ki}$  i zdolności do obrotu  $\theta_i$  połączeń oraz identyfikację zachowania się części składowych węzłów w granicznym stanie wyężenia (mechanizmów zniszczenia). Takie badania są jednak bardzo kosztowne. Dlatego też na podstawie wykonanych badań do analiz teoretycznych są stosowane modele aproksymujące krzywe  $M(\theta)$ , prognozujące podatności węzłów.

Eurokod [92] definiując układy prętowe rozróżnia w aspekcie połączeń układy: o węzłach podatnych, sztywnych oraz przegubowych.

Połączenia nominalnie przegubowe powinny być tak zaprojektowane, aby nie przenosiły znacznych momentów zginających, które mogłyby niekorzystnie od-



Rys. 5.5. Ścieżki równowagi śrubowych styków o różnych sztywnościach

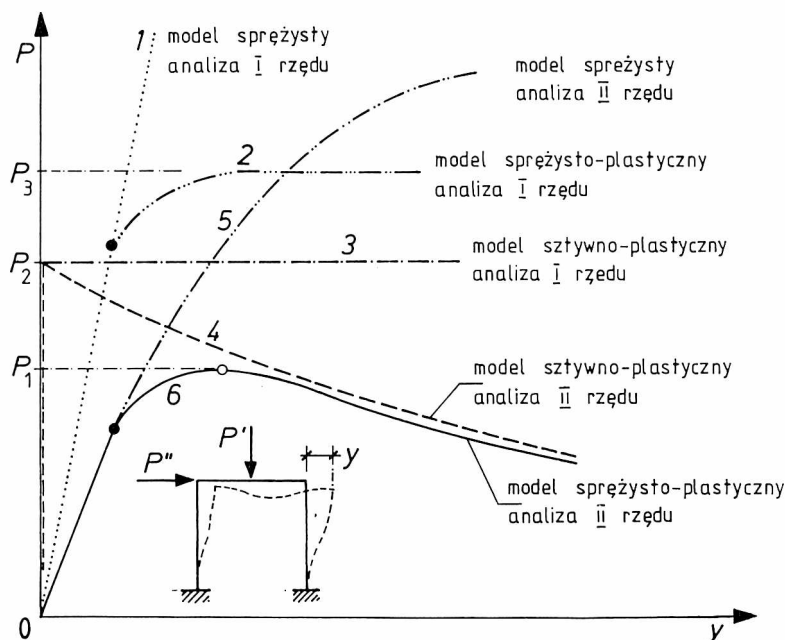
działać na elementy konstrukcji. Zdolność do obrotu połączeń nominalnie przegubowych powinna być wystarczająca do powstania w warunkach obciążeń obliczeniowych wszystkich uwzględnianych w analizie stanu granicznego konstrukcji przegubów plastycznych. Nośność połączenia nominalnie przegubowego  $M_R$  powinna spełniać warunek  $M_R < 0,25M_{pl}$  ( $M_{pl}$  – nośność plastyczna łączonego elementu).

Połączenia sztywne powinny być tak zaprojektowane, aby ich odkształcenia nie miały istotnego wpływu na rozkład sił wewnętrznych w konstrukcji ani na jej globalne odkształcenia. W komentarzu [36] do normy [101] oraz Eurokodzie 3 [92] definiuje się nośność połączeń sztywnych  $M_R$  jako  $M_R \geq 1,2M_{pl}$  ( $M_{pl}$  – nośność plastyczna łączonego elementu), co zapewnia utworzenie się przegubu plastycznego w granicznym stanie wyężenia poza węzeł.

Połączenia nie spełniające wymagań dotyczących połączeń sztywnych lub nominalnie przegubowych należy traktować jako podatne. Nośność obliczeniowa połączeń podatnych  $M_R$  powinna być nie mniejsza od wyznaczonych sił wewnętrznych, jednak może być mniejsza niż nośność łączonych elementów  $M_{pl}$ . Zdolność do obrotu połączenia o niepełnej nośności, występującego w miejscu potencjalnego przegubu plastycznego, powinna być wystarczająca do powstania w warunkach granicznych obciążeń niezbędnego przegubu plastycznego.

### 5.2.4. Ścieżki równowagi statycznej konstrukcji prętowych

Na rys. 5.6 przedstawiono w sposób poglądowy różne ścieżki równowagi statycznej ustrojów prętowych oraz wzajemny stosunek metod analizy konstrukcji, z których się obecnie korzysta. Opisano poszczególne ścieżki równowagi statycznej, podając przyjęte modele materiałowe (sprężysty, sprężysto-plastyczny, sztywno-plastyczny) oraz metody analizy konstrukcji (według teorii I lub II rzędu).



Rys. 5.6. Ścieżki równowagi statycznej konstrukcji prętowych

Analiza sprężysta I rzędu jest oparta na sprężystych, liniowych związkach  $\sigma(\epsilon)$ , w których pomija się geometryczne nieliniowości i związane z tym problemy stateczności. Według tej metody odkształcenia są proporcjonalne do przyłożonych obciążeń, a zasada superpozycji jest przyjmowana do oceny sił wewnętrznych w konstrukcji oraz wyężenia przekrojów. Powszechnie stosowane uproszczone modele obliczeniowe mają na celu skrócenie czasu i pracochłonności analizy bez popełniania niedopuszczalnych błędów oszacowania bezpieczeństwa. Analiza sprężysta I rzędu konstrukcji prowadzi do liniowej ścieżki (zależności obciążenie — przemieszczenie) równowagi statycznej ustroju (oznaczoną linią 1 na rys. 5.6). Z reguły dotyczy ona ustrojów zbudowanych z prętów o przekrojach krępych i grubociennych. Nośność sprężysta konstrukcji w tym modelu jest limitowana formalnie granicą proporcjonalności materiału.

Metoda analizy plastycznej I rzędu posługuje się podobnymi uproszczeniami, jak w modelu analizy sprężystej, lecz uwzględnia nieliniowe związki materiału w granicznym stanie wyężenia przekroju. Metoda ta opiera się na znajomości zachowania się konstrukcji oraz korzyści ekonomicznych wynikających z plastycznej wydłużalności stali i dopuszcza się do częściowego lub całkowitego uplastycznienia prętów lub węzłów. Ścieżkę równowagi statycznej tego modelu analizy konstrukcji oznaczono krzywą 2 na rys. 5.6. Analiza plastyczna umożliwia oszacowanie nośności plastycznej konstrukcji, wyznaczenie kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia (KDMZ) oraz miejsc występowania przekrojów „krytycznych” ustroju.

Te dwie metody nie uwzględniają możliwości utraty stateczności ogólnej prętów lub całego ustroju oraz miejscowej elementów przekrojów poprzecznych prętów. Dlatego też wyniki analiz sprężystych lub plastycznych I rzędu należy uzupełniać o analizę stateczności sprężystej lub niesprężystej. Na rys. 5.6 pokazano rozdzielenie ścieżek równowagi wskutek utraty stateczności konstrukcji  $P(y)$  przy założeniu modelu analizy według teorii I rzędu (linia 3 na rys. 5.6) i teorii II rzędu (krzywa 4 na rys. 5.6), stosowanych do systemów budowanych z materiałów sprężystych i sprężysto-plastycznych.

W dość często spotykanych układach konstrukcyjnych analiza sprężysta I rzędu może prowadzić do błędnej oceny sił wewnętrznych oraz przemieszczeń. Ma to miejsce wtedy, gdy występuje wpływ przemieszczeń na siły wewnętrzne w ustroju. Należy wówczas w szacowaniu nośności konstrukcji uwzględnić nieliniowość geometryczną ustroju i wyznaczać siły przekrojowe z uwzględnieniem zginania II rzędu. Nieliniową ścieżkę równowagi statycznej przy założeniu sprężystego modelu wyężenia materiału i analizie konstrukcji według teorii II rzędu oznaczono na rys. 5.6 krzywą 5.

Teorię I rzędu można stosować w globalnej analizie statycznej dla układów stężonych i układów nieprzechyłowych. Wtedy dodatkowo należy uwzględnić (w sposób pośredni) efekty II rzędu.

W metodzie analizy konstrukcji według zanikającej sztywności przyjmuje się sprężysto-plastyczny model wyężenia materiału, teorię II rzędu przy wyznaczaniu sił wewnętrznych oraz uwzględnia się aktualne charakterystyki sztywnościowe pod narastającym obciążeniem w odniesieniu do stref plastycznych przekrojów prętów. W modelu tym uwzględnia się nieliniowość materiałową i geometryczną, stąd też ścieżka równowagi statycznej konstrukcji jest nieliniowa. Oznaczono ją na rys. 5.6 ciągłą krzywą 6. Należy zaznaczyć, iż taki model stanowi najlepszą aproksymację rzeczywistego wyężenia konstrukcji, ale i zarazem najtrudniejszą w obliczeniach technicznych. Należy go stosować, gdy ustrój jest zbudowany z prętów cienkościennych (klasy 4), a sztywności elementów ( $EJ$ ,  $EA$ ) są funkcjami obciążenia.

Ustroje zarówno statycznie wyznaczalne, jak i statycznie niewyznaczalne, zbudowane z prętów o przekrojach klasy 1 i 2, niewrażliwych na lokalną utratę stateczności (wyłącza się pręty o przekrojach klasy 3 i 4), których ŚRS materiału można opisać modelem sprężysto-plastycznym charakteryzuje zdolność do plastycznego wyrównywania sił w przekrojach (klasy 1 i 2) i między przekrojami krytycznymi (klasy 1). Przyrost obciążeń w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych zbudowanych

z prętów o przekrojach klasy 1 może być przenoszony przez przekroje dotychczas nieuplastycznione. Dlatego też w modelu obliczeniowym statycznie niewyznaczalnych konstrukcji o przekrojach klasy 1 można dopuścić do powstania zbioru przegubów plastycznych, zmieniających ustrój w łańcuch kinematyczny. ŚRS takich konstrukcji można opisać modelem nieliniowo-sprężysto-plastycznym. Obowiązujące przepisy normowe europejskie [89, 90, 92] i krajowe [101] umożliwiają wykorzystanie rezerwy plastycznej konstrukcji.

### 5.2.5. Nośność graniczna prętowych systemów konstrukcyjnych

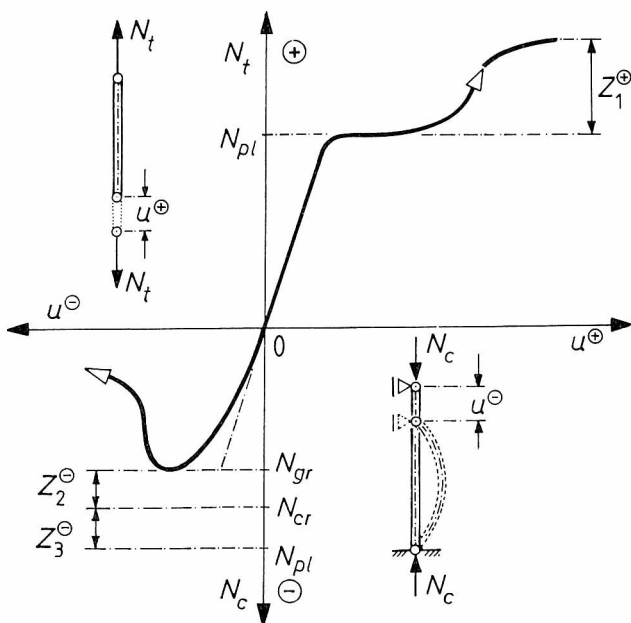
Do zamiany układu prętowego, statycznie wyznaczalnego w układ geometrycznie zmienny wystarcza, aby nastąpiło wyczerpanie nośności jednego dowolnego elementu sprawczego ustroju. Aby taki układ prętowy o jedynie osiowym ( $N$ ) wyężeniu elementów przestał być sprawny, musi wystąpić na przykład w kratownicy wyboczenie pręta ściskanego, rozerwanie pręta rozciąganego lub zniszczenie węzła. W przypadku statycznie wyznaczalnych belek i ram, w prętowych elementach występują przekrojowe siły wewnętrzne  $M$ ,  $N$ ,  $V$  i zmiana ich w mechanizmy polega na wystąpieniu w dowolnym przekroju (w przęśle, w węźle lub w styku) jednego przegubu plastycznego. Oczywiście jest, iż jako pierwszy uszkodzeniu ulegnie element sprawczy, w którym stosunek siły wewnętrznej od obciążeń zewnętrznych działających na ustrój do jego nośności granicznej jest największy (największe wyężenie przekroju).

Układy prętowe statycznie niewyznaczalne tracą nośność, tj. zmieniają się w układy geometrycznie zmiennie wtedy, kiedy wyczerpana zostanie taka liczba elementów sprawczych, która zabezpieczała ich geometryczną niezmiennność. Nośności graniczne oraz ŚRS takich konstrukcji w istotny sposób zależą od ścieżek równowagi granicznej elementów sprawczych po osiągnięciu przez nie ich nośności granicznych.

Ogólnie można wyróżnić dwa typy elementów sprawczych wykonanych z materiału sprężysto-plastycznego: zachowujące swą pełną nośność w stanie granicznym mimo dużych kątów obrotów (pręty zginane klasy 1, rys. 5.1) lub wydłużeń (pręty rozciągane — rys. 5.7) oraz tracące nośność po osiągnięciu ich nośności granicznej (pręty ściskane — rys. 5.7, pręty zginane klas 2, 3, 4 — rys. 5.1).

Pierwsze z nich po osiągnięciu ich nośności granicznych charakteryzuje pozioma (rys. 5.3 — linia 3), drugie zaś opadająca (rys. 5.3 — linia 6, 7) ścieżka równowagi statycznej. Przykładem odmiennego zachowania się elementu po osiągnięciu nośności granicznej są pręty obciążone siłą podłużną (rys. 5.7), o różnych ścieżkach równowagi przy ściskaniu i rozciąganiu. Rozciągane pręty ze stali sprężysto-plastycznej po osiągnięciu nośności plastycznej zachowują swą nośność i w tej fazie wyężenia charakteryzowane są poziomą ŚRS. Elementy ściskane po osiągnięciu nośności granicznej tracą zdolność przenoszenia przyłożonych do nich obciążeń.

W granicznym stanie wyężenia rozciągane lub zginane pręty o przekrojach klasy 1 zachowują swą nośność, tworząc przeguby *czynne*, gdyż są zdolne przenosić



Rys. 5.7. ŚRS pręta obciążonego siłą podłużną

dotychczasowe ich wyężenie. Pręty ściskane oraz pręty, których ściskane ścianki są niestacyczne, po uformowaniu się przegubów plastycznych tracą na nośności tworząc przeguby *bierne*. Zmniejszanie się nośności przegubu plastycznego po jego uformowaniu się sprawia, iż w konstrukcji statycznie niewyznaczalnej możliwy jest niemal równoczesny przebieg zjawiska wyczerpywania się nośności przekrojów krytycznych. Teoretycznie możliwa jest również inna forma wyczerpania nośności konstrukcji o elementach sprawczych zmniejszających swą nośność po osiągnięciu granicznej nośności, gdyż konstrukcja może mieć duże zapasy nośności przekrojów dotychczas nieuplastycznionych. Takie sytuacje projektowe są jednak bardzo rzadkie.

W zginanych statycznie wyznaczalnych konstrukcjach zbudowanych z prętów krępych klasy 1 powstanie przegubu plastycznego w dowolnym przekroju zmienia je w układy geometrycznie zmienne. Zysk  $(\alpha - 1)$  ze stosowania teorii plastyczności w takiej sytuacji sprowadza się do wykorzystania rezerwy plastycznej jednego przekroju ( $\alpha$  — współczynnik rezerwy plastycznej).

W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych zyski ze stosowania teorii plastyczności są większe i wynikają z możliwości wystąpienia zbioru przegubów plastycznych zmieniających ustrój w mechanizm.

Projektując konstrukcję statycznie niewyznaczalną, z warunku jedynie sprężystego wyężenia materiału żąda się, aby nośności przekrojów prętów  $M_{el,i}$  w stosunku do ekstremalnych sił wewnętrznych od obciążeń zewnętrznych  $M_{max,i}$  spełniały zależność

$$\frac{M_{max,i}}{M_{el,i}} \leq 1. \quad (5.1)$$

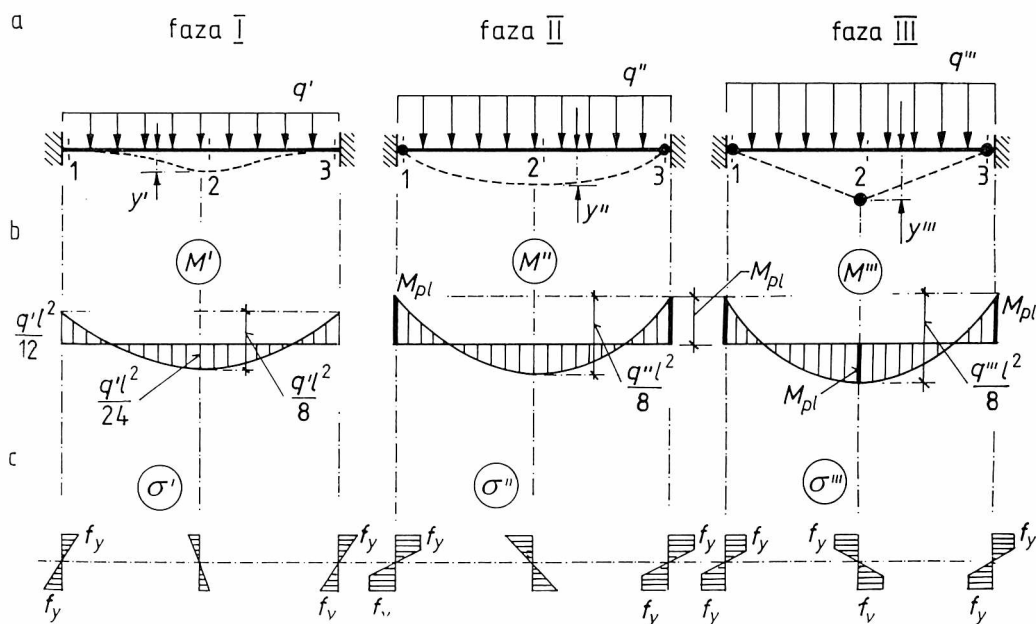


Dla konstrukcji budowanych z prętów o stałym przekroju poprzecznym klasy 1 (np. wieloprzęśłowe belki statycznie niewyznaczalne) przyjmuje się przekrój poprzeczny ustroju z warunku ekstremalnego wyężenia sprężystego materiału w przekroju, w którym powstają maksymalne siły wewnętrzne. Należy zauważyć, iż wtedy istnieją rezerwy nośności plastycznej w przekrojach krytycznych (sprawczych), a ponadto są również rezerwy wynikające z plastycznej redystrybucji sił przekrojowych pomiędzy przekrojami krytycznymi.

Projektowanie konstrukcji statycznie niewyznaczalnych z uwzględnieniem rezerwy plastycznej przekrojów polega na dopuszczeniu do tworzenia się przegubów plastycznych zginanych przekrojów ustroju, aż do zamiany go w mechanizm. Dla konstrukcji statycznie niewyznaczalnych rezerwy nośności ustroju wynikają z plastycznej redystrybucji naprężeń w przekrojach oraz plastycznej redystrybucji sił wewnętrznych między przekrojami krytycznymi. Redystrybucja ta przebiega między przekrojami sprawczymi ustroju, występującymi w minimalnym krytycznym zbiorze (MKZ) elementów sprawczych. Minimalny krytyczny zbiór (MKZ) to taki, w którym, jeśli choć jeden element jest sprawny, to cały zbiór jest sprawny [40].

Powyższe zagadnienie analizowane będzie na przykładzie belki obustronnie sztywno zamocowanej na końcach, obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem poprzecznym, pokazanej na rys. 5.8.

Przy wzrastającym monotonicznie obciążeniu można wyróżnić trzy fazy wyężenia belki. Wyróżnienie faz wyężenia ustroju ma na celu ilościową interpretację



Rys. 5.8. Wykresy momentów zginających (b) oraz rozkłady naprężeń w przekrojach (c) belki statycznie niewyznaczalnej (a) w sprężystej i pozasprężystej fazie obciążenia

nośności plastycznej konstrukcji statycznie niewyznaczalnej. W rzeczywistości proces tworzenia się przegubów plastycznych w takiej konstrukcji odbywa się równocześnie. Przedstawione niżej podejście wyróżniania faz tworzenia się przegubów plastycznych jest wygodne w analizach numerycznych szacowania obciążeń granicznych ustroju. Ponadto w prezentowanej analizie zastosowano uproszczone podejście zakładając, iż przekrojowe siły poprzeczne w belce  $V$  nie redukują jej nośności plastycznej na zginanie  $M_{pl} = M_{pl,V}$ . W rzeczywistości wyczerpanie nośności przekroju krytycznego (powstanie przegubu plastycznego) następuje w wyniku współdziałania sił przekrojowych  $(M, N, V)_{gr}$ .

W fazie I (sprężystej) ekstremalne wyężenie belki pokazanej na rys. 5.8 powstaje w przekrojach podporowych 1 i 3, a nośność sprężystą konstrukcji mierzoną obciążeniem  $q'$  wyznacza się z warunku  $\sigma = f_y$  sprężystego rozkładu naprężeń w przekroju (patrz rys. 5.8c), która wynosi

$$q' l^2/12 = W f_y, \quad (5.2)$$

$$q' = 12 W f_y / l^2, \quad (5.3)$$

gdzie:

$W$  – sprężysty wskaźnik zginania przekroju pręta,

$f_y$  – granica plastyczności stali,

$l$  – rozpiętość belki,

$q'$  – obciążenie równomiernie rozłożone.

W fazie II, przy wzrastającym obciążeniu belki, przekroje przypodporowe 1 i 3 (gdzie występują ekstremalne momenty zginające) wchodzą w obszar wyężenia pozasprężystego i rozpoczyna się proces redystrybucji uogólnionych sił między przekrojami krytycznymi (tworzą się przeguby plastyczne). Skutkuje to zwiększeniem przyrostu przemieszczeń belki, co pokazano na rys. 5.8a – faza II. Proces kończy się utworzeniem się przegubów plastycznych w przekrojach 1, 2 i 3, które powodują zmianę ustroju w mechanizm. Nośność graniczną mierzoną obciążeniem poprzecznym  $q'''$  wyznacza się jak dla belki statycznie wyznaczalnej, zakładając, że znane są momenty plastyczne w przekrojach krytycznych, w następujący sposób

$$q''' l^2/8 = 2 M_{pl} = 2 W_{pl} f_y, \quad (5.4)$$

$$q''' = 16 W_{pl} f_y / l^2, \quad (5.5)$$

gdzie  $W_{pl}$  jest plastycznym wskaźnikiem zginania przekroju pręta.

Należy zauważyć, że w analizowanym przykładzie zginania poprzecznego stosunek nośności plastycznej do nośności sprężystej analizowanej belki, mierzony poprzecznym obciążeniem plastycznym w stosunku do sprężystego obciążenia, wynosi

$$\frac{q'''}{q'} = \frac{16}{12} \frac{W_{pl}}{W} = \frac{16}{12} \alpha, \quad (5.6)$$

i składa się z części 16/12, która wyraża zmianę schematu statycznego związaną z redystrybucją sił wewnętrznych i składnika  $W_{pl}/W$  opisującego wykorzystanie plastycznej rezerwy nośności przekroju  $\alpha$ , tj. współczynnika rezerwy plastycznej.

W ustrojach statycznie wyznaczalnych można w obliczeniach jedynie uwzględnić utworzenie się jednego przegubu plastycznego, a współczynnik rezerwy plastycznej wynosi  $\alpha = W_{pl}/W$ . W ustrojach statycznie niewyznaczalnych można wykorzystać dodatkowo rezerwy plastyczne wynikające z redystrybucji sił między przekrojami krytycznymi. Wówczas wzrost nośności plastycznej w stosunku do nośności sprężystej konstrukcji wynika z geometrii (kształtu) przekrojów poprzecznych prętów, co wyraża współczynnik rezerwy plastycznej  $\alpha$ , oraz ze schematu statycznego, charakteryzowanego minimalnym zbiorem elementów sprawczych (MKZ) badanego ustroju.

Dla dwuteowego przekroju analizowanej belki pokazanej na rys. 5.8 stosunek nośności plastycznej do nośności sprężystej (przyjęto  $\alpha = 1,17$ ), mierzonej obciążeniem poprzecznym wynosi  $q'''/q' = (16/12) \times 1,17 = 1,56$ .

Przedstawiona analiza pozasprężystego wyłączenia belki obustronnie zamocowanej ma charakter uproszczony, gdyż założono, że siły poprzeczne ( $V$ ) nie zmniejszają nośności przekroju na zginanie. W ogólnym przypadku, z powodu złożonego stanu wyłączenia przekroju zginanego ( $M$ ,  $N$ ,  $V$ ) wyznacza się zredukowaną nośność plastyczną na zginanie  $M_{pl,N,V}$ . Ponadto w fazie tworzenia się przegubu plastycznego w przekroju występuje pod obciążeniem skupionym tzw. jądro sprężyste, zwiększające nośność plastyczną belki.

Z badań wynika, iż proces formowania się przegubów plastycznych w ustroju jest zazwyczaj równoczesny, a ścieżki równowagi ustroju są funkcjami nieliniowymi [10]. O kolejności wyczerpywania się nośności przekrojów krytycznych w minimalnych krytycznych zbiorach konstrukcji można mówić w przypadku przekrojów klasy 2, w których można przyjąć, że „powstają” quasi-przeguby plastyczne w przypadku uplastycznienia się pasów.

Reasumując rozważaną analizę nośności konstrukcji, należy stwierdzić, że efekty ekonomiczne (mierzone wzrostem obciążeń ustroju) przy wykorzystaniu plastycznej rezerwy są zdecydowanie większe dla konstrukcji statycznie niezwyeczalnych niż dla ustrojów statycznie wyznaczalnych.

W klasycznym sprężystym podejściu do wymiarowania wytrzymałościowego konstrukcji stalowych wyznacza się siły przekrojowe w sprężystym zakresie obciążenia ustroju i sprawdza się stopień wykorzystania nośności przekrojów ekstremalnie wyłączonego dla sprężystego rozkładu naprężeń. Osiągnięcie w skrajnych włóknach przekroju krępego klasy 1 i 2 wytrzymałości obliczeniowej materiału nie wyczerpuje nośności elementu. Aby nastąpiło zniszczenie konstrukcji, musi przekształcić się ona częściowo lub jako całość w łańcuch kinematyczny. Dlatego też warunek wytrzymałościowy w przypadku uwzględnienia rezerwy plastycznej sprowadza się do wykazania, że pod żadną kombinacją obciążeń obliczeniowych konstrukcja jako całość lub jej część nie może przekształcić się w łańcuch kinematyczny. Nośność graniczną konstrukcji mierzy się wówczas obciążeniem, które powoduje zamianę jej w mechanizm. Takie podejście do obliczania płaskich konstrukcji stalowych (belek, ram) dopuszczają normy projektowania [89, 90, 92, 101] z wyłączeniem belek podsuwnicowych, belek hybrydowych, belek ażurowych, belek o przekrojach cienkościennych, a także konstrukcji narażonych na obciążenie dynamiczne, sejsmiczne i szkody górnicze.

W metodzie nośności granicznej konstrukcji (z wykorzystaniem rezerwy plastycznej przekrojów) przyjmuje się następujące założenia:

- obciążenie, przy którym tworzy się tyle przegubów plastycznych, ile elementów sprawczych (krytycznych) jest w minimalnym krytycznym zbiorze (MKZ), przyjmuje się jako nośność graniczną ustroju;
- ustrój pozostaje w równowadze, aż do utworzenia się wszystkich przegubów plastycznych w MKZ;
- obciążenia lub ich składowe leżą w głównych środkowych płaszczyznach bezwładności przekroju.

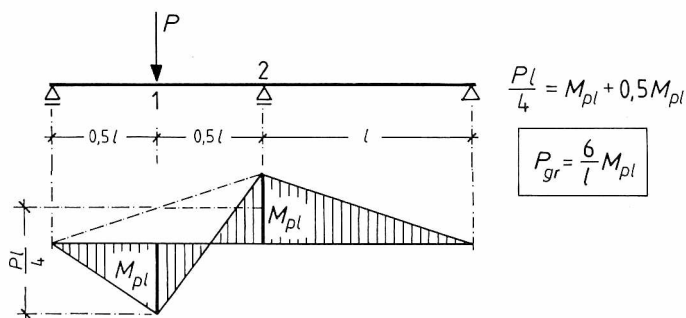
Stosuje się następujące metody obliczeniowe konstrukcji z uwzględnieniem plastycznej rezerwy przekrojów.

**Metoda statyczna** [10] polega na znalezieniu dla przyjętych obciążeń obliczeniowych takiego największego pola momentów, przy którym są spełnione warunki równowagi wewnętrznej i nie jest przekroczony w żadnym przekroju krytycznym moment graniczny ( $M \leq M_{pl}$ ). W procedurze obliczeniowej metody statycznej wyznaczania nośności granicznej wyróżnia się następujące fazy:

- ustalenie miejsc i liczby przegubów plastycznych (elementów sprawczych) oraz liczby minimalnych krytycznych zbiorów;
- określenie tylu równań równowagi, ile jest przegubów plastycznych;
- znalezienie wartości nadliczbowych oraz określenie momentów w funkcji obciążeń obliczeniowych i sztywności prętów.

Metoda ta jest stosowana, gdy jednoznacznie można określić miejsca występowania przegubów plastycznych, a więc dla prostych konstrukcji, o mało skomplikowanych schematach statycznych i schematach obciążeń (o małej liczbie minimalnych krytycznych zbiorów elementów sprawczych).

Na rys. 5.9 pokazano przykład wyznaczenia obciążenia granicznego belki dwuprzęsłowej, obciążonej siłą skupioną  $P$  w środku rozpiętości w jednym przęśle. Zakładając, iż w stanie granicznym nośności powstaną przeguby nad podporą środkową i pod obciążeniem skupionym, z równania równowagi wyznaczono  $P_{gr}$ , mierzone nośnością plastyczną przekroju zginanego  $M_{pl}$ .



Rys. 5.9. Przykład wyznaczania nośności granicznej metodą statyczną

**Metoda kinematyczna** [10] polega na badaniu energii rozproszonej w sztywno-plastycznym modelu konstrukcji przy tworzeniu się kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia (KDMZ). Rozwiązanie uzyskuje się metodą prac przygotowanych, porównując pracę sił wewnętrznych z pracą sił zewnętrznych

$$\sum_i M_{pl} \theta = \sum_j (Py + M\varphi + qu), \quad (5.7)$$

gdzie:

- $M_{pl}$  — moment plastyczny w  $i$ -tym przekroju,
- $\theta$  — kąt obrotu  $i$ -tego przekroju uplastycznionego,
- $P, M, q$  — obciążenia zewnętrzne w  $j$ -tym punkcie,
- $y, u, \varphi$  — przemieszczenia i obroty wywołane obciążeniami zewnętrznymi  $P, M, q$  w  $j$ -tym punkcie.

W konstrukcji może wystąpić kilka alternatywnych kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia ustroju. Z otrzymanego zbioru rozwiązań (dla każdego kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia) wybiera się to, które daje najmniejsze obciążenie. Aby rozwiązać układ statyczny metodą kinematyczną, należy:

- wyznaczyć KDMZ stowarzyszone z założonym obciążeniem systemu;
- ustalić miejsca i ilości przegubów plastycznych (elementów sprawczych) oraz liczbę minimalnych krytycznych zbiorów (MKZ);
- określić kąty obrotów w przegubach plastycznych stowarzyszone z przemieszczeniami prętów w każdym MKZ;
- wyznaczyć obciążenie graniczne z (5.7) dla każdego mechanizmu (MKZ), a następnie  $\min/\max (P, M, q)_{gr}$ .

W analizie stanów granicznych ustrojów prętowych należy badać wszystkie potencjalne kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia konstrukcji. Aby uniknąć pominięcia ważnego mechanizmu zniszczenia, który dałby najmniejsze obciążenie graniczne, należy systematycznie przeszukiwać MKZ. Następnie, po uzyskaniu rozwiązania, należy sprawdzić czy stowarzyszone rozkłady sił wewnętrznych spełniają warunki równowagi i warunki plastyczności. Należy nadmienić, że rozwiązania kinematyczne dają oszacowania nośności od góry.

Metoda kinematyczna pozwala analizować stosunkowo złożone ustroje z pominięciem klasycznej statyki ustrojów. Staje się jednak mało użyteczna, gdy na uplastycznienie przekroju wpływ ma nie tylko moment  $M$ , ale i siła podłużna  $N$  oraz poprzeczna  $V$  (zachodzi wówczas potrzeba wyznaczenia tych sił w granicznym stanie obciążenia według odrębnych procedur obliczeniowych). Zarówno w metodzie statycznej, jak i kinematycznej wyznacza się stosunkowo łatwo obciążenie graniczne, przy którym następuje całkowite zniszczenie ustroju. Brak jednak jest informacji o pośrednich fazach jego wyczerpania, tj. przed zamianą konstrukcji w mechanizm.

Sposób wyznaczania nośności granicznej ustroju metodą kinematyczną pokazano w przykładzie 5.5 (rys. 5.27). Rozpatrzono ramę jednokomorową, trzykrotnie statycznie niewyznaczalną, obciążoną pionową siłą  $2P$  w środku rozpiętości rygła oraz siłą poziomą  $P$  przyłożoną w miejscu połączenia rygła ze słupem. Przekrój słupa i rygła ma nośność plastyczną mierzoną momentem zginającym  $M_{pl}$ . Dla

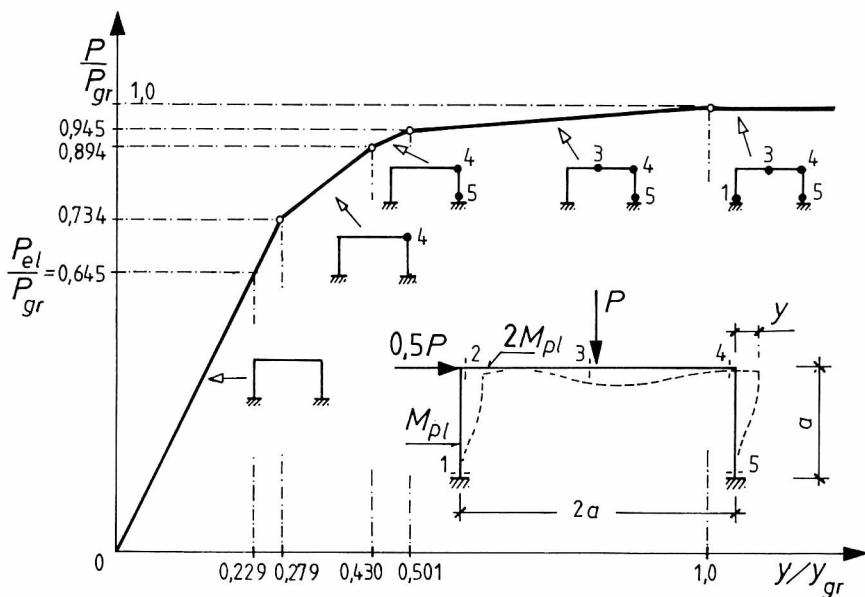
tego schematu statycznego ramy wyróżniono trzy mechanizmy zniszczenia: belkowy, słupowy oraz stanowiący kombinację mechanizmu słupowego i belkowego (kropkami oznaczono na rys. 5.27 przeguby plastyczne).

Minimalną nośność graniczną tej ramy uzyskano dla schematu stanowiącego kombinację belkowego i przechyłowego mechanizmu zniszczenia.

**Metoda „rozwiązań sprężystych”** [10] (metoda przyrostowa) polega na kolejnym zmniejszeniu stopnia statycznej niewyznaczalności układu, przez wprowadzanie w miejsce największych momentów kolejnych przegubów plastycznych, aż do uzyskania układu geometrycznie zmiennego. Tak więc, aby rozwiązać układ statycznie niewyznaczalny należy:

- rozwiązać układ statyczny sprężysty;
- ustalić liczbę  $(n + 1)$  przegubów plastycznych ( $n$  – stopień statycznej niewyznaczalności) niezbędnych do zmiany konstrukcji w mechanizm;
- wprowadzać kolejno w miejsce największych momentów zginających przeguby plastyczne i rozwiązywać każdorazowo, o jeden stopień statycznej niewyznaczalności niższy układ statyczny, przyjmując w przegubach plastycznych stałe momenty  $M_{pl}$ .

W metodzie „rozwiązań sprężystych” do analiz statycznych układów prętowych można zastosować metodę: sił, przemieszczeń, Crossa, a przede wszystkim skorzystać z programów komputerowych. W tej metodzie uzyskuje się pełną informację o momentach zginających, siłach przekrojowych poprzecznych oraz osiowych i tworzących się przegubach, a także przemieszczeniach w każdej fazie obliczeń ustroju. Stanowi to niewątpliwie zaletę tej metody.



Rys. 5.10. Odcinkowo zlinearyzowana ścieżka równowagi statycznej ramy portalowej

Przykład ścieżki równowagi statycznej (odcinkowo zlinearyzowanej) ramy portalowej obciążonej siłą skupioną w środku rygla (o nośności  $2M_{pl}$ ) i przy połączeniu rygla ze słupem (o nośności  $M_{pl}$ ), wyznaczoną metodą „rozwiązań sprężystych” pokazano na rys. 5.10. Oznaczając kropkami przeguby plastyczne pokazano kolejne fazy wyłączenia ustroju i odpowiadające im schematy statyczne.

**Metoda wyrównywania momentów** [10] ma zastosowanie do rozwiązywania układów ortogonalnych i przypomina w pewnym sensie metodę Crossa (inaczej rozprowadza się momenty). W metodzie tej przyjmuje się jakikolwiek rozkład momentów spełniających warunki równowagi i poszukuje się innego pola, charakteryzującego się niższymi wartościami momentów ekstremalnych, ale zapewniających równowagę. Procedura obliczeniowa w tej metodzie jest następująca:

- dla wszystkich obciążonych elementów wyznacza się pola momentów, które spełniają równanie równowagi z wyjątkiem równowagi węzłów;
- doprowadza się węzły do równowagi, zaczepiając tam odpowiednie przyrosty momentów;
- wprowadzone przyrosty momentów rozprowadza się w konstrukcji bez naruszania zasad równowagi.

**Obliczanie przez programowanie liniowe** [10]. Dostępne programy komputerowe statycznej analizy konstrukcji prętowych umożliwiają poszukiwanie obciążenia prowadzącego do zamiany ustroju w mechanizm za pomocą programowania liniowego. Możliwe jest zatem rozwiązywanie konstrukcji złożonych oraz uwzględnienie łącznego działania w przekroju momentu zginającego, siły podłużnej i siły poprzecznej.

### 5.3. Minimalne krytyczne zbiory elementów stowarzyszone z mechanizmami zniszczenia konstrukcji

Analiza ustroju w stanie granicznym nośności konstrukcji prętowych polega na badaniu stanu związanego z jego transformacją w mechanizm (zmianą w łańcuch kinematyczny). Mechanizmy zniszczenia konstrukcji prętowych wyznacza się na podstawie analizy ich schematu statycznego, tj. geometrii systemu, zidentyfikowanych modeli połączeń prętów w węzłach i podporach szkieletu nośnego oraz zbioru obciążeń oddziałujących na ustrój.

W prętowej konstrukcji można wyróżnić elementy lub przekroje, których wyczerpanie nośności może docelowo doprowadzić do geometrycznej zmienności badanego ustroju. Wyróżnione elementy lub przekroje ustroju, nazwane elementami sprawczymi (krytycznymi), ustala się na podstawie wstępnej analizy statycznej konstrukcji. Są to zazwyczaj przekroje maksymalnie wyłączone w ustroju. W nich najczęściej należy spodziewać się ekstremalnych sił wewnętrznych. Pręty ściskane należy podawać odrębnej analizie.



Nośności graniczne elementów sprawczych konstrukcji są funkcjami losowymi  $N(\omega)$ . Generalnie elementami sprawczymi są części konstrukcji (przekrój, węzeł, styk, pręt), o losowych nośnościach, których niezawodność można badać niezależnie. Konstrukcję w sensie probabilistycznym traktuje się jako zbiór elementów sprawczych o losowych właściwościach.

Badania transformacji układu z bezpiecznego w mechanizm mają na celu ustalenie kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia – KDMZ ustroju.

Każdemu kinematycznie dopuszczalnemu mechanizmowi zniszczenia konstrukcji można przyporządkować minimalny krytyczny zbiór elementów sprawczych, nazwany w skrócie MKZ. Minimalny krytyczny zbiór to taki, w którym, jeśli choć jeden element sprawczy jest sprawny, to cały zbiór jest sprawny (konstrukcja jest zdolna przenosić działające na nią obciążenie). Wyczerpanie nośności wszystkich elementów sprawczych wchodzących w skład MKZ sprawia, iż konstrukcja przekształca się w ustrój geometrycznie zmienny.

Zagadnienie identyfikacji mechanizmów zniszczenia konstrukcji stowarzyszonych z minimalnymi krytycznymi zbiorami będzie analizowane na przykładach ustrojów nośnych przedstawionych na rys. 5.11.

Na rys. 5.11a i b pokazano schemat belki (statycznie niewyznaczalnej), w której wytypowano 3 elementy sprawcze. Jeśli obciążenie będzie przyłożone na końcu wspornikowej części belki (rys. 5.11a), to mechanizm jej zniszczenia polega na uplastycznieniu się tylko jednego przekroju (występuje jeden element sprawczy). Dla takiego schematu obciążenia belki występuje tylko jeden kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia (1 KDMZ), któremu przyporządkowano jeden minimalny krytyczny zbiór (MKZ<sub>1</sub>), o liczebności elementów sprawczych  $l = 1$ .

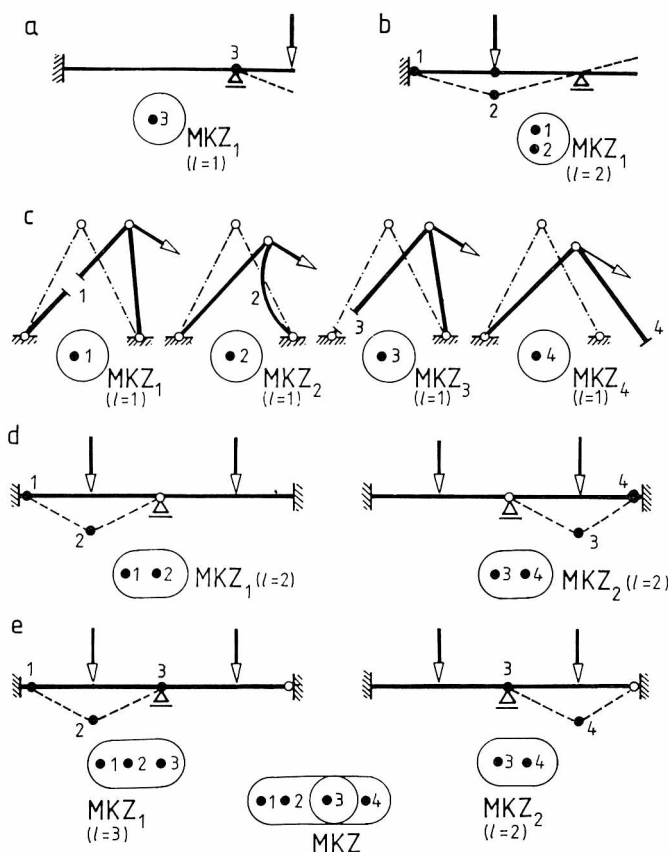
W przypadku zmiany schematu obciążenia belki (rys. 5.11b) w badanej konstrukcji można wytypować dwa elementy sprawcze (uplastycznione przekroje 1 i 2) i jednemu kinematycznie dopuszczalnemu mechanizmowi zniszczenia ustroju (1 KDMZ), odpowiada jeden minimalny krytyczny zbiór (MKZ<sub>1</sub>), o liczebności elementów sprawczych  $l = 2$ .

Dla ustroju pokazanego na rys. 5.11c założono, iż elementami sprawczymi mogą być pręty: rozciągany (1) i ściskany (2) oraz połączenia z podporami (3, 4). W tej konstrukcji występują 4 elementy sprawcze, a warunkiem wystąpienia mechanizmu zniszczenia ustroju jest wyczerpanie nośności dowolnego tylko 1 elementu sprawczego. W rozważanej konstrukcji mogą wystąpić cztery kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia (4 KDMZ), którym odpowiadają cztery minimalne krytyczne zbiory (MKZ<sub>1</sub>, MKZ<sub>2</sub>, MKZ<sub>3</sub>, MKZ<sub>4</sub>), a każdy z tych zbiorów jest o liczebności elementów sprawczych  $l = 1$ .

Na rys. 5.11d pokazano schemat belki, w której również wyróżniono cztery elementy sprawcze (przeguby plastyczne), lecz mogą w tym przypadku wystąpić tylko dwa kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia (2 KDMZ). Belkę tę można scharakteryzować dwoma minimalnymi krytycznymi zbiorami elementów sprawczych: MKZ<sub>1</sub> i MKZ<sub>2</sub>, o jednakowej liczebności elementów sprawczych  $l = 2$ .

Dwóm kinematycznie dopuszczalnym mechanizmom zniszczenia (2 KDMZ) belki pokazanej na rys. 5.11e, należy przyporządkować dwa minimalne krytyczne





Rys. 5.11. Identyfikacja mechanizmów zniszczenia konstrukcji stowarzyszonych z minimalnymi krytycznymi zbiorami

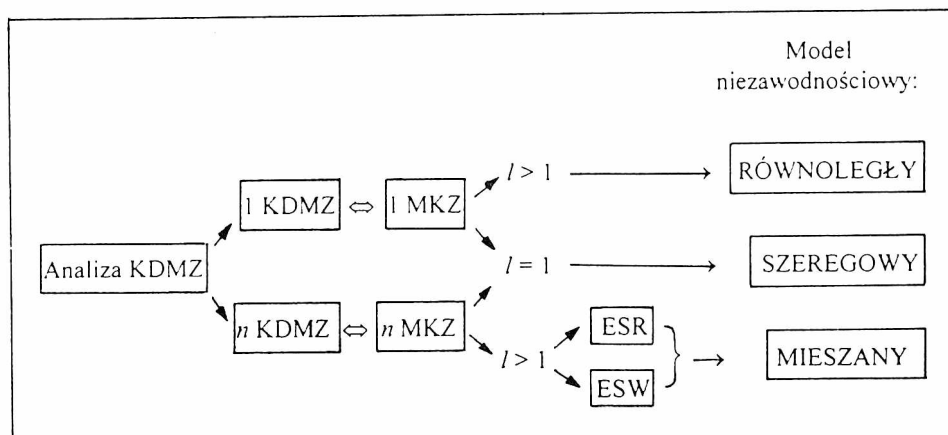
zbiory elementów sprawczych:  $MKZ_1$ ,  $MKZ_2$ . Jednak w tym przypadku minimalne krytyczne zbiory elementów sprawczych są o różnej liczebności:  $MKZ_1 - l = 3$ ,  $MKZ_2 - l = 2$ . Ponadto element sprawczy (3), tzn. przegub plastyczny nad podporą środkową belki, jest wspólnym elementem  $MKZ_1$  i  $MKZ_2$  (wchodzi w skład obu minimalnych krytycznych zbiorów).

Przedstawione na rys. 5.11 rodzaje konstrukcji charakteryzuje różna liczba ( $n$ ) minimalnych krytycznych zbiorów ( $MKZ_1$ ,  $MKZ_2$ , ...,  $MKZ_n$ ) o różnej liczebności ( $l_i$ ) elementów sprawczych (ES), które mogą być rozseparowane (ESR) bądź wspólne (ESW) dla wielu minimalnych krytycznych zbiorów.

Na rys. 5.12 pokazano schemat podziału prętowych konstrukcji pod względem rodzajów minimalnych krytycznych zbiorów ich liczby oraz liczebności elementów sprawczych w MKZ i wzajemnego sprzężenia elementów sprawczych w ustroju.

Analiza konstrukcji według schematu blokowego pokazanego na rys. 5.12 umożliwia identyfikację typu modelu niezawodności ustroju prętowego (zagadnienie omówione w rozdziale 5.4).

Uszeregowanie istotności elementów sprawczych w prętowym systemie konstrukcyjnym (ich znaczenia i oddziaływania na nośność graniczną ustroju) uzyskuje się, przyporządkowując im wagi  $a_i$ , które definiuje się jako stosunek siły wewnętrznej w tym elemencie do obciążenia zewnętrznego ustroju.

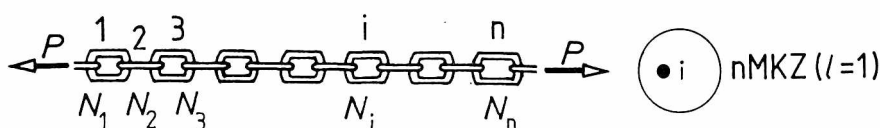


Rys. 5.12. Identyfikacja modeli niezawodnościowych konstrukcji prętowych

## 5.4. Dyskretne modele niezawodności konstrukcji

Analizowane będą systemy konstrukcyjne, budowane z materiałów sprężysto-plastycznych. W celu identyfikacji modelu niezawodnościowego konstrukcji prętowej należy analizować jej budowę strukturalną, tj. sprzężenie (wzajemne relacje) elementów sprawczych w systemie nośnym. W teorii niezawodności konstrukcji wyróżnia się trzy modele sprzężeń elementów: szeregowy, równoległy i mieszany.

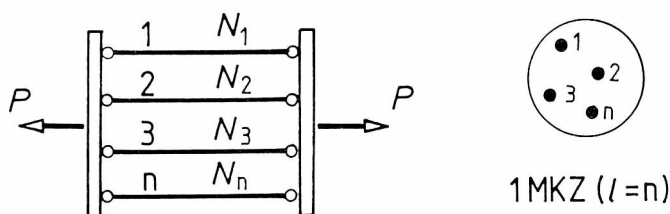
Mianem konstrukcji szeregowo złożonych z elementów sprawczych określa się układ, który ulega awarii wówczas, gdy choć jeden element sprawczy tej konstrukcji zostanie zniszczony [39, 40]. Schemat ideowy niezawodności takiej konstrukcji przedstawia model rozciąganego łańcucha, składającego się z  $n$  ogniw, pokazany



Rys. 5.13. Schemat ideowy szeregowego modelu niezawodności konstrukcji

na rys. 5.13. Wyczerpanie nośności dowolnego jednego  $i$ -tego ogniwa łańcucha o nośności granicznej  $N_i$  sprawia, iż urządzenie przestaje spełniać swą funkcję konstrukcyjną. Są to więc konstrukcje, w których nośność graniczną systemu wyznacza najsłabsze ogniwo (dla łańcucha prostego pokazanego na rys. 5.13, przyjęto jednakowe wagi elementów sprawczych  $a_i = 1$ ). Liczebność minimalnego krytycznego zbioru  $l$ , konstrukcji składającej się z  $n$  elementów sprawczych połączonych szeregowo w modelu niezawodnościowym wynosi  $l = 1$ , liczba minimalnych krytycznych zbiorów zaś jest równa liczbie elementów sprawczych  $n$ .

Mianem konstrukcji równoległe złożonej z elementów określa się układ, który ulega awarii tylko wtedy, gdy zostanie wyczerpana nośność wszystkich jego elementów sprawczych, wchodzących w skład minimalnego krytycznego zbioru [40].



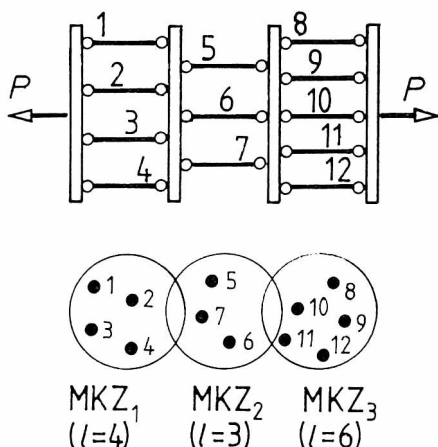
Rys. 5.14. Schemat ideowy równoległego modelu niezawodności konstrukcji

Schemat ideowy takiego modelu niezawodnościowego urządzenia jest przedstawiany w postaci wiązki  $n$  prętów równoległe rozciąganych (rys. 5.14). W tym przypadku, aby konstrukcja zmieniła się w mechanizm, zniszczeniu muszą ulec wszystkie rozciągane pręty. W skład minimalnego krytycznego zbioru konstrukcji o równoległym modelu niezawodnościowym wchodzi  $l > 1$  elementów sprawczych. Dla konstrukcji o takim modelu niezawodnościowym występuje jeden minimalny krytyczny zbiór elementów sprawczych (1 MKZ), a jego liczebność  $l$  jest równa liczbie  $n$  wytypowanych w urządzeniu elementów sprawczych  $l = n$ . Cechą wyróżniającą losową nośność konstrukcji zbudowanej z elementów sprawczych (wykonanych z materiału sprężysto-plastycznego), połączonych równoległe z punktu widzenia teorii niezawodności jest wagowe sumowanie się nośności granicznej elementów sprawczych.

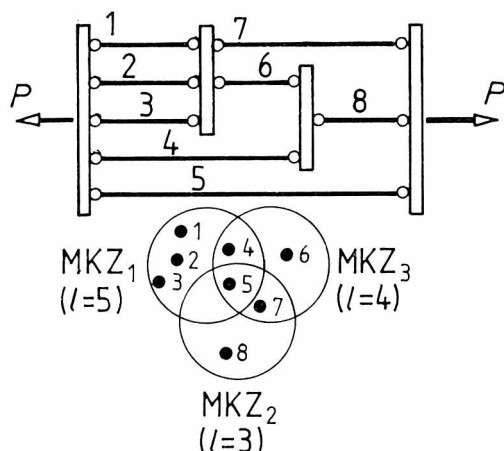
Mieszane modele niezawodnościowe stanowią kombinację dwóch podstawowych modeli, to jest szeregowego i równoległego. Schematy ideowe modeli niezawodnościowych takich systemów konstrukcyjnych pokazano na rys. 5.15 i na rys. 5.16.

Na rys. 5.15 pokazano szeregowie sprzężenie zbiorów o równoległych połączeniach elementów sprawczych. W tym przypadku minimalne krytyczne zbiory MKZ<sub>*j*</sub>, o liczebnościach elementów sprawczych  $l_j > 1$  (o równoległym modelu niezawodnościowym), są  $i$ -tymi ogniwami szeregowego modelu globalnego.

Na rys. 5.16 pokazano model niezawodnościowy konstrukcji o równoległym, związanym sprzężeniu elementów sprawczych. W konstrukcjach o takim mieszanym modelu niezawodnościowym występują elementy sprawcze urządzenia, które są wspólne dla wielu minimalnych krytycznych zbiorów.



Rys. 5.15. Schemat ideowy szeregowego sprzężenia zbiorów o równoległych połączeniach elementów sprawczych



Rys. 5.16. Schemat ideowy sprzężenia zbiorów o równoległych połączeniach elementów sprawczych z elementami wspólnymi

W celu identyfikacji typu modelu niezawodnościowego konstrukcji (rys. 5.12) należy wytypować jej elementy sprawcze, a następnie określić kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia badanego ustroju. Przyporządkowanie kinematycznie dopuszczalnym mechanizmom zniszczenia konstrukcji minimalnych krytycznych zbiorów, analiza ilości MKZ-tów i ilości oraz powiązań elementów sprawczych w systemie umożliwia określenie modelu niezawodnościowego badanego ustroju.

Typ połączeń elementów sprawczych w systemie (schemat budowy strukturalnej konstrukcji) będzie się wyznaczać na podstawie związków występujących między losowym obciążeniem a losowym stanem granicznym elementów. Na tej podstawie można podzielić układy konstrukcyjne na systemy:

1) złożone z  $n$  elementów sprawczych połączonych szeregowo, charakteryzujące się tym, że w konstrukcji występuje tyle kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia, ile jest elementów w systemie ( $nMKZ$ ), a liczebność każdego minimalnego krytycznego zbioru  $l = 1$ ;

2) złożone z  $l > 1$  elementów sprawczych połączonych równolegle, charakteryzujące się tym, że w konstrukcji występuje tylko jeden kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia ustroju (jeden minimalny krytyczny zbiór elementów sprawczych: 1 MKZ), a liczebność minimalnego krytycznego zbioru wynosi  $l > 1$ ;

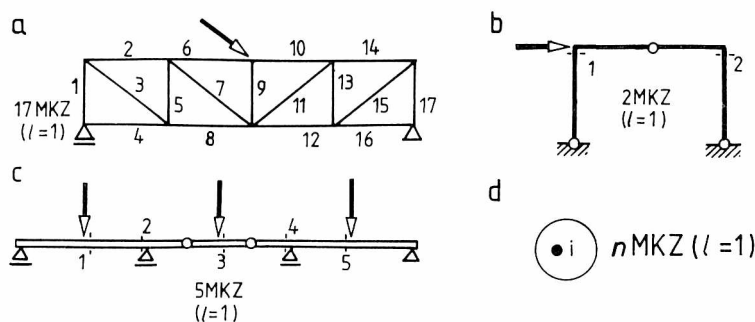
3) złożone szeregowo z wielu minimalnych krytycznych zbiorów o liczebnościach różnych od jedności (schemat ideowy takich konstrukcji pokazano na rys. 5.15);

4) złożone z wielu minimalnych krytycznych zbiorów elementów sprawczych, o liczebnościach zbiorów  $l > 1$ , przy czym niektóre z tych elementów sprawczych mogą być wspólne dla wielu MKZ-tów (ideowy schemat niezawodnościowy takich systemów na rys. 5.16).

W dalszej części tego rozdziału będzie analizowana nośność graniczna i bezpieczeństwo tak zdefiniowanych systemów prętowych ustrojów konstrukcyjnych.

## 5.5. Modele konstrukcji o szeregowo połączonych elementach sprawczych

Wszystkie konstrukcje statycznie wyznaczalne charakteryzują się tym, że ulegają awarii wówczas, gdy zostanie zniszczony choć jeden element tego ustroju. Takim konstrukcjom przyporządkowuje się szeregowy model niezawodnościowy. Znaczy to, że najsłabszy element konstrukcyjny w systemie (przekrój elementu, połączenie, pręt itp.) decyduje o bezpieczeństwie takiego ustroju i przekroczenie nośności najsłabszego elementu sprawczego powoduje awarię całego ustroju konstrukcyjnego. Ideowym schematem niezawodnościowym takich systemów jest rozciągany łańcuch (rys. 5.13), przykłady zaś schematów konstrukcji o takim modelu pokazano na rys. 5.17.



Rys. 5.17. Przykłady schematów konstrukcji o szeregowym modelu niezawodnościowym

Na rys. 5.13 przedstawiono rozciągany łańcuch złożony z  $n$  ogniw wykonanych z materiału sprężysto-plastycznego, o modelu Prandtla, połączonych szeregowo. Elementami sprawczymi w tym ustroju są uplastycznione w stanie granicznym ogniwa badanego łańcucha. Uplastycznienie któregośkolwiek z ogniw rozciąganego łańcucha sprawia, iż powstałe duże odkształcenie ustroju ogranicza jego nośność.

Na rys. 5.17a pokazano kratownicę statycznie wyznaczalną, obciążoną w węzłach. Przyjęto, iż elementami sprawczymi tej konstrukcji są pręty ściskane bądź rozciągane. W przypadku wyboczenia choć jednego pręta ściskanego lub uplastycznienia jednego z prętów rozciąganych, ustrój przekształca się w mechanizm (staje się geometrycznie zmienny).

Na rys. 5.17b pokazano przykład ramy statycznie wyznaczalnej, w której wystąpienie dodatkowego przegubu sprawia, iż zmienia się ona w ustrój geometrycznie zmienny. W tym przypadku elementem sprawczym jest krytyczny przekrój ramy.

Na rys. 5.17c pokazano schemat statycznie wyznaczalnej belki wieloprzęsłowej z przegubami, obciążonej poprzecznie. Elementami sprawczymi ustroju są przekroje krytyczne zginanej belki. Powstanie w dowolnym przekroju krytycznym belki dodat-

kowego przegubu plastycznego sprawia, iż ustrój zmienia się w konstrukcję geometrycznie zmienną.

Analizowane konstrukcje, o schematach pokazanych na rys. 5.17, charakteryzują się tym, iż mogą one mieć wiele elementów sprawczych. Wystarczy jednak, aby została wyczerpana nośność graniczna któregośkolwiek pojedynczego elementu sprawczego, a ustrój staje się geometrycznie zmienny. Liczebność minimalnego krytycznego zbioru (MKZ) ustroju jest równa:  $l = 1$ , liczba MKZ zaś jest równa liczbie elementów sprawczych  $n$  (rys. 5.17d). Szeregowy model niezawodnościowy ustroju należy przyporządkować konstrukcjom statycznie wyznaczalnym.

W konstrukcjach o szeregowym modelu niezawodnościowym, o losowej nośności granicznej systemu  $N(\omega)$ , decyduje wagowa ( $a_i N_i(\omega)$ ) nośność najsłabszego elementu sprawczego ustroju. Losowa nośność graniczna  $N(\omega)$  konstrukcji szeregowo złożonej z elementów sprawczych wynosi

$$N(\omega) = \min_{i=1}^n a_i N_i(\omega), \quad (5.8)$$

gdzie:

- $N_i(\omega)$  – losowa nośność graniczna  $i$ -tego elementu sprawczego konstrukcji,
- $a_i$  – waga  $i$ -tego elementu sprawczego konstrukcji,
- $n$  – liczba elementów sprawczych konstrukcji.

Tak zdefiniowana losowa nośność graniczna systemu konstrukcyjnego sprawdza się do koncepcji najsłabszego ogniwa w łańcuchu niezawodnościowym, gdyż oczywiste jest, iż awaria ustroju jest generowana przez element sprawczy, w którym stosunek losowego obciążenia do jego losowej nośności granicznej jest największy.

Bezpieczeństwo konstrukcji szeregowo złożonej z elementów sprawczych można oszacować na podstawie znanych rozkładów nośności granicznej  $N_i$  elementów oraz znanych rozkładów obciążeń  $X_i$  poszczególnych elementów ustroju. Należy tu wyjaśnić, iż dla modelu ideowego rozciąganego łańcucha (rys. 5.13) siły w ogniwach są takie same (wagi elementów sprawczych  $a_i = 1$ ), w przypadku zaś konstrukcji statycznie wyznaczalnych, o schematach pokazanych na rys. 5.17a - c, siły wewnętrzne  $X_i$  w poszczególnych elementach sprawczych są różne, co sprawia, iż ich wagi  $a_i$  są różne. W deterministycznym sensie ogniwa łańcucha jako elementy sprawcze ustroju mają tę samą nośność, nośności zaś prętów np. kratownicy są zazwyczaj różnicowane.

W analizie probabilistycznej bezpieczeństwa konstrukcji, której przyporządkowano szeregowy model niezawodnościowy ustroju, bada się bezpieczeństwo elementów sprawczych, o losowych nośnościach  $N_i(\omega)$ , w których wystąpią losowe siły wewnętrzne  $X_i(\omega)$ . Przez obciążenie  $X_i$  elementów sprawczych konstrukcji należy rozumieć siły wewnętrzne w poszczególnych elementach ustroju, wywołane zbiorem obciążeń zewnętrznych.

Prawdopodobieństwo niezniszczenia  $i$ -tego elementu sprawczego konstrukcji

$$p_i = \Pr \{N_i > X_i\}, \quad (5.9)$$

nazywa się bezpieczeństwem elementu sprawczego.

Bezpieczeństwo ustroju rozumiane jako prawdopodobieństwo niezniszczenia ani jednego elementu sprawczego konstrukcji, szeregowo złożonej z elementów, wynosi

$$R = \prod_{i=1}^n p_i, \quad (5.10)$$

gdzie:

$n$  — liczba elementów sprawczych w konstrukcji,

$p_i$  — bezpieczeństwo  $i$ -tego elementu sprawczego.

W zadaniach praktycznych często występuje zagadnienie wyznaczania tak zwanej obliczeniowej nośności granicznej elementu sprawczego lub konstrukcji. Nośności te będzie się mierzyć obciążeniem elementu sprawczego lub konstrukcji na złożonym poziomie istotności. Obliczeniową nośność graniczną  $N_{0i}$  elementu sprawczego lub konstrukcji dla argumentu rozkładu  $t$  wyznacza się jako kwantyl ze wzoru

$$N_{0i} = \bar{N}_i - t s_{Ni}, \quad (5.11)$$

gdzie:

$\bar{N}_i$  — oczekiwana nośność  $i$ -tego elementu sprawczego lub konstrukcji,

$s_{Ni}$  — odchylenie standardowe nośności  $i$ -tego elementu sprawczego lub konstrukcji.

Argument rozkładu  $t$  można wyznaczyć ze wzoru

$$t = \frac{\bar{N}_i - N_{0i}}{s_{Ni}}. \quad (5.12)$$

Obliczeniową nośność graniczną konstrukcji, o szeregowo połączonych elementach sprawczych, na założonym poziomie istotności szacuje się, poszukując takiego obciążenia  $N_0$ , dla którego bezpieczeństwo  $R$  konstrukcji będzie równe założonemu bezpieczeństwu  $R_0$  (np.  $R_0 = 0,998\ 65$ ). Należy zatem rozwiązać równanie

$$R_0 = \prod_{i=1}^n p_i. \quad (5.13)$$

Równanie (5.13) rozwiązuje się metodą prób: przykłada się do konstrukcji obciążenie  $X$  i wyznacza uogólnione siły wewnętrzne  $X_i$  w elementach. Następnie szacuje się bezpieczeństwo częściowe elementów sprawczych  $p_i = \Pr\{N_i > X_i\}$  i sprawdza równanie (5.13). Obciążenie badanego ustroju  $X$ , które spełni równanie (5.13), oznacza się przez  $N_0$  i nazywa się obliczeniową nośnością graniczną konstrukcji na założonym poziomie istotności (prognozowane bezpieczeństwo tego ustroju wynosi  $R_0$ ).

Bezpieczeństwo konstrukcji szeregowo złożonej z elementów sprawczych, rozumiane jako prawdopodobieństwo niewystąpienia zniszczenia ani jednego elementu konstrukcji, gdy działa na nią obciążenie  $X$ , wyznacza się ze wzoru (5.10). Obciążenie  $X$  przekazywane na konstrukcję może być losowe i wywołuje losowe siły wewnętrzne  $X_i(\omega)$  w elementach sprawczych  $i = 1, 2, \dots$ . Nośności elementów sprawczych są również losowe  $N(\omega)$ .

Losowy *zapas* nośności  $Z_i(\omega)$  elementu sprawczego, o losowej nośności  $N_i(\omega)$ , pod losowym obciążeniem  $X_i(\omega)$  wynosi

$$Z_i(\omega) = N_i(\omega) - X_i(\omega). \quad (5.14)$$

Wartość średnią  $\bar{Z}_i$  i odchylenie standardowe  $s_{Zi}$  losowego *zapasu* nośności elementu sprawczego oblicza się ze wzorów

$$\bar{Z}_i = \bar{N}_i - \bar{X}_i, \quad (5.15)$$

$$s_{Zi} = \sqrt{s_{N_i}^2 + s_{X_i}^2}. \quad (5.16)$$

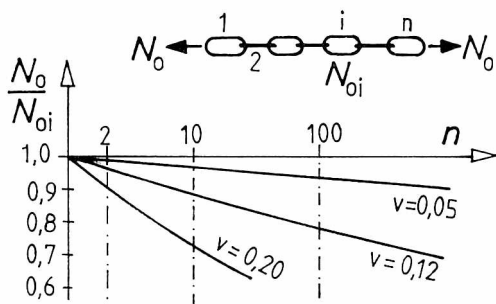
Indeks niezawodności  $t_i$  elementu sprawczego  $i$ , o parametrach nośności granicznej  $\bar{N}_i$ ,  $s_{N_i}$  oraz obciążenia  $\bar{X}_i$ ,  $s_{X_i}$  wynosi

$$t_i = \frac{\bar{N}_i - \bar{X}_i}{\sqrt{s_{N_i}^2 + s_{X_i}^2}}. \quad (5.17)$$

Z tablic rozkładu normalnego dla argumentu  $t_i$  można odczytać poszukiwane bezpieczeństwo elementu sprawczego  $R_i = p_i(t_i)$ .

Z interpretacji wzoru (5.10) wynika, że wraz ze wzrostem liczby elementów sprawczych w ustroju maleje bezpieczeństwo konstrukcji o rozważanym modelu niezawodnościowym. Na przykład, gdy bezpieczeństwo jednego elementu sprawczego wynosi  $R_1 = p_1 = 0,9$ , wówczas bezpieczeństwo konstrukcji złożonej z 3 takich samych elementów sprawczych wynosi  $R_3 = 0,9^3 = 0,729$ .

Cechą charakterystyczną, a zarazem bardzo ważną, systemów o elementach sprawczych połączonych szeregowo z punktu widzenia teorii niezawodności jest statystyczne osłabienie konstrukcji [39, 40, 45]. Sens fizyczny statystycznego osłabienia konstrukcji tkwi w tym, iż ze wzrostem liczby elementów sprawczych w ustroju prawdopodobieństwo wystąpienia słabszego niż przeciętne elementu sprawczego lub losowo większego obciążenia w tym elemencie wzrasta (im więcej występuje minimalnych zbiorów krytycznych, tym większy jest efekt statystycznego osłabienia konstrukcji). W tym też sensie statystyczne osłabienie takich konstrukcji jest tym większe, im więcej jest elementów szeregowo połączonych w systemie.



Rys. 5.18. Zmiana parametrów bezpieczeństwa konstrukcji, o szeregowym modelu niezawodnościowym, w funkcji liczby jej elementów sprawczych



Na rysunku 5.18 [40] pokazano zmianę parametrów bezpieczeństwa konstrukcji o szeregowym modelu niezawodnościowym, mierzonych stosunkiem kwantyla nośności systemu konstrukcyjnego  $N_0$  do kwantyla nośności pojedynczego elementu sprawczego  $N_{0i}$ , w funkcji liczby elementów sprawczych  $n$  w konstrukcji, dla współczynnika zmienności  $v_i = 0,05; 0,12; 0,20$ . Na rysunku 5.18 zastosowano logarytmiczną skalę  $n$ , a parametry  $N_0$  i  $N_{0i}$  wyznaczono dla identycznych poziomów bezpieczeństwa  $p(t_0)$ .

### Przykład 5.1

Dany jest łańcuch złożony z 10 ogniw, wykonany z płaskownika stalowego analizowanego w przykładzie 3.1, o parametrach nośności średniej  $\bar{N}_i = 18,0$  kN i odchyleniu standardowym  $s_{N_i} = 1,21$  kN. Należy wyznaczyć:

- obliczeniową nośność graniczną ogniwa dla  $p_i(t) = p(3)$ ; ( $R_i = 0,998\ 65$ );
- bezpieczeństwo łańcucha rozciąganego siłą o parametrach obciążenia średniego  $\bar{X} = 12$  kN i odchyleniu standardowym obciążenia  $s_X = 1,2$  kN;
- obliczeniową nośność graniczną łańcucha dla bezpieczeństwa  $R = 0,998\ 65$ .

Obliczeniowa nośność graniczna pojedynczego ogniwa łańcucha dla prognozowanego bezpieczeństwa  $R_i = 0,998\ 65$  wynosi

$$N_{0i} = \bar{N}_i - t s_{N_i} = 18,0 - 3 \cdot 1,21 = 14,37 \text{ kN.}$$

Zapas nośności i indeks niezawodności pojedynczego ogniwa łańcucha obciążonego siłą wewnętrzną o parametrach  $\bar{X} = 12$  kN,  $s_X = 1,2$  kN wynosi

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \bar{N}_i - \bar{X} = 18,0 - 12,0 = 6,0 \text{ kN,} \\ t &= \frac{\bar{N}_i - \bar{X}}{\sqrt{s_{N_i}^2 + s_X^2}} = \frac{18,0 - 12,0}{\sqrt{1,21^2 + 1,2^2}} = \frac{6,0}{1,7} = 3,53. \end{aligned}$$

Z tablic rozkładu normalnego odczytano  $p_i(3,53) = 0,999\ 792\ 2$ .

Bezpieczeństwo łańcucha złożonego z 10 ogniw, obciążonego siłą o parametrach  $\bar{X} = 12,0$  kN,  $s_X = 1,2$  kN wynosi

$$R = \prod_{i=1}^{10} p_i = p_i^{10} = 0,999\ 792\ 2^{10} = 0,997\ 924.$$

Aby oszacować obliczeniową nośność graniczną łańcucha dla bezpieczeństwa konstrukcji  $R = 0,998\ 65$ , należy rozwiązać równanie

$$\begin{aligned} R &= \prod_{i=1}^n p_i = p_i^{10} = 0,998\ 65, \\ p_i &= \sqrt[10]{0,998\ 65} = 0,999\ 865. \end{aligned}$$

Aby prognozowana niezawodność łańcucha wynosiła  $R = 0,998\ 65$ , bezpieczeństwo jednego ogniwa musi więc wynosić  $p_i = 0,999\ 865$ , co odpowiada argumentowi  $t$  odczytanemu z tablic rozkładu normalnego  $t = 3,65$ .

Obliczeniowa nośność graniczna łańcucha dla prognozowania bezpieczeństwa ustroju  $R = 0,998\,65$  wynosi

$$N_0 = \bar{N} - t s_N = 18 - 3,65 \cdot 1,21 = 13,58 \text{ kN}.$$

W badanym przypadku nośność graniczna systemu konstrukcyjnego (łańcucha) do nośności granicznej pojedynczego elementu sprawczego (ogniwa) wynosi

$$N_0/N_{0i} = 13,58/14,37 = 0,945.$$

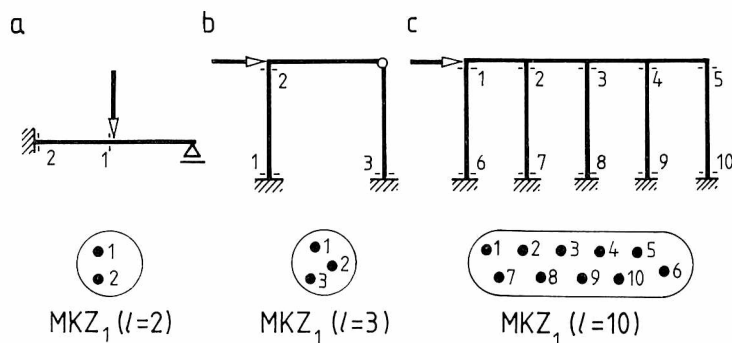
Jest to efekt statystycznego osłabienia analizowanego ustroju.

## 5.6. Modele konstrukcji o równolegle połączonych elementach sprawczych

Konstrukcjami złożonymi z elementów połączonych równolegle w ujęciu teorii niezawodności określa się układy, które ulegają awarii wtedy, gdy zniszczone zostaną wszystkie elementy sprawcze systemu. Ideowy schemat modelu, o równolegle połączonych elementach, to wiązka  $n$  elementów rozciąganych (patrz rys. 5.14). Należy tu zaznaczyć, iż analizowane są konstrukcje zbudowane z materiałów sprężysto-plastycznych, których wyężenie można opisać modelem Prandtla. Elementy sprawcze po osiągnięciu swej nośności granicznej (np. pełnego uplastycznienia przekroju zginanego) utrzymują swą nośność, umożliwiając redystrybucję sił wewnętrznych w systemie konstrukcyjnym. Te warunki spełniają na przykład zginane pręty o przekrojach klasy 1. W ścieżkach równowagi statycznej takich elementów sprawczych można wyróżnić plastyczną, poziomą fazę ich wyężenia.

Przykłady konstrukcji złożonych z elementów sprawczych połączonych równolegle z punktu widzenia ich modelu niezawodnościowego pokazano na rys. 5.19.

Na rys. 5.19a pokazano schemat belki statycznie niewyznaczalnej obciążonej poprzecznie. W belce tej, aby wystąpiła awaria, musi powstać odpowiednia liczba



Rys. 5.19. Przykłady schematów konstrukcji o równoległym modelu niezawodnościowym

przegubów plastycznych, które zmieniają konstrukcję w mechanizm. Elementami sprawczymi są tu uplastycznione dwa zginane przekroje belki. Liczebność minimalnego krytycznego zbioru belki pokazanej na rys. 5.19a wynosi  $l = 2$ . Podobne przykłady belek o równoległym modelu niezawodnościowym pokazano na rys. 5.11d.

Na rys. 5.19b i c pokazano schematy statycznie niewyznaczalnych ram o liczebnościach elementów sprawczych (którymi są uplastycznione przekroje prętów) w minimalnych krytycznych zbiorach  $l = 3$  i  $l = 10$ .

Pokazane przykłady prostych systemów konstrukcji prętowych charakteryzują się tym, że liczebności elementów sprawczych rozważanych ustrojów są większe od 1 i że są one połączone równoległe z punktu widzenia teorii niezawodności. Oznacza to, że do awarii konstrukcji może dojść tylko wtedy, gdy ulegną zniszczeniu wszystkie elementy sprawcze wchodzące w skład MKZ. Taki model niezawodnościowy charakteryzuje proste konstrukcje statycznie niewyznaczalne.

Przykłady konstrukcji pokazane na rys. 5.19 charakteryzują się tym, iż występuje tylko jeden kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia o liczebności większej od 1. Zagadnienie jest o wiele bardziej złożone, gdy występuje wiele nie separujących się mechanizmów zniszczenia. To zagadnienie będzie analizowane w dalszej części tego rozdziału.

Konstrukcje o równoległym modelu niezawodnościowym, dzięki zachowywaniu nośności elementów sprawczych w granicznych stanach ich wyteżeń, można obciążać wzrastającym obciążeniem aż do zmiany ich w mechanizmy. Dochodzi wówczas do wagowego sumowania się nośności elementów sprawczych. Dlatego też losowa nośność graniczna konstrukcji  $N(\omega)$ , o elementach sprawczych połączonych równoległe, wynosi

$$N(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i N_i(\omega), \quad (5.18)$$

gdzie:

- $N_i(\omega)$  — losowa nośność graniczna  $i$ -tego elementu sprawczego,
- $a_i$  — waga  $i$ -tego elementu sprawczego konstrukcji,
- $n$  — liczba elementów sprawczych konstrukcji.

Nośność elementu sprawczego można scharakteryzować za pomocą jej oczekiwanej nośności granicznej  $\bar{N}_i$  oraz odchylenia standardowego nośności granicznej  $s_{N_i}$ .

Oczekiwaną nośność graniczną  $\bar{N}$  konstrukcji złożonej z elementów sprawczych połączonych równoległe szacuje się ze wzoru

$$\bar{N} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i. \quad (5.19)$$

Odchylenie standardowe nośności granicznej konstrukcji wyznacza się ze wzoru

$$s_N = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot s_{N_i}^2}, \quad (5.20)$$

gdzie  $s_{N_i}$  oznacza odchylenie standardowe nośności granicznej  $i$ -tego elementu sprawczego.

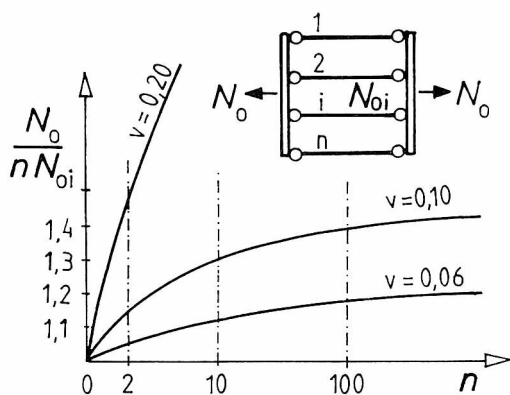
Obliczeniową nośność graniczną konstrukcji, o równoległym modelu niezawodnościowym, na założonym poziomie istotności  $t_0$  wyznacza się ze wzoru

$$N_0 = \bar{N} - t_0 s_N. \quad (5.21)$$

Cechą charakterystyczną konstrukcji prętowych o równoległym modelu niezawodnościowym, ważną ze względu na bezpieczeństwo budowli, jest statystyczny efekt zwiększania niezawodności systemu [38, 40]. Sens fizyczny omawianego zagadnienia polega na „sprzęganiu” się nośności sprężysto-plastycznych elementów sprawczych systemu konstrukcyjnego. W tym też sensie, wraz ze wzrostem liczby elementów sprawczych (wchodzących w skład MKZ) połączonych równolegle wzrasta niezawodność ustroju. Stosunek obliczeniowej nośności granicznej takiej konstrukcji  $N_0$  do nośności obliczeniowej  $n$  elementów sprawczych  $nN_{0i}$  jest większy od 1 (dla tego samego parametru  $t_0$ ). Wyraża to zależność

$$\frac{\bar{N} - t_0 s_N}{n(\bar{N}_i - t_0 s_{Ni})} > 1. \quad (5.22)$$

Graficzną ilustrację omawianego zagadnienia statystycznego sprzęgania się nośności elementów sprawczych w konstrukcjach o równoległym modelu niezawodnościowym pokazano na rys. 5.20 [40]. Na osi pionowej podano wskaźnik (5.22) mierzony stosunkiem nośności konstrukcji  $N_0$  do nośności  $n$  elementów sprawczych  $N_{0i}$ , na osi poziomej zaś liczbę elementów sprawczych  $n$  (w skali logarytmicznej). Podane na rys. 5.20 wykresy obliczono dla współczynników zmienności:  $v = 0,06$ ;  $0,10$ ;  $0,20$ .



Rys. 5.20. Zmiana parametrów bezpieczeństwa konstrukcji, o równoległym modelu niezawodnościowym, w funkcji liczby jej elementów sprawczych

### Przykład 5.2

Dana jest rama, o schemacie statycznym pokazanym na rys. 5.19c. Jest ona wykonana z I 200, o parametrach nośności granicznej przekroju mierzonej momentem zginającym: nośności średniej  $\bar{N} = 81,0$  kNm i odchyleniu standardowym  $s_N = 9,26$  kNm

(dane z przykładu 3.2). Należy oszacować:

- obliczeniową nośność graniczną  $N_{0i}$  elementu sprawczego (pojedynczego przegubu plastycznego) na poziomie istotności  $p(t) = p(3) = 0,998\ 65$ ;
- wartość średnią i odchylenie standardowe nośności granicznej ramy (układu) oraz obliczeniową nośność graniczną konstrukcji  $N_0$  na poziomie istotności  $p(t) = p(3) = 0,998\ 65$ ;
- stosunek nośności granicznej konstrukcji (ramy)  $N_0$  do nośności  $n$  elementów sprawczych (przegubów plastycznych)  $N_{0i}$ ;
- bezpieczeństwo układu ramowego pod obciążeniem  $P(\omega)h = X(\omega)$ , o parametrach  $\bar{X} = 600$  kNm i  $s_X = 50$  kNm.

Obliczeniowa nośność graniczna elementu sprawczego (pojedynczego przegubu plastycznego) dla  $p(3)$  wynosi

$$N_{0i} = \bar{N} - t s_N = 81,0 - 3 \cdot 9,26 = 53,22 \text{ kNm}.$$

Oczekiwana nośność układu ramowego pokazanego na rys. 5.19c, złożonego z 10 elementów sprawczych (przegubów plastycznych), połączonych równolegle, wynosi

$$\bar{N} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = 10 \cdot 1 \cdot 81,0 = 810 \text{ kNm},$$

odchylenie standardowe zaś

$$s_N = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 s_{N_i}^2} = \sqrt{10 \cdot 1^2 \cdot 9,26^2} = 29,28 \text{ kNm}.$$

Nośność obliczeniowa badanej ramy dla  $p(t) = p(3)$  wynosi

$$N_0 = \bar{N} - t s_N = 810 - 3 \cdot 29,28 = 722,16 \text{ kNm}.$$

Stosunek  $N_0/nN_{0i}$  wynosi

$$\frac{N_0}{nN_{0i}} = \frac{722,16}{10 \cdot 53,22} = 1,357.$$

Bezpieczeństwo ramy pod obciążeniem o parametrach  $\bar{X} = 600$  kNm i  $s_X = 50$  kNm wyznacza się określając indeks niezawodności

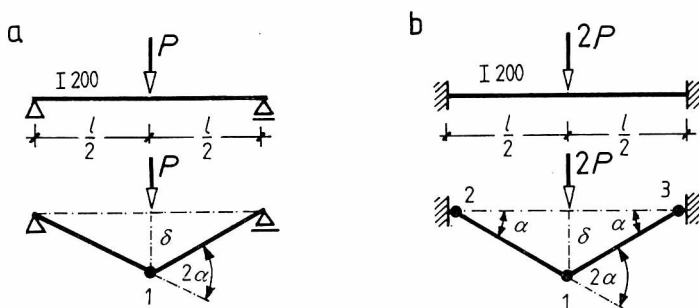
$$t = \frac{\bar{N} - \bar{X}}{\sqrt{s_N^2 + s_X^2}} = \frac{810 - 600}{\sqrt{29,28^2 + 50^2}} = \frac{210}{57,94} = 3,62$$

Z tablic rozkładu normalnego dla  $t = 3,62$  odczytano bezpieczeństwo badanego układu, które wynosi  $R(3,62) = 0,999\ 853$ .

### Przykład 5.3

Dane są belki o rozpiętości 4 m, zabezpieczone przed utratą płaskiej postaci zginania (zwichrzeniem), wykonane z I 200, o parametrach nośności granicznej zginanego przekroju poprzecznego  $\bar{N} = 81,0$  kNm i  $s_N = 9,26$  kNm. Należy wyznaczyć:

- obliczeniową nośność graniczną belki swobodnie podpartej (rys. 5.21a), mierzoną siłą przyłożoną w środku rozpiętości, na poziomie istotności  $p(t) = p(3)$ ,
- bezpieczeństwo belki swobodnie podpartej (rys. 5.21a), obciążonej siłą przyłożoną w środku rozpiętości, o parametrach  $\bar{X}_1 = 45,0$  kN,  $s_{X_1} = 4,5$  kN,
- nośność graniczną i bezpieczeństwo belki obustronnie zamocowanej, obciążonej poprzecznie w środku rozpiętości obciążeniem skupionym (rys. 5.21b) o parametrach  $\bar{X}_2 = 90,0$  kN i  $s_{X_2} = 9,0$  kN.



Rys. 5.21. Schemat belki: a – swobodnie podpartej, b – obustronnie zamocowanej

Wartość średnią i odchylenie standardowe nośności belki swobodnie podpartej mierzone obciążeniem skupionym ( $P = P_1 = N_1$ ,  $M_{pl} = N$ ) przyłożonym w jej środku rozpiętości wyznaczono, analizując mechanizm zniszczenia pokazany na rys. 5.21a

$$P_1 \delta = 2\alpha M_{pl},$$

$$\bar{N}_1 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{4}{l} \bar{N} = \frac{4}{4} \cdot 81,0 = 81 \text{ kN},$$

$$s_{N_1} = \sqrt{\sum a_i^2 s_{N_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{4}\right)^2 \cdot 9,26^2} = 9,26 \text{ kN}.$$

Obliczeniową nośność graniczną analizowanej swobodnie podpartej belki na poziomie istotności  $p(3)$  wynosi

$$N_{01} = \bar{N}_1 - t_{N_1} s_{N_1} = 81,0 - 3 \cdot 9,26 = 53,22 \text{ kN}.$$

Bezpieczeństwo belki swobodnie podpartej obciążonej losową siłą skupioną  $X_1(\omega)$  oszacowano obliczając indeks niezawodności zapasu nośności

$$t_1 = \frac{\bar{N}_1 - \bar{X}_1}{\sqrt{s_{N_1}^2 + s_{X_1}^2}} = \frac{81 - 45}{\sqrt{9,26^2 + 4,5^2}} = \frac{36}{10,29} = 3,498.$$

Z tablic rozkładu normalnego odczytano dla  $p(3,498) = 0,999\,760$ .

Wartość średnią nośności granicznej belki obustronnie zamocowanej, mierzoną obciążeniem skupionym ( $2P = P_2 = N_2$ ,  $M_{pl,i} = N$ ) przyłożonym w środku jej rozpiętości (patrz rys. 5.21b), oszacowano z równania stanu granicznego belki (współczynniki liczbowe przy  $N$  są wagami elementów sprawczych)

$$P_2 \delta = \alpha M_{pl,2} + 2\alpha M_{pl,1} + \alpha M_{pl,3},$$

$$\bar{N}_2 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{4}{l} (0,5\bar{N} + \bar{N} + 0,5\bar{N}) = \frac{8}{l} \bar{N} = \frac{8}{4} \cdot 81,0 = 162 \text{ kN},$$

$$s_{N_2} = \sqrt{\sum_i a_i^2 s_{N_i}^2} = \frac{4}{l} \sqrt{(0,5 \cdot 9,26)^2 + 9,26^2 + (0,5 \cdot 9,26)^2} = 11,34 \text{ kN}.$$

Obliczeniowa nośność graniczna analizowanej belki obustronnie zamocowanej, na poziomie istotności  $p(3)$ , wynosi

$$N_{02} = \bar{N}_2 - t s_{N_2} = 162 - 3 \cdot 11,34 = 127,98 \text{ kN}.$$

Bezpieczeństwo rozważanej belki obustronnie zamocowanej obciążonej losową siłą skupioną  $X_2(\omega)$  wyznaczono obliczając indeks niezawodności  $t_2$

$$t_2 = \frac{\bar{N}_2 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_{N_2}^2 + s_{\bar{X}_2}^2}} = \frac{162 - 90}{\sqrt{11,34^2 + 9,0^2}} = \frac{72,0}{14,48} = 4,972.$$

Z tablic rozkładu normalnego odczytano dla  $p(4,972) = 0,999\,999\,665\,2$ .

Należy zauważyć, że w analizowanym przykładzie sprężyste obciążenie belek  $X_i$  dobrano tak, że w deterministycznym sensie bezpieczeństwo ich jest sobie równe, gdyż

$$2\bar{X}_1 = \bar{X}_2,$$

i momenty zginające w stanie sprężystym wynoszą

$$\frac{\bar{X}_2 l}{8} = \frac{\bar{X}_1 l}{4}.$$

Jak wykazała niezawodnościowa analiza uwzględniająca strukturalne sprzężenie elementów sprawczych w systemie konstrukcyjnym, bezpieczeństwo belki swobodnie podpartej (o szeregowym modelu niezawodnościowym) wynosi 0,999760 i jest mniejsze od bezpieczeństwa belki obustronnie zamocowanej (o równoległym modelu niezawodnościowym), które wynosi 0,999 999 665 2.

Uwzględniając plastyczną redystrybucję sił wewnętrznych w belce obustronnie sztywno zamocowanej jej oczekiwana nośność graniczna jest dwukrotnie większa aniżeli belki swobodnie podpartej

$$\bar{N}_2 / \bar{N}_1 = 2.$$

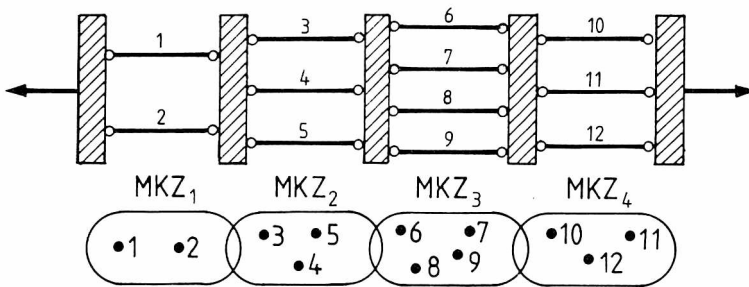
Porównanie obliczeniowej nośności rozważanych belek oszacowanych na poziomie istotności  $p(3)$ , wynosi

$$N_{02} / N_{01} = 127,98 / 53,22 = 2,4047.$$

Jest to efekt statycznego wzmocnienia systemu statycznie niewyznaczalnego.

## 5.7. Modele konstrukcji o szeregowo połączonych minimalnych krytycznych zbiorach elementów sprawczych

W rozpatrywanym typie konstrukcji z punktu widzenia teorii niezawodności można wyróżnić zbiory krytycznych elementów sprawczych, które są między sobą połączone szeregowo, natomiast połączenia elementów w zbiorach krytycznych są typu równoległego. Są to konstrukcje o mieszanym modelu niezawodnościowym. Ideowy schemat niezawodnościowy takich konstrukcji pokazano na rys. 5.22. Jest to łańcuch (układ o modelu szeregowym) o ogniwach w postaci wiązek rozciąganych



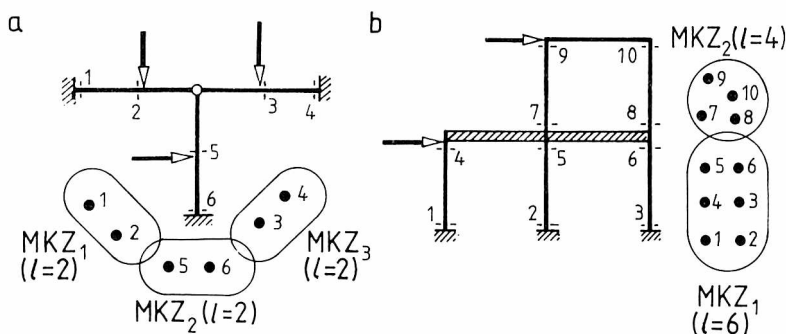
Rys. 5.22. Schemat mieszanego modelu niezawodnościowego konstrukcji

elementów sprawczych (o równoległym modelu niezawodnościowym). Układy te mają tę właściwość, że wszystkie elementy sprawcze w danym mechanizmie zniszczenia konstrukcji są połączone równolegle. Zbiory elementów sprawczych występujące w poszczególnych kinematycznie dopuszczalnych mechanizmach zniszczenia są połączone między sobą szeregowo i nie mają wspólnych elementów (są to zbiory o rozseparowanych elementach sprawczych).

W konstrukcji złożonej z elementów sprawczych połączonych równolegle i szeregowo, pokazanej na rys. 5.23a, występują trzy kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia ustroju. Elementy sprawcze (przeguby plastyczne) jednego  $MKZ_i$  nie wchodzi do innego  $MKZ_j$  (zbiory te są o rozseparowanych elementach sprawczych). Liczebności elementów sprawczych minimalnych krytycznych zbiorów wynoszą  $l > 1$ , co pozwala zakwalifikować je jako zbiory o modelach równoległych. Jednak  $MKZ_i$  o modelach równoległych są między sobą połączone w sposób szeregowy, gdyż o bezpieczeństwie konstrukcji decyduje najsłabszy  $MKZ_i$  tego ustroju.

Dla konstrukcji ramy (ze sztywną tarczą stropową), pokazanej na rys. 5.23b, można wyróżnić dwa kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia, o liczebnościach elementów sprawczych  $l = 4$  i  $l = 6$ , połączone między sobą (w  $MKZ$ -cie) równolegle. Minimalne krytyczne zbiory tej konstrukcji są *ogniwami* szeregowego modelu niezawodnościowego badanego ustroju.





Rys. 5.23. Schematy konstrukcji o mieszanym modelu niezawodnościowym

Losową nośność graniczną omawianego typu konstrukcji wyznacza się jak dla układu szeregowego, uwzględniając specyficzne właściwości wieloelementowych *ogniw* (złożonych z wielu elementów sprawczych połączonych między sobą w sposób równoległy) ze wzoru

$$N(\omega) = \min_{i=1}^n \left| \sum_j a_{ij} N_{ij}(\omega) \right|, \quad (5.23)$$

gdzie:

$N_{ij}(\omega)$  — losowa nośność graniczna  $j$ -tego elementu sprawczego w  $i$ -tym zbiorze krytycznym ustroju,

$a_{ij}$  — waga  $j$ -tego elementu sprawczego w  $i$ -tym zbiorze krytycznym ustroju,

$i$  — liczba zbiorów krytycznych ustroju,

$j$  — liczba elementów sprawczych w zbiorze krytycznym ustroju.

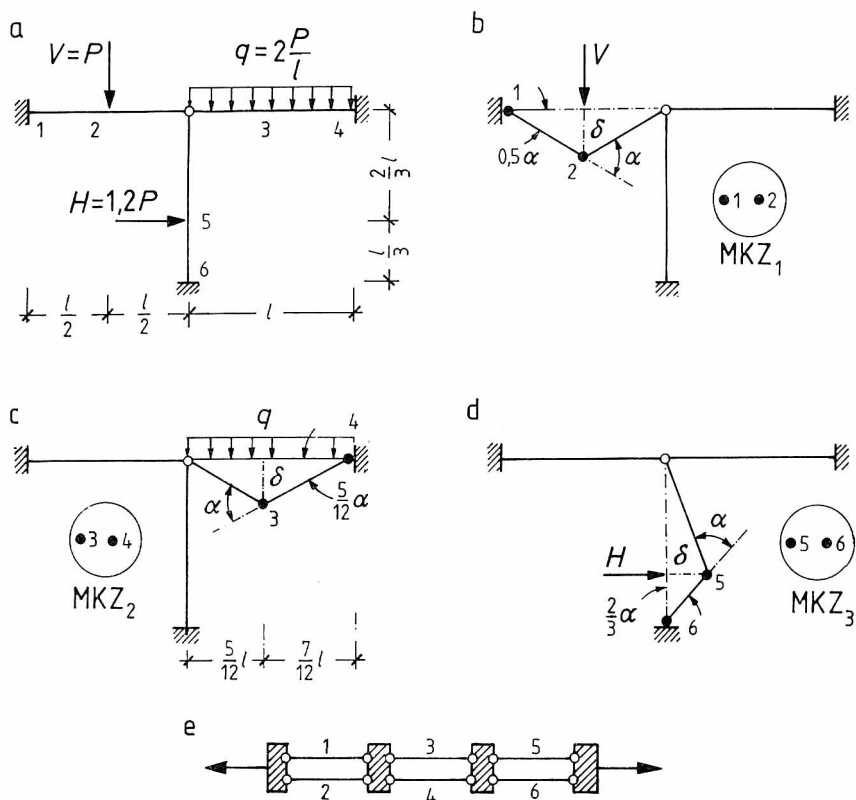
Procedura szacowania nośności granicznej i bezpieczeństwa takich konstrukcji jest następująca. Należy najpierw wyznaczyć nośności graniczne  $N_i$   $i$ -tych minimalnych krytycznych zbiorów elementów sprawczych, tak jak dla konstrukcji o równoległym modelu niezawodnościowym (w sposób omówiony w rozdz. 5.6)

$$N_i(\omega) = \left| \sum_j a_{ij} N_{ij}(\omega) \right|, \quad (5.24)$$

oraz bezpieczeństwo częściowe  $p_i$  rozumiane jako prawdopodobieństwo niewystąpienia poszczególnych kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia ustroju. W etapie drugim obliczeń szacuje się nośność graniczną układu, o szeregowo sprzężonych zbiorach elementów sprawczych, o uprzednio wyznaczonych nośnościach  $N_i$  oraz bezpieczeństwo  $R$  całego układu w sposób omówiony w rozdz. 5.5.

#### Przykład 5.4.

Oszacować bezpieczeństwo stalowej ramy, o schemacie jak na rys. 5.24, wykonanej z I 200 (przykład 3.2), o parametrach nośności granicznej przekroju poprzecznego mierzonej momentem zginającym  $\bar{N} = 81,0$  kNm,  $s_N = 9,26$  kNm.



Rys. 5.24. Schemat ramy o mieszanym modelu niezawodnościowym

Obciążenie ramy  $V, H, q$  uzależniono od losowej siły skupionej  $P(\omega)$ , o parametrach  $\bar{P} = 80,0$  kN,  $s_P = 8,0$  kN. Rozpiętość rygli i wysokość słupa ramy wynosi  $l = 4$  m.

Analizowana konstrukcja z punktu widzenia teorii niezawodności jest układem złożonym z szeregowo połączonych 3 minimalnych krytycznych zbiorów (bez elementów wspólnych). Dla badanego układu konstrukcyjnego można wyróżnić następujące zbiory elementów sprawczych:  $MKZ_1$  – złożony z elementów 1 i 2 (rys. 5.24b);  $MKZ_2$  złożony z elementów 3 i 4 (rys. 5.24c) i  $MKZ_3$  – złożony z elementów 5 i 6 (rys. 5.24d). Ideowy schemat niezawodnościowy tej konstrukcji pokazano na rys. 5.24e. Każdy z rozważanych minimalnych krytycznych zbiorów tego ustroju ma elementy połączone między sobą w sposób równoległy.

### Analiza bezpieczeństwa $MKZ_1$ (rys. 5.24b)

Dla przyjętych na rys. 5.24b oznaczeń równanie prac przygotowanych dla stanu granicznego lewego ryglu ramy ( $MKZ_1$ ) ma następującą postać:

$$V\delta = 0,5\alpha M_1 + \alpha M_2.$$

Po uwzględnieniu związków geometrycznych obciążenie graniczne lewego rygla ramy wynosi

$$P = \frac{2}{l} M_1 + \frac{4}{l} M_2.$$

Oczekiwana nośność graniczna konstrukcji mierzona obciążeniem poprzecznym ( $P_1 = N_1$ ) z warunku wystąpienia mechanizmu zniszczenia w lewym ryglu analizowanej ramy (MKZ<sub>1</sub>) wynosi

$$\bar{N}_1 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{2}{l} \bar{N} + \frac{4}{l} \bar{N} = \frac{2}{4} \cdot 81,0 + \frac{4}{4} \cdot 81,0 = 121,5 \text{ kN}.$$

Odchylenie standardowe nośności granicznej dla tego mechanizmu zniszczenia obliczono ze wzoru

$$s_{N_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot s_{N_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{4} \cdot 9,26\right)^2 + \left(\frac{4}{4} \cdot 9,26\right)^2} = 10,35 \text{ kN}.$$

Indeks niezawodności  $t_1$  dla obciążenia ustroju losową siłą  $P(\omega)$  wynosi

$$t_1 = \frac{\bar{N}_1 - \bar{P}}{\sqrt{s_{N_1}^2 + s_P^2}} = \frac{121,5 - 80,0}{\sqrt{10,35^2 + 8,0^2}} = 3,096.$$

Bezpieczeństwo analizowanego mechanizmu zniszczenia konstrukcji (MKZ<sub>1</sub>) wynosi

$$R_1 = p(t_1 = 3,096) = 0,99903.$$

### Analiza bezpieczeństwa MKZ<sub>2</sub> (rys. 5.24c)

Dla przyjętych na rys. 5.24c oznaczeń równanie prac przygotowanych dla stanu granicznego prawego rygla (MKZ<sub>2</sub>) analizowanej ramy ma następującą postać

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q l \delta &= \alpha M_3 + \frac{5}{12} \alpha M_4, \\ \frac{1}{2} \frac{2P}{l} l \frac{35}{144} l &= M_3 + \frac{5}{12} M_4. \end{aligned}$$

Obciążenie graniczne analizowanego MKZ<sub>2</sub> wynosi

$$P = \frac{144}{35l} M_3 + \frac{60}{35l} M_4.$$

Oczekiwana nośność graniczna ramy mierzona obciążeniem poprzecznym, z warunku wystąpienia mechanizmu zniszczenia w prawym ryglu, dla MKZ<sub>2</sub> wynosi

$$\bar{N}_2 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{144}{35l} \bar{N} + \frac{60}{35l} \bar{N} = \frac{144}{35 \cdot 4} 81,0 + \frac{60}{35 \cdot 4} 81,0 = 118,03 \text{ kN},$$

odchylenie standardowe zaś obliczono ze wzoru

$$s_{N_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot s_{N_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{144}{35 \cdot 4} \cdot 9,26\right)^2 + \left(\frac{60}{35 \cdot 4} \cdot 9,26\right)^2} = 10,32 \text{ kN}.$$

Indeks niezawodności  $t_2$  dla obciążenia  $P(\omega)$  ustroju w (MKZ<sub>2</sub>) wynosi

$$t_2 = \frac{\bar{N}_2 - \bar{P}}{\sqrt{s_{N_2}^2 + s_P^2}} = \frac{118,22 - 80,0}{\sqrt{10,32^2 + 8,0^2}} = 2,928.$$

Bezpieczeństwo analizowanego mechanizmu zniszczenia konstrukcji (MKZ<sub>2</sub>) wynosi

$$R_2 = p(t_2 = 2,928) = 0,998 \text{ 30}.$$

### Analiza bezpieczeństwa MKZ<sub>3</sub> (rys. 5.24d)

Dla przyjętych oznaczeń na rys. 5.24d równanie prac przygotowanych dla mechanizmu zniszczenia słupa analizowanej ramy (MKZ<sub>3</sub>) ma następującą postać

$$H\delta = \alpha M_5 + \frac{2}{3} \alpha M_6,$$

po przekształceniu zaś otrzymano

$$1,2P \cdot \frac{2}{9}l = M_5 + \frac{2}{3}M_6.$$

Obciążenie graniczne dla MKZ<sub>3</sub> wynosi

$$P = \frac{3,75}{l}M_5 + \frac{2,5}{l}M_6.$$

Oczekiwana nośność graniczna ramy mierzona obciążeniem poprzecznym przyłożonym do słupa oraz odchylenie standardowe nośności dla MKZ<sub>3</sub> wynoszą

$$\bar{N}_3 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{3,75}{l} \bar{N} + \frac{2,5}{l} \bar{N} = \frac{3,75}{4} \cdot 81,0 + \frac{2,5}{4} \cdot 81,0 = 126,56 \text{ kN},$$

$$s_{N_3} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot s_{N_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{3,75}{4} \cdot 9,26\right)^2 + \left(\frac{2,5}{4} \cdot 9,26\right)^2} = 10,43 \text{ kN}.$$

Indeks niezawodności  $t_3$  dla obciążenia ramy siłą  $P(\omega)$  w przypadku wystąpienia MKZ<sub>3</sub> wynosi

$$t_3 = \frac{\bar{N}_3 - \bar{P}}{\sqrt{s_{N_3}^2 + s_P^2}} = \frac{126,56 - 80,0}{\sqrt{10,43^2 + 8,0^2}} = 3,542.$$

Bezpieczeństwo analizowanego mechanizmu zniszczenia konstrukcji ( $MKZ_3$ ) wynosi

$$R_3 = p(t_3 = 3,542) = 0,999\,79.$$

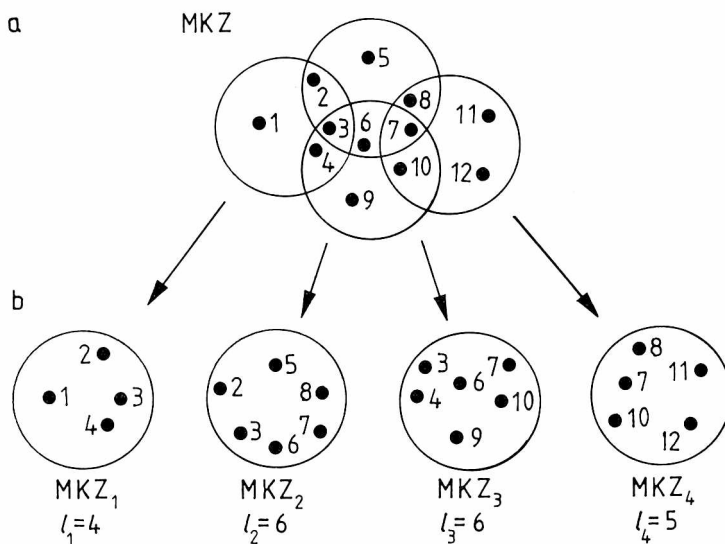
Bezpieczeństwo analizowanej ramy, o schemacie niezawodnościowym pokazanym na rys. 5.24e, wynosi

$$R = \prod_{i=1}^n p_i = 0,999\,03 \cdot 0,998\,30 \cdot 0,999\,79 = 0,997\,12.$$

Należy zauważyć, że bezpieczeństwa poszczególnych badanych mechanizmów zniszczenia ustroju  $MKZ_i$  są większe od bezpieczeństwa układu ( $R_1, R_2, R_3$ )  $> R$ .

## 5.8. Modele konstrukcji o minimalnych zbiorach krytycznych z elementami wspólnymi

Statycznie niewyznaczalne prętowe systemy konstrukcyjne z zasady są charakteryzowane wieloma krytycznymi zbiorami elementów sprawczych, które są stowarzyszone z kinematycznie dopuszczalnymi mechanizmami zniszczenia z elementami wspólnymi. Znaczący to, że te same elementy sprawcze wchodzi w skład więcej niż jednego  $MKZ$ -tu. W ustrojach tych występują minimalne krytyczne zbiory elementów ( $MKZ_i$ ),



Rys. 5.25. Minimalne krytyczne zbiory konstrukcji o mieszanym modelu niezawodnościowym: a — z elementami wspólnymi, b — z elementami rozseparowanymi

w których elementy sprawcze o wagach  $a_{ij}$  są z punktu widzenia teorii niezawodności połączone między sobą równolegle. W konstrukcjach złożonych z minimalnych krytycznych zbiorów elementów, połączonych między sobą w sposób wiązany, poszczególne zbiory mają wspólne elementy sprawcze. Ten typ konstrukcji jest najczęściej spotykany w praktyce inżynierskiej, a jego schemat niezawodnościowy pokazano na rys. 5.16.

Schemat ideowy MKZ-tu takich prętowych systemów konstrukcyjnych (o mieszanym modelu niezawodnościowym z elementami wspólnymi) pokazano na rys. 5.25a, przykłady zaś schematów statycznych konstrukcji na rys. 5.26 i rys. 5.27.

W przypadku belki ciągłej pokazanej na rys. 5.26 wytypowano następujące minimalne krytyczne zbiory elementów sprawczych

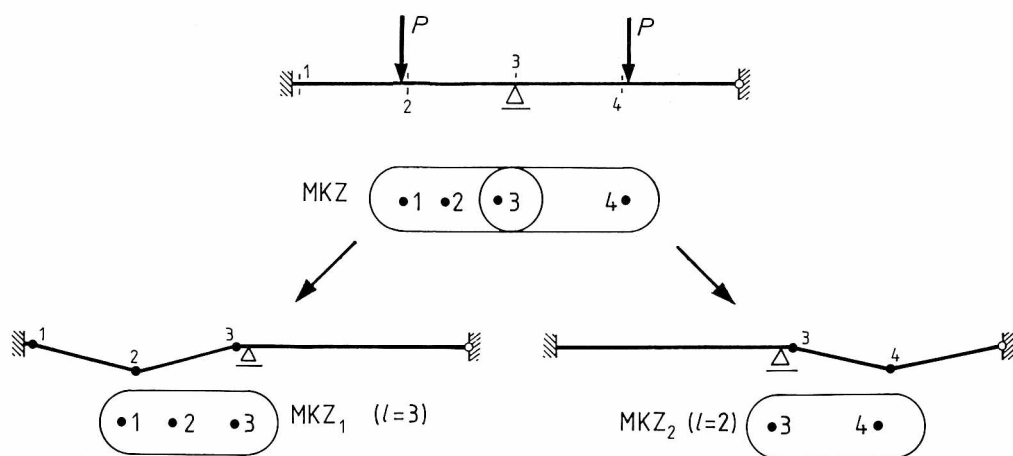
- MKZ<sub>1</sub>, złożony z elementów sprawczych 1, 2 i 3;
- MKZ<sub>2</sub>, złożony z elementów sprawczych 3, 4.

Sprawczym elementem wspólnym analizowanych MKZ<sub>1</sub> i MKZ<sub>2</sub> jest moment plastyczny na podporze środkowej (element 3).

Dla ramy, o schemacie pokazanym na rys. 5.27, należy przeanalizować 3 minimalne krytyczne zbiory, a to:

- MKZ<sub>1</sub>, złożony z elementów sprawczych 1, 2 i 3;
- MKZ<sub>2</sub>, złożony z elementów sprawczych 2, 3, 4 i 5;
- MKZ<sub>3</sub>, złożony z elementów sprawczych 1, 3, 4 i 5.

Elementem wspólnym dla trzech analizowanych MKZ-tów jest element sprawczy 3. Elementy sprawcze 2 i 3 (przeguby plastyczne) są wspólne dla MKZ<sub>1</sub> i MKZ<sub>2</sub>; elementy 1 i 3 są wspólne dla MKZ<sub>1</sub> i MKZ<sub>3</sub>; elementy 3, 4 i 5 są wspólne dla MKZ<sub>2</sub> i MKZ<sub>3</sub>.



Rys. 5.26. Schemat belki o mieszanym modelu niezawodnościowym z elementem wspólnym

Oszacowanie nośności granicznej i bezpieczeństwa konstrukcji, o analizowanym mieszanym modelu niezawodnościowym, tj. w przypadku zbiorów krytycznych z elementami wspólnymi, jest zagadnieniem jakościowo i ilościowo trudnym, zwłaszcza w miarę wzrostu liczby MKZ-tów i liczby wspólnych elementów sprawczych.

Najprostsze i łatwe oszacowanie od dołu nośności konstrukcji statycznie niewyznaczalnych [44], o modelu pokazanym na rys. 5.25a, polega na separowaniu minimalnych krytycznych zbiorów o wspólnych elementach sprawczych, w sposób pokazany na rys. 5.25b. W modelach rozseparowanych na poszczególne minimalne krytyczne zbiory (otrzymuje się  $i$  MKZ-tów), liczba elementów w poszczególnych zbiorach maleje. Po rozseparowaniu MKZ-tów system konstrukcyjny można traktować jako złożony szeregowo, z minimalnych krytycznych zbiorów (o niezawodnościowym modelu łańcucha). Losowa nośność graniczna takiego układu wynosi

$$N(\omega) = \min_{i=1}^n \left| \sum_j a_{ij} N_{ij}(\omega) \right| = \min_{i=1}^n N_i(\omega), \quad (5.25)$$

gdzie:

$N_{ij}(\omega)$  — losowa nośność graniczna  $j$ -tego elementu sprawczego w  $i$ -tym zbiorze krytycznym ustroju,

$a_{ij}$  — waga  $j$ -tego elementu sprawczego w  $i$ -tym zbiorze krytycznym ustroju,

$i$  — liczba zbiorów krytycznych ustroju,

$j$  — liczba elementów sprawczych w zbiorze krytycznym ustroju.

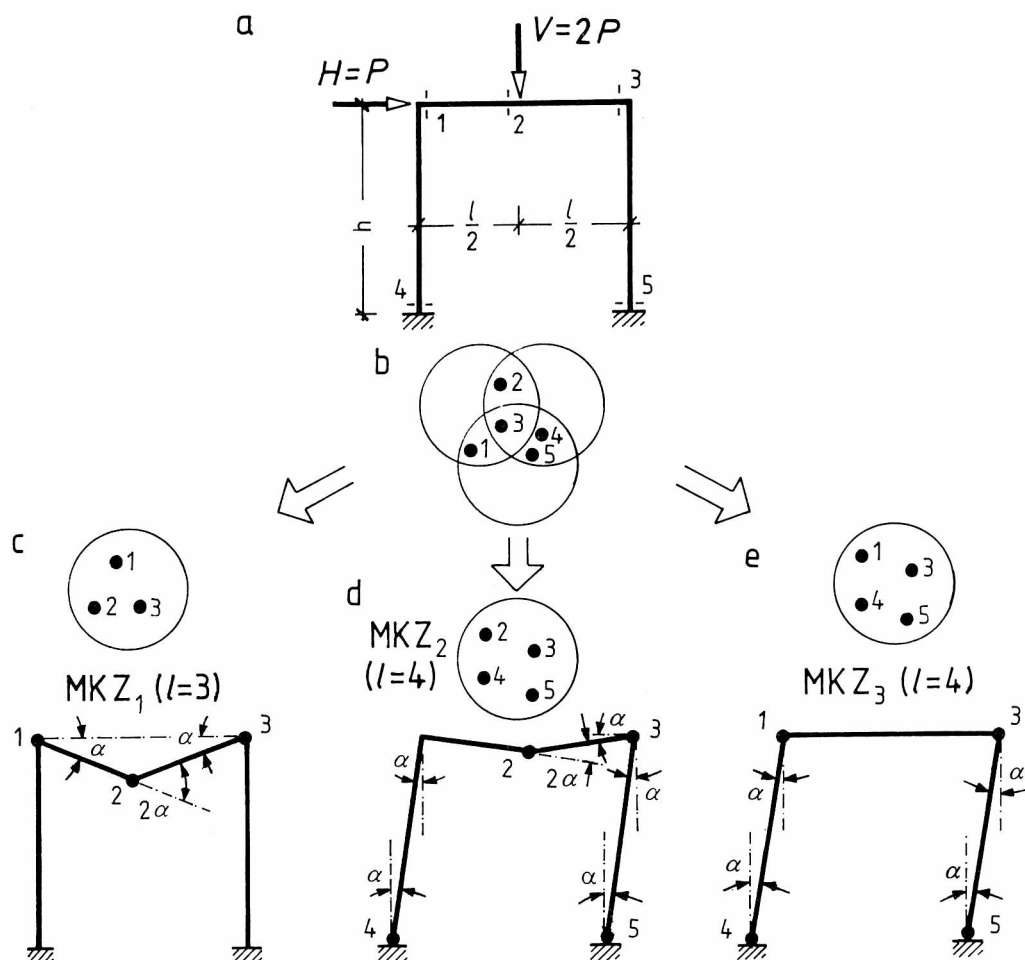
Nośności graniczne  $N_i$  poszczególnych minimalnych krytycznych zbiorów elementów sprawczych oraz bezpieczeństwa częściowe  $p_i$ , rozumiane jako prawdopodobieństwa niewystąpienia  $i$ -tych kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia, można wyznaczyć w sposób omówiony w rozdz. 5.6.

Obliczeniową nośność graniczną i bezpieczeństwo takiego układu można oszacować w przybliżeniu zakładając, że minimalne krytyczne zbiory nie mają wspólnych elementów (są od siebie niezależne), w sposób podany w rozdz. 5.7.

### Przykład 5.5

Oszacować parametry nośności granicznej  $\bar{N}_u$ ,  $s_{N_u}$ , obliczeniową nośność graniczną  $N_0$  dla  $p(3)$  oraz bezpieczeństwo ramy, o schemacie jak na rys. 5.27a. Rama o  $h = l = 4$  m, wykonana jest z I 200, o parametrach nośności granicznej przekroju poprzecznego mierzonej momentem zginającym  $\bar{N} = 81,0$  kNm,  $s_N = 9,26$  kNm. Obciążona jest ona siłą pionową  $V(\omega) = 2P(\omega)$  i poziomą  $H(\omega) = P(\omega)$ , o parametrach  $\bar{P} = 40$  kN,  $s_P = 4$  kN.

Analizowana rama (rys. 5.27a) z punktu widzenia teorii niezawodności jest układem złożonym z połączonych trzech minimalnych krytycznych zbiorów z wspólnymi elementami sprawczymi (rys. 5.27b). Dla tej konstrukcji wyróżnić można następujące rozseparowane zbiory elementów sprawczych: MKZ<sub>1</sub> — złożony z elementów 1, 2 i 3 (rys. 5.27c); MKZ<sub>2</sub> — złożony z elementów 2, 3, 4 i 5 (rys. 5.27d) i MKZ<sub>3</sub> — złożony z elementów 1, 3, 4 i 5 (rys. 5.27e). Wytypowane MKZ<sub>*i*</sub> elementów sprawczych są ze sobą sprzężone, a schemat niezawodnościowy tego ustroju pokazano na rys. 5.27b. Każdy z rozważanych, rozseparowanych MKZ<sub>*i*</sub> tego ustroju ma elementy sprawcze, które wchodzi również do innego rozseparowanego MKZ-tu.



Rys. 5.27. Schemat ramy o mieszanym modelu niezawodnościowym z elementami wspólnymi

### Oszacowanie parametrów nośności granicznej dla $MKZ_1$ (rys. 5.27c)

Dla przyjętych na rys. 5.27c oznaczeń równanie prac przygotowanych dla stanu granicznego rygla ramy ( $MKZ_1$ ) ma następującą postać:

$$V\alpha \frac{l}{2} = \alpha M_1 + 2\alpha M_2 + \alpha M_3,$$

$$P = \left( \frac{1}{l} M_1 + \frac{2}{l} M_2 + \frac{1}{l} M_3 \right).$$

Oczekiwana nośność graniczna ustroju mierzona obciążeniem ( $P_1 = N_1$ ) z warunku wystąpienia mechanizmu zniszczenia w ryglu analizowanej ramy ( $MKZ_1$ )



wynosi

$$\bar{N}_1 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{1}{l} \bar{N} + \frac{2}{l} \bar{N} + \frac{1}{l} \bar{N} = \frac{81,0}{4} (1 + 2 + 1) = 81,0 \text{ kN}.$$

Odchylenie standardowe nośności granicznej dla tego mechanizmu zniszczenia obliczono ze wzoru

$$s_{N_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot s_{N_i}^2} = \frac{1}{4} 9,26 \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = 5,67 \text{ kN}.$$

### Oszacowanie parametrów nośności granicznej dla MKZ<sub>2</sub> (rys. 5.27d)

Dla przyjętych na rys. 5.27d oznaczeń równanie prac przygotowanych dla stanu granicznego ramy (MKZ<sub>2</sub>) ma następującą postać

$$H\alpha l + V\alpha \frac{l}{2} = \alpha M_4 + 2\alpha M_2 + 2\alpha M_3 + \alpha M_5,$$

$$P = \frac{1}{2l} M_4 + \frac{1}{l} M_2 + \frac{1}{l} M_3 + \frac{1}{2l} M_5.$$

Oczekiwana nośność graniczna konstrukcji mierzona obciążeniem ( $P_2 = N_2$ ) z warunku wystąpienia tego mechanizmu zniszczenia analizowanej ramy (MKZ<sub>2</sub>) wynosi

$$\bar{N}_2 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{1}{2l} \bar{N} + \frac{1}{l} \bar{N} + \frac{1}{l} \bar{N} + \frac{1}{2l} \bar{N} = \left( \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{81,0}{4} = 60,75 \text{ kN}.$$

Odchylenie standardowe nośności granicznej obliczono ze wzoru

$$s_{N_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot s_{N_i}^2} = \frac{1}{4} 9,26 \sqrt{\left( \frac{1}{2} \right)^2 + 1^2 + 1^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2} = 3,66 \text{ kN}.$$

### Oszacowanie parametrów nośności granicznej dla MKZ<sub>3</sub> (rys. 5.27e)

Dla przyjętych na rys. 5.27e oznaczeń równanie prac przygotowanych dla stanu granicznego przechyłowego mechanizmu zniszczenia ramy (MKZ<sub>3</sub>) ma następującą postać

$$H\alpha l = \alpha M_4 + \alpha M_1 + \alpha M_3 + \alpha M_5,$$

$$P = \frac{1}{l} M_4 + \frac{1}{l} M_1 + \frac{1}{l} M_3 + \frac{1}{l} M_5.$$

Oczekiwana nośność graniczna konstrukcji mierzona obciążeniem ( $P_3 = N_3$ ) z warunku wystąpienia przechyłowego mechanizmu zniszczenia analizowanej ramy (MKZ<sub>3</sub>) wynosi

$$\bar{N}_3 = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i = \frac{1}{l} \bar{N} + \frac{1}{l} \bar{N} + \frac{1}{l} \bar{N} + \frac{1}{l} \bar{N} = 4 \cdot \frac{81,0}{4} = 81,0 \text{ kN}.$$

Odchylenie standardowe nośności granicznej dla tego mechanizmu zniszczenia obliczono ze wzoru

$$s_{N_3} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot s_{N_i}^2} = \frac{1}{4} 9,26 \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 4,63.$$

O nośności granicznej badanej ramy decyduje MKZ<sub>2</sub>, a parametry jej nośności mierzone obciążeniem poprzecznym wynoszą  $\bar{N}_u = 60,75$  kN,  $s_{N_u} = 3,66$  kN.

Nośność obliczeniowa ramy dla poziomu istotności  $p(3)$  wynosi

$$N_0 = \bar{N}_u - t s_{N_u} = 60,75 - 3 \cdot 3,66 = 49,77 \text{ kN}.$$

Indeks niezawodności  $t$  dla obciążenia ramy siłą  $P(\omega)$  w przypadku wystąpienia MKZ<sub>2</sub> wynosi

$$t = \frac{\bar{N} - \bar{P}}{\sqrt{s_N^2 + s_P^2}} = \frac{60,75 - 40,0}{\sqrt{3,66^2 + 4,0^2}} = \frac{20,75}{5,42} = 3,83.$$

Prognozowane bezpieczeństwo ramy w przypadku wystąpienia analizowanego mechanizmu zniszczenia konstrukcji MKZ<sub>2</sub> wynosi

$$R = p(3,83) = 0,99993.$$

# Literatura

- [1] Alpsten G. A., *Variation in Strength Cross-Sectional Dimensions of Structural Shapes*, Proceedings Stalbygnad Nordiska Forskningar, Swedish, Institute of Steel Construction, 1970.
- [2] Alpsten G. A., *Variations in Mechanical and Cross-Sectional Properties of Rolled Steel*, State of Art. Report No. 1 Techn. Comm. No. 9, ASCE-IABSE Joint Committee on Planning and Design of Tall Buildings, Conference Pre-prints; Report Vol. 1b-9, s. 1–51, August, 1972.
- [3] Augustyn J., *Europejska norma wykonania konstrukcji stalowych*, Konstrukcje Stalowe nr 2/1994.
- [4] Augustyn J., Śledziewski E., *Technologiczność konstrukcji stalowych*, Arkady, Warszawa 1981.
- [5] Biegus A., *Zastosowanie teorii drugiego rzędu do obliczania słupów utwierdzonych*, Inżynieria i Budownictwo nr 8/1979, s. 293–295.
- [6] Biegus A., *Losowa utrata stateczności słupów utwierdzonych*, Inżynieria i Budownictwo nr 9–10/1980, s. 341–345.
- [7] Biegus A., *Nośność graniczna ściskanych blach faldowych*, Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej nr 18/38, Wrocław 1983.
- [8] Biegus A., *Badania losowej krzywej równowagi granicznej ściskanych blach faldowych*, Rozprawy Inżynierskie t. 36, z. 1, 1988, s. 15–27.
- [9] Biegus A., *Podstawy probabilistycznej analizy bezpieczeństwa konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1996.
- [10] Biegus A., *Nośność graniczna stalowych konstrukcji prętowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław 1997.
- [11] Biegus A., *Połączenia śrubowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław 1997.
- [12] Biegus A., *Nośność graniczna śrubowych styków doczołowych z imperfekcjami geometrycznymi*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1998.
- [13] Biegus A., Hotała E., *Oszacowanie losowej nośności granicznej uszkodzonych korozyjnie zbiorników stalowych*, XIX Konferencja Naukowo-Techniczna „Awary budowlane”, 19–22 maja 1999, Szczecin–Międzyzdroje, s. 571–578.
- [14] Biegus A., Kowal Z., *Oszacowanie losowej nośności skorodowanych rur i węzłów kulowych przekrycia strukturalnego*, Przegląd Budowlany nr 5/6, 1982, s. 198–202.
- [15] Biegus A., Kowal Z., *Badania modelowe wpływu losowych sił wewnętrznych w zerowych prętach struktur przestrzennych*, XXIII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1977, s. 20–35.
- [16] Biegus A., Kowal Z., Seidel W., *Badania modelowe wpływu odchylek podpór na siły wewnętrzne w prętowej strukturze czterospadkowej*, VI Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna „Konstrukcje metalowe”, Katowice 1979, t. 2, s. 257–266.
- [17] Biegus A., Kowal Z., *Oszacowanie parametrów losowej nośności granicznej zginanych blach faldowych*, XXXI Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1985, s. 19–24.
- [18] Biegus A., Kowal Z., Seidel W., *Oszacowanie parametrów losowej nośności granicznej na podstawie procesu stochastycznego przemieszczeń*, XXVI Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1980, s. 13–20.
- [19] Biegus A., Rykaluk K., *Nietypowe przyczyny drgań kominów stalowych*, XVI Konferencja Naukowo-Techniczna „Awary budowlane”, 25–27 maja 1995, Szczecin–Międzyzdroje, s. 547–553.
- [20] Bobrowski D., *Probabilistyka w zastosowaniach technicznych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.

- [21] Bogucki W., Żybertowicz M., *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych*, Arkady, Warszawa 1996.
- [22] Bodarski Z., Pasternak H., Kisielewski R., *Niedokładności geometryczne torów podsuwnicowych i ich wpływ na charakter i wartość obciążenia*, Inżynieria i Budownictwo nr 7–8/1981.
- [23] Bołotin W. A., *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Arkady, Warszawa 1968.
- [24] Bródka J., *Imperfekcje elementów konstrukcji stalowych*, Biuletyn Techniczny „Mostostal”, nr 3/1987.
- [25] Bródka J., Juchniewicz J., *Ocena bezpieczeństwa prętów z defektami*, Inżynieria i Budownictwo nr 11/1994.
- [26] Bródka J., Goczek J., *Podstawy konstrukcji metalowych*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1993.
- [27] Chen W. F., Atsuta T., *Theory of Beam-Columns*, vol. 1, McGraw-Hill, New York 1976.
- [28] Doliński K., Hien T. D., Rackwitz R., *Niezawodnościowe projektowanie konstrukcji*, Materiały kursu szkoleniowego, Poznań 1996.
- [29] Engel L., Sieczkowski J. M., *Obciążenia konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1988.
- [30] Esslinger M., Geir B., *Post Buckling Behaviour of Structures*, Springer-Verlag, Wien–New York, 1975.
- [31] Giżejowski M., *Probabilistyczny model wyboczenia słupów w podwyższonej temperaturze*, XXXI Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1985.
- [32] Greń J., *Statystyka matematyczna, Modele i zadania*, PWN, Warszawa 1974.
- [33] Grigoliuk E. J., Kobanov V. V., *Ustojčivost' oboloček*, Strojizdat, Moskva 1978.
- [34] Gwóźdź M., *Zagadnienia nośności losowej prętów metalowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, z. 69, Kraków 1997.
- [35] Janicki S., *Tolerancje wymiarów i pasowania w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1958.
- [36] Komentarz do normy PN-90/B-03200, Centralny Ośrodek Badawczo-Projektowy Konstrukcji Metalowych „Mostostal”, Warszawa 1992.
- [37] Kowal Z., *Bezpieczeństwo konstrukcji w świetle teorii niezawodności*, Archiwum Inżynierii Lądowej nr 4/1967, s. 631–644.
- [38] Kowal Z., *Nośność graniczna konstrukcji złożonych z elementów równolegle połączonych z punktu widzenia niezawodności*, Archiwum Inżynierii Lądowej nr 4/1971, s. 611–619.
- [39] Kowal Z., *Numeryczne wyznaczanie nośności granicznych konstrukcji szeregowo złożonych z punktu widzenia teorii niezawodności*, Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej nr 5, Wrocław 1971.
- [40] Kowal Z., *Oszacowanie nośności granicznej i bezpieczeństwa konstrukcji na podstawie teorii niezawodności*, Inżynieria i Budownictwo nr 10/1972, s. 386–390.
- [41] Kowal Z., Szychowski A., *Nośność graniczna prętów ściskanych pod interakcyjnym obciążeniem poprzecznym*, Inżynieria i Budownictwo nr 7/1996, s. 399–404.
- [42] Kowal Z., *Wstęp do teorii konstrukcji metalowych*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1977.
- [43] Kowal Z., *Parametry losowej wytrzymałości krytycznej prętów ściskanych i współczynniki wyboczenia*, Archiwum Inżynierii Lądowej nr 1/1981, s. 79–88.
- [44] Kowal Z., *Oszacowanie bezpieczeństwa konstrukcji*, Konwersatorium „Mechanika stochastyczna”, Szklarska Poręba 21–22 maja 1993, PTMTiS Oddział we Wrocławiu, s. 17–30.
- [45] Kowal Z., *Statystyczne osłabienie i wzmocnienie konstrukcji*, Inżynieria i Budownictwo nr 7–8/1995.
- [46] Kowal Z., Paczkowski W., *Siły wewnętrzne w przestrzennych strukturach zbudowanych z prętów o losowej długości*, Archiwum Inżynierii Lądowej, t. 27, nr 2/1981, s. 249–260.
- [47] Kowal Z., Zubrzycki S., *O bezpieczeństwie ustrojów prętowych*, Archiwum Inżynierii Lądowej nr 1/1970, s. 213–221.
- [48] Mendera Z., *Współczynnik jednorodności stali a metoda stanów granicznych*, XVI Konferencja KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1968.
- [49] Mendera Z., *Normalizacja warunku stateczności powłok walcowych i kulistych*, VII Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna „Konstrukcje Metalowe”, Gdańsk 1984.

- [50] Mendera Z., *Interakcje niestateczności sprężystej i plastycznej w cienkościennych powłokach z imperfekcjami*, Archiwum Inżynierii Ładowej nr 4/1986, s. 523–536.
- [51] Mendera Z., *Unifikacja obliczeń stateczności elementów konstrukcji stalowych*, Sesja Naukowa z okazji jubileuszu 80-lecia prof. W. Boguckiego, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1990.
- [52] Mendera Z., *Problemy harmonizacji polskiej normy projektowania konstrukcji stalowych z normą europejską*, Inżynieria i Budownictwo nr 10/1993.
- [53] Mendera Z., *Współczynniki częściowe a harmonizacja norm projektowania konstrukcji stalowych*, IX International Conference on Metal Structures, Kraków 1995, vol. 2, s. 253–262.
- [54] Mendera Z., *Częściowe współczynniki bezpieczeństwa i modele obliczeniowe konstrukcji stalowych na tle Eurokodu 3*, Inżynieria i Budownictwo nr 11/1995.
- [55] Mendera Z., *Współdziałanie imperfekcji w stalowych prętach ściskanych*, Inżynieria i Budownictwo nr 9/1997, s. 459–461.
- [56] Mendera Z., *Stateczność metalowej powłoki kulistej wszechstronnie ściskanej*, Konferencja Naukowa „Badania nośności granicznej konstrukcji metalowych”, Wrocław–Szklarska Poręba, 23–25 października 1998, s. 231–239.
- [57] Mendera Z., *Zagadnienia stanów granicznych konstrukcji stalowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej nr 7, z. 33, Kraków 1969.
- [58] Murzewski J., *Wprowadzenie do teorii bezpieczeństwa konstrukcji*, PWN, Warszawa 1963.
- [59] Murzewski J., *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*, Arkady, Warszawa 1970.
- [60] Murzewski J., *Teoria nośności losowej konstrukcji prętowych*, PWN, Warszawa 1976.
- [61] Murzewski J., *Zarys teorii niezawodności konstrukcji*, Politechnika Krakowska, Kraków 1983.
- [62] Murzewski J., *Wytrzymałość obliczeniowa stali niskostopowych*, Inżynieria i Budownictwo nr 3/1984, s. 82–85.
- [63] Murzewski J., *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*, Arkady, Warszawa 1989.
- [64] Murzewski J., *Projektowanie konstrukcji stalowych metodą wskaźników bezpieczeństwa*, Materiały konferencji szkoleniowej, Janowice 1992.
- [65] Murzewski J., *Lessons from Probabilistic Projects for Codified Design*, IX International Conference „Metal Structures”, Kraków 1995.
- [66] Murzewski J., Gwóźdź M., *Losowa niestateczność elementów obciążonych mimośrodowo*, V Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Cedzyna 1988.
- [67] Murzewski J., Sowa A., *Zagadnienia statystycznej estymacji i weryfikacji losowego obciążenia i nośności konstrukcji*, Ossolineum, Wrocław 1979.
- [68] Murzewski J., Sowa A., Domański T., *Prognoza wytrzymałości polskich stali konstrukcyjnych*, Inżynieria i Budownictwo nr 1–4/1982, s. 32–34.
- [69] Neiman J., *Zasady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1969.
- [70] *Poradnik projektanta konstrukcji metalowych*, pod red. W. Boguckiego, Arkady, Warszawa 1982.
- [71] Roik K., *Vorlesungen über Stahlbau*, Verlag, Berlin 1978.
- [72] Rykaluk K., *Pozostające naprężenia spawalnicze w wybranych stanach granicznych nośności*, Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej nr 29/11, Wrocław 1981.
- [73] Sertler H., Vican J., Slavik J., *Compression Resistance of Steel Structure Members*, International Colloquium European Session „Stability of Steel Structures”, Preliminary Report, vol. 1, s. 71–78, Budapest 1995.
- [74] Sertler H., Vican J., Slavik J., *Structural Capacity of Existing Steel Bridges*, IX International Conference on Metal Structures, Kraków 1995, vol. 2, s. 189–198.
- [75] Seidel W., *Próba analizy i syntezy wybranych właściwości struktur przestrzennych*, Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1981.
- [76] Strelecki N. S., *K voprosu obščego koefficienta bezopasnosti*, Projekt i Standard nr 10/1935.

- [77] Tall L., Alpsten G., *On the Scatter in Yield Strength and Residual Stresses in the Steel Members*, Final report IBSE, Symposium on Concepts of Safety of Structures and Methods of Design, s. 151–163, London 1969.
- [78] Timoschenko W. P., Gere J. M., *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
- [79] Urbańska-Galewska E., *Analiza wpływu rzeczywistych niedokładności geometrycznych na pracę konstrukcji ramowej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej nr 368, Budownictwo Lądowe XXXIX, s. 47–64, Gdańsk 1984.
- [80] Urbańska-Galewska E., *Wpływ niedokładności i wykonawstwa na pracę i bezpieczeństwo ram systemu Fermstal*, Konferencja Naukowa SKM KILiW PAN – SBRKTR – KKM PZiTB – WBL ART „Połączenia w konstrukcjach metalowych oraz konstrukcje metalowe w budownictwie rolniczym”, Olsztyn, 20–22 października 1983, s. 127–132.
- [81] Wierzbicki W., *Bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa*, Przegląd Techniczny, 1936.
- [82] Winter G., *Strength of Thin Steel Compression Flanges*, Trans. ACSE, 1974, vol. 112.
- [83] Volmir A. S., *Uстойчивость деформируемых систем*, Nauka Moskva 1967.
- [84] Ziółko J., *Utrzymanie i modernizacja konstrukcji stalowych*, Arkady, Warszawa 1991.
- [85] Ziółko J., Orlik G., *Montaż konstrukcji stalowych*, Arkady, Warszawa 1980.
- [86] Ziółko J., Włodarczyk W., Mendera Z., Włodarczyk S., *Stalowe konstrukcje specjalne*, Arkady, Warszawa 1995.
- [87] Zubrzycki S., *Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1970.
- [88] Żurański J. A., *Obciążenie wiatrem budowli i konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1978.

## Normy

- [89] BS 5950 *Structural Use of Steelwork in Building*, Part 1, 1990.
- [90] DIN 18800 TEIL 1-4 *Stahlbauten*.
- [91] Eurocode 1. *Basic of Design and Actions on Structures*, Part 1, ENV-1991-1, CEN, Brussels 1993.
- [92] Eurocode 3. *Design of Steel Structures*. Part 1. *General Rules and Rules for Buildings*, ENV 1993-1-1, CEN, Brussels 1992.
- [93] ISO, 2394, *General Principles on Reliability for Structures*, 2<sup>nd</sup> ed., 1986-10-15: International Standard (in revision).
- [94] PN-82/B-02000. *Obciążenia budowli. Zasady ustalania wartości*.
- [95] PN-82/B-02001. *Obciążenia budowli. Obciążenia stałe*.
- [96] PN-82/B-02003. *Obciążenia budowli. Obciążenia technologiczne*.
- [97] PN-82/B-02004. *Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne technologiczne*.
- [98] PN-86/B-02005. *Obciążenia budowli. Obciążenia suwnicami pomostowymi i wciągarkami*.
- [99] PN-80/B-02010. *Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie śniegiem*.
- [100] PN-77/B-02011. *Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie wiatrem*.
- [101] PN-90/B-03200. *Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie*.
- [102] PN-93/B-03201. *Konstrukcje stalowe. Kominy. Obliczenia i projektowanie*.
- [103] PN-B-03202:1996. *Konstrukcje stalowe. Silosy na materiały sypkie. Obliczenia statyczne i projektowanie*.
- [104] PN-B-06200:1997. *Konstrukcje stalowe budowlane. Warunki wykonania i odbioru. Wymagania podstawowe*.
- [105] PN-63/B-06201. *Konstrukcje stalowe z cienkościennych kształtowników profilowanych na zimno. Wymagania techniczne przy odbiorze*.
- [106] PN-B-03210:1997. *Konstrukcje stalowe. Zbiorniki walcowe pionowe na cieczy. Projektowanie i wykonanie*.

- [107] PN-79/H-92202. *Blachy cienkie. Tolerancje wykonania.*
- [108] PN-79/H-92203. *Blachy grube i uniwersalne. Tolerancje wykonania.*
- [109] PN-79/H-93010. *Warunki techniczne wykonania kształtowników walcowanych.*
- [110] PN-91/H-93419. *Dwuteowniki. Tolerancje wykonania.*
- [111] PN-91/H-93451. *Ceowniki. Tolerancje wykonania.*
- [112] PN-84/H-93402. *Kątowniki. Tolerancje wykonania.*
- [113] PN-H-04623:1986. *Ochrona przed korozją. Pomiar grubości powłok metalowych metodami nieniszczącymi.*
- [114] PN-91/H-93406. *Teowniki wysokie. Tolerancje wykonania.*
- [115] PN-80/H-74219. *Rury stalowe bez szwu, przewodowe. Tolerancje wykonania.*
- [116] PN-74/N-01051. *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Nazwy, określenia i symbole.*
- [117] EN 1090-1:1996. *Execution of Steel Structures — Part 1: General Rules for Buildings.*



Wydawnictwo Naukowe PWN SA

Wydanie pierwsze

Arkuszy drukarskich 12,5

Druk ukończono we wrześniu 1999 r.

Wrocławska Drukarnia Naukowa PAN

im. S. Kulczyńskiego Sp. z o.o.







BIBLIOTEKA GŁÓWNA

301328L/1

Książka przybliża skomplikowane zagadnienie prognozowania niezawodności i bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych. Omawia podstawy probabilistycznej analizy bezpieczeństwa konstrukcji i zasady prawidłowego formułowania modeli obliczeniowych z uwzględnieniem losowych cech ustrojów rzeczywistych. Układ materiału i przykłady obliczeń ułatwiają samodzielne rozwiązywanie analizowanych problemów.

Monografia dla studentów budownictwa, przydatna w pracy inżynierów i konstruktorów wielu specjalności.

ISBN 83-01-12987-5



9 788301 129873