

**Andrzej Kmiec**

# **Procesy cieplne i aparaty**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej  
Wrocław 2005

Recenzenci

Jan Bandrowski  
Władysław Kamiński

Projekt okładki

Zofia i Dariusz Godlewscy

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2005

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-864-3

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 200/2005.

# Spis treści

|  |    |
|--|----|
| Przedmowa.....   | 7  |
| 1. Zasady wymiany ciepła .....   | 9  |
| 1.1. Wstęp.....  | 9  |
| 1.2. Pole temperatury.....   | 9  |
| 1.3. Rodzaje wymiany ciepła.....   | 12 |
| 2. Przewodzenie ciepła.....  | 13 |
| 2.1. Wstęp.....  | 13 |
| 2.2. Prawo Fouriera sformułowane dla przewodzenia ciepła.....                    | 14 |
| 2.3. Przewodność cieplna i współczynnik przewodzenia ciepła.....                 | 15 |
| 2.3.1. Współczynnik przewodzenia ciepła ciał stałych metalicznych.....           | 16 |
| 2.3.2. Współczynnik przewodzenia ciepła w ciałach niemetalicznych.....           | 18 |
| 2.3.3. Współczynnik przewodzenia ciepła cieczy.....                              | 20 |
| 2.3.4. Współczynnik przewodzenia ciepła gazów .....                              | 21 |
| 2.4. Ustalony ruch ciepła przez przewodzenie w ścianie płaskiej.....             | 23 |
| 2.4.1. Definicja oporu cieplnego .....   | 24 |
| 2.4.2. Rozkład temperatury w ścianie płaskiej.....                               | 24 |
| 2.5. Ustalone przewodzenie ciepła w wielowarstwowej ścianie płaskiej.....        | 26 |
| 2.6. Ustalone przewodzenie ciepła w jednowarstwowej ścianie rurowej.....         | 27 |
| 2.7. Ustalone przewodzenie ciepła w wielowarstwowej ścianie rurowej.....         | 29 |
| 3. Wnikanie ciepła.....  | 33 |
| 4. Przenikanie ciepła .....  | 37 |
| 4.1. Opory cieplne wnikania i przenikania ciepła .....                           | 39 |
| 4.2. Przenikanie ciepła przez wielowarstwową ścianę płaską.....                  | 41 |
| 4.3. Przenikanie ciepła przez przegrodę rurową.....                              | 42 |
| 4.4. Analiza oporu cieplnego pierścieniowej warstwy izolacji .....               | 45 |
| 5. Izolacja cieplna.....   | 49 |
| 5.1. Rodzaje izolacji cieplnej.....  | 49 |
| 5.2. Charakterystyka materiałów izolacyjnych .....                               | 49 |
| 5.3. Ekonomiczna grubość warstwy izolacji.....                                   | 50 |
| 6. Przewodzenie ciepła w warunkach nieustalonych.....                            | 53 |
| 6.1. Różniczkowe równanie przewodzenia ciepła .....                              | 53 |
| 6.2. Warunki jednoznaczności przewodzenia ciepła .....                           | 57 |
| 6.3. Analiza przewodzenia ciepła w warunkach nieustalonych .....                 | 59 |
| 6.3.1. Wprowadzenie.....   | 59 |
| 6.3.2. Chłodzenie lub ogrzewanie płyty płaskiej.....                             | 59 |
| 6.3.2.1. Rozwiązanie analityczne równania różniczkowego przewodzenia ciepła..... | 60 |

|                 |   |     |
|-----------------|---|-----|
| 6.3.2.2.        | Omówienie rozwiązania równania różniczkowego przewodzenia ciepła w nieskończonej płycie płaskiej .....    | 64  |
| 6.3.2.3.        | Analiza nieustalonego przewodzenia ciepła podczas chłodzenia płyty ...                                    | 65  |
| 6.3.3.          | Chłodzenie lub ogrzewanie cylindra nieskończonego .....   | 68  |
| 6.3.4.          | Chłodzenie lub ogrzewanie kuli .....  | 71  |
| 6.3.5.          | Chłodzenie lub ogrzewanie ciał o niedużych wymiarach .....  | 73  |
| 6.3.6.          | Rozwiązanie równania Fouriera dla ustalonego przewodzenia ciepła w ścianie płaskiej .....                 | 75  |
| 6.3.7.          | Rozwiązania równania Fouriera dla charakterystycznych przypadków nieustalonego przewodzenia ciepła.....   | 77  |
| Przykład 1..... |   | 77  |
| Przykład 2..... |   | 78  |
| 7.              | Ruch ciepła przez konwekcję.....  | 81  |
| 7.1.            | Wprowadzenie .....  | 81  |
| 7.2.            | Podstawy teorii wnikania ciepła.....  | 82  |
| 7.2.1.          | Różniczkowe równanie ruchu ciepła – równanie energii .....  | 82  |
| 7.2.2.          | Równanie energii laminarnej warstwy granicznej .....  | 86  |
| 7.2.3.          | Równanie całkowite energii laminarnej warstwy granicznej .....  | 87  |
| 7.2.4.          | Rozwiązanie równania energii laminarnej warstwy granicznej na płycie płaskiej.                            | 88  |
| 7.2.5.          | Rozwiązanie równania energii turbulentnej warstwy granicznej na płycie płaskiej .....                     | 92  |
| 7.3.            | Teoria podobieństwa i analiza wymiarowa .....   | 95  |
| 7.3.1.          | Wyprowadzenie modułów podobieństwa z równania energii .....   | 98  |
| 7.4.            | Wnikanie ciepła podczas wymuszonego przepływu burzliwego.....   | 100 |
| 7.4.1.          | Przypadki szczególne.....   | 106 |
| 7.4.2.          | Wnikanie ciepła podczas przepływu wokół różnorodnych elementów.....                                       | 108 |
| 7.5.            | Wnikanie ciepła podczas wymuszonego przepływu laminarnego.....  | 111 |
| 7.6.            | Wnikanie ciepła w obszarze przejściowym.....  | 119 |
| 7.7.            | Wnikanie ciepła podczas przepływu swobodnego w warunkach konwekcji naturalnej.....                        | 120 |
| 7.8.            | Wnikanie ciepła podczas grawitacyjnego spływu cieczy po ścianie .....                                     | 126 |
| 7.9.            | Wnikanie ciepła podczas skraplania pary nasyconej.....  | 130 |
| 7.9.1.          | Teoria Nusselta .....   | 133 |
| 7.9.2.          | Wpływ intensywności skraplania na wnikanie ciepła .....   | 139 |
| 7.9.3.          | Wpływ prędkości i kierunku ruchu pary na wnikanie ciepła podczas kondensacji filmowej.....                | 140 |
| 7.9.4.          | Wpływ obecności gazów obojętnych w parze na współczynnik wnikania ciepła ...                              | 141 |
| 7.9.5.          | Wnikanie ciepła podczas kondensacji wewnątrz poziomych rur i węzownic .....                               | 141 |
| 7.9.6.          | Obliczenia uproszczone dla kondensacji filmowej .....   | 142 |
| 7.10.           | Warunki parowania i wrzenia cieczy .....  | 142 |
| 7.10.1.         | Szybkość parowania cieczy.....  | 143 |
| 7.11.           | Wnikanie ciepła podczas wrzenia cieczy .....  | 144 |
| 8.              | Zatężanie roztworów nielotnych substancji. Wyparki .....  | 151 |
| 8.1.            | Bilans masowy procesu odparowania .....   | 151 |
| 8.2.            | Wielostopniowe instalacje wyparne.....  | 153 |
| 8.3.            | Obliczanie całkowitej różnicy temperatury instalacji wyparnej .....                                       | 155 |
| 8.4.            | Obliczanie użytecznej różnicy temperatury instalacji wyparnej.....  | 158 |
| 8.4.1.          | Założenie minimalnej powierzchni wymiany ciepła .....   | 158 |
| 8.4.2.          | Założenie równych powierzchni wymiany ciepła .....  | 160 |
| 8.4.3.          | Założenie minimalnej całkowitej powierzchni wymiany ciepła i jednakowych powierzchni w każdym dziale..... | 161 |

|   |     |
|---|-----|
| 9. Analogia między ruchem ciepła a ruchem pędu .....  | 163 |
| 9.1. Analogia Reynoldsa.....  | 163 |
| 9.2. Analogia Prandtla.....   | 166 |
| 9.3. Analogia Colburna.....   | 171 |
| 10. Promieniowanie ciepłe .....   | 173 |
| 10.1. Wprowadzenie.....   | 173 |
| 10.2. Właściwości promieniowania ciepłego.....  | 174 |
| 10.3. Podstawowe prawa promieniowania.....  | 176 |
| 10.3.1. Prawo Kirchhoffa .....  | 176 |
| 10.3.2. Prawo Lamberta.....   | 176 |
| 10.3.3. Prawo Plancka .....   | 178 |
| 10.3.4. Prawo Wiena .....   | 180 |
| 10.3.5. Prawo Stefana–Boltzmana.....  | 180 |
| 10.4. Promieniowanie ciepłe między ciałami stałymi.....   | 181 |
| 10.4.1. Wymiana ciepła między dwoma równoległymi płytami .....  | 182 |
| 10.4.2. Wymiana ciepła od powierzchni $A_1$ zamkniętej przez powierzchnię $A_2$ .....   | 184 |
| 10.4.3. Wymiana ciepła między dwoma powierzchniami dowolnie ustawionymi.....  | 184 |
| 10.5. Promieniowanie gazów.....   | 185 |
| 11. Obliczanie wymienników ciepła.....  | 191 |
| 11.1. Klasyfikacja wymienników ciepła .....   | 191 |
| 11.2. Typy konstrukcji wymienników ciepła .....   | 192 |
| 11.3. Warunki pracy wymienników ciepła .....  | 193 |
| 11.4. Średnia różnica temperatury .....   | 195 |
| 11.4.1. Przeciwprądowy i współprądowy przepływ płynów.....  | 195 |
| 11.4.2. Prądy skrzyżowane i mieszane .....  | 198 |
| 11.5. Obliczenia wielkości wymiennika oparte na jego sprawności .....   | 201 |
| 11.6. Rozkład temperatury płynów i ściany.....  | 204 |
| 11.6.1. Temperatura płynów.....   | 204 |
| 11.6.2. Temperatura ścianki.....  | 208 |
| 11.7. Wskazówki do projektowania wymienników ciepła.....  | 208 |
| 11.8. Obliczanie wymienników dla wybranych przypadków nieustalanej wymiany ciepła.....  | 210 |
| 11.8.1. Ogrzewanie (chłodzenie) cieczy przez ścianę zbiornika w stałej temperaturze<br>czynnika grzejjego (chłodzącego) ..... | 210 |
| 11.8.1.1. Chłodzenie cieczy w zbiorniku na wolnym powietrzu .....   | 213 |
| 11.8.1.2. Ogrzewanie zbiornika z cieczą za pomocą pary nasyconej .....  | 214 |
| 11.8.2. Ogrzewanie (ozębianie) cieczy medium grzejjym (chłodzący) w zmiennej<br>temperaturze.....                             | 215 |
| 11.8.3. Ogrzewanie (ozębianie) cieczy za pomocą zewnętrznego wymiennika ciepła<br>o stałej temperaturze medium.....           | 218 |
| 11.9. Obliczanie regeneratorów ciepła .....   | 220 |
| 11.10. Wybór typu konstrukcji przeponowego wymiennika ciepła.....   | 222 |
| Oznaczenia.....   | 225 |
| Piśmiennictwo cytowane.....   | 227 |

# Przedmowa

Podręcznik zawiera materiał wykładany przez autora na kierunku inżynieria chemiczna i procesowa. Jest on adresowany zarówno do studentów, doktorantów jak i pracowników wyższych uczelni zainteresowanych zagadnieniami transportu ciepła. Przedstawiono w nim podstawy teoretyczne ruchu ciepła oraz metody obliczania wymienników ciepłych z uwzględnieniem zarówno klasycznych ujęć teoretycznych, takich jak teoria Nusselta zastosowana do opisu wnikania ciepła podczas skraplania pary nasyconej, jak i obliczeniowej mechaniki płynów (CFD).

Podręcznik składa się z jedenastu rozdziałów o różnorodnym znaczeniu, i zakresie. Zrozumienie podstawowych praw i metod obliczeniowych powinny ułatwić liczne zamieszczone w nim rysunki.

Autor serdecznie dziękuje swoim współpracownikom: mgr inż. Leokadii Leszczyńskiej, mgr inż. Agnieszce Pleśniarskiej, mgr inż. Sebastianowi Englartowi oraz dr. inż. Romanowi Szafranowi za staranne wykonanie rysunków.

Książkę poświęcam Świętej Pamięci moich Rodziców.

Wrocław, październik 2004

*Andrzej Kmiec*

# 1. Zasady wymiany ciepła

## 1.1. Wstęp

W termodynamice działanie otoczenia na układ jest nazywane pracą, jeżeli wynik tego działania można sprowadzić do zmiany położenia ciężaru znajdującego się poza układem względem jakiegoś poziomu odniesienia. Działania otoczenia na układ zamknięty, które nie mogą być zaliczone do jakiegoś rodzaju prac, są nazywane zewnętrznym ciepłem układu, a sposób, w jaki ciepło jest przekazywane – wymianą ciepła, przepływem ciepła lub przenoszeniem ciepła [1]. W układach otwartych energia jest przekazywana również przez granice układu wraz z przepływającą substancją w postaci energii kinetycznej, potencjalnej lub entalpii, zwanej często w technice energią cieplną. Praca lub energia dyssypowana wewnątrz układu jest nazywana ciepłem dyssypacji pracy i występuje w postaci tzw. wewnętrznych źródeł ciepła, wynikających z rozpraszania energii mechanicznej (ciepło tarcia), elektrycznej (ciepło Joule'a) lub z zachodzących reakcji chemicznych. Energia jest skalarną wielkością fizyczną, która spełnia zasadę zachowania zgodnie z I zasadą termodynamiki.

## 1.2. Pole temperatury

Zgodnie z II zasadą termodynamiki przenoszenie energii cieplnej w dowolnym ciele lub między różnymi ciałami zachodzi zawsze od punktu o wyższej temperaturze do punktu o niższej temperaturze.

Przestrzeń materialną w ciele stałym, cieczy lub gazie, w której każdemu punktowi przyporządkujemy temperaturę, nazywamy polem temperaturowym. Pole temperaturowe jest również skalarnie [2]. Jego punkty o tej samej temperaturze wyznaczają powierzchnie izotermiczne. Gdy temperatura w dowolnym punkcie pola zależy tylko od położenia tego punktu, nazywamy je ustalonym (stacjonarnym) polem temperaturowym, co wyraża się równaniem:

$$T = T(x, y, z) \quad (1.1)$$

Jeżeli temperatura w dowolnym punkcie pola zależy również od czasu, to pole takie nazywamy niestalonym (lub niestacjonarnym) polem temperaturowym, określonym równaniem

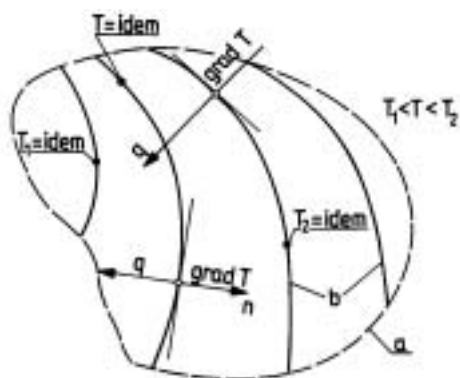
$$T = T(x, y, z, \tau) \quad (1.2)$$

Kształt i ułożenie powierzchni izotermicznych w tym przypadku jest zależne od czasu.

Każdemu punktowi pola temperaturowego jest przyporządkowany wektor, zwany gradientem temperatury:

$$\text{grad}T = \frac{dT}{dn} \quad (1.3)$$

gdzie  $n$  jest normalną w danym punkcie pola do powierzchni izotermicznej. Gradient temperatury tworzy pole wektorowe (rys. 1.1). Kierunek gradientu jest wyznaczony przez normalną  $n$ , a jej zwrot jest skierowany ku powierzchniom izotermicznym o wyższej temperaturze. W ustalonym polu temperaturowym gradient zależy tylko od położenia rozważanego punktu w przestrzeni, nie zależy zaś od czasu. W niestalonym polu temperaturowym gradient jest funkcją nie tylko położenia, ale i czasu.



Rys. 1.1. Schemat pola temperaturowego:  
a) przekrój powierzchni ograniczającej pole temperaturowe, b) przekrój powierzchni izotermicznych

Jeżeli w określonym czasie  $\Delta\tau$  jest przekazane ciepło  $\Delta Q$ , to średni strumień ciepła  $\dot{Q}$  wyraża się wzorem

$$\dot{Q} = \frac{\Delta Q}{\Delta\tau}, \quad \text{J/s} \quad (1.4)$$

Jako chwilowy strumień ciepła  $\dot{Q}$  definiuje się granicę, do jakiej dąży stosunek przekazywanego ciepła  $\Delta Q$  do przedziału czasu  $\Delta\tau$ , jeżeli  $\Delta\tau$  dąży do zera:

$$\dot{Q} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\tau} = \frac{dQ}{d\tau} \quad (1.5)$$



w warunkach ustalonych zaś

$$\dot{Q} = \frac{Q}{\tau} \quad (1.6)$$

Kierunek przepływu ciepła, a ściślej strumienia ciepła, jest wyznaczony przez kierunek gradientu temperatury. Ponieważ ciepło jest zawsze przekazywane od punktu o temperaturze wyższej do punktu o temperaturze niższej, więc zwrot wektora strumienia ciepła jest zawsze przeciwny niż zwrot gradientu temperatury.

Stosunek strumienia ciepła  $\dot{Q}$  do powierzchni  $A$ , przez którą ten strumień przepływa, jest nazywany gęstością strumienia ciepła, zdefiniowaną równaniem

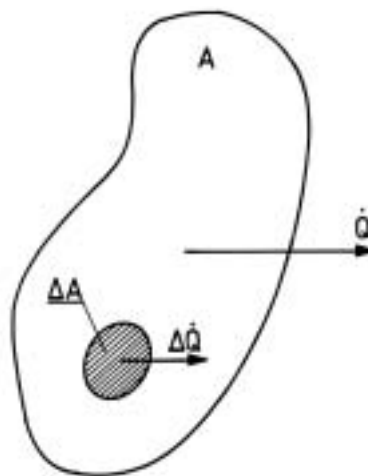
$$q = \frac{\dot{Q}}{A} \quad (1.7)$$

Lokalną gęstością strumienia ciepła  $q$  nazywamy granicę stosunku części  $\Delta\dot{Q}$  do wycinka powierzchni  $\Delta A$ , gdy  $\Delta A$  dąży do zera (rys. 1.2)

$$q = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\dot{Q}}{\Delta A} = \frac{d\dot{Q}}{dA} \quad (1.8)$$

lub w zapisie wektorowym

$$d\dot{Q} = q d\mathbf{A} \quad (1.9)$$



Rys. 1.2. Schemat strumienia ciepła przekazywanego przez powierzchnię;  $\Delta\dot{Q}$  – część strumienia ciepła przekazywana przez wycinek powierzchni  $\Delta A$

Wektory gęstości strumienia ciepła są położone na powierzchniach prostopadłych do powierzchni izotermicznych. Są to powierzchnie adiabatyczne. Na powierzchni zewnętrznej ciała z reguły podaje się składowe gęstości strumienia ciepła w kierunku prostopadłym do powierzchni ciała.

### 1.3. Rodzaje wymiany ciepła

Wymiana ciepła jest realizowana na trzy sposoby, różne pod względem fizycznym [2]:

- przewodzenie (kondukcję),
- konwekcję (unoszenie),
- promieniowanie (radiacyjną wymianę ciepła).

Przewodzenie ciepła polega na przekazywaniu energii wewnętrznej między stykającymi się elementami ciała lub różnych ciał. W ciałach stałych jest przenoszona energia drgań atomów w sieci krystalicznej i ruchu swobodnych elektronów, a w płynach – energia kinetyczna atomów i cząsteczek. Przekazywanie ciepła wyłącznie przez przewodzenie zachodzi jedynie w ciałach stałych nieprzenikliwych dla promieniowania oraz w płynach, gdy nie występuje przemieszczanie się makroskopowych elementów płynów.

Konwekcja polega na przenoszeniu energii cieplnej z makroskopowymi elementami płynu różniącymi się temperaturą. Może ona zachodzić w przestrzeni nieograniczonej, np. podczas opływania cząstki ciała stałego lub w przestrzeni ograniczonej, np. w zbiorniku lub wewnątrz rury wymiennika ciepła. Rozróżniamy konwekcję swobodną, czyli naturalną, zachodzącą z udziałem sił masowych działających na elementy płynu różniące się temperaturą, a tym samym gęstością, oraz konwekcję wymuszoną przez maszynę albo urządzenie, np. pompę, wentylator, dmuchawę lub mieszadło.

Promieniowanie cieplne, zwane też termicznym, jest przekazywaniem ciepła za pośrednictwem fal elektromagnetycznych albo fotonów. Energia wewnętrzna ciała o temperaturze wyższej od temperatury zera bezwzględnego jest emitowana w postaci fal promieniowania elektromagnetycznego, obejmujących cały zakres długości fal od zera do nieskończoności lub tylko niektóre długości fal.

Energia radiacyjna promieniowania może być pochłonięta częściowo lub całkowicie po napotkaniu innych ciał lub innej części ciała wysyłającego promieniowanie. Promieniowanie, w odróżnieniu od przewodzenia lub konwekcji, może zachodzić również w próżni.

W niektórych procesach przewodzenie ciepła oraz konwekcyjna i radiacyjna wymiana ciepła występują jednocześnie, np. w procesach suszenia. W urządzeniach takich jak aparaty służące do wymiany ciepła, zwane wymiennikami ciepła, zachodzi natomiast połączone przekazywanie ciepła, tzw. przejmowanie lub przenikanie ciepła.

Przejmowanie ciepła, inaczej wnikanie ciepła, polega na łącznym przekazywaniu ciepła od ściany do płynu przez konwekcję oraz promieniowanie [2]. Przenikanie ciepła natomiast jest przekazywaniem ciepła między dwoma płynami rozgraniczonymi stałą przegrodą – płytą lub ścianką rury. Następuje tutaj kolejno wnikanie ciepła od gorącego płynu do pierwszej ściany, następnie przewodzenie przez przegrodę i wnikanie ciepła od drugiej ściany tej przegrody do płynu ogrzewanego.

## 2. Przewodzenie ciepła

### 2.1. Wstęp

Mechanizm przewodzenia ciepła jest bardzo złożony i w wielu przypadkach nie został całkowicie poznany. Zależy on przede wszystkim od stanu skupienia ciała, w którym ciepło jest przewodzone. W przypadku gazów i cieczy ten rodzaj transportu ciepła polega na przenoszeniu energii kinetycznej od cząsteczek o większej energii do cząsteczek o mniejszej energii w wyniku kolejnych zderzeń. Zarówno w przypadku gazów, jak i cieczy transport ciepła powoduje również przemieszczanie się elementów płynu, co wywołuje sprzężony, konwekcyjny ruch ciepła. Mechanizm przewodzenia ciepła w ciałach stałych zależy od rodzaju ciała. W przypadku ciał stałych nieprzezroczystych przewodzenie jest wyłącznym sposobem transportu ciepła, podczas gdy w przezroczystym ciele stałym, takim jak np. w szkło, pewna ilość energii może być przenoszona również przez promieniowanie. Przyjmuje się, że przewodzenie ciepła w ciałach stałych jest związane z ruchem fal wywołanych drganiami sieci krystalicznej ( $\lambda_l$ ) oraz ruchem swobodnych elektronów ( $\lambda_e$ ). Składowe te są addytywne, wobec czego sumaryczny współczynnik przewodzenia ciepła jest równy ich sumie [3]:

$$\lambda = \lambda_l + \lambda_e \quad (2.1)$$

W pierwszym przybliżeniu składowa  $\lambda_e$  jest odwrotnie proporcjonalna do elektrycznej oporności właściwej  $\rho_e$ . Dla czystych metali, o małej oporności właściwej, składowa przewodnictwa cieplnego wynikająca z ruchu elektronów jest podstawową wielkością. Udział przewodnictwa sieciowego w stopach może być znaczny, a w ciałach stałych będących złymi przewodnikami prądu elektrycznego (ciałach niemetalicznych) przewodzenie ciepła jest związane głównie ze składową sieciową  $\lambda_l$ .

Model fizyczny przewodzenia ciepła w ciałach stałych jest określony na ogół przez prawo Fouriera, wiążące gęstość strumienia ciepła z gradientem temperatury, a tylko niekiedy konieczne jest uwzględnienie relaksacji gęstości strumienia ciepła związanej z przyjęciem skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła. Niezbędne jest podanie równania bilansu energii i rodzaju warunków jednoznaczności jego rozwią-

zania. W założeniach bilansu energii musimy określić, czy rozpatruje się ustalone, czy niestalone przewodzenie ciepła oraz jego wielowymiarowość. Dalsze założenia dotyczą stałości właściwości termofizycznych oraz braku lub obecności wewnętrznych źródeł ciepła.

## 2.2. Prawo Fouriera sformułowane dla przewodzenia ciepła

Opis matematyczny zjawiska przewodzenia ciepła obejmuje sformułowanie prawa przewodzenia ciepła, równania różniczkowego bilansu energii oraz warunków jednoznaczności jego rozwiązania.

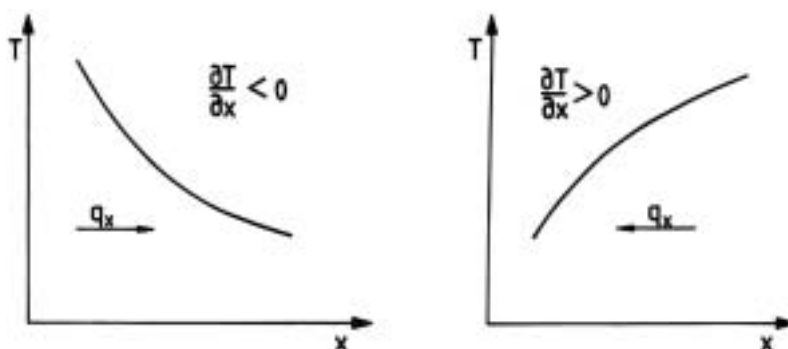
Przewodzenie ciepła przebiega na ogół zgodnie z prawem Fouriera: gęstość przewodzonego strumienia ciepła jest wprost proporcjonalna do gradientu temperatury

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad}T = -\lambda \nabla T \quad (2.2)$$

lub w postaci skalarnej

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.3)$$

gdzie:  $\nabla$  – wektor zwany nabra lub operatorem Hamiltona,  $\partial T/\partial n$  – pochodna temperatury w kierunku prostopadłym do powierzchni izotermicznej,  $\lambda$  – współczynnik przewodzenia ciepła (przewodność cieplna) wyrażany w  $W/(m \cdot K)$ . Znak minus wynika z tego, że ciepło jest przewodzone od temperatury wyższej do niższej (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Zależność znaku gęstości strumienia ciepła od gradientu temperatury

Gradient temperatury jest wektorem [1], który można wyrazić:

- w układzie współrzędnych prostokątnych (kartezjańskich) (rys. 2.1)

$$\nabla T = l_x \frac{\partial T}{\partial x} + l_y \frac{\partial T}{\partial y} + l_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.4)$$

- w układzie współrzędnych walcowych (cylindrycznych)

$$\nabla T = l_r \frac{\partial T}{\partial r} + l_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + l_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.5)$$

- w układzie współrzędnych kulistych (sferycznych)

$$\nabla T = l_r \frac{\partial T}{\partial r} + l_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + l_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (2.6)$$

I są składowymi wektora jednostkowego.

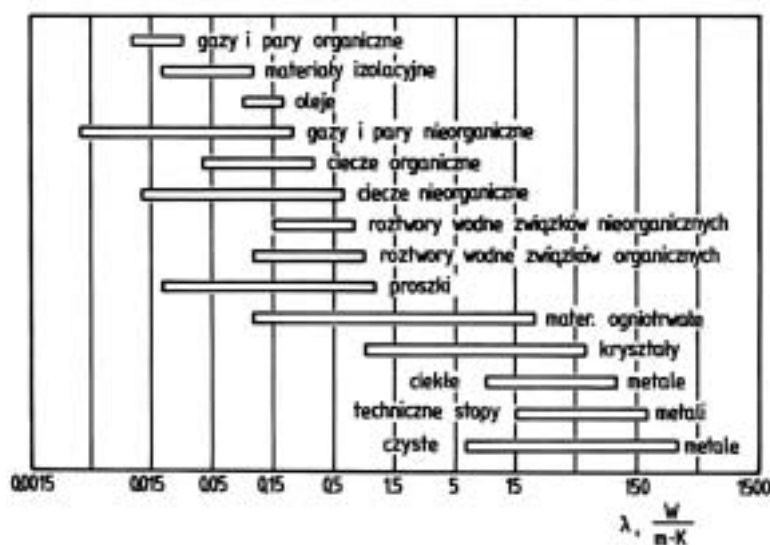
Dla jednokierunkowego przewodzenia ciepła, np. w kierunku osi  $x$ , strumień ciepła wyraża się w najczęściej spotykanej, szczególnej postaci prawa Fouriera:

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad (2.7)$$

Równania (2.2)–(2.6) obowiązują zarówno dla ustalonego, jak i nieustalonego przewodzenia ciepła. Jeżeli mamy do czynienia z ustalonym przewodzeniem, to rozkład temperatury (rys. 2.1) nie zmienia się w czasie, a strumień ciepła ma wartość stałą. W przypadku nieustalonego przewodzenia ciepła są one funkcją czasu.

## 2.3. Przewodność cieplna i współczynnik przewodzenia ciepła

Przewodność cieplna różnych substancji jest zdolnością do wyrównywania energii wewnętrznej. Jej miarą jest współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$ , którego wartość



Rys. 2.2A. Zakres wartości współczynnika przewodzenia ciepła dla różnych substancji

| W/m·K | Ciała stałe | W/m·K | Ciecze                           | W/m·K | Gazy               |
|-------|-------------|-------|----------------------------------|-------|--------------------|
| 450   | Ag          |       |                                  |       |                    |
| 350   | Cu          |       |                                  |       |                    |
| 250   | Al          |       |                                  |       |                    |
| 200   | Mg          |       |                                  |       |                    |
| 150   | Zn          |       |                                  |       |                    |
| 100   | Ni          |       |                                  |       |                    |
|       | Fe          |       |                                  |       |                    |
|       | Pt          |       |                                  |       |                    |
|       | Li          |       |                                  |       |                    |
| 50    | U           |       |                                  |       |                    |
|       | Stop Monela |       |                                  |       |                    |
|       | SiC         |       |                                  |       |                    |
| 30    | Kwarc       |       |                                  |       |                    |
| 10    | Lód         | 10    | rtęć                             |       |                    |
|       | Piaskowiec  |       |                                  |       |                    |
| 1     | Fibra       | 1     | Woda                             |       |                    |
|       |             |       | Amoniak                          |       |                    |
|       |             |       | Gliceryna                        |       |                    |
| 0.2   | Skóra       | 0.2   | C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH | 0.2   | H <sub>2</sub>     |
|       | Sosna       |       |                                  |       | He                 |
| 0.1   | Guma        | 0.1   | Benzol                           | 0.1   |                    |
|       | Azbest      |       |                                  |       |                    |
|       | Korek       |       |                                  |       |                    |
| 0.03  | Wolna       |       |                                  | 0.03  | CH <sub>4</sub>    |
|       |             |       |                                  |       | O <sub>2</sub>     |
|       |             |       |                                  |       | N <sub>2</sub>     |
|       |             |       |                                  |       | Powietrze          |
| 0.01  |             |       |                                  | 0.01  | CO CO <sub>2</sub> |
|       |             |       |                                  |       |                    |
|       |             |       |                                  |       | SO <sub>2</sub>    |
| 0.001 |             |       |                                  | 0.001 |                    |

Rys. 2.2B. Współczynniki  $\lambda$  przewodzenia ciepła

zależy od rodzaju ciała, jego stanu i struktury, gęstości, temperatury, niekiedy wilgotności, a także innych czynników. Współczynniki  $\lambda$  mieszczą się w bardzo szerokich granicach, od najmniejszych wartości dla rozrzedzonych gazów, wynoszących około 0,005 W/(m·K) do około 20 000 W/(m·K) dla niektórych metali w temperaturze zbliżonej do 0 K (około 10 K). Na rysunku 2.2A pokazano zakres wartości współczynnika przewodzenia ciepła w zależności od temperatury dla różnych substancji, wartości liczbowe zaś na rys. 2.2B.

### 2.3.1. Współczynnik przewodzenia ciepła ciał stałych metalicznych

Największe współczynniki przewodzenia ciepła mają metale. Przewodzenie ciepła metali, podobnie jak przewodnictwo elektryczne, jest związane z ruchem swobod-

nych elektronów wewnątrz metalu. Zależność między elektronowym przewodnictwem cieplnym  $\lambda_e$  a przewodnictwem elektrycznym  $\sigma_e$  opisuje prawo Wiedemanna–Franza–Lorenza z 1872 r. [2]

$$L = \frac{\lambda_e}{\sigma_e T} \quad (2.8)$$

gdzie  $L$  – liczba Lorenza,  $\sigma_e$  – przewodność elektryczna.

Z rozważań ruchu elektronów według statystyki Fermiego–Diraca otrzymano równanie opisujące liczbę Lorenza:

$$L = 3 \left( \frac{B}{z} \right)^2 = 24,5 \cdot 10^{-9}, \quad (\text{V/K})^2 \quad (2.9)$$

gdzie  $B$  – liczba Boltzmana,  $z$  – ładunek elektronu.

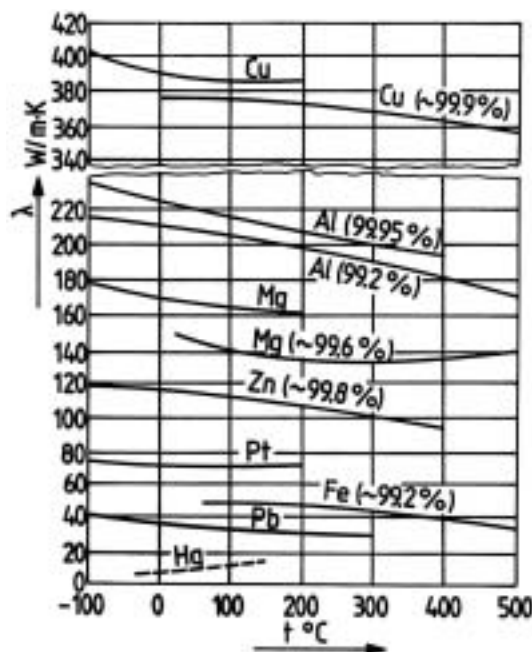
Z najnowszych badań wynika jednak, że wartości doświadczalne liczby Lorenza różnią się nieco od wartości teoretycznych obliczonych z równania (2.9) (por. tabela 2.1).

Tabela 2.1. Wartości liczby Lorenza dla metali w temperaturze 0 i 100 °C

| Metal     | Liczba Lorenza |        |
|-----------|----------------|--------|
|           | 0 °C           | 100 °C |
| Aluminium | 21,2           | 22,3   |
| Bizmut    | 33,1           | 28,9   |
| Kadm      | 24,2           | 24,3   |
| Miedź     | 22,3           | 23,3   |
| Złoto     | 23,5           | 24,0   |
| Iryd      | 24,9           | 24,9   |
| Żelazo    | 24,9           | 25,6   |
| Ołów      | 24,7           | 25,6   |
| Molibden  | 26,1           | 27,9   |
| Nikiel    | 17,7           | 22,8   |
| Pallad    | 25,9           | 27,4   |
| Platyna   | 25,1           | 26,0   |
| Ren       | 25,7           | 25,7   |
| Srebro    | 23,1           | 23,7   |
| Cyna      | 25,2           | 24,9   |
| Wolfram   | 30,4           | 32,0   |
| Cynk      | 23,1           | 23,3   |

Przewodność cieplna ciał krystalicznych, w tym metali, na ogół maleje ze wzrostem temperatury (rys. 2.3), ale np. współczynniki przewodzenia ciepła platyny, boru czy rtęci zwiększają się ze wzrostem temperatury. Ciała krystaliczne wykazują też anizotropowość

przewodności cieplnej. Wartości współczynników przewodzenia ciepła zależą też od czystości chemicznej metalu; dla czystej miedzi np.  $\lambda = 386 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , a dla miedzi zanieczyszczonej śladową ilością arsenu – około  $120 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ . Także przewodnictwo cieplne stopów metali jest gorsze niż ich czystych składników (rys. 2.2B).



Rys. 2.3. Zależność współczynnika przewodzenia ciepła metali od temperatury

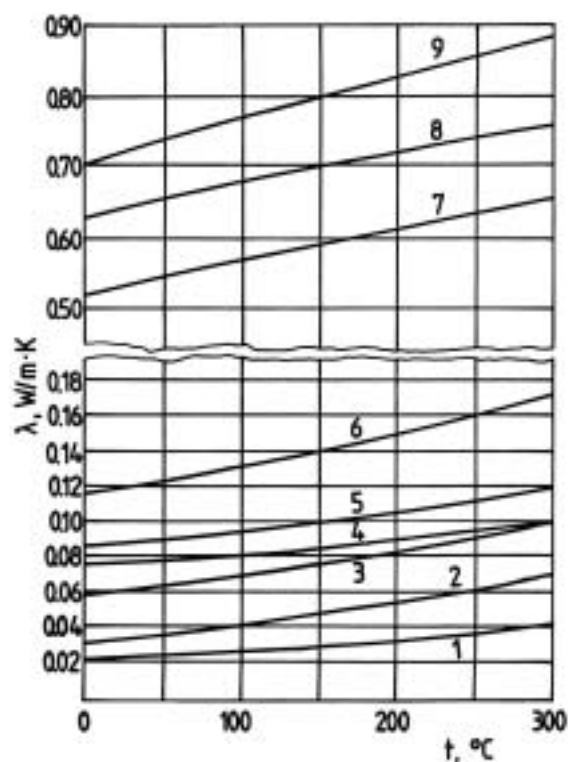
### 2.3.2. Współczynnik przewodzenia ciepła w ciałach niemetalicznych

Dużą grupę ciał niemetalicznych stanowią dielektryki. Ciała te odznaczają się małą przewodnością elektryczną oraz cieplną. Przewodzenie ciepła odbywa się w nich za pośrednictwem drgań sieci (fononów). Odrębną grupę stanowią materiały budowlane, izolacyjne i ogniodopusne ceramiczne, których współczynniki przewodzenia ciepła są w przybliżeniu mniejsze od  $0,15 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  (rys. 2.4), nazywane materiałami izolacyjnymi [2]. Na ogół są to materiały porowate, włókniste lub ziarniste, w których pory są wypełnione powietrzem lub gazem o znacznie mniejszym współczynniku przewodzenia ciepła.

Współczynnik przewodzenia ciepła takich materiałów jest wielkością umowną, ujmującą oprócz przewodzenia ciepła przez strukturę ciała stałego również przewodzenie ciepła i konwekcję w gazie zawartym wewnątrz porów, a niekiedy i udział promieniowania między ściankami porów. Gazy o najmniejszych współczynnikach



przewodzenia ciepła zmniejszają przewodność cieplną materiału porowatego i dlatego współczynniki przewodzenia ciepła izolacyjnych materiałów porowatych zmniejszają się ze wzrostem porowatości, w miarę jak maleje gęstość takiego materiału. Podstawowy wpływ na współczynnik przewodzenia ciepła materiałów porowatych ma zawilgocenie. Dla suchej cegły np.  $\lambda = 0,35 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , a po jej zawilgoceniu nawet około  $1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , podczas gdy współczynnik przewodzenia ciepła wody wynosi tylko około  $0,6 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ . Wynika to z konwekcyjnej wymiany ciepła związanej z kapilarnym przepływem wody.

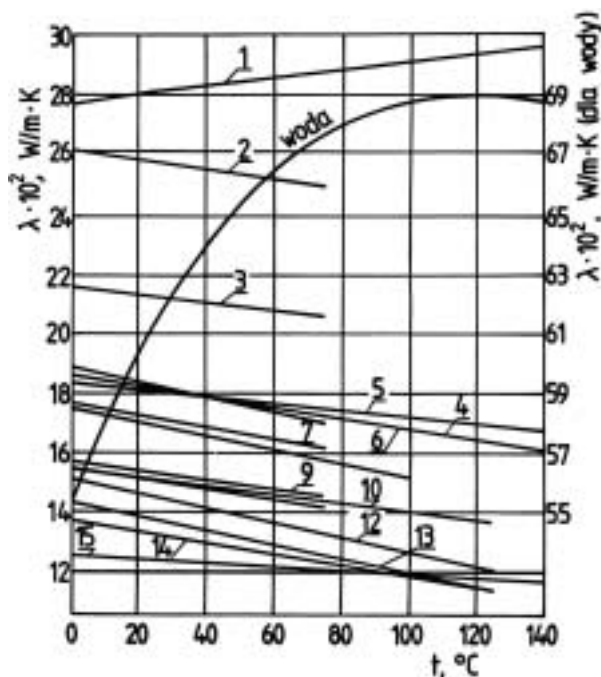


Rys. 2.4. Zależność współczynnika przewodzenia ciepła od temperatury materiałów izolacyjnych i ogniotrwałych: 1 – powietrze, 2 – wata mineralna,  $\rho = 160 \text{ kg}/\text{m}^3$ , 3 – wata żuźlowa,  $\rho = 200 \text{ kg}/\text{m}^3$ , 4 – newel,  $\rho = 340 \text{ kg}/\text{m}^3$ , 5 – sowielit,  $\rho = 440 \text{ kg}/\text{m}^3$ , 6 – cegła diatomowa,  $\rho = 550 \text{ kg}/\text{m}^3$ , 7 – cegła czerwona,  $\rho = 1672 \text{ kg}/\text{m}^3$ , 8 – cegła żuźlowa,  $\rho = 1373 \text{ kg}/\text{m}^3$ , 9 – cegła szamotowa,  $\rho = 1840 \text{ kg}/\text{m}^3$

Współczynnik przewodzenia ciepła zależy również od temperatury; dla ciał niemetalicznych jest to w szerokim zakresie zależność rosnąca prostoliniowa. W przypadku materiałów porowatych wynika to ze wzrostu współczynnika przewodzenia ciepła powietrza zawartego w porach. Dlatego powyżej  $800 \text{ }^\circ\text{C}$  istotny udział w zwiększeniu współczynnika przewodzenia ciepła ma promieniowanie.

### 2.3.3. Współczynnik przewodzenia ciepła cieczy

Współczynniki przewodzenia ciepła cieczy niemetalicznych przyjmują wartości pośrednie od 0,1 W/(m·K) do 0,6 W/(m·K) (rys. 2.5), w cieczach metalicznych są one znacznie większe, przykładowo dla rtęci  $\lambda = 8,7$  W/(m·K). Jak widać z rys. 2.5, współczynnik przewodzenia ciepła w cieczach z reguły ulega zmniejszeniu ze wzrostem temperatury, z wyjątkiem wody i gliceryny, dla których rośnie on z temperaturą.



Rys. 2.5. Zależność współczynnika przewodzenia ciepła od temperatury dla cieczy: 1 – gliceryna , 2 – kwas mrówkowy, 3 – alkohol metylowy, 4 – alkohol etylowy, 5 – olej rycynowy, 6 – anilina, 7 – kwas octowy, 8 – aceton, 9 – alkohol butylowy, 10 – nitrobenzen, 11 – alkohol izopropylowy, 12 – benzen, 13 – toluen, 14 – ksylen, 15 – wazelina, 16 – woda ( na skali po prawej stronie)

W literaturze można znaleźć kilka równań służących do obliczania współczynnika przewodzenia ciepła. Kalinowski [2] podaje wzór Webera:

$$\lambda = 0,358 \cdot 10^{-7} c \rho^3 \sqrt{\frac{\rho}{M}} \quad (2.10)$$

w którym:  $c$  – ciepło właściwe, J/(kg·K),  $\rho$  – gęstość, kg/m<sup>3</sup>,  $M$  – masa molowa.

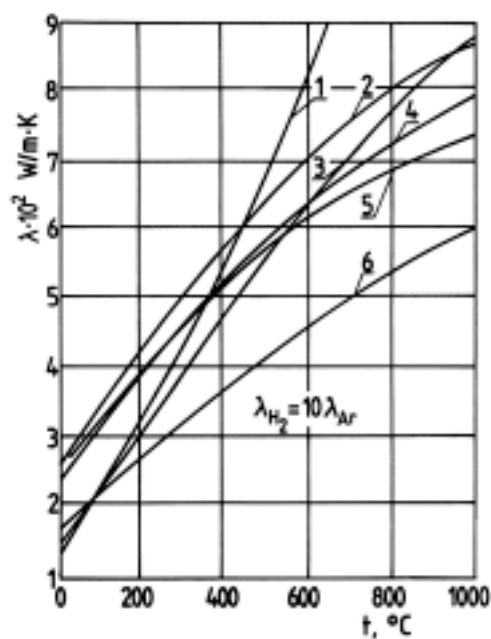
Hobler [4] zaleca obliczać przewodnictwo cieplne roztworów z wzoru:

$$\lambda_m = \sum_{i=1}^n w_i \lambda_i \quad (2.11)$$

w którym  $w_i$  – udział masowy składników w roztworze,  $\lambda_i$  – współczynniki przewodzenia ciepła dla czystych składników roztworu.

### 2.3.4. Współczynnik przewodzenia ciepła gazów

Gazy, w tym powietrze, wykazują najmniejsze wartości współczynników przewodzenia ciepła, mieszczące się w zakresie 0,005–0,55 W/(m·K) (rys. 2.6).



Rys. 2.6. Zależność współczynnika przewodzenia ciepła od temperatury dla gazów: 1 – para wodna, 2 – tlen, 3 – ditlenek węgla, 4 – powietrze, 5 – azot, 6 – argon

Z teorii kinetycznej gazów otrzymano zależność współczynnika przewodzenia ciepła od ciepła właściwego  $c_v$  i dynamicznego współczynnika lepkości  $\eta$

$$\lambda = d c_v \eta \quad (2.12)$$

gdzie  $d$  jest współczynnikiem zależnym od liczby atomów w cząsteczce gazu.

Według Euckena [2] do obliczania  $d$  można zastosować wzór empiryczny

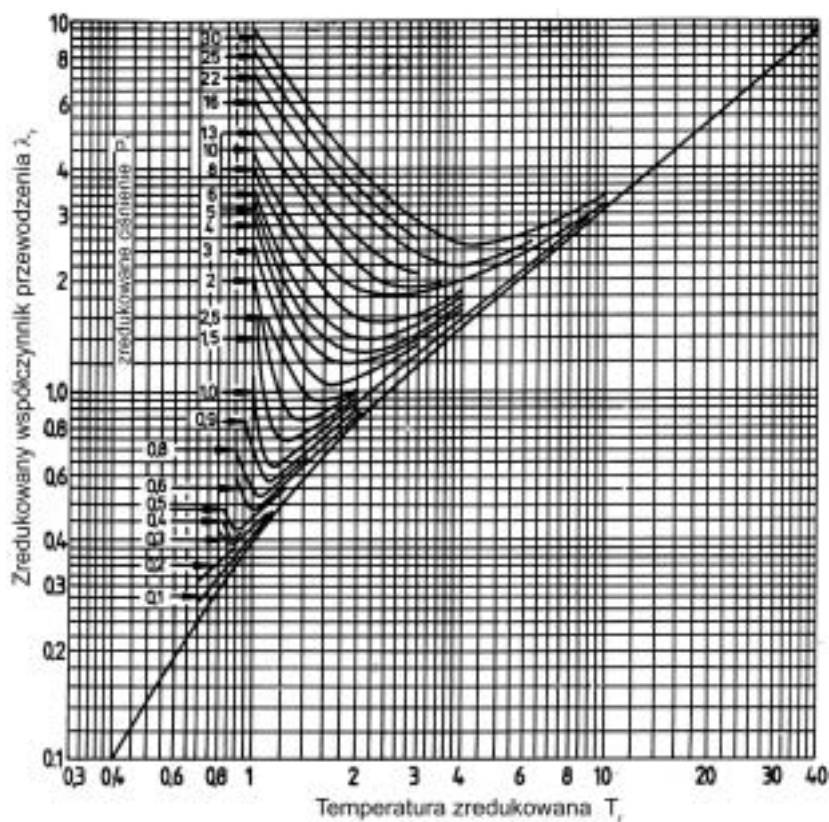
$$d = 0,25(9k - 5) \quad (2.13)$$

w którym  $k$  jest wykładnikiem adiabaty,  $k = c_p/c_v$ .

Można stosować również ogólną zależność

$$\lambda_r = f(T_r, p_r) \quad (2.14)$$

Na rysunku 2.7 pokazano zależność zredukowanego współczynnika przewodzenia  $\lambda_r$  od ciśnienia zredukowanego  $p_r = p/p_{kr}$  i temperatury  $T_r = T/T_{kr}$ . Aby obliczyć rzeczywistą wartość  $\lambda$ , należy pomnożyć wartość  $\lambda_r$  przez  $\lambda_{kr}$  odczytane z tabeli 2.2.



Rys. 2.7. Zredukowany współczynnik przewodzenia ciepła gazów w funkcji temperatury zredukowanej i zredukowanego ciśnienia

Tabela 2.3. Wartości krytycznych współczynników przewodzenia ciepła  $\lambda_{kr}$ , W/(m·K) (według [2])

| Gaz                | $\lambda_{kr}$ | Gaz                   | $\lambda_{kr}$ | Gaz             | $\lambda_{kr}$ |
|--------------------|----------------|-----------------------|----------------|-----------------|----------------|
| Aceton             | 0,0793         | Dichlorodwufuorometan | 0,0379         | Ksenon          | 0,0143         |
| Acetylen           | 0,0550         | Ditlenek siarki       | 0,0359         | Metan           | 0,0495         |
| Amoniak            | 0,0922         | Ditlenek węgla        | 0,0450         | Neon            | 0,0215         |
| Argon              | 0,0256         | Etan                  | 0,0566         | Octan etylu     | 0,0830         |
| Azot               | 0,0329         | Eter etylowy          | 0,0877         | Podtlenek azotu | 0,0458         |
| Benzen             | 0,1057         | Etylen                | 0,0495         | Tlenek azotu    | 0,0424         |
| Chlorek etylu      | 0,0621         | Hel                   | 0,0149         | Tlenek węgla    | 0,0298         |
| Chloroform         | 0,0424         | Heptan                | 0,0531         | Woda            | 0,1350         |
| Tetrachlorek węgla | 0,9359         | Krypton               | 0,0162         | Wodór           | 0,0641         |

Najdokładniejsze wartości współczynników przewodzenia ciepła można jednak otrzymać z pomiarów doświadczalnych albo z tabel lub wykresów opartych na bezpośrednich pomiarach.

## 2.4. Ustalony ruch ciepła przez przewodzenie w ścianie płaskiej

W najprostszym przypadku, tj. dla ściany płaskiej, jej powierzchnia przekroju poprzecznego jest stała  $A = \text{const}$ . Jeżeli materiał, z którego jest wykonana ta ścianka, jest jednorodny, a całkowita różnica temperatury niewielka, to współczynnik przewodzenia ma wartość stałą  $\lambda = \text{const}$ . W tym przypadku równanie Fouriera (2.7)

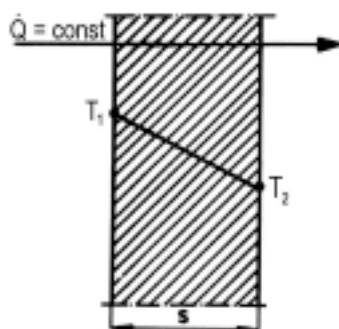
$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad (2.15)$$

można scałkować w granicach (rys. 2.8) od  $x = 0$  do  $x = s$  i od  $T = T_1$  do  $T = T_2$ . Po rozdzieleniu zmiennych

$$\dot{Q} \int_0^s dx = -\lambda A \int_{T_1}^{T_2} dT \quad (2.16)$$

i scałkowaniu otrzymujemy

$$\dot{Q}s = -\lambda A(T_2 - T_1) \quad (2.17a)$$



Rys. 2.8. Rozkład temperatury w ścianie płaskiej

Po podzieleniu przez  $s$  oraz wprowadzeniu znaku minus do wyrażenia w nawiasie otrzymujemy wzór na strumień ciepła przewodzonego przez jednowarstwową ścianę płaską:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} A(T_1 - T_2) = \frac{\lambda}{s} A\Delta T \quad (2.17b)$$

Współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  określa energię cieplną w dżulach, która w ciągu sekundy przepływa ze ściany o powierzchni  $1 \text{ m}^2$  do ściany przeciwległej, gdy  $\Delta T = 1 \text{ K}$ .

### 2.4.1. Definicja oporu cieplnego

Ze względu na podobieństwo przepływu strumienia ciepła do przepływu prądu elektrycznego, do analizy przekazywania ciepła wprowadzono pojęcie oporu cieplnego [5]. Wykorzystujemy tutaj analogię między równaniami opisującymi ruch ciepła a równaniem wyrażającym prawo Ohma podczas przepływu prądu elektrycznego

$$\Delta U = IR \quad (2.18)$$

Przyjmujemy, że wartości spadku napięcia  $\Delta U$  odpowiada w ruchu ciepła różnica temperatury  $\Delta T$ , natężenie prądu  $I$  jest wielkością analogiczną do strumienia cieplnego  $\dot{Q}$ , a oporowi elektrycznemu  $R$  przypisujemy opory cieplne  $R_b$ , wynikające z równań ruchu ciepła. Na tej podstawie równanie Fouriera dla ustalonego przewodzenia ciepła (2.17) wyrazimy w następujący sposób:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_\lambda} \quad (2.19)$$

i otrzymamy wzór na opór cieplny przewodzenia ciepła:

$$R_\lambda = \frac{\Delta T}{\dot{Q}_\lambda} \quad (2.20)$$

Na tej podstawie otrzymujemy równania oporów cieplnych dla poszczególnych przypadków ruchu ciepła. Opór cieplny przewodzenia ciepła w ścianie płaskiej określa równanie:

$$R_\lambda = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{s}{\lambda A} \quad (2.21)$$

strumień cieplny zaś możemy opisać równaniem:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_\lambda} \quad (2.22)$$

### 2.4.2. Rozkład temperatury w ścianie płaskiej

Różniczkowe równanie Fouriera (2.7) przekształcamy do postaci:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{Q}}{\lambda A} \quad (2.23)$$

Jeśli zatem ruch ciepła jest ustalony, to  $\dot{Q} = \text{const}$ , oraz jeśli  $A = \text{const}$  i  $\lambda = \text{const}$ , to  $dT/dx = \text{const}$ , czyli temperatura zmienia się wzdłuż drogi prostoliniowo.

Liniową zależność temperatury od odległości otrzymujemy również przez całkowanie różniczkowego równania Fouriera (2.23) po rozdzieleniu zmiennych w granicach od  $T = T_1$  do  $T = T_x$  oraz od  $x = 0$  do  $x$ :

$$\int_{T_1}^{T_x} dT = -\frac{\dot{Q}}{\lambda A} \int_0^x dx \quad (2.24)$$

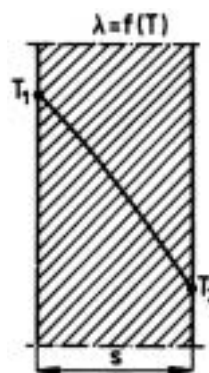
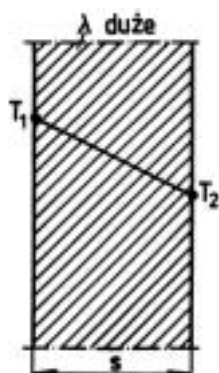
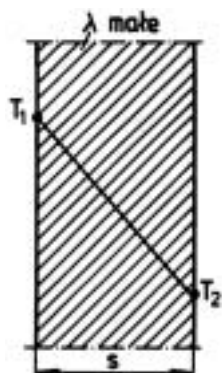
Po scałkowaniu otrzymujemy

$$T_x - T_1 = -\frac{\dot{Q}}{\lambda A} x \quad (2.25a)$$

po dalszych przekształceniach zaś

$$T_x = -\frac{\dot{Q}}{\lambda A} x + T_1 \quad (2.25)$$

Jak widać z równań (2.23) i (2.25), im większe wartości współczynnika przewodzenia ciepła ma materiał ścianki, tym mniejsze wystąpią gradienty temperatury (rys. 2.9). Gdy pole przekroju poprzecznego lub współczynnik przewodzenia zmienia się wzdłuż drogi ruchu ciepła, gradient temperatury również się zmienia –  $dT/dx$  nie jest stały (rys. 2.10).



Rys. 2.9. Rozkład temperatury w ściankach płaskich dla małych i dużych współczynników przewodzenia ciepła

Rys. 2.10. Rozkład temperatury w ściance płaskiej, gdy współczynnik przewodzenia ciepła zależy od temperatury

Otrzymanie dużych strumieni ciepła wymaga zastosowania materiałów o znacznych wartościach współczynnika przewodzenia ciepła i małych oporach cieplnych (małych wartościach  $s/\lambda$ ). Aby natomiast zmniejszyć strumień cieplny, należy użyć materiałów wykazujących duże opory cieplne, czyli materiałów izolacyjnych.

## 2.5. Ustalone przewodzenie ciepła w wielowarstwowej ścianie płaskiej

Przyjmijmy, że ściana płaska składa się z  $n$  nałożonych na siebie warstw, z których każda charakteryzuje się grubością  $s_i$  i współczynnikiem przewodzenia ciepła  $\lambda_i$ . Ścianę taką możemy rozważać jako  $n$  powierzchni jednowarstwowych (por. rys. 2.11, przykład przegrody trójwarstwowej). Otrzymamy wówczas  $n$  równań strumienia ciepła:

- dla warstwy 1

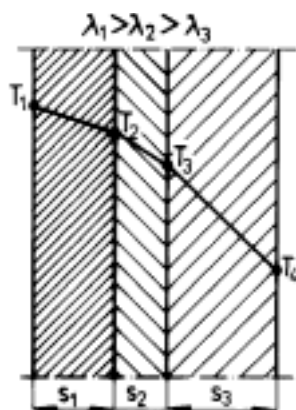
$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{s_1} A (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R_{\lambda 1}} \quad (2.26)$$

- dla warstwy 2

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_2}{s_2} A (T_2 - T_3) = \frac{T_2 - T_3}{R_{\lambda 2}} \quad (2.27)$$

- dla  $n$ -tej warstwy

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_n}{s_n} A (T_n - T_{n+1}) = \frac{T_n - T_{n+1}}{R_n} \quad (2.28)$$



Rys. 2.11. Rozkład temperatury w trójwarstwowej ścianie płaskiej

Po pomnożeniu równań ((2.26)–(2.28)) przez  $R_i$  otrzymujemy

$$\dot{Q} R_1 = T_1 - T_2 \quad (2.29)$$

$$\dot{Q} R_2 = T_2 - T_3 \quad (2.30)$$

$$\dot{Q} R_n = T_n - T_{n+1} \quad (2.31)$$



Po zsumowaniu tych równań stronami otrzymujemy

$$\dot{Q}(R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + \dots + R_{\lambda n}) = T_1 - T_{n+1} \quad (2.32)$$

Po wprowadzeniu oporu zastępczego jako sumy oporów łączonych szeregowo:

$$R_{\lambda} = \sum_{i=1}^{i=n} R_{\lambda i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{s_i}{\lambda_i A} \quad (2.33)$$

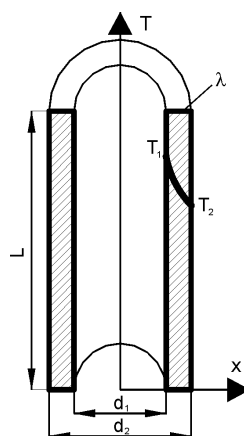
otrzymujemy wzór do obliczania strumienia ciepła przewodzonego przez płaską przegrodę  $n$ -warstwową

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R_{\lambda}} \quad (2.34)$$

Równanie to jest identyczne z równaniem (2.22), ale opór  $R_{\lambda}$  jest tutaj oporem sumarycznym.

## 2.6. Ustalone przewodzenie ciepła w jednowarstwowej ścianie rurowej

Przyjmijmy, że ściana rurowa jest wykonana z materiału o współczynniku przewodzenia ciepła  $\lambda$  niezależnym od temperatury i czasu. Rozmiary rury (rys. 2.12) są określone przez jej średnicę wewnętrzną  $d_1$  i zewnętrzną  $d_2$  oraz długość  $L$ .



Rys. 2.12. Rozkład temperatury w ścianie rurowej

Dla ustalonego przewodzenia ciepła przez ściankę rury zapiszemy równanie Fouriera (2.7) w postaci różniczkowej

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dr} \quad (2.35)$$

w którym zmiennymi są pole powierzchni  $A = A(r)$ , temperatura  $T$  (temperatura wewnętrznej ściany rury wynosi  $T_1$ , zewnętrznej zaś  $T_2$ ) oraz droga, którą stanowi promień  $r$ , zmieniający się w granicach od  $d_1/2$  do  $d_2/2$ .

Pole powierzchni możemy zapisać jako funkcję zmiennej niezależnej  $r$ :

$$A = 2\pi rL \quad (2.36)$$

Po podstawieniu do równania (2.35) otrzymujemy równanie

$$\dot{Q} = -2\lambda\pi Lr \frac{dT}{dr} \quad (2.37)$$

które ma dwie zmienne, zależną  $T$  i niezależną  $r$ .

Po rozdzieleniu zmiennych równanie to przyjmuje postać:

$$\dot{Q} \frac{dr}{r} = -2\lambda\pi L dT \quad (2.38)$$

Całkujemy je w granicach od  $r_1 = d_1/2$  do  $r_2 = d/2$  oraz od  $T_1$  do  $T$ :

$$\dot{Q} \int_{d_1/2}^{d/2} \frac{dr}{r} = -2\lambda\pi L \int_{T_1}^T dT \quad (2.39)$$

i otrzymujemy równanie:

$$T_1 - T = \frac{\dot{Q}}{2\lambda\pi L} \left( \ln \frac{d}{2} - \ln \frac{d_1}{2} \right) \quad (2.40)$$

które po prostym przekształceniu przyjmuje postać:

$$T = T_1 - \frac{\dot{Q}}{2\lambda\pi L} \ln \frac{d}{d_1} \quad (2.41)$$

Logarymiczne równanie (2.41) określa rozkład temperatury w ścianie rury podczas ustalonego przewodzenia ciepła od temperatury  $T_1$  do temperatury  $T_2$  (rys. (2.12)).

Aby obliczyć strumień ciepła, równanie różniczkowe (2.38) całkujemy w granicach od  $r_1 = d_1/2$  do  $r_2 = d_2/2$ , gdy temperatura zmienia się od  $T_1$  do  $T_2$ :

$$\dot{Q} \int_{d_1/2}^{d_2/2} \frac{dr}{r} = -2\lambda\pi L \int_{T_1}^{T_2} dT \quad (2.42)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy wyrażenie

$$\dot{Q} \ln \frac{d_2}{d_1} = -2\lambda\pi L (T_2 - T_1) \quad (2.43)$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy wzór określający strumień ciepła:

$$\dot{Q} = 2\lambda\pi L \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \quad (2.44)$$

Po pomnożeniu licznika i mianownika przez wyrażenie  $2s = d_2 - d_1$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\lambda}{s} \pi L \left( \frac{d_2 - d_1}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \right) (T_1 - T_2) = \frac{\lambda L}{s} \left( \frac{U_2 - U_1}{\ln \frac{U_2}{U_1}} \right) (T_1 - T_2) \\ &= \frac{\lambda}{s} \left( \frac{A_2 - A_1}{\ln \frac{A_2}{A_1}} \right) (T_1 - T_2) = \frac{\lambda}{s} A_m (T_1 - T_2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

gdzie:  $U = \pi d$  – obwód rury, m,  $A = \pi dL$  – powierzchnia rury, m<sup>2</sup>.

Po uwzględnieniu oporu cieplnego przewodzenia ciepła przez ścianę rurową

$$R_{\lambda r} = \frac{\ln \frac{d_2}{d_1}}{2\lambda} \quad (2.46)$$

otrzymujemy równanie

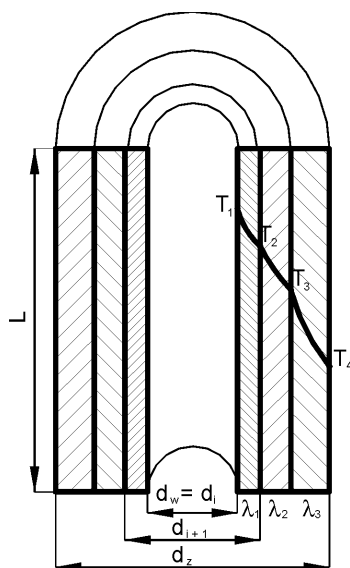
$$\dot{Q} = \pi L \frac{T_1 - T_2}{R_{\lambda r}} \quad (2.47)$$

Równania (2.43)–(2.47) pozwalają obliczać strumień cieplny, gdy dysponujemy podstawowymi danymi dotyczącymi oporu cieplnego przewodzenia ciepła i wartości temperatury na ścianie rurowej.

## 2.7. Ustalone przewodzenie ciepła w wielowarstwowej ścianie rurowej

Przyjmijmy, że trójwarstwowa ściana rurowa jest wykonana z materiałów o współczynnikach przewodzenia ciepła  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  niezależnych od temperatury i czasu. Rozmiary każdej ścianki rurowej (rys. 2.13) są określone przez jej średnicę we-

wnętrzną  $d_i$ , zewnętrzną  $d_{i+1}$  oraz długość  $L$ . Dla ustalonego przewodzenia ciepła przez ściankę rury o temperaturze wewnętrznej ściany  $T_1$  oraz zewnętrznej  $T_2$  równanie Fouriera zapiszemy w postaci (2.47).



Rys. 2.13. Rozkład temperatury w trójwarstwowej ścianie rurowej

Otrzymamy zatem układ  $n$  równań dla kolejnych warstw:

- dla warstwy wewnętrznej:

$$\dot{Q} = \pi L \frac{T_1 - T_2}{R_{\lambda r1}} \quad (2.48)$$

- dla warstwy następniej:

$$\dot{Q} = \pi L \frac{T_2 - T_3}{R_{\lambda r2}} \quad (2.49)$$

- dla warstwy  $n$ -tej, zewnętrznej:

$$\dot{Q} = \pi L \frac{T_n - T_{n+1}}{R_{\lambda rn}} \quad (2.50)$$

Po podzieleniu równań przez  $(\pi L/R_{\lambda ri})$  i prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{\dot{Q} R_{\lambda r1}}{\pi L} = T_1 - T_2 \quad (2.51)$$

$$\frac{\dot{Q}R_{\lambda r2}}{\pi L} = T_2 - T_3 \quad (2.52)$$

$$\frac{\dot{Q}R_{\lambda m}}{\pi L} = T_n - T_{n+1} \quad (2.53)$$

Po dodaniu stronami i wyciągnięciu wyrazu  $\dot{Q}/(\pi L)$  przed nawias otrzymujemy

$$\frac{\dot{Q}}{\pi L}(R_{\lambda r1} + R_{\lambda r2} + R_{\lambda m}) = T_1 - T_{n+1} \quad (2.54)$$

Przyjmijmy, że suma oporów  $R_{\lambda ri}$  jest oporem wypadkowym wielowarstwowej ściany rurowej o warstwach łączonych szeregowo

$$R_{\lambda r} = \sum_{i=1}^{i=n} R_{\lambda ri} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \quad (2.55)$$

Z równania (2.54) otrzymamy wówczas wyrażenie na strumień ciepła przewodzonego przez rurową ścianę wielowarstwową:

$$\dot{Q} = \pi L \frac{T_1 - T_{n+1}}{R_{\lambda r}} \quad (2.56)$$

Równanie to jest identyczne w budowie z równaniem dla pojedynczej ściany rurowej (2.47), ale tutaj opór  $R_{\lambda r}$  jest oporem sumarycznym.

### 3. Wnikanie ciepła

Podczas burzliwego przepływu płynu wzdłuż przegrody płaskiej lub o dowolnej krzywiźnie rozkład prędkości w kierunku prostopadłym do przegrody jest liniowy, a na jej powierzchni prędkość jest równa zero. Zgodnie z hipotezą Prandtla (1904 r.) w pobliżu przegrody istnieje tzw. warstewka graniczna; elementy płynu (gazu lub cieczy) przepływają w niej ruchem uwarstwionym, w warstwach równoległych do kierunku przepływu [1].



Rys. 3.1. Rozwinięcie warstwy granicznej: 1 – warstwa laminarna, 2 – obszar przejściowy, 3 – warstwa turbulentna, 4 – podwarstwa laminarna 5 – podwarstwa buforowa

Na rysunku 3.1 pokazano laminarną warstewkę graniczną (1), obszar przejściowy (2), turbulentną warstwę (3) oraz tzw. podwarstwę laminarną (4). Grubość laminarnej warstewki granicznej jest bardzo mała, ok.  $10^{-6}$  m, i na ogół nie jest ona wyznaczana doświadczalnie. Istotne jest jednak to, że w warstewce tej ruch ciepła od przegrody lub w kierunku przeciwnym zachodzi przez przewodzenie. Wytwarza się przy tym tzw. termiczna warstwa przyścienna, poza którą temperatura płynu nie zmienia się w kierunku prostopadłym do rozpatrywanej powierzchni. Grubość warstewki granicznej zależy przede wszystkim od kształtu powierzchni opływanej (płyta lub ściana rury, powierzchnia cząstki kulistej albo inna bryła), lecz także od takich właściwości płynu, jak lepkość i gęstości oraz od prędkości liniowej przepływu strumienia.

W większej odległości od ściany elementy płynu przemieszczają się również w kierunku poprzecznym i przejmowanie ciepła wiąże się z konwekcją, czyli ruchem makroskopowych części płynu różniących się temperaturą. Przenoszenie energii cieplnej od przegrody do rdzenia strumienia płynu lub w przeciwnym kierunku obejmuje zarówno przewodzenie w warstwie granicznej, zwanej warstwą przyścienną lub

warstwą Prandtla, jak i konwekcję w rdzeniu płynu. Ten łączny ruch ciepła jest nazywany wnikaniem ciepła (Hobler [4]), a niekiedy przejmowaniem ciepła (Wiśniewski, Wiśniewski [1], Kalinowski [2]).

Podstawowe równanie ruchu ciepła między powierzchnią przegrody a płynem znajdującym się z nią w kontakcie ma następującą postać:

$$\dot{Q} = \alpha A \Delta T \quad (3.1)$$

gdzie:  $\dot{Q}$  – strumień ciepła, J/s,  $\alpha$  – współczynnik wnikania ciepła od rdzenia płynu do powierzchni przegrody lub od przegrody do płynu, W/(m<sup>2</sup>·K),  $A$  – powierzchnia przegrody w kontakcie z płynem, m<sup>2</sup>,  $\Delta T$  – różnica temperatury w rdzeniu płynu i na powierzchni przegrody, K. Równanie to nazwano równaniem Newtona.

Współczynnik wnikania ciepła  $\alpha$  wyraża ilość ciepła w dżulach, która jest wymieniana w jednostce czasu ( $\tau = 1$  s) na jednostkowej powierzchni ( $A = 1$  m<sup>2</sup>), gdy  $\Delta T = 1$  K.

Wnikanie ciepła w układzie powierzchnia przegrody–płyn może zachodzić na trzy różne sposoby:

- w zakresie przepływu uwarstwionego – przez przewodzenie,
- w zakresie przepływu burzliwego – przez przewodzenie w warstwie przyściennej i konwekcję do rdzenia płynu,
- gdy istotny jest również udział promieniowania, całkowity współczynnik wnikania ciepła  $\alpha_c$  obejmuje w zależności od charakteru przepływu płynu albo  $\lambda/s$  i tzw. zastępczy współczynnik wnikania ciepła przez promieniowanie  $\alpha_r$ , albo konwekcyjny współczynnik wnikania ciepła  $\alpha$  i zastępczy współczynnik wnikania ciepła  $\alpha_r$ . Zastępczy współczynnik wnikania ciepła  $\alpha_r$  określa ilość ciepła, jaka jest wymieniana między powierzchnią przegrody i rdzeniem płynu przez promieniowanie dla  $\tau = 1$  s,  $A = 1$  m<sup>2</sup>,  $\Delta T = 1$  K.

Współczynnik wnikania ciepła jest funkcją ciśnienia, a także wielu zmiennych zależnych od temperatury, takich jak współczynnik przewodzenia ciepła, gęstość, lepkość oraz ciepło właściwe. Zależy on również od prędkości i charakteru przepływu płynu oraz od kształtu rozpatrywanej powierzchni wymiany ciepła. Na wartości współczynników wnikania ciepła wpływają również zmiany stanu skupienia – zjawiska towarzyszące wrzeniu cieczy lub skraplaniu pary oraz sposób przejmowania ciepła, w zależności od tego, czy ruch ciepła jest ustalony, czy nieustalony. Wnikanie ciepła jest zatem skomplikowanym zjawiskiem związanym bezpośrednio z mechaniką płynów. Siłą napędową ruchu ciepła jest różnica temperatury  $\Delta T$  odpowiadająca gradientowi temperatury na drodze przepływu ciepła.

Współczynnik wnikania ciepła może się zmieniać w czasie i wzdłuż opływanej powierzchni, może się też zmieniać temperatura płynu i powierzchni. Sposoby uśredniania współczynnika wnikania ciepła i temperatury płynu są umowne. Po uśrednieniu temperatury płynu i temperatury ścianki wzdłuż powierzchni [1]

$$\bar{T}_f = \frac{1}{A} \int_A T_f dA \quad (3.2)$$

$$\bar{T}_s = \frac{1}{A} \int_A T_s dA \quad (3.3)$$

do uśrednienia współczynnika wnikania ciepła wzdłuż powierzchni można wykorzystać strumień ciepła obliczone na dwa sposoby i otrzymać równanie

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}}{\bar{T}_f - \bar{T}_s} = \frac{\int_A \alpha(T_f - T_s) dA}{\int_A (T_f - T_s) dA} \quad (3.4)$$

Gdy zmiany temperatury płynu i powierzchni ścianki wzdłuż drogi przepływu nie są znane, znana jest natomiast temperatura na wlocie (1) i na wylocie (2) z kanału przepływowego, stosujemy inne podejście. Strumień ciepła przejmowany przez powierzchnię ścianki jest równy zmniejszeniu entalpii płynu o strumieniu masy  $\dot{m}$ :

$$\alpha(T_f - T_s) dA = -\dot{m} c_p d(T_f - T_s) \quad (3.5)$$

Po rozdzieleniu zmiennych całkuje się to równanie w granicach: dla pola powierzchni wymiany ciepła od 0 do  $A$  oraz dla różnicy temperatury  $(T_f - T_s)_1$  w przekroju wlotowym oraz  $(T_f - T_s)_2$  w przekroju wylotowym kanału. Po wprowadzeniu średniego współczynnika wnikania ciepła i scałkowaniu otrzymujemy

$$\int_A \alpha dA = \bar{\alpha} A = \dot{m} c_p \ln \frac{(T_f - T_s)_1}{(T_f - T_s)_2} \quad (3.6)$$

Po dalszych przekształceniach (podzielenie obu stron równania przez logarytm stosunku różnic temperatury na końcach wymiennika i pomnożeniu przez te różnice) otrzymujemy wzór do obliczania strumienia ciepła:

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p \left[ (T_f - T_s)_1 - (T_f - T_s)_2 \right] = \bar{\alpha} A \frac{(T_f - T_s)_1 - (T_f - T_s)_2}{\ln \frac{(T_f - T_s)_1}{(T_f - T_s)_2}} = \bar{\alpha} A \Delta T_m \quad (3.7)$$

W obliczeniach należy zastosować średnią logarymiczną różnicę temperatury płynu i powierzchni ścianki na wlocie i wylocie z kanału przepływowego



$$\Delta \bar{T}_m = \frac{(T_f - T_s)_1 - (T_f - T_s)_2}{\ln \frac{(T_f - T_s)_1}{(T_f - T_s)_2}} \quad (3.8)$$

W zależności od kierunku strumienia ciepła temperatura płynu zmienia się w miarę oddalania się od powierzchni ciała stałego. Cząstki płynu stykające się z powierzchnią ciała stałego przyjmują jego temperaturę i na powierzchni ciała stałego wytwarza się tzw. termiczna warstwa przyścienna, poza którą temperatura płynu nie zmienia się w kierunku prostopadłym do rozpatrywanej powierzchni. Często do określania współczynnika wnikania ciepła stosuje się średnią arytmetyczną temperatury płynu i temperatury powierzchni ciała stałego.

Podczas przepływu laminarnego przez kanał lub rurę temperatura płynu zmienia się w całym poprzecznym przekroju kanału i do obliczeń stosuje się wówczas średnią temperaturę płynu określoną na podstawie obliczonej na dwa sposoby entalpii płynu:

$$\bar{T}_f = \frac{\int_A \rho c_p w T_f dA}{\int_A \rho c_f w dA} \quad (3.9)$$

Zaniedbując zmiany właściwości płynu, równanie to można zapisać w postaci:

$$\bar{T}_f = \frac{\int_A w T_f dA}{\int_A w dA} = \frac{1}{\dot{V}} \int_A w T_f dA \quad (3.10)$$

gdzie  $\dot{V}$  jest objętościowym strumieniem płynu.

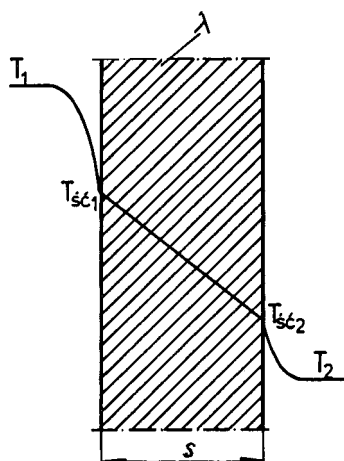
Podejście analityczne, prowadzące do wyznaczenia współczynników wnikania ciepła dla każdego przypadku [5–9], obejmuje poszukiwanie rozkładu temperatury w płynie opływającym ciało stałe w celu wyznaczenia gradientu temperatury przy powierzchni  $(dT/ds)_w$ . Współczynnik wnikania ciepła odpowiada stosunkowi gęstości strumienia cieplnego do różnicy temperatury powierzchni i temperatury płynu (Kemblowski, Strumiłło i in.[5]):

$$\alpha = \frac{-\lambda \left( \frac{dT}{ds} \right)_{s=0}}{T_s - T_f} \quad (3.11)$$

Wyznaczanie współczynnika  $\alpha$  metodą analityczną jest tak skomplikowane, że wykonano je w nielicznych przypadkach (rozwiązanie Pohlhausena).

## 4. Przenikanie ciepła

Przenikanie ciepła jest przekazywaniem ciepła między dwoma płynami rozgraniczonymi stałą przegrodą – płytą lub ścianką rury. Zachodzi tutaj kolejno wnikanie ciepła od gorącego płynu do pierwszej ściany, następnie przewodzenie ciepła przez przegrodę i wnikanie ciepła od drugiej ściany tej przegrody do płynu ogrzewanego.



Rys. 4.1. Rozkład temperatury podczas przenikania ciepła przez ściankę płaską

Przyjmijmy, że ciepło wnika od czynnika A do ścianki płaskiej, następnie zachodzi przewodzenie przez ściankę, po czym następuje wnikanie od ścianki do czynnika B. Na rysunku 4.1 rozkład temperatury w mediach A i B zilustrowano zgodnie z teorią termicznej warstwy granicznej. Dla ustalonego ruchu ciepła na wszystkich etapach ruchu ciepła mamy ten sam strumień ciepła

$$\dot{Q} = \alpha_1 A (T_{f1} - T_{s1}) = \frac{\lambda}{s} A (T_{s1} - T_{s2}) = \alpha_2 A (T_{s2} - T_{f2}) \quad (4.1)$$

skąd otrzymujemy po przekształceniach

$$T_{f1} - T_{s1} = \frac{\dot{Q}}{\alpha_1 A} \quad (4.2)$$

$$T_{s1} - T_{s2} = \frac{\dot{Q}s}{\lambda A} \quad (4.3)$$

$$T_{s2} - T_{f2} = \frac{\dot{Q}}{\alpha_2 A} \quad (4.4)$$

Po zsumowaniu spadków temperatury otrzymujemy

$$T_{f1} - T_{f2} = \frac{\dot{Q}}{A} \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \quad (4.5)$$

a stąd strumień cieplny jest opisany równaniem

$$\dot{Q} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} A (T_{f1} - T_{f2}) = kA\Delta T \quad (4.6)$$

przy czym

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \quad (4.7)$$

Wielkość  $k$  nazywamy współczynnikiem przenikania ciepła. Równanie (4.6) opisujące strumień cieplny jest nazywane równaniem Pecleta dla ściany płaskiej, a współczynnik przenikania ciepła  $k$  współczynnikiem Pecleta.

Ruch ciepła między ścianką a otoczeniem może się odbywać przez wnikanie bądź promieniowanie (por. rozdz. 3). Aby uwzględnić promieniowanie ciepła, wprowadza się zazwyczaj zastępczy współczynnik ruchu ciepła przez promieniowanie  $\alpha_r$  [5], który definiujemy równaniem

$$\dot{Q}_{1-2} = \alpha_r A_1 (T_{s1} - T_f) \quad (4.8)$$

stąd otrzymujemy

$$\alpha_r = \frac{\dot{Q}_{1-2}}{A_1 (T_{s1} - T_f)} \quad (4.9)$$

Po podstawieniu równania na strumień ciepła przekazanego przez promieniowanie

$$\dot{Q}_{1-2} = C_0 A_1 \Phi_{1-2} \left[ \left( \frac{T_{s1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{s2}}{100} \right)^4 \right] \quad (4.10)$$

otrzymujemy ostateczną postać wyrażenia

$$\alpha_r = \frac{C_0 \Phi_{1-2} \left[ \left( \frac{T_{s1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{s2}}{100} \right)^4 \right]}{T_{s1} - T_f} \quad (4.11)$$

Sumarycznie ruch ciepła przez wnikanie i promieniowanie opisujemy równaniem

$$\dot{Q} = (\alpha_k + \alpha_r) A_1 \Delta T \quad (4.12)$$

gdzie  $\alpha_k$  jest współczynnikiem wnikania ciepła,  $\alpha_r$  zaś – zastępczym współczynnikiem ruchu ciepła przez promieniowanie.

## 4.1. Opory cieplne wnikania i przenikania ciepła

Rozważmy dla przykładu przypadek wnikania ciepła przy gorącej płycie schładzanej powietrzem. Strumień ciepła można łatwo obliczyć z równania Newtona:

$$\dot{Q} = \alpha_1 A_1 (T_1 - T_{s1}) = \alpha_2 A_2 (T_{s2} - T_2) \quad (4.13)$$

które inaczej możemy zapisać:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_1}{R_1} = \frac{\Delta T_2}{R_2} \quad (4.14)$$

W równaniu tym  $R_1$  oznacza opór cieplny wnikania po wewnętrznej stronie ściany,  $R_2$  zaś opór cieplny wnikania po jej zewnętrznej stronie.

Wykorzystujemy tutaj podobieństwo między równaniami opisującymi ruch ciepła a równaniem wyrażającym prawo Ohma dla przepływu prądu elektrycznego

$$I = \frac{\Delta U}{R} \quad (4.15)$$

Spadkowi napięcia  $\Delta U$  odpowiada w ruchu ciepła różnica temperatury  $\Delta T$ , natężenie prądu  $I$  jest wielkością analogiczną do strumienia cieplnego  $\dot{Q}$ , a oporowi elektrycznemu  $R$  przypisujemy odpowiednie wielkości oporów cieplnych  $R_i$ , wynikające z odpowiednich równań ruchu ciepła.

Opory cieplne dla wnikania ciepła zapiszemy zatem wzorami

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_1 A_1} \quad (4.16)$$

oraz

$$R_2 = \frac{1}{\alpha_2 A_2} \quad (4.17)$$

Po zastosowaniu równań (4.16) i (4.17) do poszczególnych przypadków ruchu ciepła otrzymujemy równania definiujące opory cieplne:

- opór cieplny przewodzenia dla ścianki płaskiej

$$R_\lambda = \frac{\Delta T}{\dot{Q}} = \frac{s}{\lambda A} \quad (4.18)$$

- opór cieplny wnikania

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha A} \quad (4.19)$$

- opór cieplny promieniowania

$$R_r = \frac{1}{\alpha_r A} \quad (4.20)$$

- opór złożonego ruchu ciepła z wnikania i promieniowania

$$R_{\alpha+r} = \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_r) A} \quad (4.21)$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\frac{1}{R_{\alpha+r}} = (\alpha_1 + \alpha_r) A = \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_r} \quad (4.22)$$

Zależność ta, opisująca związek oporów cieplnych wnikania i promieniowania, odpowiada zależności obowiązującej w obliczaniu oporów elektrycznych łączonych równolegle.

- Opór cieplny przenikania opisuje równanie

$$R_k = \frac{1}{kA} \quad (4.23)$$

Po podstawieniu wyrażenia na współczynnik przenikania ciepła otrzymujemy

$$R_k = R_{\alpha_1} + R_\lambda + R_{\alpha_2} \quad (4.24)$$

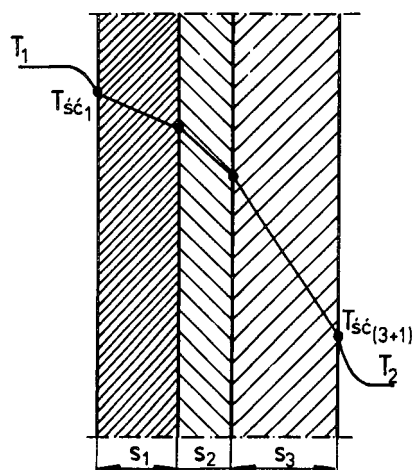
Gdy ruch ciepła między ścianką a otoczeniem odbywa się przez wnikanie i promieniowanie, równanie to zapiszemy w postaci:

$$R_k = R_{\alpha_{1+pr}} + R_\lambda + R_{\alpha_{2+pr}} \quad (4.25)$$

Opór cieplny przenikania jest zatem równy sumie oporów wnikania i przewodzenia ciepła.

## 4.2. Przenikanie ciepła przez wielowarstwową ścianę płaską

Rozważmy przypadek przenikania ciepła przez ścianę domu do powietrza atmosferycznego na zewnątrz domu. Ruch ciepła od rdzenia strumienia ciepłego powietrza w pomieszczeniu do wewnętrznej powierzchni ściany domu zachodzi przez wnikanie przy konwekcji naturalnej, po czym następuje przewodzenie w warstwie przez ścianę domu oraz przewodzenie ciepła w kolejnych warstwach izolacji, po czym wnikanie do powietrza w powietrzu na zewnątrz domu przy konwekcji naturalnej. Temperatura ciepłego powietrza wynosi  $T_1$ , współczynnik wnikania ciepła  $\alpha_1$ , temperatura powietrza atmosferycznego  $T_2$ , współczynnik wnikania zaś  $\alpha_2$ . Rozkład temperatury dla ustalonego ruchu ciepła przez taką ścianę pokazano na rys. 4.2. Temperaturę na kolejnych ścianach oznaczono symbolami  $T_{si}$ .



Rys. 4.2. Rozkład temperatury podczas przenikania ciepła przez trójwarstwową ściankę płaską

Zanalizujmy przenikanie ciepła jako proces złożony z następujących oddzielnych etapów: wnikania ciepła wewnątrz pomieszczenia od powietrza o temperaturze  $T_1$  do ściany o temperaturze  $T_{s1}$ , przewodzenia ciepła przez kolejne trzy warstwy, a następnie wnikanie ciepła do powietrza atmosferycznego o temperaturze  $T_2$ . Otrzymamy układ trzech równań:

$$\dot{Q} = \alpha_1 A (T_1 - T_{s1}) \quad (4.26)$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{s1} - T_{s(n+1)}}{R_\lambda} \quad (4.27)$$

W naszym przykładzie  $n = 3$ :

$$\dot{Q} = \alpha_2 A (T_{s(n+1)} - T_2) \quad (4.28)$$

Jeżeli układ równań przekształcimy w ten sposób, że po lewej stronie będą tylko różnice temperatury, a następnie dodamy stronami, to otrzymamy:

$$T_1 - T_2 = \dot{Q} \left( \frac{1}{\alpha_1 A} + R_\lambda + \frac{1}{\alpha_2 A} \right) \quad (4.29)$$

W nawiasie mamy sumę trzech wyrazów, z których  $R_\lambda$  jest oporem cieplnym przewodzenia przez ścianę wielowarstwową. Podobnie pozostałe wyrazy nazywamy oporami cieplnymi wnikania  $R_{\alpha 1}$  i  $R_{\alpha 2}$ , a całe wyrażenie w nawiasie jest oporem sumarycznym, zwanym oporem cieplnym przenikania ciepła przez wielowarstwową przegrodę płaską

$$R_k = R_{\alpha 1} + R_\lambda + R_{\alpha 2} \quad (4.30)$$

Po wprowadzeniu tego wyrażenia do wzoru (4.29) i przekształceniu otrzymujemy równanie na strumień cieplny, zwane równaniem Pecleta

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_k} \quad (4.31)$$

Równanie to można też zapisać w podstawowej postaci:

$$\dot{Q} = kA(T_1 - T_2) \quad (4.32)$$

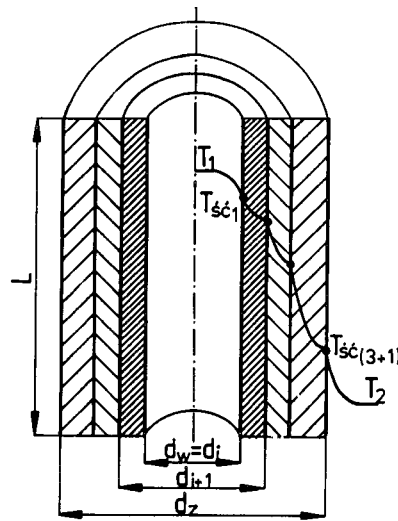
gdzie  $k$  jest współczynnikiem przenikania ciepła dla wielowarstwowej ściany płaskiej, zwanym również współczynnikiem Pecleta. Współczynnik ten oblicza się ze wzoru

$$kA = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 A} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{s_i}{\lambda_i A} + \frac{1}{\alpha_2 A}} \quad (4.33)$$

### 4.3. Przenikanie ciepła przez przegrodę rurową

Rozważmy przenikanie ciepła podczas przepływu gorącej wody wewnątrz rury. Ruch ciepła od rdzenia strumienia gorącej wody do wewnętrznej powierzchni rury zachodzi przez wnikanie przy konwekcji wymuszonej, a następnie przez przewodzenie w warstwie przez ścianę rury oraz przewodzenie w kolejnych warstwach izolacji,

wreszcie przez wnikanie do powietrza w hali fabrycznej przy konwekcji naturalnej. Temperatura gorącej wody wynosi  $T_1$ , a współczynnik wnikania ciepła  $\alpha_1$ , temperatura powietrza  $T_2$ , współczynnik wnikania zaś  $\alpha_2$ .



Rys. 4.3. Rozkład temperatury podczas przenikania ciepła przez trójwarstwową ściankę rurową

Rozkład temperatury dla ustalonego ruchu ciepła przez taką ścianę rurową pokazano na rys. 4.3. Temperaturę na kolejnych ścianach rurowych oznaczono symbolami  $T_{śc}$ . Zanalizujmy przenikanie ciepła jako proces złożony z oddzielnych etapów: wnikania ciepła wewnątrz rury, przewodzenia ciepła przez kolejne warstwy, a następnie wnikanie ciepła. Otrzymamy układ trzech równań:

$$\dot{Q} = \alpha_1 A_1 (T_1 - T_{s1}) = \alpha_1 \pi d_w L (T_1 - T_{s1}) \quad (4.34)$$

$$\dot{Q} = \pi L \frac{T_{s1} - T_{s(n+1)}}{R_{\lambda r}} \quad (4.35)$$

$$\dot{Q} = \alpha_2 A_z (T_{s(n+1)} - T_2) = \alpha_2 \pi d_z L (T_{s(n+1)} - T_2) \quad (4.36)$$

Podobnie jak poprzednio po przekształceniu tego układu otrzymujemy:

$$\frac{\dot{Q}}{\alpha_1 \pi d_w L} = T_1 - T_{s1} \quad (4.37)$$

$$\frac{\dot{Q}}{\pi L} R_{\lambda r} = T_{s1} - T_{s(n+1)} \quad (4.38)$$



$$\frac{\dot{Q}}{\alpha_2 \pi d_z L} = T_{s(n+1)} - T_2 \quad (4.39)$$

Po dodaniu stronami i wyciągnięciu przed nawias wyrazu  $\dot{Q}/(\pi L)$  otrzymujemy

$$\frac{\dot{Q}}{\pi L} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_w} + R_{\lambda_r} + \frac{1}{\alpha_2 d_z} \right) = T_1 - T_2 \quad (4.40)$$

W nawiasie poza oporem przewodzenia ciepła  $R_{\lambda_r}$  mamy opory wnikania opisane wzorami

$$R_{\alpha r1} = \frac{1}{\alpha_1 d_w} \quad (4.41)$$

$$R_{\alpha r2} = \frac{1}{\alpha_2 d_z} \quad (4.42)$$

Przyjawszy, że suma tych trzech oporów jest oporem przenikania ciepła przez ścianę rurową (liniowy opór przenikania ciepła)

$$R_{kr} = R_{\alpha r1} + R_{\lambda_r} + R_{\alpha r2}. \quad (4.43)$$

otrzymamy wzór na strumień ciepła przenikający przez ścianę rurową, zwany równaniem Pecleta dla tej przegrody

$$\dot{Q} = \pi L \frac{T_1 - T_2}{R_{kr}} \quad (4.44)$$

Wprowadzając definicję współczynnika przenikania ciepła, zwanego także współczynnikiem Pecleta dla przegrody rurowej lub liniowym współczynnikiem przenikania ciepła [2]

$$k_r = \frac{1}{R_{kr}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_w} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}{2\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_z}}. \quad (4.45)$$

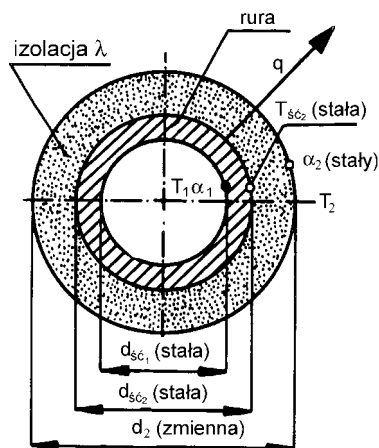
otrzymujemy następującą postać równania Pecleta

$$\dot{Q} = k_r \pi L (T_1 - T_2) \quad (4.46)$$

Wyprowadzone równanie stanowi wzór na strumień ciepła przenikający przez ścianę rurową, zwany równaniem Pecleta dla tej przegrody.

#### 4.4. Analiza oporu cieplnego pierścieniowej warstwy izolacji

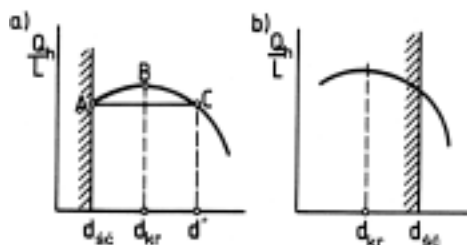
Rurociągi często pokrywa się warstwą izolacji, tzn. materiału o małym współczynniku przewodzenia ciepła. Działanie to ma na celu zwiększenie oporu przenikania ciepła przez ściankę rurociągu (rys. 4.4).



Rys. 4.4. Opory cieplne w ściance cylindrycznej

Straty ciepła od rury izolowanej do otoczenia opiszemy równaniem

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{\pi(T_{sc2} - T_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_{sc2}} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} = \frac{\pi(T_{sc2} - T_2)}{R_{kr}} \quad (4.47)$$



Rys. 4.5. Krytyczna średnica rury: a)  $d < d_{kr}$ , b)  $d > d_{kr}$

Opór cieplny jednowarstwowej warstwy izolacyjnej rurowej (rys. 4.4) opisuje równanie

$$R_{kr} = \frac{\ln \frac{d_2}{d_{sc2}}}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \quad (4.48)$$

Zależy on od średnicy zewnętrznej warstwy izolacji  $d_2$ , jeśli przyjmiemy stałe wartości różnicy temperatury, średnicy wewnętrznej rury  $d_1$ , współczynników wnikania ciepła  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  oraz współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$ . Ze zwiększeniem zewnętrznej średnicy przegrody izolacyjnej  $d_2$  rośnie wyraz środkowy równania (4.48), maleje zaś wartość ostatniego wyrazu. Dla określonej różnicy temperatury strumień ciepła będzie maksymalny, gdy uzyskamy minimalny opór cieplny. W celu określenia wartości średnicy  $d_2$ , dla jakiej wystąpi minimalny opór cieplny, należy rozwiązać równanie uzyskane po zróżniczkowaniu funkcji  $R_{kr}$  względem  $d_2$  i przyrównaniu pochodnej do zera:

$$\frac{d(R_{kr})}{d(d_2)} = 0 \quad (4.49)$$

Po wykonaniu tego działania:

$$\frac{d(R_{kr})}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0 \quad (4.50)$$

i rozwiązaniu równania ze względu na  $d_2$  otrzymujemy

$$d_2 = d_{kr} = \frac{2\lambda}{\alpha_2} \quad (4.51)$$

Jest to wzór określający tzw. średnicę krytyczną warstwy izolacyjnej.

Współczynnik wnikania ciepła  $\alpha_2$  jest całkowitym współczynnikiem wnikania, obejmującym zarówno konwekcyjny współczynnik wnikania ciepła  $\alpha$ , jak i współczynnik wnikania ciepła równoważny promieniowaniu  $\alpha_r$ .

Aby stwierdzić, czy funkcja opisująca opór cieplny (równanie (4.48)) ma minimum czy maksimum, należy zbadać jej drugą pochodną

$$\frac{d^2(R_{kr})}{d(d_2)^2} = -\frac{1}{2\lambda d_2^2} + \frac{2}{\alpha_2 d_2^3} \quad (4.52)$$

Po podstawieniu wzoru (4.51) za  $d_2$  otrzymujemy

$$\frac{d^2(R_{kr})}{d(d_2)^2} = -\frac{\alpha_2^2}{8\lambda^3} + \frac{2\alpha_2^2}{8\lambda^3} = \frac{\alpha_2^2}{8\lambda^3} > 0 \quad (4.53)$$

Druga pochodna funkcji opisującej opór cieplny jest zawsze dodatnia, bo współczynnik  $\lambda$  jest dodatni. Wynika stąd, że dla średnicy krytycznej określonej równaniem (4.51) straty ciepła są maksymalne. Ponieważ średnica krytyczna zależy jedynie od wartości współczynników  $\alpha_2$  i  $\lambda$ , więc w przypadku małej wartości średnicy rury lub drutu (rys. 4.5a) jest ona mniejsza od wartości krytycznej. Wówczas pokrywanie przewodu izolacją powoduje zwiększenie strat ciepła aż do osiągnięcia przez ze-

wewnętrzną średnicę warstwy  $d_2$  średnicy krytycznej  $d_{kr}$ . Dalszy wzrost grubości izolacji spowoduje zmniejszanie strat ciepła, ale aż do punktu C (rys.4.5a) są one większe niż straty ciepła dla rury bez izolacji. Dopiero po nałożeniu na rurę izolacji o grubości  $(d^* - d_{s\zeta})/2$  i osiągnięciu przez średnicę zewnętrzną izolacji wartości większych od  $d^*$ , straty ciepła będą mniejsze niż dla rury nieizolowanej.

W przypadku rur o dużej średnicy (rys 4.5b), dla których średnica zewnętrzna  $d_{s\zeta}$  jest większa od średnicy krytycznej  $d_{kr}$ , zwiększenie grubości izolacji zawsze powoduje zmniejszenie strat ciepła. Dzieje się tak z reguły w sieciach ciepłych.

Nakładanie warstwy izolacyjnej obniża straty ciepła, a więc i obniża koszty jednostkowe ciepła, jednakże powoduje to zwiększenie kosztów inwestycyjnych. Wyznaczenie ekonomicznej grubości warstwy izolacji wymaga rozważenia rodzaju izolacji w zależności od temperatury powierzchni ściany izolowanej jak i sumarycznych kosztów związanych z zastosowaniem danej izolacji. Ekonomiczną grubość izolacji  $s_e$  należy wyznaczyć w ten sposób, aby uzyskać minimum sumarycznych kosztów ciepła i kosztów inwestycyjnych. Zagadnienia te są przedmiotem rozważań w następnych rozdziałach (rozd. 5).

## **5. Izolacja cieplna**

### **5.1. Rodzaje izolacji cieplnej**

Zmniejszenie strat ciepła od aparatury do otoczenia możemy uzyskać przez zastosowanie warstwy materiału o małym współczynniku przewodzenia ciepła. Są to materiały stałe, których współczynniki przewodzenia ciepła są mniejsze od  $0,15 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  (por. rozdz. 2.3.2), na ogół porowate, włókniste lub ziarniste, których pory są wypełnione powietrzem lub gazem o współczynniku przewodzenia ciepła znacznie mniejszym niż dla ciała stałego. Efektywne współczynniki przewodzenia ciepła takich materiałów są więc dostatecznie małe, co zapewnia ich przydatność do wykonania warstwy izolacyjnej.

### **5.2. Charakterystyka materiałów izolacyjnych**

Rodzaj materiału izolacyjnego jest uwarunkowany najczęściej temperaturą izolowanej powierzchni aparatu. W zakresie niskiej temperatury, tj. równej lub mniejszej od temperatury powietrza atmosferycznego, stosuje się masę korkową, wytwarzaną przez zmieszanie zmielonego korka z odpowiednim lepiszczem. Może ona być użyta w postaci odpowiednio wyprofilowanych kształtek lub w postaci granulatu. Powszechnie stosowanym materiałem izolacyjnym jest również wata szklana. W praktyce przemysłowej używa się również wełny, filcu itp. Górną granicą stosowania tych materiałów jest temperatura zwęglenia, z reguły około  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  [3]. W zakresie wyższej temperatury poza watą szklaną używa się wełny żuźlowej, okrzemek, masy magnezowej, azbestu oraz ich mieszanek. Dopuszczalna temperatura dla tych materiałów wynosi  $600 \text{ }^\circ\text{C}$ . Izolację odporną na wysoką temperaturę (od  $600$  do  $800 \text{ }^\circ\text{C}$ ) wykonuje się z wypalanej okrzemki, względnie może być tutaj wykorzystany żużel wielkopiecowy.

Do podstawowych warunków prawidłowego funkcjonowania izolacji należą: ściśle dopasowanie warstwy izolacji do ściany aparatu oraz szczelność przed wpływem atmosfery, zwłaszcza zawilgocenia. W przypadku izolacji pracującej w niskiej tempe-

raturze temperatura zewnętrznej powierzchni warstwy powinna być wyższa od temperatury punktu rosy powietrza atmosferycznego, aby uniknąć wykrapłania się pary wodnej.

### 5.3. Ekonomiczna grubość warstwy izolacji

Nałożenie warstwy izolacyjnej zmniejsza straty ciepła, a więc i obniża koszty jednostkowe ciepła, jednak powoduje zwiększenie kosztów inwestycyjnych. Ekonomiczną grubość izolacji  $s_e$  należy tak wyznaczyć, aby uzyskać minimum sumarycznych kosztów ruchowych (tj. ciepła) i kosztów inwestycyjnych. Koszty inwestycyjne zależą od ceny izolacji, kosztów robocizny na jej ułożenie oraz czasu ich eksploatacji. Zarówno koszty ruchowe  $K_r$ , jak i koszty inwestycyjne  $K_i$  na ogół są liczone w odniesieniu do jednego metra bieżącego rurociągu. Roczne koszty inwestycyjne oblicza się z równania

$$K_i = \frac{1}{\tau_e} AV \quad (5.1)$$

w którym:  $\tau_e$  – czas eksploatacji w latach,  $A$  – cena 1 m<sup>3</sup> izolacji wraz z ułożeniem na powierzchni,  $V$  – objętość izolacji odniesiona do jednego metra bieżącego rurociągu.

Objętość izolacji może być obliczona z zależności

$$V = \frac{\pi \left[ (d_1 + 2s_2)^2 - d_1^2 \right]}{4} = \pi (s_2^2 + d_1 s_2) \quad (5.2)$$

Koszty ruchowe, tj. koszty ciepła, można obliczać wg zależności

$$K_r = C \dot{Q}' \tau \quad (5.3)$$

gdzie  $C$  – cena jednostkowa energii cieplnej, zł/J,  $\tau$  – czas pracy rurociągu w ciągu roku, s/rok,  $\dot{Q}'$  – straty ciepła, W/m.

Straty ciepła  $\dot{Q}'$  można obliczać na podstawie szczegółowych analiz lub z równania

$$\dot{Q}' = bck'(T_w - T_z) \quad (5.4)$$

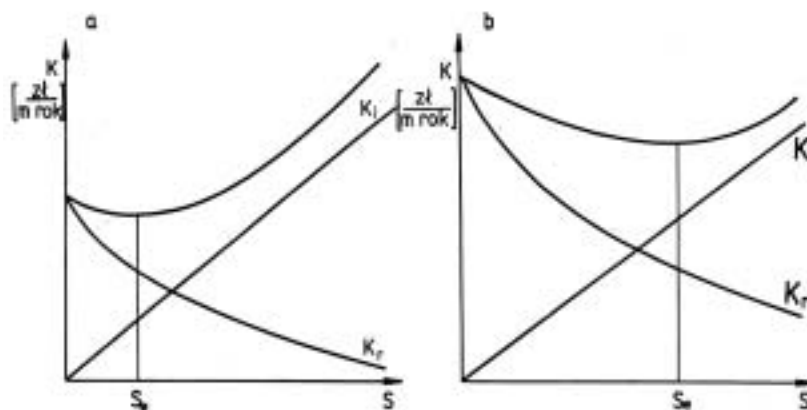
w którym

$$k' = \pi k_r \quad (5.5)$$

W równaniach tych  $b$  oznacza bezwymiarowy współczynnik uwzględniający wpływ różnicy temperatury płynu i otoczenia,  $c$  – bezwymiarowy współczynnik uwzględniający wpływ prędkości wiatru,  $k'$  – współczynnik przenikania ciepła odniesiony do

jednego metra bieżącego rurociągu. Dane te można odczytać z tabeli 29 w monografii Hoblera [4].

Ekonomiczną grubość izolacji  $s_e$  należy wyznaczyć w taki sposób, aby uzyskać minimum sumarycznych kosztów ciepła i kosztów inwestycyjnych. Można to wykonać metodą graficzną, przedstawiając zależność kosztów od grubości warstwy izolacyjnej (rys. 5.1).



Rys. 5.1. Ekonomiczna grubość warstwy izolacji  $s_e$ : a) niskie jednostkowe koszty ciepła, b) wysokie jednostkowe koszty ciepła;  $K$  – koszty sumaryczne,  $K_i$  – koszty inwestycyjne,  $K_r$  – koszty ruchowe

Możliwe są dwa warianty: Gdy a) koszty jednostkowe energii cieplnej są niskie i ekonomiczna grubość izolacji jest mała oraz gdy b) koszty energii są wysokie i grubość izolacji znacznie większa.

Tabela 5.1. Ekonomiczna grubość warstwy izolacji według Gerbela i Cammerera (w mm) [2]

| Obiekt          | Temperatura pary (°C) |          |        |          |        |          |
|-----------------|-----------------------|----------|--------|----------|--------|----------|
|                 | 100                   |          | 200    |          | 350    |          |
|                 | Gerbel                | Cammerer | Gerbel | Cammerer | Gerbel | Cammerer |
| Rura $\phi$ 25  | 14                    | 20       | 36     | 30       | 62     | 25       |
| Rura $\phi$ 100 | 37                    | 40       | 70     | 60       | 105    | 65       |
| Rura $\phi$ 400 | 60                    | 55       | 106    | 80       | 157    | 90       |
| Ściana płaska   | 83                    | 65       | 153    | 100      | 242    | 120      |

Wartości ekonomicznej grubości izolacji obliczone przez Gerbela i Cammerera [2] dla izolacji o  $\lambda = 0,0945 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , czasie eksploatacji 8000 h/rok, kosztach inwestycyjnych 20% i przeciętnej cenie wytwarzania pary zestawiono w tabeli 5.1.

## 6. Przewodzenie ciepła w warunkach nieustalonych

Zagadnienie przewodzenia ciepła w warunkach nieustalonych ma duże znaczenie praktyczne w wielu procesach przemysłowych, takich jak np. ogrzewanie lub chłodzenie materiałów, obróbka cieplna metali, procesy dochodzenia do równowagi termicznej aparatów i instalacji. Inną grupę takich procesów stanowią procesy ogrzewania i chłodzenia materiałów w różnego rodzaju aparatach, np. w rekuperatorach, suszarkach, adsorberach lub reaktorach.

W tych trzech ostatnich urządzeniach, ruch ciepła jest sprzężony z transportem masy wewnątrz materiału, a niekiedy i z reakcją chemiczną.

### 6.1. Różniczkowe równanie przewodzenia ciepła

W wielu procesach temperatura ciała zmienia się w czasie i w przestrzeni. Do rozważań przyjmuje się ograniczone odcinki czasu oraz elementarną objętość ciała. Otrzymana w ten sposób zależność jest ogólnym równaniem różniczkowym procesu.

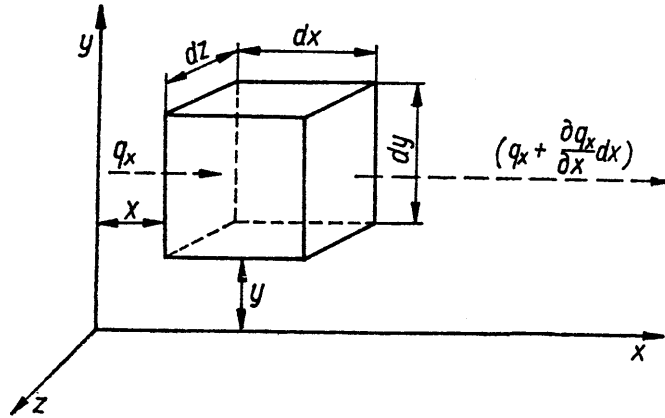
W celu wyprowadzenia równania różniczkowego przewodzenia ciepła należy przyjąć następujące założenia:

- ciało jest homogeniczne,
- parametry fizyczne ciała są stałe,
- odkształcenie rozpatrywanej objętości ciała spowodowane przez zmiany temperatury jest bardzo znikome,
- makroskopowe cząstki ciała są nieruchome,
- wewnętrzne źródła ciepła są rozmieszczone w ciele równomiernie.

Przyjmijmy do analizy prostopadłościan, którego krawędzie są skierowane równoległe do osi układu współrzędnych i mają długości  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (rys. 6.1).

Temperatura rozpatrywanego prostopadłościanu w danej chwili wynosi  $T$  i może zmieniać się w czasie.





Rys. 6.1. Nieustalone przewodzenie ciepła w elemencie w kształcie prostopadłościanu

W celu otrzymania równania przewodzenia ciepła należy ułożyć bilans energetyczny prostopadłościanu [5]. Oznaczmy przez  $dQ_x$ ,  $dQ_y$ ,  $dQ_z$  ilość ciepła dostarczoną do płaszczyzn prostopadłościanu odległych o  $x$ ,  $y$  i  $z$  od osi współrzędnych w czasie  $d\tau$  w kierunku osi  $0x$ ,  $0y$  i  $0z$  (rys.6.1). Ilość ciepła odprowadzoną z powierzchni prostopadłościanu odległych od osi układu o  $x + dx$ ,  $y + dy$  oraz  $z + dz$  w tym samym czasie i w tych samych kierunkach oznaczmy przez  $dQ_{x+dx}$ ,  $dQ_{y+dy}$ ,  $dQ_{z+dz}$ . Ilość ciepła, jakie dopływa do powierzchni  $dydz$  w kierunku osi  $0x$  w czasie  $d\tau$  jest określona równaniem

$$dQ_x = q_x dydzd\tau \quad (6.1)$$

Przez powierzchnię odległą od osi  $y$  i długości  $x + dx$  odpływa w tym samym kierunku w czasie  $d\tau$  ilość ciepła

$$dQ_{x+dx} = \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dydzd\tau \quad (6.2)$$

Różnica między ilością ciepła dopływającego i odpływającego z prostopadłościanu w kierunku osi  $x$  w czasie  $d\tau$  jest określona równaniem

$$\begin{aligned} dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} &= q_x dydzd\tau \\ &- \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dydzd\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dydzd\tau \end{aligned} \quad (6.3)$$

Podobnie można wyprowadzić równanie opisujące różnice między ilością ciepła doprowadzanego i odprowadzanego z prostopadłościanu w pozostałych kierunkach  $dQ_{y1}$  i  $dQ_{z1}$ .

Sumaryczną ilość ciepła dostarczoną do prostopadłościanu przez przewodzenie opisuje równanie

$$dQ_1 = dQ_{x1} + dQ_{y1} + dQ_{z1} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz d\tau \quad (6.4)$$

Oznaczmy przez  $dQ_2$  ilość ciepła wytworzonego wewnątrz tego elementu w czasie  $d\tau$  przez wewnętrzne źródło ciepła. Przyjmując za wydajność wewnętrznych źródeł ciepła  $q_v$  ( $\text{W/m}^3$ ), otrzymamy równanie:

$$dQ_2 = q_v dV d\tau \quad (6.5)$$

Następnie przyjmiemy, że zmianę energii wewnętrznej ciała o objętości  $dV$  w czasie  $d\tau$  opisuje równanie

$$dQ = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau \quad (6.6)$$

Korzystając z prawa zachowania energii, według którego ilość energii dostarczona do elementarnej objętości przez przewodzenie z zewnątrz i z wewnętrznych źródeł ciepła w czasie  $d\tau$  jest równa zmianie energii wewnętrznej materiału – zgodnie z I zasadą termodynamiki otrzymujemy:

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ \quad (6.7)$$

Po podstawieniu odpowiednich równań i po przekształceniach otrzymujemy końcową postać równania różniczkowego przewodzenia ciepła

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \tau} = -\frac{1}{c_p \rho} \left( \frac{\partial \mathbf{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{q}_z}{\partial z} \right) + \frac{\mathbf{q}_v}{c_p \rho} \quad (6.8)$$

zapisywaną również w postaci

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \tau} c_p \rho = -\text{div} \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}_v \quad (6.9)$$

Wektor gęstości strumienia cieplnego  $\mathbf{q}$  jest normalny do powierzchni izotermicznej i jest dodatni w kierunku malejących temperatur. Tak więc wektory  $\mathbf{q}$  i  $\text{grad} \mathbf{T}$  mają ten sam kierunek i przeciwny zwrot.

W prostokątnym układzie współrzędnych wektor  $\mathbf{q}$  ma trzy składowe:  $\mathbf{q}_x$ ,  $\mathbf{q}_y$ ,  $\mathbf{q}_z$ , które możemy zapisać za pomocą następujących równań:

$$\mathbf{q}_x = -\lambda \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x}, \quad \mathbf{q}_y = -\lambda \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y}, \quad \mathbf{q}_z = -\lambda \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \quad (6.10)$$

Po podstawieniu równania (6.10) do równania (6.8) otrzymujemy

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \tau} c_p \rho = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right) + \mathbf{q}_v \quad (6.11)$$

Jest to ogólne równanie przewodzenia ciepła w ciele izotropowym z uwzględnieniem wewnętrznych źródeł ciepła. Równanie to jest nieliniowe, ponieważ współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  jest funkcją temperatury i jego rozwiązanie jest kłopotliwe. Po przyjęciu stałej wartości współczynnika przewodzenia ciepła równanie (6.11) można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \nabla^2 \mathbf{T} + \frac{\mathbf{q}_v}{c_p \rho} \quad (6.12)$$

gdzie  $\nabla^2 \mathbf{T}$  – operator Laplace’a. Operator ten we współrzędnych kartezjańskich zapisujemy w postaci

$$\nabla^2 \mathbf{T} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial z^2} \quad (6.13)$$

Równania (6.12) w uproszczonej postaci są znane w literaturze jako równanie Fouriera (bez wewnętrznych źródeł ciepła)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 \mathbf{T} \quad (6.14)$$

równanie Poissona (w warunkach ustalonych)

$$\nabla^2 \mathbf{T} + \frac{\mathbf{q}_v}{\lambda} = 0 \quad (6.15)$$

równanie Laplace’a (w warunkach ustalonych i bez wewnętrznych źródeł ciepła)

$$\nabla^2 \mathbf{T} = 0 \quad (6.16)$$

Wyrażenie  $\lambda/(c_p \rho)$  o wymiarze ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) jest oznaczane symbolem  $a$  i nazywane dyfuzyjnością cieplną. Parametr ten, określany również jako współczynnik przewodzenia temperatury, jest miarą bezwładności cieplnej ciała przewodzącego ciepło. Metale mają np. duże wartości współczynnika  $a$  i temperatura wewnątrz nich szybko się wyrównuje.

Różniczkowe równanie przewodzenia ciepła (6.12) jest zapisywane we współrzędnych walcowych lub sferycznych w odniesieniu do ciał o kształcie walcowym lub kulistym. Operator Laplace’a zapisujemy odpowiednio do przyjętego układu współrzędnych:

- dla współrzędnych walcowych ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ )

$$\nabla^2 \mathbf{T} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial z^2} \quad (6.17)$$

gdzie  $r$  jest promieniem,  $\varphi$  – kątem biegunowym,

- dla współrzędnych sferycznych:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{T} = & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial (\cos \Theta)} (1 - \cos^2 \Theta) \\ & \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial (\cos \Theta)} + \frac{1}{r^2 (1 - \cos^2 \Theta)} \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \psi^2} \end{aligned} \quad (6.18)$$

gdzie  $\Theta$  jest odległością biegunową,  $\psi$  zaś azymutem.

## 6.2. Warunki jednoznaczności przewodzenia ciepła

Ogólne równanie różniczkowe przewodzenia ciepła opisuje wszystkie możliwe procesy. Aby podać pełny opis matematyczny określonego procesu, konieczne jest określenie dodatkowych warunków, tzw. warunków jednoznaczności. Należą do nich:

1. Warunki geometryczne, charakteryzujące kształt i wymiary ciała, w którym zachodzi proces przewodzenia ciepła.
2. Warunki fizyczne, tzn. właściwości fizyczne ciała, takie jak przewodnictwo cieplne, ciepło właściwe, gęstość. Warunki te mogą być wyrażone przez przyjęcie rozkładu wewnętrznych źródeł ciepła i ich wydajności.
3. Warunki czasowe, które opisują rozkład temperatury w ciele w początkowym momencie. W ogólnym przypadku dla  $\tau = 0$

$$T = f(x, y, z) \quad (6.19)$$

Gdy rozkład temperatury w początkowym momencie jest równomierny, dla  $\tau = 0$  mamy:

$$T = T_0 = \text{const} \quad (6.20)$$

4. Warunki brzegowe opisujące współdziałanie rozpatrywanego ciała z otoczeniem. Dzielą się one na cztery rodzaje:

- Warunki brzegowe pierwszego rodzaju (Dirichleta): rozkład temperatury na powierzchni ciała dla każdego momentu

$$T_s = f(x, y, z, \tau) \quad (6.21)$$

gdzie:  $T_s$  – temperatura powierzchni,  $x, y, z$  – współrzędne; w szczególnym przypadku, gdy temperatura powierzchni pozostaje stała podczas całego procesu ruchu ciepła, równanie (6.21) upraszcza się do postaci

$$T_s = \text{const} \quad (6.22)$$

• Warunki brzegowe drugiego rodzaju (Neumanna); gęstość strumienia ciepłego w każdym punkcie powierzchni ciała i dla dowolnego czasu jest znana

$$q_s = f(x, y, z, \tau) \quad (6.23)$$

w szczególnym przypadku gęstość strumienia ciepłego na powierzchni może być stała w czasie i wówczas

$$q_s = q_0 = \text{const} \quad (6.24)$$

• Warunki brzegowe trzeciego rodzaju (Fouriera); znana jest temperatura otaczającego ośrodka oraz zależność, która opisuje wymianę ciepła między ciałem przewodzącym ciepło a tym ośrodkiem; wymiana ciepła odbywa się najczęściej na zasadzie wnikania, promieniowania lub na oba sposoby; proces taki opisuje równanie Newtona, zgodnie z którym ilość ciepła usunięta z jednostkowej powierzchni ciała w jednostkowym czasie jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą powierzchni ciała  $T_s$  i temperaturą otoczenia  $T_f$

$$q = \alpha (T_s - T_f) \quad (6.25)$$

Ponieważ ta sama ilość ciepła jest przekazywana przez przewodzenie na granicy ciała, więc zachodzi równość

$$\alpha (T_s - T_f) = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s \quad (6.26)$$

gdzie:  $n$  – normalna do powierzchni ciała, indeks  $s$  wskazuje, że temperatura i gradient temperatury odnoszą się do powierzchni.

Warunek brzegowy trzeciego rodzaju można zapisać w postaci

$$\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_s = -\frac{\alpha}{\lambda} (T_s - T_f) \quad (6.27)$$

• Warunki brzegowe czwartego rodzaju; wymiana ciepła z otoczeniem zachodzi przez przewodzenie w warunkach doskonałego kontaktu ciał; strumienie ciepłe na powierzchni odgraniczającej ciało i otoczenie są więc jednakowe

$$\lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial s} \right)_s = \lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial s} \right)_s \quad (6.28)$$

Ogólne równanie różniczkowe wraz z warunkami jednoznaczności daje pełny opis matematyczny określonego przypadku przewodzenia ciepła. Rozwiązanie takiego równania można uzyskać analitycznie lub numerycznie.

## 6.3. Analiza przewodzenia ciepła w warunkach niestabilnych

### 6.3.1. Wprowadzenie

Przewodzenie ciepła w warunkach niestabilnych należy analizować w odniesieniu do danego zagadnienia. Uwzględnia się kształt ciała i przyjmuje określone warunki brzegowe (por. rozdz. (6.2)).

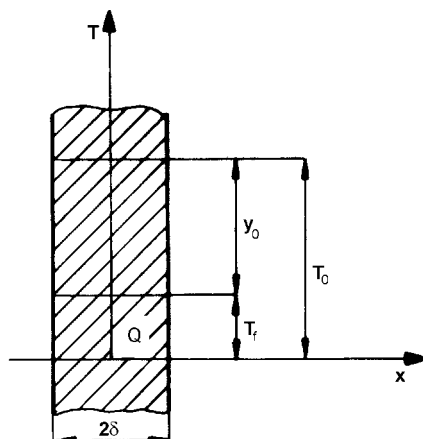
Po przyjęciu stałej wartości współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  w razie braku wewnętrznych źródeł ciepła równanie różniczkowe przewodzenia ciepła we współrzędnych kartezjańskich przyjmuje postać

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (6.29)$$

Jest to równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych. Do jego rozwiązania konieczne jest podanie warunków jednoznaczności, charakterystycznych dla rozpatrywanego przypadku.

### 6.3.2. Chłodzenie lub ogrzewanie płyty płaskiej

Aby był spełniony warunek, że przewodzenie ciepła zależy tylko od jednej zmiennej przestrzennej, należy dobrać odpowiednią konfigurację geometryczną. Rozpatrujemy więc przewodzenie w płycie płaskiej, mającej skończoną grubość w kierunku jednej osi, np.  $x$ , rozciągającej się do nieskończoności w dwóch pozostałych kierunkach. Efekty brzegowe mogą być wówczas pominięte.



Rys. 6.2. Warunki temperaturowe dla nieskończenie długiej płyty płaskiej

Przyjmujemy też, że grubość rozpatrywanej chłodzonej płyty wynosi  $2\delta$  (rys. 6.2). W początkowym momencie  $\tau = 0$  rozkład temperatury w płycie równomierny, a więc  $T = T_0 = \text{const}$ . Temperatura otoczenia wynosi  $T_f$ . Ciepło jest usuwane z obu powierzchni płyty, a współczynniki wnikania ciepła po każdej stronie płyty są jednakowe i stałe w całym procesie.

Wprowadźmy pojęcie nadmiaru temperatury  $\mathcal{G}$ , zdefiniowanego jako różnica temperatury ciała i temperatury otoczenia

$$\mathcal{G} = T - T_f$$

Dla jednokierunkowego ruchu ciepła w kierunku osi  $0x$  równanie (6.29) można sprowadzić do postaci

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} \quad (6.30)$$

Warunki początkowe dla  $\tau = 0$ :

$$\mathcal{G} = T_0 - T_f = \mathcal{G}_0 \quad (6.31)$$

Warunki brzegowe zaś dla przypadku przedstawionego na rys. 6.2 mogą być zapisane następująco:

- w osi płyty, gdy  $x = 0$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (6.32a)$$

- na powierzchni płyty, gdy  $x = \delta$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \mathcal{G}_{x=\delta} \quad (6.32b)$$

Równanie różniczkowe (6.30) rozwiązuje się metodą Fouriera. Najpierw poszukujemy rozwiązań szczególnych danego równania w postaci iloczynu funkcji, z których każda zależy od jednej zmiennej, a następnie na podstawie danych warunków brzegowych określa się wartości stałych występujących w rozwiązaniach szczególnych. Uzyskane rozwiązanie ma postać albo szeregu utworzonego ze znalezionych rozwiązań szczególnych, albo całki niewłaściwej o nieustalonych granicach całkowania.

### 6.3.2.1. Rozwiązanie analityczne równania różniczkowego przewodzenia ciepła

Rozpatrywany problem jest sformułowany przez równanie różniczkowe (6.30), warunki początkowe (6.31) i warunki brzegowe (6.32a i b). Poszukiwane rozwiązanie ma postać iloczynu dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją czasu  $\tau$ , druga zaś odległości  $x$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\tau, x) = \varphi(\tau)\psi(x) \quad (6.33)$$

Po podstawieniu funkcji (6.33) do równania (6.30) otrzymujemy nową postać równania różniczkowego

$$\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \tau} \psi(x) = a \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \varphi(\tau) \quad (6.34)$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy równanie

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} \quad (6.35)$$

w którym lewa strona jest funkcją czasu, prawa zaś funkcją odległości  $x$ .

Ponieważ równanie (6.35) musi być spełnione dla dowolnych wartości  $x$  i  $\tau$ , obie jego strony muszą być równe tej samej stałej, którą zapiszemy jako  $-k^2$ :

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -k^2 \quad (6.36)$$

Kolejne równania różniczkowe przyjmą wówczas postać:

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} + ak^2 = 0 \quad (6.37)$$

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + k^2 = 0 \quad (6.38)$$

Stałą  $k$  wyznacza się z warunków brzegowych, znak minus natomiast musi być przyjęty dla procesów ruchu ciepła zmierzających do równowagi cieplnej.

Rozwiązaniem równania (6.37) jest funkcja  $\varphi(\tau) = C_1 e^{-ak^2\tau}$ , rozwiązaniem równania (6.38) natomiast jest funkcja typu  $\psi(x) = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)$ .

Po podstawieniu funkcji  $\varphi(\tau)$  i  $\psi(x)$  do równania wyjściowego (6.33) otrzymujemy nowe równanie

$$\mathcal{G} = [C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)] C_1 e^{-ak^2\tau} \quad (6.39)$$

Równanie (6.39) spełnia równanie (6.30) dla każdej wartości stałych  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $k$ . Stałe te należy wyznaczyć z warunków początkowych i brzegowych.

Rozważmy warunek brzegowy (6.32a): dla  $x = 0$ ,  $(\partial \mathcal{G} / \partial x)_{x=0} = 0$ . Po zróżniczkowaniu równania (6.39) otrzymamy

$$\left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)_{x=0} = C_1 e^{-ak^2\tau} k [C_2 \cos(kx) - C_3 \sin(kx)]_{x=0} = 0$$

lub

$$C_2 \cos(0) = C_3 \sin(0), \quad C_2 = 0$$



Oznacza to, że rozwiązanie  $\psi(x) = C_2 \sin(0)$  musi być odrzucone ze względu na niespełnienie warunków brzegowych.

Mając na uwadze, że  $C_2 = 0$  oraz oznaczając  $C_1 C_3 = A$ , równanie (6.39) możemy przekształcić do postaci

$$\mathcal{G} = A e^{-ak^2 \tau} \cos(kx) \quad (6.40)$$

Rozpatrzmy następnie warunek brzegowy (6.32b):

$$\left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right)_{x=\delta} = - \left( \frac{\alpha}{\lambda} \mathcal{G} \right)_{x=\delta}$$

Po obliczeniu pochodnej ( $\partial \mathcal{G} / \partial x$ ) z równania (6.40) i podstawieniu do wyrażenia na warunek brzegowy otrzymujemy

$$k A e^{-ak^2 \tau} \sin(k\delta) = \frac{\alpha}{\lambda} A e^{-ak^2 \tau} \cos(k\delta) \quad (6.41)$$

a stąd

$$\operatorname{ctg}(k\delta) = \frac{k\delta}{\frac{\alpha\delta}{\lambda}} \quad (6.41a)$$

Po wprowadzeniu liczby Biota

$$Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda} \quad (6.42)$$

oraz wyrażenia  $k\delta = \mu$  równanie (6.41a) uprości się do postaci

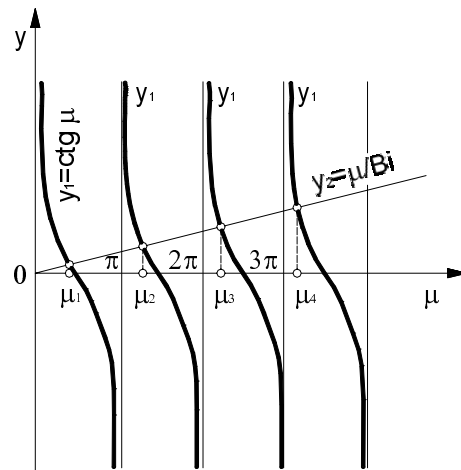
$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{Bi} \quad (6.43)$$

Dla każdej wartości liczby Biota istnieje nieskończenie wiele rozwiązań. Po podstawieniu  $\operatorname{ctg} \mu = y_1$  oraz  $\mu/Bi = y_2$  otrzymamy wartości pierwiastków równania (6.43) (rys. 6.3). Jak wynika z wykresu 6.3, istnieje nieskończona liczba rozwiązań dla  $\mu_n$ , a każda kolejna wartość jest większa od poprzedniej

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n$$

Każdej wartości liczby Biota odpowiadają określone pierwiastki równania (6.43). Dla  $Bi = \infty$  linia  $y_2 = \mu/Bi$  pokrywa się z osią  $\mu$ , w związku z czym pierwiastki są miejscami zerowymi funkcji  $\operatorname{ctg} \mu$

$$\mu_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3}{2}\pi, \quad \mu_3 = \frac{5}{2}\pi, \quad \dots, \quad \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$



Rys. 6.3. Rozwiązanie graficzne równania (6.30)

Dla  $Bi = 0$  (prosta  $y_2 = \mu/Bi$  pokrywa się z osią  $y$ ) pierwiastki równania (6.43) są następujące:  $\mu_1 = 0, \mu_2 = \pi, \mu_3 = 2\pi, \dots, \mu_n = (n-1)\pi$ , gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dla innych wartości liczby Biota wartości  $\mu_n$  są pośrednie. Dla każdego pierwiastka  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ , otrzymujemy odpowiednią postać funkcji (6.40)

$$\mathcal{G}_1 = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_1^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right) \quad (6.44)$$

Z zależności tej wynika, że funkcje  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots, \mathcal{G}_n$  są liniowo niezależne i rozwiązanie ogólne równania pierwotnego należy przedstawić w postaci szeregu nieskończonego

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right) \quad (6.45)$$

Stałe  $A_1, A_2, \dots, A_n$  wyznaczamy z warunku początkowego (6.31); dla  $\tau = 0, \mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ , więc

$$\mathcal{G}_0 = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \quad (6.46)$$

Stałą  $A_n$  wyznaczamy jako całkę:

$$A_n = \frac{\mu_n}{\delta(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx \quad (6.47)$$

$A_n$  jest zatem funkcją wyłącznie pierwiastków równania (6.43) i początkowego rozkładu temperatury  $F(x)$ .

Po podstawieniu wyrażenia na stałą  $A_n$  (6.47) do równania (6.45) otrzymamy ostateczną postać funkcji określającej pole temperatury w chłodzonej płycie jednorodnej:

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^n \frac{\mu_n}{\delta(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \left[ \int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx \right] \times \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{\alpha\tau}{\delta^2}\right) \quad (6.48)$$

Jeżeli w początkowym momencie procesu ( $\tau = 0$ ) profil temperatury w płycie jest płaski (jak na rys. 6.2), tzn.  $T_0 - T_f = \mathcal{G} = \text{const}$ , to całka w równaniu (6.47) jest równa  $(\mathcal{G}_0 2\delta/\mu_n) \sin \mu_n$  i równanie (6.47) przyjmuje postać

$$A_n = \mathcal{G}_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \quad (6.49)$$

Po podstawieniu tego równania do równania (6.48) otrzymamy inną postać funkcji opisującej pole temperatury w chłodzonej (lub ogrzewanej) płycie

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^n \frac{\mathcal{G}_0 2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{\alpha\tau}{\delta^2}\right) \quad (6.50)$$

Równanie to wygodniej jest analizować w postaci bezwymiarowej. Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych: temperatury bezwymiarowej  $Y = \mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ , współrzędnej bezwymiarowej  $X = x/\delta$  oraz bezwymiarowej liczby Fouriera  $Fo = \alpha\tau/\delta^2$  otrzymamy ostateczną, bezwymiarową postać równania

$$Y = \sum_{n=1}^n \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) \exp(-\mu_n^2 Fo) \quad (6.51)$$

### 6.3.2.2. Omówienie rozwiązania równania różniczkowego przewodzenia ciepła w nieskończonej płycie płaskiej

Ponieważ szereg opisany równaniem (6.51) jest szybko zbieżny dla liczby Fouriera  $Fo > 0,3$ , więc równanie to z dostateczną dokładnością możemy przybliżyć za pomocą pierwszego wyrazu szeregu ( $n = 1$ ), uzyskując uproszczoną postać równania bezwymiarowego

$$Y = D_1 \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo) \quad (6.52)$$

gdzie

$$D_1 = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \quad (6.53)$$

Ponieważ wielkości  $\mu_1$  zależą od liczby bezwymiarowej Biota, więc  $D_1$  jest również funkcją liczby Biota i jej wartości mogą być stabelaryzowane.

Rozpatrując graniczne przypadki w osi płyty, gdy  $X = x/\delta = 0$  oraz  $\cos(\mu_1 0) = 1$  i na powierzchni płyty, gdy  $X = x/\delta = 1$  oraz  $\cos(\mu_1 1) = \cos \mu_1$ , oraz oznaczając iloczyn  $D_1 \cos(0)$  w osi płyty jako funkcję  $N(Bi)$ , otrzymamy

$$Y_{X=0} = N(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo) \quad (6.54)$$

Jeżeli natomiast przyjmiemy, że na powierzchni płyty iloczyn  $D_1 \cos(\mu_1)$  jest funkcją  $P(Bi)$ , to otrzymamy

$$Y_{X=1} = P(Bi) \exp(-\mu_1^2 Fo) \quad (6.55)$$

Z równań tych wynika, że temperatura bezwymiarowa  $Y$  jest funkcją dwu liczb bezwymiarowych: liczby Biota i liczby Fouriera. Po zlogarytmowaniu równań (6.54) i (6.55) otrzymamy

$$\ln Y_{X=0} = \ln N(Bi) - \mu_1^2 Fo \quad (6.56)$$

$$\ln Y_{X=1} = \ln P(Bi) - \mu_1^2 Fo \quad (6.57)$$

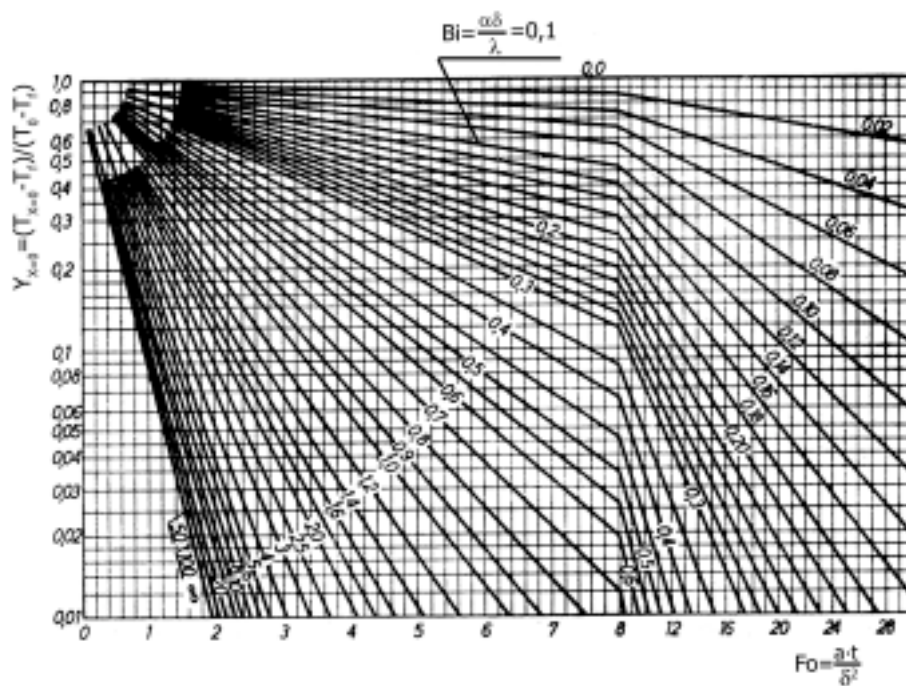
Logarytm naturalny temperatury bezwymiarowej jest zatem liniową funkcją czasu. Daje to możliwość rozwiązania równań (6.54) i (6.55) metodą graficzną.

### 6.3.2.3. Analiza nieustalonego przewodzenia ciepła podczas chłodzenia płyty

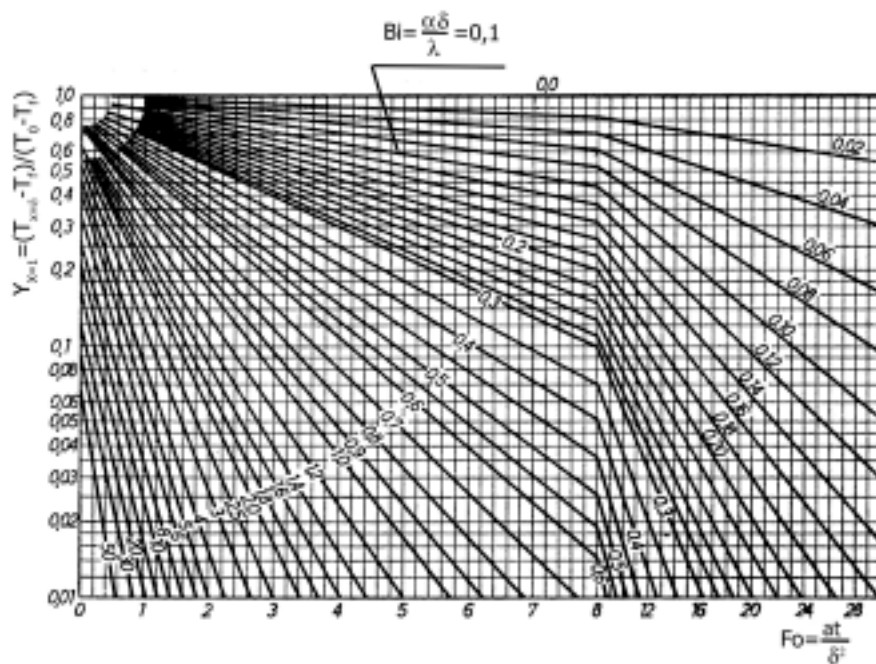
Na podstawie wyprowadzonych równań (6.56) i (6.57) można obliczyć temperaturę na płaszczyźnie symetrii płyty i na jej powierzchni, co pokazano na rys. 6.4 i 6.5. Wykresy te ilustrują zależność bezwymiarowej temperatury  $Y = (T - T_f)/(T_0 - T_f)$  od liczby Fouriera  $Fo = a\tau/\delta^2$  oraz liczby Biota  $Bi = \alpha\delta/\lambda$ . Wszystkie te wielkości stanowią moduły podobieństwa.

Z rozwiązania równania różniczkowego przewodzenia ciepła wynika, że rozkład temperatury w płycie chłodzonej opisuje krzywa symetryczna z maksimum w osi płyty, tzn. dla  $X = 0$  (rys. 6.6). Kolejnej wartości czasu odpowiada kolejna krzywa malejąca w kierunku powierzchni płyty. Przedłużenia stycznych do krzywych rozkładu temperatury w płycie w punkcie  $X = \pm 1$  przechodzą przez dwa punkty biegunowe  $A$  i  $-A$ , znajdujące się w odległości  $\pm X_0$  od powierzchni płyty; można wykazać, że  $X_0 = \pm 1$  [5].

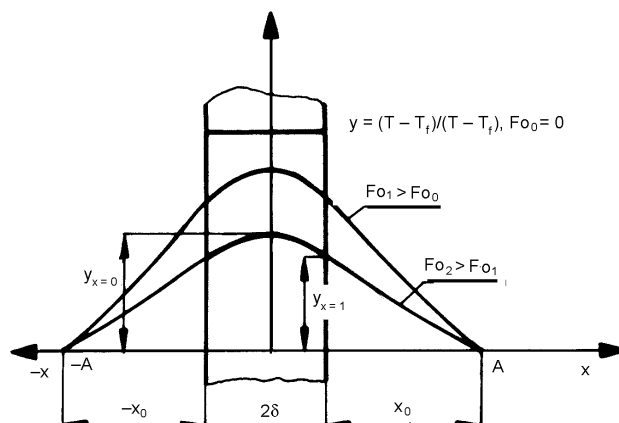
Graficzną postać ogólnego rozwiązania różniczkowego równania przewodzenia ciepła w nieskończonej płycie płaskiej pokazano na rys. 6.7. Wykres ten ilustruje zależność bezwymiarowej temperatury  $Y = (T - T_f)/(T_0 - T_f)$  od liczby Fouriera  $Fo = a\tau/\delta^2$ , odwrotności liczby Biota  $1/Bi = \lambda/(\alpha\delta) = m$  oraz liczby podobieństwa geometrycznego  $n = x/\delta$ . Wszystkie te wielkości są modułami podobieństwa.



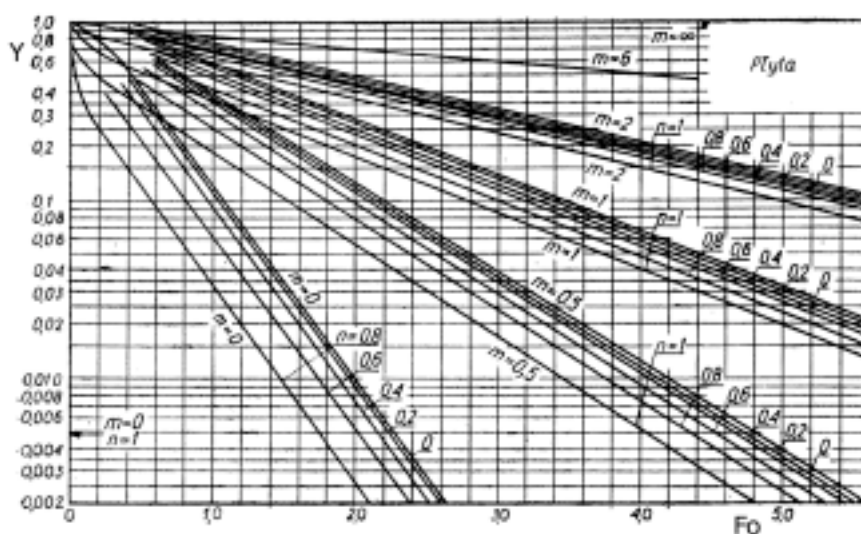
Rys. 6.4. Zależność graficzna  $Y_{x=0} = f_1(Bi, Fo)$  dla nieskończonej płyty



Rys. 6.5. Zależność graficzna  $Y_{x=1} = f_2(Bi, Fo)$  dla nieskończonej płyty



Rys. 6.6. Rozkład temperatury w chłodzonej, nieskończonej płycie płaskiej

Rys. 6.7. Wykres funkcji  $Y = f(Fo, m, n)$  dla nieskończonej płyty płaskiej

Rozpatrzmy po kolei charakterystyczne przypadki. Po pierwsze, linie  $m = 0$  dotyczą przypadków granicznych, w których współczynnik wnikania jest bardzo duży,  $\alpha \rightarrow \infty$  lub  $\lambda\delta \ll \alpha$ . Temperatura na powierzchni ciała w takich przypadkach jest równa temperaturze płynu otaczającego, np. powietrza.

Jeżeli natomiast współczynnik wnikania ciepła jest bardzo mały, tzn.  $\alpha \rightarrow 0$ , to  $m \rightarrow \infty$ , a bezwymiarowa temperatura dąży do jedności ( $Y \rightarrow 1$ ). Oznacza to, że temperatura ciała jest stała i równa temperaturze początkowej  $T_0$ .

Temperaturę powierzchni ciała znajdujemy dla punktów położonych na liniach dla  $n = x/\delta = 1$ . Dla przypadku granicznego, gdy  $m = 0$  oraz  $n = 1$ , linia pokrywa się z osią rzędnych  $Y$  układu, dla której  $Fo = 0$ , a tym samym  $\tau = 0$ . Wartości temperatury w punktach położonych wewnątrz ciała, tj. dla linii  $n < 1$ , zbliżają się wolniej do tem-

peratury medium otaczającego i stąd linie dla  $m = 0$  i  $n < 1$  są już nachylone pod pewnym kątem, co odpowiada liczbom Fouriera większym od zera (a stąd dla  $\tau > 0$ ).

Temperaturę na płaszczyźnie symetrii płyty ( $n = 0$ ) w warunkach bardzo dobrej konwekcji ( $m = 0$ ) można opisać przybliżonym równaniem:

$$Y_{pl} = 1,273 e^{-2,303} \frac{Fo}{0,933} \quad (6.58)$$

W zakresie niewielkich liczb Fouriera trudno jest odczytać z wykresu na rys. 6.7 dokładną wartość temperatury bezwymiarowej  $Y$ ; należy się wówczas posłużyć odpowiednimi tabelami (por. np. tabele 33–35 w monografii Hoblera [4]), lub równanie rozwiązać analitycznie.

### 6.3.3. Chłodzenie lub ogrzewanie cylindra nieskończonego

W odniesieniu do cylindra (walca) można przyjąć następujące założenia:

- cylinder o promieniu  $R$  oddaje ciepło do otoczenia,
- współczynnik wnikania ciepła jest stały dla całej powierzchni,
- temperatura otoczenia jest stała,
- temperatura we wszystkich punktach cylindra jest jednakowa w początkowym momencie.

Dla stałych warunków brzegowych można wyeliminować zmienną  $z$ , sprowadzając zagadnienie do dwuosiowego przewodzenia. Po przekształceniu równania (6.29) do współrzędnych walcowych z zastosowaniem równań:

$$x = r \cos \varphi \quad (6.59)$$

oraz

$$y = r \sin \varphi \quad (6.60)$$

otrzymujemy równanie o prostszej postaci

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) \quad (6.61)$$

Warunki brzegowe i początkowe są następujące:

- dla  $\tau = 0$  oraz  $0 < r < R$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = T_0 - T_f = \text{const} \quad (6.62)$$

- dla  $r = 0$  i  $\tau > 0$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (6.63)$$

- dla  $r = R$  i  $\tau > 0$

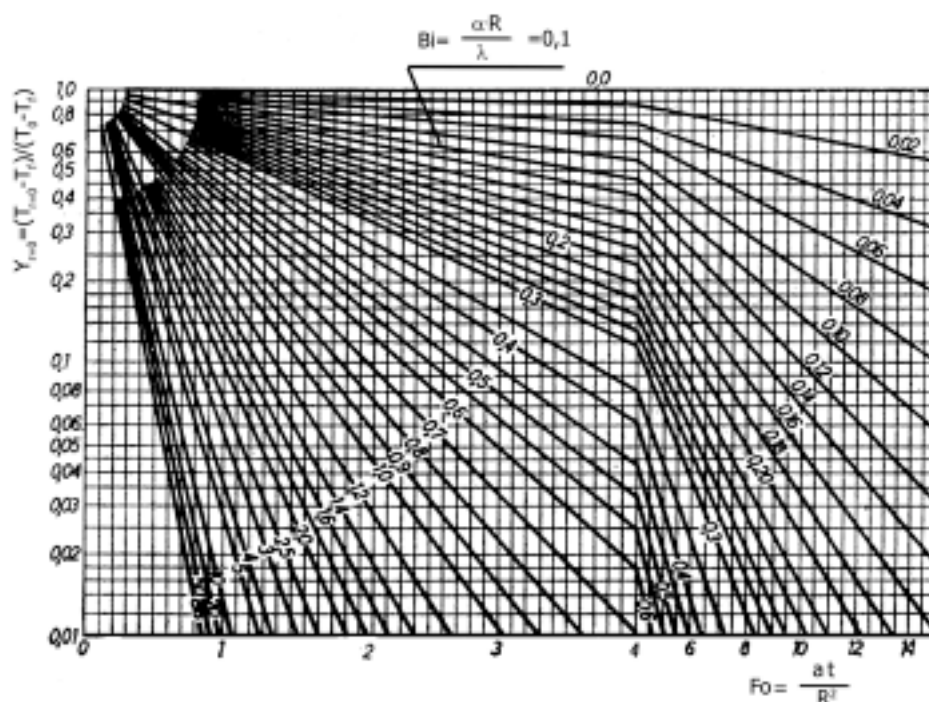
$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{r=R} \quad (6.64)$$

W wyniku rozwiązania otrzymanego metodą rozdzielania zmiennych z wykorzystaniem podanych warunków brzegowych otrzymuje się równania na temperaturę bezwymiarową w osi cylindra ( $r = 0$ ) i na jego powierzchni ( $r = R$ ):

$$Y_{r=0} = f_1(Bi, Fo) \quad (6.65)$$

$$Y_{r=R} = f_2(Bi, Fo) \quad (6.66)$$

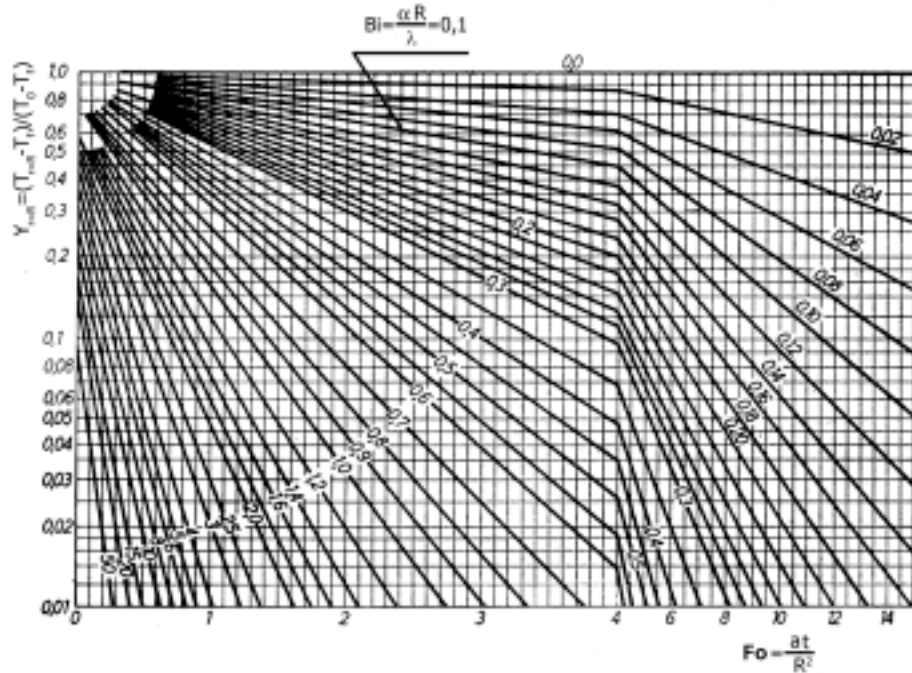
Temperaturę w osi cylindra i na jego powierzchni można wyznaczyć z wykresów przedstawionych na rys. 6.8 i 6.9.



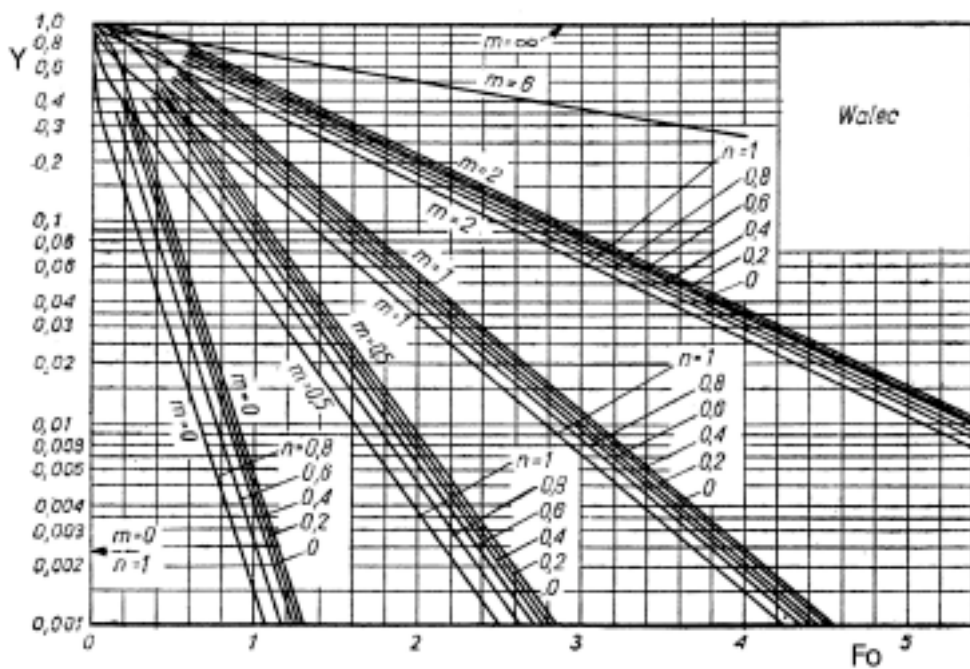
Rys. 6.8. Zależność graficzna  $Y_{r=0} = f_1(Bi, Fo)$  dla nieskończonego walca

Graficzną postać ogólnego rozwiązania różniczkowego równania przewodzenia ciepła w nieskończonym walcu przedstawiono na rys. 6.10. Wykres ten ilustruje zależność bezwymiarowej temperatury  $Y = (T - T_f)/(T_0 - T_f)$  od liczby Fouriera  $Fo = at/R^2$ , odwrotności liczby Biota  $1/Bi = \lambda/(\alpha R) = m$  oraz liczby podobieństwa geometrycznego  $n = r/R$ . Wszystkie te wielkości stanowią moduły podobieństwa.





Rys. 6.9. Zależność graficzna  $Y_{r=R} = f_2(Bi, Fo)$  dla nieskończonego walca



Rys. 6.10. Wykres funkcji  $Y = f(Fo, m, n)$  dla nieskończonego walca

Temperaturę na osi symetrii walca ( $n = 0$ ) w warunkach bardzo dobrej konwekcji ( $m = 0$ ) można opisać przybliżonym równaniem

$$Y_w = 1,602 e^{-2,303 \frac{Fo}{0,398}} \quad (6.67)$$

W zakresie niewielkich liczb Fouriera trudno jest odczytać z wykresu (rys. 6.10) dokładną wartość temperatury bezwymiarowej  $Y$ ; należy się posłużyć odpowiednimi tabelami (np. tabele 33–35 w monografii Hoblera [4]).

### 6.3.4. Chłodzenie lub ogrzewanie kuli

Zanalizujmy chłodzenie kuli o promieniu  $R$  umieszczonej w ośrodku o stałej temperaturze. Wartość współczynnika wnikania ciepła od powierzchni kuli do otoczenia jest również stała. W początkowym momencie temperatura kuli w dowolnym punkcie wynosi  $T_0$ .

Załóżmy, że nadmiar temperatury  $\mathcal{G} = T - T_f$ . Równanie różniczkowe przewodzenia ciepła w kuli przekształcone do współrzędnych sferycznych przyjmie następującą postać:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) \quad (6.68)$$

Warunki początkowe dla  $\tau = 0$  są następujące:

- dla  $0 < r < R$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = T_0 - T_f \quad (6.69)$$

warunki brzegowe zaś

- dla  $r = R$  (powierzchnia kuli)

$$\left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right)_{r=R} = - \left( \frac{\alpha}{\lambda} \mathcal{G} \right)_{r=R} \quad (6.70)$$

- dla  $r = 0$  (środek kuli)

$$\left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (6.71)$$

Z rozwiązania równania (6.68) metodą rozdzielania zmiennych z uwzględnieniem warunków początkowych i brzegowych otrzymuje się zależności funkcyjne od liczb bezwymiarowych:

- dla środka kuli ( $r/R = 0$ )

$$Y_{r=0} = F_0(Bi, Fo) \quad (6.72)$$

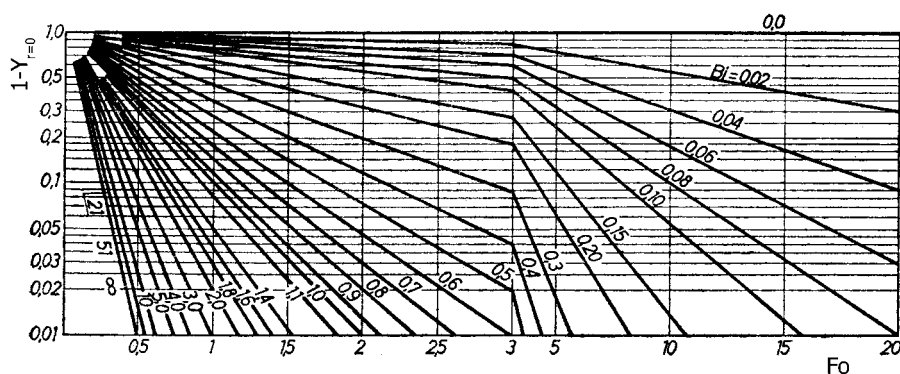
- dla powierzchni kuli ( $r/R = 1$ )

$$Y_{r=R} = F_p(Bi, Fo) \quad (6.73)$$

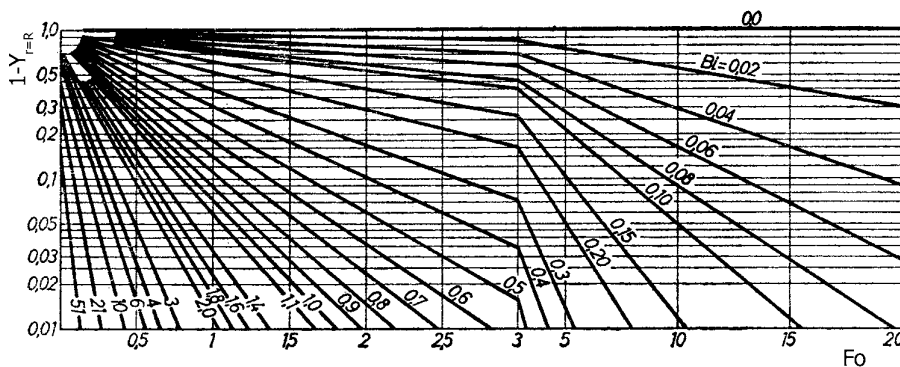
oraz w dowolnym punkcie kuli

$$Y_r = F(Bi, Fo, r/R) \quad (6.74)$$

Temperaturę w środku kuli i na jej powierzchni można wyznaczyć z wykresów przedstawionych na rys. 6.11 i rys. 6.12.

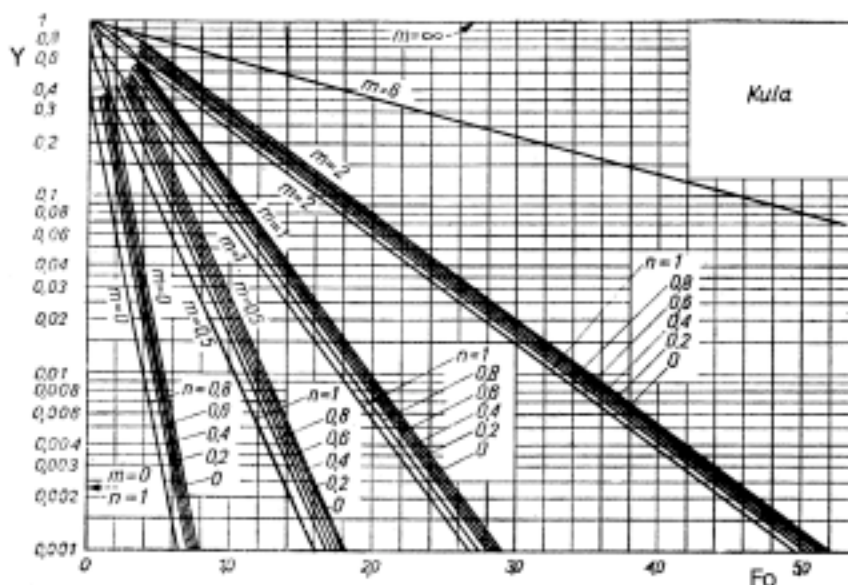


Rys. 6.11. Zależność graficzna  $Y_{r=0} = f_1(Bi, Fo)$  dla kuli



Rys. 6.12. Zależność graficzna  $Y_{r=R} = f_2(Bi, Fo)$  dla kuli

Graficzną postać ogólnego rozwiązania różniczkowego równania przewodzenia ciepła w kuli (według równania (6.74)) przedstawiono na rys. 6.13. Wykres ten ilustruje zależność bezwymiarowej temperatury  $Y = (T - T_f)/(T_0 - T_f)$  od liczby Fouriera  $Fo = a\tau/R^2$ , odwrotności liczby Biota  $m = 1/Bi = \lambda/(\alpha R)$  oraz liczby podobieństwa geometrycznego  $n = r/R$ . Wszystkie te wielkości stanowią moduły podobieństwa.

Rys. 6.13. Wykres funkcji  $Y = f(Fo, m, n)$  dla kuli

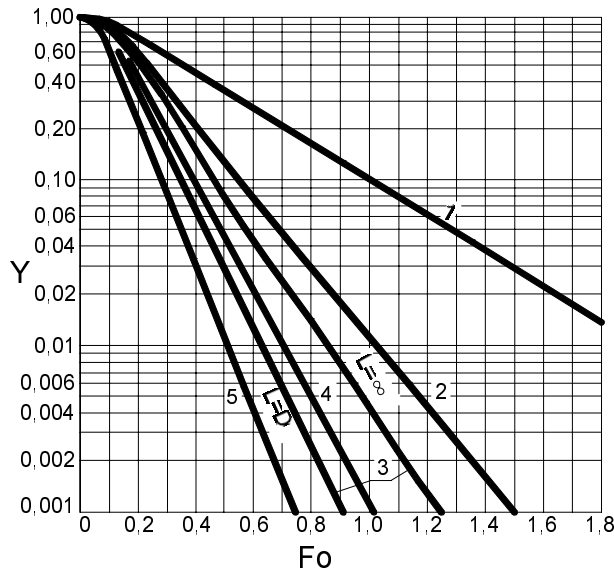
### 6.3.5. Chłodzenie lub ogrzewanie ciał o niedużych wymiarach

Wykresy funkcji liczb bezwymiarowych dla płyty i walca odnoszą się wprawdzie do ciał nieskończonych o skończonej grubości, mogą być jednak również stosowane dla przypadków, gdy grubość płyty lub średnica walca są stosunkowo nieduże w porównaniu do innych wymiarów. Porównanie funkcji  $Y = f(Fo)$  dla  $m = 0$  (znikomy opór cieplny wnikania) dla płyty nieskończonej, belki nieskończonej o przekroju kwadratowym, cylindra nieskończonego, kuli czy kostki oraz krótkiego walca przedstawiono na rys. 6.14. Jak widać z tego rysunku, najwięcej czasu wymaga chłodzenie płyty nieskończonej, najmniej zaś – chłodzenie kuli. Chłodzenie krótkich kształtek jest podobne do chłodzenia kuli.

W odniesieniu do ciał o kształcie prostopadłościanu lub krótkich walców można zastosować metodę Newmana [4]. Dla prostopadłościanu, np. cegły, wybieramy dwie dowolne równoległe ściany i traktujemy je jako należące do płyty nieskończonej o grubości  $2\delta_x$ . Dla określonej odległości  $x$  badanego punktu od płaszczyzny symetrii obliczamy kolejne liczby bezwymiarowe:  $Fo_x = \alpha t \delta_x^2$ ,  $m_x = \lambda / (\alpha \delta_x)$ ,  $n_x = x / \delta_x$ , a następnie z wykresu lub tabeli wyznaczamy temperaturę bezwymiarową jako  $Y_x = f(Fo_x, m_x, n_x)$ .

Następnie wybieramy dwie inne równoległe do siebie ściany, przyjąwszy, że należą do płyty nieskończonej o grubości  $2\delta_y$ . Odmierzwszy ponownie odległość  $y$  punktu od nowej płaszczyzny symetrii obliczamy kolejne liczby bezwymiarowe:  $Fo_y = \alpha t \delta_y^2$ ,  $m_y = \lambda / (\alpha \delta_y)$ ,  $n_y = y / \delta_y$ , a następnie z wykresu lub tabeli wyznaczamy temperaturę bezwymiarową  $Y_y$  jako  $f(Fo_y, m_y, n_y)$ . Postępując według tej samej

zasady w odniesieniu do trzeciej pary ścian równoległych, określamy kolejne liczby bezwymiarowe:  $Fo_z = \alpha t / \delta_y^2$ ,  $m_z = \lambda / (\alpha \delta_z)$ ,  $n_z = x / \delta_z$ , a następnie z wykresu lub tabeli wyznaczamy temperaturę bezwymiarową  $Y_z$  jako  $f(Fo_z, m_z, n_z)$ . Wartość wypadkową bezwymiarowej temperatury  $Y = (T - T_f) / (T_0 - T_f)$ , gdzie  $T$  jest temperaturą w badanym punkcie, uzyskamy z iloczynu:  $Y = Y_x Y_y Y_z$ . Ponieważ składowe  $Y_x, Y_y, Y_z$  są zawsze mniejsze od jedności, więc wartość wypadkowa bezwymiarowej temperatury  $Y$  będzie mniejsza od każdej ze składowych. Wynika stąd, że temperatura ciała o ograniczonych rozmiarach zmniejsza się szybciej niż temperatura ciała nieskończonego, co jest skutkiem chłodzenia ze wszystkich stron.



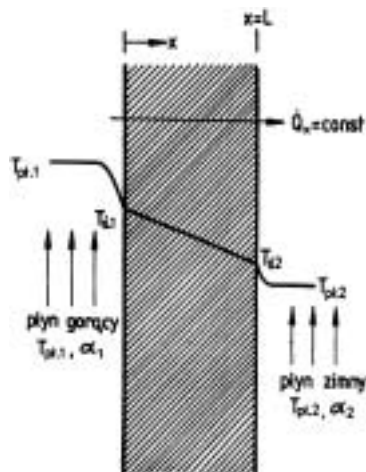
Rys. 6.14. Wykres funkcji  $Y = f(Fo)$  dla ciał w różnym kształcie:  
1 – płyta, 2 – belka, 3, 4 – walec, 5 – kula

Podobną metodę można zastosować do wyznaczenia temperatury w dowolnym punkcie krótkiego cylindra. W tym przypadku obydwie dna: równoległe i prostopadłe do osi traktujemy jako należące do płyty nieskończonej o grubości  $2\delta_x$ , równej długości cylindra  $L$ , a sam walec jako cylinder nieskończonej długości o średnicy  $d = 2\delta_y$ . Dowolny punkt będzie przy tym określony współrzędną  $x$ , liczoną od płaszczyzny symetrii leżącej w połowie długości walca i równoległej do den, oraz współrzędną  $y$ , równą promieniowi, któremu punkt ten odpowiada.

W przypadku izolacji pary przeciwległych ścian, należy pominąć ich wpływ. Jeżeli współczynniki wnikania nie są jednakowe, to można je wprowadzić do odpowiednich liczb Biota z zachowaniem symetrii, tj. każdej parze przeciwległych ścian należy przypisać taką samą wartość współczynnika wnikania ciepła. Szereg innych szczególnych przypadków stosowania metody Newmana opisał Hobler [4].

### 6.3.6. Rozwiązanie równania Fouriera dla ustalonego przewodzenia ciepła w ścianie płaskiej

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła w ścianie płaskiej stanowi podstawowy przykład ruchu ciepła [3, 4, 6]. Zanalizujmy przypadek, gdy ściankę opływają dwa płyny różniące się temperaturą (rys. 6.15).



Rys. 6.15. Warunki temperaturowe dla ściany płaskiej

Transport ciepła przebiega:

- przez konwekcję od strumienia płynu gorącego o temperaturze  $T_{f1}$  do powierzchni ściany o temperaturze  $T_{s1}$ ,
- przez przewodzenie wewnątrz ściany,
- przez konwekcję od powierzchni ściany o temperaturze  $T_{s2}$  do strumienia płynu zimnego o temperaturze  $T_{f2}$ .

Rozkład temperatury w ścianie możemy określić, rozwiązując równanie różniczkowe Fouriera z zastosowaniem odpowiednich warunków granicznych.

W przypadku ustalonego przewodzenia w kierunku osi  $x$  równanie to przyjmuje postać równania Laplace'a

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (6.75)$$

Równanie to całkujemy dwukrotnie

$$\int \frac{d^2 T}{dx^2} dx = \int dx \quad (6.76)$$

$$\int \frac{dT}{dx} dx = \int C_1 dx \quad (6.77)$$

otrzymując rozwiązanie w końcowej postaci

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (6.78)$$

Stałe całkowania  $C_1$  i  $C_2$  wyznaczamy z warunków granicznych (rys. 6.15). Po podstawieniu dla  $x = 0$ ,  $T(0) = T_{s1}$  otrzymujemy

$$T_{s1} = C_2 \quad (6.79)$$

Podobnie dla  $x = s$ ,  $T(s) = T_{s2}$  otrzymamy

$$T_{s2} = C_1 s + C_2 = C_1 s + T_{s1} \quad (6.80)$$

Po przekształceniu wyznaczymy stałą  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{s} \quad (6.81)$$

Po wprowadzeniu wyrażen (6.79) na stałą  $C_2$  oraz (6.81) na stałą  $C_1$  otrzymujemy końcową postać równania

$$T(x) = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{s} x + T_{s1} \quad (6.82)$$

Temperatura zmienia się zatem liniowo z odległością  $x$ . Z równania (6.82) otrzymujemy definicję gradientu temperatury w postaci pochodnej

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{s} \quad (6.83)$$

Na tej podstawie możemy określić gęstość strumienia ciepła:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{s} (T_{s1} - T_{s2}) \quad (6.84)$$

oraz strumień przewodzonego ciepła

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda A}{s} (T_{s1} - T_{s2}) \quad (6.85)$$

Powierzchnia ściany płaskiej  $A$  jest stała i prostopadła do kierunku ruchu ciepła.

### 6.3.7. Rozwiązania równania Fouriera dla charakterystycznych przypadków nieustalonego przewodzenia ciepła

W wielu przypadkach ściśle całkowanie różniczkowego równania Fouriera daje bardzo skomplikowane zależności funkcyjne, które jednak można wyrazić jako zależności od liczb Biota i Fouriera. Poniżej podano kilka przykładów przybliżonych rozwiązań [3].

#### Przykład 1

Płyta o dużej powierzchni i temperaturze początkowej  $T_0$  znajduje się w ośrodku o temperaturze  $T_f$ . Przyjęcie, że płyta ma dużą powierzchnię umożliwia pominięcie wpływu zaburzeń w polu temperaturowym płyty, jakie występują w pobliżu krawędzi. Przyjmuje się na ogół, że stosunek powierzchni bocznych  $A_b$  do powierzchni  $A$  jest bardzo mały (około 1%).

Jeżeli współczynnik przewodzenia ciepła płyty jest duży ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), a temperatura ośrodka jest wyższa od temperatury początkowej płyty ( $T_f > T_0$ ), to różniczkową ilość ciepła wnikającą do płyty opisuje równanie:

$$dQ = \alpha A (T_f - T) d\tau \quad (6.86)$$

gdzie  $T$  jest temperaturą płyty w danym momencie.

Temperatura płyty wzrośnie zgodnie z następującym równaniem

$$dQ = mc_p dT \quad (6.87)$$

Z porównania równań (6.86) i (6.87) wynika:

$$\alpha A (T_f - T) d\tau = mc_p dT \quad (6.88)$$

Po podstawieniu

$$m = V\rho \quad (6.89)$$

otrzymujemy

$$\alpha A (T_f - T) d\tau = V\rho c_p dT \quad (6.90)$$

W równaniu tym rozdzielamy zmienne

$$\frac{\alpha A}{\rho c_p V} d\tau = \frac{dT}{T_f - T} \quad (6.91)$$

i całkujemy w granicach od  $\tau_0$  do  $\tau$  oraz od  $T_{\tau_0}$  do  $T_\tau$ . Otrzymujemy



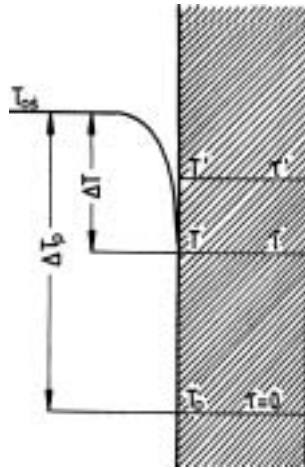
$$\frac{\alpha}{\rho c_p} \frac{A}{V} (\tau - \tau_0) = -\ln \frac{T_f - T_\tau}{T_f - T_{\tau_0}} \quad (6.92)$$

Jeżeli uwzględnimy, że  $V/A = s$ , gdzie  $s$  jest grubością płyty ogrzewanej jednostronnie, połową zaś grubości płyty ogrzewanej dwustronnie, a temperaturę na początku procesu oznaczmy przez  $T_0$ , to po przekształceniach otrzymamy następującą zależność

$$\ln Y = \ln \frac{T_f - T}{T_f - T_0} = -\frac{\alpha}{\rho c_p s} \tau \quad (6.93)$$

Otrzymujemy zależność wykładniczą dla bezwymiarowej temperatury  $Y = (T_f - T)/(T_f - T_0)$

$$Y = e^{-\frac{\alpha}{\rho c_p s} \tau} \quad (6.94)$$



Rys. 6.16. Rozkład temperatury w płycie o nieskończonej grubości i dużym współczynniku przewodzenia ciepła

Rozkład temperatury w omawianym przypadku pokazano na rys. 6.16. Jak widać, gdy  $\lambda = \infty$ , można zaniedbać spadek temperatury w płycie.

### Przykład 2

Podobnie jak uprzednio przyjmujemy, że współczynnik przewodzenia jest bardzo duży, ale ma skończoną wartość i spadek temperatury w płycie można zaniedbać. Równanie (6.94) można zastosować jedynie z pewnym przybliżeniem

$$Y \cong e^{-\frac{\alpha}{\rho c_p s} \tau} \quad (6.95)$$

Licznik i mianownik wykładnika prawej strony mnożymy przez  $\lambda s$

$$Y \cong e^{-\frac{\alpha s}{\lambda} \frac{\lambda \tau}{\rho c_p s^2}} \quad (6.96)$$

Po wprowadzeniu definicji liczb bezwymiarowych  $Bi$  i  $Fo$  otrzymujemy

$$Y \cong e^{-BiFo} \quad (6.97)$$

Dla  $\tau = 0$ ,  $Fo = 0$  oraz  $Y = 1$ , tym samym  $T = T_0$ . Dla  $\tau = \infty$ ,  $Fo = \infty$ ,  $Y = 0$ , a tym samym  $T = T_f$ .

# 7. Ruch ciepła przez konwekcję

## 7.1. Wprowadzenie

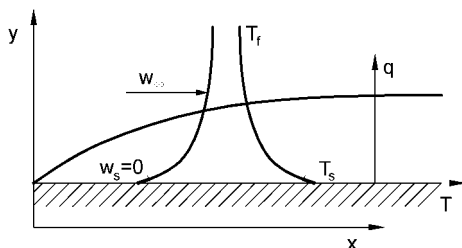
W rozdziałach 3 i 4 omówiono konwekcyjny ruch ciepła. Wprowadzono podstawowe pojęcia dotyczące mechanizmu wnikania i przenikania ciepła oraz definicję współczynnika wnikania ciepła opartą na prawie Newtona. Wnikanie ciepła jest uwarunkowane występowaniem laminarnej warstewki granicznej w pobliżu ściany omywanej przez płyn. Zjawisko to obejmuje zarówno przewodzenie ciepła w warstewce granicznej płynu, jak i transport energii wewnątrz strumienia płynu w wyniku kontaktu elementów płynu o większej energii (tzw. gorących elementów płynu) z obszarem o mniejszej energii, tj. obszarem zimnym. Wyróżniamy konwekcję wymuszoną, jeżeli ruch płynu odbywa się pod działaniem sił zewnętrznych w postaci różnicy ciśnienia wytworzonej np. za pomocą pompy czy wentylatora. Jeśli natomiast ruch płynu jest spowodowany tylko różnicą gęstości, np. w wyniku różnicy temperatury, to transport ciepła w tych warunkach jest określany jako konwekcja naturalna (swobodna). Podano też podstawowe definicje współczynnika wnikania ciepła i omówiono sposoby jego wyznaczania. Wyróżniono metodę doświadczalną i metodę analityczną określania tego współczynnika.

Analityczne wyznaczanie współczynnika wnikania ciepła  $\alpha$  wymaga opisu trójwymiarowego ruchu płynu, tzn. określenia trzech składowych prędkości, temperatury i ciśnienia płynu oraz jego gęstości jako funkcji położenia i czasu. Do wyznaczenia tych sześciu niewiadomych konieczne jest sformułowanie sześciu równań. Dwa podstawowe równania różniczkowe stanowią prawa zachowania masy i energii. Kolejne trzy równania można otrzymać z prawa ruchu Newtona w kierunku każdej współrzędnej. Są to równania Naviera–Stokesa. Równanie stanu płynu daje ostatnie równanie. Rozwiązanie wymaga jednoczesnego rozwiązania wszystkich równań, co może okazać się niemożliwe. Dla uproszczenia ruch płynu będzie rozpatrywany jedynie w dwu kierunkach, co umożliwi wyeliminowanie jednej zmiennej niezależnej i jednej niewiadomej. Można też założyć, że płyn jest nieściśliwy, tzn. jego gęstość jest stała, co pozwala wyeliminować kolejną niewiadomą i do opisu przepływu niezbędne są tylko cztery równania.

## 7.2. Podstawy teorii wnikania ciepła

### 7.2.1. Różniczkowe równanie ruchu ciepła – równanie energii

Rozpatrzmy proces wnikania ciepła od ścianki do płynu przepływającego wzdłuż ściany (rys. 7.1). W wyniku wytworzenia się laminarnej warstewki granicznej krzywe rozkładu prędkości płynu i temperatury w zależności od odległości od ściany przyjmują kształt paraboli, spłaszczonych w większej od niej odległości (w strefie poza warstwą graniczną).



Rys. 7.1. Rozkład prędkości i temperatury w ogrzewanym płynie opływającym ścianę płaską

Ponieważ proces wnikania ciepła obejmuje również jego przewodzenie w cienkiej, laminarnej warstwie granicznej, więc można dla niej zastosować równanie Fouriera

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (7.1)$$

gdzie  $y$  jest normalną do powierzchni ciała.

Gdy zmiany temperatury zachodzą tylko w kierunku współrzędnej prostopadłej do powierzchni ciała, jak na rys.7.1, normalna jest współrzędną  $y$ .

Zgodnie z prawem Newtona natomiast dla wnikania ciepła obowiązuje równanie

$$q = \alpha (T_s - T_f) \quad (7.2)$$

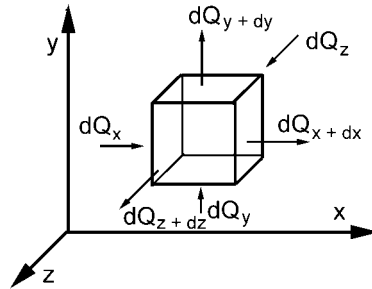
Po przyrównaniu równań Fouriera i Newtona otrzymujemy definicję współczynnika wnikania ciepła:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_s - T_f} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (7.3)$$

Zastosowanie tego wyrażenia wymaga znalezienia pochodnej temperatury względem odległości od ściany w pobliżu powierzchni ciała. Tym samym należy wyznaczyć temperaturę płynu  $T$  w każdym punkcie pola przepływu. Należy więc sformułować

dla przepływu dwukierunkowego płynu nieściśliwego czwarte równanie podstawowe poza równaniem ciągłości i równaniem Naviera–Stokesa. Jest to tzw. równanie energii, niekiedy nazywane równaniem Fouriera–Kirchhoffa. Aby je wyprowadzić, przyjmujemy następujące założenia:

Płyn jest nieściśliwy i jednorodny, nie występują wewnętrzne źródła ciepła, ciepło wydzielane w płynie w wyniku tarcia może być zaniedbane, a całe ciepło dostarczone do rozpatrywanego elementu płynu jest zużytkowane na zmianę entalpii.



Rys. 7.2. Nieustalony ruch ciepła w elemencie w kształcie prostopadłościanu

Rozpatrzmy elementarny prostopadłościan o wymiarach  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Załóżmy, że płyn w tym elemencie ma stałe parametry  $\lambda$ ,  $c_p$  i  $\rho$  (rys. 7.2). W celu określenia bilansu różniczkowej ilości ciepła oddawanej przez ten element należy zdefiniować poszczególne jego składowe dla trzech kierunków  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Ilość ciepła dostarczona do elementarnego prostopadłościanu wzdłuż osi  $x$  w jednostkowym czasie  $dt$  wynosi

$$dQ_x = q_x dydzdt \quad [\text{J}] \quad (7.4)$$

ilość ciepła zaś opuszczającego ten element w tym samym kierunku

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzdt = \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dydzdt \quad [\text{J}] \quad (7.5)$$

Różnica między ilością ciepła dopływającego i odpływającego w kierunku  $x$  wynosi

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dydzdt = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dVdt \quad (7.6)$$

Podobnie dla pozostałych kierunków  $y$  i  $z$  otrzymujemy

$$dQ_{y1} = dQ_y - dQ_{y+dy} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dVdt \quad (7.7)$$

$$dQ_{z1} = dQ_z - dQ_{z+dz} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dVdt \quad (7.8)$$

Po zsumowaniu równań (7.6)–(7.8) otrzymujemy wyrażenie na całkowitą ilość ciepła dostarczoną do elementu płynu:

$$dQ = dQ_{x1} + dQ_{y1} + dQ_{z1} = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dV dt \quad (7.9)$$

Zgodnie z założeniem ciepło to jest zużywane na zmianę entalpii

$$dQ = \rho \frac{\partial i}{\partial t} dV dt = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV dt \quad (7.10)$$

Po przyrównaniu ostatnich dwóch równań otrzymujemy następujące równanie

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \quad (7.11)$$

lub

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q} \quad (7.12)$$

Należy teraz rozważyć składowe gęstości strumienia ciepła  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ . Jeżeli założymy, że ciepło jest przenoszone w płynie zarówno przez przewodzenie, jak i konwekcję otrzymujemy następujące wyrażenie dla kierunku  $x$

$$q_x = q_{x\lambda} + q_{x\alpha} \quad (7.13)$$

Zgodnie z prawem Fouriera gęstość przewodzonego strumienia ciepła opisuje równanie

$$q_{x\lambda} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \quad (7.14)$$

Przyjmujemy, że gęstość strumienia masy na jednostkę powierzchni normalnej do kierunku przepływu dla kierunku  $x$  wynosi  $\rho w_x$ . Otrzymamy wyrażenie na składową gęstości konwekcyjnego strumienia ciepła:

$$q_{x\alpha} = \rho c_p w_x T, \quad \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \quad (7.15)$$

Po zsumowaniu otrzymujemy składową gęstości strumienia ciepła w kierunku  $x$ :

$$q_x = \rho c_p w_x T - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (7.16)$$

Postępując podobnie dla kierunków  $y$  i  $z$  otrzymujemy

$$q_y = \rho c_p w_y T - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (7.17)$$

oraz

$$q_z = \rho c_p w_z T - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (7.18)$$

Po zróżniczkowaniu ostatnich trzech równań otrzymujemy pochodne gęstości strumienia ciepła:

- dla kierunku  $x$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = \rho c_p \left( w_x \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7.19)$$

- dla kierunku  $y$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = \rho c_p \left( w_y \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7.20)$$

- dla kierunku  $z$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = \rho c_p \left( w_z \frac{\partial T}{\partial z} + T \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (7.21)$$

Po podstawieniu pochodnych (7.19)–(7.21) do równania (7.11) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = & \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho c_p \left( w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & - \rho c_p T \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (7.22)$$

Jest to ogólna postać równania energii. Przyjmując, że dla cieczy nieściśliwych

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad (7.23)$$

otrzymujemy po przekształceniach następującą postać równania

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (7.24)$$

Jest to równanie energii, zwane równaniem Fouriera–Kirchhoffa, opisujące rozkład temperatury w przepływającym płynie nieściśliwym.

Wielomian po lewej strony równania (7.24) jest różniczką zupełną temperatury po czasie. Jeżeli  $T = f(x, y, z, t)$ , to

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (7.25)$$

gdzie pochodne  $dx/dt$ ,  $dy/dt$ , i  $dz/dt$  stanowią składowe prędkości  $w_x$ ,  $w_y$  i  $w_z$ .

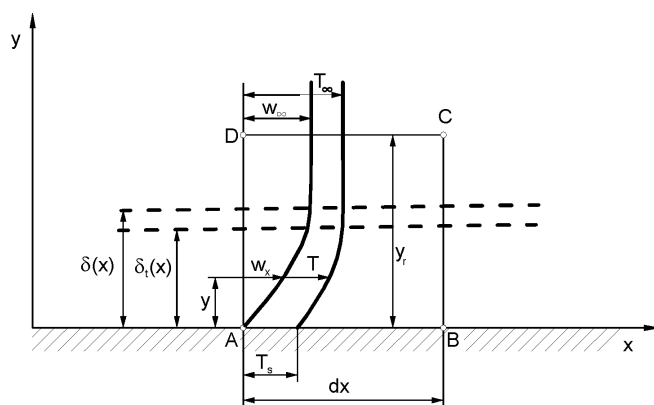
Taka pochodna odniesiona do poruszającego się płynu jest nazywana pochodną wędrowną (pochodną substancjalną). Po uwzględnieniu definicji pochodnej wędrownej równanie energii można zapisać w postaci

$$\frac{DT}{Dt} = a\nabla^2 T \quad (7.26)$$

W przypadku gdy  $w_x = w_y = w_z = 0$ , równanie energii sprowadza się do różniczkowego równania przewodzenia ciepła (równania Fouriera). Wówczas bowiem zachodzi warunek  $DT/Dt = \partial T/\partial t$ .

### 7.2.2. Równanie energii laminarnej warstwy granicznej

Równania energii w konkretnych zagadnieniach można rozwiązać dwiema metodami. Jedną z nich opiera się na zastosowaniu uproszczonych równań różniczkowych ruchu i energii, druga zaś na równaniach całkowych momentu i energii (por. rozdz. (7.2.3)).



Rys. 7.3. Hydrodynamiczna i termiczna warstwa graniczna na ogrzewanej powierzchni płaskiej

Gdy temperatura powierzchni różni się od temperatury w masie strumienia, tworzy się termiczna warstwa graniczna grubości  $\delta_t$  (rys. 7.3). Jej grubość jest porównywalna z grubością warstwy hydrodynamicznej, a rozkład temperatury w obu warstwach – podobny. W kierunku osi  $x$  – równoległym do powierzchni – gradient ten będzie stosunkowo niewielki (rys. 7.3).

Otrzymujemy wówczas następującą uproszczoną postać równania energii

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\eta}{c_p \rho} \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 \quad (7.27)$$

Równanie to powinno być uzupełnione równaniami Naviera–Stokesa oraz równaniem ciągłości, zapisanymi dla warstwy granicznej



$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (7.29)$$

### 7.2.3. Równanie całkowite energii laminarnej warstwy granicznej

Dla laminarnej warstwy granicznej bilans energii możemy również przedstawić w postaci całkowitej. Analizy zagadnienia dokonujemy na przykładzie bilansu energii dla elementarnej długości  $dx$  termicznej warstwy granicznej.

Na rysunku 7.3 pokazano przepływ płynu wzdłuż ogrzewanej powierzchni o stałej temperaturze  $T_w$ . Rozważamy objętość kontrolną ograniczoną punktami  $ABCD$  o jednakowym wymiarze  $b$  w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Przyjmujemy, że energia doprowadzana przez konwekcję oraz ciepło przenoszone przez powierzchnię o temperaturze  $T_w$  są równe energii odprowadzonej przez konwekcję.

Energia doprowadzona przez przekrój  $AD$  wynosi

$$c_p \rho b \int_0^{y_r} w_x T dy \quad (7.30)$$

Energię odprowadzoną przez przekrój  $CD$  opisuje wyrażenie

$$c_p \rho b \left( \int_0^{y_r} w_x T dy \right) + \frac{d}{dx} \left( c_p \rho b \int_0^{y_r} w_x T dy \right) dx \quad (7.31)$$

Gęstość strumienia płynu w przekroju  $CD$  wynosi

$$c_p T_\infty \frac{d}{dx} \left( \rho b \int_0^{y_r} w_x dy \right) dx \quad (7.32)$$

Energię dostarczoną do objętości kontrolnej z tym strumieniem wyrazimy za pomocą równania:

$$\frac{d}{dx} \left( \rho b \int_0^{y_r} w_x dy \right) dx \quad (7.33)$$

zmianę gęstości strumienia ciepła na drodze  $dx$  powierzchni  $AB$  zaś

$$dq_w = -\lambda b dx \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \quad (7.34)$$

Po podstawieniu równań (7.30)– (7.34) do równania bilansu energetycznego otrzymamy

$$\begin{aligned} c_p \rho b \int_0^{y_r} w_x T dy + c_p T_\infty \rho b \frac{d}{dx} \left( \int_0^{y_r} w_x dy \right) dx - \lambda b dx \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \\ = c_p \rho b \int_0^{y_r} w_x T dy + \frac{d}{dx} \left( c_p \rho b \int_0^{y_r} w_x T dy \right) dx \end{aligned} \quad (7.35)$$

Biorąc pod uwagę, że dla  $y > \delta_t$  temperatura jest wyrównana i równa  $T_\infty$ , za górną granicę całkowania można przyjąć grubość termicznej warstwy granicznej:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (T_\infty - T) w_x dy = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = a \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \quad (7.36)$$

Równanie to można również zapisać w postaci

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} (T_\infty - T) w_x dy = -\frac{q_w}{c_p \rho} \quad (7.37)$$

Otrzymane całkowite równanie energii można również zastosować dla burzliwej warstwy granicznej po wprowadzeniu odpowiedniej gęstości strumienia ciepłego [5].

#### 7.2.4. Rozwiązanie równania energii laminarnej warstwy granicznej na płycie płaskiej

Zagadnienia ruchu ciepła z zastosowaniem teorii warstwy granicznej Prandtla można rozwiązywać dwiema metodami [5]. Pierwsza opiera się na wykorzystaniu uproszczonych równań różniczkowych ruchu ciepła i energii, druga zaś, mniej dokładna, ale również często przydatna, na równaniach całkowitych momentu i energii.

Równanie energii w warstwie granicznej rozwiązał Pohlhausen w 1921 r. Wyznażył on profile prędkości i rozkład temperatury w warstwie granicznej oraz współczynniki wnikania ciepła na płycie. Korzystając z rozwiązania równań ruchu płynu otrzymanego wcześniej przez Blasiusa, Pohlhausen opisał profil prędkości w warstwie granicznej następującym wielomianem

$$\frac{w_x}{w_\delta} = a_0 + a_1 \left( \frac{y}{\delta} \right) + a_2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 + a_3 \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (7.38)$$

w którym stałe określił w ten sposób, aby były spełnione warunki brzegowe

$$w_x(y=0) = 0 \quad (7.39)$$

przy ścianie oraz na granicy warstwy

$$w_x (y = \delta) = w_\delta \quad (7.40)$$

a także

$$\left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0 \quad (7.41)$$

oraz warunek przyścienny z równania pędu (Naviera–Stokesa)

$$\left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} = 0 \quad (7.42)$$

Z analizy warunków brzegowych wynika, że stałe wynoszą:  $a_0 = a_2 = 0$ ,  $a_1 = 3/2$ ,  $a_3 = -1/2$  i równanie (7.38) przyjmuje postać

$$\frac{w_x}{w_\delta} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (7.43)$$

Grubość warstwy granicznej opisano zależnością

$$\delta = 4,64 \left( \frac{\nu x}{w_\delta} \right)^{1/2} = 4,64 \frac{x}{Re_x^{1/2}} \quad (7.44)$$

Podobnym wielomianem Pohlhausen opisał profil bezwymiarowej temperatury

$$Y = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = b_0 + b_1 \frac{y}{\delta_T} + b_2 \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^2 + b_3 \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^3 \quad (7.45)$$

z zastosowaniem warunków brzegowych przy ścianie

$$Y_{y=0} = 0 \quad (7.46)$$

$$\left( \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0 \quad (7.47)$$

oraz następujących warunków brzegowych na granicy warstwy

$$Y(y = \delta_T) = 1 \quad (7.48)$$

$$\left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_{y=\delta_T} = 0 \quad (7.49)$$

i na podstawie analizy warunków brzegowych otrzymał dla bezwymiarowej temperatury takie same wartości stałych oraz równanie

$$Y = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^3 \quad (7.50)$$

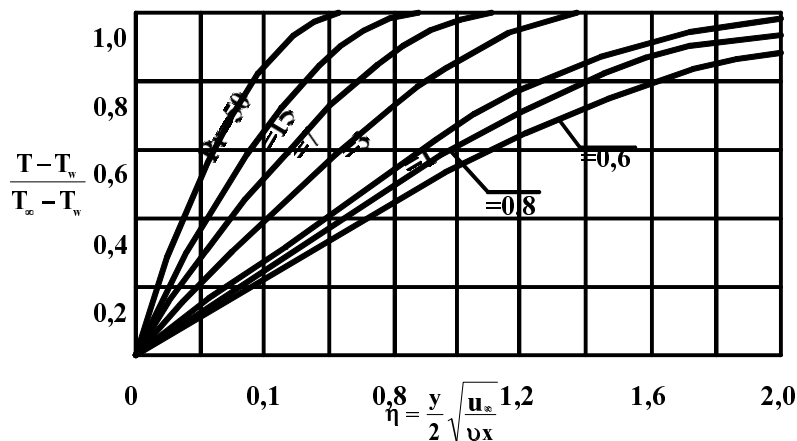
Zgodnie z rozwiązaniem Pohlhausena stosunek grubości termicznej warstwy granicznej do grubości warstwy hydrodynamicznej jest funkcją liczby Prandtla:

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \left( \frac{13}{14Pr} \right)^{1/3} = \frac{0,976}{Pr^{1/3}} \quad (7.51)$$

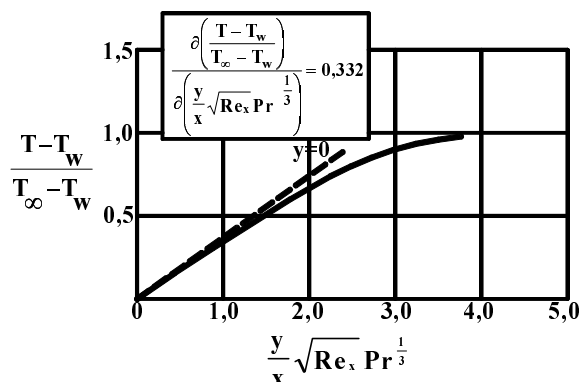
Gdy temperatura w strumieniu niezakłóconym jest równa  $T_\infty$ , a temperatura powierzchni jest stała i równa  $T_s$ , równanie energii można zapisać w postaci uproszczonej (z pominięciem wyrazu na dyssypację energii)

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7.52)$$

z warunkami brzegowymi podanymi dla rozkładu profilu temperatury. Jak widać, równanie energii (7.52) i równanie ruchu warstwy granicznej są identyczne. Rozwiązanie równania energii jest więc takie samo jak rozwiązanie równania ruchu, jeżeli założy się, że  $\nu = a$  oraz że warunki brzegowe są jednakowe. Wówczas liczba Prandtla  $Pr = \nu/a = 1$ , a równania rozkładu prędkości i rozkładu temperatury w warstwie granicznej mają tę samą postać. Przyjmuje się, że w płynach o liczbie Prandtla  $Pr = 1$  zjawiska transportu pędu i ciepła opisują podobne równania. Rozkład temperatury bezwymiarowej w warstwie granicznej nad płytą płaską pokazano na rys. 7.4.



Rys. 7.4. Rozkład temperatury bezwymiarowej w laminarnej warstwie granicznej nad płytą płaską w zależności od liczby Prandtla



Rys. 7.5. Wykres funkcji (7.53) rozkładu temperatury w laminarnej warstwie granicznej

Po wprowadzeniu nowej bezwymiarowej zmiennej zależnej,  $y/x(Re^{1/2}Pr^{1/3})$  rozkład temperatury w warstwie granicznej dla płynów w zakresie  $Pr > 0,6$  można przedstawić jedną krzywą (rys. 7.5), ilustrującą funkcję

$$Y = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = f\left(\frac{y}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3}\right) \quad (7.53)$$

Znając rozkład temperatury w warstwie granicznej, wyznacza się gęstość strumienia ciepłego na powierzchni płyty:

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (7.54)$$

Bezwymiarowy gradient temperatury na powierzchni płyty wynosi

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial \left(\frac{y}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3}\right)}\right]_{y=0} = 0,332 \quad (7.55)$$

Dla określonej wartości współrzędnej  $x$  otrzymujemy zależności:

- dla ujemnego gradientu temperatury przy ścianie płyty

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0,332 \frac{Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{x} (T_\infty - T_s) \quad (7.56)$$

- dla gęstości strumienia ciepła

$$q = 0,332 \frac{\lambda Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{x} (T_s - T_\infty) \quad (7.57)$$

- dla współczynnika wnikania ciepła

$$\alpha_x = \frac{q}{T_s - T_\infty} = 0,332 \frac{\lambda}{x} Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (7.58)$$

Po wprowadzeniu liczby Nusselta ( $Nu_x = \alpha_x x / \lambda$ ) otrzymuje się równanie bezwymiarowe

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (7.59)$$

Średni współczynnik wnikania ciepła dla płyty długości  $L$  otrzymamy przez scałkowanie równania (7.58):

$$\alpha = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha_x dx = 0,332 \int_0^L \frac{\lambda Re_x^{1/2} Pr^{1/3} dx}{x} \quad (7.60)$$

a następnie

$$\alpha = 0,664 \frac{\lambda}{L} Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (7.61)$$

gdzie

$$Re_L = \frac{w_\infty L}{\nu} \quad (7.62)$$

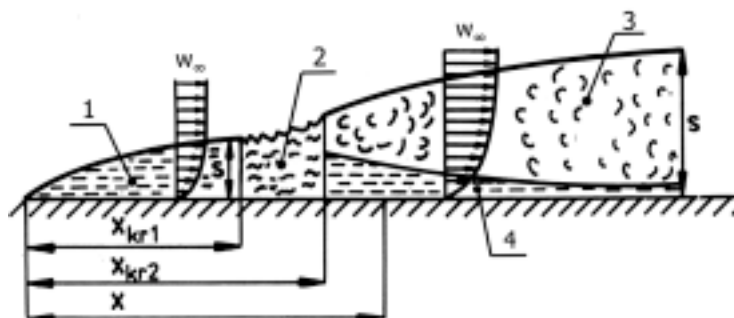
Po przekształceniu uzyskujemy korelację dla średniej liczby Nusselta

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (7.63)$$

Z porównania równań (7.59) i (7.63) wynika, że średnia wartość współczynnika wnikania ciepła jest dwukrotnie większa od wartości lokalnej przy końcu płyty,  $\alpha_{sr} = 2\alpha_x$  (liczonej dla  $x = L$ ).

### 7.2.5. Rozwiązanie równania energii turbulentnej warstwy granicznej na płycie płaskiej

Przejście od przepływu laminarnego do turbulentnego w warstwie granicznej na płycie płaskiej zachodzi na pewnym odcinku (rys. 7.6). Wyniki badań doświadczalnych wskazują, że występuje ono dla wartości liczby Reynoldsa od  $10^4$  do  $4 \cdot 10^6$  ( $Re_x = w_\infty x / \nu$ ). Wartość krytycznej odległości  $x_{kr}$ , dla której występują zakłócenia ruchu laminarnego ( $x_{kr1}$ ), po czym stabilizuje się ruch burzliwy ( $x_{kr2}$ ), zależy od liczby Reynoldsa oraz od stopnia turbulencji. Zazwyczaj jako typową wartość krytycznej liczby Reynoldsa przyjmuje się dla tego przypadku  $Re = 400\,000$ .



Rys. 7.6. Warstwa przyścienna w opływie ściany płaskiej: 1 – warstwa laminarna, 2 – obszar przejściowy, 3 – warstwa turbulentna, 4 – podwarstwa laminarna

Rozkład prędkości i temperatury w turbulentnej warstwie granicznej opisują zależności potęgowe

$$\frac{w_x}{w_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (7.64)$$

oraz

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (7.65)$$

Do wyznaczenia zależności opisującej liczby Nusselta w ruchu turbulentnym, gdy płyn opływa równolegle płytę płaską, korzysta się z równania całkowego energii [5]. Przyjmuje się, że dla płynów o liczbie Prandtla bliskiej jedności stosunek grubości warstwy termicznej i hydrodynamicznej  $\delta_t/\delta = 1$ . Rozwiązanie jest oparte na podstawieniu równania rozkładu prędkości (7.64) i rozkładu temperatury (7.65) do równania całkowego energii (7.36). Korzystając z zależności na lokalny współczynnik wnikania ciepła  $\alpha_x$  dla płyty płaskiej

$$\alpha_x = -\frac{\lambda}{T_w - T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (7.66)$$

otrzymujemy wyrażenie na gradient temperatury

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\alpha_x}{\lambda} (T_w - T_\infty) \quad (7.67)$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do całkowego równania energii (7.36) otrzymujemy

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} w_x (T - T_\infty) dy = a \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\alpha_x}{c_p \rho} (T_w - T_\infty) \quad (7.68)$$

Po podzieleniu przez  $w_\infty$  i przekształceniu otrzymujemy wyrażenie na liczbę Stanton

$$St = \frac{\alpha_x}{c_p w_\infty \rho} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_i} \frac{w_x}{w_\infty} \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} dy \quad (7.69)$$

do którego wprowadza się zależności na profile prędkości (7.64) i temperatury (7.65):

$$\frac{\alpha_x}{c_p w_\infty \rho} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_i} \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] dy \quad (7.70)$$

Po scałkowaniu otrzymuje się równanie

$$\frac{\alpha_x}{c_p w_\infty \rho} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} \quad (7.71)$$

do którego podstawiamy wyrażenie na grubość turbulentnej warstwy granicznej

$$\frac{\delta}{x} = 0,376 Re_x^{1/5} \quad (7.72)$$

i otrzymujemy następujące wyrażenie

$$\frac{\alpha_x}{c_p w_\infty \rho} = \frac{7}{72} 0,376 \frac{d}{dx} \left[ x \left( \frac{\eta}{w_\infty x \rho} \right)^{-1/5} \right] \quad (7.73)$$

z którego po zróżniczkowaniu otrzymujemy ostateczną postać funkcji

$$\frac{\alpha_x}{c_p w_\infty \rho} = 0,0292 \left( \frac{\eta}{w_\infty x \rho} \right)^{1/5} = 0,0292 Re_x^{-1/5} \quad (7.74)$$

Zależność tę dla przypadku, gdy liczba Prandtla jest równa jedności możemy zapisać w postaci równania

$$\frac{\alpha_x}{c_p w_\infty \rho} = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} = \frac{Nu_x}{Re_x} = 0,0292 Re_x^{-1/5} \quad (7.75)$$

z którego po pomnożeniu przez liczbę  $Re_x$  otrzymujemy korelację

$$Nu_x = 0,0292 Re_x^{4/5} \quad (7.76)$$

Wyrażenie na średnią wartość liczby Nusselta na płycie o długości  $L$  jest całką

$$Nu = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_x dx = \frac{1}{L} \int_0^L 0,0292 Re_x^{4/5} dx = 0,0366 Re_L^{4/5} \quad (7.77)$$



Wyprowadzone równania obowiązują w następujących warunkach:

- warstwa graniczna jest turbulentna na całej płycie,
- liczba Prandtla  $Pr = 1$ ,
- ruch ciepła występuje na całej płycie,
- właściwości płynu należy określać w temperaturze, którą oblicza się z zależności:

$$T = \frac{0,1Pr + 40}{Pr + 72} (T_\infty - T_w) \quad (7.78)$$

W przypadkach liczb Prandtla większych od 0,6 należy stosować zależności kryterialne

$$Nu_x = 0,0292 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad (7.79)$$

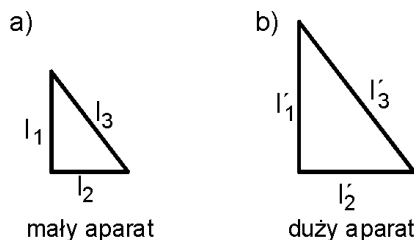
lub zależności do obliczania średnich wartości współczynników wnikania ciepła

$$Nu = 0,0366 Re_L^{4/5} Pr^{1/3} \quad (7.80)$$

W innych przypadkach należy zastosować wzory zmodyfikowane [5].

### 7.3. Teoria podobieństwa i analiza wymiarowa

Metody doświadczalne wyznaczania współczynników wnikania ciepła są oparte na zastosowaniu teorii podobieństwa do powiększania skali aparatu. Badania doświadczalne są bowiem z reguły wykonywane z użyciem aparatów o małych rozmiarach, a ich wyniki wykorzystuje się do obliczeń dużych jednostek.



Rys. 7.7. Podobieństwo trójkątów dla aparatów a i b

Pojęcie podobieństwa geometrycznego jest znane w geometrii. Jak wiadomo, w figurach geometrycznie podobnych odpowiadające sobie kąty są równe, a długość odpowiadających odcinków – proporcjonalna. Zgodnie z rys 7.7 zależność tę zapiszemy następująco:

$$\frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = \frac{l_3}{l'_3} = \text{const} \quad (7.81)$$

gdzie  $l_1, l_2$  i  $l_3$  odpowiadają długości boków trójkąta  $a$  (dla małego aparatu) oraz  $l'_1, l'_2$  oraz  $l'_3$  – długości odpowiadających im boków trójkąta podobnego  $b$  (dla dużego aparatu).

Pojęcie podobieństwa można także stosować w odniesieniu do zjawisk fizycznych. Dwa zjawiska fizyczne są podobne, gdy zachodzą w aparatach podobnych geometrycznie, a liczbowe wartości odpowiednich modułów bezwymiarowych charakteryzujących je są sobie równe. Wyprowadzenie oraz uzasadnienie sensu fizycznego tych modułów opiera się na zastosowaniu analizy wymiarowej. Umożliwia ona sprowadzanie złożonych funkcji wielu zmiennych opisujących dane zjawisko do prostych równań korelacyjnych, zbudowanych z modułów bezwymiarowych. Przekształcenie takie jest możliwe jedynie w odniesieniu do funkcji kompletnych i homogenicznych. Funkcja kompletna obowiązuje w każdym układzie wymiarów. Jako przykład takiej funkcji Hobler [4] przytoczył równanie opisujące swobodne spadanie ciał z wysokości  $h$  na ziemię:  $h = 0,5g\tau^2$ . Przykładem funkcji niekompletnej w tym przypadku jest wzór  $h = 0,5 \times 9,81 \tau^2$ , który obowiązuje w układzie m, s. Funkcja homogeniczna ma ten sam wymiar po każdej stronie równania. W tym przykładzie wzór:  $h = 0,5g\tau^2$ , spełnia oczywiście to wymaganie.

Analiza wymiarowa znalazła powszechne zastosowanie w nauce o ruchu ciepła. Różniczkowe równania ruchu płynu i równania energii dla konwekcyjnego ruchu ciepła są bowiem trudne do rozwiązania, a zależności empiryczne dla współczynników wnikania ciepła okazały się stosunkowo prostymi zależnościami potęgowymi. Zależność współczynnika wnikania ciepła od podstawowych parametrów dla przepływu wewnątrz rury w obszarze przepływu burzliwego

$$\alpha = f(\eta, \lambda, \rho, c_p, w, d) \quad (7.82)$$

można na przykład przedstawić w postaci funkcji potęg podstawowych parametrów

$$\alpha = \text{const } \eta^{a_1} \lambda^{a_2} \rho^{a_3} c_p^{a_4} w^{a_5} d^{a_6} \quad (7.83)$$

Liczba i postać modułów bezwymiarowych wynika z twierdzenia Buckinghama<sup>\*</sup>, według którego każde kompletne równanie homogeniczne wyrażające związek między  $n$  parametrami wymiarowanymi można przedstawić za pomocą funkcji  $n - r$  modułów bezwymiarowych, gdzie  $r$  jest liczbą zasadniczych wymiarów. W naszym przykładzie dotyczącym przepływu płynu wewnątrz rury liczba parametrów  $n = 7$ ,  $r = 4$  (kg, s, K, m). Liczba bezwymiarowych modułów  $n - r$  wynosi więc 3. Pierwszym z nich jest zawsze liczba Nusselta, w której w liczniku mamy współczynnik wnikania ciepła  $\alpha$ .

Po wprowadzeniu wymiarów poszczególnych parametrów do równania (7.83) otrzymujemy:

---

<sup>\*</sup>E. Buckingham, *Model experiments and the forms of empirical equations*, Trans. ASME, 37 (1915) 263–296.

$$\begin{aligned} \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1} = \text{const} & \left[ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \right]^{a_1} \times \left[ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1} \right]^{a_2} \\ & \times \left[ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \right]^{a_3} \times \left[ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \right]^{a_4} \times \left[ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \right]^{a_5} \times \left[ \text{m} \right]^{a_6} \end{aligned} \quad (7.84)$$

i po przekształceniu

$$\text{kg}^1 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1} = \text{const} \text{kg}^{a_1+a_2+a_3} \text{s}^{-a_1-3a_2-2a_4-a_5} \text{K}^{-a_2-a_4} \text{m}^{-a_1+a_2-3a_3+2a_4+a_5+a_6} \quad (7.85)$$

Z założenia o homogeniczności funkcji wynika, że wartości wykładników poszczególnych zasadniczych wymiarów (kg, s, K, m) po obu stronach równania muszą być sobie równe. Na tej podstawie otrzymujemy szereg równań algebraicznych:

- dla kilogramów (kg)

$$1 = a_1 + a_2 + a_3$$

- dla sekund (s)

$$-3 = -a_1 - 3a_2 - 2a_4 - a_5$$

- dla kelwinów (K)

$$-1 = -a_2 - a_4$$

- dla metrów (m)

$$0 = -a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 + a_5 + a_6$$

W naszym przykładzie po wyrażeniu wszystkich wykładników przez  $a_4$  i  $a_5$  otrzymujemy:

- z równania dla kelwinów

$$a_2 = 1 - a_4$$

- z równania dla sekund:

$$a_1 = 3 - 3a_2 - 2a_4 - a_5 = 3 - 3 + 3a_4 - 2a_4 - a_5 = a_4 - a_5$$

- z równania dla kilogramów

$$a_3 = 1 - a_1 - a_2 = 1 - a_4 + a_5 - 1 + a_4 = a_5$$

- z równania dla metrów

$$a_6 = a_1 - a_2 + 3a_3 - 2a_4 - a_5 = a_4 - a_5 - 1 + a_4 + 3a_5 - 2a_4 - a_5 = -1 + a_5$$

Po wprowadzeniu tych wyrażeń do funkcji potęgowej (7.83) otrzymujemy

$$\alpha^1 = \text{const} \times \eta^{a_4 - a_5} \lambda^{1 - a_4} \rho^{a_5} c_p^{a_4} w^{a_5} d^{-1 + a_5} \quad (7.86)$$

Po przegrupowaniu parametrów wymiarowanych o tych samych wykładnikach potęgowych otrzymujemy równanie korelacyjne liczb bezwymiarowych

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = \text{const} \left( \frac{\eta c_p}{\lambda} \right)^{a_4} \left( \frac{w d \rho}{\eta} \right)^{a_5} \quad (7.87)$$

Ostatecznie przyjmujemy następującą zależność liczby Nusselta od liczby Reynoldsa i liczby Prandtla z odpowiadającymi im wykładnikami  $a_5$  i  $a_4$ :

$$Nu = \text{const} \times Re^{a_5} Pr^{a_4} \quad (7.88)$$

Liczbowe wartości stałej const oraz wykładników potęgowych przy liczbie Reynoldsa  $a_5$  i liczbie Prandtla  $a_4$  wyznaczamy zawsze na podstawie danych doświadczalnych.

### 7.3.1. Wyprowadzenie modułów podobieństwa z równania energii

Równanie energii, tj. różniczkowe równanie Fouriera–Kirchhoffa opisuje nieustalony, konwekcyjny ruch ciepła z przewodzeniem ciepła w płynach znajdujących się w ruchu. Ma ono następującą postać

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \nabla^2 T \quad (7.89)$$

Rozważmy dwa różne procesy nieustalonego wnikania ciepła w płynącej strudze. Przyjmijmy, że wartości poszczególnych zmiennych wynoszą:

- w procesie I:  $T, \tau, w_x, w_y, w_z, x, y, z, a,$
- w procesie II:  $T', \tau', w_x', w_y', w_z', x', y', z', a'$

Założmy, że zmienne w procesie II są równe odpowiednim zmiennym w procesie I pomnożonym przez stałe współczynniki:

$$T' = c_T T, \quad \tau' = c_\tau \tau, \quad w_x' = c_w w_x, \quad w_y' = c_w w_y,$$

$$w_z' = c_w w_z, \quad x' = c_x x, \quad y' = c_y y, \quad z' = c_z z, \quad a' = c_a a$$

Po podstawieniu tych wielkości do równania (7.89) otrzymujemy dla procesu II:

$$\frac{c_T}{c_\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{c_w c_T}{c_l} w_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{c_w c_T}{c_l} w_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{c_w c_T}{c_l} w_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{c_a c_T}{c_l^2} a \nabla^2 T \quad (7.90)$$

Jeśli obowiązuje równość grup współczynników

$$\frac{c_T}{c_\tau} = \frac{c_w c_T}{c_l} = \frac{c_a c_T}{c_l^2} \quad (7.91)$$

to równanie dla procesu II (7.90) sprowadza się do równania dla procesu I (7.89).

Równość grup odpowiednich współczynników (7.91) można przekształcić do postaci sprowadzających się do jedności.

Z równości dwóch pierwszych grup

$$\frac{c_T}{c_\tau} = \frac{c_w c_T}{c_l} \quad (7.92)$$

otrzymujemy

$$\frac{c_w c_\tau}{c_l} = 1 \quad (7.93)$$

Z równości pierwszej i trzeciej grupy

$$\frac{c_T}{c_\tau} = \frac{c_a c_T}{c_l^2} \quad (7.94)$$

otrzymujemy

$$\frac{c_a c_\tau}{c_l^2} = 1 \quad (7.95)$$

a z równości drugiej i trzeciej grupy

$$\frac{c_w c_T}{c_l} = \frac{c_a c_T}{c_l^2} \quad (7.96)$$

wynika, że

$$\frac{c_w c_l}{c_a} = 1 \quad (7.97)$$

Warunkiem utrzymania stałości poszczególnych członów równań (7.89) i (7.90) jest zatem zachowanie stałości odpowiednich modułów.

Z zależności (7.93) otrzymujemy zatem

$$\frac{w\tau}{l} = \frac{w'\tau'}{l'} = S \quad (7.98)$$

z zależności (7.95)

$$\frac{a\tau}{l^2} = \frac{a'\tau'}{l'^2} = Fo \quad (7.99)$$

a z zależności (7.97)

$$\frac{wl}{a} = \frac{w'l'}{a'} = Pe \quad (7.100)$$

Warunkiem zachowania podobieństwa nieustalonego wnikania ciepła podczas przepływu płynu jest równość następujących modułów:

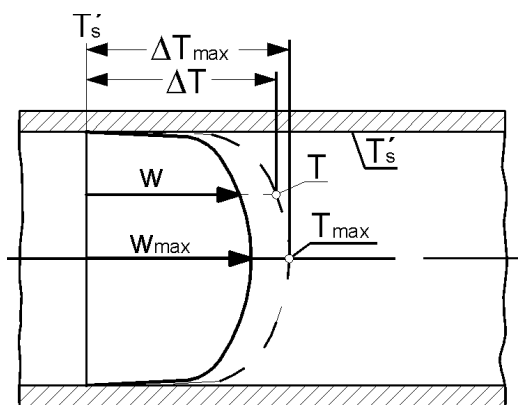
- liczby Strouhala  $S$ , charakteryzującej przepływ nieustalony (np. pulsacyjny),
- liczby Fouriera  $Fo$ , charakteryzującej nieustalony ruch ciepła w płynie,
- liczby Pecleta  $Pe$ , którą można wyrazić iloczynem liczby Reynoldsa i liczby Prandtla:

$$Pe = \frac{w c_p \rho \eta}{\lambda} = \frac{w l \rho c_p \eta}{\eta \lambda} = Re Pr \quad (7.101)$$

W ogólnym przypadku mamy jednocześnie zachowaną równość modułu Nusselta  $Nu = ad/\lambda$ .

## 7.4. Wnikanie ciepła podczas wymuszonego przepływu burzliwego

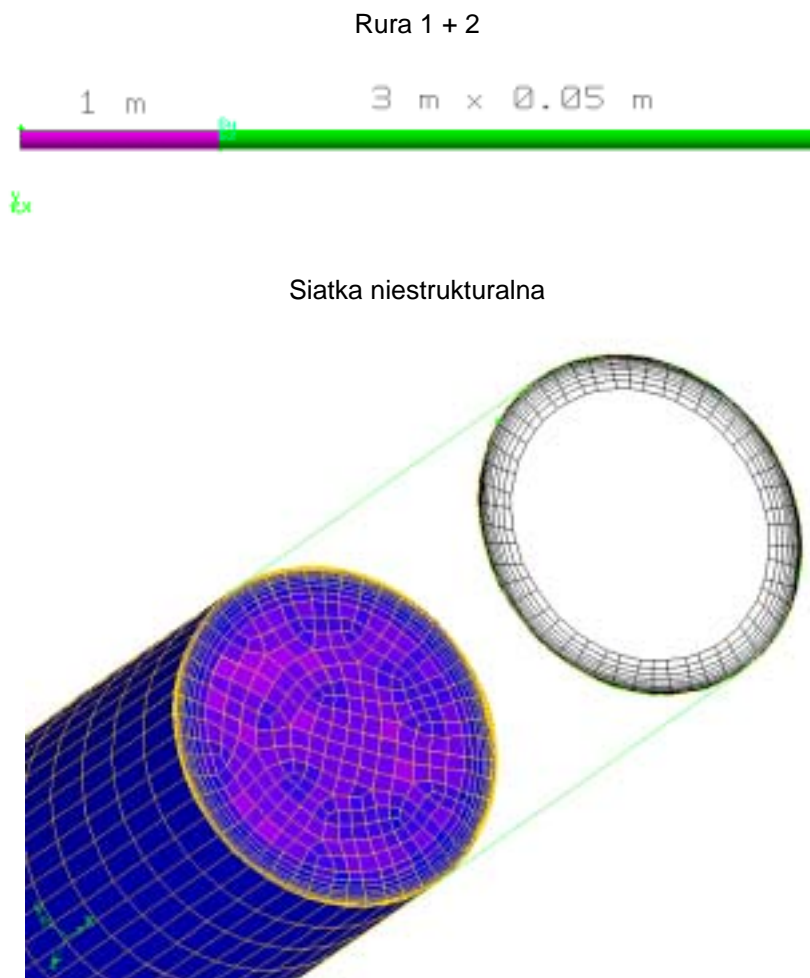
Z wnikaniem ciepła w strumieniu wymuszonego przepływu burzliwego mamy do czynienia, gdy prędkość masowa płynu jest dostatecznie duża, tak że liczba Reynoldsa jest większa od 10 000. Prędkość ta przy określonym przekroju poprzecznym rury zależy tylko od urządzenia tłoczącego, tj. pompy lub wentylatora, natomiast nie zależy od procesu wymiany ciepła. Drugą istotną cechą tego przepływu jest burzliwość. Już Hobler [4] na podstawie pracy Pannella wskazywał na fakt, że rozkład prędkości i rozkład temperatury powietrza przepływającego przez ogrzewaną rurę (rys. 7.8) są ze sobą związane.



Rys. 7.8. Profile prędkości i temperatury według Pannella

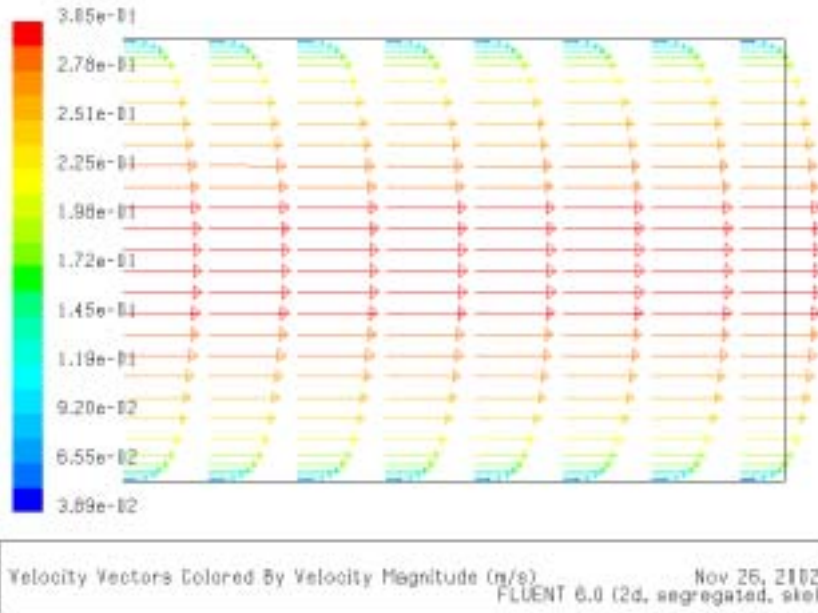
Jak widać z rys. 7.8, transport ciepła przez konwekcję w rdzeniu płynu napotyka niewielki opór, o czym świadczy płaski profil temperatury. Główny spadek temperatury występuje natomiast przy ścianie wskutek oporu cieplnego w laminarnej warstewce przyściennej.

Dokładny obraz rozkładu prędkości i temperatury można uzyskać z obliczeń za pomocą programu komputerowego FLUENT 6.0. Rozwiązanie układu równań przepływu, tj. równania Naviera–Stokesa oraz równania energii w programach tego typu wymaga zaawansowanych metod numerycznych, najczęściej metody objętości kontrolnej Patankara [9]. Przykładowe obliczenia wykonano dla przepływu wody w rurze poziomej o średnicy 0,05 m na odcinku długości 4 m z użyciem siatki niestrukturalnej (rys. 7.9). W przypadku dużej średniej prędkości wody ( $v = 0,256$  m/s, rys. 7.10) liczba Reynoldsa wynosi około 11 000 i profile prędkości są wyraźnie płaskie zarówno u wlotu (rys. 7.10b), jak i na wylocie z rury (rys. 7.10a). Podobnie rozkład temperatury wody jest dość wyrównany (rys. 7.11), jednak jest ona znacznie niższa od temperatury ścianki ( $t_{śc} = 55$  °C).

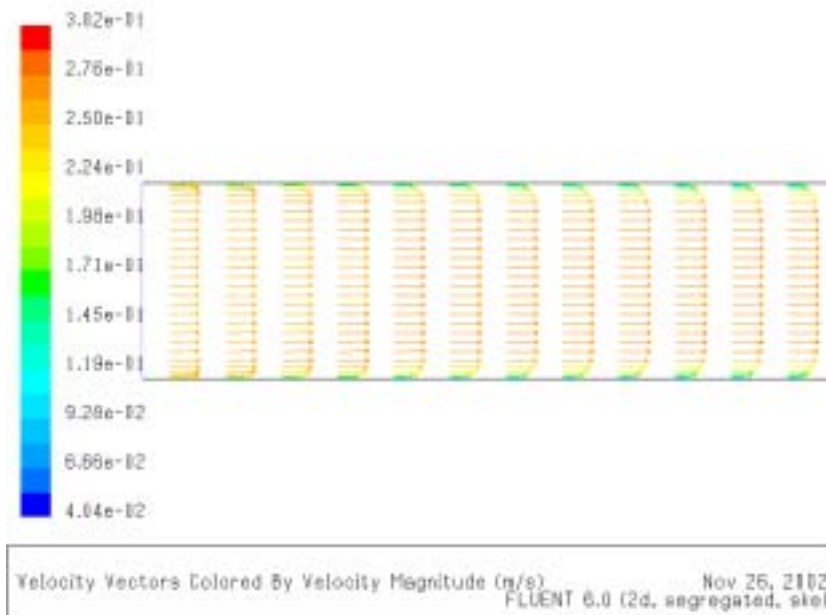


Rys. 7.9. Siatka niestrukturalna dla rury 1+2 ( $L = 1$  m +3 m;  $d = 0,05$  m)

a) wylot rury 2:  $v = 0,256 \text{ m/s}$ ,  $t_{\text{płynu wlot.}} = 20 \text{ °C}$ ,  $t_{\text{ścianki}} = 55 \text{ °C}$



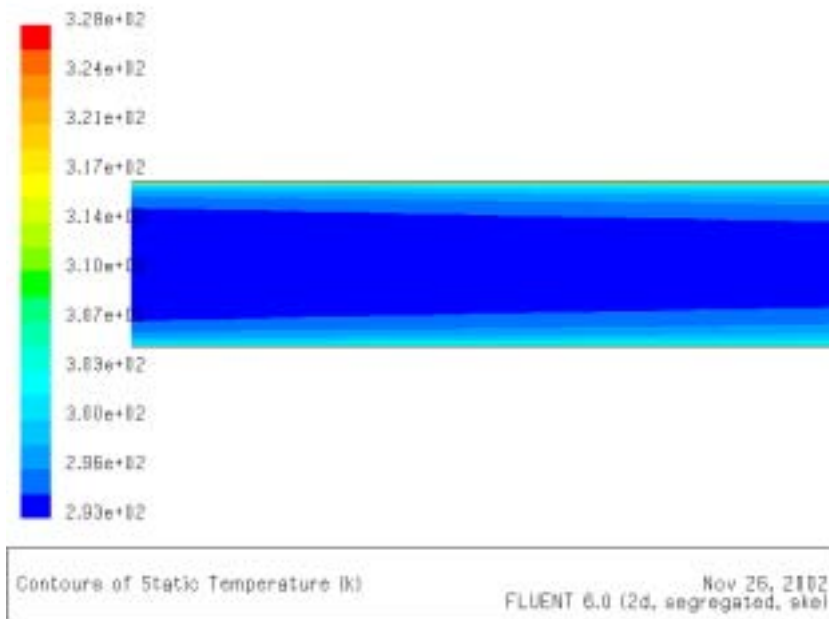
b) wlot rury 1,  $v = 0,256 \text{ m/s}$ ,  $t_{\text{płynu wlot.}} = 20 \text{ °C}$ ,  $Q = 0 \text{ W}$



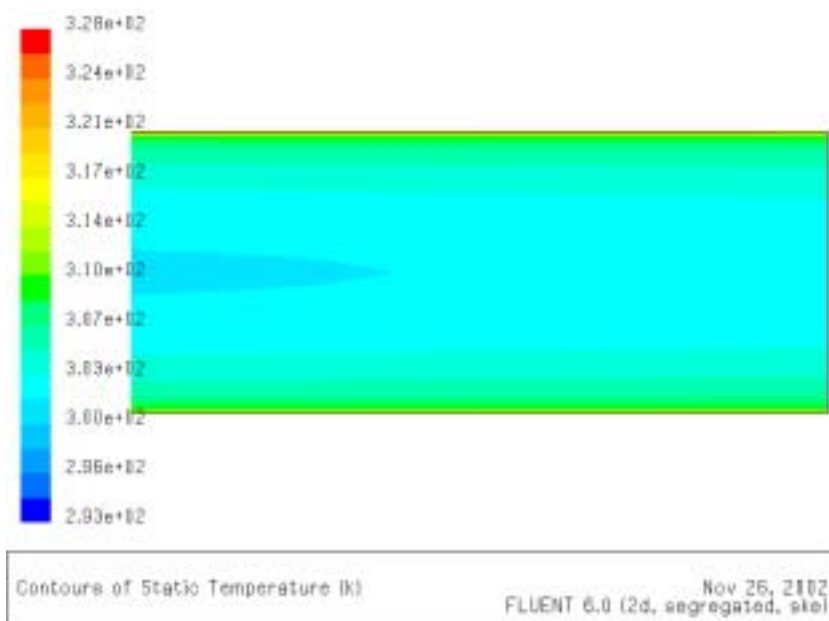
Rys. 7.10. Wektory prędkości kolorowane według skali wielkości (m/s) dla średniej prędkości wody  $v = 0,256 \text{ m/s}$ : a) wylot rury 2, b) wlot rury 1



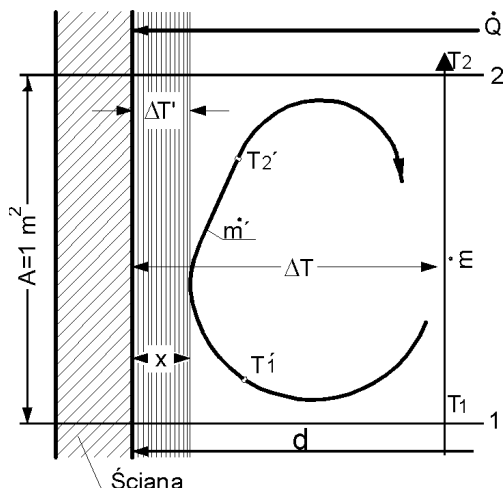
a) wlot rury 2,  $v = 0,256 \text{ m/s}$ ,  $t_{\text{płynu wlot.}} = 20 \text{ °C}$ ,  $t_{\text{ścianki}} = 55 \text{ °C}$



b) wylot rury 2,  $v = 0,256 \text{ m/s}$ ,  $t_{\text{płynu wlot.}} = 20 \text{ °C}$ ,  $t_{\text{ścianki}} = 55 \text{ °C}$



Rys. 7.11. Kontury temperatury kolorowane według skali wielkości (K) dla średniej



Rys. 7.12. Schemat wnikania ciepła według Hoblera

Najczęściej stosowaną metodą jest tradycyjna analiza wymiarowa. Wymaga ona przede wszystkim ustalenia, od jakich zmiennych zależy przebieg procesu wnikania ciepła. Dla przykładu rozważmy schemat wnikania ciepła w wymuszonym przepływie burzliwym wewnątrz odcinka rury o powierzchni  $1 \text{ m}^2$ , zaproponowany przez Hoblera [4] (rys. 7.12). Założywszy, że liczba Reynoldsa jest w przybliżeniu stała wzdłuż drogi przepływu płynu, można przyjąć, że grubość warstewki przyściennej nie zmienia się i tym samym współczynnik wnikania ciepła nie zależy od długości rury. Ciepło jest przekazywane przez elementy płynu w strudze wirów poruszających się od rdzenia do warstwy granicznej. Całkowita ilość ciepła przekazywana przez wszystkie strugi na jednostkowej powierzchni wynosi

$$q = \dot{m}'' c_p (T_1 - T_2) \quad (7.102)$$

gdzie  $T_1$  i  $T_2$  to temperatura płynu na wlocie i na wylocie analizowanego odcinka rury,  $\dot{m}''$  natomiast jest prędkością masową płynu.

Dzięki założeniu, że ruch ciepła jest ustalony oraz że główny opór cieplny występuje w warstwie przyściennej, możemy napisać dla tej warstwy równanie Fouriera

$$q = \frac{\lambda}{x} \Delta T' \quad (7.103)$$

w którym  $x$  jest grubością warstwy granicznej,  $\lambda$  – współczynnikiem przewodzenia ciepła w płynie.

Sumaryczny proces wnikania ciepła opisuje równanie Newtona:

$$q = \alpha \Delta T \quad (7.104)$$

Z porównania równań (7.102) oraz (7.104) otrzymujemy

$$\alpha = \dot{m}'' c_p \frac{\Delta T_{1-2}}{\Delta T} \quad (7.105)$$

z porównania zaś równań (7.103) i (7.104)

$$\alpha = \frac{\lambda \Delta T'}{x \Delta T} \quad (7.106)$$

Ponieważ stosunki różnic temperatury są bezwymiarowe, możemy je pominąć. Z zależności grubości warstwy  $x$  od liczby Reynoldsa  $x = f(\dot{m}'', d, \eta)$  otrzymujemy:

$$\alpha = f(\eta, \lambda, c_p, \dot{m}'', d) = f(\eta, \lambda, c_p, \rho, w, d) \quad (7.107)$$

Jak pokazano w poprzednim rozdziale, zależność tę za pomocą analizy wymiarowej można sprowadzić do korelacji liczb bezwymiarowych Nusselta, Reynoldsa i Prandtla:

$$Nu = C Re^a Pr^b \quad (7.108)$$

Wartości stałej  $C$  i wykładników potęgowych  $a$  i  $b$  wyznaczono na podstawie wyników badań eksperymentalnych.

W pierwszych podręcznikach (por. np. McAdams [10]) rekomendowano następujące równanie korelacyjne

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^n \quad (7.109)$$

w którym:

- przyjmuje się, że  $n = 0,4$  podczas ogrzewania płynu oraz  $n = 0,3$  podczas jego chłodzenia,
- wszystkie stałe fizyczne płynu określa się dla stałej temperatury płynu, wyznaczonej jako jej średnia arytmetyczna,
- wartość liczby Reynoldsa powinna być większa od  $10^4$ ,
- liczba Prandtla  $Pr$  powinna mieścić się w zakresie od 0,7 do 100,
- stosunek długości rury do średnicy powinien być większy od 60. Incropera i de Witt [11] przyjęli, że równanie to można stosować już dla  $L/D > 10$ .

Równanie to początkowo przypisywano McAdamsowi [10], ale obecnie najczęściej jest nazywane równaniem Dittusa–Boeltera [3, 11, 12].

Równanie (7.108) można wykreślić w układzie podwójnie logarytmicznym jako prostą lub zbiór prostych równoległych, zgodnie z funkcją

$$\lg Nu = \lg C + a \lg Re + b \lg Pr \quad (7.110)$$

Jeśli przyjmiemy stałą wartość liczby Prandtla, to zależność (7.110) da się sprowadzić do równania linii prostej

$$\lg Nu = \lg C'' + a \lg Re \quad (7.111)$$

w którym stała  $C''$  jest równa  $CPr^b$ .

Jeżeli założymy stałą wartość liczby Reynoldsa, to równanie to również daje prostoliniową zależność

$$\lg Nu = \lg C''' + b \lg Pr \quad (7.112)$$

w której stała  $C'''$  jest równa  $CRe^a$ .

### 7.4.1. Przypadki szczególne

W szczególnych przypadkach stała  $C$  i wykładniki  $a$  i  $b$  równania korelacyjnego (7.108) muszą być jednak wyznaczone doświadczalnie. Przykładowe zestawienie danych dla różnych geometrii układu i różnego kształtu opływanych elementów zestawiono za podręcznikiem Hobblera [4] w tabeli 7.1.

Niekiedy, dla bardzo dużego zakresu wartości liczby Reynoldsa, np. gdy sięga ona obszaru przepływu laminarnego, wyniki doświadczeń są korelowane za pomocą nieliniowej zależności:

$$Nu = (C' + CRe^a) Pr^b \quad (7.113)$$

Stałe  $C'$  i  $C$  oraz wykładniki  $a$  i  $b$  równania korelacyjnego (7.113) są wyznaczone eksperymentalnie dla danego układu geometrycznego i kształtu opływanych elementów. Przykładowe wartości zestawiono w tabeli 7.2. We wszystkich przypadkach w odniesieniu do tych korelacji należy stosować parametry warstwy przyściennej.

Wnikanie ciepła podczas przepływu płynu wewnątrz rury w pewnym stopniu zależy od kierunku. Wyniki pomiarów wskazują na większe wartości współczynników wnikania ciepła podczas ogrzewania cieczy niż podczas jej chłodzenia. Podczas ogrzewania cieczy temperatura w warstwie granicznej jest bowiem wyższa niż podczas chłodzenia, dzięki czemu współczynniki lepkości cieczy są mniejsze. Aby uwzględnić ten efekt, Sieder i Tate wprowadzili poprawkę, która jest funkcją stosunku współczynnika lepkości w rdzeniu strumienia  $\eta$  do współczynnika lepkości cieczy przy samej ścianie  $\eta_{sc}$  (równanie 2 w tabeli 7.1).

W rozważaniach przepływu płynu przez rury wypełnione należy rozróżnić dwa przypadki ruchu ciepła: wnikanie ciepła od płynu do ziarna lub odwrotnie oraz wnikanie ciepła między ścianą rury i płynem. Można znaleźć wiele korelacji dla poszczególnych przypadków, zwłaszcza w monografiach na temat fluidyzacji. W tabeli 7.1 przedstawiono dla przykładu korelacje Hougena i Watsona dla małych i dużych liczb Reynoldsa. W tym przypadku zarówno liczba Reynoldsa, jak i liczba Nusselta są odniesione do wymiaru liniowego będącego średnicą kulki o powierzchni ziarna.

Tabela 7.1. Stała  $C$  i wykładniki  $a$  i  $b$  równania korelacyjnego (7.108) według Hoblera [4], s.142

| Lp. | Przypadek   | Stała $C$                   | $a$          | $b$          | Uwagi  |
|-----|---|-----------------------------|--------------|--------------|--|
| 1   | przepływ w rurze mała lepkość płynu                             | 0,023                       | 0,8          | 0,4          | $Re > 10^4$  |
| 2   | przepływ w rurze duża lepkość płynu ( $\eta > 2\eta$ wody)      | $0,027(\eta/\eta_s)^{0,14}$ | 0,8          | 0,33         | Sieder i Tate, $Re > 10^4$ ( $\eta_s$ lepkość w temperaturze ściany)   |
| 3   | przepływ prostopadły do rury pojedynczej                        | 0,26                        | 0,6          | 0,3          | $Re > 10^3$  |
| 4   | przepływ prostopadły do 10 rzędów rur ustawionych w szachownicę | 0,33                        | 0,6          | 0,33         | Colburn, $Re > 2 \cdot 10^3$ obliczone dla prędkości między rurkami  |
| 5   | przepływ prostopadły do 10 rzędów rur ustawionych szeregowo     | 0,26                        | 0,6          | 0,33         | obliczone dla prędkości między rurkami   |
| 6   | wnikanie ciepła do ziaren                                       | 1,064<br>1,95               | 0,59<br>0,49 | 0,33<br>0,33 | $Nu = ad/\lambda$ , $d$ – średnica kulki o powierzchni ziarna,<br>$Re = wd\rho/\eta > 350$<br>$Re < 350$ , Hougén i Watson |

Tabela 7.2. Stałe  $C'$  i  $C$  oraz wykładniki  $a$  i  $b$  równania korelacyjnego (7.113) według Hoblera [4], s.143. Parametry wyznaczone dla warstwy przyściennej

| Lp. | Przypadek  | $C'$  | $C$   | $a$  | $b$ | Uwagi  |
|-----|--|-------|-------|------|-----|--|
| 1   | przepływ prostopadły do rury pojedynczej                             | 0,35  | 0,47  | 0,52 | 0,3 | $Re = 0,1-1000$  |
| 2   | przepływ prostopadły do pęku rur (10 rzędów) ułożonych w szachownicę | 0,437 | 0,587 | 0,52 | 0,3 | $Re = 0,1-2000$ , obliczone dla prędkości między rurkami |
| 3   | przepływ prostopadły do rur w szeregu (10 rzędów)                    | 0,35  | 0,47  | 0,52 | 0,3 | $Re = 0,1-2000$ , obliczone dla prędkości między rurkami |

Równania korelacyjne Dittusa–Boeltera albo Siedera i Tate'a mogą również być stosowane do przepływu płynu przez kanały o przekroju innym niż kołowy. Wówczas stosuje się tzw. zastępczą liczbę Reynoldsa, a średnicę należy zastąpić średnicą zastępczą (ekwiwalentną) zdefiniowaną wzorem

$$d_z = \frac{4A}{O} \quad (7.114)$$

w którym  $A$  stanowi przekrój poprzeczny kanału, a  $O$  jest jego obwodem zwilżanym przez płyn. Hobler [4] przytacza jednak wiele przykładów wskazujących, że wnikanie ciepła podczas przepływu płynu na zewnątrz i wzdłuż pęku rur w przestrzeni międzyrurkowej zachodzi znacznie intensywniej. Wartości współczynników wnikania są niekiedy nawet o 40–50% większe.

Przytoczone korelacje obowiązują dla przepływów wewnątrz rur dostatecznie długich ( $L/D > 60$ ), gdyż wówczas profil prędkości jest ustalony. Dla niezbyt długich przewodów lub gdy chcemy uwzględnić kształt odcinka wlotowego, należy wprowadzić współczynnik poprawkowy  $\varepsilon_L$ . W tabeli 7.3 zestawiono ich wartości dla dwóch liczb Reynoldsa.

Tabela 7.3. Współczynniki poprawkowe  $\varepsilon_L = f(L/d)$  dla przepływu burzliwego

| $L/d$               | 1    | 2    | 5    | 10   | 15   | 20   | 30   | 40   | 50  |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| $Re = 1 \cdot 10^4$ | 1,63 | 1,50 | 1,34 | 1,23 | 1,17 | 1,13 | 1,07 | 1,03 | 1,0 |
| $Re = 2 \cdot 10^4$ | 1,51 | 1,40 | 1,27 | 1,18 | 1,13 | 1,10 | 1,05 | 1,02 | 1,0 |

Dla przepływu wewnątrz węzownicy, gdy pewne znaczenie ma krętość rury, Jeszke [2] podał wzór

$$\alpha_R = \alpha_{pr} \left( 1 + 3,54 \frac{r}{R} \right) \quad (7.115)$$

w którym  $\alpha_{pr}$  jest współczynnikiem wnikania dla przepływu w rurze prostej,  $r$  – promieniem rury,  $R$  zaś promieniem węzownicy.

Szczególnym przypadkiem jest przepływ przez rury o zmiennym przekroju (rury zgniatane). Według Hoblera [4] współczynniki wnikania ciepła mogą tu być zwiększone nawet do 40%.

W celu intensyfikacji wnikania ciepła stosuje się wiele metod, takich jak [3, 4]:

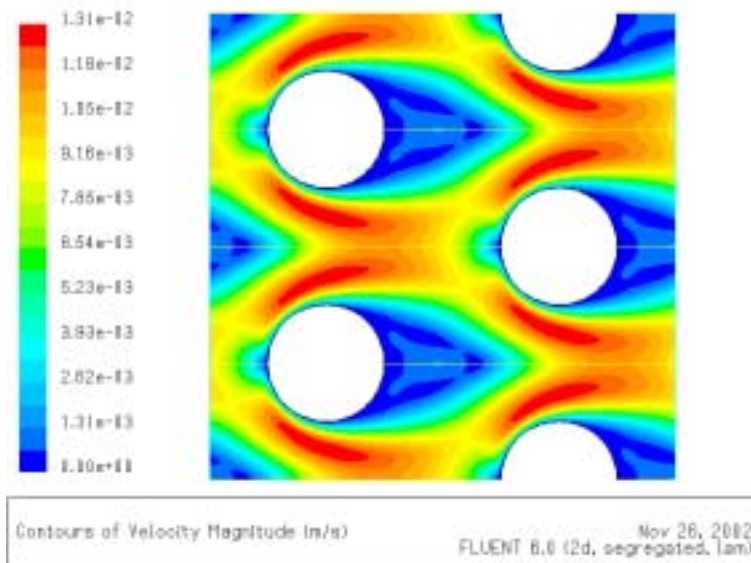
- zwiększanie prędkości masowej przepływu,
- stosowanie różnorodnych wypełnień,
- wprowadzanie przegród powodujących wielokrotną zmianę przepływu,
- stosowanie przepływów prostopadłych i skośnych do wiązki rur,
- wprowadzanie różnego rodzaju deformacji przekroju rury,
- mieszanie cieczy w aparacie.

Niektóre z nich są przedmiotem analizy w następnym rozdziale.

## 7.4.2. Wnikanie ciepła podczas przepływu wokół różnorodnych elementów

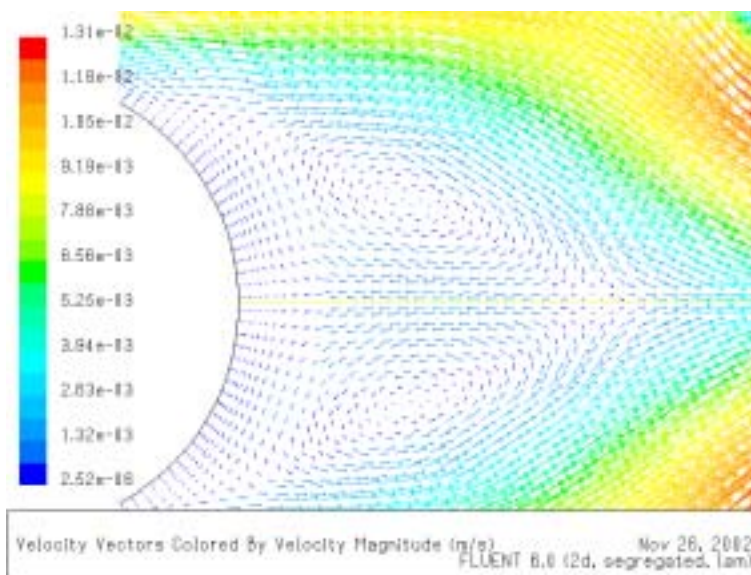
Zagadnienie wnikania ciepła podczas przepływu prostopadłego do rury jest bardzo złożone z wielu powodów. Po pierwsze, należy rozróżnić szereg przypadków takich jak przepływ płynu wokół pojedynczej rury lub układu rurek ułożonych szeregowo lub naprzemiennie (w. układzie w szachownicę, tabele 7.1, 7.2). Wyniki badań opublikowane w klasycznych pracach [2, 4] pokazują, że z jednej strony mamy tu do czynienia z przepływem o zmiennej prędkości, z drugiej zaś – z występowaniem charakterystycznych wirów z tyłu rury. Dokładny obraz struktury strugi ze wszystkich stron rury można uzyskać jedynie w wyniku symulacji komputerowej wykonanej za pomocą zaawansowanych pakietów oprogramowania.

Przekrój poprzeczny przez wymiennik płaszczowo-rurowy, rurki  $\phi$  10, woda, przepływ laminarny,  $m_1 = 0,05$  kg/s,  $T_1 = 300$  K,  $T_2 = 400$  K



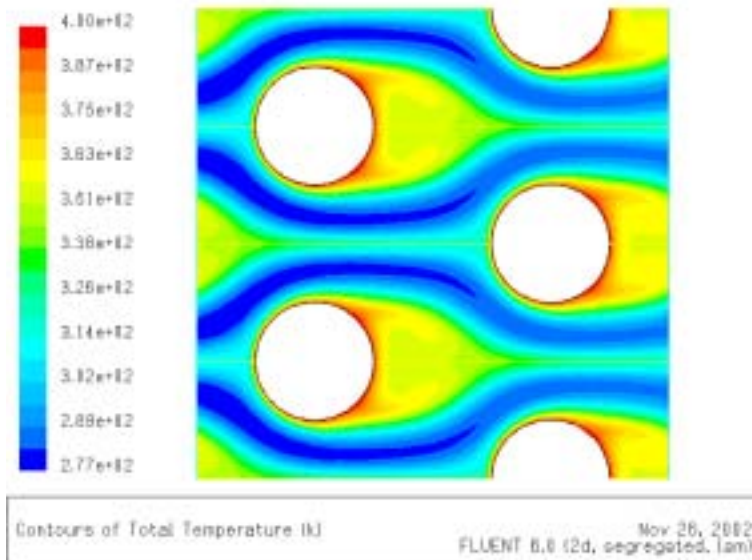
Rys. 7.13. Kontury prędkości wody podczas przepływu poprzecznego do rurek wymiennika  $\phi$  10 mm

Przekrój poprzeczny przez wymiennik płaszczowo-rurowy, rurki  $\phi$  10, woda, przepływ laminarny,  $m_1 = 0,05$  kg/s,  $T_1 = 300$  K,  $T_2 = 400$  K



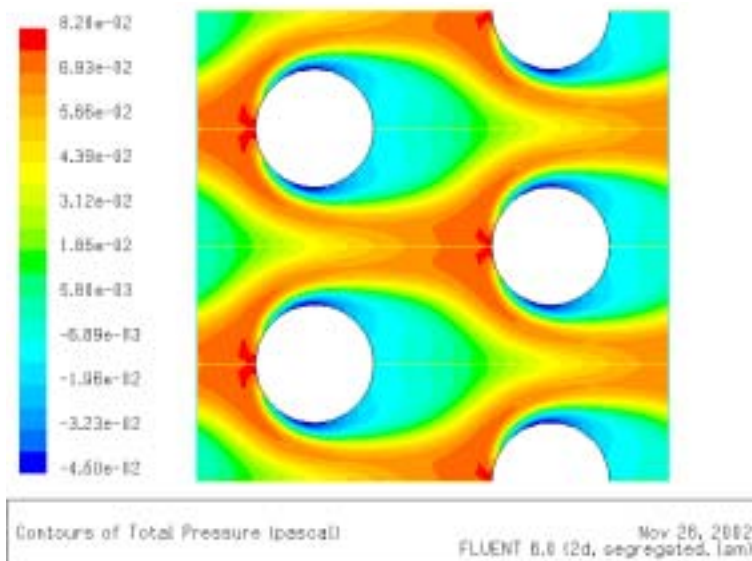
Rys. 7.14. Wektory prędkości wody podczas przepływu poprzecznego do rurek wymiennika ( $\phi$  10 mm) kolorowane według skali wielkości (m/s)

Przekrój poprzeczny przez wymiennik płaszczowo-rurowy, rurki  $\phi$  10, woda, przepływ laminarny,  $m_1 = 0,05$  kg/s,  $T_1 = 300$  K,  $T_2 = 400$  K



Rys. 7.15. Kontury temperatury podczas przepływu poprzecznego do rurek wymiennika  $\phi$  10 mm kolorowane według skali wielkości (K) dla masowego przepływu wody  $m = 0,05$  kg/s

Przekrój poprzeczny przez wymiennik płaszczowo-rurowy, rurki  $\phi$  10, woda, przepływ laminarny,  $m_1 = 0,05$  kg/s,  $T_1 = 300$  K,  $T_2 = 400$  K



Rys. 7.16. Kontury ciśnienia całkowitego podczas przepływu poprzecznego do rurek wymiennika  $\phi$  10 mm kolorowane według skali wielkości (Pa) dla masowego przepływu wody  $m = 0,05$  kg/s



Na rysunkach 7.13–7.16 pokazano rozkład prędkości, wektorów prędkości, temperatury i ciśnienia całkowitego podczas przepływu poprzecznego wody przez przedstawny układ rurek (układ szachownicowy) o średnicy 10 mm. Dane te otrzymano w wyniku rozwiązania układu równań przepływu Naviera–Stokesa oraz równania energii metodą objętości kontrolnej Patankara [9] za pomocą oprogramowania Fluent 6.0. Od strony czołowej następuje uderzenie czynnika o ścianę rury (co wiąże się ze zmniejszeniem prędkości i temperatury, ale ze zwiększeniem ciśnienia), po czym prędkość się zwiększa, ciśnienie po bokach rury zmniejsza, a wreszcie występują wyraźne wiry z tyłu rury.

Podczas przepływu płynu prostopadle do układu większej liczby rurek strugi są ułożone rozmaicie w zależności od typu układu. Przyjmuje się, że układ rurek w szachownicę (naprzemianległy) zapewnia większe wartości współczynników wnikania ciepła od układu szeregowego. W obydwu zaś przypadkach współczynniki wnikania są większe niż dla przepływu prostopadłego do rury pojedynczej. W literaturze można również znaleźć wiele korelacji opisujących wnikanie ciepła podczas przepływu wokół rur o innym kształcie niż kołowy [2, 4].

Jeżeli czynnik nie dopływa do rurki pod kątem prostym do jej osi, to należy wprowadzić poprawkę  $\varepsilon_\varphi$  zależną od kąta napływu. Dla wszystkich omawianych przypadkach układów rur stosuje się wzór

$$\alpha_\varphi = \alpha \varepsilon_\varphi \quad (7.116)$$

Wartość poprawki  $\varepsilon_\varphi$  odczytujemy z wykresów lub tabel (tabela 7.4).

Tabela 7.4. Współczynniki poprawkowe  $\varepsilon_\varphi = f(\varphi)$  dla przepływu pod kątem różnym od 90°

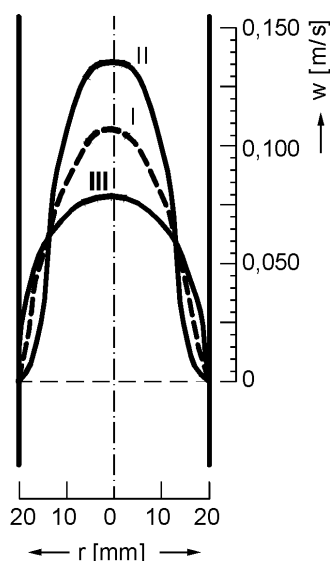
| $\varphi$             | 90  | 80  | 70   | 60   | 50   | 40   | 30   | 20   | 10   |
|-----------------------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| $\varepsilon_\varphi$ | 1,0 | 1,0 | 0,98 | 0,94 | 0,88 | 0,78 | 0,67 | 0,52 | 0,42 |

## 7.5. Wnikanie ciepła podczas wymuszonego przepływu laminarnego

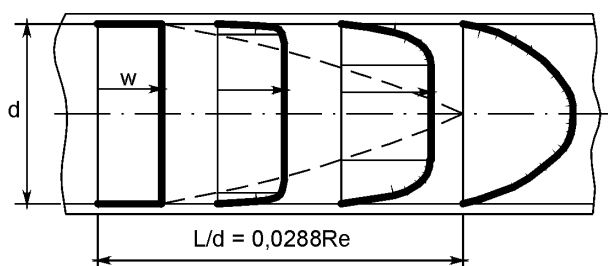
W procesach przemysłowych przepływ laminarny występuje znacznie rzadziej od przepływu burzliwego. Niemniej jednak przepływ ten ma znaczenie w niektórych rodzajach technologii, chociażby produkcji tworzyw sztucznych, przerobu węgla, ropy naftowej, a obecnie biomasy.

Możemy założyć, że w przepływie czysto uwarstwionym wnikanie ciepła sprowadza się jedynie do przewodzenia ciepła od rdzenia płynu do ściany lub odwrotnie. Dla takiego przypadku otrzymano rozwiązania analityczne równania energii, oddzielnie dla tzw. obszaru wlotowego (rozwiązania Graetza i Prandtla [4]) lub dla przepływu

wu w pełni rozwiniętego. W tym ostatnim przypadku zakłada się, że gęstość strumienia ciepła lub temperatura ściany jest stała [11]. Rozwiązania teoretyczne stanowią jednak tylko pewne przybliżenie, bo rzeczywisty proces wnikania ciepła podczas tego przepływu jest o wiele bardziej skomplikowany. W warunkach wymiany ciepła, tzn. istnienia pola temperatury, nie jest on izotermiczny. Paraboliczny rozkład prędkości (rys. 7.17), który występowałby w przypadku idealnego laminarnego przepływu (linia I na rys. 7.17), deformuje się w wyniku zmian lepkości płynu w zależności od temperatury w poszczególnych warstwach. Jeżeli temperatura ściany jest niższa od temperatury cieczy (chłodzenie), to warstwy płynące przy ścianie mają większą lepkość i poruszają się z mniejszą prędkością liniową (linia II na rys. 7.17). Z kolei podczas ogrzewania jest odwrotnie i rozkład temperatury odpowiada linii III. Zmiany temperatury na drodze przepływu płynu powodują również zmiany jego gęstości i następuje ruch ciepła w wyniku konwekcji naturalnej. Można oczekiwać, że większe deformacje profilu prędkości wystąpią w przypadkach niezgodności kierunków ruchu wymuszonego i swobodnego.



Rys. 7.17. Profile prędkości płynu dla przepływu laminarnego: I – przepływ izotermiczny (stała lepkość), II – chłodzenie, III – ogrzewanie



Rys. 7.18. Rozwinięcie parabolicznego profilu prędkości u wlotu rury

Podstawową przyczyną trudności jest jednak występowanie tzw. odcinka rozbiegowego (rys. 7.18), na którym zachodzi formowanie się profilu parabolicznego rozkładu prędkości u wlotu do rury. Przy samym wlocie do rury tworzy się laminarna warstwa przyścienna, podczas gdy w rdzeniu płyn ma stałą prędkość. Warstwa laminarna narasta stopniowo, aż w pewnej odległości dochodzi do osi rury, zapewniając paraboliczny profil prędkości w kierunku promieniowym. Podobnie zmienia się również rozkład temperatury, zapewniając formowanie się tzw. termicznej warstwy granicznej.

Dokładny obraz kształtowania się profili prędkości płynu (wody) oraz rozkładu temperatury uzyskano za pomocą programu komputerowego FLUENT 6.0 (rys. 7.19–7.20). Przykładowe obliczenia wykonano dla przepływu wody w rurze poziomej o średnicy 0,05 m na odcinku 4 m z użyciem siatki niestrukturalnej (rys. 7.9). Dla niewielkiej prędkości  $v = 0,01025$  m/s liczba Reynoldsa wynosi około 500, profile prędkości (rys. 7.19) i temperatury (rys. 7.20) dość znacznie się zmieniają w przypadku wyższej temperatury ścianki ( $t_{śc} = 55$  °C). Widać również kształtowanie się wzdłuż kolejnych warstw różniących się temperaturą: gorących przy ścianie rury grzejnej, chłodnych dalej od niej.

Długość odcinka rozbiegowego do ustabilizowania się prędkości (rys. 7.18) wynosi  $L = 0,0288Re d$  według Hoblera [4] oraz  $L = 0,065Re d$  według Boussinesqa [10].

Długość odcinka rozbiegowego  $d$ , na którym stabilizuje się rozkład temperatury (długość termicznego odcinka wlotowego) można natomiast obliczyć ze wzoru

$$\left(\frac{L}{d}\right)_{\text{lam}} \approx 0,05 Re_D Pr \quad (7.118)$$

W literaturze można znaleźć wiele zależności korelacyjnych do określania współczynnika wnikania ciepła podczas wymuszonego przepływu laminarnego w rurach. Różnią się jednak bardzo pod względem budowy modułów liczb bezwymiarowych oraz wartości stałych i wykładników potęgowych. Wynika to z przyczyn omówionych na wstępie tego rozdziału.

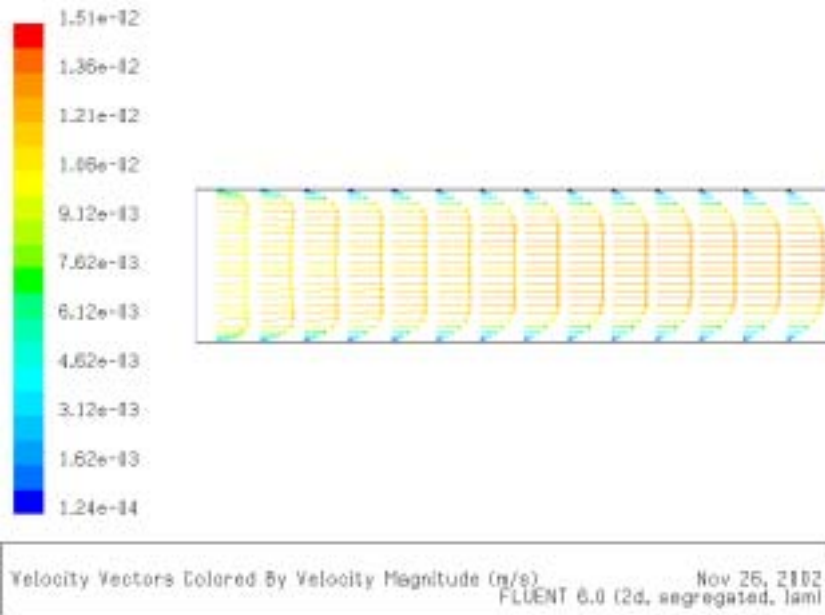
Graetz [10] jako pierwszy w 1885 r. opublikował rozwiązanie równania ustalonego przewodzenia ciepła w płynie podczas przepływu uwarstwionego. Po scałkowaniu równania Fouriera–Poissona dla przewodzenia ciepła w kierunku promieniowym otrzymał on zależność bezwymiarowej temperatury w postaci szeregu

$$\Phi = \frac{T_2 - T_1}{T_s - T_1} = 1 - 8\phi(n_1) \quad (7.119)$$

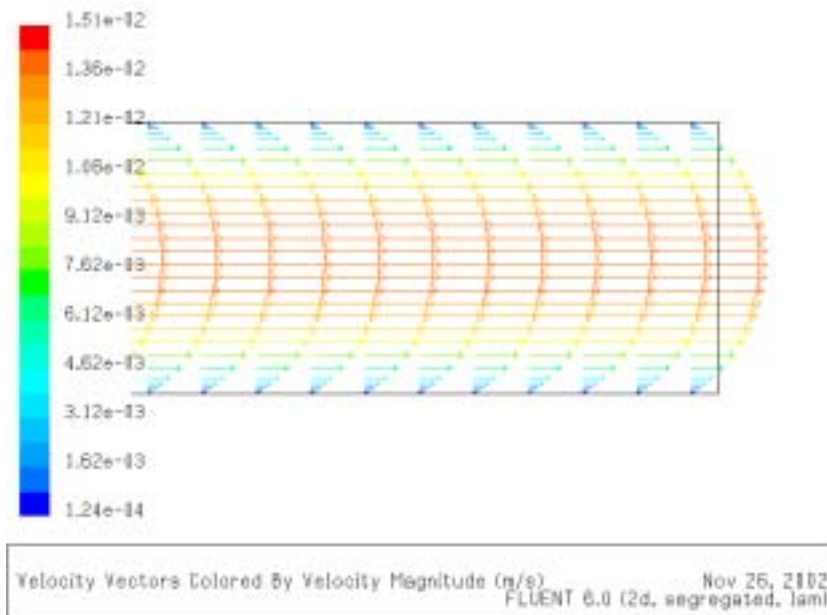
gdzie

$$n_1 = \frac{\pi \lambda L}{4 \dot{m} c_p} = \left(\frac{Re Pr d}{L}\right)^{-1}$$

a) wlot rury 1,  $v = 0.01025 \text{ m/s}$ ,  $t_{\text{plynu wlot.}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $Q = 0 \text{ W}$

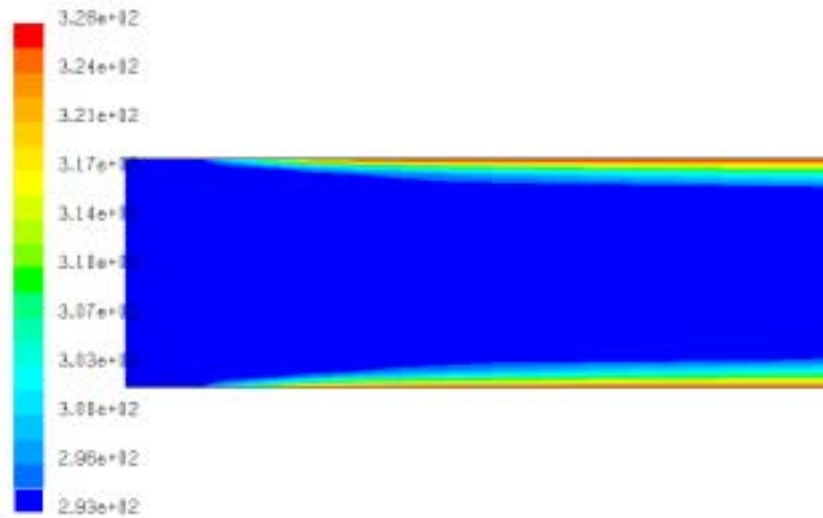


b) wylot rury 2,  $v = 0.01025 \text{ m/s}$ ;  $t_{\text{plynu wlot.}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_{\text{ścianki}} = 55 \text{ }^\circ\text{C}$



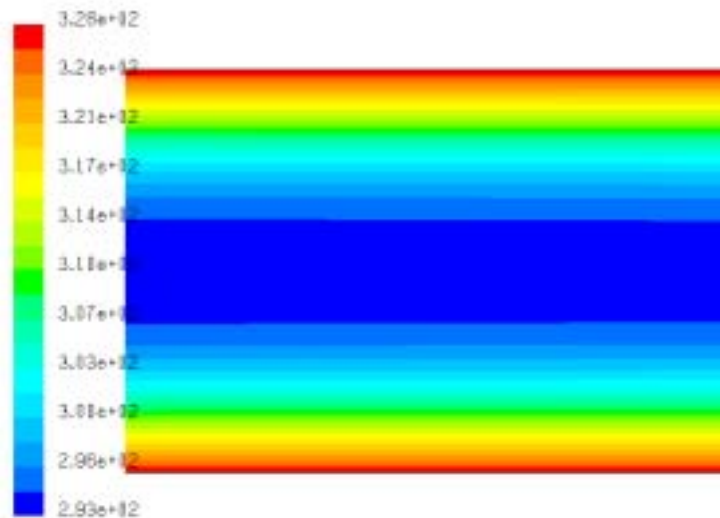
Rys. 7.19. Wektory prędkości kolorowane według skali wielkości (m/s) dla średniej prędkości wody  $v = 0,01025 \text{ m/s}$ : a) wlot rury 1, b) wylot rury 2

a) wlot rury 2,  $v = 0,01025 \text{ m/s}$ ,  $t_{\text{płynu wlot.}} = 20 \text{ °C}$ ,  $t_{\text{ścianki}} = 55 \text{ °C}$



Contours of Total Temperature (K) Nov 26, 2102  
FLUENT 6.0 (2d, segregated, lam)

b) wylot rury 2,  $v = 0,01025 \text{ m/s}$ ,  $t_{\text{płynu wlot.}} = 20 \text{ °C}$ ,  $t_{\text{ścianki}} = 55 \text{ °C}$



Contours of Total Temperature (K) Nov 26, 2102  
FLUENT 6.0 (2d, segregated, lam)

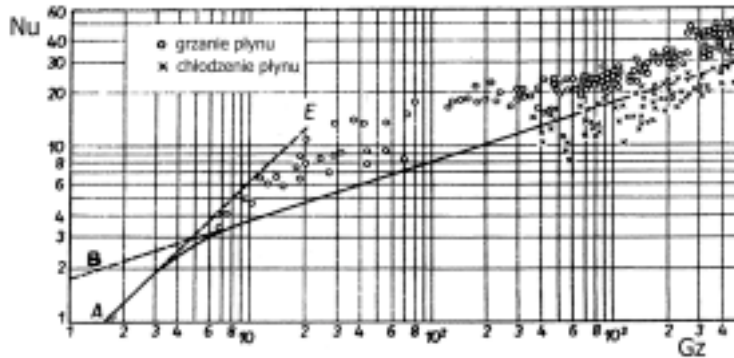
Rys. 7.20. Kontury temperatury kolorowane według skali wielkości (K) dla średniej prędkości wody  $v = 0,01025 \text{ m/s}$ : a) wlot rury 2, b) wylot rur

Funkcja  $\phi(n_1)$  jest szeregiem zbieżnym

$$\phi(n_1) = 0,10238e^{-14,6272 n_1} + 0,01220e^{-89,22 n_1} + 0,00237e^{-212 n_1} + \dots \quad (7.120)$$

Po przekształceniach i wprowadzeniu liczby Nusselta [10] otrzymano następujące równanie

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\dot{m} c_p}{\lambda L} \right) \left( \frac{1 - 8\phi(n_1)}{1 + 8\phi(n_1)} \right) \quad (7.121)$$



Rys. 7.21. Zależność  $Nu = f(Gz)$  dla wymuszonego przepływu laminarnego

McAdams i współpracownicy [10] po przeanalizowaniu wyników wielu prac pokazanych na rys. 7.21 stwierdzili, że dla zakresu  $RePr d/L = 4 \dot{m} c_p / (\pi \lambda L) < 4,5$  wartość liczby Nusselta gwałtownie się zmniejsza, dążąc asymptotycznie do wartości, jaką można obliczyć z równania teoretycznego

$$Nu = 0,5 \left( \frac{4 \dot{m} c_p}{\pi \lambda L} \right) = 0,5 RePr \left( \frac{d}{L} \right) \quad (7.122)$$

Równaniu temu odpowiada krzywa A na rys. 7.21.

Dla zakresu liczb Graetza  $Gz = \dot{m} c_p / (\lambda L) > 10$  i dla  $RePr d/L > 13$  podali oni empiryczne równanie:

$$Nu = 1,62 \left( \frac{4}{\pi} Gz \right)^{1/3} = 1,62 \left( RePr \frac{d}{L} \right)^{1/3} \quad (7.123)$$

Równaniu temu odpowiada linia B na rys. 7.21. Średnia wartość współczynnika przewodzenia ciepła jest odwrotnie proporcjonalna do długości rury  $L$  w potęgę  $1/3$ . W równaniu tym nie uwzględniono jednak zmian liczby Nusselta w zależności od tego, czy rozpatrywany proces odpowiada ogrzewaniu czy chłodzeniu płynu (por. rys. 7.21).

Sieder i Tate (według McAdamsa [10]) uwzględnili kierunek wnikania ciepła, wprowadzając poprawkę na lepkość i otrzymali powszechnie akceptowaną korelację:

$$Nu = 1,86 \left( \frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \left( \frac{4}{\pi} Gz \right)^{1/3} = 1,86 \left( \frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \left( RePr \frac{d}{L} \right)^{1/3} \quad (7.124)$$

Korelacja ta obowiązuje dla zakresu  $RePr d/L > 13$ . Poprawkę oblicza się ze stosunku współczynników lepkości płynu w jego średniej temperaturze i w średniej temperaturze ścianki. Inne parametry fizyczne cieczy należy określić dla średniej temperatury strumienia, obliczonej jako średnia arytmetyczna temperatury na wlocie i na wylocie z aparatu.

Jeżeli założymy, że ogólną zależność dla wymuszonego przepływu wewnątrz rury w zakresie przepływu laminarnego można przedstawić w postaci

$$\alpha = f(w, \rho, \eta, c_p, \lambda, d, L) \quad (7.125)$$

liczba podstawowych parametrów wymiarowanych wynosi 8, liczba zasadniczych wymiarów zaś 4, to liczba modułów bezwymiarowych jest równa 4. W wyniku analizy wymiarowej otrzymuje się zależność między modułami bezwymiarowymi:

$$Nu = C Re^a Pr^b \left( \frac{d}{L} \right)^c \quad (7.126)$$

Na podstawie badań doświadczalnych ustalono, że wykładniki liczb bezwymiarowych są sobie równe:  $a = b = c = 1/3$ .

Badacze rosyjscy (por. np. [3]) przyjęli, że podstawowym czynnikiem kształtującym rozkład prędkości i temperatury są siły wyporu, czyli konwekcja swobodna; ogólna zależność ma zatem następującą postać:

$$\alpha = f(w, d, \eta, \lambda, \rho, c_p, g, \Delta T, \beta) \quad (7.127)$$

Liczba podstawowych parametrów wymiarowanych wynosi 10, liczba zasadniczych wymiarów 5, więc liczba modułów bezwymiarowych jest równa 5.

W wyniku analizy wymiarowej uzyskano następującą zależność modułów bezwymiarowych

$$Nu = C Re^a Pr^b Ga^c V^d \quad (7.128)$$

gdzie  $V = \Delta T \beta$ ,  $Ga = g d_h^3 \rho^2 / \eta^2$ .

Na podstawie danych doświadczalnych Michiejew [3] otrzymał korelację

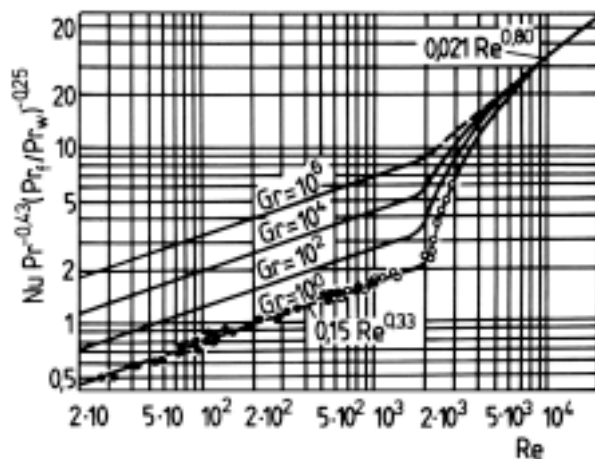
$$Nu = 0,15 \varepsilon_L Re^{0,33} Pr^{0,43} Gr^{0,1} \left( \frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad (7.129)$$

w której:  $Gr = GaV = g d_h^3 \rho^2 \Delta T \beta / \eta^2$  – liczba Grashofa, liczona dla średniej temperatury płynu,  $Pr$  – liczba Prandtla liczona dla średniej temperatury płynu,  $Pr_s$  – liczba Prandtla liczona dla średniej temperatury ściany,  $\Delta T$  – średnia różnica temperatury ściany i

pływu (liczona jako średnia arytmetyczna na wlocie i wylocie),  $d_h$  – średnica hydrauliczna przewodu. Liczby Nusselta  $Nu$  i Reynoldsa  $Re$  są również liczone dla średniej temperatury płynu. Wartość poprawki  $\varepsilon_L$  należy odczytać z tabeli 7.5.

Tabela 7.5. Współczynniki poprawkowe  $\varepsilon_L = f(L/d)$  dla przepływu laminarnego

| $L/d$           | 1    | 2    | 5    | 10   | 15   | 20   | 30   | 40   | 50  |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| $\varepsilon_L$ | 1,90 | 1,70 | 1,44 | 1,28 | 1,18 | 1,13 | 1,05 | 1,02 | 1,0 |



Rys. 7.22. Wnikanie ciepła podczas przepływu przez kanał poziomy według Michiejewa

W korelacji (7.129) istotną rolę odgrywa liczba Grashofa, w której uwzględnia się wpływ konwekcji naturalnej na wnikanie ciepła. Korelację tę pokazano na rys. 7.22. Jak widać z rys. 7.22, liczby Grashofa, zmienne w szerokim zakresie (od 1 do  $10^6$ ), poprawiają współczynnik wnikania ciepła blisko czterokrotnie.

Po wprowadzeniu wzorów na liczby bezwymiarowe i uporządkowaniu korelację (7.129) można zapisać następująco

$$\alpha = A \frac{w^{0,33} \Delta T^{0,1}}{d^{0,37}} \left( \frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \varepsilon_L \quad (7.130)$$

gdzie stała  $A$  jest funkcją właściwości płynu zależną od temperatury

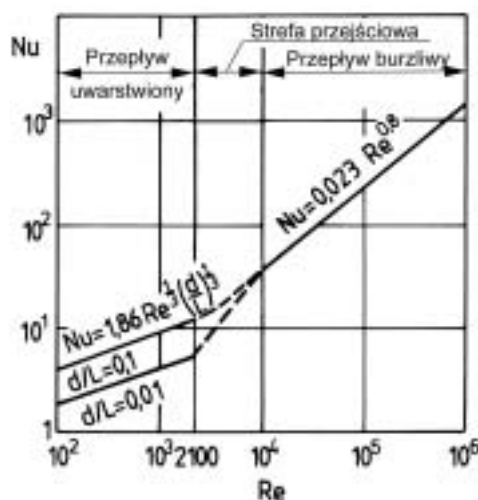
$$A = 0,15 \frac{\rho^{0,53} c_p^{0,43} \lambda^{0,57} \beta^{0,1} g^{0,1}}{\eta^{0,1}} \quad (7.131)$$

Wartości liczbowe stałej  $A$  dla wody i powietrza można znaleźć w tabelach. Rozwiązania dla szeregu przypadków scharakteryzowanych kształtem przekroju kanału oraz warunkami wymiany ciepła przy ścianie przedstawił Madejski [6].



## 7.6. Wnikanie ciepła w obszarze przejściowym

Zgodnie z zasadami hydrodynamiki przejście od przepływu laminarnego do przepływu burzliwego następuje w zakresie liczb Reynoldsa około 2100–2300 [4]. Występuje jednak strefa przejściowa, w której przepływ laminarny stopniowo zanika, a przepływ staje się w pełni burzliwy dopiero dla  $Re = 10^4$ . Zależność modułu Nusselta od liczby Reynoldsa w różnych obszarach przepływu wymuszonego w rurach dla płynu o liczbie  $Pr = 1$  oraz  $\eta/\eta_s = 1$  przedstawiono na rys. 7.23. Ponieważ w obszarze przejściowym proces wnikania ciepła nie jest ustabilizowany i wyniki pomiarów nie są jednakowe, więc można przyjąć dla tego zakresu liniową interpolację liczby Nusselta w układzie logarytmicznym. Interpolacji dokonujemy między wartościami  $Nu$  obliczonymi kolejno dla  $Re = 2100$  z korelacji dla przepływu laminarnego oraz dla  $Re = 10^4$  dla burzliwego przepływu. Podany sposób interpolacji jest tylko przybliżeniem, ponieważ funkcja  $\lg Nu = f(\lg Re)$  nie jest dokładnie prostoliniową zależnością.



Rys. 7.23. Zależność  $Nu = f(Re)$  dla  $Pr = 1$  oraz  $\eta/\eta_s = 1$

McAdams [10] poleca korzystać z wykresu Colburna (rys. 7.24), zwłaszcza dla cieczy lepkich:

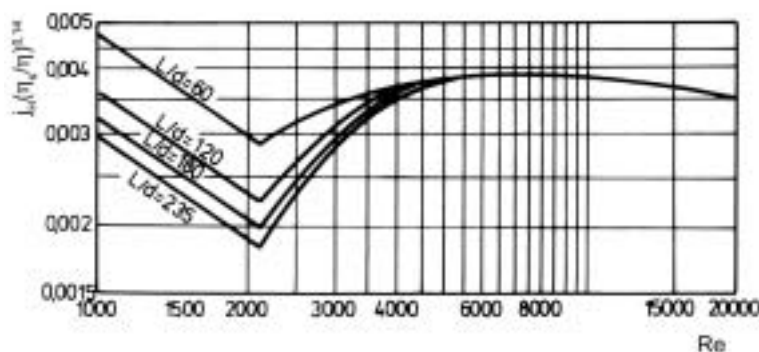
$$j_H \left( \frac{\eta_s}{\eta} \right)^{0,14} = f(Re) \quad (7.132)$$

gdzie  $j_H = St Pr^{2/3} = Nu/(Re Pr^{1/3})$ .

Hausen [4] dla przepływu w szerokim zakresie liczb Reynoldsa ( $2300 < Re < 10^6$ ) opracował zależność korelacyjną

$$Nu = 0,116(Re^{2/3} - 125)Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{d}{L} \right)^{2/3} \right] \left( \frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad (7.133)$$

Duże znaczenie praktyczne ma wymiana ciepła i masy, gdy ciecz opływa kulę. Z reguły przebiega ona w obszarze przepływu przejściowego, tj. w zakresie  $1 < Re (= wd_p \rho / \eta) < 10^3$ . W wielu procesach, takich jak fluidyzacja, suszenie, chłodzenie wody, nawilżanie powietrza itp. występuje wnikanie ciepła z fazy gazowej (powietrza) do cząstek w przybliżeniu sferycznych.



Rys. 7.24. Zależność  $j_H(\eta_s/\eta)^{0,14} = f(Re)$  według Colburna

W zakresie przepływu laminarnego uzyskano rozwiązania analityczne dla różnych funkcji prądu  $j_H$  [5].

Na podstawie badań doświadczalnych najpierw Froessling, a później Ranz i Marshall [5] ustalili zależność korelacyjną

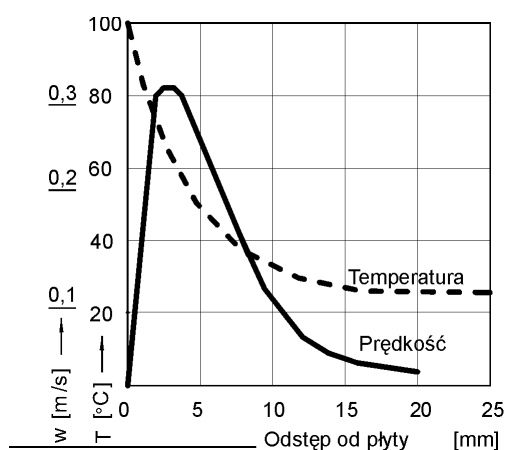
$$Nu = 2,0 + 0,6 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (7.134)$$

Korelacja ta obowiązuje w zakresie liczb Reynoldsa  $1 < Re (= wd_p \rho / \eta) < 7 \cdot 10^4$  oraz liczb Prandtla  $0,6 < Pr (= \eta c_p / \lambda) < 400$ .

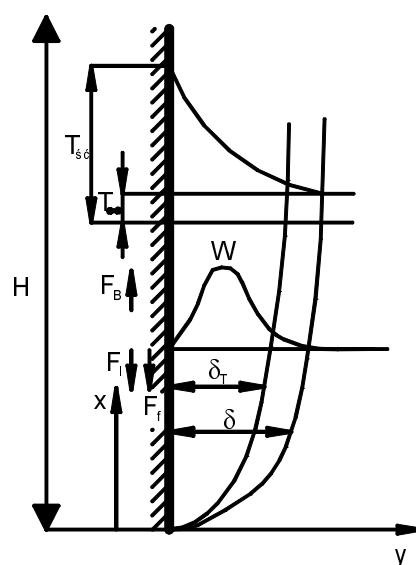
## 7.7. Wnikanie ciepła podczas przepływu swobodnego w warunkach konwekcji naturalnej

W warunkach konwekcji naturalnej proces wnikania ciepła podczas przepływu swobodnego jest uwarunkowany grawitacyjnym ruchem płynu w pobliżu ściany przekazującej lub przejmującej ciepło. Ponieważ gęstość płynu, najczęściej powietrza, w pobliżu ściany grzejnej jest mniejsza niż w rdzeniu płynu, więc różnica sił grawitacyjnych powoduje w pobliżu ściany ruch płynu do góry. Po zimnej ścianie ruch płynu jest skierowany ku dołowi. Jest to tzw. efekt kominowy.

Mechanizm wnikania ciepła, w tym tworzenie się laminarnej warstwy granicznej, zależy przede wszystkim od właściwości fizykochemicznych płynu, ale również od kształtu ściany, tzn. czy to jest ściana rury poziomej, czy ściana pionowa. Już bardzo dawno opracowano metody doświadczalne pozwalające obserwować zachowanie laminarnej warstwy przyściennej oraz pola temperatury w pobliżu ściany. Należą do nich metoda cieni, stosowana już przez Schmidta, oraz metoda interferencyjna, polegająca na fotografowaniu wiązek światła przesyłanych prostopadłe do ściany. Na rysunku 7.25 dla przykładu pokazano rozkład temperatury i prędkości dla płyty pionowej uzyskane przez Schmidta. Temperatura powietrza obniża się w miarę zwiększania odległości od ściany, prędkość zaś wzrasta, osiągając maksimum w pewnej odległości od ściany.



Rys. 7.25. Rozkład temperatury i prędkości powietrza w pobliżu gorącej ściany pionowej



Rys. 7.26. Sprzężenie rozkładu pól temperatury, prędkości i sił na gorącej ścianie pionowej

Sprzężony rozkład pól temperatury i prędkości powietrza na ścianie pionowej, jak pokazano dla przykładu na rys. 7.26, kształtują siły działające na płyn. Są to [13]:

- Siła wyporu  $F_B$

$$F_B \approx -(\rho_0 - \rho_\infty)g \cos \varphi \quad (7.135)$$

dla ściany pionowej  $\cos \varphi = \cos 0^\circ = 1$ .

- Siła bezwładności (inercji)  $F_I$

$$F_I \approx \rho_\infty \frac{w_r^2}{H} \quad (7.136)$$

gdzie  $w_r$  jest prędkością charakterystyczną (maksymalną).

- Siła tarcia wewnętrznego  $F_f$

$$F_f \approx \eta \frac{w_r}{\delta^2} \quad (7.137)$$

W pobliżu ściany (w warstwie granicznej) siły inercji są takie same jak siły tarcia, co można zapisać:

$$\frac{w_r^2}{H} \approx \nu \frac{w_r}{\delta^2} \quad (7.138)$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie określające grubość laminarnej warstwy granicznej:

$$\frac{\delta}{H} \approx \left( \frac{\nu}{w_r H} \right)^{1/2} \quad (7.139)$$

Również siły wyporu są porównywalne z siłami inercji, a zatem

$$-(\rho_0 - \rho_\infty) g \cos \varphi \approx \rho_\infty \frac{w_r^2}{H} \quad (7.140)$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$w_r \approx \left[ \frac{-(\rho_0 - \rho_\infty) H g \cos \varphi}{\rho_\infty} \right]^{1/2} \quad (7.141)$$

Po podstawieniu tej zależności do równania (7.139) otrzymujemy

$$\frac{\delta}{H} \approx \left( \frac{\nu^2}{\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_\infty}\right) g H^3 \cos \varphi} \right)^{1/4} \quad (7.142)$$

Jeżeli wprowadzimy do wyrażenia różnicę gęstości

$$\rho_0 - \rho_\infty = -\rho_\infty \beta_\infty (T_0 - T_\infty) \quad (7.143)$$

otrzymamy zależność określającą grubość warstwy granicznej

$$\frac{\delta}{H} \approx \left( \frac{\nu^2}{\beta_\infty (T_0 - T_\infty) g H^3} \right)^{1/4} \left( \frac{1}{\cos \varphi} \right)^{1/4} \quad (7.144)$$

a tym samym

$$\frac{\delta}{H} \approx Gr^{-1/4} \quad (7.145)$$

Liczba Grashofa jest odwrotnością wyrażenia w poprzednim równaniu

$$Gr = \frac{gH^3(T_0 - T_\infty)\beta_\infty}{\nu^2}$$

Grubość laminarnej warstwy granicznej jest więc odwrotnie proporcjonalna do liczby Grashofa w potęgę 1/4, a wprost proporcjonalna do wysokości ściany.

Już w 1881 r. Lorenz [10] ustalił, od jakich wielkości zależy wnikanie ciepła w warunkach konwekcji naturalnej. Po scałkowaniu różniczkowego równania przewodzenia ciepła w ruchomym płynie otrzymał on równanie bezwymiarowe

$$\frac{\alpha H}{\lambda} = 0,548 \left[ \left( \frac{\eta c_p}{\lambda} \right) \left( \frac{gH^3 \rho^2 \beta \Delta T}{\eta^2} \right) \right]^{1/4} \quad (7.146)$$

Dla gazów idealnych  $\beta = 1/T$ . Wielu badaczy, między innymi Nusselt, skorzystali z tej zależności do korelowania wyników badań w odniesieniu do rur. Zamiast wysokości ściany  $H$  podstawiali średnicę zewnętrzną  $d_z$ .

Współczynnik wnikania ciepła podczas konwekcji naturalnej

$$\alpha = f(\lambda, \eta, c_p, \Delta T, h, \rho, \beta, g) \quad (7.147)$$

zależy od współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$ , lepkości  $\eta$ , ciepła właściwego  $c_p$ , różnicy temperatury  $\Delta T$ , wymiaru liniowego  $h$  przedmiotu (dla rury poziomej  $h = d$ ), gęstości  $\rho$ , współczynnika rozszerzalności objętościowej płynu  $\beta$  i przyspieszenia ziemskiego  $g$ .

W wyniku analizy wymiarowej ( $n = 9$ ,  $r = 5$  i  $m = 4$ ) otrzymujemy równanie kryterialne:

$$Nu = C \left( \frac{\eta c_p}{\lambda} \right)^a \left( \frac{gh^3 \rho^2}{\eta^2} \right)^b (\beta \Delta T)^c \quad (7.148)$$

w którym liczba Nusselta  $Nu$  jest funkcją liczby Prandtla  $Pr$ , Galileusza  $Ga$  i liczby  $V$ .

Ponieważ doświadczalnie ustalono, że wykładniki potęgowe dla poszczególnych liczb bezwymiarowych są jednakowe, najczęściej spotyka się zapis w postaci

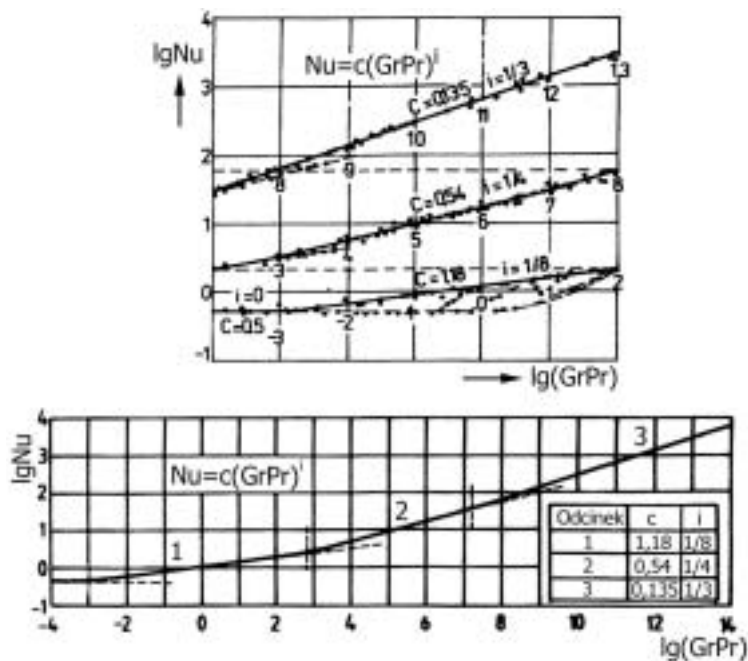
$$Nu = C Gr^i Pr^i = C Ra^i \quad (7.149)$$

gdzie: liczba Grashofa  $Gr = GaV$ , liczba Rayleigha (Strutta)  $Ra = GrPr$ .

Graficzną postać tej korelacji przedstawiono na rys. 7.27. W układzie podwójnie logarytmicznym nie jest to linia prosta, więc dla lepszego przybliżenia krzywą podzielono na trzy odcinki; dla małych wartości  $X = GrPr$  przepływ swobodny jest laminarny, dla średnich – przejściowy, dla dużych – burzliwy.

Wartości wykładnika potęgowego i oraz stałej  $C$  dla różnych zakresów konwekcji zestawiono w tabeli 7.6. Wszystkie parametry fizykochemiczne płynu wyznacza się

dla średniej temperatury warstwy przyściennej, liczonej jako średnia arytmetyczna temperatury ściany i średniej temperatury płynu.



Rys. 7.27. Zależność  $Nu = f(GrPr)$  dla konwekcji naturalnej

Tabela 7.6. Wartości stałej  $C$  oraz wykładników potęgowych  $i$  w korelacji (7.149)

| Charakter ruchu | $X = GrPr$                       | Odcinek | Stała $C$ | Wykładnik $i$ |
|-----------------|----------------------------------|---------|-----------|---------------|
| Laminarny       | $1 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^2$ | 1       | 1,18      | 1/8           |
| Przejsiowy      | $5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^7$    | 2       | 0,54      | 1/4           |
| Burzliwy        | $> 2 \cdot 10^7$                 | 3       | 0,135     | 1/3           |

Hobler [4] wprowadził wymiar poprzeczny  $\vartheta_z$

$$\vartheta_z = \left( \frac{\eta^2}{g\rho^2} \right)^{1/3} \quad (7.150)$$

charakterystyczny dla spływającej grawitacyjnie strugi. Otrzymał następujące wyrażenia:

- liczba Grashofa

$$Gr = \frac{h^3 (\beta \Delta T)}{g^3} = V \left( \frac{\vartheta_z}{h} \right)^{-3} \quad (7.151)$$

- liczba  $V$

$$V = \beta \Delta T \quad (7.152)$$

Równanie (7.149) można więc przekształcić do następującej postaci:

$$\left( \frac{\alpha \vartheta_z}{\lambda} \right) \frac{h}{\vartheta_z} = C V^i \left( \frac{\vartheta_z}{h} \right)^{-3i} Pr^i$$

dzięki czemu otrzymujemy zależność nowych modułów bezwymiarowych

$$Nu = \frac{\alpha \vartheta_z}{\lambda} = C V^i Pr^i \left( \frac{\vartheta_z}{h} \right)^{1-3i} \quad (7.153)$$

Wartości stałej  $C$  dla różnych zakresów konwekcji i rozmaitych geometrii układu zestawiono w tabeli 7.7.

Przez ograniczenie zakresu zastosowania równań uogólnionych można otrzymać równania o prostej budowie, przydatne w praktyce. Dla ściany pionowej najczęściej mamy do czynienia z obszarem przejściowym ( $5 \cdot 10^2 < GrPr (= VPr(\vartheta_z/h))^{-3} < 2 \cdot 10^7$ ), gdzie  $i = 1/4$ ,  $C = 0,54$  oraz

$$\alpha = A \left( \frac{\Delta T}{h} \right)^{1/4} \quad [\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})] \quad (7.154)$$

Równania (7.149) i (7.153) można wówczas sprowadzić do prostej postaci. Współczynnik  $A$  jest funkcją temperatury danego płynu. Wartości tego współczynnika dla powietrza i wody zestawiono w tabelach 7.8 i 7.9.

Tabela 7.7. Wartości stałej  $C$  dla  $X = GrPr = VPr(\vartheta_z/h)^{-3}$  (równ. (7.153))

| Lp. | Układ  | Od $X_1$                 | Do $X_2$                 | $C$          | Powyżej $X_2$                | $C$  | Źródło   |
|-----|--|--------------------------|--------------------------|--------------|------------------------------|------|--|
| 1   | Ściana pionowa,<br>cylinder pionowy          | $10^4$<br>$5 \cdot 10^2$ | $10^9$<br>$2 \cdot 10^7$ | 0,59<br>0,54 | $> 10^9$<br>$> 2 \cdot 10^7$ | 0,13 | Weise, Saunders,<br>McAdams,<br>Michiejew                    |
| 2   | Rura pozioma,<br>drut                        | $10^3$<br>$10^3$         | $10^9$<br>$10^9$         | 0,53<br>0,47 | $> 10^9$                     | 0,11 | Eberle, Wamsler,<br>Koch, McAdams,<br>Rice,<br>Brown i Marco |
| 3*  | Płyta pozioma,<br>oddająca ciepło<br>do góry | $10^5$                   | $2 \cdot 10^7$           | 0,54         | $> 2 \cdot 10^7$             | 0,14 | Fishenden i Saunders   |
| 4   | Płyta oddająca<br>ciepło w dół               | $10^3$                   | $10^9$                   | 0,35         | $> 10^9$                     | 0,08 | Brown i Marco  |

\*Dla płyty poziomej  $h$  odpowiada krótszemu bokowi. Dla płyt, w których  $h > 0,6$  m, należy przyjąć  $h_{\text{max}} = 0,6$  m.

Tabela 7.8. Wartości współczynnika  $A$  (równ. (7.154)) dla powietrza

|       |      |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| $t_p$ | 0    | 50   | 100  | 200  | 300  | 500  | 1000 |
| $A$   | 1,42 | 1,32 | 1,27 | 1,22 | 1,10 | 0,99 | 0,81 |

Tabela 7.9. Wartości współczynnika  $A$  (równ. (7.154)) dla wody

|       |    |     |     |     |     |     |     |
|-------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $t_w$ | 0  | 20  | 40  | 60  | 80  | 100 | 150 |
| $A$   | 70 | 111 | 149 | 178 | 205 | 226 | 273 |

W obszarze burzliwym ( $GrPr = VPr(\varrho_z/h)^{-3} > 2 \cdot 10^7$ ), gdzie  $i = 1/3$ ,  $C = 0,135$ ; równania (7.149) i (7.153) można wówczas sprowadzić do prostej postaci

$$\alpha = A(\Delta T)^{1/3}, \quad \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \quad (7.155)$$

Wartości współczynnika  $A$  dla powietrza i wody w tym równaniu zestawiono w tabelach 7.10 i 7.11.

Tabela 7.10. Wartości współczynnika  $A$  (równ. (7.155)) dla powietrza

|       |      |      |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| $t_p$ | 0    | 50   | 100  | 200  | 300  | 500  | 1000 |
| $A$   | 1,68 | 1,47 | 1,33 | 1,13 | 0,99 | 0,81 | 0,56 |

Tabela 7.11. Wartości współczynnika  $A$  (równ. (7.155)) dla wody

|       |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $t_w$ | 0   | 20  | 40  | 60  | 80  | 100 | 150 |
| $A$   | 102 | 198 | 291 | 362 | 425 | 480 | 610 |

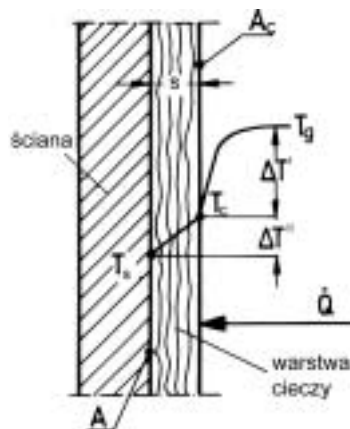
Obliczenia wykonuje się dla średniej temperatury warstwy przyściennej, obliczanej jako średnia arytmetyczna temperatury ściany i średniej temperatury płynu.

## 7.8. Wnikanie ciepła podczas grawitacyjnego spływu cieczy po ścianie

Grawitacyjny spływ cieczy występuje najczęściej w skraplaczach, np. amoniaku w przemyśle azotowym. W zraszanych aparatach pionowych występuje częściej spływ burzliwy, w poziomych zaś przepływ laminarny.



Najpierw rozważa się opory cieplne podczas konwekcji zachodzącej między powierzchnią ściany a gazem (powietrzem), oddzielonym od ściany spływającą warstwą cieczy (rys. 7.28). Jeżeli warstwa ta jest cienka, to przekazywanie ciepła w zasadzie zależy od właściwości opływającego gazu, gdy natomiast jest ona gruba, spływ cieczy jest z reguły burzliwy.



Rys. 7.28. Schemat wnikania ciepła podczas grawitacyjnego spływu cieczy

Przyjmijmy schemat rozkładu temperatury jak na rys 7.28, gdzie  $s$  jest średnią grubością warstwy cieczy. Strumień ciepła możemy wyrazić za pomocą równania Newtona opisującego opór wnikania ciepła od gazu do cieczy

$$\dot{Q} = \alpha_g A_c \Delta T' \quad (7.156)$$

Przewodzenie ciepła przez warstwę cieczy w przypadku ustalonego ruchu ciepła opisuje równanie Fouriera

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} A \Delta T'' \quad (7.157)$$

W warstwie cieczy niewielkiej grubości niezależnie od kształtu powierzchni chłodzącej powierzchnia przekroju poprzecznego jest stała  $A_c = A$ .

Po przekształceniu równ. (7.156) i (7.157) otrzymujemy

$$\Delta T' = \frac{\dot{Q}}{\alpha_g A} \quad (7.158)$$

oraz

$$\Delta T'' = \frac{\dot{Q}}{A} \frac{s}{\lambda} \quad (7.159)$$

Po dodaniu obu równań stronami otrzymujemy wzór na całkowitą różnicę temperatury:

$$\Delta T = \Delta T' + \Delta T'' = \frac{\dot{Q}}{A} \left( \frac{1}{\alpha_g} + \frac{s}{\lambda} \right) \quad (7.160)$$

Wprowadźmy zastępczy współczynnik wnikania ciepła, opisujący cały proces ruchu ciepła

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_g} + \frac{s}{\lambda} \quad (7.161)$$

wówczas otrzymamy

$$\dot{Q} = \alpha A \Delta T \quad (7.162)$$

Składową oporu cieplnego w procesie przewodzenia ciepła w warstwie cieczy można opisać za pomocą zastępczego współczynnika wnikania:

$$\frac{1}{\alpha_z} = \frac{s}{\lambda} \quad (7.163)$$

Otrzymujemy równanie

$$\alpha = \frac{\alpha_g \alpha_z}{\alpha_g + \alpha_z} \quad (7.164)$$

Wyznaczenie zastępczego współczynnika wnikania ciepła  $\alpha_z$  w warstwie cieczy spływającej grawitacyjnie wymaga określenia grubości tej warstwy.

Można ją obliczyć analitycznie, jeśli spływ cieczy jest uwarstwiony. Dostępne w literaturze liczne wzory do obliczania zastępczej grubości warstwy cieczy można zapisać w następującej postaci

$$s_{sr} = \frac{1}{C} \varrho_z Re_z^{1/3} \quad (7.165)$$

gdzie:

$$\varrho_z = \left( \frac{\eta^2}{\rho^2 g} \right)^{1/3}$$

$$Re_z = \frac{4\Gamma}{\eta}$$

stała  $C = 1,47$  dla skroplin na rurze pionowej oraz  $C = 1,2$  dla skroplin na rurze poziomej.

Ponieważ  $\alpha_z = \lambda/s_{z1}$ , więc po podstawieniu równania (7.165) otrzymujemy wzór

$$\alpha_z = C \frac{\lambda}{g_z} Re_z^{-1/3} \quad (7.166)$$

lub

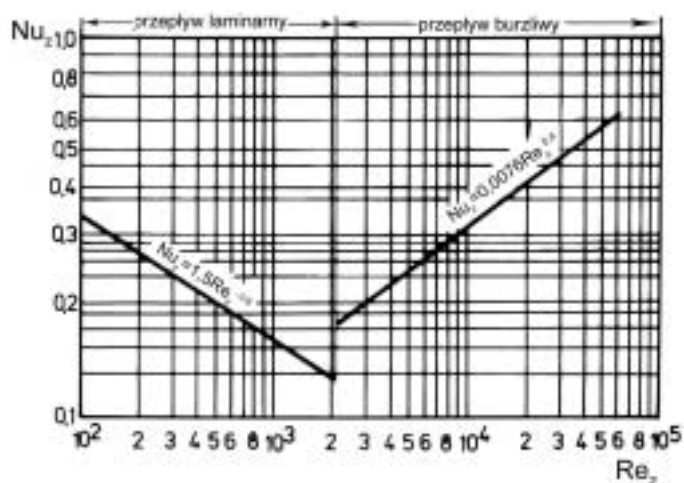
$$Nu_z = C Re_z^{-1/3} \quad (7.167)$$

gdzie  $Nu_z = \alpha_z g_z / \lambda$  jest zastępczą liczbą Nusselta.

Doświadczalnie ustalono, że należy przyjąć

- dla rury pionowej  $C = 1,5$ ,  $\Gamma = \dot{m} / (\pi d)$ ,
- dla rury poziomej  $C = 1,2$ ,  $\Gamma = \dot{m} / (2L)$

Parametr  $g_z$  odpowiada grubości strugi cieczy, jeżeli  $Re_z = 1$  i dlatego nazwano go zastępczą grubością strugi.



Rys. 7.29. Zależność  $Nu_z = f(Re_z)$  dla spływu grawitacyjnego

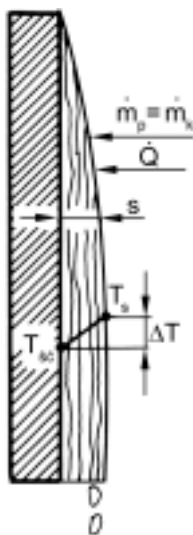
Wnikanie ciepła od gazu do warstewki spływających kroplin w zakresie burzliwego przepływu ( $Re_z > 2000$ ) przebiega inaczej niż dla spływu laminarnego. Zależność  $Nu_z$  od  $Re_z$  w przypadku spływu po ścianie rury pionowej pokazano na rys. 7.29. W obszarze laminarnego spływu wzrost grubości warstwy ze wzrostem liczby Reynoldsa powoduje zmniejszenie liczby Nusselta. Odwrotną zależność występuje w obszarze przepływu burzliwego ( $Re_z > 2000$ ), gdzie liczba Nusselta wyraźnie się zwiększa ze wzrostem liczby Reynoldsa. Według Kirkbride'a i Badgera dla burzliwego spływu grawitacyjnego obowiązuje równanie

$$Nu_z = 0,0076 Re_z^{0,4} \quad (7.168)$$

Wykres tej zależności stanowi linia prosta po prawej stronie rys. 7.29.

## 7.9. Wnikanie ciepła podczas skraplania pary nasyconej

Proces skraplania pary występuje zawsze, gdy para nasycona styka się ze ścianą o temperaturze niższej od temperatury nasycenia pary pod danym ciśnieniem. Pierwsze kropelki cieczy tworzą się w mikroskopijnych wgłębieniach na powierzchni ściany. Kolejne kropelki zlewają się w ciekłą warstwę, tworząc film (błonkę) kondensatu, spływający grawitacyjnie w dół ściany. Wytwarza się jednokierunkowy ruch cząsteczek pary w kierunku do ściany, a skraplanie pary zachodzi już na powierzchni filmu cieczy. Towarzyszy temu gwałtowne zmniejszenie objętości oraz przekazanie ciepła skraplania do ściany. Proces ten, nazywany wnikaniem ciepła podczas skraplania pary nasyconej, jest tym intensywniejszy, im większa jest różnica między temperaturą pary nasyconej a temperaturą na powierzchni ściany. Główny opór wnikania ciepła jest skoncentrowany w filmie kondensatu, w którym zachodzi przewodzenie ciepła. Ważną rolę odgrywa zatem grubość filmu kondensatu, która się zwiększa ku dołowi ściany, co powoduje zmniejszenie wartości lokalnych współczynników wnikania ciepła. Jest to tzw. kondensacja filmowa, którą schematycznie pokazano na rys. 7.30. Kondensacja filmowa zachodzi wtedy, gdy ciecz kondensatu dobrze zwilża powierzchnię ściany, czyli siły adhezji przeważają nad siłami kohezji.



Rys. 7.30. Schemat wnikania ciepła podczas skraplania pary nasyconej na ścianie pionowej

Gdy siły napięcia powierzchniowego kropli (siły kohezji) są większe od sił adhezji (przylegania), kropelki kondensatu szybko odrywają się od ściany i opadają, nie tworząc filmu cieczy. Taką kondensację nazwano kropelkową (perlista). Występuje ona zawsze na dolnej powierzchni płyty poziomej oraz na powierzchniach słabo zwil-

żanych przez ciecz. Brak zwilżalności powierzchni można także uzyskać przez powlekanie ściany takimi substancjami, jak np. kwasy tłuszczowe lub przez dodanie odpowiedniego składnika do pary. Podczas skraplania kropelkowego warstewka kondensatu praktycznie nie istnieje, co powoduje zmniejszenie oporu cieplnego i wzrost współczynników wnikania ciepła. Są one wielokrotnie większe niż w kondensacji filmowej, osiągając wartości  $10^5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Zjawisko kondensacji kropelkowej jest także charakterystyczne dla świeżych powierzchni. Jednak po pewnym czasie eksploatacji w wyniku powstawania wżerów, osadów czy zmycia powlekannej substancji na powierzchni zachodzi kondensacja filmowa. Ma ona podstawowe znaczenie dla pracy skraplaczy, nazywanych też kondensatorami.

Proces wnikania ciepła podczas kondensacji filmowej badano zarówno metodami eksperymentalnymi, jak i analitycznymi (prace Nusselta). Najpierw rozpatruje się równania empiryczne [4], w tym opisy modelowe procesu, aby ustalić zmienne zależne. Na powierzchni ciekłego filmu spływającego po ścianie skrapla się strumień pary  $\dot{m}_p$ , z którego powstaje strumień kondensatu  $\dot{m}_k$  (rys. 7.30). Strumień ciepła oddawany powierzchni filmu cieczy przez kondensującą się parę jest równy

$$\dot{Q} = \dot{m}_p r \quad (7.169)$$

Jest on przewodzony przez warstwę kondensatu zgodnie z równaniem Fouriera

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_c}{s} A \Delta T \quad (7.170)$$

gdzie  $\lambda_c$  jest współczynnikiem przewodzenia ciepła cieczy,  $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , a  $s$  – średnią grubością filmu cieczy.

Wnikanie ciepła w tym procesie opisujemy równaniem Newtona

$$\dot{Q} = \alpha A \Delta T \quad (7.171)$$

gdzie  $\Delta T = T_s - T_{sc}$ .

Jeżeli para jest nasycona i nie zachodzi schładzanie kondensatu, to z porównania równań (7.169) i (7.171) otrzymujemy

$$\alpha = \frac{\dot{m}_p r}{A \Delta T} = \frac{\dot{m}_k r}{A \Delta T} \quad (7.172)$$

a ponieważ w równaniu tym  $\dot{m}_k / A = \dot{m}_k''$ , więc otrzymujemy

$$\dot{m}_k'' = \frac{\alpha \Delta T}{r} \quad (7.173)$$

Z porównania równań (7.170) i (7.171) otrzymujemy natomiast

$$\alpha = \frac{\lambda_c}{s} \quad (7.174)$$

Ogólnie jest to zależność funkcyjna

$$\alpha = f(\lambda_c, s) \quad (7.175)$$

Ponieważ średnia grubość warstwy kondensatu zależy od intensywności spływu, właściwości fizykochemicznych cieczy oraz od parametrów geometrycznych ściany

$$s = f(\dot{m}_k'', h, \eta_c, \rho_c, g) \quad (7.176)$$

więc po podstawieniu tego równania do wzoru (7.175) otrzymujemy ogólną zależność funkcyjną

$$\alpha = f(\dot{m}_k'', \lambda_c, \eta_c, \rho_c, h, g) \quad (7.177)$$

Uwzględniając równanie (7.173), po podstawieniu otrzymujemy

$$\alpha = f(\eta_c, \lambda_c, \rho_c, r, \Delta T, h, g) \quad (7.178)$$

Zgodnie z twierdzeniem Buckinghama mamy 8 zmiennych wymiarowanych i 4 zasadnicze wymiary, a zatem zależność ogólną można przedstawić jako związek 4 modułów bezwymiarowych.

Na podstawie analizy wymiarowej otrzymuje się równanie

$$\frac{\alpha h}{\lambda_c} = C \left( \frac{\eta_c c_p}{\lambda_c} \right)^a \left( \frac{r}{c_p \Delta T} \right)^b \left( \frac{gh^3 \rho_c^2}{\eta_c^2} \right)^c \quad (7.179)$$

czyli

$$Nu = C Pr^a K^b Ga^c \quad (7.180)$$

$Pr$  jest liczbą Prandtla,  $Ga$  liczbą Galileusza dla skroplin,  $K$  zaś liczbą kondensacji.

Doświadczalnie wykazano, że zgodnie z wynikami analitycznymi Nusselta, wykładniki potęgowe są sobie równe:  $a = b = c$ .

Stąd równania (7.179) i (7.180) dają związek

$$\frac{\alpha h}{\lambda_c} = C \left( \frac{gh^3 \rho_c^2 r}{\lambda_c \eta_c \Delta T} \right)^{1/4} = C C_v^{1/4} \quad (7.181)$$

lub

$$\alpha = C \sqrt[4]{\frac{r \rho_c^2 \lambda_c^3 g}{\eta_c h \Delta T}} \quad (7.182)$$

W korelacji (7.181) dla rur poziomych liczba Nusselta  $Nu = \alpha d / \lambda_c$ ,  $C_v$  natomiast jest liczbą skraplania Nusselta.

Wartości stałej  $C$ , zależnej od kształtu i położenia powierzchni, na której zachodzi skraplanie, zestawiono w tabeli 7.12.

Tabela 7.12. Współczynnik  $C$  w równaniu (7.181)

| Powierzchnia                                  | $C$             | Uwagi              |
|---|-----------------|--------------------|
| Ściana pionowa, rura pionowa                  | 1,13            | $h$ – wysokość     |
| Rura pozioma, skraplanie zewnętrzne           | 0,725           | $h = d$ – średnica |
| $N$ rur poziomych jedna pod drugą             | $0,725N^{-1/4}$ |                    |
| Rura żebrowana pozioma, skraplanie zewnętrzne | 0,689           | $h = D$ zastępcze  |

Hobler [4] przekształcił równanie (7.181) przez wprowadzenie zastępczego wymiaru poprzecznego spływającej warstwy kondensatu  $\mathcal{G}_z = (\nu_c^2/g)^{1/3}$ . Otrzymał on wyrażenie na liczbę skraplania

$$C_v = \frac{h^3 \rho_c^2 r g}{\lambda_c \eta_c \Delta T} = \frac{r}{c_c \Delta T} \frac{\eta_c c_c}{\lambda_c} \left( \frac{h}{\mathcal{G}_z} \right)^3 \quad (7.183)$$

czyli

$$C_v = K Pr_c \left( \frac{\mathcal{G}_z}{h} \right)^{-3} \quad (7.184)$$

Po podstawieniu tego równania do równania (7.181) przyjmie ono postać

$$\frac{\alpha h}{\lambda_c} = CK^{1/4} Pr_c^{1/4} \left( \frac{\mathcal{G}_z}{h} \right)^{-3/4} \quad (7.185)$$

a po obustronnym pomnożeniu przez  $\mathcal{G}_z/h$  otrzymamy

$$\frac{\alpha \mathcal{G}_z}{\lambda_c} = CK^{1/4} Pr_c^{1/4} \left( \frac{\mathcal{G}_z}{h} \right)^{-3/4} \frac{\mathcal{G}_z}{h} \quad (7.186)$$

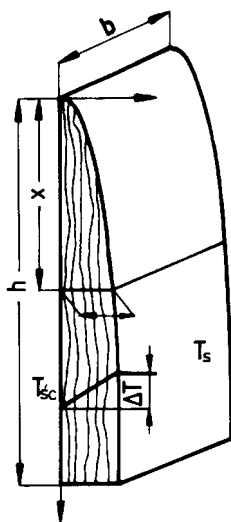
W równaniu tym występuje zastępcza liczba Nusselta, którą zapiszemy w postaci

$$Nu_z = CK^{1/4} Pr_c^{1/4} \left( \frac{\mathcal{G}_z}{h} \right)^{1/4} \quad (7.187)$$

### 7.9.1. Teoria Nusselta

Nusselt już w 1916 r. wyprowadził równanie określające współczynnik wnikania ciepła podczas kondensacji filmowej. Analizował spływającą błonkę skroplin według

schematu przedstawionego na rys. 7.31. Grubość filmu  $s = f(x)$  jest zmienna; dla  $x = 0$  (u góry) jest równa zero i zwiększa się ku dołowi.



Rys. 7.31. Spływ warstwy skroplin

Na podstawie równania Fouriera gęstość strumienia ciepła przewodzonego przez warstwę skroplin w odległości  $x$  wynosi:

$$q_x = \frac{\lambda_c}{s} (T_s - T_{sc}) = \frac{\lambda_c}{s} \Delta T \quad (7.188)$$

Ten sam strumień ciepła wnikający do ścianki opisuje równanie Newtona

$$q_x = \alpha_x (T_s - T_{sc}) = \alpha_x \Delta T \quad (7.189)$$

Z porównania tych równań wynika definicja lokalnego współczynnika wnikania ciepła:

$$\alpha_x = \frac{\lambda_c}{s} \quad (7.190)$$

Najtrudniejsze było określenie lokalnej grubości filmu. Przyjęto, że temperatura ścianki oraz różnica temperatury są stałe na całej wysokości ściany. Aby wyznaczyć rozkład prędkości, analizowano wycinek różniczkowej objętości o wysokości  $dx$  i szerokości  $dy$  oraz skończonej długości  $b$  (rys. 7.32). Podlega on działaniu sił ciężkości  $F_c$  oraz sił tarcia wewnętrznego  $F_t$ . Dla ruchu jednostajnego można przyjąć, że

$$d^2 F_c + d^2 F_t = 0 \quad (7.191)$$



Poszczególne człony równania (7.191) są następujące:

- różniczkowa siła ciężkości

$$d^2 F_c = \gamma_c b dx dy \quad (7.192)$$

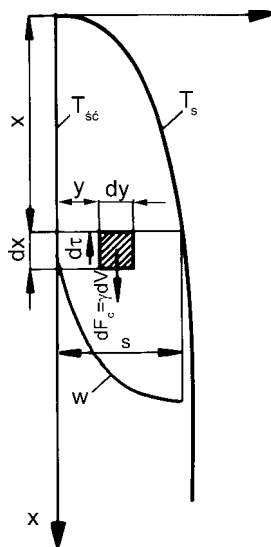
- różniczkowa siła tarcia działająca na wycinek objętości

$$d^2 F_t = b dx d\tau \quad (7.193)$$

- ciężar właściwy skroplin

$$\gamma_c = g \rho_c \quad (7.194)$$

W równaniu (7.193) naprężenie styczne  $\tau$  jest siłą tarcia działającą na jednostkę powierzchni.



Rys. 7.32. Rozkład prędkości i naprężeń w warstwie skroplin

Następnie analizuje się zależność naprężenia stycznego od właściwości fizykochemicznych i prędkości płynu. Z równania (7.193) otrzymujemy

$$d\tau = \frac{d^2 F_t}{b dx} \quad (7.195)$$

z równania (7.191) mamy natomiast

$$d^2 F_t = -d^2 F_c \quad (7.196)$$

Po podstawieniu do równania (7.195) i przekształceniach otrzymuje się następujące równanie

$$d\tau = \frac{-d^2 F_c}{bdx} = -\gamma_c dy \quad (7.197)$$

Pochodna naprężenia stycznego  $\tau$  względem  $y$  wynosi

$$\frac{d\tau}{dy} = -\gamma_c \quad (7.198)$$

Po uwzględnieniu prawa Newtona

$$\tau = \eta_c \frac{dw}{dy} \quad (7.199)$$

otrzymuje się przez zróżniczkowanie

$$\frac{d\tau}{dy} = \eta_c \frac{d^2 w}{dy^2} \quad (7.200)$$

Z porównania równań (7.198) i (7.200) otrzymujemy wyrażenie

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = -\frac{\gamma_c}{\eta_c} \quad (7.201)$$

które całkujemy dwukrotnie względem  $y$  i otrzymujemy wzór na rozkład prędkości w filmie cieczy

$$w = -\frac{\gamma_c}{2\eta_c} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (7.202)$$

$C_1, C_2$  są stałymi całkowania. Wyznaczamy je z warunków brzegowych:

- Przy ścianie, gdy  $y = 0$ ,  $w = 0$ , zatem  $C_2 = 0$ .
- Na powierzchni błonki kondensatu  $y = s$  oraz  $dw/dy = 0$ . Po zróżniczkowaniu równania rozkładu prędkości (7.202) względem  $y$  i przyrównaniu do zera otrzymuje się wyrażenie

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\gamma_c}{\eta_c} y + C_1 = 0 \quad (7.203)$$

z którego wyznaczamy stałą  $C_1$

$$C_1 = \frac{\gamma_c}{\eta_c} s \quad (7.204)$$

Po podstawieniu wyrażenia na stałą  $C_1$  oraz  $C_2 = 0$  do równania (7.202) otrzymujemy równanie określające profil prędkości:

$$w = -\frac{\gamma_c}{2\eta_c}y^2 + \frac{\gamma_c s}{\eta_c}y \quad (7.205)$$

Równanie średniej prędkości strugi kondensatu wyprowadza się z całki:

$$w_{sr} = \frac{1}{s} \int_0^s w dy = \frac{1}{s} \left( -\frac{\gamma_c}{2\eta_c} \frac{s^3}{3} + \frac{\gamma_c s}{\eta_c} \frac{s^2}{2} \right) = \frac{\gamma_c}{3\eta_c} s^2 \quad (7.206)$$

Następnie ustalamy związek przyrostu masowego strumienia kondensatu z grubością filmu.

Z definicji masowego natężenia przepływu mamy

$$\dot{m} = b s w_{sr} \rho_c \quad (7.207)$$

po podstawieniu wzoru na średnią prędkość otrzymujemy

$$\dot{m} = \frac{\gamma_c \rho_c b}{3\eta_c} s^3 = \frac{g \rho_c^2 b}{3\eta_c} s^3 \quad (7.208)$$

Po zróżniczkowaniu tego równania otrzymuje się wyrażenie na przyrost strumienia masowego na drodze  $dx$

$$d\dot{m} = \frac{g \rho_c^2 b}{\eta_c} s^2 ds \quad (7.209)$$

Przyrost ten następuje w wyniku skroplenia pary przez odebranie strumienia ciepła o gęstości  $q_x$ , co można zapisać następująco:

$$d\dot{m} = b dx \dot{m}'' = \frac{q_x}{r} b dx \quad (7.210)$$

Po wprowadzeniu równania Fouriera (7.188) otrzymujemy

$$d\dot{m} = \frac{\lambda_c}{s} \frac{b}{r} \Delta T dx \quad (7.211)$$

Z porównania równań (7.209) i (7.211) wynika związek

$$dx = \frac{g \rho_c^2 r}{\lambda_c \eta_c \Delta T} s^3 ds \quad (7.212)$$

Po scałkowaniu obu stron równania otrzymuje się

$$x = \frac{g \rho_c^2 r}{4 \lambda_c \eta_c \Delta T} s^4 + C \quad (7.213)$$

Ponieważ dla  $x = 0$  grubość błonki  $s = 0$ , więc stała  $C = 0$ .

Po przekształceniu równania (7.213) otrzymuje się wzór na grubość filmu

$$s = \left( \frac{4 \lambda_c \eta_c \Delta T}{g \rho_c^2 r} x \right)^{1/4} \quad (7.214)$$

a po podstawieniu tego wyrażenia do równania (7.190) wzór na lokalny współczynnik wnikania ciepła

$$\alpha_x = \left( \frac{g \rho_c^2 r \lambda_c^3}{4 \eta_c \Delta T x} \right)^{1/4} \quad (7.215)$$

Średni współczynnik wnikania ciepła dla ściany o wysokości  $h$  obliczamy jako średnią całkową

$$\alpha = \frac{1}{h} \int_0^h \alpha_x dx \quad (7.216)$$

Przyjmując wyrażenie na stałą

$$A = \left( \frac{g \rho_c^2 r \lambda_c^3}{4 \eta_c \Delta T} \right)^{1/4} \quad (7.217)$$

w wyniku całkowania otrzymujemy równanie

$$\alpha = A \frac{1}{h} \int_0^h x^{-1/4} dx = \frac{A}{3/4 h} h^{3/4} = \frac{4}{3} \frac{A}{h^{1/4}} = \frac{4}{3} \left( \frac{g \rho_c^2 r \lambda_c^3}{4 \eta_c \Delta T h} \right)^{1/4} \quad (7.218)$$

którego postać końcowa nazywa się wzorem Nusselta

$$\alpha = 0,943 \left( \frac{g \rho_c^2 r \lambda_c^3}{\eta_c \Delta T h} \right)^{1/4} \quad (7.219)$$

Na podstawie badań doświadczalnych stałą  $C$  w tym równaniu należy skorygować do wartości 1,13. Według Walta i Kroegera [13] spływ skroplin odbywa się ruchem falowym, co wymaga wprowadzenia przelicznika 1,15.

W przypadku skraplania na ścianie nachylonej pod kątem  $\phi$  do poziomu równanie (7.192) skorygujemy następująco

$$d^2 F_c = \gamma_c \sin \phi dx dy \quad (7.220)$$

Uwzględnienie tego równania prowadzi do określenia współczynnika korekcyjnego dla kąta  $\phi$ :

$$\alpha_\phi = \alpha \sqrt[4]{\sin \phi} \quad (7.221)$$

$\alpha$  jest współczynnikiem wnikania ciepła dla ściany pionowej.

Podczas skraplania pary na rurze poziomej zewnętrznej powierzchnię rury można traktować jak płaszczyzny wielkości różniczkowej, nachylone pod kątem  $\phi$ . Po scałkowaniu w zakresie  $0 < \phi < 180^\circ$  otrzymamy wzór

$$\alpha = 0,725 \left( \frac{g \rho_c^2 r \lambda_c^3}{\eta_c \Delta T d} \right)^{1/4} \quad (7.222)$$

w którym  $d$  jest średnicą zewnętrzną rury. Wzór ten został potwierdzony doświadczalnie.

### 7.9.2. Wpływ intensywności skraplania na wnikanie ciepła

Aby określić zależność współczynnika wnikania ciepła od intensywności spływu skroplin, należy sformułować bilans energii dla kondensatu. Bilans ilości ciepła dla rury poziomej ma postać

$$\dot{m}r = \alpha \Delta T \pi d L \quad (7.223)$$

Ze wzoru (7.222) zaś otrzymujemy

$$\Delta T = \left( \frac{\alpha}{0,725} \right)^{-4} \frac{g \rho_c^2 r \lambda_c^3}{\eta_c d} \quad (7.224)$$

Po podstawieniu tego równania do równania bilansowego (7.223) i przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{\alpha}{\lambda_c} \left( \frac{\eta_c^2}{\rho_c^2 g} \right)^{1/3} = 0,959 \left( \frac{\dot{m}}{\eta_c L} \right)^{-1/3} \quad (7.225)$$

lub inaczej zapisaną zależność modułów bezwymiarowych

$$\frac{\alpha \vartheta_z}{\lambda_c} = 1,51 \left( \frac{4 \Gamma'}{\eta_c} \right)^{-1/3} \quad (7.226)$$

gdzie  $\Gamma' = \dot{m} / L$ .

Z bilansu energii dla kondensacji na ścianie pionowej o wysokości  $h$  wynika:

$$\dot{m}r = \alpha \Delta T b h \quad (7.227)$$

Ponieważ ze wzoru (7.222) otrzymujemy wyrażenie

$$\Delta T = \left( \frac{\alpha}{0,943} \right)^{-4} \frac{g \rho_c^2 r \lambda_c^3}{\eta_c h} \quad (7.228)$$

więc po podstawieniu do równania bilansowego (7.223) i po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$\frac{\alpha}{\lambda_c} \left( \frac{\eta_c^2}{\rho_c^2 g} \right)^{1/3} = 0,925 \left( \frac{\dot{m}}{\eta_c b} \right)^{-1/3} \quad (7.229)$$

lub w postaci zależności kryterialnej

$$\frac{\alpha \mathcal{G}_z}{\lambda_c} = 0,925 \left( \frac{\Gamma}{\eta_c} \right)^{-1/3} = 1,47 \left( \frac{4\Gamma}{\eta_c} \right)^{-1/3} \quad (7.230)$$

w którym  $\Gamma = \dot{m}/b$ .

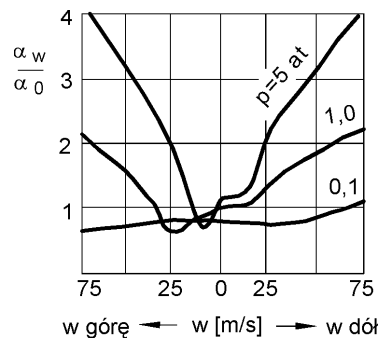
Porównanie otrzymanych zależności dla ściany poziomej (7.222) i dla ściany pionowej (7.119) daje możliwość oceny intensywności wnikania ciepła w zależności od ustawienia ściany. Z podzielenia tych wzorów stronami otrzymujemy

$$\frac{\alpha_{\text{poziom}}}{\alpha_{\text{pion}}} = 0,772 \left( \frac{L}{d} \right)^{1/4} \quad (7.231)$$

Długość rury  $L$  jest dla rury pionowej wysokością  $h$ .

### 7.9.3. Wpływ prędkości i kierunku ruchu pary na wnikanie ciepła podczas kondensacji filmowej

Zależność współczynników wnikania ciepła od prędkości i kierunku ruchu pary podczas kondensacji filmowej występuje dopiero dla większych wartości prędkości

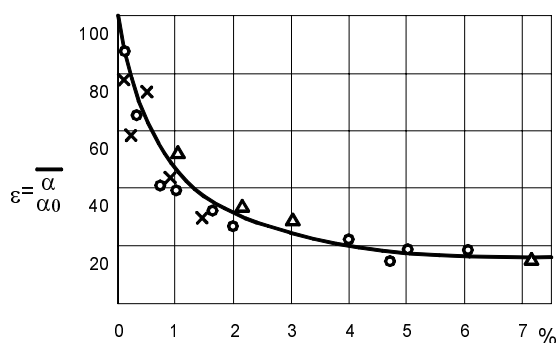


Rys. 7.33. Zależność  $\alpha_w/\alpha_0 = f(w)$ :  $\alpha_w$  – współczynnik wnikania dla danej prędkości pary,  $\alpha_0$  – współczynnik wnikania dla prędkości zero

Wynika to z tarcia wewnętrznego, które hamuje warstwę kroplin podczas ruchu przeciwnieprądowego pary lub ją przyspiesza podczas przepływu współprądowego (w dół ściany). Zależność współczynnika wnikania ciepła od kierunku przepływu pary i jej prędkości dla trzech różnych wartości ciśnienia pokazano na rys. 7.33. Jak widać, dopiero pod ciśnieniem  $0,980665 \cdot 10^5$  Pa i dla prędkości pary większej od 13 m/s.  $\alpha_w/\alpha_0$  przekracza 1. Pod ciśnieniem  $p = 4,903325 \cdot 10^5$  Pa stosunek ten jest dwukrotnie większy niż pod ciśnieniem normalnym.

#### 7.9.4. Wpływ obecności gazów obojętnych w parze na współczynnik wnikania ciepła

Obecność gazów inertyjnych powoduje zmniejszenie współczynników wnikania ciepła. Ruch pary ku warstwie kroplin jest utrudniony, ponieważ musi ona dyfundować przez warstwę gazów obojętnych. Na rysunku 7.34 pokazano zależność stosunku  $\alpha_p$  dla pary zawierającej powietrze do wartości tego współczynnika dla czystej pary w zależności od zawartości powietrza w parze.



Rys. 7.34. Zależność  $\varepsilon = \alpha_w/\alpha_0 = f(w)$ :  $\alpha_w$  dotyczy pary zawierającej  $w$  % wag. masowych powietrza,  $\alpha_0$  dotyczy czystej pary

#### 7.9.5. Wnikanie ciepła podczas kondensacji wewnątrz poziomych rur i wężownic

Obliczanie współczynników wnikania ciepła podczas kondensacji wewnątrz poziomych rur i wężownic wymaga uwzględnienia faktu, że warunki są znacznie trudniejsze. Skropliny zbierają się na dnie rury. Hobler [4] proponuje zastosowanie korelacji Kutateladze:

$$\frac{\alpha \varrho_z}{\lambda_c} = 0,05 Re_z^{0,4} Pr^{1/3} \left( \frac{d}{L} \right)^{0,2} \quad (7.232)$$

gdzie  $Re_z = m/(\pi d \eta_c)$ .

### 7.9.6. Obliczenia uproszczone dla kondensacji filmowej

Biorąc pod uwagę, że parametry  $\rho_c$ ,  $\eta_c$ ,  $\lambda_c$  we wzorach obliczeniowych należy przyjmować w odniesieniu do średniej temperatury kropli, ciepło parowania  $r$  zaś do temperatury pary nasyconej dla danego ciśnienia pary, opracowano wzory uproszczone określające współczynniki wnikania ciepła.

Współczynnik ten dla ściany pionowej obliczamy ze wzoru

$$\alpha = C \varphi r^{1/4} (h\Delta T)^{-1/4} \quad (7.233)$$

Dla rur poziomych należy przyjąć  $h = d$ . Wartość współczynnika  $C$  dobieramy na podstawie podanych wcześniej wzorów. Wartości  $\varphi$  i  $r^{1/4}$  odczytujemy z tabeli 7.13.

Tabela. 7.13. Wartości  $\varphi$  i  $r^{1/4}$  dla pary wodnej

| $t, ^\circ\text{C}$ | 0     | 20    | 40    | 60    | 80    | 100   | 120   | 140   | 160   | 180   | 200   |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\varphi$           | 174,9 | 214,0 | 247,2 | 276,1 | 299,3 | 318,1 | 332,5 | 342,7 | 347,0 | 349,9 | 351,3 |
| $r^{1/4}$           | 39,66 | 39,50 | 39,42 | 39,25 | 39,01 | 38,77 | 38,61 | 38,29 | 38,05 | 37,65 | 37,32 |

### 7.10. Warunki parowania i wrzenia cieczy

Proces parowania cieczy przebiega na granicy faz. Zachodzi on w całym zakresie temperatury; w temperaturze niższej od temperatury krzepnięcia cieczy przebiega proces sublimacji, od temperatury krzepnięcia do temperatury wrzenia mówimy o parowaniu cieczy, w temperaturze wrzenia – o wrzeniu cieczy.

W fizyce cieczy przyjmuje się, że proces wrzenia przebiega przy temperaturze wrzenia cieczy równej temperaturze pary nasyconej ( $T_{wrz} = T_s$ ), co jest związane z warunkiem, że prężność pary nasyconej tej cieczy jest równa ciśnieniu zewnętrznemu. W rzeczywistych warunkach warstwa cieczy pewnej grubości wywiera ciśnienie hydrostatyczne ( $P_h = gh\rho$ ) i aby nastąpiło jej wrzenie, musi być spełniony warunek, że prężność pary nasyconej cieczy  $p_A^0$  jest większa od sumy ciśnienia zewnętrznego  $P_z$  i ciśnienia hydrostatycznego  $P_h$ :

$$p_A^0 > P = P_z + P_h \quad (7.234)$$

Spełnienie tego warunku jest związane z przegrzaniem cieczy.

Proces parowania przebiega z kolei w takiej temperaturze, że prężność pary nasyconej danej cieczy A jest mniejsza lub równa ciśnieniu zewnętrznemu

$$p_A^0 \leq P_z \quad (7.235)$$



Ciecz wieloskładnikowa wrze w temperaturze, w której suma prężności parcyjnych jej składników przewyższa ciśnienie zewnętrzne wokół pęcherzyków pary

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i > P = P_z + P_h \quad (7.236)$$

Dla procesu parowania mieszaniny cieczy musi być natomiast spełniony warunek

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i \leq P_z \quad (7.237)$$

Proces parowania cieczy ma podstawowe znaczenie w takich operacji jednostkowych, jak destylacja molekularna lub suszenie.

### 7.10.1. Szybkość parowania cieczy

W procesie parowania cząsteczki cieczy znajdujące się tuż przy granicy faz przechodzą do fazy gazowej, część z nich natomiast kondensuje i przechodzi do fazy ciekłej. W stanie równowagi, gdy ciśnienie cząstkowe składnika w fazie parowej jest równe jego prężności pary nasyconej, efektywna szybkość parowania jest równa zero.

Szybkość parowania można określić na podstawie teorii kinetycznej gazów w odniesieniu zarówno do fazy ciekłej, jak i parowej.

Ułamek ogólnej liczby cząsteczek gazu doskonałego o danej prędkości określa funkcja rozkładu energii kinetycznej cząsteczek Maxwella–Boltzmana:

$$\frac{N}{N_c} = \left( \frac{kT}{2\pi m} \right)^{0,5} e^{-mu^2 / 2kT} \quad (7.238)$$

gdzie:  $N$  – liczba cząsteczek przechodząca w ciągu 1 s z fazy ciekłej do fazy parowej na powierzchni 1 cm<sup>2</sup>,  $N_c$  – liczba cząsteczek w 1 cm<sup>3</sup> cieczy,  $m$  – masa cząsteczki w kg,  $u$  – minimalna (graniczna) wartość składowej prędkości w kierunku prostopadłym do powierzchni cieczy, dla której zachodzi przejście cząsteczki do fazy parowej, w m/s,  $k$  – stała Boltzmana ( $k = R/N_0 = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K),  $R$  – stała gazowa (8,31432 J·mol<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>),  $N_0$  – stała Avogadra (6,022·10<sup>23</sup> mol<sup>-1</sup>).

Ułamek liczby cząsteczek podlegających kondensacji na 1 cm<sup>2</sup> powierzchni cieczy w ciągu 1 s jest równy

$$\frac{N'}{N_g} = \left( \frac{kT}{2\pi m} \right)^{0,5} \quad (7.239)$$

gdzie  $N_g$  jest liczbą cząsteczek w 1 cm<sup>3</sup> fazy parowej.

Jeżeli założymy, że faza parowa jest gazem doskonałym, to

$$N_g = n_g N_0 = \frac{pV}{RT} N_0 = \frac{p}{kT} \quad (7.240)$$

gdzie:  $n_g$  – liczba moli w  $1 \text{ cm}^3$  fazy parowej,  $V = 1 \text{ cm}^3$ ,  $k = R/N_0$ .

Po podstawieniu do równania (7.239) otrzymujemy wyrażenie

$$N' = \frac{p}{kT} \left( \frac{kT}{2\pi m} \right)^{0,5} \quad (7.241)$$

Efektywna liczba cząsteczek cieczy opuszczających powierzchnię  $1 \text{ cm}^2$  w ciągu 1 s, stanowiąca szybkość parowania, jest równa różnicy

$$-\frac{1}{A} \frac{dN}{d\tau} = N - N' = \left( \frac{kT}{2\pi m} \right)^{0,5} \left( N_c e^{-mu^2/2kT} - \frac{p}{kT} \right) \quad (7.242)$$

gdzie:  $A$  – powierzchnia cieczy w  $\text{cm}^2$ ,  $dN/d\tau$  – szybkość parowania.

W stanie równowagi dynamicznej efektywna szybkość parowania jest równa zero, więc

$$\frac{p^0}{kT} = N_c e^{-mu^2/2kT} \quad (7.243)$$

Po podstawieniu tej zależności do równania (7.242) otrzymujemy wyrażenie na szybkość parowania

$$-\frac{1}{A} \frac{dN}{d\tau} = (2\pi mkT)^{-0,5} (p^0 - p) \quad (7.244)$$

W przypadku odparowywania w próżni, gdy  $p = 0$ , szybkości parowania jest maksymalna, równa iloczynowi:  $p^0(2\pi mkT)^{-0,5}$ .

## 7.11. Wnikanie ciepła podczas wrzenia cieczy

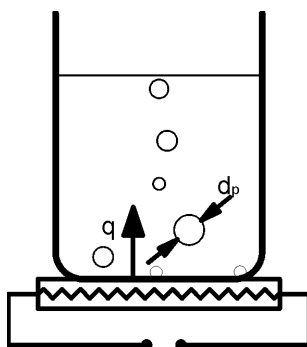
Wrzenie cieczy ma podstawowe znaczenie w rozmaitych urządzeniach, takich jak wyparki, kotły parowe oraz parowniki urządzeń chłodniczych. Warunkiem osiągnięcia stanu wrzenia cieczy jest doprowadzenie dostatecznej ilości ciepła, aby temperatura ścianki była wyższa od temperatury nasycenia pary pod danym ciśnieniem. Podczas wrzenia para tworzy się w całej objętości cieczy, zwłaszcza na powierzchni ściany grzejnej w postaci pęcherzyków (rys. 7.35). Ich liczba, kształt i szybkość narastania zależą od intensywności ogrzewania i właściwości fizykochemicznych cieczy i pary, ale również od szorstkości powierzchni i zdolności zwilżania jej przez ciecz. Pęcherzyki powstające przy ścianie grzejnej mają kształt kulisty, po oderwaniu się unoszą

się do góry pod działaniem siły wyporu, ich objętość rośnie i ulegają spłaszczeniu; każdy z nich kształtem przypomina grzyb. Para zamknięta w pęcherzyku ma wyższe ciśnienie od ciśnienia otaczającej cieczy. Nadwyżka ciśnienia  $\Delta p = p_r - p$  zależy od promienia pęcherzyka  $r$  i od napięcia powierzchniowego cieczy  $\sigma$ . Jeżeli założymy, że pęcherzyk ma kształt kulisty, to w warunkach równowagi sił rozrywających pęcherzyk i sił napięcia powierzchniowego mamy

$$\pi r^2 (p_r - p) = 2\pi r \delta \quad (7.245)$$

i nadciśnienie wewnątrz pęcherzyka wynosi

$$p_r - p = \frac{2\delta}{r} \quad (7.246)$$



Rys. 7.35. Schemat wnikania ciepła podczas wrzenia cieczy

Pęcherzyki powstają na rozmaitych krzywiznach na ścianie grzejnej lub na drobnych ciałach stałych, stanowiących miejsca zarodkowe. Powstanie i wzrost pęcherzyka wymaga spełnienia warunku, że  $dp > 2\sigma/r$ . Uwzględnivszy poprawkę Thomsona na zwiększenie ciśnienia nasycenia nad zakrzywionym meniskiem oraz że  $dp \cong (dp/dt)_n \Delta T$  równanie określające promień  $r$  zapiszemy następująco:

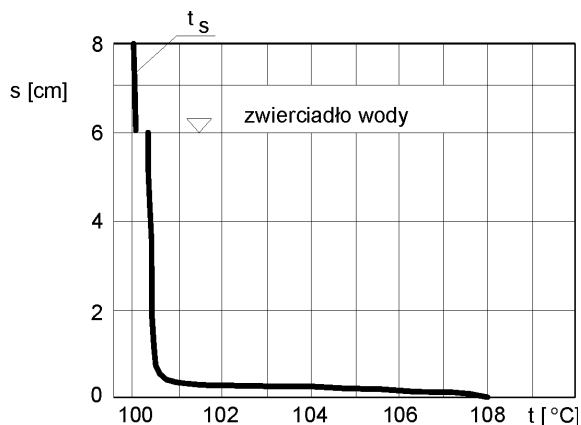
$$r = \frac{2\delta}{\left(\frac{dp}{dt}\right)_n \Delta T} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} \quad (7.247)$$

gdzie:  $\rho', \rho''$  – gęstość cieczy i pary nasyconej pod danym ciśnieniem cieczy,  $\Delta T$  – nadwyżka temperatury cieczy nad temperaturą nasycenia. Wielkość  $(dp/dt)_n$  można obliczać z równania Clausiusa–Clapeyrona

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_n = \frac{r\gamma'\rho''}{T_n(\rho' - \rho'')} \quad (7.248)$$

gdzie ciężar właściwy w stanie nasycenia  $\gamma' = g\rho$ .

Transport ciepła odbywa się w ten sposób, że strumień ciepła wnika od ściany grzejnej do cieczy, a następnie na wewnętrznej powierzchni pęcherzyków w postaci ciepła parowania; ciecz musi być zatem przegrzana. Ze wzrostem obciążenia cieplnego powierzchni grzejnej zwiększa się przegrzanie cieczy, ale rośnie liczba i częstość odrywania się pęcherzyków. Przykładowy rozkład temperatury wody w zależności od odległości od ściany grzejnej pokazano na rys. 7.36. Przeciętnie temperatura wody jest większa od temperatury nasycenia par o ok. 0,4–0,8 K. Jednak warstwa cieczy stykającej się bezpośrednio ze ścianą może mieć temperaturę wyższą nawet o 10 K. W tej warstwie, która jest pewnego rodzaju warstwą graniczną, powstają pęcherzyki pary.



Rys. 7.36. Rozkład temperatury wody podczas wrzenia pod ciśnieniem  $P = 1,013 \times 10^5$  Pa (1 atm)

Kształt pęcherzyka powstającego przy ścianie grzejnej zależy od kąta zwilżania  $\theta$  cieczy. Przyjmuje się, że ciecz dobrze zwilża powierzchnię, gdy  $\theta < 90^\circ$ . Dla wody  $\theta = 45^\circ$ . Średnicę pęcherzyka pary w chwili jego odrywania się od ścianki można obliczyć ze wzoru

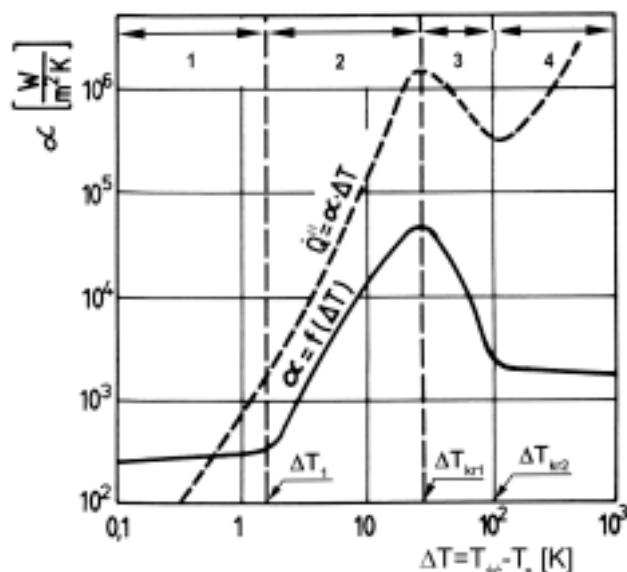
$$d_0 = 0,851\theta \sqrt{\frac{2\delta}{g(\rho' - \rho'')}} \quad \text{m} \quad (7.249)$$

Pierwiastek tego wyrażenia jest nazywany stałą Laplace'a  $b$ . Dla wody w temperaturze  $100^\circ\text{C}$   $\theta = 0,7854$  rad,  $b = 3,54$  mm, średnicę pęcherzyka  $d_0 = 2,37$  mm.

Systematyczne badania Jakoba i Fritza, a później Michiejewa pokazały, że współczynnik wnikania ciepła znacznie wzrasta ze zwiększeniem szorstkości powierzchni grzejnej. Jest to czynnik komplikujący analityczne opracowanie tego zagadnienia.

Analiza wyników badań eksperymentalnych wykazała, że współczynnik wnikania ciepła zależy od obciążenia cieplnego powierzchni grzejnej. Obydwie wielkości wygodnie jest interpretować w zależności od założonej różnicy temperatury ścianki i temperatury nasycenia pary (rys. 7.37). Można wyróżnić trzy charakterystyczne obszary wrzenia zaza-

czony na rysunku: 1 – wrzenie w warunkach swobodnego ruchu cieczy, 2 – wrzenie pęcherzykowe, 3 – nietrwałe wrzenie filmowe, 4 – trwałe wrzenie filmowe.



Rys. 7.37. Zależność współczynnika wnikania ciepła  $\alpha$  i gęstości strumienia ciepła  $q$  od różnicy temperatury  $\Delta T$  dla wrzącej wody pod ciśnieniem  $P = 1,013 \cdot 10^5$  Pa (1 atm)

W warunkach bardzo małego obciążenia cieplnego  $q$  (2330–4650 W/m<sup>2</sup> na ścianach pionowych, 5820–11630 W/m<sup>2</sup> na ścianach poziomych) współczynnik wnikania ciepła w niewielkim stopniu zależy od obecności i ruchu pęcherzyków. Różnica temperatury wynosi do 5 K i ruch ciepła przebiega w wyniku konwekcji swobodnej.

Dla tego obszaru King [4] opracował następujące zależności korelacyjne:

- dla powierzchni pionowej

$$\frac{\alpha \vartheta_z}{\lambda_c} = 0,56 V^{1/4} Pr^{1/4} \left( \frac{\vartheta_z}{h} \right)^{1/4} \quad (7.250)$$

- dla powierzchni poziomej

$$\frac{\alpha \vartheta_z}{\lambda_c} = 0,13 V^{1/3} Pr^{1/3} \quad (7.251)$$

gdzie:  $V = \beta \Delta T$ ,  $Pr = \eta c_p / \lambda$ ,  $\vartheta_z = (\eta^2 / g \rho^2)^{1/3}$ .

Jak widać, postać modułów bezwymiarowych jest taka sama jak dla konwekcji naturalnej, ale poszczególne wielkości odnoszą się do cieczy.

Powyżej pewnej gęstości strumienia cieplnego  $q$  zwiększa się liczba i częstotliwość odrywania się pęcherzyków. Powoduje to zwiększoną burzliwość warstewki granicznej cieczy oraz intensyfikację wnikanie ciepła. Następuje znaczny wzrost zarówno współ-

czynników wnikania ciepła  $\alpha$ , jak i gęstości strumienia cieplnego  $q$  (rys. 7.37). Ten obszar wrzenia nazwano wrzeniem pęcherzykowym. Zakres wrzenia pęcherzykowego odpowiada różnicy temperatury (dla wody)  $5 < \Delta T < 25$  K. Gdy różnica temperatury przybiera bardzo duże wartości (od 25 K dla wody), liczba tworzących się pęcherzyków jest tak duża, że łączą się one tuż przy ścianie grzejnej, tworząc film (błonkę parową). Powoduje to wprowadzenie dodatkowego oporu przewodzenia ciepła przez błonkę pary, co zmniejsza zarówno wartość współczynnika wnikania ciepła, jak gęstość strumienia ciepła, nawet gdy nadal zwiększa się różnica temperatury. Przejście od wrzenia pęcherzykowego do wrzenia filmowego następuje dla pewnej charakterystycznej dla danej cieczy różnicy temperatury, zwanej temperaturą krytyczną.

Dla tego obszaru wrzenia opracowano wiele zależności empirycznych. Ogólnie sprowadzają się one do zależności

$$\alpha = f(q) \quad (7.252)$$

lub

$$\alpha = f(\Delta T) \quad (7.253)$$

Do obliczeń tych współczynników Michiejew [4] zaleca równania Krużylina, wyprowadzone teoretycznie i uściślone doświadczalnie w odniesieniu do wrzenia cieczy dobrze zwilżających powierzchnię w dużej objętości. Mają one postać zależności modułów bezwymiarowych. Dla wnikania ciepła jest to równanie

$$Nu = 0,075 K_q^{0,7} K_u^{1/3} Pr^{-0,5} \quad (7.254)$$

dla krytycznej gęstości strumienia ciepła zaś

$$K_q = 995 K_u^{-0,66} Ar^{1/4} Pr^{0,5} \quad (7.255)$$

W równaniach tych mamy następujące moduły:

- liczba Nusselta

$$Nu = \frac{\alpha \delta}{\lambda} \quad (7.256)$$

gdzie  $\delta$  – wymiar charakterystyczny, proporcjonalny do wielkości pęcherzyka w chwili odrywania się od ścianki, określony wzorem

$$\delta = \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma' - \gamma''}} = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}} \quad (7.257)$$

- liczba Archimedesesa

$$Ar = \frac{g \delta^3 \rho'^2}{\eta^2} \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \quad (7.258)$$

- liczba Prandtla dla cieczy

$$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} \quad (7.259)$$

- $K_q$  – liczba znamienna, związana z liczbą czynnych miejsc powstawania pęcherzyków

$$K_q = \frac{p' \delta^2}{\lambda \sigma} \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} q \quad (7.260)$$

gdzie  $p'$  jest pochodną na linii nasycenia według równania Clausiusa–Clapeyrona

$$p' = \left( \frac{dp}{dt} \right)_n = \frac{r \gamma \rho''}{T(\rho' - \rho'')} = \frac{r g \rho' \rho''}{T(\rho' - \rho'')} \quad (7.261)$$

- $K_u$  – liczba znamienna związana z częstością odrywania się pęcherzyków

$$K_u = \frac{\rho' c_p \sigma}{\rho'' r \delta p'} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} \quad (7.262)$$

W równaniach tych występują następujące parametry fizykochemiczne cieczy: ciepło właściwe  $c_p$ , lepkość  $\eta$ , współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$ , napięcie powierzchniowe  $\sigma$ , ciężar właściwy  $\gamma'$ , gęstość  $\rho'$ .

Wygodniejsze do stosowania są szczegółowe równania Krużylina, które otrzymano po rozpisaniu i przekształceniu względem  $\alpha$ :

$$\alpha = 0,0686 \left( \frac{\rho'' r}{\rho' - \rho''} \right)^{0,033} \left( \frac{\rho'}{\sigma} \right)^{1/3} \frac{\lambda^{0,8} q^{0,7}}{\eta^{0,5} c_p^{1/6} T^{0,37}} \quad (7.263)$$

oraz

$$q_{kr} = 2940 \frac{\lambda^{0,5} (\rho' - \rho'')^{13/24} (\rho'' r T)^{1/3} \sigma^{1/24}}{\rho'^{10/24} c_p^{1/6}} \quad (7.264)$$

W odniesieniu do wody równanie Krużylina upraszcza się do prostego związku

$$\alpha = 2,656 p^{0,176} q^{0,7} \quad (7.265)$$

lub

$$\alpha = 25,88 p^{0,58} \Delta T^{2,33} \quad (7.266)$$

W literaturze można znaleźć wiele korelacji dla wyparek oraz innych aparatów. Praktyczne znaczenie może mieć również wzór podany przez Kutateladze, sprawdzony w zakresie wartości ciśnienia od 0,2 do 10 barów dla różnego rodzaju cieczy:

$$\alpha = 2,75\varphi p^{0,4} q^{0,7} \quad (7.267)$$

gdzie  $q$  wyrażamy w  $W/m^2$ ,  $p$  zaś w barach.

Wartości współczynnika  $\varphi$  zestawiono w tabeli 7.14.

Tabela 7.14. Współczynnik  $\varphi$  do wzoru (7.267)

| Płyn             | $\varphi$ | Płyn                  | $\varphi$ |
|------------------|-----------|-----------------------|-----------|
| Woda             | 1         | Alkohol etylowy       | 0,45      |
| Nafta            | 0,31–0,56 | Alkohol metylowy      | 0,36      |
| Benzen           | 0,31      | 24%roztwór wodny NaCl | 0,62      |
| 25%roztwór cukru | 0,57      | 9%roztwór wodny NaCl  | 0,86      |

Szczegółowe wzory dla innych substancji można znaleźć w literaturze [3, 4].



## **8. Zateżanie roztworów nielotnych substancji. Wyparki**

Proces odparowywania, czyli zmiany stanu ciekłego na stan gazowy, przebiega pod ciśnieniem cząstkowym pary niższym od ciśnienia pary nasyconej w danej temperaturze cieczy. Podwyższając temperaturę cieczy lub obniżając ciśnienie całkowite, doprowadzimy roztwór do wrzenia. Wytworzoną parę po oddzieleniu od cieczy można odprowadzać do atmosfery, wykorzystać jako czynnik grzewczy w kolejnym stopniu lub poddać skropleniu. Odparowanie pod ciśnieniem wyższym od ciśnienia atmosferycznego jest stosowane w celu wykorzystania par do ogrzewania. Odparowanie pod ciśnieniem niższym od atmosferycznego jest natomiast uzasadnione wówczas gdy procesowi temu poddajemy roztwory wrażliwe na działanie podwyższonej temperatury.

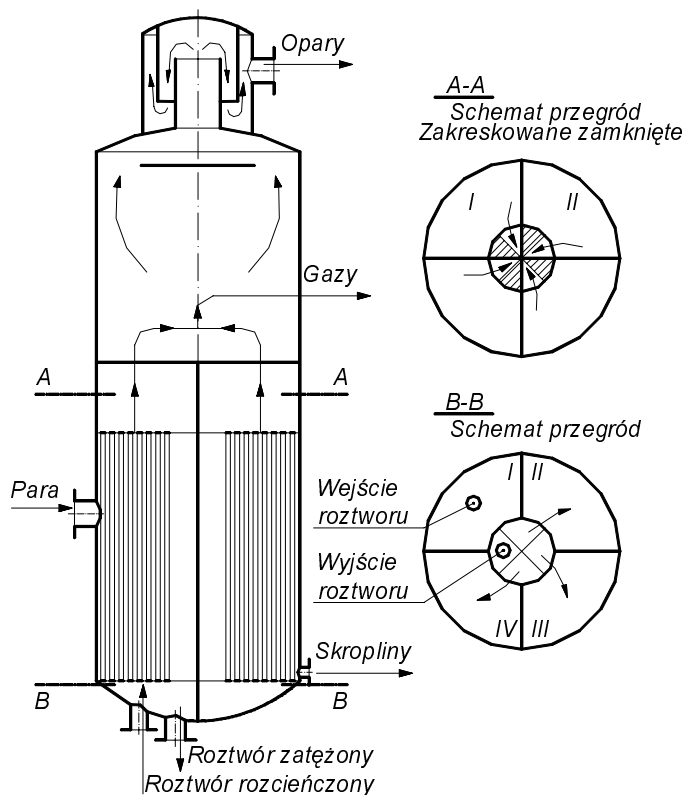
Odparowanie polega na doprowadzeniu do cieczy określonej ilości energii cieplnej w celu ogrzania cieczy, a następnie zmiany jej stanu skupienia, aby osiągnąć żądane zateżenie roztworu. Aby zapewnić prawidłową i efektywną pracę instalacji, musimy określić warunki operacyjne, tj. ciśnienie i temperaturę, ale również parametry ruchowe.

### **8.1. Bilans masowy procesu odparowania**

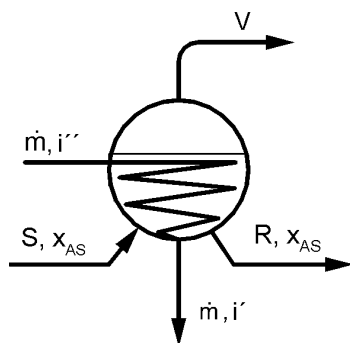
Podstawowym elementem projektowania instalacji wyparnej jest bilans masowy substancji. Bilans masowy sporządza się dla ustalonego przepływu substancji, a więc stałych parametrów procesu odparowania: temperatury, ciśnienia, stężenia roztworu, intensywności wymiany ciepła itp.

Schematy konstrukcji typowych aparatów wyparnych, tj. odpowiednio zaprojektowanych wymienników ciepła, można znaleźć w literaturze [14]. Na rys 8.1 przedstawiono podstawowy typ płaszczowo-rurkowej wyparki jednostopniowej. Jest ona zbudowana z walcza o dość dużej średnicy, zamkniętego od dołu i od góry dnami z króćcami do dopływu surowca i odpływu pary rozpuszczalnika, wsadu rurkowego oraz króćców – umocowanych z boku – do dopływu pary grzewczej i odprowadzania

zateżonego roztworu. Kondensat pary grzejnej wypływa z przestrzeni kondensacyjnej przez zamknięcie w postaci garnka kondensacyjnego.



Rys. 8.1 Przekrój wyparki



Rys. 8.2. Schemat wyparki jednostopniowej

Proces zateżania roztworu (por. rys. 8.2) zachodzi z użyciem pary grzejnej o strumieniu masowym  $\dot{m}$  i entalpii  $i''$  na dopływie oraz  $i'$  na odpływie. Do wyparki

dopływa  $S$  kg roztworu o stężeniu składnika nielotnego A równym  $x_{AS}$  (kg A/kg S). Z wyparki wypływa  $R$  kg zatężonego roztworu o stężeniu składnika A równym  $x_{AR}$  (kg A/kg R) oraz  $V$  kg oparów czystego rozpuszczalnika ( $y_{AV} = 0$ ). Zaniedbuje się straty roztworu związane z unoszeniem roztworu w postaci kropeł. Równanie bilansu masowego można zapisać więc w prostej postaci

$$S = R + V \quad (8.1)$$

Równanie bilansowe nielotnego składnika A jest następujące

$$Sx_{AS} = Rx_{AR} \quad (8.2)$$

Po podstawieniu  $R = S - V$  do drugiego równania i przekształceniu otrzymuje się równanie określające ilość oparów

$$V = S \left( 1 - \frac{x_{AS}}{x_{AR}} \right) \quad (8.3)$$

Bilans masowy wielodziałowej instalacji wyparnej wykonuje się oddzielnie dla poszczególnych działów.

## 8.2. Wielostopniowe instalacje wyparne

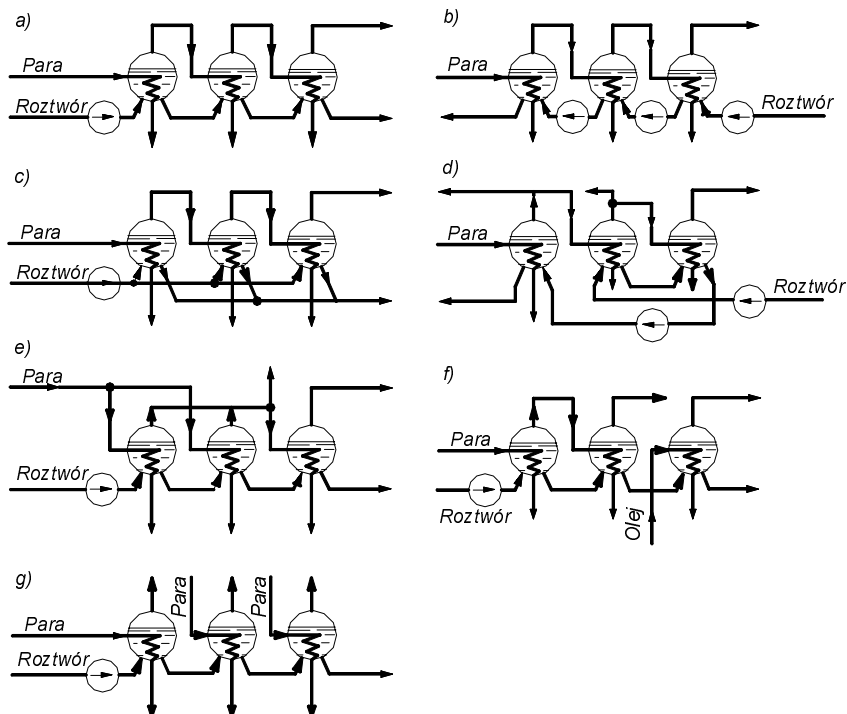
Zatężanie roztworów prowadzi się na ogół w tzw. wielodziałowych instalacjach wyparnych. Umożliwia to z jednej strony odparowanie dużych ilości rozpuszczalnika, z drugiej zaś wielokrotne wykorzystanie powstających oparów do ogrzewania kolejnych działów wyparki. W instalacjach tego typu jest więc realizowana zasada wielokrotnego odparowania, którą można nazwać również zasadą wielokrotnego wykorzystania energii cieplnej.

Zasadę wielokrotnego wykorzystania energii wygodnie jest interpretować za pomocą schematu instalacji jak na rys. 8.3. Przedstawia on układ połączeń baterii trzystopniowej. Para wytworzona na pierwszym stopniu jest parą grzejącą dla drugiego stopnia, a para wytworzona na drugim stopniu – parą grzejącą dla trzeciego stopnia. Temperatura i ciśnienie na każdym stopniu są inne. Ciśnienie na drugim stopniu musi być np. dostatecznie niskie, aby w temperaturze cieczy  $T_2$  zachodziła wymiana ciepła od kondensującej się pary rozpuszczalnika ( $T_{g2} > T_2$ ) oraz wrzenie roztworu.

Efektywne zużycie pary wodnej na 1 kg odparowywanej wody wynosi:

- 1,10 kg/kg w wyparce jednostopniowej,
- 0,57 kg/kg w baterii dwustopniowej,
- 0,40 kg/kg w baterii trójstopniowej,
- 0,30 kg/kg w baterii czterostopniowej,
- 0,27 kg/kg w baterii pięciostopniowej.

Najbardziej rozpowszechnione są baterie trój- i czterostopniowe. Wielostopniowe baterie wyparne mogą mieć układ połączeń zapewniający współprądowy, przeciwaprądowy, równoległy i mieszany przepływ roztworu względem pary (rys. 8.3). Aparaty są numerowane kolejno, zgodnie z przepływem roztworu.



Rys. 8.3. Schematy połączeń wielodziałowych instalacji wyparnych: a) współprądowy, b) przeciwaprądowy, c) z zasilaniem równoległym roztworów, d) mieszany, e) z podwójnym działem pierwszym, f) z dwoma czynnikami grzejjymi, g) z zasilaniem równoległym parą

Podstawowym rozwiązaniem jest układ współprądowy (rys. 8.3a). Główną zaletą układu współprądowego jest to, że tylko rozcieńczony roztwór musi być tłoczony do pierwszego działu. Kolejne stopnie są samoczynnie zasilane roztworem dzięki różnicy ciśnienia. Niekorzystne natomiast jest obniżanie temperatury roztworu w miarę jego zatężania; wskutek zwiększenia jego lepkości zmniejszają się współczynniki wnikania ciepła. Straty ciepła są jednak bardzo małe. Z tych względów współprądowe instalacje wyparne są najczęściej stosowane w przemyśle. Stosuje się je przede wszystkim do krystalizacji roztworów nasyconych, w których nieznaczne odparowanie rozpuszczalnika powoduje wytrącanie się kryształów.

Na rysunku 8.3b pokazano układ przeciwaprądowy. Temperatura wrzenia w miarę zatężania roztworu w kolejnych stopniach jest w nim coraz wyższa, co powoduje, że lepkość roztworu się zmniejsza. Przepływ zagęszczonego roztworu do trzeciego stopnia, który jest ogrzewany świeżą parą grzejją, zapewnia odpowiednio wysoką tempe-

raturę roztworu już zagęszczonego. Układ ten jest zalecany do zateżenia bardzo lep-  
kich roztworów. Jego wadą jest konieczność instalowania pomp między kolejnymi  
stopniami do przetłaczania roztworu do aparatów o coraz wyższym ciśnieniu pracy.  
Powoduje to znaczne zwiększenie kosztów inwestycyjnych i ruchowych. W wyniku  
strat ciepła układ ten wykazuje również duże zużycie pary grzejnej, około 5–10%.

Instalacje z równoległym zasilaniem roztworu (rys. 8.3c) są stosowane do krystalizacji roztworów nasyconych.

Układy mieszane (rys. 8.3d) stosuje się bardzo rzadko, wówczas gdy niezbędne  
jest wyeliminowanie wad układów omówionych poprzednio [14]. Układ z dwoma  
czynnikami grzejnymi (rys. 8.3f) jest np. stosowany, gdy należy zwiększyć temperatu-  
rę w ostatnim stopniu. Równoległe łączenie aparatów wyparnych w odniesieniu do  
pary grzejnej (rys. 8.3e) jest stosowane wówczas, gdy stosuje się parę grzejną nisko-  
ciśnieniową, a wymagana jest duża wydajność instalacji.

W wyjątkowych przypadkach konieczne jest równoległe zasilanie parą grzejną do  
uzyskania wysokiej temperatury wrzenia roztworu (rys. 8.3g).

Liczbę działów przyjmuje się tym większą, im wyższe jest ciśnienie pary grzejnej  
i mniejsze obniżenie temperatury roztworu. Pewną rolę odgrywa również wartość  
całkowitej różnicy temperatury. Liczbę działów instalacji wyparnej najlepiej jest do-  
brać na podstawie analizy techniczno-ekonomicznej.

### 8.3. Obliczanie całkowitej różnicy temperatury instalacji wyparnej

Całkowity spadek temperatury  $\Delta T_0$  w wyparce lub baterii wyparek jest równy  
różnicy między temperaturą pary grzejnej w pierwszym stopniu,  $T_{pg1}$  a temperaturą  
skraplającej się pary z ostatniej wyparki (dla układu próżniowego na wlocie do skrap-  
lacza)  $T_{skr}$

$$\Delta T_0 = T_{pg1} - T_{skr} \quad (8.4)$$

W warunkach rzeczywistych różnica ta jest pomniejszona o straty temperatury  
wynikające z fizykochemicznej, hydrostatycznej i hydraulicznej depresji temperatu-  
rowej. Użyteczna różnica temperatury jest zatem równa całkowitej różnicy temperatu-  
ry pomniejszonej o całkowitą stratę temperatury

$$\Delta T_u = \Delta T_0 - \Delta T_{str} \quad (8.5)$$

Dla  $n$ -stopniowej baterii wyparnej użyteczna różnica temperatury jest sumą uży-  
tecznych różnic temperatury poszczególnych działów

$$\Delta T_u = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta T_i \quad (8.6)$$

Całkowita strata temperatury jest zatem sumą

$$\Delta T_{\text{str}} = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 \quad (8.7)$$

gdzie:  $\Delta T_1$  – fizykochemiczna depresja temperatury,  $\Delta T_2$  – hydrostatyczna depresja temperatury,  $\Delta T_3$  – hydrauliczna depresja temperatury.

Fizykochemiczna depresja temperatury jest wynikiem podwyższenia temperatury wrzenia roztworu względem temperatury wrzenia rozpuszczalnika (wody)

$$\Delta T_1 = T_r - T_w \quad (8.8)$$

Temperatura wrzenia roztworu zależy od ciśnienia, ale również od składu chemicznego i stężenia roztworu.

Fizykochemiczną depresję temperatury oblicza się z wzoru Gelperina

$$\Delta T_1 = \frac{RT^2}{r} \frac{x}{1 - ax} \quad (8.9)$$

gdzie:  $R$  – uniwersalna stała gazowa, kJ/(kmol·K),  $T$  – temperatura wrzenia, K,  $r$  – ciepło parowania, kJ/kg,  $x$  – stężenie roztworu, kg/kg,  $a$  – stała wyznaczona doświadczalnie dla danego roztworu.

W praktyce przemysłowej proces zagęszczania prowadzi się pod obniżonym ciśnieniem. W takich przypadkach depresję temperatury należy określić na podstawie przybliżonego wzoru Tiszczenki

$$\Delta T_1 = 0,01362 \frac{T^2}{r} \Delta T_1' \quad (8.10)$$

gdzie:  $\Delta T_1$  – szukana depresja temperatury pod danym ciśnieniem,  $\Delta T_1'$  – depresja temperatury pod ciśnieniem atmosferycznym,  $T$  – temperatura wrzenia czystego roztworu, K,  $r$  – ciepło parowania wody pod danym ciśnieniem odparowania, kJ/kg.

Prężność par cieczy można obliczać z równania

$$\lg(p + 1) = 0,301 \Theta^{0,935} \quad (8.11)$$

w którym wyznaczamy

$$p = \frac{\lg\left(\frac{p}{p_{kr}}\right)}{\lg\left(\frac{p_b}{p_{kr}}\right)} \quad (8.12)$$

W równaniu tym

$$\Theta = \frac{\lg\left(\frac{T}{T_{kr}}\right)}{\lg\left(\frac{T_b}{T_{kr}}\right)} \quad (8.13)$$

$T$  jest temperaturą wrzenia pod ciśnieniem  $p$ , K,  $T_b$  – temperaturą wrzenia pod ciśnieniem atmosferycznym  $p_b$ , K,  $T_{kr}$  – temperaturą krytyczną, K,  $p_{kr}$  – ciśnieniem krytycznym, bar.

Znając wartości temperatury wrzenia roztworu o określonym stężeniu pod dwoma różnymi ciśnieniami, temperaturę wrzenia pod jakimś innym ciśnieniem można wyznaczyć z wzoru Duehringa

$$\frac{T_1' - T_1''}{T_2' - T_2''} = \text{const} \quad (8.14)$$

gdzie:  $T_1' - T_1''$  – różnica temperatury wrzenia danej cieczy pod dwoma określonymi ciśnieniami,  $T_2' - T_2''$  – różnica temperatury wrzenia dowolnej cieczy (wody) pod tymi ciśnieniami.

Depresja hydrostatyczna temperatury  $\Delta T_2$  występuje w wyparkach z wysokim słupem cieczy (powyżej 1m). Temperaturę wrzenia roztworu w wyparce należy obliczać jako temperaturę nasycenia dla ciśnienia na średniej wysokości słupa cieczy

$$p = p_m + \frac{H\rho g}{2} \quad (8.15)$$

gdzie:  $p_m$  – ciśnienie w przestrzeni opar, Pa,  $H$  – wysokość słupa cieczy, m,  $\rho$  – gęstość cieczy,  $\text{kg/m}^3$ ,  $g$  – przyspieszenie ziemskie ( $9.81 \text{ m/s}^2$ ).

Dla obliczonego tym wzorem ciśnienia znajdujemy temperaturę nasycenia pary wodnej na podstawie tablic, przy czym temperatura wrzenia roztworu będzie wynosić  $t_r = t_{\text{nas}} + \Delta T_1$ .

Opisana metoda daje przybliżone wyniki, ponieważ we wzorze (8.15) wprowadzamy gęstość roztworu, a należałoby stosować gęstość mieszaniny ciecz–para, której wartość zależy nie tylko od intensywności grzania, ale i od intensywności cyrkulacji w wyparce.

Wartości depresji hydrostatycznej temperatury dla wyparek z intensywną cyrkulacją można określić z równania

$$\Delta T_2 = \frac{Hk\Delta T_m}{0,5w\rho dc} \quad (8.16)$$

gdzie:  $H$  – wysokość rur w komorze grzejnej, m,  $k$  – współczynnik przenikania ciepła,  $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ,  $\Delta T_m$  – średnia logarytmiczna różnica temperatury między parą grzejną a wrzącym roztworem, K,  $w$  – prędkość przepływu roztworu, m/s,  $d$  – średnica rury, m,  $c$  – ciepło właściwe roztworu,  $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\rho$  – gęstość roztworu,  $\text{kg/m}^3$ .

Jeżeli wrzenie roztworu występuje jedynie nad komorą grzejną, depresja hydrostatyczna nie jest istotna.

Depresja hydrauliczna temperatury  $\Delta T_3$  stanowi obniżenie temperatury związane ze stratą ciśnienia na tarcie i opory miejscowe w przewodach łączących działy wyparne. W praktyce należy przyjmować  $\Delta T_3 = 1^\circ \text{C}$  dla każdego działu.

## 8.4. Obliczanie użytecznej różnicy temperatury instalacji wyparnej

Zgodnie z równaniem (8.5), użyteczna różnica temperatury jest równa całkowitej różnicy temperatury pomniejszonej o całkowitą stratę temperatury. Zmniejsza się ona wraz ze wzrostem liczby działów instalacji wyparnej [14]. Suma użytecznych spadków temperatury nie może być mniejsza od pewnej minimalnej wartości  $\Delta T_u = 5^\circ\text{C}$ . Przyjęcie dużej użytecznej różnicy temperatury w jednym dziale wpływa na wzrost intensywności wymiany ciepła, ale również może być powodem porywania kropeł roztworu przez opary.

Powierzchnia grzejna  $n$ -stopniowej baterii wyparnej jest równa sumie powierzchni wszystkich stopni:

$$A_c = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{k_i \Delta T_i} \quad (8.17)$$

gdzie:  $A_i$  – powierzchnia grzejna na  $i$ -tym stopniu,  $\text{m}^2$ ,  $\dot{Q}_i$  – strumień ciepła na  $i$ -tym stopniu ( $\dot{Q}_i = m_i r$ ),  $W$ ,  $k_i$  – współczynnik przenikania ciepła na  $i$ -tym stopniu,  $W/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ,  $\Delta T_i$  – użyteczna różnica temperatury na  $i$ -tym stopniu,  $\text{K}$ .

Projektowanie wielodziałowych instalacji wyparnych może być oparte na założeniu:

- minimalnej sumarycznej powierzchni grzejnej całej instalacji (baterii),
- jednakowych powierzchni grzejnych wszystkich działów (stopni baterii),
- minimalnej całkowitej powierzchni wymiany ciepła i jednakowych powierzchni grzejnych w każdym dziale.

### 8.4.1. Założenie minimalnej powierzchni wymiany ciepła

Założenie minimalnej powierzchni wymiany ciepła wiąże się z wysokimi kosztami inwestycyjnymi wynikającymi z cen drogich metali, a zwłaszcza metali szlachetnych.

Zanalizujmy dwudziałową instalację wyparną. Całkowita powierzchnia wymiany ciepła jest równa

$$A_c = A_1 + A_2 = \frac{\dot{Q}_1}{k_1 \Delta T_1} + \frac{\dot{Q}_2}{k_2 \Delta T_2} \quad (8.18)$$

W celu wyeliminowania użytecznej różnicy działu drugiego, podstawiamy

$$\Delta T_2 = \Delta T_u - \Delta T_1$$

i otrzymujemy

$$A_c = \frac{\dot{Q}_1}{k_1 \Delta T_1} + \frac{\dot{Q}_2}{k_2 (\Delta T_u - \Delta T_1)} \quad (8.19)$$



Minimalną powierzchnię wymiany ciepła wielodziałowej instalacji wyparnej wyznaczamy, szukając minimum funkcji  $A_c = f(\Delta T_1)$ . Po zróżniczkowaniu równania (8.19) i przyrównaniu do zera otrzymujemy wyrażenie

$$\frac{dA_c}{d(\Delta T_1)} = -\frac{\dot{Q}_1}{k_1 (\Delta T_1)^2} + \frac{\dot{Q}_2}{k_2 (\Delta T_u - \Delta T_1)^2} = 0 \quad (8.20)$$

lub inaczej

$$\frac{dA_c}{d(\Delta T_1)} = -\frac{\dot{Q}_1}{k_1 (\Delta T_1)^2} + \frac{\dot{Q}_2}{k_2 (\Delta T_2)^2} = 0 \quad (8.21)$$

Z ostatniego wyrażenia otrzymuje się zależność

$$\frac{\dot{Q}_1}{k_1 (\Delta T_1)^2} = \frac{\dot{Q}_2}{k_2 (\Delta T_2)^2} \quad (8.22)$$

z której po dalszym przekształceniu

$$\frac{\Delta T_1}{\sum_{i=1}^n \Delta T_i} = \frac{\sqrt{\frac{\dot{Q}_1}{k_1}}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\dot{Q}_i}{k_i}}} \quad (8.23)$$

otrzymujemy

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{\sqrt{\frac{\dot{Q}_1 k_2}{\dot{Q}_2 k_1}}}{\sqrt{\frac{\dot{Q}_2}{k_2}}} = \frac{\sqrt{\frac{\dot{Q}_1}{k_1}}}{\sqrt{\frac{\dot{Q}_2}{k_2}}} \quad (8.24)$$

Dla  $n$ -stopniowej baterii wyparnej stosunek użytecznych spadków temperatury opisuje równanie

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_n} = \sqrt{\frac{\dot{Q}_1 k_n}{\dot{Q}_n k_1}} \quad (8.25)$$

Analogicznie zaś do równania (8.24) otrzymuje się związek

$$\frac{\Delta T_n}{\sum_{i=1}^n \Delta T_i} = \frac{\sqrt{\frac{\dot{Q}_n}{k_n}}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\dot{Q}_i}{k_i}}} \quad (8.26)$$

W wyniku takiego podziału powierzchni wymiany ciepła w poszczególnych działach instalacji są niejednakowe.

### 8.4.2. Założenie równych powierzchni wymiany ciepła

Założenie równych powierzchni wymiany ciepła zapewnia ekonomiczne rozwiązanie konstrukcyjne ze względu na identyczną budowę wyparek, co daje niższe koszty zarówno inwestycyjne, jak i eksploatacyjne.

Użyteczne różnice temperatury w poszczególnych działach wynoszą:

- dla pierwszego stopnia

$$\Delta T_1 = \frac{\dot{Q}_1}{k_1} \frac{1}{A_1} \quad (8.27)$$

- dla  $n$ -tego stopnia

$$\Delta T_n = \frac{\dot{Q}_n}{k_n} \frac{1}{A_n} \quad (8.28)$$

Założywszy równość powierzchni  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ , po zsumowaniu użytecznych różnic temperatury otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^n \Delta T_i = \frac{1}{A} \left( \frac{\dot{Q}_1}{k_1} + \frac{\dot{Q}_2}{k_2} + \dots + \frac{\dot{Q}_n}{k_n} \right) \quad (8.29)$$

lub

$$\sum_{i=1}^n \Delta T_i = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{k_i} \quad (8.30)$$

z czego wynika, że

$$\frac{1}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta T_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{k_i}} \quad (8.31)$$

Po podstawieniu do równania (8.27) otrzymujemy dla pierwszego działu

$$\Delta T_1 = \frac{\frac{\dot{Q}_1}{k_1} \sum_{i=1}^n \Delta T_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{k_i}} \quad (8.32)$$

oraz dla  $n$ -tego działu związek

$$\Delta T_n = \frac{\dot{Q}_n \sum_{i=1}^n \Delta T_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\dot{Q}_i}{k_i}} \quad (8.33)$$

Po podzieleniu stronami dwóch ostatnich równań otrzymuje się warunek rozdzielną różnic temperatury dla równych powierzchni grzejnych:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_n} = \frac{\dot{Q}_1 k_n}{\dot{Q}_n k_1} \quad (8.34)$$

### 8.4.3. Założenie minimalnej całkowitej powierzchni wymiany ciepła i jednakowych powierzchni w każdym dziale

Uzyskanie jednakowych powierzchni wymiany ciepła wymaga spełnienia zależności (8.33), osiągnięcie minimalnej całkowitej powierzchni wymiany ciepła natomiast zależności (8.25). Z porównania obydwu warunków otrzymujemy:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_n} = \sqrt{\frac{\Delta T_1}{\Delta T_n}} = 1 \quad (8.35)$$

Spełnienie tego warunku jest możliwe jedynie wtedy, gdy użyteczne różnice temperatury w poszczególnych działach są jednakowe:  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_n$ , a wówczas

$$\frac{\dot{Q}_n}{\dot{Q}_1} = \frac{k_n}{k_1} \quad (8.36)$$

Obciążenia cieplne są zatem wprost proporcjonalne do współczynników przenikania ciepła. Spełnienie wszystkich tych założeń wymaga odpowiedniej regulacji przepływu oparów.

## 9. Analogia między ruchem ciepła a ruchem pędu

### 9.1. Analogia Reynoldsa

Olbrzymie trudności w teoretycznym opracowaniu zagadnień ruchu ciepła, a zwłaszcza w rozwiązywaniu równania energii dla przepływów burzliwych, skłaniają do korzystania z wyników badań doświadczalnych. Jedną z takich metod doświadczalnych jest metoda oparta na analogii zjawisk cieplnych i hydrodynamicznych. Umożliwia ona badanie procesu wnikania ciepła na podstawie analizy hydrodynamiki przepływu. Równanie ruchu w laminarnej warstwie granicznej na płaskiej płycie jest analogiczne do odpowiedniego równania energii dla tej warstwy pod warunkiem, że lepkość kinematyczna jest równa przewodnictwu temperaturowemu (współczynnikowi dyfuzyjności cieplnej); wówczas  $Pr = \nu/a = 1$ . Jak wiadomo z poprzednich rozdziałów, również warunki brzegowe dla obu procesów są wówczas analogiczne.

Reynolds w 1874 r. jako pierwszy stwierdził podobieństwo mechanizmów transportu energii i pędu. W pracy opublikowanej w 1883 r. przedstawił wyniki analizy oporu hydrodynamicznego podczas przepływu płynu w rurze, dając możliwość ilościowego opisu analogii między obydwoma zjawiskami. Analogia Reynoldsa opiera się na założeniu, że profile rozkładu prędkości i temperatury są podobne. Rozpatrując laminarną warstwę graniczną na płycie płaskiej (rys. 9.1), przyjmujemy, że  $w_\infty$  i  $T_\infty$  oznaczają prędkość i temperaturę w rdzeniu płynu, natomiast  $T_w$  – temperaturę powierzchni płyty. Gdy liczba Prandtla  $Pr = 1$ , gradienty bezwymiarowej prędkości i bezwymiarowej temperatury względem  $y$  są jednakowe:

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{w_x - w_r}{w_\infty - w_r} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{T - T_r}{T_\infty - T_r} \right) \quad (9.1)$$

wartości  $w_r$  i  $T_r$  odpowiadają przekrojowi w odległości  $y_r$  od ściany.

Po przekształceniu równanie (9.1) możemy zapisać w postaci

$$\frac{1}{w_\infty - w_r} \frac{dw_x}{dy} = \frac{1}{T_\infty - T_r} \frac{dT}{dy} \quad (9.2)$$

Laminarne naprężenia styczne w płaszczyźnie odniesienia  $y_r$  opisuje równanie:

$$\tau_r = \mu \frac{dw_x}{dy} = \rho \nu \frac{dw_x}{dy} \quad (9.3)$$

Gęstość strumienia ciepłego w tej płaszczyźnie określa równanie Fouriera:

$$q_r = -\lambda \frac{dT}{dy} = -a \rho c_p \frac{dT}{dy} \quad (9.4)$$

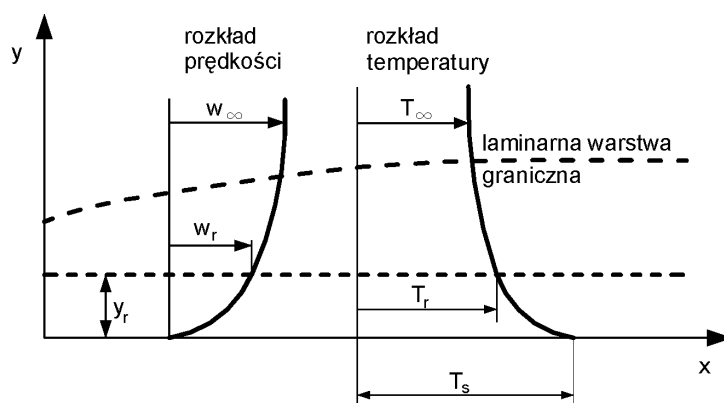
Po podstawieniu pochodnej prędkości z równania (9.3) i pochodnej temperatury z równania (9.4) do równania (9.2) otrzymuje się

$$\frac{1}{w_\infty - w_r} \frac{\tau_r}{\nu} = \frac{q_r}{a c_p} \frac{1}{T_r - T_\infty} \quad (9.5)$$

Ponieważ  $Pr = \nu/a = 1$ , więc równanie to przyjmuje postać

$$\frac{\tau_r c_p}{w_\infty - w_r} = \frac{q_r}{T_r - T_\infty} \quad (9.6)$$

Jest to matematyczne ujęcie analogii Reynoldsa dla laminarnego przepływu, gdy założymy, że liczba Prandtla jest równa jedności. Określa ono równowagę naprężenia lepkiego i gęstości strumienia ciepłego w płaszczyźnie oddalonej o  $y_r$  od powierzchni ciała.



Rys. 9.1. Rozkłady prędkości i temperatury w laminarnej warstwie granicznej

Można przyjąć, że na powierzchni płyty  $y_r = 0$ ,  $T_r = T_s$  oraz  $w_r = 0$  i równanie (9.6) przyjmuje postać

$$\frac{\tau_w c_p}{w_\infty} = \frac{q_w}{T_s - T_\infty} \quad (9.7)$$

Ponieważ po prawej stronie tego równania mamy współczynnik wnikania, więc

$$\alpha = \frac{\tau_w c_p}{w_\infty} \quad (9.8)$$

Współczynnik wnikania ciepła można wyznaczyć po podstawieniu zależności na napężenie styczne, które jest stosunkowo łatwe do określenia. W literaturze anglosaskiej można znaleźć następującą funkcję:

$$\tau_w = C_f \frac{w_\infty^2 \rho}{2} \quad (9.9)$$

Po podstawieniu jej do równania (9.8) i przekształceniu otrzymuje się

$$\frac{\alpha}{w_\infty c_p \rho} = St = \frac{C_f}{2} \quad (9.10)$$

Jest to analogia Reynoldsa w ujęciu liczb bezwymiarowych ( $St = Nu/(RePr)$ ) oraz współczynnika oporu hydrodynamicznego  $C_f$ . Należy pamiętać o ograniczeniu, że  $Pr = 1$  oraz nie ma oporu wynikającego z kształtu. W literaturze polskiej podaje się wartość  $C_f = \lambda_0/4$ .

Z warunku równowagi pracy tarcia i pracy ciśnienia wynika bowiem

$$\tau_w A w = \dot{V} \Delta p \quad (9.11)$$

gdzie:  $A$  jest powierzchnią omywaną rury,  $m^2$ ,  $\dot{V}$  – objętościowym natężeniem przepływu,  $m^3/s$ ,  $\Delta p$  – spadkiem ciśnienia, Pa. Z równania tego mamy:

$$\tau_w = \frac{\dot{V} \Delta p}{A w} \quad (9.12)$$

Dla przepływu wewnątrz rury można wprowadzić następujące wzory:

- powierzchnia opływana

$$A = \pi d L \quad (9.13)$$

- objętościowe natężenie przepływu

$$\dot{V} = \frac{\pi d^2}{4} w \quad (9.14)$$

- spadek ciśnienia

$$\Delta p = \lambda_0 \frac{L}{d} \frac{w^2 \rho}{2} \quad (9.15)$$

Po przekształceniach uzyskuje się związek:

$$\tau_w = \frac{\lambda_0}{8} w^2 \rho \quad (9.16)$$

Z porównania równań (9.16) i (9.9) wynika, że  $C_f = \lambda_0/4$ .

Po podstawieniu równania (9.16) do równania (9.8) i przekształceniu analogię Reynoldsa dla przepływu w rurze można zapisać w postaci

$$\frac{\alpha}{w c_p \rho} = St = \frac{\lambda_0}{8} \quad (9.17)$$

Uwzględniając, że  $St = Nu/(RePr)$  oraz  $Pr = 1$ , otrzymuje się

$$Nu = \frac{\lambda_0}{8} Re \quad (9.18)$$

lub

$$Nu_x = \frac{\alpha_x x}{\lambda} = \frac{C_f}{2} Re \quad (9.19)$$

dla przepływu wzdłuż płyty.

Interesujące jest sprawdzenie możliwości wykorzystania równania analogii Reynoldsa w praktyce. Może to dotyczyć dwu przypadków: przepływu wzdłuż płyty płaskiej lub przepływu wewnątrz rur. Po podstawieniu zależności na lokalny współczynnik oporu podczas przepływu wzdłuż płyty

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} w_\infty^2 \rho} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.20)$$

do równania (9.19) otrzymuje się

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} \quad (9.21)$$

Jak widzimy, jest to zależność taka sama jak równanie Pohlhausena (dla  $Pr = 1$ ), wynikające z rozwiązania matematycznego tego zagadnienia.

## 9.2. Analogia Prandtla

W praktyce wartość liczby Prandtla znacznie różni się od jedności, więc należy uwzględnić laminarną i turbulentną strefę strumienia. Prandtl zaproponował uwzględnienie rozkładu prędkości i temperatury w turbulentnej warstwie granicznej przez wprowadzenie turbulentnej lepkości kinematycznej (lepkości wirowej)  $\varepsilon$ .

Pozorne naprężenia styczne i natężenie strumienia ciepłego w turbulentnej warstwie granicznej opisują równania

$$\tau_{\text{poz}} = \rho(\nu + \varepsilon) \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (9.22)$$

oraz

$$q_{\text{poz}} = -\rho c_p (a + \varepsilon_h) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (9.23)$$

Przyjmuje się, że w obszarze warstwy granicznej o rozwiniętej turbulencji  $\varepsilon \gg \nu$  oraz  $\varepsilon_h \gg a$ , dzięki czemu równania (9.22) i (9.23) można zapisać w postaci

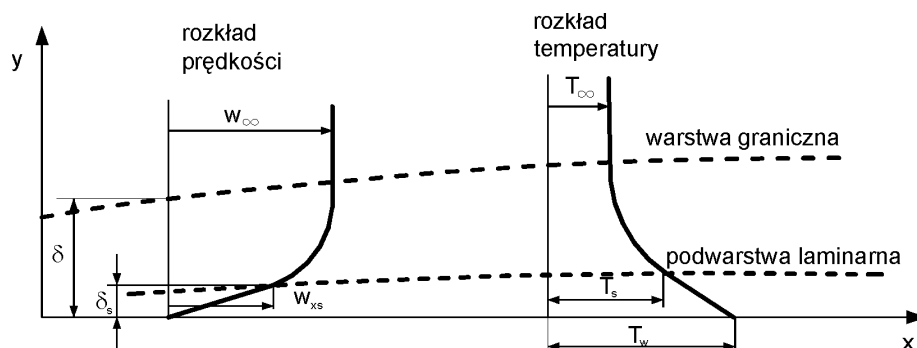
$$\tau_{\text{poz}} = \rho \varepsilon \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (9.24)$$

oraz

$$q_{\text{poz}} = -\rho c_p \varepsilon_h \frac{\partial T}{\partial y} \quad (9.25)$$

Jeżeli założymy, że w strefie turbulentnej  $\varepsilon \cong \varepsilon_h$ , co potwierdzają wyniki badań doświadczalnych, to równania te można przekształcić do wyrażenia identycznego z otrzymanym na podstawie analogii Reynoldsa dla przepływu laminarnego

$$\frac{\tau_r c_p}{w_\infty - w_r} = \frac{q_r}{T_r - T_\infty} \quad (9.26)$$



Rys. 9.2. Rozkład prędkości i temperatury w turbulentnej warstwie granicznej

Rozkład prędkości i temperatury w warstwie granicznej Prandtla pokazano na rys. 9.2. Założono, że warstwa graniczna składa się jedynie z podwarstwy laminarnej i warstwy burzliwej. Nie uwzględniono występowania strefy buforowej (przejściowej), gdzie  $\varepsilon$  i  $\nu$  oraz  $\varepsilon_h$  i  $a$  są tego samego rzędu. Profil prędkości w obszarze turbulentnym opisuje



funkcja potęgowa, można natomiast przyjąć, że w laminarnej podwarstwie jest on liniowy. Nachylenie krzywej rozkładu prędkości w pobliżu ściany zależy od lokalnego współczynnika oporu  $C_f$ , który dla płyty płaskiej w zakresie przepływu burzliwego ( $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$ ) oblicza się z równania Blasiusa

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} w_\infty^2 \rho} = 0,0456 \left( \frac{v}{w_\infty \delta} \right)^{1/2} \quad (9.27)$$

Rozkład temperatury w podwarstwie laminarnej jest również liniowy. Gęstość strumienia ciepła można więc opisać za pomocą równania:

$$q_w = -\frac{\lambda}{\delta_s} (T_w - T_s) \quad (9.28)$$

Jeżeli założymy, że płaszczyzna odniesienia  $r$  (równ. (9.26)) znajduje się na granicy laminarnej podwarstwy, to analogię Reynoldsa dla obszaru warstwy granicznej zawartego między  $y = \delta_s$  i obszarem przepływu potencjalnego opisuje równanie

$$\frac{\tau_s c_p}{w_\infty - w_{xs}} = \frac{q_s}{T_s - T_\infty} \quad (9.29)$$

w którym  $\tau_s$  i  $q_s$  oznaczają naprężenia styczne i gęstość strumienia cieplnego dla  $y = \delta_s$ .

Ponieważ zmiany prędkości i temperatury w podwarstwie są liniowe, więc wartości  $\tau$  i  $q$  dla  $y = \delta_s$  są równe ich wartościom dla  $y = 0$ . Równanie (9.29) można zatem zapisać następująco:

$$\frac{\tau_w c_p}{w_\infty - w_{xs}} = \frac{q_w}{T_s - T_\infty} \quad (9.30)$$

Po podstawieniu współczynnika wnikania ciepła

$$\alpha = \frac{q}{T_w - T_\infty} \quad (9.31)$$

do równania na gęstość strumienia ciepła (9.28) otrzymujemy

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta_s} \frac{T_w - T_s}{T_w - T_\infty} \quad (9.32)$$

Z równania (9.30) wynika natomiast zależność

$$q_w = \frac{\tau_w c_p}{w_\infty - w_{xs}} (T_s - T_\infty) \quad (9.33)$$

która podstawiona do równania (9.31) daje równanie

$$\alpha = \frac{\tau_w c_p}{w_\infty - w_{xs}} \frac{T_s - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \frac{\tau_w c_p}{w_\infty - w_{xs}} \left( 1 - \frac{T_w - T_s}{T_w - T_\infty} \right) \quad (9.34)$$

Przekształcenie równania (9.32) daje natomiast zależność

$$\frac{T_w - T_s}{T_w - T_\infty} = \frac{\alpha \delta_s}{\lambda} \quad (9.35)$$

którą podstawiamy do równania (9.34) i otrzymujemy

$$\alpha = \frac{\tau_w c_p}{w_\infty - w_{xs}} \left( 1 - \frac{\alpha \delta_s}{\lambda} \right) \quad (9.36)$$

Dla liniowego rozkładu prędkości w podwarstwie laminarnej można przyjąć, że

$$\tau_w = \eta \left( \frac{dw_x}{dy} \right)_{y=0} = \eta \frac{w_{xs}}{\delta_s} \quad (9.37)$$

z czego wynika, że

$$\delta_s = \eta \frac{w_{xs}}{\tau_w} \quad (9.38)$$

Po podstawieniu tego równania do równania (9.36) otrzymamy

$$\alpha = \frac{\tau_w c_p}{w_\infty + w_{xs} \left( \frac{\eta c_p}{\lambda} - 1 \right)} \quad (9.39)$$

Licznik i mianownik tego równania dzielimy przez  $w_\infty$

$$\alpha = \frac{\tau_w \frac{c_p}{w_\infty}}{1 + \frac{w_{xs}}{w_\infty} (Pr - 1)} \quad (9.40)$$

Równanie to jest matematycznym zapisem analogii Prandtla. Po dalszych przekształceniach otrzymujemy równania korelacyjne dla wymiany ciepła.

Równanie (9.40) mnożymy obustronnie przez  $x/\lambda$  ( $x$  jest lokalną współrzędną wzdłuż płyty):

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{\frac{\tau_w}{w_\infty} \frac{c_p x}{\lambda}}{1 + \frac{w_{xs}}{w_\infty} (Pr - 1)} = \frac{\frac{1}{2} \left[ \frac{\tau_w}{\rho w_\infty^2} \frac{\eta c_p}{\lambda} \frac{w_\infty x \rho}{\eta} \right]}{1 + \frac{w_{xs}}{w_\infty} (Pr - 1)} = \frac{\frac{1}{2} C_f Pr Re_x}{1 + \frac{w_{xs}}{w_\infty} (Pr - 1)} \quad (9.41)$$

Po wprowadzeniu wzoru na liczbę Stanton równanie to można zapisać w postaci

$$St = \frac{\frac{1}{2}C_f}{1 + \frac{w_{xs}}{w_\infty}(\text{Pr} - 1)} \quad (9.42)$$

Należy teraz określić stosunek prędkości  $w_{xs}/w_\infty$ . Wiemy [12], że na granicy podwarstwy laminarnej zachodzi równość bezwymiarowych prędkości i współrzędnej  $y$

$$w^+ = y^+ = 5 \quad (9.43)$$

Na podstawie definicji bezwymiarowej prędkości

$$w^+ = \frac{w_{xs}}{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}} = 5 \quad (9.44)$$

i z definicji współczynnika tarcia

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{\rho w_\infty^2}{2}} \quad (9.45)$$

otrzymuje się wyrażenie

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = w_\infty \sqrt{\frac{C_f}{2}} \quad (9.46)$$

które podstawiamy do równania (9.44) i przekształcamy:

$$\frac{w_{xs}}{w_\infty} = 5 \sqrt{\frac{C_f}{2}} \quad (9.47)$$

Po podstawieniu do równania (9.42) otrzymujemy wzór na lokalną liczbę Stanton:

$$St_x = \frac{\frac{1}{2}C_f}{1 + 5\sqrt{\frac{C_f}{2}}(\text{Pr} - 1)} \quad (9.48)$$

Zależność ta, nazywana analogią Prandtla [12], określająca lokalną liczbę Stanton podczas przepływu wzdłuż płyty, daje wyniki zgodne z wynikami badań doświadczalnych wnikania ciepła w obszarze burzliwym.

W literaturze można znaleźć kilka innych rozwiązań do opisu stosunku prędkości  $w_{xs}/w_\infty$ , uwzględniających warstwę pośrednią (buforową), na przykład analogie Ká-

rmána i Martinelliego [4, 6]. Zależność uzyskana przez Kármána, zwana analogią Kármána, ma następującą postać

$$St = \frac{\frac{1}{2}C_f}{1 + 5\sqrt{\frac{C_f}{2}} \left\{ Pr - 1 + \ln \left[ 1 + \frac{5}{6}(Pr - 1) \right] \right\}} \quad (9.49)$$

W literaturze niemieckojęzycznej [15] polecane jest natomiast rozwiązanie Frienda i Metznera\*

$$St = \frac{\lambda_0}{8} \frac{1}{1,20 + 11,8Pr^{-1/3}(Pr - 1)\sqrt{\frac{\lambda_0}{8}}} \quad (9.50)$$

Takie samo równanie zostało wyprowadzone do opisu analogii transportu pędu i masy. Brauer [15] zastosował tę zależność do analizy wielu zagadnień dotyczących zarówno wymiany ciepła, jak i wymiany masy.

### 9.3. Analogia Colburna

Założenie, że liczba  $Pr = 1$  powoduje znaczne ograniczenie zastosowania analogii Reynoldsa. Colburn zaproponował wprowadzenie empirycznej funkcji liczby Prandtla i otrzymał następujące wyrażenie

$$\frac{\lambda_0}{8} = StPr^{2/3} \quad (9.51)$$

w którym:  $\lambda_0$  – współczynnik oporu hydrodynamicznego,  $Pr$  – liczba Prandtla,  $St$  – liczba Stanton.

Obliczenia Colburna na podstawie wielu danych dla różnorodnych przepływów i geometrii układów wykazały dobrą ich zgodność dla zakresu liczb Prandtla  $0,5 < Pr < 50$  pod warunkiem braku oporu kształtu. Wyrażenie to często zapisuje się w postaci

$$\frac{\lambda_0}{8} = j_H \quad (9.52)$$

---

\*W.L. Friend, A.B. Metzner, *Turbulent heat transfer inside tubes and the analogy between heat, mass, and momentum transfer*, AICHE J. 4 (1958) 393–402.

gdzie

$$j_H = StPr^{2/3} \quad (9.53)$$

nazywamy czynnikiem Colburna dla wymiany ciepła.

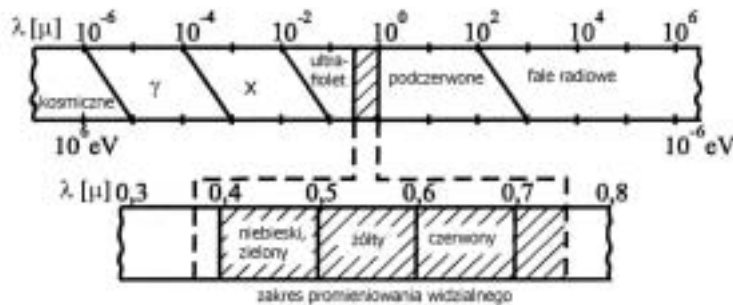
Jak widać z równania (9.53), dla  $Pr = 1$  analogia Colburna przechodzi w analogię Reynoldsa. Tym samym analogia Colburna stanowi rozszerzenie analogii Reynoldsa w zakresie liczb Prandtla od 0,5 do 50. Graniczne liczby Prandtla odpowiadają wartościom charakterystycznym dla ciekłych metali (małe wartości) oraz ciężkich frakcji olejowych (duże wartości).

# 10. Promieniowanie cieplne

## 10.1. Wprowadzenie

Promieniowanie cieplne jest przekazywane od wszystkich ciał stałych o temperaturze wyższej od zera kelwinów. Intensywność promieniowania zależy od temperatury ciała, ale również od właściwości materiału. Stosowane są dwie teorie do opisu emisji, przenoszenia i absorpcji energii promieniowania: klasyczna teoria przenoszenia fal elektromagnetycznych i kwantowa teoria fotonów. Teorie te nie wykluczają się, a raczej uzupełniają.

Fale elektromagnetyczne są falami poprzecznymi, które oscylują prostopadle do kierunku ich rozchodzenia. W próżni przyjmują prędkość światła  $c_0 = 299\,792\,458$  m/s. W ośrodku materialnym ich prędkość  $c$  jest mniejsza, częstotliwość natomiast jest taka sama. Stosunek prędkości  $n = c_0/c > 1$  jest współczynnikiem załamania światła danego materiału.



Rys. 10.1. Zakres promieniowania elektromagnetycznego

Iloczyn długość fali i częstotliwości jest równy jej prędkości

$$\lambda \nu = c \quad (10.1)$$

Na rysunku 10.1 pokazano zakres promieniowania elektromagnetycznego. Zakres małych długości fali ( $\lambda < 0,01 \mu\text{m}$ ) odpowiada promieniowaniu kosmicznemu, pro-

mieniowaniu  $\gamma$  oraz X. Nie jest ono wzbudzone ciepłnie, więc nie należy do promieniowania ciepłego. Fale radiowe ( $\lambda > 10^3 \mu\text{m}$ ) również nie należą do promieniowania ciepłego. Obszar promieniowania ciepłego rozciąga się w zakresie od  $0,1 \mu\text{m}$  do  $1000 \mu\text{m}$ . Promieniowanie to jest przekazywane przez ciała o temperaturze od kilku stopni Kelvina do  $2 \cdot 10^4 \text{K}$ . W tym zakresie mieści się również światło widzialne, rozciągające się od fioletowego ( $0,38 \mu\text{m}$ ) do podczerwonego ( $0,78 \mu\text{m}$ ). Zakres długości fali  $0,01\text{--}0,38 \mu\text{m}$  odpowiada światłu ultrafioletowemu, natomiast od  $0,78 \mu\text{m}$  do  $1000 \mu\text{m}$  promieniowaniu podczerwonemu, które jest podstawowym obszarem promieniowania ciepłego.

## 10.2. Właściwości promieniowania ciepłego

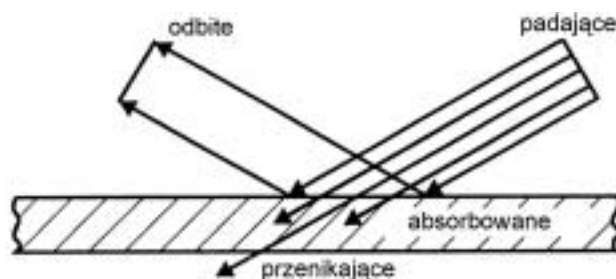
Właściwości optyczne promieniowania ciepłego są takie same jak właściwości promieniowania widzialnego. Promieniowanie ciepłe padające na powierzchnię (rys. 10.2) może zostać zaabsorbowane, odbite bądź przepuszczone przez ciało stałe. Jeżeli ułamki energii promieniowania  $Q$  padającego na powierzchnię ciała określimy jako  $Q_a$ ,  $Q_b$ ,  $Q_c$ , to otrzymamy:

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c \quad (10.1)$$

lub inaczej

$$1 = a + b + c \quad (10.2)$$

gdzie:  $a = Q_a/Q$  jest zdolnością absorpcji promieniowania,  $b = Q_b/Q$  – zdolnością odbijania promieniowania,  $c = Q_c/Q$  – zdolnością przepuszczania promieniowania przez dane ciało.



Rys. 10.2. Obraz promieniowania padającego na powierzchnię

Promieniowania może być odbite od powierzchni pod określonym kątem (odbicie spekularne) bądź rozproszone (Welty i in. [12]). Na rysunku 10.2 pokazano odbicie spekularne. Większość ciał rozprasza promieniowanie we wszystkich kierunkach.

Absorpcja promieniowania w ciałach stałych zachodzi na niewielkiej głębokości, ok.  $1 \mu\text{m}$  w elektrycznych przewodnikach oraz ok.  $1 \text{mm}$  w półprzewodnikach.

Przepuszczalność większości ciał stałych jest równa zero ( $c = 0$ ) i równanie (10.2) sprowadza się do postaci

$$a + b = 1$$

W przypadku idealnie absorbującego ciała mamy  $a = 1$ . Takie ciało nazywamy doskonale czarnym. Ponieważ nie przepuszcza ono ani nie odbija promieniowania, widzimy je jako czarne. Oko ludzkie odbiera tylko odbite promieniowanie. Taką rolę „czarnej dziury” odgrywa otwór małych rozmiarów w powierzchni ograniczającej objętość większych rozmiarów. Promieniowanie wpadające nie ma możliwości wyjścia z powrotem.

Całkowitą energię wypromieniowywaną we wszystkich kierunkach przez powierzchnię jednostkową ciała nazywamy jego zdolnością promieniowania i oznacza się literą  $E$  (ang. *total emissive power*).

Zdolność emisyjna  $\varepsilon$  jest ściśle związana ze zdolnością promieniowania ciała. Jest ona definiowana jako stosunek zdolności promieniowania ciała szarego do zdolności promieniowania ciała doskonale czarnego:

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0} \quad (10.3)$$

Energia promieniowania  $E_\lambda$  o długości fali w przedziale  $\lambda$ ,  $\lambda + d\lambda$  jest monochromatyczną zdolnością promieniowania. Całkowita oraz monochromatyczna zdolność promieniowania są zdefiniowane w następujący sposób:

- w postaci różniczkowej

$$dE = E_\lambda d\lambda \quad (10.4)$$

- w postaci całkowitej

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda \quad (10.5)$$

Monochromatyczną zdolność emisyjną  $\varepsilon_\lambda$  wyrażamy wzorem:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{\lambda 0}} \quad (10.6)$$

gdzie  $E_{\lambda 0}$  jest monochromatyczną zdolnością promieniowania ciała doskonale czarnego o długości fali  $\lambda$  w danej temperaturze.

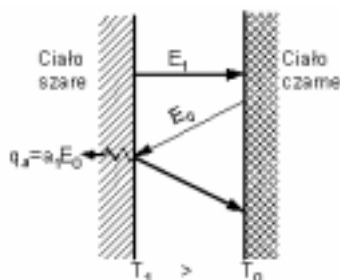
Monochromatyczną zdolność absorpcji promieniowania,  $a_\lambda$  definiuje się jako stosunek zdolności absorpcji promieniowania o długości fali  $\lambda$  do zdolności absorpcji ciała doskonale czarnego dla tej samej długości fali i w tej samej temperaturze.



## 10.3. Podstawowe prawa promieniowania

### 10.3.1. Prawo Kirchhoffa

Związek między zdolnością promieniowania ciała  $E$  i jego zdolnością absorpcji  $a$  określa prawo Kirchhoffa, zgodnie z którym względna zdolność emisyjna i absorpcyjna układu w stanie równowagi termodynamicznej są sobie równe:  $\varepsilon = a$  lub  $\varepsilon_\lambda = a_\lambda$ .



Rys. 10.3. Schemat bilansu emisji promieniowania między ciałem szarym i doskonale czarnym

Rozpatrzmy bilans emisji promieniowania między ciałem doskonale czarnym a dowolnym ciałem szarym (rys. 10.3). Jeżeli  $E_1$  jest emisją ciała szarego (1), a  $E_0$  emisją ciała doskonale czarnego, to ciepło wymienione przez promieniowanie wynosi

$$q_{0-1} = E_0 - E_1 - E_0(1 - a_1) \quad (10.7)$$

Po pewnym czasie temperatura obu ciał wyrównuje się, a zatem  $q_{0-1} = 0$ , z czego wynika

$$E_1 = E_0(1 - 1 + a_1) = a_1 E_0 \quad (10.8)$$

Dla wszystkich ciał o tej samej temperaturze zapisujemy ogólnie:

$$\frac{E_1}{a_1} = \frac{E_2}{a_2} = \frac{E}{a} = E_0 = f(T) \quad (10.9)$$

Stosunek energii emitowanej przez jednostkę powierzchni ciała do jego zdolności absorpcji promieniowania ma taką samą wartość dla wszystkich ciał i jest równy zdolności promieniowania ciała doskonale czarnego w danej temperaturze.

### 10.3.2. Prawo Lamberta

Emisja promieniowania ciała może być nierównomiernie rozłożona w przestrzeni, ale skierowana pod pewnym kątem  $\theta$ , mierzonym od normalnej do danej powierzchni

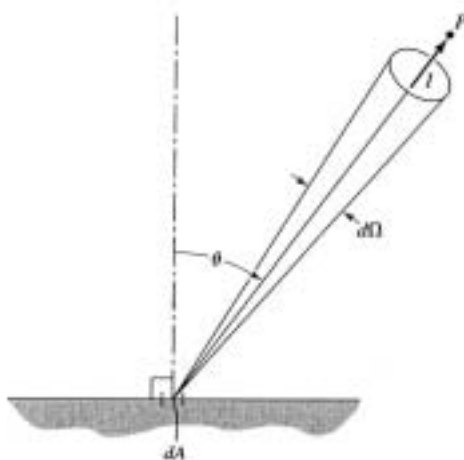
promieniującej (rys. 10.4). Lambert stwierdził, że energia wypromieniowywana przez płaszczyznę w kierunku odchylonym od normalnej zmniejsza się wraz z kosinusem kąta odchylenia

$$\dot{Q}_\theta = \dot{Q}_\perp \cos \theta \quad (10.10)$$

Jeśli element powierzchni  $dA$  emituje energię  $d\dot{Q}$ , to intensywność promieniowania jest dana wzorem

$$I = \frac{d^2\dot{Q}}{dA d\Omega \cos \theta} \quad (10.11)$$

gdzie  $d\Omega$  jest kątem bryłowym wiązki promieniowania.



Rys. 10.4. Intensywność promieniowania

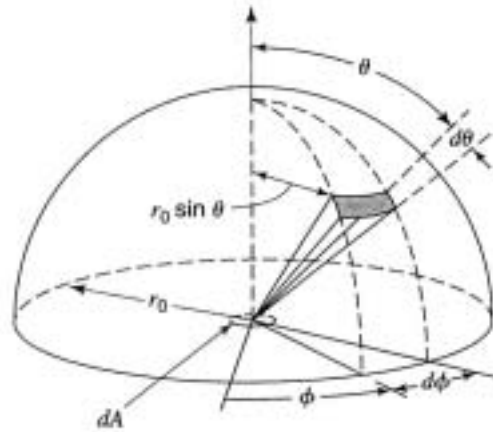
Po przekształceniu otrzymuje się związek pomiędzy energią promieniowania  $E = d\dot{Q}/dA$  a intensywnością  $I$ :

$$\frac{d\dot{Q}}{dA} = E = \int I \cos \theta d\Omega \quad (10.12)$$

Kąt bryłowy jest równy  $\Omega = A/r^2$ , stąd  $d\Omega = dA/r^2$ . Pole różniczkowej powierzchni  $d\Omega$  (rys. 10.5) jest więc związane z różniczkowym kątem bryłowym:

$$d\Omega = \frac{(r \sin \theta d\phi)(r d\theta)}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \quad (10.13)$$

Całkowitą energią emitowaną na jednostkę powierzchni określa całka:



Rys. 10.5. Całkowanie intensywności promieniowania według kąta bryłowego

$$E = I \int \cos \theta d\Omega = I \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (10.14)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$E = \pi I \quad (10.15)$$

Jest to ważna zależność energii emisji promieniowania od jego intensywności.

### 10.3.3. Prawo Plancka

W 1900 r. Planck opublikował teorię, według której energia promieniowania jest emitowana w postaci kwantów. Przyjął on, że intensywność promieniowania monochromatycznego ciała doskonale czarnego  $I_{0\lambda\perp}$  określa pochodna

$$I_{0\lambda\perp} = \frac{dE_{0\perp}}{d\lambda} = \frac{2hc^2\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1} \quad (10.16)$$

w której  $dE_{0\perp}$  stanowi część promieniowania o długości fali w zakresie  $d\lambda$ . Znak  $\perp$  oznacza, że wielkość ta dotyczy promieniowania prostopadłego do jednostki powierzchni promieniującej.  $h$  oznacza stałą Plancka,  $c$  prędkość światła,  $k$  stałą Boltzmanna.

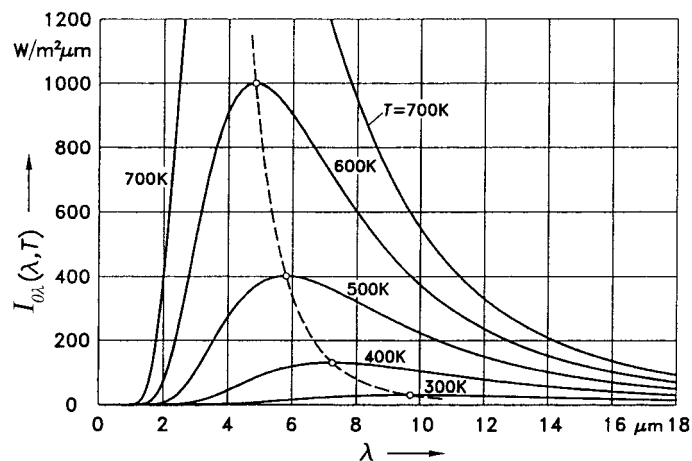
Całkowita intensywność promieniowania monochromatycznego ciała doskonale czarnego objętego półkulą zakreślona nad powierzchnią i skierowanego pod wszystkimi kątami zgodnie z prawem Lamberta wynosi:

$$I_{0\lambda} = \pi I_{0\lambda\perp} \quad (10.17)$$

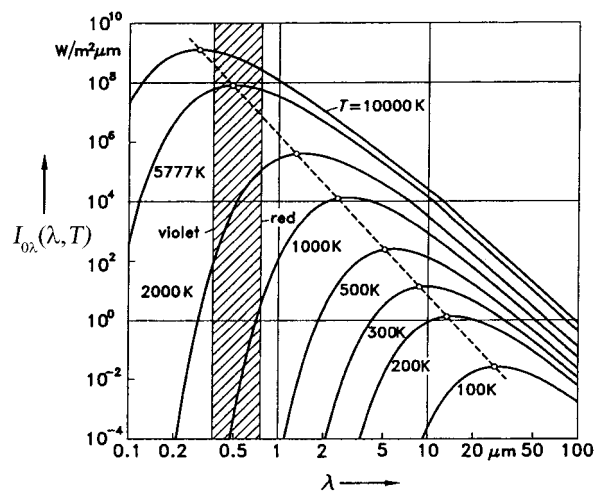
Prawo Plancka możemy zatem zapisać w postaci

$$I_{0\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (10.18)$$

gdzie:  $C_1 = 2\pi hc^2 = 0,374 \cdot 10^{-15} \text{ W} \cdot \text{m}^2$ ,  $C_2 = hc/k = 0,01439 \text{ m} \cdot \text{K}$ . Na rysunku 10.6 przedstawiono wykres tej zależności dla różnych wartości temperatury ciała doskonale czarnego. Obszar pod krzywą, stanowiący całkowitą energię emitowaną, wzrasta bardzo znacznie ze wzrostem temperatury.



Rys. 10.6. Intensywność promieniowania  $I_{0\lambda}(\lambda, T)$  ciała doskonale czarnego



Rys. 10.7. Intensywność promieniowania  $I_{0\lambda}(\lambda, T)$  ciała doskonale czarnego; zakreskowano zakres światła widzialnego

Energia wypromieniowywana przez ciało doskonale czarne,  $E_0$ ,  $\text{W}/\text{m}^2$  w zakresie długości fal od  $\lambda_1$  do  $\lambda_2$  jest proporcjonalna do pola powierzchni pod krzywą Plancka (rys. 10.6) i określona całką:

$$E_0 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_{0\lambda} d\lambda \quad (10.19)$$

Na rysunku 10.7 pokazano zależność intensywności promieniowania ciała doskonale czarnego z zaznaczonym zakresem światła widzialnego dla kilku wartości temperatury. Gdy temperatura ciała doskonale czarnego jest równa temperaturze powierzchni słońca (5800 K), większość energii jest emitowana w zakresie długości fal odpowiadającej światłu widzialnemu (0,4–0,7  $\mu\text{m}$ ).

### 10.3.4. Prawo Wiena

Maksimum intensywności promieniowania ciała doskonale czarnego oraz maksimum energii przesuwa się ku falom krótszym ze wzrostem temperatury ciała (por. rys. 10.6 i 10.7). Maksimum energii występuje dla  $\lambda_{\text{max}}T = 2897,6 \mu\text{m}\cdot\text{K}$ , co można potwierdzić przez określenie maksimum funkcji (10.18).

Już w 1883 r. Wien ustalił doświadczalnie związek

$$\lambda_{\text{max}}T = 2,897 \cdot 10^{-3}, \quad \text{m} \cdot \text{K} \quad (10.20)$$

Jest to tzw. prawo przesunięć Wiena i służy do obliczania długości fali odpowiadającej maksimum promieniowania w określonej temperaturze. Gdy na przykład  $T = 1000 \text{ K}$ ,  $\lambda_{\text{max}} = 2,9 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2,9 \mu\text{m}$ .

### 10.3.5. Prawo Stefana–Boltzmannna

Energię wypromieniowywaną przez jednostkową powierzchnię ciała doskonale czarnego można otrzymać jako całkę funkcji Plancka w zakresie długości fali od zera do nieskończoności

$$E_0 = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} I_{0\lambda} d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{C_1 \lambda^{-5} d\lambda}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} = C_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4 \quad (10.21)$$

Wielkość  $C_0$  nazywamy stałą promieniowania ciała doskonale czarnego. Jej wartość liczbową wynosi  $5,676 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ . Jest ona kombinacją innych stałych występujących w funkcji Plancka ( $C_0 = 2\pi^5 k^4 / (15c^2 h^3) \cdot 10^8$ ).

Prawo to, nazywane prawem Stefana–Boltzmannna, stwierdza, że energia wypromieniowana przez ciało doskonale czarne jest proporcjonalna do czwartej potęgi tem-

peratury absolutnej. Zostało ono ustalone eksperymentalnie przez Stefana w 1879 r. i potwierdzone na gruncie termodynamiki przez Boltzmann w 1884 r. Dokładna wartość stałej  $C_0$  i jej związek z innymi stałymi zostały jednak ustalone na podstawie prawa Plancka.

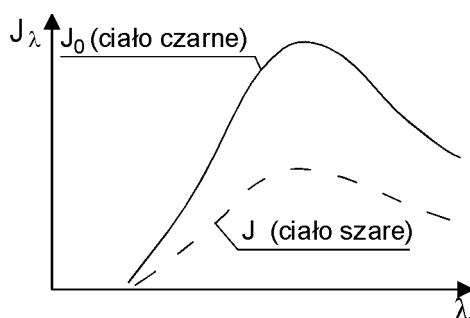
Ciała rzeczywiste emitują mniejszą energię w danej temperaturze (por. równ. (10.3)). Z przekształcenia równania (10.3) otrzymujemy

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon C_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4 \quad (10.22)$$

Jest to prawo Stefana–Boltzmana dla ciał szarych. Możemy je również zapisać w postaci:

$$E = C \left( \frac{T}{100} \right)^4 \quad (10.23)$$

gdzie  $C = \varepsilon C_0$ .



Rys. 10.8. Proporcjonalność intensywności promieniowania

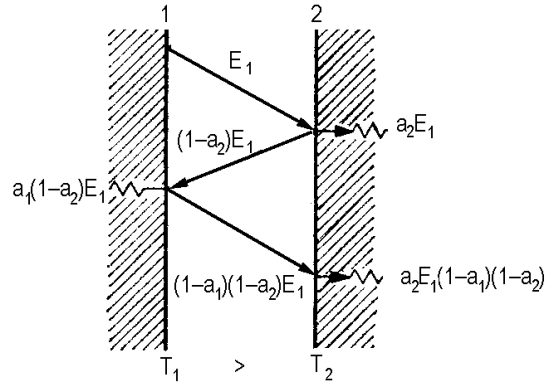
Ciało, dla którego dla każdej długości fali stosunek intensywności promieniowania do intensywności promieniowania ciała doskonale czarnego jest stały i wynosi  $\varepsilon$ , nazywamy ciałem idealnie szarym (rys. 10.8). Stałe promieniowania  $C$  ciał szarych lub ich emisyjności  $\varepsilon$  są podawane w tabelach.

## 10.4. Promieniowanie ciepłe między ciałami stałymi

Na podstawie dotychczas wyprowadzonych praw można przyjąć, że wymiana ciepła między dwoma ciałami stałymi zależy przede wszystkim od ich temperatury i emisyjności powierzchni. Okazuje się jednak, że podstawowe znaczenie ma geometria ciał i ułożenie względem siebie. W kolejnych rozdziałach omówiono podstawowe charakterystyczne przypadki.

### 10.4.1. Wymiana ciepła między dwoma równoległymi płytami

Zanalizujmy wyidealizowany układ nieskończenie dużych płyt szarych (rys. 10.9), tak że całe ich promieniowanie ulega wymianie. Płyta 1 ma temperaturę wyższą od temperatury płyty 2. Można przyjąć, że z jednostkowej powierzchni płyty 1 jest emitowana energia  $E_1$ . Powierzchnia chłodniejsza (płyta 2) absorbuje energię



Rys. 10.9. Schemat bilansu emisji promieniowania między dwoma ciałami szarymi

równą  $a_2E_1$ , odbija zaś energię  $(1 - a_2)E_1$ . Z tej energii z kolei powierzchnia 1 absorbuje  $a_1(1 - a_2)E_1$ , odbija natomiast  $(1 - a_1)(1 - a_2)E_1$ . Powierzchnia 2 pochłania energię  $a_2(1 - a_1)(1 - a_2)E_1$ , a odbija  $(1 - a_1)(1 - a_2)^2E_1$ . Sumując otrzymane w ten sposób kolejne ilości zaabsorbowanej energii przez płytę, otrzymujemy szereg:

$$\begin{aligned} q_{a2} &= a_2E_1 + a_2E_1(1 - a_1)(1 - a_2) + a_2E_1(1 - a_1)^2(1 - a_2)^2 \\ &+ \dots = a_2E_1(1 + p + p^2 + \dots) \end{aligned} \quad (10.24)$$

gdzie  $p = (1 - a_1)(1 - a_2)$ .

Szereg w nawiasie daje wyrażenie  $1/(1 - p)$ , z czego wynika związek

$$q_{a2} = \frac{a_2E_1}{1 - p} \quad (10.25)$$

Jeżeli przeprowadzimy taką samą analizę promieniowania wysyłanego przez płytę 2, otrzymamy podobne równanie określające energię zaabsorbowaną przez płytę 1:

$$q_{a1} = \frac{a_1E_2}{1 - p} \quad (10.26)$$

Końcowy bilans energii stanowi ciepło uzyskane przez płytę 2:

$$q_{1-2} = q_{a2} - q_{a1} = \frac{a_2 E_1}{1-p} - \frac{a_1 E_2}{1-p} \quad (10.27)$$

Wyrażenie  $(1-p)$  można zapisać w postaci

$$(1-p) = 1 - (1-a_1)(1-a_2) = a_2 + a_1 - a_1 a_2 \quad (10.28)$$

Po jego podstawieniu do równania (10.26) otrzymujemy

$$q_{1-2} = \frac{a_2 E_1 - a_1 E_2}{a_2 + a_1 - a_1 a_2} \quad (10.29)$$

Wartości  $E_1$  i  $E_2$  zastępujemy odpowiednimi wyrażeniami z prawa Stefana-Boltzmana i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} q_{1-2} &= \frac{a_2 a_1 C_0 \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - a_1 a_2 C_0 \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{a_2 + a_1 - a_1 a_2} \\ &= \left(\frac{a_1 a_2}{a_2 + a_1 - a_1 a_2}\right) C_0 \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \end{aligned} \quad (10.30)$$

i po dalszych przekształceniach mamy:

$$\begin{aligned} q_{1-2} &= \left(\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 1}\right) C_0 \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \\ &= \left(\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}\right) C_0 \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \end{aligned} \quad (10.31)$$

Strumień ciepła przekazanego od płyty 1 do płyty 2 o powierzchni  $A$  wynosi zatem

$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_z A C_0 \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right], \quad \text{W} \quad (10.32)$$

Zastępczą zdolność emisji układu dwóch płyt równoległych opisuje równanie

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (10.33)$$



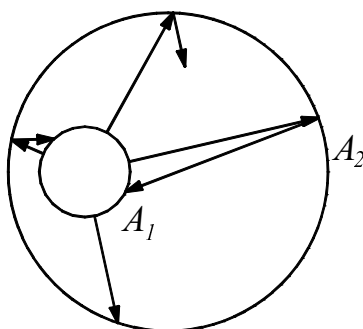
### 10.4.2. Wymiana ciepła od powierzchni $A_1$ zamkniętej przez powierzchnię $A_2$

W wyniku podobnej jak poprzednio analizy (rozd. 10.4.1) wymiany ciepła przez promieniowanie od powierzchni  $A_1$  otoczonej przez powierzchnię zamkniętą  $A_2$  (rys. 10.10) otrzymuje się wzór Christiansena

$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon'_z A_1 C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (10.34)$$

gdzie zastępcza zdolność emisji jest dana wzorem

$$\varepsilon'_z = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (10.35)$$



Rys. 10.10. Schemat układu z powierzchnią  $A_1$  wewnątrz powierzchni  $A_2$

W przypadku gdy powierzchnia  $A_2$  jest bardzo duża w porównaniu z powierzchnią  $A_1$ , zastępcza zdolność emisji jest równa zdolności emisji powierzchni  $A_1$ , tj.  $\varepsilon'_z = \varepsilon_1$ .

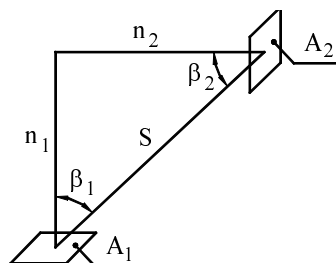
### 10.4.3. Wymiana ciepła między dwoma powierzchniami dowolnie ustawionymi

W przypadku dwu płaszczyzn ustawionych dowolnie względem siebie (rys. 10.11) można na podstawie prawa Lamberta wyprowadzić następujące równanie

$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 C_0 A \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{1-2} \quad (10.36)$$

gdzie tzw. współczynnik konfiguracji określa równanie

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{A} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (10.37)$$



Rys. 10.11. Schemat układu dwóch prostokątnych płaszczyzn

Według McAdamsa i Hottela dla ścian odbijających promieniowanie w przestrzeni zamkniętej równanie to można zapisać w postaci

$$\dot{Q}_{1-2} = \varphi_{1-2} C_0 A_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (10.38)$$

w którym współczynnik konfiguracji opisuje równanie

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_{1-2}} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (10.39)$$

Współczynnik  $\varphi_{1-2}$  uwzględnia w tym ujęciu konfigurację powierzchni szarych  $A_1$  i  $A_2$  w odróżnieniu od współczynnika  $\varphi$ , który odnosi się do powierzchni  $A_1$  i  $A_2$  doskonale czarnych. Jeżeli pola powierzchni są sobie równe, to  $A_1 = A_2$  i otrzymujemy wzór (10.32), jeżeli zaś  $A_1 < A_2$  dla  $\varphi_{1-2} = 1$ , to dochodzi się do wzoru Christiansena (10.34).

## 10.5. Promieniowanie gazów

Emisja i pochłanianie promieniowania przez gazy ma charakter selektywny. Wszystkie gazy jednoatomowe i dwuatomowe oprócz CO i HCl są prawie doskonale przezroczyste. Ich zdolność emisji i absorpcji promieniowania jest znikoma. Gazy i pary o niesymetrycznej budowie cząsteczki, takie jak CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, CO<sub>2</sub>, NH<sub>3</sub>, węglowodory i alkohole są natomiast zdolne do emitowania i absorbowania promieniowania. Ponieważ energia gazów jest związana z oscylacjami bądź rotacją cząsteczek, więc mogą być emi-

towane lub absorbowane kwanty promieniowania odpowiadające różnicy energii między dozwolonymi stanami. Dla przykładu pasma promieniowania CO<sub>2</sub> odpowiadają następującym wartościom długości fali  $\lambda$  (w  $\mu\text{m}$ ): 2,64–2,84, 4,13–4,47 oraz 13,0–17,0, pomijając fale krótsze, świetlne, dające niewielkie ilości energii cieplnej.

Podobnie promieniowanie pary wodnej składa się z pasm o długościach fali  $\lambda$  (w  $\mu\text{m}$ ): 2,24–3,27, 4,80–8,50 oraz 12,0–25,0. Gazy te są produktami spalania węglowodorów oraz innych ciał stałych (m.in. węgla).

Istotna różnica pomiędzy promieniowaniem gazów i ciał stałych polega również na tym, że w gazach emisja i pochłanianie promieniowania zachodzą w całej objętości. W przypadku wiązki promieniowania monochromatycznego o intensywności  $I_\lambda$  przechodzącego przez płaską warstwę gazu grubości  $s$ , pochłanianie energii następuje zgodnie z zależnością

$$dI_{\lambda s} = -k_\lambda I_{\lambda x} dx \quad (10.40)$$

w którym:  $I_\lambda$  – intensywność promieniowania w odległości  $x$  od początku warstwy,  $k_\lambda$  – współczynnik pochłaniania, zależny od ciśnienia i temperatury gazu.

Po scałkowaniu równania (10.39) w granicach od 0 do  $s$  otrzymujemy

$$I_{\lambda s} = I_\lambda \exp(-k_\lambda s) \quad (10.41)$$

oraz różnicę

$$I_\lambda - I_{\lambda s} = I_\lambda [1 - \exp(-k_\lambda s)] \quad (10.42)$$

stanowiącą energię zaabsorbowaną przez warstwę gazu.

Wielkość w nawiasie kwadratowym oznacza współczynnik absorpcji promieniowania gazu  $Z_{Ag}$  dla długości fali  $\lambda$ , który zgodnie z prawem Kirchhoffa jest równy emisyjności  $\varepsilon_{g\lambda}$ . Całkowite wartości tych współczynników otrzymuje się przez ich zsumowanie w zakresie długości fali pasma promieniowania. Wielkości  $\varepsilon_{g\lambda}$  i  $Z_{Ag}$  zależą od kształtu i wymiarów warstwy gazu. Dla całego zakresu promieniowania  $\varepsilon = f(T, p, s)$  odczytuje się z odpowiednich wykresów (rys. 10.12 i 10.13).

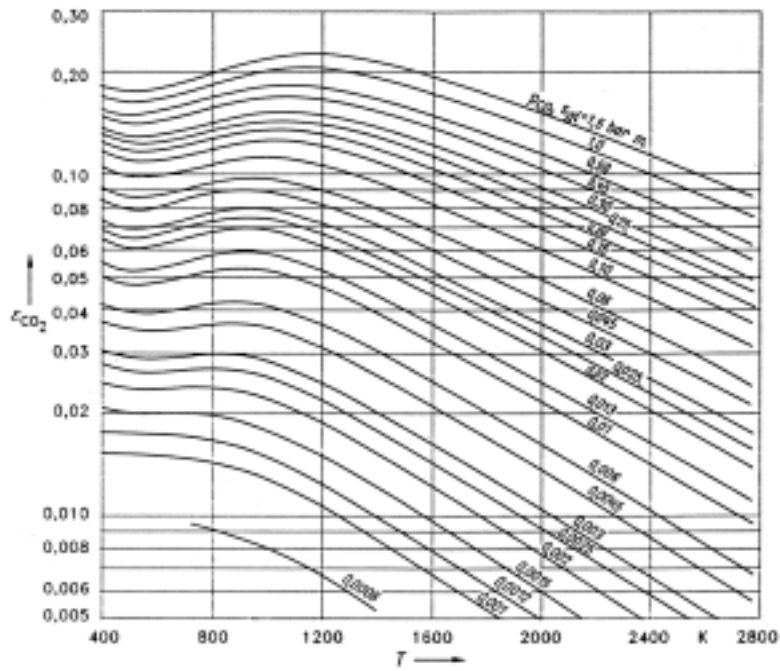
Według wielu autorów prac doświadczalnych energia promieniowania gazów nie podlega prawu Stefana–Boltzmanna. Otrzymane zależności mają zatem postać:

- dla CO<sub>2</sub>

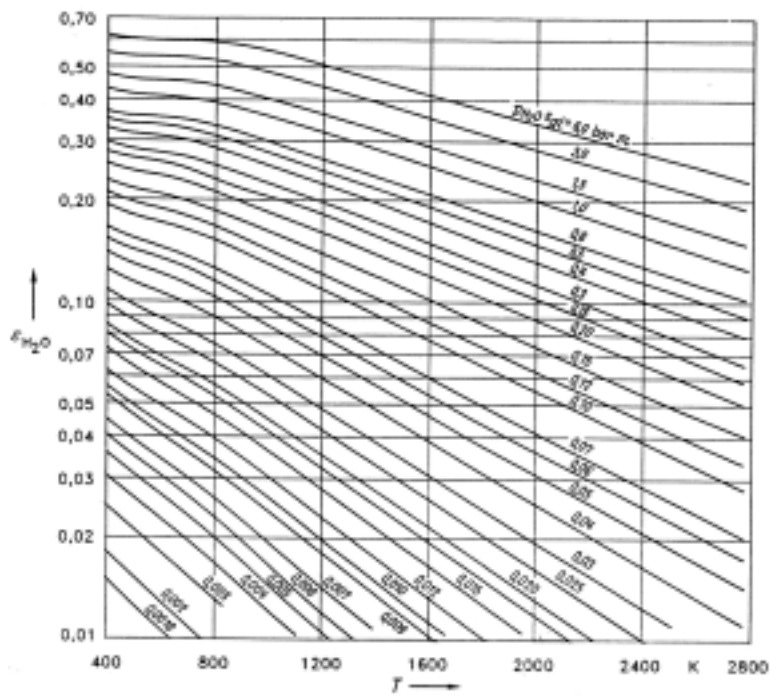
$$E_{\text{CO}_2} = 0,087 (ps)^{1/3} \left( \frac{T}{100} \right)^{3,5}, \quad \text{W/m}^2 \quad (10.43)$$

- dla pary H<sub>2</sub>O

$$E_{\text{H}_2\text{O}} = 4,03 \cdot 10^{-4} p^{0,8} s^{0,6} \left( \frac{T}{100} \right)^3, \quad \text{W/m}^2 \quad (10.44)$$



Rys. 10.12. Zależność całkowitej emisyjności  $\epsilon_{CO_2}$  od temperatury  $T$  i iloczynu  $ps$  pod ciśnieniem 1 bara



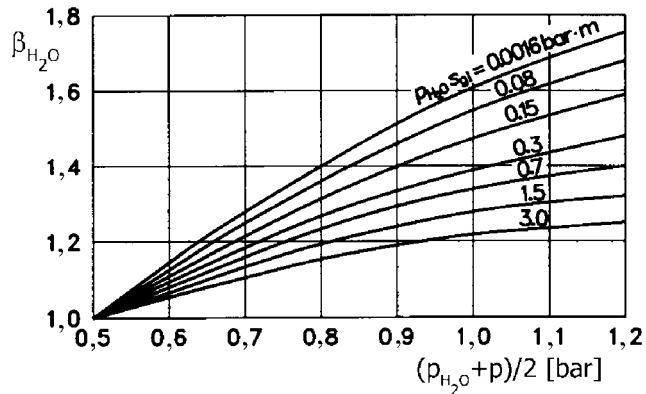
Rys. 10.13. Zależność całkowitej emisyjności  $\epsilon_{H_2O}$  od temperatury  $T$  i iloczynu  $ps$  pod ciśnieniem 1 bara

Stosuje się również równanie Stefana–Boltzmanna

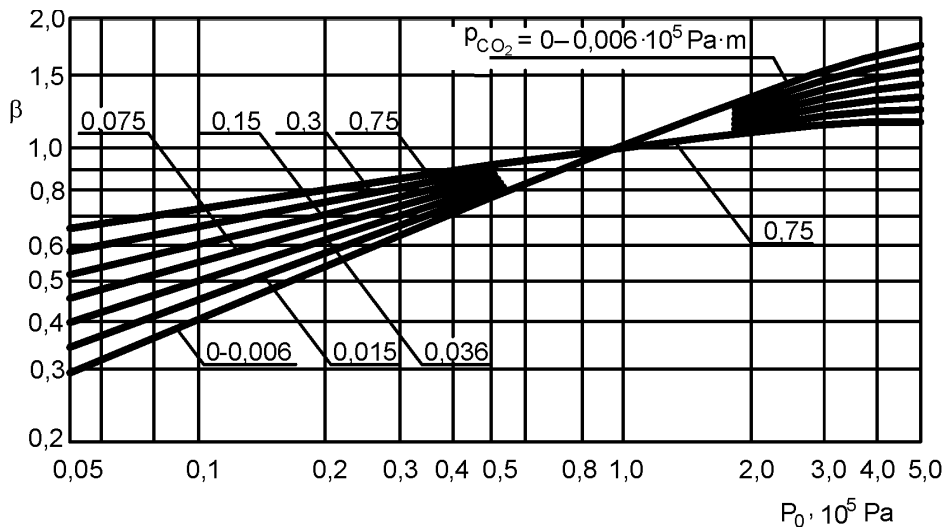
$$E_g = \varepsilon_g C_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4 \quad (10.45)$$

po wprowadzeniu odpowiednich wartości emisyjności  $\varepsilon_g$  dla danego gazu, np. odczytanych z wykresów (rys. 10.12 i 10.13).

Przedstawiony wykres dla pary wodnej zawiera poprawne wartości dla małych stężeń pary. W przypadku wyższych stężeń pary wodnej odczytane wartości emisyjności  $\varepsilon_g$  należy skorygować przez pomnożenie ich przez poprawkę  $\beta_{\text{H}_2\text{O}}$ , zależną od prężności pary oraz iloczynu prężności pary i grubości warstwy, odczytaną z innego wykresu (rys. 10.14).



Rys. 10.14. Zależność poprawki  $\beta_{\text{H}_2\text{O}}$  od ciśnienia



Rys. 10.15. Zależność poprawki  $\beta_{\text{CO}_2}$  od ciśnienia

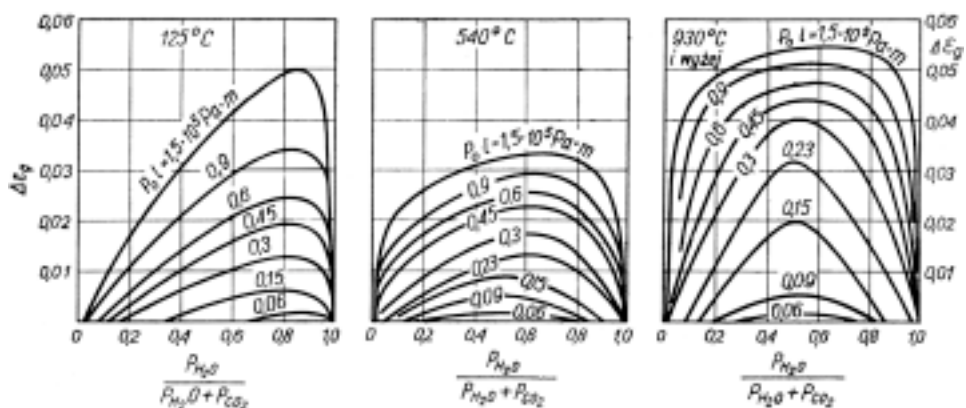
Podobnie dla CO<sub>2</sub> należy uwzględnić poprawkę  $\beta_{\text{CO}_2}$  (rys. 10.15) w zależności od ciśnienia całkowitego i iloczynu ciśnienia cząstkowego CO<sub>2</sub> i grubości warstwy.

Uwzględnienie obecności ściany biorącej udział w wymianie ciepła znacznie utrudnia zadanie. Dla obliczeń technicznych zaleca się zależność:

$$q_{g-s} = \varepsilon'_s C_0 \left[ \varepsilon_g \left( \frac{T_g}{100} \right)^4 - a_g \left( \frac{T_s}{100} \right)^4 \right], \quad \text{W/m}^2 \quad (10.46)$$

gdzie:  $q_{g-s}$  – ciepło wymieniane między gazem a ścianą na 1 m<sup>2</sup> powierzchni,  $T_g$  – temperatura gazu,  $T_s$  – temperatura ściany biorącej udział w wymianie ciepła,  $\varepsilon'_s = (\varepsilon_s + 1)/2$  jest efektywną zdolnością emisyjną ściany,  $\varepsilon_s$  – teoretyczną zdolnością emisyjną ściany,  $\varepsilon_g$  – zastępczą zdolnością emisyjną gazu (z wykresów) w temperaturze gazu,  $a_g$  – zastępczą zdolnością absorpcyjną gazu w temperaturze ściany.

W obliczeniach technicznych można przyjąć, że  $a_g = \varepsilon_g$  w temperaturze ściany i odczytać je z wykresów.



Rys. 10.16. Zależność poprawki  $\Delta\varepsilon_g$  od stosunku ciśnienia

W przypadku promieniowania mieszaniny gazów emisja poszczególnych składników nakłada się; zastępczą zdolność emisji i absorpcji określa się z następujących zależności:

- dla temperatury gazu

$$\varepsilon_g = \beta_{\text{CO}_2} \varepsilon_{g(\text{CO}_2)} + \beta_{\text{H}_2\text{O}} \varepsilon_{g(\text{H}_2\text{O})} - \Delta\varepsilon_g \quad (10.47)$$

- dla temperatury ściany

$$a_g = \beta_{\text{CO}_2} \varepsilon_{g(\text{CO}_2)} \left( \frac{T_g}{T_s} \right)^{0.65} + \beta_{\text{H}_2\text{O}} \varepsilon_{g(\text{H}_2\text{O})} \left( \frac{T_g}{T_s} \right)^{0.45} - \Delta\varepsilon_g \quad (10.48)$$

Wartości poprawek  $\Delta\varepsilon_g$  należy odczytać z odpowiednich wykresów (rys. 10.16) w zależności od temperatury gazu.

# 11. Obliczanie wymienników ciepła

## 11.1. Klasyfikacja wymienników ciepła

Wymienniki ciepła są to urządzenia, w których zachodzi przekazywanie energii między dwoma płynami. Ze względu na sposób działania dzielimy je na trzy rodzaje.

Podstawową grupę (według Hoblera) stanowią wymienniki powierzchniowe, inaczej przeponowe lub rekuperatory. Gorący czynnik, oddający ciepło, oraz zimny płyn przejmujący ciepło, przepływają rozdzielone wzdłuż ściany rury albo ściany płaskiej, lub zakrzywionej. Wymiana energii zachodzi kolejno od gorącego płynu do ściany przez konwekcję, następnie przez przewodzenie w ścianie i w końcu ponownie przez konwekcję w płynie chłodniejszym. Zaletą wymienników tego typu jest możliwość ustalonej wymiany ciepła z utrzymaniem czystości płynów bez ich mieszania się.

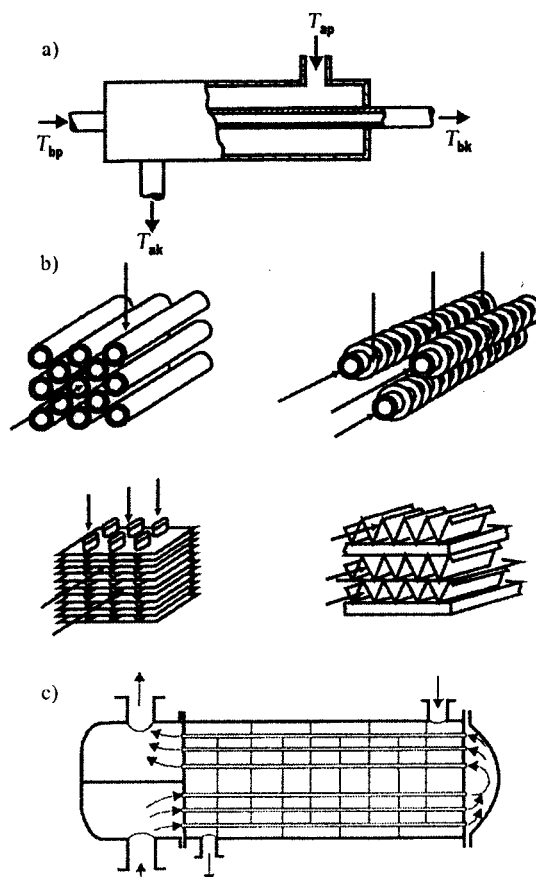
Drugą grupę stanowią tzw. regeneratory, czyli wymienniki ciepła z wypełnieniem. W aparatach tych znajduje się wypełnienie z ciała stałego w postaci kształtek, kul lub blach, nieruchomych albo będących w ruchu. Czynnik gorący i zimny płyn przepływają przez wolną objętość wypełnienia naprzemian. Czynnik gorący oddaje energię cieplną do wypełnienia, po czym zimny płyn przejmuje ją. Ruch ciepła jest z zasady nieustalony, tj. temperatura zmienia się w czasie. Do tej grupy należą regeneratory pieców Siemens–Martina oraz niektóre generatory gazu.

Wymiennik, którego wypełnienie ma wewnętrzne źródło ciepła, nazywamy reaktorem.

Trzecią grupę stanowią wymienniki ciepła bezprzeponowe mokre (mieszankowe). Są to aparaty, w których czynniki wymieniające ciepło mieszają się. Najczęściej jednym czynnikiem jest gaz, drugi znajduje się w fazie ciekłej. Ciecz sływa po wypełnieniu, gaz zaś przepływa przez pustą przestrzeń między elementami wypełnienia. Ciepło jest wymieniane przez wnikanie od gazu do filmu cieczy, ale też przez równoczesną dyfuzję masy. Ruch ciepła i masy może być przy tym skierowany od cieczy do gazu lub kierunki ruchu ciepła i masy mogą być przeciwne. Ruch ciepła i masy zachodzi w sposób ciągły, ustalony. Zaletą takich wymienników jest duża intensywność wymiany, wadą zaś – mieszanie się płynów.

## 11.2. Typy konstrukcji wymienników ciepła

Wymienniki ciepła są również klasyfikowane ze względu na konfigurację i liczbę przejść przez płyn. Kształt przegrody rozgraniczającej może być różny: ściana płaska, rurowa zwykła lub rurowa żebrowana.



Rys. 11.1. Rozwiązania konstrukcyjne wymienników ciepła:  
 a) wymiennik ciepła typu rura w rurze, b) wymienniki z krzyżowym przepływem płynów,  
 c) wymiennik ciepła wielorurkowy – dwudrożny

Ze względu na kierunek przepływu płynów wyróżnia się:

- wymienniki współprądowe, w których kierunek i zwrot przepływu obu czynników jest zgodny,
- wymienniki przeciwpładowe, w których kierunek przepływu czynników jest zgodny, zwrot zaś przeciwny,



- wymienniki krzyżowe, w których kierunek i prędkość przepływu czynników są prostopadłe.

W najprostszym przypadku przepływ czynnika przez wymiennik ciepła jest jedno-razowy. Typowym przykładem takiej konfiguracji jest wymiennik typu rura w rurze, przedstawiony schematycznie na rys. 11.1a. Schemat wymienników z przepływem krzyżowym pokazano na rys. 11.1b.

W rozwiązaniach przedstawionych na rys. 11.1a i b płyny przepływają oddzielnie różnymi kanałami: w pierwszym przypadku przepływ jest przeciwaprądowy, a w drugim – krzyżowy. Strumienie płynów opuszczających kolejne kanały na rys. 11.1b różnią się temperaturą, gdyż poszczególne sekcje są w kontakcie z sąsiednimi strumieniami płynu o różnej temperaturze.

W celu osiągnięcia maksymalnej efektywności wymiany energii w jak najmniejszej objętości jednostkowej wymiennika jest wskazane stosowanie rozwiązania konfiguracyjnego z dwu- lub wielokrotnym przepływem czynnika. Typowym przykładem jest wymiennik ciepła wielorurkowy (dwudrożny), przedstawiony na rys. 11.1c. Jeden płyn przepływa przez dwa zestawy rurek, drugi natomiast – przez przestrzeń pomiędzy rurkami obu zestawów rurek. Inne, bardziej złożone typy konstrukcji wymienników ciepła, będą omówione w następnym rozdziale.

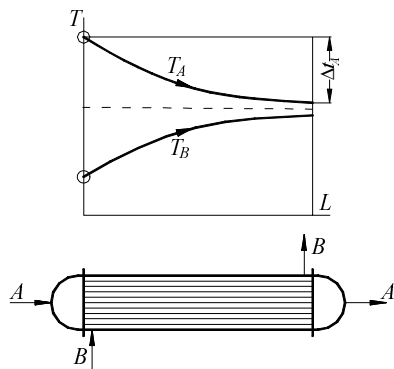
### 11.3. Warunki pracy wymienników ciepła

Aparaty do wymiany ciepła można klasyfikować ze względu na kierunek przepływu płynów względem siebie. Rozróżnia się:

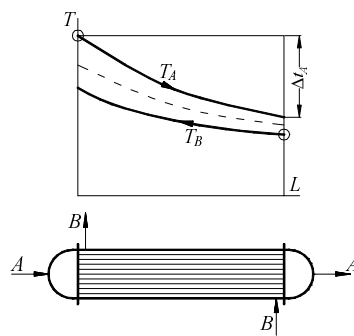
- wymienniki współprądowe, w których kierunek i zwrot prędkości przepływu obu czynników są zgodne,
- wymienniki przeciwaprądowe, w których kierunek prędkości przepływu obu czynników jest zgodny, a zwrot przeciwny,
- wymienniki prądu mieszanego, w których kierunki prędkości przepływu są prostopadłe lub inne.

Schematy wymienników ciepła i rozkładu temperatury płynów dla przepływu współprądowego i przeciwaprądowego przedstawiono na rys. 11.2 i rys. 11.3. Jeżeli przyjmujemy jednakowe wartości współczynników wnikania ciepła po obu stronach ściany, to temperatura ścianki ma wartość pośrednią między temperaturą obu czynników i może być stała (rys. 11.2). Utrzymanie niskiej temperatury ścianki jest podstawową zaletą tego systemu. W przeciwaprądowym przepływie płynów możemy schłodzić czynnik *a* do temperatury niższej od temperatury końcowej czynnika *b* (rys. 11.3), czynnik *b* natomiast możemy podgrzać do temperatury wyższej od temperatury końcowej czynnika *a*. Możemy więc przyjąć, że:

$$\Delta t_{a(\text{przeciwp.})} > \Delta t_{a(\text{współp.})}$$



Rys. 11.2. Schemat współprądowego wymiennika ciepła i rozkładu temperatury płynów



Rys. 11.3. Schemat przeciwprądowego wymiennika ciepła i rozkładu temperatury płynów

Pod względem najlepszego wykorzystania ciepła do wymiany zaleca się z reguły stosowanie przeciwprądowego przepływu płynów. Maksymalna temperatura ścianki jest wówczas dużo wyższa niż w przepływie współprądowym. Według Hoblera [4] nie jest wskazane przekraczanie temperatury ścianki 700 °C ze względu na temperaturę pełzania materiału. Temperatura ta jest w przypadku stali ognioodpornych kilkaset stopni niższa od ich temperatury topnienia.

Łatwo uzasadnić, że rozkład temperatury zależy od stosunku pojemności cieplnej obu płynów oraz od rodzaju ich przepływu. Pojemnością cieplną płynu lub równoważnikiem wodnym płynu nazywamy iloczyn strumienia płynu i jego ciepła właściwego

$$W = \dot{m}c_p \quad (11.1)$$

Jeżeli założymy adiabatyczną wymianę ciepła, to równanie bilansu cieplnego dla obu płynów przyjmie następującą postać

$$\dot{Q}_{a-b} = W_a (T_{a1} - T_{a2}) = \pm W_b (T_{b1} - T_{b2}) \quad (11.2)$$

Znak plus przyjmujemy dla przeciwprądu, znak minus – dla współprądu.

Po uwzględnieniu równania (11.1)

$$\dot{Q}_{a-b} = \dot{m}_a c_{pa} (T_{a1} - T_{a2}) = \pm \dot{m}_b c_{pb} (T_{b1} - T_{b2}) \quad (11.3)$$

i po przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{W_b}{W_a} = \pm \frac{T_{a1} - T_{a2}}{T_{b1} - T_{b2}} \quad (11.4)$$

Dalszą analizę rozkładu temperatury płynów i temperatury ścianki przedstawiono w kolejnych rozdziałach.

## 11.4. Średnia różnica temperatury

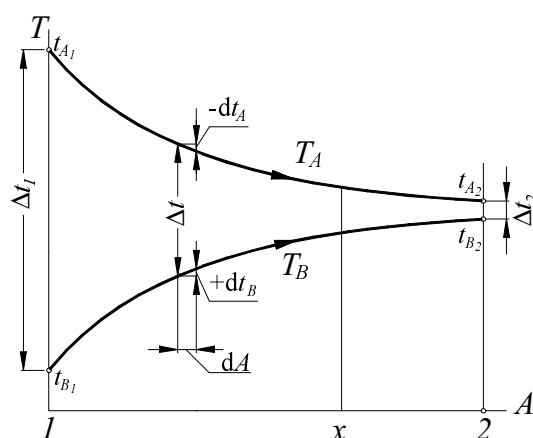
### 11.4.1. Przeciwną i współprądowy przepływ płynów

Obliczanie wymiennika ciepła sprowadza się do określenia warunków hydrodynamicznych przepływu poszczególnych strumieni płynów, wyznaczenia współczynnika przenikania ciepła  $k$  oraz określenia średniej różnicy temperatury. Na tej podstawie możemy wyznaczyć powierzchnię wymiany ciepła potrzebną do przekazania określonego strumienia ciepła.

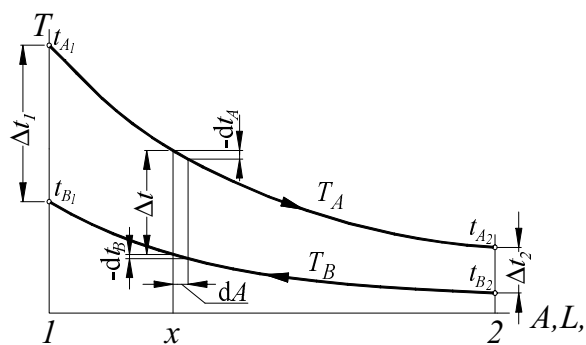
Podstawowym równaniem do tych obliczeń jest równanie Pecleta dla przenikania ciepła

$$\dot{Q} = kA\Delta T \quad (11.5)$$

w którym różnica temperatury  $\Delta T$  jest siłą napędową wymiany strumienia ciepła  $\dot{Q}$ .



Rys. 11.4. Rozkład różnic temperatury we współprądowym wymienniku ciepła



Rys. 11.5. Rozkład różnic temperatury w przeciwną wymienniku ciepła

Różnica temperatury poszczególnych płynów z reguły się zmienia wzdłuż powierzchni i drogi wymiany ciepła. Jedynym w szczególnym przypadku, jakim jest wyparka, w której po jednej stronie ścianki ciecz wrze, a po drugiej skrapla się nasycona para grzejna, ta różnica temperatury jest stała. Najczęściej jednak różnica temperatury płynów  $\Delta T = T_a - T_b$  zmienia się wzdłuż drogi przepływu, jak pokazano na rys. 11.4 i 11.5 dla współprądowego i przeciwprądowego wymiennika ciepła. W każdym przekroju różnica temperatury płynów jest inna. Jedynym możliwym rozwiązaniem jest wprowadzenie definicji średniej różnicy temperatury  $\Delta T_m$ , aby obowiązywało równanie Pecleta

$$\dot{Q} = kA\Delta T_m \quad (11.6)$$

W celu wyprowadzenia wzorów na średnią różnicę temperatury rozpatruje się wiele równań. Na różniczkowej powierzchni wymiennika ciepła  $dA$  gorący płyn oddaje w jednostce czasu różniczkową ilość ciepła  $d\dot{Q}_a$ :

$$d\dot{Q}_a = -\dot{m}_a c_{pa} dT_a \quad (11.7)$$

Całkowity strumień ciepła przekazany na całej powierzchni  $A$ , tzn. na drodze od przekroju 1 do przekroju 2 (rys. 11.5), wynosi

$$\dot{Q}_a = -\dot{m}_a \int_{T_{a1}}^{T_{a2}} c_{pa} dT_a \quad (11.8)$$

W równaniach tych mamy znak  $-$  dla przeciwprądu oraz znak  $+$  dla współprądu.

Strumień ciepła można opisać ze względu na wymianę ciepła między czynnikami:

- w odniesieniu do elementu powierzchni  $dA$

$$d\dot{Q}_{a-b} = kdA\Delta T \quad (11.9)$$

- do całkowitej powierzchni  $A$

$$\dot{Q}_{a-b} = A(k\Delta T)_m \quad (11.10)$$

Równanie (11.9) przekształcamy do postaci

$$dA = \frac{d\dot{Q}_{a-b}}{k\Delta T} \quad (11.11)$$

Można przyjąć, że w adiabatycznym wymienniku ciepła  $d\dot{Q}_a = d\dot{Q}_{a-b}$  oraz  $\dot{Q}_a = \dot{Q}_{a-b}$ . Po podstawieniu wzoru (11.7) do (11.11), otrzymujemy

$$dA = -\frac{\dot{m}_a c_{pa} dT_a}{k\Delta T} \quad (11.12)$$

oraz po scałkowaniu

$$A = -\dot{m}_a \int_{T_{a1}}^{T_{a2}} \frac{c_{pa} dT_a}{k\Delta T} \quad (11.13)$$

Po podstawieniu ostatniego wyrażenia do wzoru (11.10)

$$\dot{Q}_{a-b} = -\dot{m}_a \int_{T_{a1}}^{T_{a2}} \frac{c_{pa} dT_a}{k\Delta T} (k\Delta T)_m \quad (11.14)$$

i porównaniu równania (11.14) z równaniem (11.8) otrzymujemy

$$-\dot{m}_a \int_{T_{a1}}^{T_{a2}} c_{pa} dT_a = -\dot{m}_a \int_{T_{a1}}^{T_{a2}} \frac{c_{pa} dT_a}{k\Delta T} (k\Delta T)_m \quad (11.15)$$

po przekształceniu zaś

$$(k\Delta T)_m = \frac{\int_{T_{a1}}^{T_{a2}} c_{pa} dT_a}{\int_{T_{a1}}^{T_{a2}} \frac{c_{pa} dT_a}{k\Delta T}} \quad (11.16)$$

oraz założeniu, że  $c_p = \text{const}$  mamy:

$$(k\Delta T)_m = \frac{T_{a2} - T_{a1}}{\int_{T_{a1}}^{T_{a2}} \frac{dT_a}{k\Delta T}} \quad (11.17)$$

dla  $k = \text{const}$  zaś

$$\Delta T_m = \frac{T_{a2} - T_{a1}}{\int_{T_{a1}}^{T_{a2}} \frac{dT_a}{\Delta T}} \quad (11.18)$$

Jeżeli założymy, że  $k = \text{const}$ , to z równania (11.10) otrzymujemy równanie Pecleta w ogólnej postaci:

$$\dot{Q} = kA\Delta T_m \quad (11.19)$$

Do scałkowania wyrażenia na średnią różnicę temperatury konieczna jest znajomość zależności  $\Delta T = f(T_a)$ . Zależność ta jest najczęściej liniowa. Wyjątek stanowi chłodzenie przeponowe mieszaniny gazu i pary, kiedy część pary się wykrapla. Jeżeli

założymy prostoliniową zależność:  $\Delta T = aT_a + b$  (tj. równanie  $y = ax + b$ ), to po przekształceniu otrzymujemy:

$$\Delta T_m = \frac{T_{a2} - T_{a1}}{\int_{T_{a1}}^{T_{a2}} \frac{dT_a}{\Delta T}} = \frac{T_{a2} - T_{a1}}{\int_{T_{a1}}^{T_{a2}} \frac{dT_a}{aT_a + b}} = \frac{T_{a2} - T_{a1}}{\frac{1}{a} \ln \frac{aT_{a2} + b}{aT_{a1} + b}} = \frac{aT_{a2} - aT_{a1}}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \quad (11.20)$$

a po dodaniu w liczniku stałych  $b$  i  $-b$  mamy

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \quad (11.21)$$

Jest to tzw. średnia logarymiczna różnica temperatury płynów. Wyrażenie to obowiązuje również, gdy jedna z wartości temperatury jest stała (linia  $T_b$ ), jak np. podczas kondensacji czy odparowania. Taką samą postać równania otrzymujemy dla współprądowego przepływu czynników.

Gdy współczynnik przenikania ciepła nie jest stały, musimy posługiwać się równaniem (11.6) lub (11.7). W szczególnym przypadku, gdy wyrażenie  $(k\Delta T)$  zmienia się liniowo w zależności od  $T_a$  lub  $T_b$ , rozwiązanie otrzymuje się jako średnią logarymiczną:

$$(k\Delta T)_m = \frac{(k\Delta T)_2 - (k\Delta T)_1}{\ln \frac{(k\Delta T)_2}{(k\Delta T)_1}} \quad (11.22)$$

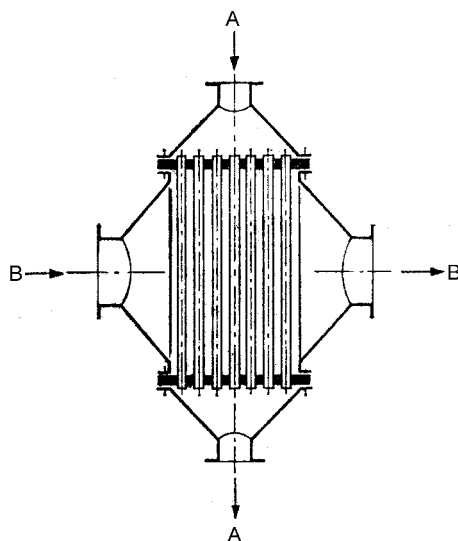
Częściej współczynnik  $k$  i różnica temperatury  $\Delta T$  są odrębnymi liniowymi funkcjami temperatury czynnika  $a$ . Obowiązuje wówczas wzór Colburna:

$$(k\Delta T)_m = \frac{k_1 \Delta T_2 - k_2 \Delta T_1}{\frac{k_1 \Delta T_2}{k_2 \Delta T_1}} \quad (11.23)$$

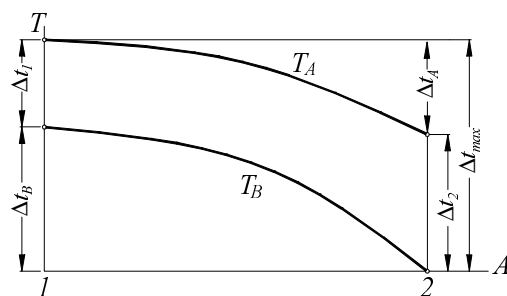
Całkowanie możemy wykonać metodą graficzną lub innymi przybliżonymi metodami.

### 11.4.2. Prądy skrzyżowane i mieszane

Najczęściej spotykanym przypadkiem przepływu mieszanego jest przepływ krzyżowy. Zasadę działania wymiennika z przepływem krzyżowym pokazano na rys. 11.6. Średnią różnicę temperatury obliczamy jak dla przepływu przeciwno- i wprowadzamy poprawkę  $\varepsilon$ . Poprawka  $\varepsilon$  jest wskaźnikiem zmiany intensywności wymiany ciepła. Wykres zmian temperatury dla zastępczego układu przepływu krzyżowego pokazano na rys. 11.7.



Rys. 11.6. Wymiennik ciepła z przepływem krzyżowym



Rys. 11.7. Rozkład różnic temperatury dla zastępczego układu z przepływem krzyżowym

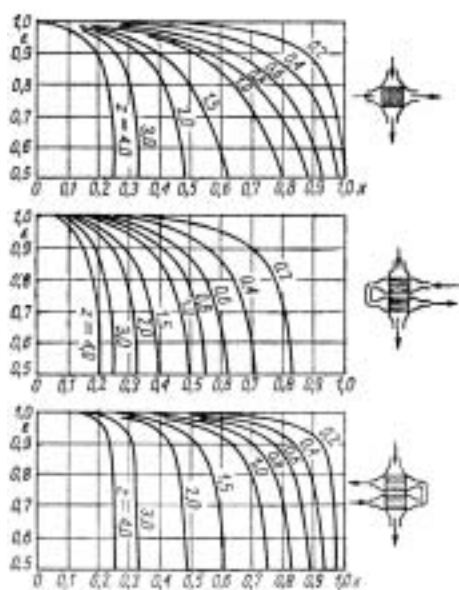
Jeżeli średnią różnicę temperatury dla przepływu krzyżowego określa równanie

$$\Delta T'_m = \varepsilon \Delta T_m = \varepsilon \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \quad (11.24)$$

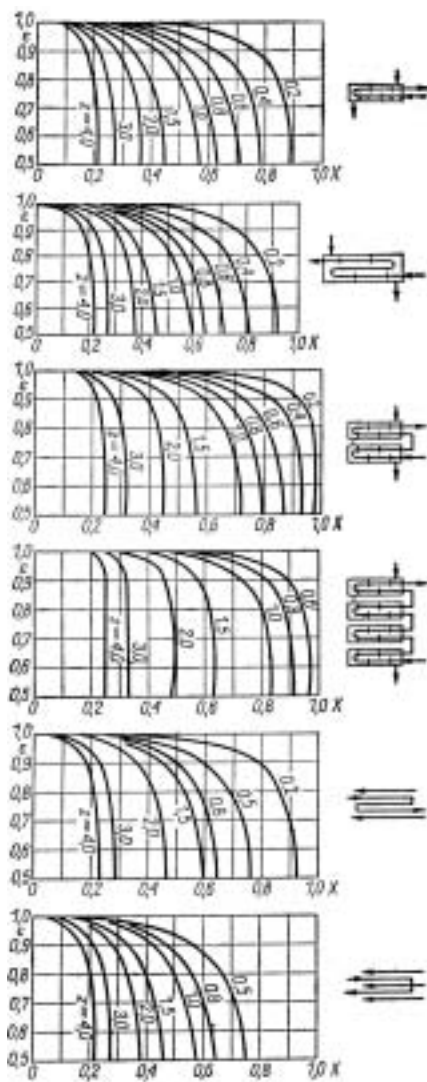
a powierzchnia wymiany ciepła wymiennika wynosi

$$A = \frac{\dot{Q}}{k \varepsilon \Delta T_m} \quad (11.25)$$

to poprawka  $\varepsilon$  określa stosunek obniżenia średniej różnicy temperatury w przepływie krzyżowym do średniej różnicy temperatury dla przepływu przeciwnieprądowego  $\Delta T_m$ . Poprawka ta zależy od parametrów  $X$  i  $Z$ .



Rys. 11.8. Zależności  $\epsilon = f(X, Z)$  dla różnych przypadków przepływu krzyżowego (wewnątrz rurek i prostopadle do nich według schematu)



Rys. 11.9. Zależności  $\epsilon = f(X, Z)$  dla różnych przypadków przepływu mieszanego

Parametr  $X$  definiujemy jako stosunek różnicy temperatury końcowej i początkowej czynnika  $b$  (ogrzanie czynnika  $b$ ,  $\Delta T_b$ ) do maksymalnej różnicy temperatury w układzie  $\Delta T_{\max}$ , parametr  $Z$  zaś jako stosunek różnicy temperatury początkowej i końcowej czynnika  $a$  (ochłodzenie czynnika  $a$ ,  $\Delta T_b$ ) do maksymalnej różnicy temperatury  $\Delta T_{\max}$ :



$$X = \frac{T_{bk} - T_{bp}}{T_{ap} - T_{bp}} = \frac{\Delta T_b}{\Delta T_{\max}} \quad (11.26)$$

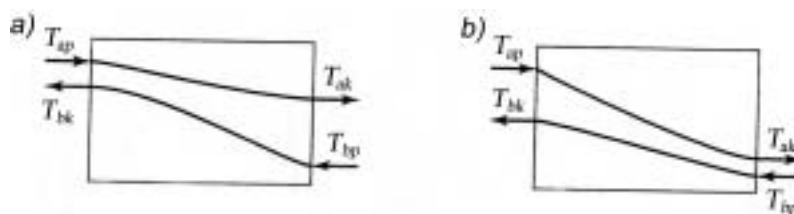
$$Z = \frac{T_{ap} - T_{ak}}{T_{bk} - T_{bp}} = \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b} \quad (11.27)$$

Wykresy zależności poprawki  $\varepsilon = f(X, Z)$  dla przepływu mieszanego różnego rodzaju pokazano na rys. 11.8 i rys. 11.9. Wykresy te zostały opracowane przez Michiejewa (według [4]). Odrębnym zagadnieniem jest wymiana ciepła w tzw. rurkach Fielda (jedna rurka wewnątrz innej rurki), szczegółowo omówionym w podręczniku Hoblera [4].

## 11.5. Obliczenia wielkości wymiennika oparte na jego sprawności

W niektórych podręcznikach [2] oraz w literaturze amerykańskiej [12] poleca się metodę obliczania wymienników ciepła opartą na liczbie jednostek wymiany (ang. *Number of Transfer Units* – NTU). Już w 1930 r. Nusselt zaproponował metodę analizy opartą na efektywności wymiennika ciepła  $\eta$ . Efektywność (sprawność) wymiennika ciepła jest stosunkiem jego wydajności do wydajności, jaką uzyskałby, gdyby czynnik o mniejszym równoważniku wodnym przepływu wykorzystał całkowicie maksymalną różnicę temperatury  $\Delta T_{\max} = T_{a1} - T_{b1}$  w tym wymienniku

$$\eta = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} \quad (11.28)$$



Rys. 11.10. Rozkład temperatury dla przeciwnadwowych wymienników ciepła:

a)  $W_a > W_b$ ,  $W_b = W_{\min}$ ; b)  $W_b > W_a$ ,  $W_a = W_{\min}$

Takie całkowite wykorzystanie  $\Delta T_{\max}$  jest możliwe w wymienniku przeciwnadwowym o nieograniczonej powierzchni. W wymienniku współprądowym jest to możliwe jedynie wówczas, gdy jeden z równoważników wodnych przepływu jest nieskończenie duży, a więc w skraplaczu lub w parownicy. Jak wiadomo płyn o mniejszym równoważniku wodnym ( $W_{\min}$ ) doświadcza większej zmiany temperatury. Jeżeli przyjmie-

my, że  $W_b = W_{\min}$  (jak na rys. 11.10a dla przeciwwprądu), to w przypadku nieskończenie dużej powierzchni wymiany temperatura płynu  $b$  na wylocie będzie równa temperaturze wlotowej płynu  $a$ . Zgodnie z definicją mamy

$$\dot{Q}_{\max} = W_{\min} (T_{ap} - T_{bp}) = W_{\min} \Delta T_{\max} \quad (11.29)$$

a następnie

$$\dot{Q} = W_{\max} (T_{ap} - T_{ak}) = W_{\max} \Delta T_{\min} \quad (11.30)$$

oraz

$$\eta = \frac{W_a (T_{ap} - T_{ak})}{W_b (T_{bk} - T_{bp})_{\max}} = \frac{W_{\max} (T_{bk} - T_{bp})}{W_{\min} (T_{ap} - T_{bp})} \quad (11.31)$$

Jeśli płyn gorący jest płynem minimum, jak na rys. 11.10 b, to ostatnie wyrażenie przyjmie postać

$$\eta = \frac{W_b (T_{bk} - T_{bp})}{W_a (T_{ap} - T_{ak})_{\max}} = \frac{W_{\max} (T_{bk} - T_{bp})}{W_{\min} (T_{ap} - T_{bp})} \quad (11.32)$$

Ponieważ w licznikach tych wzorów mamy strumień ciepła  $\dot{Q}$ , więc możemy napisać, że

$$\dot{Q} = \eta W_{\min} (T_{ap} - T_{bp}) \quad (11.33)$$

Jeżeli płyn zimny jest płynem minimum, to dla przeciwwprądowego wymiennika mamy:

$$\dot{Q} = W_b (T_{b2} - T_{b1}) = kA \frac{(T_{a1} - T_{b1}) - (T_{a2} - T_{b2})}{\ln \left( \frac{T_{a1} - T_{b1}}{T_{a2} - T_{b2}} \right)} \quad (11.34)$$

Z równania (11.33) otrzymujemy wyrażenie określające sprawność wymiennika:

$$\eta = \frac{W_b (T_{b2} - T_{b1})}{W_{\min} (T_{a2} - T_{b1})} \quad (11.35)$$

a jeżeli przyjmiemy, że  $W_b = W_{\min}$

$$T_{a2} = T_{b1} + \frac{1}{\eta} (T_{b2} - T_{b1}) \quad (11.36)$$

a następnie odejmiemy stronami  $T_{b2}$ , to

$$T_{a2} - T_{b2} = T_{b1} - T_{b2} + \frac{1}{\eta}(T_{b2} - T_{b1}) = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)(T_{b2} - T_{b1}) \quad (11.37)$$

Ponieważ

$$\frac{W_b}{W_a} = \frac{T_{a2} - T_{a1}}{T_{b2} - T_{b1}} \quad (11.38)$$

więc po przekształceniu otrzymamy

$$T_{a1} = T_{a2} - \frac{W_{\min}}{W_{\max}}(T_{b2} - T_{b1}) \quad (11.39)$$

oraz

$$T_{a1} - T_{b1} = T_{a2} - T_{b1} - \frac{W_{\min}}{W_{\max}}(T_{b2} - T_{b1}) \quad (11.40)$$

Z równania (11.36) otrzymujemy zależność

$$T_{a2} - T_{b1} = \frac{1}{\eta}(T_{b2} - T_{b1}) \quad (11.41)$$

którą podstawiamy do równania (11.40):

$$T_{a1} - T_{b1} = \frac{1}{\eta}(T_{b2} - T_{b1}) - \frac{W_{\min}}{W_{\max}}(T_{b2} - T_{b1}) = \left(\frac{1}{\eta} - \frac{W_{\min}}{W_{\max}}\right)(T_{b2} - T_{b1}) \quad (11.42)$$

a następnie zależności (11.37) i (11.42) podstawiamy do równania (11.34)

$$\ln \frac{\frac{1}{\eta} - \frac{W_{\min}}{W_{\max}}}{\frac{1}{\eta} - 1} = \frac{kA}{W_{\min}} \left(1 - \frac{W_{\min}}{W_{\max}}\right) \quad (11.43)$$

Po pozbyciu się logarytmu i po przekształceniu otrzymamy ostatecznie

$$\eta = \frac{1 - \exp\left[-\frac{kA}{W_{\min}}\left(1 - \frac{W_{\min}}{W_{\max}}\right)\right]}{1 - \frac{W_{\min}}{W_{\max}} \exp\left[-\frac{kA}{W_{\min}}\left(1 - \frac{W_{\min}}{W_{\max}}\right)\right]} \quad (11.44)$$

Wyrażenie  $kA/W_{\min}$  nazywamy liczbą jednostek wymiany NTU. Stosunek  $W_{\min}/W_{\max}$  oznaczmy jako  $R$  i dla przeciwnieprądowego wymiennika ciepła otrzymamy równanie:

$$\eta_p = \frac{1 - e^{-NTU(1-R)}}{1 - Re^{-NTU(1-R)}} \quad (11.45)$$

Dla współprądowego wymiennika ciepła w wyniku podobnego wyprowadzenia [2, 12] uzyskuje się wyrażenie

$$\eta_w = \frac{1 - e^{-NTU(1+R)}}{1 + R} \quad (11.46)$$

W literaturze można znaleźć odpowiednie wykresy tych zależności dla rozmaitych konstrukcji wymienników ciepła.

## 11.6. Rozkład temperatury płynów i ściany

### 11.6.1. Temperatura płynów

Określenie rozkładu temperatury płynów wzdłuż drogi przepływu w wymienniku ciepła ma znaczenie w obliczeniach średniej różnicy temperatury, a tym samym powierzchni wymiany ciepła. Jak pokazano w rozdziale 11.3, charakter krzywych  $T = f(A)$  lub  $T = f(L)$ , gdzie  $A$  jest powierzchnią,  $L$  zaś długością wymiennika zależy od stosunku pojemności cieplnej (równoważnika wodnego) jednego płynu do pojemności cieplnej drugiego płynu (równ. (11.4)). W dalszych rozważaniach zostanie przedstawiony rozkład zmian temperatury dla adiabatycznego wymiennika ciepła (z pominięciem strat ciepła do otoczenia,  $dQ_a = dQ_b = dQ$ ) w przeciwnym i współprądowym przepływie płynów.

Jeżeli przyjmiemy rozkład temperatury płynów jak na rys. 11.5, to dla przepływu przeciwnym możemy zapisać różniczkowy bilans ciepła (dotyczący powierzchni różniczkowej  $dA$ ):

$$d\dot{Q} = -\dot{m}_a c_{pa} dT_a \quad (11.47)$$

$$d\dot{Q} = -\dot{m}_b c_{pb} dT_b \quad (11.48)$$

Po wprowadzeniu definicji równoważników wodnych równania te zapiszemy w prostszej postaci:

$$d\dot{Q} = -W_a dT_a \quad (11.49)$$

$$d\dot{Q} = -W_b dT_b \quad (11.50)$$

i otrzymamy wyrażenia określające różniczki temperatury:

$$dT_a = -\frac{d\dot{Q}}{W_a} \quad (11.51)$$

$$dT_b = -\frac{d\dot{Q}}{W_b} \quad (11.52)$$

Po zróżniczkowaniu różnicy temperatury płynów:  $\Delta T = T_a - T_b$  otrzymuje się

$$d(\Delta T) = dT_a - dT_b \quad (11.53)$$

którą podstawiamy do równań (11.51) i (11.52)

$$d(\Delta T) = -d\dot{Q} \left( \frac{1}{W_a} - \frac{1}{W_b} \right) \quad (11.54)$$

Po wprowadzeniu różniczkowej postaci równania Pecleta

$$d\dot{Q} = kdA\Delta T \quad (11.55)$$

otrzymujemy

$$d(\Delta T) = -kdA\Delta T \left( \frac{1}{W_a} - \frac{1}{W_b} \right) \quad (11.56)$$

i po przekształceniu mamy

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -k \left( \frac{1}{W_a} - \frac{1}{W_b} \right) dA$$

Równanie to całkujemy stronami w granicach od  $A_1 = 0$  do  $A_2$  oraz od  $\Delta T_1$  do  $\Delta T_2$  (zakładamy, że  $k = \text{const}$ )

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -kA_2 \left( \frac{1}{W_a} - \frac{1}{W_b} \right) \quad (11.57)$$

i po przekształceniu otrzymujemy

$$\Delta T_2 = \Delta T_1 e^{-kA_2 \left( \frac{1}{W_a} - \frac{1}{W_b} \right)} \quad (11.58)$$

Jest to wzór określający różnicę temperatury płynów na wylocie wymiennika jako funkcję różnicy temperatury na wlocie, jego powierzchni oraz odwrotności zastępczego równoważnika wodnego (wzór Hudlera [2])

$$\Delta T_2 = \Delta T_1 e^{-kA_2/W_z} \quad (11.59)$$

Jeżeli szukaną wielkością będzie różnica temperatury płynów w dowolnym przekroju wymiennika (w odległości  $x$  od wlotu), to możemy ją obliczyć na podstawie  $\Delta T_1$  z równania otrzymanego w wyniku całkowania

$$\Delta T_x = \Delta T_1 e^{-kA_x/W_z} \quad (11.60)$$

Odwrotność zastępczego równoważnika wodnego płynów wyrażona jako różnica odwrotności poszczególnych równoważników wodnych powinna być zawsze dodatnia. Dla przeciwprądu, gdy  $W_1 < W_2$ , mamy zatem:

$$\frac{1}{W_z} = \frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \quad (11.61)$$

jeżeli zaś  $W_1 > W_2$ , to

$$\frac{1}{W_z} = \frac{1}{W_2} - \frac{1}{W_1} \quad (11.62)$$

Dla współprądowego przepływu płynów różniczki temperatury płynów mają przeciwne znaki (równania (11.47)–(11.52));  $dT_b$  jest dodatnie, więc zastępczy równoważnik wodny płynów wyrażamy wzorem

$$\frac{1}{W_z} = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \quad (11.63)$$

Jeżeli temperatura jednego z czynników nie zmienia się, jak np. podczas skraplania pary w skraplaczu lub odparowywania w wyparce, to przyjmujemy, że jego pojemność cieplna jest nieskończenie duża ( $W = \infty$ ) i zastępczy równoważnik wodny przepływu w wyparce opisuje równanie

$$W_z = W_1 \quad (11.64)$$

w skraplaczu zaś

$$W_z = W_2 \quad (11.65)$$

We wzorach Hudlera (11.59)–(11.60)  $\Delta T_1$  należy przyjmować po stronie wlotu płynu gorącego wymiennika, gdy zaś jego temperatura jest stała, po stronie większej różnicy temperatury.

Z równań tych możemy obliczać również temperaturę poszczególnych płynów. Zasada postępowania polega na tym, że jeżeli znamy warunki w przekroju wlotowym płynu gorącego (stan 1), to szukamy np. temperatury  $T_{b1}$  dla przeciwprądu. Obliczamy najpierw  $\Delta T_2$ :

$$\Delta T_2 = T_{a2} - T_{b2} \quad (11.66)$$

a stąd temperaturę  $T_{b2}$

$$T_{b2} = T_{a2} - \Delta T_2 \quad (11.67)$$

Po wyeliminowaniu temperatury na podstawie równania bilansu cieplnego (11.2) mamy:

$$T_{a1} - T_{a2} = \frac{W_b}{W_a} (T_{b1} - T_{b2}) \quad (11.68)$$

a następnie

$$T_{a2} = T_{a1} - \frac{W_b}{W_a} (T_{b1} - T_{b2}) \quad (11.69)$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do równania (11.67)

$$T_{b2} = T_{a1} - \frac{W_b}{W_a} T_{b1} + \frac{W_b}{W_a} T_{b2} - \Delta T_2 \quad (11.70)$$

i uporządkowaniu otrzymujemy

$$T_{b2} = \frac{T_{a1} - \frac{W_b}{W_a} T_{b1} - \Delta T_2}{\left(1 - \frac{W_b}{W_a}\right)} \quad (11.71)$$

Ponieważ różnicę temperatury  $\Delta T_2$  możemy zastąpić zależnością od  $\Delta T_1$ , więc otrzymujemy zależność funkcyjną

$$T_{b2} = f(\Delta T_1, T_{a1}, T_{b1}) \quad (11.72)$$

Podobnie możemy wyrazić temperaturę  $T_b$  lub  $T_a$  w dowolnym przekroju wymiennika:  $T_b = f(\Delta T_1, T_{a1}, T_{b1})$ . W tym celu należy wyznaczyć odpowiednie  $\Delta T$  w szukanym przekroju, a następnie zastąpić jedną temperaturę przez temperaturę początkową

$$W_a (T_{a1} - T_a) = \pm W_b (T_{b1} - T_b) \quad (11.73)$$

Znak plus mamy dla przeciwprądu, a znak minus zaś dla współprądu.

Na podstawie równania (11.71) możemy określić wpływ stosunku równoważników wodnych płynów na rozkład temperatury w wymienniku ciepła.

### 11.6.2. Temperatura ścianki

Określenie temperatury ścianki ma podstawowe znaczenie we właściwym doborze materiału konstrukcyjnego.

Przyjmujemy, że czynnik  $a$  oddaje strumień ciepła

$$\dot{Q} = \alpha_a A (T_a - T_{sa}) \quad (11.74)$$

czynnik  $b$  zaś pobiera strumień ciepła

$$\dot{Q} = \alpha_b A (T_{sb} - T_b) \quad (11.75)$$

określony równaniem Pecleta

$$\dot{Q} = kA\Delta T \quad (11.76)$$

i po przekształceniach wyznaczamy temperaturę ścianki

$$T_{sa} = T_a - \frac{k\Delta T}{\alpha_a} \quad (11.77)$$

oraz

$$T_{sb} = T_b + \frac{k\Delta T}{\alpha_b} \quad (11.78)$$

Jeżeli przyjmiemy, że  $T_{sa} \cong T_{sb} \cong T_s$ , to po przekształceniu otrzymujemy

$$\frac{T_a - T_s}{T_s - T_b} = \frac{\alpha_b}{\alpha_a} \quad (11.79)$$

a następnie

$$T_s = \frac{\alpha_a T_a + \alpha_b T_b}{\alpha_a + \alpha_b} \quad (11.80)$$

Temperaturę ścianki  $T_s$  możemy znacznie obniżyć, zwiększając współczynnik wnikania ciepła po stronie płynu (gazu) zimniejszego.

## 11.7. Wskazówki do projektowania wymienników ciepła

Projektowanie wymienników ciepła powinno objąć nie tylko obliczenia wymiany ciepła w aparacie, ale również zagadnienia konstrukcyjne i bezpieczeństwa ekologicznego. Obliczenia projektowe składają się z następujących etapów:

1. Podstawą obliczeń jest sporządzenie bilansu cieplnego z ewentualnym uwzględnieniem strat ciepła. Możemy wziąć pod uwagę kilka wariantów.



1.1. Bilans ciepła w przypadku ogrzewania lub chłodzenia płynu bez zmiany stanu skupienia (w przeciwnym kierunku według schematu jak na rys. 11.5, tj. gdy:  $T_{a1} > T_{a2}$ ,  $T_{b1} > T_{b2}$ ) opisuje znane nam równanie

$$\dot{Q} = \dot{m}_a c_{pa} (T_{a1} - T_{a2}) = \dot{m}_b c_{pb} (T_{b1} - T_{b2}) \quad (11.81)$$

w którym indeksy  $a$  i  $b$  dotyczą płynów, a wartość ciepła właściwego jest przyjmowana jako średnia w danym przedziale temperatury.

1.2. Gdy po jednej stronie wymiennika zachodzi zmiana stanu skupienia czynnika, np. w skraplaczu pary chłodzonym wodą ( $T_{b2} > T_{b1}$ ) lub w wyparce ogrzewanej spalinami, bilans ciepła przyjmie postać

$$\dot{Q} = \dot{m}_a r_a = \dot{m}_b c_{pb} (T_{b2} - T_{b1}) \quad (11.82)$$

1.3. Jeżeli zmiana stanu skupienia zachodzi po obu stronach, np. w wyparce ogrzewanej parą, to mamy

$$\dot{Q} = \dot{m}_a r_a = \dot{m}_b r_b \quad (11.83)$$

1.4. W szczególnym przypadku, gdy wymieniane jest równocześnie ciepło gazowego czynnika i ciepło utajone zawartej w nim pary, np. podczas ochładzania mieszaniny pary i gazu, równanie bilansowe (zakładamy, że:  $T_{a1} > T_{a2}$ ,  $T_{b2} > T_{b1}$ ,  $i_{a1} > i_{a2}$ ) przyjmuje postać

$$\dot{Q} = \dot{m}_i c_{pi} (T_{i1} - T_{i2}) + \dot{m}_i (x_{a1} i_{a1} - x_{a2} i_{a2}) - K i_k = \dot{m}_b c_{pb} (T_{b2} - T_{b1}) \quad (11.84)$$

gdzie  $x_a$  oznacza zawartość pary w czynniku wyrażoną w kilogramach na kg gazu suchego,  $K$ , kg/s, masowy strumień skroplin,  $i$ , J/kg, oznacza entalpię.

2. Określamy średnią różnicę temperatury dla procesu wymiany ciepła. Najczęściej posługujemy się średnią logarytmiczną skrajnych różnic temperatury. Niekiedy, gdy  $\Delta T_1 / \Delta T_2 < 2$ , stosujemy średnią arytmetyczną.

W przypadku szczególnym, jakim jest chłodzenie gorącego gazu o niewielkiej zawartości pary wodnej, stosujemy metodę obliczeń polecaną przez Kerna i Hoblera [4]:

a) obliczyć ciepło oddawane przez gaz i ciepło kondensacji pary; ich sumę należy przyjąć do obliczeń powierzchni aparatu,

b) zastosować współczynnik wnikania ciepła, obliczony jak dla gazu,

c) użyć średniej logarytmicznej jako średniej różnicy temperatury, biorąc pod uwagę skrajne temperatury gazu i wody chłodzącej,

W przypadku wyparki należy z kolei sprawdzić, czy obciążenie cieplne  $q$ ,  $W/m^2$ , jest dostatecznie małe w porównaniu z  $q_{kr}$ .

4. Wyznaczamy współczynnik przenikania ciepła ze wzoru Pecleta. Jeżeli przebiega równocześnie kilka różnych procesów, to dla każdego wykonujemy osobne obliczenia. Przyjmuje się, że prędkość liniowa pary i gazów pod niewysokim ciśnieniem mieści się w granicach od 8 do 30 m/s, cieczy natomiast nie przekracza 1,5 m/s. Im droższy jest materiał konstrukcyjny, tym zaleca się większe wartości prędkości

przepływu. Wykonanie obliczeń współczynników wnikania i przenikania ciepła wymaga też założenia typu konstrukcyjnego wymiennika.

5. W ostatnim etapie obliczeń wyznacza się powierzchnię wymiany ciepła. Należy ją powiększyć, nawet o 30%, ze względu na małą dokładność obliczeń lub nieuwzględnienie pewnych czynników, np. zmian oporu cieplnego osadu. Wymiennik jest najtańszy, jeżeli w obliczeniach uwzględnimy handlową długość rurek.

## 11.8. Obliczanie wymienników dla wybranych przypadków nieustalanej wymiany ciepła

W praktyce przemysłowej często mamy do czynienia z nieustalonym ruchem ciepła, zwłaszcza w urządzeniach pracujących w reżimie okresowym. W związku z tym pojawia się konieczność obliczania czasu nagrzewania (lub chłodzenia) aparatu lub zbiornika napełnionego cieczą.

### 11.8.1. Ogrzewanie (chłodzenie) cieczy przez ścianę zbiornika w stałej temperaturze czynnika grzejącego (chłodzącego)

Bilans ciepła w procesie ogrzewania (chłodzenia) cieczy przez ścianę zbiornika w stałej temperaturze czynnika grzejącego (chłodzącego) można opisać za pomocą dwóch podstawowych równań

$$dQ = kA(T_a - T)d\tau \quad (11.85)$$

oraz

$$dQ = m_b c_{pb} dT \quad (11.86)$$

Równanie (11.85) określa ilość ciepła przekazywaną przez przenikanie w czasie  $d\tau$  od czynnika  $a$  w stałej temperaturze  $T_a$  do cieczy  $b$  w zmiennej temperaturze  $T$ . Gdy  $T_a < T$ , następuje chłodzenie cieczy  $b$ . Równanie (11.86) opisuje zmianę entalpii cieczy  $b$  o masie  $m_b$  w tym samym czasie  $d\tau$ . Po przyrównaniu prawych stron obu równań

$$kA(T_a - T)d\tau = m_b c_{pb} dT \quad (11.87)$$

i przekształceniu otrzymuje się

$$\frac{A}{m_b c_{pb}} d\tau = \frac{dT}{k(T_a - T)} \quad (11.88)$$

Równanie to całkujemy granicach od 0 do  $\tau$  po lewej stronie oraz od temperatury początkowej  $T_p$  do końcowej  $T_k$  po prawej stronie

$$\frac{\tau A}{m_b c_{pb}} = \int_{T_p}^{T_k} \frac{dT}{k(T_a - T)} \quad (11.89)$$

Nie uwzględnia się masy ściany metalowego zbiornika, ponieważ czas jej nagrzewania jest bardzo krótki. Rozwiązanie równania (11.89) umożliwia obliczenie czasu trwania procesu ogrzewania lub chłodzenia albo powierzchni wymiany ciepła dla założonego czasu procesu.

Sposób całkowania równania (11.89) zależy od wartości współczynnika przenikania ciepła  $k$ .

1. Gdy współczynniki wnikania ciepła po obu stronach ściany są bardzo duże (ogrzewanie parą ciecicy mieszanej w zbiorniku) przyjmuje się:  $T_a \cong \text{const}$ ;  $k \cong \text{const}$  i po scałkowaniu otrzymujemy

$$\frac{\tau A}{m_b c_{pb}} = \frac{1}{k} \int_{T_p}^{T_k} \frac{dT}{T_a - T} = -\frac{1}{k} \ln \frac{T_a - T_k}{T_a - T_p} \quad (11.90)$$

2. Najczęściej jednak oba współczynniki wnikania ciepła są niewielkie, podlegają dużym zmianom i współczynnik przenikania ciepła  $k$  jest zmienny, jak np. podczas ochładzania zbiornika z gorącym płynem powietrzem atmosferycznym. Wnikanie ciepła po obu stronach następuje w wyniku konwekcji naturalnej. W celu wykonania całkowania korzysta się z zależności na sumę oporów cieplnych:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_a} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_b} \quad (11.91)$$

i na podstawie zasady rozdzielania całki sumy na sumę całek po podstawieniu równania (11.91) do równania (11.89) i przekształceniu otrzymuje się

$$\frac{\tau A}{m_b c_{pb}} = \int_{T_p}^{T_k} \frac{dT}{\alpha_a (T_a - T)} + \int_{T_p}^{T_k} \frac{s dT}{\lambda (T_a - T)} + \int_{T_p}^{T_k} \frac{dT}{\alpha_b (T_a - T)} \quad (11.92)$$

Rozwiązanie całek po lewej stronie równania wymaga określenia związków opisujących różnicę temperatury oraz współczynniki wnikania ciepła.

Spadek temperatury po obu stronach ścianki można wyznaczyć ze wzoru (por. rozdz. 11.6):

$$T_s \approx \frac{\alpha_a T_a + \alpha_b T}{\alpha_a + \alpha_b} \quad (11.93)$$

z którego otrzymuje się

$$\Delta T_a = T_s - T_a = \frac{\alpha_a T_a + \alpha_b T}{\alpha_a + \alpha_b} - T_a = \frac{T - T_a}{\frac{\alpha_a}{\alpha_b} + 1} \quad (11.94)$$

oraz

$$\Delta T_b = T - T_s = T - \frac{\alpha_a T_a + \alpha_b T}{\alpha_a + \alpha_b} = \frac{T - T_a}{1 + \frac{\alpha_b}{\alpha_a}} \quad (11.95)$$

Przyjmujemy, że stosunek współczynników wnikania wynosi  $x = \alpha_b/\alpha_a$  i otrzymujemy:

$$\Delta T_a = x \frac{T - T_a}{x + 1} \quad (11.96)$$

oraz

$$\Delta T_b = \frac{T - T_a}{x + 1} \quad (11.97)$$

W przypadku chłodzenia zbiornika z cieczą wnikanie ciepła zachodzi po obu stronach w warunkach konwekcji naturalnej. Dla obu przypadków współczynnik wnikania ciepła zależy od założonej różnicy temperatury

$$\alpha_a = L \Delta T_a^m \quad (11.98)$$

oraz

$$\alpha_b = N \Delta T_b^n \quad (11.99)$$

Po podstawieniu równań (11.96) i (11.97) otrzymuje się

$$\alpha_a = L x^m \left( \frac{T - T_a}{x + 1} \right)^m \quad (11.100)$$

oraz

$$\alpha_b = N \left( \frac{T - T_a}{x + 1} \right)^n \quad (11.101)$$

Zmienna  $x$  ( $x = \alpha_b/\alpha_a$ ) jest w niektórych przypadkach stała. Przyjawszy jej wartość jako średnią dla warunków początkowych i końcowych procesu, można obliczyć całki w zależności (11.92):

$$\begin{aligned}
\int_{T_p}^{T_k} \frac{dT}{\alpha_a (T_a - T)} &= \int_{T_p}^{T_k} \left( \frac{x+1}{x} \right)^m \frac{1}{L} \frac{dT}{(T - T_a)^m (T_a - T)} \\
&= - \left( \frac{x+1}{x} \right)^m \frac{1}{L} \int_{T_p}^{T_k} \frac{dT}{(T - T_a)^{m+1}} = \\
&= \left( \frac{x+1}{x} \right)^m \frac{1}{Lm} \left[ \frac{1}{(T_k - T_a)^m} - \frac{1}{(T_p - T_a)^m} \right]
\end{aligned} \tag{11.102}$$

$$\int_{T_p}^{T_k} \frac{s dT}{\lambda (T_a - T)} = - \frac{s}{\lambda} \ln \frac{T_a - T_k}{T_a - T_p} \tag{11.103}$$

$$\begin{aligned}
\int_{T_p}^{T_k} \frac{dT}{\alpha_b (T_a - T)} &= \int_{T_p}^{T_k} \frac{(x+1)^n}{N (T - T_a)^n} \frac{dT}{(T_a - T)} = - \frac{(x+1)^n}{N} \int_{T_p}^{T_k} \frac{dT}{(T - T_a)^{n+1}} = \\
&= \frac{(x+1)^n}{nN} \left[ \frac{1}{(T_k - T_a)^n} - \frac{1}{(T_p - T_a)^n} \right]
\end{aligned} \tag{11.104}$$

Jeżeli przyjmiemy, że  $(T_p - T_a) = \Theta_p$  oraz  $(T_k - T_a) = \Theta_k$ , to wzór (11.92), określający czas chłodzenia, zapiszemy w postaci:

$$\frac{\tau A}{m_b c_{pb}} = \frac{1}{Lm} \left( \frac{1+x}{x} \right)^m \left( \frac{1}{\Theta_k^m} - \frac{1}{\Theta_p^m} \right) - \frac{s}{\lambda} \ln \frac{\Theta_k}{\Theta_p} + \frac{(1+x)^n}{nN} \left( \frac{1}{\Theta_k^n} - \frac{1}{\Theta_p^n} \right) \tag{11.105}$$

Podobne równanie otrzymuje się dla ogrzewania cieczy w zbiorniku; przyjmujemy wówczas oznaczenia:  $(T_a - T_p) = \Theta_p$  oraz  $(T_a - T_k) = \Theta_k$ .

### 11.8.1.1. Chłodzenie cieczy w zbiorniku na wolnym powietrzu

Rozważmy chłodzenie cieczy w zbiorniku umieszczonym na wolnym powietrzu (rys. 11.11). Temperatura powietrza jest stała,  $T_a = \text{const}$ , a temperatura cieczy w zbiorniku zmniejsza się z czasem trwania procesu. Wnikanie ciepła zachodzi po obu stronach ścianki w wyniku konwekcji naturalnej i współczynniki wnikania można opisać za pomocą równań (11.98) i (11.99). Wartość wykładnika potęgowego  $m$  przy różnicy temperatury wynosi najczęściej 1/3, rzadziej 1/4. Jeżeli założymy, że wykładniki są jednakowe ( $m = n$ ), to równanie (11.105) można zapisać w prostszej postaci

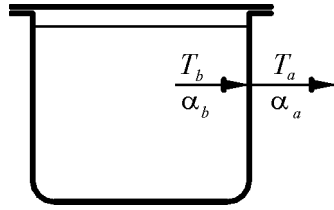
$$\frac{\tau A}{m_b c_{pb}} = \left[ \frac{1}{Lm} \left( \frac{x+1}{x} \right)^m + \frac{(x+1)^m}{mN} \right] \left( \frac{1}{\Theta_k^m} - \frac{1}{\Theta_p^m} \right) - \frac{s}{\lambda} \ln \frac{\Theta_k}{\Theta_p} \quad (11.106)$$

Ponieważ z definicji wynika, że

$$x = \frac{\alpha_b}{\alpha_a} = \frac{N \Delta T_b^m}{L \Delta T_a^m} = \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b} \quad (11.107)$$

więc

$$\frac{N}{L} = \left( \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b} \right)^{m+1} = x^{m+1} \quad (11.108)$$



Rys. 11.11. Szkic zbiornika z gorącym płynem oddającym ciepło do powietrza

Uwzględniając ten związek, wyrażenie w nawiasie kwadratowym równania (11.106) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{Lm} \left( \frac{x+1}{x} \right)^m + \frac{(x+1)^m}{mN} &= \frac{(x+1)^m}{mN} \left( \frac{N}{Lx^m} + 1 \right) = \\ &= \frac{(x+1)^m}{mN} \left( \frac{x^{m+1}}{x^m} + 1 \right) = \frac{(x+1)^m}{mN} (x+1) = \frac{(x+1)^{m+1}}{mN} \end{aligned} \quad (11.109)$$

i otrzymać wzór końcowy

$$\frac{\tau A}{m_b c_{pb}} = \frac{(x+1)^{m+1}}{mN} \left( \frac{1}{\Theta_k^m} - \frac{1}{\Theta_p^m} \right) - \frac{s}{\lambda} \ln \frac{\Theta_k}{\Theta_p} \quad (11.110)$$

Często opór ściany jest mały i końcowy człon w tym równaniu może być zaniedbany.

### 11.8.1.2. Ogrzewanie zbiornika z cieczą za pomocą pary nasyconej

Podczas ogrzewania zbiornika z cieczą za pomocą pary nasyconej para grzejna ma temperaturę stałą,  $T_a = \text{const}$ , temperatura cieczy w zbiorniku wzrasta natomiast w czasie procesu. Współczynniki wnikania ciepła  $\alpha_a$  od skraplającej się pary grzejnej

do ścianki oraz  $\alpha_b$  od ścianki zbiornika do ogrzewanej cieczy zależą od spadków temperatury:  $\alpha_a = f(\Delta T_a)$  oraz  $\alpha_b = f(\Delta T_b)$ .

Jednak wartości wykładników  $m$  i  $n$  są różne. Dla kondensacji pary  $m = -1/4$ , dla konwekcji naturalnej zaś  $n = 1/3$ . Należy skorzystać z równania (11.105), przyjmując średnią wartość parametru  $x$ , będącego stosunkiem współczynników wnikania. Niemniej jednak możliwe jest pewne przybliżenie, ponieważ  $\alpha_a \gg \alpha_b$  i stąd  $x = \alpha_b/\alpha_a \cong 0$ . Dla skraplania wielkość  $L$  jest rzędu  $10^4$ , co dla  $m = -1/4$  daje:

$$\frac{1}{Lm} \left( \frac{x+1}{x} \right)^m = -\frac{4}{L} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{0,25} \rightarrow 0$$

Dlatego w równaniu ogólnym (11.105) można pominąć pierwszy człon i otrzymać przybliżone wyrażenie

$$\frac{A\tau}{m_b c_{pb}} = \frac{1}{nN} \left( \frac{1}{\Theta_k^n} - \frac{1}{\Theta_p^n} \right) - \frac{s}{\lambda} \ln \frac{\Theta_k}{\Theta_p} \quad (11.111)$$

Chociaż błąd obliczenia nie przekracza kilku procent, obliczoną wartość czasu ogrzewania należy zwiększyć o 10–20% [4].

### 11.8.2. Ogrzewanie (oziębienie) cieczy medium grzejnym (chłodzącym) w zmiennej temperaturze

Rozważmy przypadek (rys. 11.12), w którym medium grzejne, najczęściej ciecz, ma stałą temperaturę na wlocie płaszczu grzejnego lub wężownicy,  $T_{a1} = \text{const}$ , zmienną natomiast na wylocie ( $T_{a2}$ ). Bilans cieplny takiego procesu opiszemy za pomocą następujących równań:

- dla płynu ogrzewanego w zbiorniku

$$dQ = m_b c_{pb} dT_b \quad (11.112)$$

- dla płynu grzejnego

$$dQ = \dot{m}_a c_{pa} (T_{a1} - T_a) d\tau \quad (11.113)$$

- dla przenikania ciepła

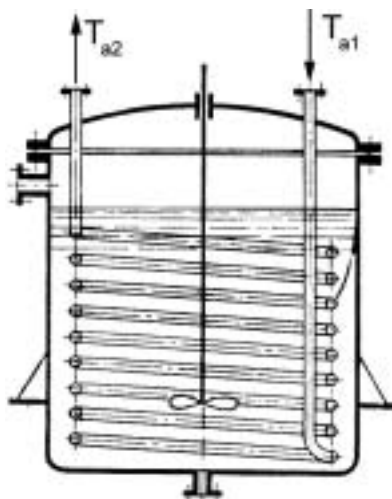
$$dQ = kA\Delta T d\tau \quad (11.114)$$

Średnia temperatura cieczy w zbiorniku na początku procesu jest równa  $T_{bp}$ , pod koniec ogrzewania ma wartość  $T_{bk}$ . Siłą napędową procesu w danym momencie jest różnica temperatury:

- na wlocie cieczy grzejnej  $\Delta T_1 = T_{a1} - T_b$ ,
- na wylocie z płaszczu grzejnego  $\Delta T_2 = T_a - T_b$ .

a średnia różnica temperatury wynosi

$$\Delta T = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} = \frac{(T_{a1} - T_b) - (T_a - T_b)}{\ln \frac{(T_{a1} - T_b)}{(T_a - T_b)}} = \frac{T_{a1} - T_a}{\ln \frac{T_{a1} - T_b}{T_a - T_b}} \quad (11.115)$$



Rys. 11.12. Mieszalnik z chłodzonym płynem o stałej temperaturze na wlocie

Po podstawieniu do równania (11.114) i przyrównaniu go do równania (11.113) otrzymujemy:

$$\dot{m}_a c_{pa} (T_{a1} - T_a) d\tau = kA \frac{T_{a1} - T_a}{\ln \frac{T_{a1} - T_b}{T_a - T_b}} d\tau \quad (11.116)$$

z czego po przekształceniu wynika

$$\ln \frac{T_{a1} - T_b}{T_a - T_b} = \frac{kA}{\dot{m}_a c_{pa}} \quad (11.117)$$

oraz

$$\frac{T_{a1} - T_b}{T_a - T_b} = e^{kA \dot{m}_a c_{pa}} \quad (11.118)$$

co daje

$$T_a = T_b + \frac{T_{a1} - T_b}{e^{kA \dot{m}_a c_{pa}}} \quad (11.119)$$



Przyjmijmy oznaczenie  $K = e^{ka\dot{m}_a c_{pa}}$  i równanie określające temperaturę cieczy grzejnej na wylocie zapiszmy w postaci

$$T_a = T_b + \frac{T_{a1} - T_b}{K} \quad (11.120)$$

Po podstawieniu tej zależności do bilansu (11.113) i przyrównaniu do równania (11.112) otrzymuje się

$$\begin{aligned} m_b c_{pb} dT_b &= \dot{m}_a c_{pa} \left[ T_{a1} - \left( T_b + \frac{T_{a1} - T_b}{K} \right) \right] d\tau = \\ &= \dot{m}_a c_{pa} \left[ (T_{a1} - T_b) \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \right] d\tau = \dot{m}_a c_{pa} \frac{K-1}{K} (T_{a1} - T_b) d\tau \end{aligned} \quad (11.121)$$

Rozdzielenie zmiennych i całkowanie daje

$$\frac{K-1}{K} \int_0^\tau d\tau = \frac{m_b c_{pb}}{\dot{m}_a c_{pa}} \int_{T_{bp}}^{T_{bk}} \frac{dT_b}{T_{a1} - T_b} \quad (11.122)$$

Po rozwiązaniu całki mamy ostatecznie

$$\tau \left( \frac{K-1}{K} \right) = - \frac{m_b c_{pb}}{\dot{m}_a c_{pa}} \ln \frac{T_{a1} - T_{bk}}{T_{a1} - T_{bp}} \quad (11.123)$$

gdzie:  $T_{a1} - T_{bp} = \Delta T_{1p}$  jest spadkiem temperatury na wlocie cieczy grzejnej na początku procesu,  $T_{a1} - T_{bk} = \Delta T_{1k}$  – spadkiem temperatury na wlocie cieczy grzejnej na końcu procesu.

Temperaturę cieczy grzejnej na wylocie z płaszczu grzejnego na początku procesu ( $\tau = 0$ ) i końcu procesu ogrzewania możemy obliczyć z równania (11.120) po podstawieniu  $T_{bp}$  lub  $T_{bk}$  za  $T_b$ :

$$T_{ap} = T_{bp} + \frac{T_{a1} - T_{bp}}{K} \quad (11.124)$$

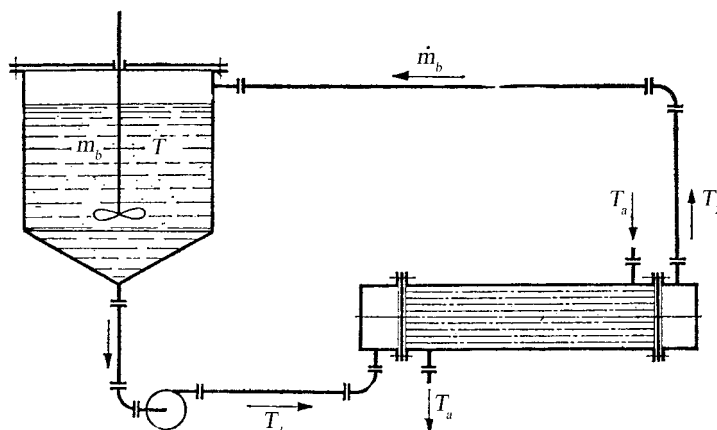
oraz

$$T_{ak} = T_{bk} + \frac{T_{a1} - T_{bk}}{K} \quad (11.125)$$

W obliczeniach nie ma zmian, jeżeli zamiast ogrzewania płaszczem zastosujemy ogrzewanie za pomocą wężownicy, w przypadku chłodzenia natomiast wzór jest identyczny z równaniem (11.123), jedynie zmieniają się definicje spadków temperatury przy wlocie czynnika chłodzącego: na początku procesu  $T_{bp} - T_{a1} = \Delta T_{1p}$  oraz na końcu procesu  $T_{bk} - T_{a1} = \Delta T_{1k}$ .

### 11.8.3. Ogrzewanie (oziębianie) cieczy za pomocą zewnętrznego wymiennika ciepła o stałej temperaturze medium

Gdy zbiornik ma dużą pojemność lub gdy wymiana ciepła przez ściankę jest utrudniona, a wężownica niewskazana, zaleca się stosowanie dodatkowego wymiennika ciepła. Do rozważań przyjmijmy rozwiązanie przedstawione na rys. 11.13, w którym ciecz należy ogrzać do temperatury  $T_{bk}$  w zewnętrznym wymienniku ciepła za pomocą nasyconej pary wodnej o temperaturze  $T_{a1}$ . Masowe natężenie przepływu cieczy w wymienniku jest równe  $\dot{m}_b = \text{const}$ . Przyjmuje się, że temperatura w przestrzeni zbiornika jest zmienna, ale wyrównana, równa temperaturze cieczy obiegowej na wlocie do wymiennika  $T_b$ . Temperatura cieczy na wylocie z wymiennika  $T_b'$  jest także zmienna, ale wyższa od temperatury  $T_b$ .



Rys. 11.13. Schemat instalacji do ogrzewania mieszalnika za pomocą osobnego wymiennika ciepła

Bilans cieplny takiego procesu opiszemy za pomocą następujących równań:

- dla cieczy w zbiorniku

$$dQ = m_b c_{pb} dT_b \quad (11.126)$$

- dla cieczy w wymienniku ciepła

$$dQ = \dot{m}_b c_{pb} (T_b' - T_b) d\tau \quad (11.127)$$

- dla przenikania ciepła

$$dQ = kA\Delta T d\tau \quad (11.128)$$

Średnia temperatura cieczy w zbiorniku na początku procesu jest równa  $T_{bp}$ , pod koniec ogrzewania ma wartość  $T_{bk}$ . Siłą napędową procesu w danym momencie jest różnica temperatury:

- na wlocie cieczy do wymiennika

$$\Delta T_1 = T_{a1} - T_b$$

- na wylocie z wymiennika

$$\Delta T_2 = T_{a1} - T_b'$$

Średnia różnica temperatury wynosi zatem

$$\Delta T = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} = \frac{(T_{a1} - T_b) - (T_{a1} - T_b')}{\ln \frac{(T_{a1} - T_b)}{(T_{a1} - T_b')}} = \frac{T_b' - T_b}{\ln \frac{T_{a1} - T_b}{T_{a1} - T_b'}} \quad (11.129)$$

Po podstawieniu do równania na przenikanie ciepła (11.128) i przyrównaniu go do równania (11.127)

$$\dot{m}_b c_{pb} (T_b' - T_b) d\tau = kA \frac{T_b' - T_b}{\ln \frac{T_{a1} - T_b}{T_{a1} - T_b'}} d\tau \quad (11.130)$$

i po przekształceniu otrzymuje się

$$\ln \frac{T_{a1} - T_b}{T_{a1} - T_b'} = \frac{kA}{\dot{m}_b c_{pb}} \quad (11.131)$$

a następnie

$$\frac{T_{a1} - T_b}{T_{a1} - T_b'} = e^{\frac{kA}{\dot{m}_b c_{pb}}} \quad (11.132)$$

co daje

$$T_b' = T_{a1} - \frac{T_{a1} - T_b}{e^{kA/\dot{m}_b c_{pb}}} \quad (11.133)$$

Jeżeli przyjmiemy, że  $K = e^{kA/\dot{m}_b c_{pb}}$ , to równanie na temperaturę cieczy grzejszej na wylocie zapiszemy w postaci

$$T_b' = T_{a1} - \frac{T_{a1} - T_b}{K} \quad (11.134)$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do bilansu (11.127) i przyrównaniu do równania (11.126) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\dot{m}_b c_{pb} dT_b &= \dot{m}_b c_{pb} \left[ T_{a1} - \frac{T_{a1} - T_b}{K} - T_b \right] d\tau \\
&= \dot{m}_b c_{pb} \left[ (T_{a1} - T_b) \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \right] d\tau \\
&= \dot{m}_b c_{pb} \frac{K-1}{K} (T_{a1} - T_b) d\tau
\end{aligned} \tag{11.135}$$

Rozdzielenie zmiennych

$$\frac{K-1}{K} \int_0^\tau d\tau = \frac{m_b}{\dot{m}_b} \int_{T_{bp}}^{T_{bk}} \frac{dT_b}{T_{a1} - T_b} \tag{11.136}$$

i całkowanie daje

$$\tau \left( \frac{K-1}{K} \right) = - \frac{m_b}{\dot{m}_b} \ln \frac{T_{a1} - T_{bk}}{T_{a1} - T_{bp}} \tag{11.137}$$

gdzie:  $T_{a1} - T_{bp} = \Delta T_{1p}$  jest spadkiem temperatury na wlocie cieczy do wymiennika na początku procesu,  $T_{a1} - T_{bk} = \Delta T_{1k}$  jest spadkiem temperatury na wlocie cieczy przy końcu procesu.

Temperaturę cieczy na wylocie z wymiennika  $T_b'$  na początku procesu ( $\tau = 0$ ) i końcu procesu ogrzewania ( $\tau$ ) możemy obliczyć z równania (11.134) po podstawieniu za  $T_b$   $T_{bp}$  lub  $T_{bk}$

$$T_{bp}' = T_{a1} - \frac{T_{a1} - T_{bp}}{K} \tag{11.138}$$

oraz

$$T_{bk}' = T_{a1} - \frac{T_{a1} - T_{bk}}{K} \tag{11.139}$$

W przypadku chłodzenia płynem o stałej temperaturze  $T_{a1}$  wzór jest identyczny z równaniem (11.137), jedynie zmieniają się spadki temperatury na wlocie do wymiennika: na początku procesu  $T_{bp} - T_{a1} = \Delta T_{1p}$  oraz na końcu procesu  $T_{bk} - T_{a1} = \Delta T_{1k}$ .

## 11.9. Obliczanie regeneratorów ciepła

Regeneratory ciepła są urządzeniami umożliwiającymi wykorzystanie ciepła odpadowego, tzn. energii cieplnej gazów odlotowych (np. spalin). Regeneracyjne podgrzewacze powietrza, zwane podgrzewaczami Ljungstroema, są na przykład stosowane w

kotłach parowych. Wsad stanowiący wypełnienie, zwykle w postaci cegieł ceramicznych, jest ogrzewany przez gorące spaliny, a następnie jest chłodzony powietrzem. W niektórych regeneratorach wsad może być zestawem blach metalowych.

Metodę obliczeń idealnego regeneratora opracował Hausen [2]. Analizował on regenerator, w którym współczynnik przewodzenia ciepła w wypełnieniu jest anizotropowy. W kierunku przepływu gazów (wzdłuż osi  $x$ ) ma on skończoną wartość  $\lambda$ , a w kierunku do niego prostopadłym – nieskończenie dużą. Można wówczas przyjąć, że temperatura wypełnienia w przekroju poprzecznym do przepływu ma wartość stałą.

Hausen [2] wprowadził następujące równania różniczkowe:

- dla gazów

$$\left( \frac{\partial T_g}{\partial x} \right)_\tau = \frac{\alpha A_j}{\dot{m}_g c_{pg}} (T_s - T_g) \quad (11.140)$$

- oraz dla wypełnienia

$$\left( \frac{\partial T_s}{\partial \tau} \right)_x = \frac{\alpha A_j}{C} (T_g - T_s) \quad (11.141)$$

gdzie:  $T_s, T_g$  – temperatura wypełnienia regeneratora i gazów,  $A_j$  – zewnętrzna, opływana przez gazy powierzchnia wypełnienia regeneratora długości 1 m,  $\dot{m}_g$  – strumień masowy gazów,  $c_{pg}$  – ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem,  $C$  – pojemność cieplna 1 m wypełnienia.

Gdy regenerator jest długi, a współczynniki wnikania ciepła dla obydwu gazów i ich pojemności cieplne są zbliżone, okresy rewersji są równe i trwają krótko. Wówczas z analizy wynika, że w połowie długości regeneratora pochodne temperatury gazów względem  $x$  oraz pochodne temperatury wypełnienia względem czasu są stałe.

Ciepło przekazane do wypełnienia przez czynnik grzejący B jest przejęte przez czynnik ogrzewany A. Można więc przyjąć równania bilansowe ciepła:

- dla okresu chłodzenia wypełnienia  $\tau_A$

$$Q = \alpha_A A (T_s - T_{gA})_m \tau_A \quad (11.142)$$

- dla okresu grzania wypełnienia  $\tau_B$

$$Q = \alpha_B A (T_{gB} - T_s)_m \tau_B \quad (11.143)$$

gdzie  $Q$  wyrażamy w J/cykl.

Po przekształceniu równań (11.142) i (11.143), tak aby po prawej stronie były różnice temperatury, dodaniu stronami i niezbędnych przekształceniach otrzymujemy

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_A \tau_A} + \frac{1}{\alpha_B \tau_B}} A (T_{gB} - T_{gA})_m \quad (11.144)$$

Przez analogię do równania Pecleta można wprowadzić współczynnik przenikania ciepła dla regeneratora idealnego:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_A \tau_A} + \frac{1}{\alpha_B \tau_B} \quad (11.145)$$

i równanie (11.144) przyjmie wówczas postać

$$Q = kA(T_{gB} - T_{gA})_m = kA\Delta T_m \quad (11.146)$$

gdzie  $\Delta T_m = (\Delta T_1 + \Delta T_2)/2$  jest średnią wartością różnic temperatury na wlocie i na wylocie z regeneratora.

## 11.10. Wybór typu konstrukcji przeponowego wymiennika ciepła

Projektowanie aparatury jest procesem złożonym, wymagającym od projektanta zarówno wiedzy merytorycznej popartej doświadczeniem zawodowym, jak i inwencji, kreatywności oraz umiejętności analitycznego myślenia. Aby poprawnie zaprojektować aparat, konieczne jest określenie zarówno parametrów konstrukcyjnych, jak i warunków operacyjnych spełniających wymagania co do wydajności i ekonomii oraz ochrony środowiska, a przy tym pozwalających uzyskać produkt najwyższej jakości.

Przez określenie *typ konstrukcji* należy rozumieć grupę rozwiązań o podobnej koncepcji do zrealizowania założonych ustaleń i wyników obliczeń. Podstawowym rodzajem konstrukcyjnym jest tzw. wymiennik wielorurkowy. Do tej grupy wymienników zalicza się również wymienniki cieplnie kompensowane, wyposażone w dodatkowe części (głowica swobodna, dławiki). Innym typem konstrukcyjnym są chłodnice. Można wyróżnić chłodnice bateryjne ociekowe, chłodnice ze zraszaniem rur od wewnątrz oraz chłodnice pionowe ze zdejmowanym płaszczem.

Odrębną grupę stanowią tzw. konstrukcje specjalne. Są to wymienniki spiralne, np. według patentów Rosenblada. Do rozwiązań specjalnych są również zaliczane wymienniki z grafitu impregnowanego żywicami syntetycznymi, stosowane do cieczy silnie korozyjnych oraz wymienniki płytowe, zbudowane z pakietów blach metalowych. Szczególny typ konstrukcyjny stanowią wymienniki ciepła chłodzone powietrzem. Podstawowym ich elementem jest wiązka rur ożebrowanych poprzecznie, osadzona w kolektorach: wlotowym i wylotowym. Na rynku jest oferowanych wiele rodzajów rur ożebrowanych o zróżnicowanych cenach.

Istotnym czynnikiem jest także koszt wykonania wymiennika ciepła danego typu. Optymalny dobór wymiennika musi uwzględniać zarówno koszty ruchowe, jak i koszty inwestycyjne.

Przystępując do obliczenia wymiennika ciepła, projektujący musi obrać pewien typ rozwiązania konstrukcyjnego. Innych wzorów należy użyć do obliczenia współczynników wnikania ciepła dla chłodnicy płaszczowo-rurkowej, a innych dla chłodnicy ociekowej. Dalsze założenia będą dotyczyć sposobu przepływu strumieni oraz średnic rurek, prędkości liniowych itd. W końcowych rozważaniach istotne jest dobranie właściwej długości wymiennika. Miarą jest określenie tzw. smukłości wymiennika, tj. stosunku jego długości do średnicy wewnętrznej rur,  $S = L/d$  [4]. Kolejne zagadnienia to dobór i rozmieszczenie rurek wewnątrz wymiennika oraz dobór innych elementów aparatury.

# Oznaczenia

|             |   |
|-------------|---|
| $A$         | – pole przekroju, powierzchnia, $m^2$   |
| $a$         | – dyfuzyjność cieplna, $m^2 \cdot s^{-1}$   |
| $b$         | – szerokość, m  |
| $C$         | – stała promieniowania dla ciała szarego, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$                       |
| $C_0$       | – stała promieniowania dla ciała doskonale czarnego, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$            |
| $C_{1-2}$   | – zastępcza stała promieniowania dla układu powierzchni 1 i 2, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$  |
| $C_f$       | – współczynnik tarcia   |
| $c_p$       | – ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem, $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$                       |
| $d$         | – średnica, m   |
| $E$         | – zdolność promieniowania ciała, $W \cdot m^{-2}$   |
| $g$         | – przyspieszenie ziemskie, $m \cdot s^{-2}$   |
| $h$         | – wysokość, m   |
| $I_\lambda$ | – intensywność promieniowania monochromatycznego, $W \cdot m^{-3}$                            |
| $k$         | – współczynnik przenikania ciepła, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$                              |
| $L$         | – długość, m  |
| $m$         | – masa, kg  |
| $\dot{m}$   | – strumień masy, $kg \cdot s^{-1}$  |
| $\dot{m}''$ | – gęstość strumienia masy, $kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$                                     |
| $N$         | – liczba cząstek przechodząca w ciągu 1 s z powierzchni $1 \text{ cm}^2$                      |
| $N_0$       | – stała Avogadra, $N_0 = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$                                |
| $P$         | – ciśnienie, Pa   |
| $Q$         | – energia cieplna, J  |
| $\dot{Q}$   | – strumień energii cieplnej, W  |
| $q$         | – gęstość strumienia ciepła, $W \cdot m^{-2}$   |
| $p$         | – prężność parcyjalna, Pa   |
| $p^0$       | – prężność pary nasyconej, Pa   |
| $R$         | – opór cieplny, $K \cdot W^{-1}$  |
| $R$         | – masa roztworu, kg   |
| $R$         | – uniwersalna stała gazowa, $R = 8,31432 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ |
| $r$         | – ciepło parowania, $J \cdot kg^{-1}$   |
| $r$         | – promień rury, m   |
| $S$         | – masa surowca, kg  |
| $s$         | – grubość warstwy, m  |
| $T$         | – temperatura, K  |
| $U$         | – obwód, m  |
| $V$         | – masa fazy parowej, kg   |



|                 |   |
|-----------------|---|
| $\dot{V}$       | – objętościowy strumień płynu, $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$                                       |
| $W$             | – równoważnik wodny płynu, $\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$   |
| $w$             | – liniowa prędkość przepływu, $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  |
| $x, y, z$       | – współrzędne prostokątne, m  |
| $\alpha$        | – współczynnik wnikania ciepła, $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$                    |
| $\beta$         | – współczynnik rozszerzalności objętościowej, $\text{K}^{-1}$   |
| $\varepsilon$   | – względna zdolność emisyjna  |
| $\varepsilon$   | – współczynnik poprawkowy na przepływ mieszany  |
| $\varepsilon_z$ | – zastępcza względna zdolność emisyjna  |
| $\eta$          | – dynamiczny współczynnik lepkości, $\text{Pa} \cdot \text{s}$  |
| $\eta$          | – dzielnosc izolacji  |
| $\Theta$        | – kąt zwilżania, rad  |
| $\vartheta$     | – zastępczy wymiar poprzeczny, m  |
| $\lambda$       | – współczynnik przewodzenia ciepła, $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$                |
| $\lambda$       | – długość fali elektromagnetycznej, $\mu\text{m}$   |
| $\lambda_0$     | – współczynnik oporu przepływu  |
| $\nu$           | – kinematyczny współczynnik lepkości, $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$                                |
| $\rho$          | – gęstość, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$  |
| $\sigma$        | – napięcie powierzchniowe, $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$   |
| $\tau$          | – czas, s   |
| $\tau$          | – naprężenie styczne, $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$  |
| $\varphi$       | – współczynnik konfiguracji   |
| $\Gamma$        | – strumień masy odniesiony do jednostki długości, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ |

### Moduły podobieństwa

|        |  |
|--------|--|
| $Bi$   | – liczba Biota, $\alpha s / \lambda$                                       |
| $Fo$   | – liczba Fouriera, $a \tau / s^2$  |
| $Ga$   | – liczba Galileusza, $g d^3 \rho^2 / \eta^2$                               |
| $Gr$   | – liczba Grashofa, $g d^3 \rho^2 \beta \Delta T / \eta^2$                  |
| $Gz$   | – liczba Graetzta, $\dot{m} c_p / \lambda L$                               |
| $Nu$   | – liczba Nusselta, $\alpha d / \lambda$                                    |
| $Pe$   | – liczba Pecleta, $Re Pr$  |
| $Pr$   | – liczba Prandtla, $\eta c_p / \lambda$                                    |
| $Ra$   | – liczba Rayleigha, $Gr Pr$  |
| $Re$   | – liczba Reynoldsa, $w d \rho / \eta$                                      |
| $Re_z$ | – liczba Reynoldsa dla grawitacyjnego spływu po ścianie, $4 \Gamma / \eta$ |
| $S$    | – liczba Strouhala, $w \tau / L$   |
| $St$   | – liczba Stanton, $Nu / (Re Pr)$   |
| $J_H$  | – czynnik Colburna dla wymiany ciepła, $St Pr^{2/3}$                       |

## Piśmiennictwo cytowane

- [1] WIŚNIEWSKI S., T.S. WIŚNIEWSKI, *Wymiana ciepła*, wydanie czwarte, WNT, Warszawa, 1997.
- [2] KALINOWSKI E., *Przekazywanie ciepła i wymienniki*, Ofic. Wyd. PWr., Wrocław, 1995.
- [3] SKOCZYLAŚ A., *Przenoszenie ciepła*, Ofic. Wyd. PWr., Wrocław, 1999.
- [4] HOBLER T., *Ruch ciepła i wymienniki*, wydanie czwarte, WNT, Warszawa, 1971.
- [5] KEMBŁOWSKI Z., MICHAŁOWSKI S., STRUMILŁO C., ZARZYCKI R., *Podstawy teoretyczne inżynierii chemicznej i procesowej*, WNT, Warszawa, 1985.
- [6] MADEJSKI J., *Teoria wymiany ciepła*, PWN, Warszawa, 1963.
- [7] STANISZEWSKI B., *Wymiana ciepła*, PWN, Warszawa, 1979.
- [8] BEJAN A., *Heat Transfer*, Wiley, New York, 1993.
- [9] PATANKAR S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc-Graw-Hill, New York, 1980.
- [10] MCADAMS W.H., *Heat Transmission*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1942, s. 168.
- [11] INCROPERA F.P., DEWITT D.P., *Introduction to Heat Transfer*, Second Edition, Wiley, New York, 1990, s. 456.
- [12] WELTY J.R., WICKS C.E., WILSON R.E., RORRER G.L., *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, Fourth Edition, Wiley, New York, 2001, s. 323.
- [13] BAEHR H.D., STEPHAN K., *Heat and Mass Transfer*, Springer-Verlag, Berlin, 1998, s. 373.
- [14] KUBASIEWICZ A., *Wyparki: konstrukcja i obliczanie*, WNT, Warszawa, 1977.
- [15] BRAUER H., *Stoffaustausch*, Sauerlaender AG, Aarau, Schweiz, 1971.