

**Analiza modeli ARMA z okresowymi
współczynnikami**

Rozprawa doktorska

Agnieszka Wyłomańska

Instytut Matematyki i Informatyki

Politechnika Wroclawska

Promotor: prof. dr hab. Aleksander Weron

Wroclaw, grudzień 2005

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Modele ARMA	6
2.1	Stałe współczynniki	6
2.2	Zmienne współczynniki	8
2.3	Przykłady	18
3	Modele PARMA	21
3.1	Procesy okresowo skorelowane	21
3.2	Analiza modeli PARMA w dziedzinie czasowej	22
3.3	Analiza modeli PARMA w dziedzinie częstotliwościowej	24
4	Modelowanie procesów okresowych metodą szeregów PARMA	31
4.1	Teoretyczne podejście do problemu estymacji	31
4.1.1	Kryteria wyboru optymalnej wielkości p w modelu PARMA($p,1$)	34
4.2	Zastosowanie modeli PARMA do rzeczywistych danych energetycznych	34
5	Szeregi wielowymiarowe związane z modelami PARMA(1,q)	42
5.1	Szereg generujący systemu PARMA(1,q)	43
5.2	Szereg indukowany modelu PARMA(1,q)	45
5.3	Inne wielowymiarowe szeregi stacjonarne związane z modelami PARMA(1,q)	47
6	Szeregi ARMA ze zmiennymi współczynnikami i α-stabilnymi innowacjami	51
6.1	Miary zależności	51
6.2	Ograniczone rozwiązanie szeregu ARMA(1,1) z $S\alpha S$ innowacjami	54

6.3	Modele ARMA(1,1) spełniające warunek (I)	56
6.4	Modele ARMA(1,1) spełniające warunek (II)	61
7	Podsumowanie	66
A	Najczęściej używane oznaczenia w tekście	68
	Spis rysunków	69
	Spis tabel	70
	Bibliografia	71

Rozdział 1

Wstęp

Przedmiotem analizy są modele ARMA ze zmiennymi współczynnikami ze szczególnym uwzględnieniem przypadku modeli ARMA z okresowymi współczynnikami, czyli nowa klasa procesów wykorzystywanych między innymi w analizie danych wykazujących różne rodzaje okresowości.

W klasycznym podejściu do analizy szeregów czasowych wszechstronnie studiowanym w literaturze najczęściej zakłada się stacjonarność badanego procesu. Badania pokazują jednak, że klasyczne podejście jest niewystarczające dla wielu klas obserwowanych zjawisk, a uzyskane wyniki nie dają pożądaných efektów, np. w przypadku predykcji danych. Szeregi ARMA ze zmiennymi współczynnikami są niestacjonarne dlatego też mogą być wykorzystywane w przypadku badania różnego rodzaju danych.

Zastosowanie w pracy nowego podejścia do analizy szeregów czasowych daje w przypadku rozważanych modeli wiele efektywnych rozwiązań: umożliwia rozwiązanie problemu jednoznaczności i ograniczoności (w sensie L_2) rozwiązania, pozwala na wyznaczenie postaci rozwiązania modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami, itp. Zastosowanie znanych technik charakterystycznych dla analizy stacjonarnych szeregów czasowych jest niewystarczające do badania omawianych procesów. Dlatego też, w odróżnieniu od podejścia do klasycznych modeli ARMA w języku pierwiastków odpowiedniego wielomianu, konieczne jest badanie niestacjonarnych szeregów przy użyciu innych technik.

Podstawowymi problemami poruszonymi w pracy są:

- wyznaczenie warunków gwarantujących jednoznaczność i ograniczoność rozwiązania

modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami

Problem ten jest częściowo poruszony w literaturze, jednak jak dotychczas nie udało się uzyskać pełnych wyników dotyczących ogólnego modelu ARMA ze zmiennymi w czasie współczynnikami. Są to głównie wyniki Boshnakova ([5]), który zapisał równanie ARMA(p,q) ze zmiennymi współczynnikami jako wielowymiarowy model VAR(p), co daje możliwości dalszych analiz w tym zakresie. Ponadto Hurd, Makagon i Miamee ([16]) rozwiązali problem jednoznaczności i ograniczoności (w sensie L_2) rozwiązania jedynie dla prostego przypadku, a mianowicie dla modelu AR(1) ze zmiennymi współczynnikami. W pracy rozszerzono tę teorię dla najbardziej ogólnej klasy szeregów czasowych ARMA(p,q) ze zmiennymi współczynnikami (Rozdział 2, Twierdzenia 2, 3, 4) oraz dla okresowych szeregów ARMA (Rozdział 3, Twierdzenie 5).

- wyznaczenie postaci rozwiązania modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami
 Podobnie jak warunki na istnienie jednoznacznego rozwiązania omawianych modeli, problem ten poruszony jest przez Hurda, Makagona i Miamee ([16]), gdzie postać rozwiązania podana jest tylko dla prostego modelu AR(1) ze zmiennymi współczynnikami. W pracy Brockwella i Davisa ([6]) szczegółowo omówiono klasyczne stacjonarne modele ARMA. W pracy rozszerzono teorię na ogólne modele ARMA(p,q) ze zmiennymi w czasie współczynnikami (Rozdział 2, Twierdzenia 2, 3, 4), ponadto podano również postać rozwiązania dla modeli ARMA z okresowymi współczynnikami (Rozdział 3, Twierdzenie 5).
- wyznaczenie postaci gęstości spektralnej dla modeli ARMA z okresowymi współczynnikami
 Modele ARMA z okresowymi współczynnikami są klasą procesów silnie harmonizowalnych, co daje możliwość wyznaczenia ich gęstości spektralnej. Szczególnie postać funkcji korelacji takich procesów staje się użyteczna w analizie modeli ARMA z okresowymi współczynnikami w dziedzinie częstotliwościowej ([23]). W ramach rozprawy doktorskiej przeprowadzono badania nad wyznaczeniem postaci gęstości spektralnej omawianych modeli i udowodnieniem jej najważniejszych własności (Rozdział 3, Twierdzenia 6 i 7).

- analiza modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami i α -stabilnymi innowacjami
- Modele takie znajdują zastosowanie w analizie danych, których reszty nie posiadają własności charakterystycznych rozkładom gaussowskim. Rozkłady α -stabilne nie mają skończonego drugiego momentu, natomiast dla niektórych klas procesów iloraz dwóch miar zależności: kodyferencji i kowariacji, w granicy daje parametr α . Tak jest również w przypadku stacjonarnych modeli ARMA ([26], [27]). W ramach pracy przeprowadzono badania dotyczące podobnych własności dla modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami (Rozdział 5, Twierdzenia 9 i 10).

Zasadniczym zadaniem w analizie szeregów ARMA ze zmiennymi współczynnikami, a w szczególności z okresowymi współczynnikami, jest wyznaczenie postaci ich rozwiązania i podanie warunków gwarantujących jego jednoznaczność i ograniczoność. Nie jest to zadanie trywialne, gdyż wiele dotychczas stosowanych technik dało jedynie rozwiązanie tego problemu w przypadku stacjonarnym (stacjonarne modele ARMA są szczególnym przypadkiem omawianych modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami). Metody używane w analizie szeregów czasowych dają możliwość analizy stacjonarnych modeli i obecnie teoria związana z takimi szeregami jest dobrze znana i powszechnie stosowana również w praktyce. Modele ARMA ze zmiennymi współczynnikami są naturalnym rozszerzeniem klasycznych stacjonarnych modeli ARMA, a ponadto wykazują wiele ich własności. Ich wyższość polega jednak na tym, że mogą być wykorzystywane do analizy danych niestacjonarnych bez utraty ich długookresowej zależności.

Rozdział 2

Modele ARMA

2.1 Stałe współczynniki

Definicja 1 ([6]) Szereg $\{X_n\}$ jest stacjonarny (w słabym sensie), gdy:

(i) $\mu(n) = EX_n$ nie zależy od n ,

(ii) $Cov(X_n, X_{n+m}) = E((X_n - \mu(n))(X_{n+m} - \mu(n+m)))'$ jest jedynie funkcją m dla każdego $n \in Z$.

Definicja 2 ([6]) Szereg $\{X_n\}$ jest szeregiem ARMA(p, q), jeśli $\{X_n\}$ jest stacjonarny oraz dla każdego $n \in Z$ spełnione jest równanie:

$$X_n - \phi_1 X_{n-1} - \dots - \phi_p X_{n-p} = \xi_n + \theta_1 \xi_{n-1} + \dots + \theta_q \xi_{n-q}, \quad (2.1)$$

gdzie $\{\xi_n\}$ jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych o średniej 0 i wariancji σ^2 , a wielomiany $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ i $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ nie mają wspólnych pierwiastków.

Ważną informacją w Definicji 2 jest fakt, że $\{X_n\}$ jest procesem stacjonarnym. Następne Twierdzenie podaje warunki gwarantujące istnienie jednoznacznego rozwiązania systemu (2.1).

Twierdzenie 1 ([6]) Jednoznaczne stacjonarne rozwiązanie równania (2.1) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0$$

dla każdego $|z| = 1$.

W przypadku szeregów czasowych ważną informacją jest również fakt, czy dany proces jest procesem przyczynowym (ang. causal) lub odwracalnym (ang. invertible). Informacje te umożliwiają znalezienie postaci rozwiązania danego systemu, a co za tym idzie wykorzystanie modelu do opisu danych rzeczywistych i dokonania ich predykcji.

Definicja 3 ([6]) Szereg $ARMA(p, q)$ zdefiniowany w (2.1) jest przyczynowy (lub przyczynową funkcją procesu $\{\xi_n\}$), jeśli istnieje stały ciąg (ψ_j) taki, że $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ oraz

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \xi_{n-j}. \quad (2.2)$$

Przyczynowość jest równoważna następującemu warunkowi

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0$$

dla każdego $|z| \leq 1$.

Współczynniki (ψ_j) w równaniu (2.2) spełniają następujący warunek

$$\psi_j = \theta_j + \sum_{k=1}^p \phi_k \psi_{j-k},$$

gdzie $\theta_0 = 1$, $\theta_j = 0$ dla $j > q$ oraz $\psi_j = 0$ dla $j < 0$.

Definicja 4 ([6]) Szereg $ARMA(p, q)$ zdefiniowany w (2.1) jest odwracalny, jeśli istnieje stały ciąg (π_j) taki, że $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ oraz

$$\xi_n = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{n-j}. \quad (2.3)$$

Przyczynowość jest równoważna następującemu warunkowi

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q \neq 0$$

dla każdego $|z| \leq 1$.

Współczynniki (π_j) w równaniu (2.3) spełniają następujący warunek

$$\pi_j = -\psi_j - \sum_{k=1}^q \theta_k \pi_{j-k},$$

gdzie $\phi_0 = -1$, $\phi_j = 0$ dla $j > p$ oraz $\pi_j = 0$ dla $j < 0$.

2.2 Zmienne współczynniki

Definicja 5 ([24]) *System ARMA(p, q) ze zmiennymi współczynnikami zdefiniowany jest następująco:*

$$X_n - \sum_{k=1}^p b_k(n)X_{n-k} = \sum_{j=0}^{q-1} a_j(n)\xi_{n-j}, \quad n \in Z, \quad (2.4)$$

gdzie $(b_k(n))$, $k = 1, \dots, p$ oraz $(a_k(n))$, $k = 0, \dots, q - 1$ są ciągami liczb zespolonych, $b_k(n) \neq 0$ dla każdego $k = 1, \dots, p$ i $n \in Z$ oraz $\{\xi_n\}$ jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych o średniej 0 i wariancji równej 1.

W tym rozdziale przyjmujemy, że każda zmienna losowa X może przyjmować wartości ze zbioru liczb zespolonych oraz ma skończony drugi moment i zerową średnią. Kowariancja $E(X\bar{Y}')$ dla dwóch zmiennych losowych X i Y jest oznaczana jako (X, Y) , natomiast wariancja X - jako $\|X\|^2$. Przestrzeń liniowa L_2 - generowana przez $\{\xi_n\}$, $n \in Z$, jest oznaczana jako M_ξ . Przestrzeń M_ξ z normą $\|\cdot\|$ jest przestrzenią Hilberta; zatem $\{\xi_n\}$ jest szeregiem ortonormalnym w M_ξ . Zapis $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = Y$, dla szeregu stochastycznego $\{X_n\}$ oraz zmiennej losowej Y oznacza, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - Y\|^2 = 0$. Każdy ciąg $\{X_n\}$ w M_ξ , który spełnia równanie (2.4) jest zwany jego rozwiązaniem. Rozwiązanie $\{X_n\}$ jest ograniczone jeśli $\sup_{n \in Z} \|X_n\|^2 < \infty$.

Rozpatrzmy najpierw prostszy model ARMA(1,q) dany następującym wzorem:

$$X_n - b_n X_{n-1} = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(n) \xi_{n-p}, \quad n \in Z, \quad (2.5)$$

gdzie współczynniki oraz innowacje mają takie same własności jak w Definicji 5. Niech $Y_n = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(n) \xi_{n-p}$ oraz

$$B_k^n = \prod_{j=k}^n b_j \quad (2.6)$$

z konwencją $B_k^n = 1$, gdy $n < k$. Wartość początkowa $X_0 = X$ determinuje rozwiązanie $\{X_n\}$ równania (2.5). Iterując równanie (2.5) k razy, otrzymujemy dla $n \in Z$ i $k \geq 1$

$$X_n = B_{n-k+1}^n X_{n-k} + \sum_{s=0}^{k-1} B_{n+1-s}^n Y_{n-s}, \quad \text{oraz} \quad (2.7)$$

$$X_n = \frac{X_{n+k}}{B_{n+1}^{n+k}} - \sum_{j=1}^k \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} Y_{n+j}. \quad (2.8)$$

Jeśli w (2.7) weźmiemy $n \geq 1$ i $k = n$ oraz w (2.8) dla każdego $n \leq -1 - k = -n$, wówczas otrzymamy

$$X_n = \begin{cases} B_1^n X_0 + \sum_{j=1-n}^0 B_{n+1+j}^n Y_{n+j}, & \text{dla } n \geq 1 \\ \frac{X_0}{B_{n+1}^0} - \sum_{j=1}^{-n} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} Y_{n+j}, & \text{dla } n \leq -1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Powyższa formuła staje się użyteczna w przypadku problemu istnienia jednoznacznego i ograniczonego rozwiązania modeli ARMA(1,q) ze zmiennymi współczynnikami. Systemy takie jak w (2.5) pojawiają się w analizie szeregów czasowych, a jednoznaczność rozwiązania i jego forma są użyteczne przy ich badaniu. W przypadku, kiedy (b_n) oraz $(a_k(n))$ nie zależą od n , wówczas system (2.5) przyjmuje postać $X_n - bX_{n-1} = \sum_{p=0}^{q-1} a_p \xi_{n-p}$ i jest specjalnym przypadkiem stacjonarnego modelu ARMA ([6]). Znany jest fakt, że systemy takie mają jednoznaczne ograniczone rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $|b| \neq 1$. Ponadto rozwiązania te są stacjonarne i mają jednostronną reprezentację średniej ruchomej (MA). Modele ARMA z okresowymi współczynnikami (PARMA) stały się popularne ze względu na ich wielorakie zastosowanie ([1], [2], [3], [5], [15], [18], [19], [28], [30]). Systemy takie wykorzystywane są do opisu danych klimatycznych, ekonomicznych, hydrologicznych, a także znajdują zastosowanie w inżynierii elektrycznej i wielu innych dyscyplinach. Zazwyczaj analiza takich szeregów bazuje na ich przekształceniu do wielowymiarowego systemu ARMA (VARMA) ([20], [28], [30]), co pozwala w niektórych prostszych przypadkach na uzyskanie warunków gwarantujących istnienie jednoznacznych, ograniczonych rozwiązań. Inna metoda analizy proponowana w [5], a wykorzystana również w [16], polega na analizie szeregu zdefiniowanego w (2.5) dla $q = 1$ i ciągu współczynników (b_n) prawie okresowych oraz $a_0(n) = 1$. Przy tym założeniu dowodzi się istnienia warunków koniecznych i wystarczających na istnienie jednoznacznego, ograniczonego rozwiązania, które ponadto jest prawie okresowo skorelowane. Zatem istnieje możliwość uzyskania warunków na istnienie jednoznacznych i ograniczonych rozwiązań systemów PAR(1) bez ich transformacji do wielowymiarowych modeli ARMA.

W tym rozdziale podamy postać rozwiązania modeli zdefiniowanych w (2.5), które jest jednoznaczne i ograniczone, bez dodatkowych założeń dotyczących współczynników (b_n) oraz $(a_k(n))$. Zostanie omówionych kilka przykładów; w szczególności przypadek stałych współczynników. Wyniki zawarte w tym rozdziale zostały przedstawione w pracach [24], [32] oraz [33].

Podobnie jak w pracy [16], podzielimy naszą analizę na trzy przypadki:

$$(C1) \sup_{n \geq 1} |B_1^n| = \infty,$$

$$(C2) \sup_{n \leq 0} |B_n^0|^{-1} = \infty,$$

$$(C3) \sup_{n \geq 1} |B_1^n| < \infty \text{ i } \sup_{n \leq 0} |B_n^0|^{-1} < \infty.$$

Jeśli $b_n = b = \text{const.}$, wówczas odpowiednio warunki te mają następujące formy $|b| > 1$, $|b| < 1$, $|b| = 1$. Poniższy Lemat stanowi podstawę dalszych analiz i dotyczy ogólnych modeli $Y_n = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(n) \xi_{n-p}$.

Lemat 1 Niech $c_j, j \in Z$ będzie ciągiem skalarów, $Y_n = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(n) \xi_{n-p}$ oraz niech $M < N, M, N \in Z$. Wówczas

$$\sum_{j=N}^M c_j Y_{n+j} = \sum_{k=N+n-q+1}^{M+n} \left(\sum_{j=\max(N, k-n)}^{\min(M, q-1+k-n)} c_j a_{n+j-k}(n+j) \right) \xi_k \quad (2.10)$$

oraz

$$\left\| \sum_{j=N}^M c_j Y_{n+j} \right\|^2 = \sum_{k=N+n-q+1}^{M+n} \left| \sum_{j=\max(N, k-n)}^{\min(M, q-1+k-n)} c_j a_{n+j-k}(n+j) \right|^2. \quad (2.11)$$

Dowód:

Ponieważ $Y_n = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(n) \xi_{n-p}$,

$$(Y_{n+j}, \xi_k) = \begin{cases} a_{n+j-k}(n+j), & \text{gdy } n+j-q+1 \leq k \leq n+j, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Z (2.12) wnioskujemy, że dla stałej wielkości k produkt (Y_{n+j}, ξ_k) może być jedynie niezerowy, gdy j spełnia warunek $k-n \leq j \leq q-1+k-n$. Zatem

$$\left(\sum_{j=N}^M c_j Y_{n+j}, \xi_k \right) = \sum_{j=\max(N, k-n)}^{\min(M, q-1+k-n)} c_j a_{n+j-k}(n+j). \quad (2.13)$$

Powyższa suma jest równa 0, gdy $k-n > M$ lub $q-1+k-n < N$. Zatem

$$\sum_{j=N}^M c_j Y_{n+j} = \sum_{k=N+n-q+1}^{M+n} \left(\sum_{j=\max(N, k-n)}^{\min(M, q-1+k-n)} c_j a_{n+j-k}(n+j) \right) \xi_k,$$

co implikuje (2.11) ponieważ $\{\xi_n\}$ jest ciągiem ortonormalnym. \square

Propozycja 1 Załóżmy, że $\sup_{n \geq 1} |B_1^n| = \infty$. System (2.5) ma ograniczone rozwiązanie w M_ξ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\sup_{n \in Z} \sum_{s=2-q}^{\infty} \left| \sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right|^2 < \infty. \quad (2.14)$$

Ponadto rozwiązanie jest jednoznacznie wyznaczone w M_ξ i ma następującą postać:

$$X_n = - \sum_{s=2-q}^{\infty} \left[\sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right] \xi_{n+s}. \quad (2.15)$$

Dowód:

Założmy najpierw, że $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem systemu (2.5). Ponieważ $\sup_r |B_1^r| = \infty$ oraz wszystkie współczynniki b_k są niezerowe, dla każdego $n \in Z$ istnieje ciąg k_r taki, że $\lim_r |B_{n+1}^{n+k_r}| = \infty$. Zatem z (2.8) wnioskujemy, że dla każdego $n \in Z$

$$X_n = - \lim_r \sum_{j=1}^{k_r} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} Y_{n+j}.$$

Z Lematu 1 mamy, że

$$\sum_{j=1}^{k_r} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} (Y_{n+j}, \xi_k) = \sum_{j=\max(1, k-n)}^{\min(k_r, q-1+k-n)} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{n+j-k}(n+j).$$

Zatem przy $r \rightarrow \infty$, otrzymujemy, że

$$(X_n, \xi_k) = - \lim_r \sum_{j=1}^{k_r} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} (Y_{n+j}, \xi_k) = \sum_{j=\max(1, k-n)}^{q-1+k-n} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{n+j-k}(n+j),$$

jeśli $k > 1 - q + n$ oraz $(X_n, \xi_k) = 0$ gdy $k \leq 1 - q + n$. Zatem

$$X_n = - \sum_{k=2+n-q}^{\infty} \left[\sum_{j=\max(1, k-n)}^{q-1+k-n} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{n+j-k}(n+j) \right] \xi_k,$$

co po podstawieniu $s = k - n$ daje (2.15). To również pokazuje, że rozwiązanie jest jednoznaczne. Kwadrat normy X_n ma postać

$$\|X_n\|^2 = \sum_{s=2-q}^{\infty} \left| \sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right|^2,$$

zatem $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (2.5) wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek (2.14).

Z drugiej strony załóżmy, że warunek (2.14) jest prawdziwy. Oznaczając

$$S_n^M = - \sum_{j=1}^M \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} Y_{n+j}, \quad n \in Z, M \geq 1,$$

z Lematu 1 wnioskujemy, że

$$S_n^M = - \sum_{k=2+n-q}^{M+n} \left(\sum_{j=\max(1,k-n)}^{\min(M,q-1+k-n)} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{n+j-k}(n+j) \right) \xi_k.$$

Zatem warunek (2.14) implikuje, że dla każdego $n \in Z$, granica $X_n = \lim_{M \rightarrow \infty} S_n^M$ istnieje i ma postać (2.15). Z powyższego faktu oraz z warunku (2.14) otrzymujemy, że $X_n \in M_\xi$ oraz $\sup_{n \in Z} \|X_n\| < \infty$. Zatem

$$S_n^M - b_n S_{n-1}^M = Y_n - \frac{1}{B_{n+1}^{n+M}} Y_{n+M}. \quad (2.16)$$

Ostatni czynnik w (2.16) wynosi $(S_n^M - S_n^{M-1})$ i zbiega do zera przy $M \rightarrow \infty$, wnioskujemy zatem, że

$$X_n - b_n X_{n-1} = Y_n - \lim_M \left(\frac{1}{B_{n+1}^{n+M}} Y_{n+M} \right) = Y_n,$$

co oznacza, że $\{X_n\}$ spełnia równanie (2.5). \square

Udowodniliśmy zatem, że ciąg dany wzorem (2.15) spełnia równanie (2.5), zatem $\{X_n\}$ jest rozwiązaniem (możliwe że nieograniczonym) modelu, nawet wtedy gdy jedynie warunek $\sup_{n \geq 1} |B_1^n| < \infty$ jest spełniony.

Propozycja 2 *Załóżmy, że $\sup_{n \leq -1} |B_n^0|^{-1} = \infty$. System (2.5) ma ograniczone rozwiązanie w M_ξ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\sup_{n \in Z} \sum_{s=0}^{\infty} \left| \sum_{j=-s}^{\min(0,q-1-s)} B_{n+j+1}^n a_{s+j}(n+j) \right|^2 < \infty. \quad (2.17)$$

Ponadto jest ono jednoznacznym rozwiązaniem systemu (2.5) w M_ξ oraz ma następującą formę:

$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{j=-s}^{\min(0,q-1-s)} B_{n+j+1}^n a_{s+j}(n+j) \right] \xi_{n-s}. \quad (2.18)$$

Dowód:

Dowód jest podobny do dowodu Propozycji 1, zatem zostanie jedynie nakreślony.

Jeśli $\sup_r |B_r^1|^{-1} = \infty$, zatem dla każdego $n \in Z$ istnieje ciąg $k_r \rightarrow \infty$, taki że $\lim_r |B_{n-k_r+1}^{n+1}| = 0$. Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem modelu (2.5). Zatem z (2.7) otrzymujemy, że

$$X_n = \lim_r \sum_{j=1-k_r}^0 B_{n+j+1}^{n+1} Y_{n+j}.$$

Korzystając z Lematu 1 wnioskujemy, że

$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{j=-s}^{\min(0, q-1-s)} B_{n+j+1}^n a_{s+j}(n+j) \right] \xi_{n-s},$$

co daje nam warunek (2.17).

Załóżmy teraz, że (2.17) jest spełniony oraz $S_n^M = \sum_{j=1-M}^0 B_{n+j+1}^{n+1} Y_{n+j}$. Z Lematu 1 otrzymujemy, że S_n^M zbiega do

$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{j=-s}^{\min(0, q-1-s)} B_{n+j+1}^n a_{s+j}(n+j) \right] \xi_{n-s},$$

gdy $M \rightarrow \infty$. Z warunku (2.17) otrzymujemy, że szereg $\{X_n\}$ jest ograniczony. Ponieważ $S_n^M - b_n S_{n-1}^M = Y_n - B_{n+1-M}^n Y_{n-M}$ oraz $B_{n+1-M}^n Y_{n-M} = S_n^{M+1} - S_n^M$, zatem szereg $\{X_n\}$ jest rozwiązaniem systemu (2.5). \square

W powyższej Propozycji pokazano również, że warunkiem na to, by ciąg $\{X_n\}$ był rozwiązaniem (możliwe, że nieograniczonym) modelu ARMA(1,q) wystarczy żeby ciąg dany wzorem (2.18) zbiegał do rozwiązania tego systemu w przestrzeni M_{ξ} .

Propozycja 3 *Załóżmy, że $\sup_r |B_1^r| < \infty$, oraz $\sup_r |B_r^0|^{-1} < \infty$. System (2.5) ma ograniczone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{s=0}^{n+q-2} \left| \sum_{j=\max(1-n, -s)}^{\min(0, q-1-s)} B_{n+1+j}^n a_{j+s}(n+j) \right|^2 < \infty \quad (2.19)$$

oraz

$$\sup_{n \leq -1} \sum_{s=2-q}^{-n} \left| \sum_{j=\max(1, s)}^{\min(0-n, q-1+s)} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right|^2 < \infty. \quad (2.20)$$

W tym przypadku system (2.5) ma nieskończenie wiele ograniczonych rozwiązań danych wzorem (2.9).

Dowód:

Ponieważ ciągi $|B_1^n|$, $n \geq 1$ oraz $\left| \frac{1}{B_{n+1}^0} \right|$, $n \leq -1$ są ograniczone, zatem szereg $\{X_n\}$ dany wzorem (2.9) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy

$$\sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{j=1-n}^0 B_{n+1+j}^n Y_{n+j} \right\|^2 < \infty \text{ oraz } \sup_{n \leq -1} \left\| \sum_{j=1}^{-n} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} Y_{n+j} \right\|^2 < \infty. \quad (2.21)$$

Korzystając z Lematu 1 otrzymujemy, że

$$\left\| \sum_{j=1-n}^0 B_{n+1+j}^n Y_{n+j} \right\|^2 = \sum_{k=2-q}^n \left| \sum_{j=\max(1-n, k-n)}^{\min(0, q-1+k-n)} B_{n+1+j}^n a_{n+j-k}(n+j) \right|^2,$$

co implikuje (2.19). Podobne rozumowanie pokazuje, że drugi warunek w (2.21) jest równoważny (2.20). \square

Ponieważ warunki (C1), (C2), (C3) obejmują wszystkie możliwe przypadki, zatem otrzymujemy następujące Twierdzenia.

Twierdzenie 2 *System (2.5) ma ograniczone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

$$\begin{aligned} \text{I. } & \sup_{n \in Z} \sum_{s=2-q}^{\infty} \left| \sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right|^2 < \infty \\ \text{II. } & \sup_{n \in Z} \sum_{s=0}^{\infty} \left| \sum_{j=-s}^{\min(0,q-1-s)} B_{n+j+1}^n a_{s+j}(n+j) \right|^2 < \infty \\ \text{III. } & \text{(i) } \sup_{n \geq 1} \sum_{s=0}^{n+q-2} \left| \sum_{j=\max(1-n,-s)}^{\min(0,q-1-s)} B_{n+1+j}^n a_{j+s}(n+j) \right|^2 < \infty \text{ oraz} \\ & \text{(ii) } \sup_{n \leq -1} \sum_{s=2-q}^{-n} \left| \sum_{j=\max(1,s)}^{\min(0-n,q-1+s)} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Warunki **I**, **II** i **III** nie są rozłączne i żaden z nich nie implikuje jednoznaczności rozwiązania.

Następujące Twierdzenie podaje warunki konieczne i dostateczne na istnienie jednoznacznego, ograniczonego rozwiązania systemu (2.5). Dowód wynika bezpośrednio z Propozycji 1 oraz 2.

Twierdzenie 3 *System (2.5) ma jednoznaczne ograniczone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:*

$$\begin{aligned} \text{I. } & \text{(i) } \sup_{n \geq 1} |B_1^n| = \infty \text{ oraz} \\ & \text{(ii) } \sup_{n \in Z} \sum_{s=2-q}^{\infty} \left| \sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right|^2 < \infty \text{ lub} \\ \text{II. } & \text{(i) } \sup_{n \leq -1} |B_n^0|^{-1} = \infty \text{ oraz} \\ & \text{(ii) } \sup_{n \in Z} \sum_{s=0}^{\infty} \left| \sum_{j=-s}^{\min(0,q-1-s)} B_{n+j+1}^n a_{s+j}(n+j) \right|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Jeśli warunek **I** jest spełniony, wówczas rozwiązanie ma następującą formę:

$$X_n = - \sum_{s=2-q}^{\infty} \left[\sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right] \xi_{n+s}.$$

Gdy spełniony jest warunek **II**, wtedy rozwiązanie przyjmuje postać:

$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{j=-s}^{\min(0, q-1-s)} B_{n+j+1}^n a_{s+j}(n+j) \right] \xi_{n-s}.$$

Warunki **I** i **II** z Twierdzenia 3 nie są rozłączne. Możliwy jest przypadek, że zarówno $\sup_{n \geq 1} |B_1^n|$ jak i $\sup_{n \leq -1} |B_n^0|^{-1}$ są nieskończone. Jeśli tak jest i rozwiązanie jest ograniczone, wówczas można pokazać że współczynniki (b_n) oraz $(a_k(n))$ muszą spełniać warunek

$$\sum_{j=k-n}^{q-1+k-n} B_{n+j+1}^{k+q-1} a_{j+k-n}(n+j) = 0, \quad \text{dla każdego } n, k \in Z.$$

W szczególności, gdy $q = 1$, wówczas warunki **I** oraz **II** z Twierdzenia 3 są spełnione tylko wtedy, gdy system jest homogeniczny, tzn gdy $a_0(n) \equiv 0$.

Rozpatrzmy teraz ogólny przypadek modeli ARMA(p,q) ze zmiennymi współczynnikami dany wzorem (2.4). Oznaczmy:

$$B_n = \begin{bmatrix} b_1(n) & b_2(n) & \dots & b_{p-1}(n) & b_p(n) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{B}_k^n = B_n B_{n-1} \dots B_k, \quad n \geq k. \quad (2.23)$$

Jeśli przyjmiemy $\mathbf{Y}_n = [Y_n, 0, \dots, 0]'$, $\mathbf{X}_n = [X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-p+1}]'$, gdzie $Y_n = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(n) \xi_{n-p}$ oraz $[\dots]'$ oznaczmy jako wektor kolumnowy, wówczas równanie (2.4) możemy zapisać w następującej formie ([5]):

$$\mathbf{X}_n = B_n \mathbf{X}_{n-1} + \mathbf{Y}_n. \quad (2.24)$$

Iterując (2.24) k razy otrzymujemy

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{B}_{n-k+1}^n \mathbf{X}_{n-k} + \sum_{s=0}^{k-1} \mathbf{B}_{n+1-s}^n \mathbf{Y}_{n-s}, \quad k > 0, \quad (2.25)$$

przyjmując, że $\mathbf{B}_j^n = I$ (macierz jednostkowa rzędu p) jeśli $j > n$. Ponieważ wszystkie macierze \mathbf{B}_j^n są odwracalne, więc spełniona jest następująca zależność:

$$\mathbf{X}_n = (\mathbf{B}_{n+1}^{n+k})^{-1} \mathbf{X}_{n+k} - \sum_{s=1}^k (\mathbf{B}_{n+1}^{n+s})^{-1} \mathbf{Y}_{n+s}, \quad k > 0. \quad (2.26)$$

Zatem otrzymujemy

$$X_n = \sum_{j=1}^p U_j(n-k+1, n) X_{n-k-j+1} + \sum_{s=0}^{k-1} U_1(n-s+1, n) Y_{n-s}, \quad (2.27)$$

gdzie

$$U_j(l, k) = \mathbf{B}_l^k(1, j). \quad (2.28)$$

dla $l < k$. Z drugiej strony mamy

$$X_n = \sum_{j=1}^p W_j(n+1, n+k) X_{n+k-j+1} - \sum_{s=1}^k W_1(n+1, n+s) Y_{n+s}, \quad (2.29)$$

gdzie

$$W_j(l, k) = (\mathbf{B}_l^k)^{-1}(1, j) \quad (2.30)$$

dla $l < k$.

Twierdzenie 4 *Jeśli szereg $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (2.4) wówczas ma on następującą postać:*

$$X_n = \begin{cases} - \sum_{s=2-q}^{\infty} \sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} W_1(n+1, n+j) a_{j-s}(n+j) \xi_{s+n}, & \text{jeśli zachodzi I} \\ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=-s}^{\min(0, q-1-s)} U_1(n+j+1, n) a_{s+j}(n+j) \xi_{n-s}, & \text{jeśli zachodzi II,} \end{cases} \quad (2.31)$$

gdzie

$$\begin{aligned} I : \quad & \sup_{n \in Z} \sum_{s=2-q}^{\infty} \left| \sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} W_1(n+1, n+j) a_{j-s}(n+j) \right|^2 < \infty \text{ oraz} \\ & \forall_n \sup_{k \geq 1} \left(\sum_{j=1}^p |W_j(n+1, n+k)|^2 \right)^{-1} = \infty \\ II : \quad & \sup_{n \in Z} \sum_{s=0}^{\infty} \left| \sum_{j=-s}^{\min(0, q-1-s)} U_1(n-j+1, n) a_{s+j}(n+j) \right|^2 < \infty \text{ oraz} \\ & \forall_n \sup_{k \geq 1} \left(\sum_{j=1}^p |U_j(n-k+1, n)|^2 \right)^{-1} = \infty. \end{aligned}$$

Dowód:

Załóżmy, że warunek *I* jest spełniony oraz że $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (2.4) wówczas dla każdego $n \in Z$ istnieje ciąg k_r taki, że

$$\lim_r \left(\sum_{j=1}^p |W_j(n+1, n+k_r)|^2 \right)^{-1} = \infty.$$

Zatem z (2.29) mamy, że dla każdego $n \in Z$ prawdziwa jest zależność

$$X_n = - \lim_r \sum_{s=1}^{k_r} W_1(n+1, n+s) Y_{n+s}.$$

Z Lematu 1 otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{k_r} W_1(n+1, n+j) (Y_{n+j}, \xi_k) = \sum_{j=\max(1, k-n)}^{\min(k_r, q-1+k-n)} W_1(n+1, n+j) a_{n+j-k}(n+j).$$

Przyjmując, że $r \rightarrow \infty$, otrzymujemy, że

$$(X_n, \xi_k) = - \lim_r \sum_{j=1}^{k_r} W_1(n+1, n+j) (Y_{n+j}, \xi_k) = - \sum_{j=\max(1, k-n)}^{q-1+k-n} W_1(n+1, n+j) a_{n+j-k}(n+j),$$

jeśli $k > 1 - q + n$ oraz $(X_n, \xi_k) = 0$ gdy $k \leq 1 - q + n$. Zatem z Lematu 1 mamy

$$X_n = - \sum_{k=2+n-q}^{\infty} \left[\sum_{j=\max(1, k-n)}^{q-1+k-n} W_1(n+1, n+j) a_{n+j-k}(n+j) \right] \xi_k,$$

co po podstawieniu $s = k - n$ daje tezę twierdzenia. To również pokazuje, że rozwiązanie jest jednoznaczne. Kwadrat normy X_n ma następującą postać:

$$\|X_n\|^2 = \sum_{s=2-q}^{\infty} \left| \sum_{j=\max(1, s)}^{q-1+s} W_1(n+1, n+j) a_{j-s}(n+j) \right|^2.$$

Załóżmy, że warunek II zachodzi. Dla każdego $n \in Z$ istnieje zatem ciąg $k_r \rightarrow \infty$ taki że $\lim_r \left(\sum_{j=1}^p |U_j(n - k_r + 1, n)|^2 \right)^{-1} = \infty$. Jeśli ciąg $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (2.4), wtedy z (2.27) otrzymujemy

$$X_n = \lim_r \sum_{j=1-k_r}^0 U_1(n+j+1, n) Y_{n+j}.$$

Korzystając z Lematu 1 wnioskujemy, że

$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{j=-s}^{\min(0, q-1-s)} U_1(n+j+1, n) a_{s+j}(n+j) \right] \xi_{n-s}.$$

Ponadto

$$\|X_n\|^2 = \sum_{s=0}^{\infty} \left| \sum_{j=-s}^{\min(0, q-1-s)} U_1(n-j+1, n) a_{s+j}(n+j) \right|^2.$$

□

2.3 Przykłady

W tym podrozdziale podamy kilka przykładów systemów zdefiniowanych w (2.4). Wiele wyników otrzymanych w tej części jest powszechnie znana i może być otrzymana inną drogą. Głównym zamierzeniem tego podrozdziału jest ilustracja Twierdzeń 2 i 3 oraz porównanie ich ze znanymi faktami.

System homogeniczny

Niech $q = 1$ oraz $a_0(n) \equiv 0$, zatem system (2.4) przyjmuje postać:

$$X_n - b_n X_{n-1} = 0, \quad n \in Z. \quad (2.32)$$

Wówczas warunki **I**, **II** oraz **III** z Twierdzenia 2 oraz warunki **I(ii)** i **II(ii)** z Twierdzenia 3 są spełnione. Ponieważ $X_n = 0$ spełnia równanie (2.32), z Twierdzenia 3 wnioskujemy, że system (2.32) ma niezerowe ograniczone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{n \geq 1} |B_1^n| < \infty$ oraz $\sup_{n \leq -1} |B_n^0|^{-1} < \infty$.

Stałe współczynniki

Założmy, że $b_n = b$ oraz $a_j(n) = a_j$, $j = 0, \dots, q-1$ nie zależą od n , tzn

$$X_n - bX_{n-1} = \sum_{p=0}^{q-1} a_p \xi_{n-p}, \quad n \in Z. \quad (2.33)$$

Wówczas $B_r^s = b^{s-r+1}$ dla $s \geq r$ oraz $\sup_{n \geq 1} |B_1^n| = \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $|b| > 1$ oraz $\sup_{n \leq -1} |B_n^0|^{-1} = \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $|b| < 1$. Jeśli $|b| > 1$, wówczas suma w (2.14) jest równa

$$\sum_{s=2-q}^0 \left| \sum_{j=1}^{q-1+s} \frac{a_{j-s}}{b^j} \right|^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{|b|^{2s}} \left| \sum_{k=0}^{q-1} \frac{a_k}{b^k} \right|^2,$$

co jest skończone i nie zależy od n . Zatem jeśli $|b| > 1$, wówczas warunek **I(ii)** z Twierdzenia 3 jest spełniony. Podobnie, gdy $|b| < 1$, wówczas warunek **II(ii)** jest spełniony. Zatem z Twierdzenia 3 otrzymujemy, że jeśli $|b| \neq 1$, wówczas system (2.33) ma jednoznaczne ograniczone rozwiązanie dane wzorem:

$$X_n = - \sum_{s=2-q}^{\infty} \left[\sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} \frac{a_{j-s}}{b^j} \right] \xi_{n+s}, \quad \text{gdy } |b| > 1 \quad \text{lub}$$

$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{j=\max(0,s-q+1)}^s b^j a_{s-j} \right] \xi_{n-s}, \quad \text{gdy } |b| < 1.$$

Ciąg $\{X_n\}$ jest stacjonarny, tzn (X_n, X_m) zależy jedynie od różnicy $n - m$. Jeśli $|b| = 1$, wówczas założenie w Propozycji 3 jest spełnione i dlatego system (2.33) ma ograniczone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $z = 1/b$ jest miejscem zerowym wielomianu $\sum_{k=0}^{q-1} a_k z^k$ ([6]).

System ARMA(1,1)

Założmy, że $q = 1$. Wówczas system (2.4) przyjmuje postać:

$$X_n - b_n X_{n-1} = a_0(n) \xi_n, \quad n \in Z. \quad (2.34)$$

Korzystając z Twierdzenia 3, otrzymujemy, że system (2.34) ma jednoznaczne ograniczone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy

- I.** (i) $\sup_{n \geq 1} |B_1^n| = \infty$ oraz (ii) $\sup_{n \in Z} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_0(n+s)}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^2 < \infty$, lub
- II.** (i) $\sup_{n \leq -1} |B_n^0|^{-1} = \infty$ oraz (ii) $\sup_{n \in Z} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_0(n-s)|^2 < \infty$.

Jeśli $a_0(n) = \text{const.} \neq 0$, wówczas warunek **I(ii)** w powyższym zapisie implikuje **I(i)** oraz **II(ii)** implikuje **II(i)**. W szczególności, gdy $a_0(n) \equiv 1$, otrzymane warunki są równoważne warunkom otrzymanym w [16].

Homogeniczny System Wariacyjny

Rozpatrzmy system dany wzorem:

$$X_n - b_n X_{n-1} = \eta_n + \eta_{n-1} + \dots + \eta_{n-q+1}, \quad n \in Z, \quad (2.35)$$

gdzie $b_n \neq 0$, $n \in Z$ oraz $\{\eta_n\}$ jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych ze średnią zero i wariancją zmienną w czasie $|\eta_n|^2 = |a_n|^2$. System ten był omówiony w pracy [32]. Zapisując $\eta_n = a_n \xi_n$, $n \in Z$, widzimy, że (2.35) ma formę (2.5) z $a_k(n) = a_{n-k}$, $k = 0, \dots, q-1$, $n \in Z$. Z Twierdzenia 3 wnioskujemy, że system (2.35) ma jednoznaczne ograniczone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków

- I.** (i) $\sup_{n \geq 1} |B_1^n| = \infty$ oraz
- $$(ii) \sup_{n \in Z} \left[\sum_{s=2-q}^0 \left| \sum_{j=1}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} \right|^2 |a_{n+s}|^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \left| \sum_{j=s}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} \right|^2 |a_{n+s}|^2 \right] < \infty$$

II. (i) $\sup_{n \leq -1} |B_n^0|^{-1} = \infty$ oraz

$$(ii) \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{s=0}^{q-2} \left| \sum_{j=-s}^0 B_{n+j+1}^n \right|^2 |a_{n-s}|^2 + \sum_{s=q-1}^{\infty} \left| \sum_{j=-s}^{q-1-s} B_{n+j+1}^n \right|^2 |a_{n-s}|^2 \right] < \infty.$$

Rozdział 3

Modele PARMMA

3.1 Procesy okresowo skorelowane

Definicja 6 ([13]) Szereg $\{X_n\}$, $n \in Z$ jest okresowo skorelowany (ang. *periodically correlated*) z okresem T , jeśli dla każdego $n, k \in Z$ spełnione są następujące warunki:

$$\mu(n) = EX_n = \mu(n + T) \quad \text{oraz} \quad EX_{n+k} \overline{X_k'} = (X_{n+k}, X_k) = (X_{n+k+T}, X_{k+T}).$$

Proces stacjonarny w słabym sensie jest okresowo skorelowany z okresem $T = 1$. Ze względu na swoją periodyczną naturę, procesy okresowo skorelowane określane są także jako procesy periodycznie niestacjonarne, cyklostacjonarne, periodycznie stacjonarne i procesy z okresową strukturą.

Procesy okresowo skorelowane generalnie są niestacjonarne, ale wykazują wiele własności charakterystycznych procesom stacjonarnym. Istnieje wiele przykładów procesów okresowo skorelowanych, które mają bezpośredni związek z procesami stacjonarnymi.

Proste modele procesów okresowo skorelowanych

- Jeśli $\{X_n\}$, $n \in Z$ jest procesem okresowo skorelowanym z okresem T oraz Θ jest zmienną losową niezależną od $\{X_t\}$ taką, że $P(\Theta = j) = \frac{1}{T}$ dla $j = 0, 1, \dots, T - 1$, wówczas proces $Y_n = X_{n+\Theta}$ jest stacjonarny w słabym sensie.
- Jeśli $\{X_n\} \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest procesem okresowym, tzn

$$\|X_n - X_{n+T}\|_{L_2} = 0$$

dla pewnego T , to $\{X_n\}$ jest okresowo skorelowany.

- Jeśli $\{X_n\} \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest procesem stacjonarnym w słabym sensie ze średnią 0 oraz (f_n) jest deterministycznym ciągiem okresowym z okresem T , tzn. $f_n = f_{n+T}$, wówczas $Y_n = f_n + X_n$ jest okresowo skorelowany z okresem T .
- Jeśli $\{X_n\} \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest procesem stacjonarnym w słabym sensie ze średnią 0 oraz (f_n) jest deterministycznym ciągiem okresowym z okresem T ($f_n = f_{n+T}$), wówczas $Y_n = f_n X_n$ jest okresowo skorelowany z okresem T .
- Jeśli $\{X_n\} \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest procesem stacjonarnym w słabym sensie ze średnią 0 oraz (f_n) jest deterministycznym ciągiem okresowym z okresem T ($f_n = f_{n+T}$) przyjmującym wartości w zbiorze indeksów procesu $\{X_n\}$, wówczas $Y_n = X_{n+f_n}$ jest okresowo skorelowany z okresem T .

3.2 Analiza modeli PARMA w dziedzinie czasowej

Modele PARMA (periodic ARMA) są szczególnym przypadkiem omówionych w Rozdziale 2 modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami. Mają one ważne znaczenie przy opisie danych rzeczywistych, w których zaobserwowano okresowość na różnych płaszczyznach, np. okresowość w funkcji korelacji. I tak między innymi wykorzystywane były do modelowania danych meteorologicznych, hydrologicznych, ekonomicznych ([7],[8],[12],[30]).

Definicja 7 ([24]) *System PARMA(p,q) spełnia następujące równanie:*

$$X_n - \sum_{k=1}^p b_k(n) X_{n-k} = \sum_{j=0}^{q-1} a_j(n) \xi_{n-j}, \quad n \in Z, \quad (3.1)$$

gdzie $(b_k(n))$, $k = 1, \dots, p$ i $(a_j(n))$, $j = 0, \dots, q - 1$ są ciągami okresowymi względem n (z tym samym okresem T), $b_k(n) \neq 0$ dla każdego $k = 1, \dots, p$ oraz $n \in Z$, a $\{\xi_n\}$ jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych o średniej 0 i wariancji 1.

W pracach [24] oraz [32] omówiono szczególny przypadek modeli PARMA(p,q), a mianowicie szeregi PARMA(1,q). Pokazano, że istnieją warunki gwarantujące istnienie jednoznacznego i ograniczonego rozwiązania modelu, które ponadto jest procesem okresowo skorelowanym.

Warunki uzyskane dla prostszego modelu PARMA(1,q) są szczególnym przypadkiem warunków zawartych w Twierdzeniach 2 oraz 3. W przypadku ogólnych modeli PARMA(p,q) rezultaty uzyskane w Twierdzeniu 4 dają warunki na istnienie jednoznacznego i

ograniczonego rozwiązania.

Założmy, że ciągi (b_n) i $(a_k(n))$, $k = 0, \dots, q-1$ w definicji modeli ARMA(1,q) są okresowe względem n z tym samym okresem $T > 1$. Wówczas $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |a_k(n)| < \infty$ dla każdego $k = 0, 1, \dots, q-1$. Przyjmując oznaczenie $P = b_1 b_2 \dots b_T$, otrzymujemy, że $\sup_{n \geq 1} |B_1^n| = \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $|P| > 1$ oraz $\sup_{n \leq -1} |B_n^0|^{-1} = \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $|P| < 1$. Założmy najpierw, że $|P| > 1$. Pokażemy, że spełniony jest wówczas warunek **I(ii)** z Twierdzenia 3:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=2-q}^{\infty} \left| \sum_{j=\max(1,s)}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right|^2 \leq C + \sum_{s=1}^{\infty} \left| \sum_{j=s}^{q-1+s} \frac{1}{B_{n+1}^{n+j}} a_{j-s}(n+j) \right|^2 \\
& \leq C + \sum_{s=1}^{\infty} \left| \sum_{w=0}^{q-1} \frac{1}{B_{n+1}^{n+w+s}} a_w(n+w+s) \right|^2 \\
& \leq C + \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=1}^T \left| \sum_{w=0}^{q-1} \frac{1}{B_{n+1}^{n+w+NT+k}} a_w(n+w+NT+k) \right|^2 \\
& \leq C + \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=1}^T \left| \sum_{w=0}^{q-1} \frac{1}{P^N B_{n+1}^{n+w+k}} a_w(n+w+k) \right|^2 \\
& \leq C + \sum_{N=0}^{\infty} |P|^{-2N} \sum_{k=1}^T \left| \sum_{w=0}^{q-1} \frac{1}{B_{n+1}^{n+w+k}} a_w(n+w+k) \right|^2 < \infty,
\end{aligned}$$

i stąd warunek **I(ii)** z Twierdzenia 3 jest spełniony. Podobna analiza pokazuje, że jeśli $|P| < 1$, wówczas warunek **II(ii)** z Twierdzenia 3 jest spełniony. Zatem dowiedliśmy następującego Twierdzenia.

Twierdzenie 5 *Jeśli (b_n) oraz $(a_k(n))$ $k = 0, 1, \dots, q-1$ są okresowe z tym samym okresem T oraz $P = b_1 b_2 \dots b_T$, wówczas system (2.5) ma jednoznaczne ograniczone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $|P| \neq 1$. Ponadto rozwiązanie to dane jest wzorem (2.15), gdy $|P| > 1$ oraz (2.18) gdy $|P| < 1$.*

Z postaci rozwiązania wynika, że jest ono okresowo skorelowane. Warto zwrócić również uwagę na fakt, że znajomość postaci rozwiązania jest ważna w problemie predykcji takich procesów.

3.3 Analiza modeli PARMA w dziedzinie częstotliwościowej

Niech $\{X_n\}$, $n \in Z$, będzie ciągiem w przestrzeni Hilberta $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ z funkcją kowariancji $R_X(n, m) = (X_n, X_m)$. Grupa dualna \mathcal{Z} będzie tutaj identyfikowana z $\mathbf{T} = [0, 2\pi)$ z mnożeniem modulo 2π .

Definicja 8 ([14]) Szereg $\{X_n\}$, $n \in Z$, jest nazywany silnie harmonizowalnym jeśli istnieje miara F na \mathbf{T}^2 (zwana miarą spektralną $\{X_n\}$), taka że

$$R_X(n, m) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(ns-mt)} F(ds, dt).$$

W tym rozdziale przyjmujemy, że wartość średnia rozpatrywanych procesów wynosi 0. Każdy proces okresowo skorelowany z okresem T jest silnie harmonizowalny, a jego miara spektralna jest umieszczona na zbiorach $L_n = \{(s, t) \in \mathbf{T}^2 : t = s + \frac{2n\pi}{T}\}$, gdzie $n = 0, 1, \dots, T-1$. Miara spektralna F procesu okresowo skorelowanego z okresem T ma następującą formę ([11], [22]):

$$F(ds, dt) = \sum_{n=0}^{T-1} \Gamma_n(ds, dt),$$

gdzie miary Γ_n są umieszczone na zbiorach L_n , $n = 0, 1, 2, \dots, T-1$.

W tym rozdziale zajmiemy się miarą spektralną procesów silnie harmonizowalnych o specjalnej postaci średniej ruchomej:

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(n) \xi_{n-k}, \quad (3.2)$$

gdzie ξ_k jest ortonormalną bazą w $M_X = \overline{\text{sp}}\{X_n : n \in Z\}$. Każdy szereg może być zapisany w powyższej formie na wiele różnych sposobów zależnych od wyboru szeregu $\{\xi_n\}$. Jakkolwiek, w wielu wypadkach reprezentacja ta jest jednoznaczna, tak jest gdy X_n jest ograniczonym rozwiązaniem modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami ([24], [32]).

W rozdziale tym zatem zajmiemy się problemem opisu miary spektralnej harmonizowalnych rozwiązań takich systemów. Rozwinięte zostaną rezultaty uzyskane w pracy [16] dla modeli AR(1) z okresowymi współczynnikami. Warunki na istnienie jednoznacznego ograniczonego rozwiązania modeli PARMA oraz jego reprezentacja średniej ruchomej dają możliwość wyznaczenia formy miary spektralnej F takich modeli.

Główne rezultaty tego rozdziału są zawarte w Twierdzeniach 6 oraz 7. Uzyskane wyniki zastosowano do estymacji współczynników modeli PARMA.

Ponieważ ograniczone rozwiązanie modeli ARMA(p,q) ze zmiennymi współczynnikami (a co za tym idzie modeli PARMA(p,q)) ma postać (2.31), możemy przyjąć, że $M_X = M_\xi$. Jeśli oznaczymy $V : M_X \longrightarrow M_X$ jako unitarny operator $V(\xi_n) = \xi_{n+1}$ wówczas $X_n = V^n \Theta_n$, gdzie

$$\Theta_n = \begin{cases} -\sum_{s=2-q}^{\infty} \sum_{j=\max\{1,s\}}^{q-1+s} W_1(n+1, n+j) a_{j-s}(n+j) \xi_s & \text{gdy } I \text{ zachodzi,} \\ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=-s}^{\min\{0, q-1-s\}} U_1(n+j+1, n) a_{j+s}(n+j) \xi_{-s} & \text{gdy } II \text{ zachodzi,} \end{cases}$$

gdzie warunki I oraz II zdefiniowane są w Twierdzeniu 4.

Operator V jest izometrią, zatem funkcja kowariancji X_n i X_{n+k} ma następującą postać:

$$R_X(n, n+k) = (\Theta_n, V^k \Theta_{n+k}).$$

Niech D będzie unitarnym odwzorowaniem $D : \xi_n \longrightarrow e^{in}$. D odwzorowuje M_X w $L_2([0, 2\pi), dt)$, gdzie dt jest unormowaną miarą Lebesgue' a. Ponadto niech ciąg $(f_n(\cdot))$ spełnia równanie:

$$f_n(\cdot) = \sum_{k=1}^p b_k(n) f_{n-k}(\cdot) + \sum_{j=0}^{q-1} a_j(n) e^{i(n-j)\cdot}, n \in Z.$$

Zatem

$$D(X_n)(\cdot) = \begin{cases} -e^{in\cdot} \sum_{s=2-q}^{\infty} \sum_{j=\max\{1,s\}}^{q-1+s} W_1(n+1, n+j) a_{j-s}(n+j) e^{is\cdot} & \text{gdy } I \text{ zachodzi,} \\ e^{in\cdot} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=-s}^{\min\{0, q-1-s\}} U_1(n+j+1, n) a_{j+s}(n+j) e^{-is\cdot} & \text{gdy } II \text{ zachodzi,} \end{cases}$$

gdzie warunki I oraz II zdefiniowane są w Twierdzeniu 4.

Jeśli oznaczymy

$$g_n(\lambda) = \begin{cases} -\sum_{s=2-q}^{\infty} \sum_{j=\max\{1,s\}}^{q-1+s} W_1(n+1, n+j) a_{j-s}(n+j) e^{is\lambda} & \text{gdy } I \text{ zachodzi,} \\ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=-s}^{\min\{0, q-1-s\}} U_1(n+j+1, n) a_{j+s}(n+j) e^{-is\lambda} & \text{gdy } II \text{ zachodzi,} \end{cases} \quad (3.3)$$

możemy zauważyć, że ciąg $\{X_n\}$ jest unitarnie równoważny $f_n(\lambda) = e^{in\lambda} g_n(\lambda)$ w $L_2([0, 2\pi), dt)$.

Lemat 2 *Funkcja kowariancji procesu okresowo skorelowanego z okresem T ma następującą formę:*

$$B_n(k) = R_X(n+k, k) = \sum_{l=0}^{T-1} e^{-ik \frac{2\pi l}{T}} \int_0^{2\pi} e^{ins} \gamma_l(ds),$$

gdzie

$$\gamma_l(ds) = \Gamma_l(ds, ds + 2\pi l/T).$$

Dowód:

$$\begin{aligned} B_n(k) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n+k)s-ikt} F(ds, dt) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik(s-t)} e^{ins} F(ds, dt) = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik(s-t)} e^{ins} \sum_{l=0}^{T-1} \Gamma_l(ds, dt) = \sum_{l=0}^{T-1} e^{-ik\frac{2\pi l}{T}} \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} \gamma_l(d\lambda). \end{aligned}$$

□

Uwaga 1 Rodzina miar (γ_k) , $k = 0, 1, \dots, T-1$ spełnia następujące równanie

$$\int_0^{2\pi} e^{in\lambda} \gamma_l(d\lambda) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} e^{\frac{2ik\pi l}{T}} B_n(k). \quad (3.4)$$

Miary (γ_k) , $k = 0, 1, \dots, T-1$ są nazywane spektrum szeregu $\{X_n\}$.

Twierdzenie 6 Niech $(b_k(n))$, $k = 1, 2, \dots, p$ oraz $(a_j(n))$, $j = 0, 1, \dots, q-1$ będą ciągami okresowymi ze względu na n z tym samym okresem T oraz warunek I lub II z Twierdzenia 4 zachodzi. Niech ponadto (γ_k) , $k = 0, 1, \dots, T-1$ będzie spektrum okresowo skorelowanego ograniczonego rozwiązania systemu PARMA(p, q). Wówczas miary (γ_k) są absolutnie ciągłe względem unormowanej miary Lebesgue'a $d\lambda$ na $[0, 2\pi)$ oraz

$$\frac{d\gamma_k(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{l=0}^{T-1} \hat{g}_l(\lambda + 2\pi l/T) \overline{\hat{g}_{l-k}(\lambda + 2\pi l/T)},$$

gdzie

$$\hat{g}_j(\lambda) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} g_n(\lambda) e^{\frac{2\pi inj}{T}} \quad (3.5)$$

oraz ciąg $(g_n(\lambda))$ jest dany wzorem (3.3).

Dowód:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} e^{i2\pi nk/T} g_{n+p}(\lambda) \overline{g_n(\lambda)} &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} e^{i2\pi nk/T} \sum_{l=0}^{T-1} \hat{g}_l(\lambda) e^{-2i\pi l(n+p)/T} \sum_{j=0}^{T-1} \overline{\hat{g}_j(\lambda)} e^{2i\pi jn/T} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{-2i\pi ilp/T} \hat{g}_l(\lambda) \overline{\hat{g}_j(\lambda)} \sum_{n=0}^{T-1} e^{2i\pi n/T(k+j-l)} = \\ &= \sum_{l=0}^{T-1} e^{-2i\pi ilp/T} \hat{g}_l(\lambda) \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{n=0}^{T-1} \overline{\hat{g}_j(\lambda)} e^{2i\pi n/T(j-(l-k))} = \\ &= \sum_{l=0}^{T-1} e^{-2i\pi ilp/T} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \overline{g_n(\lambda)} e^{-2i\pi n/T(l-k)} \hat{g}_l(\lambda) = \sum_{l=0}^{T-1} e^{-2i\pi ilp/T} \overline{\hat{g}_{l-k}(\lambda)} \hat{g}_l(\lambda). \end{aligned}$$

Korzystając z równoważności X_n i $f_n(\cdot) = e^{in\cdot} g_n(\cdot)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{ip\lambda} \gamma_k(d\lambda) &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} e^{2i\pi nk/T} B_p(n) = \\ \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} e^{2i\pi nk/T} \int_0^{2\pi} e^{i(n+p)\lambda - in\lambda} g_{n+p}(\lambda) \overline{g_n(\lambda)} d\lambda &= \int_0^{2\pi} e^{ip\lambda} \sum_{l=0}^{T-1} e^{-2\pi ilp/T} \overline{g_{l-k}(\lambda)} \hat{g}_l(\lambda) d\lambda = \\ \sum_{l=0}^{T-1} \int_0^{2\pi} e^{ip(\lambda - 2\pi l/T)} \hat{g}_l(\lambda) \overline{\hat{g}_{l-k}(\lambda)} d\lambda &= \sum_{l=0}^{T-1} \int_0^{2\pi} e^{ip\lambda} \hat{g}_l(\lambda + 2\pi l/T) \overline{\hat{g}_{l-k}(\lambda + 2\pi l/T)} d\lambda. \end{aligned}$$

□

Rozpatrzmy teraz szczególny przypadek systemu PARMA(p,q), mianowicie model PARMA(1,q) dany wzorem (3.1) dla $q = 1$. W tym wypadku jednoznaczne ograniczone rozwiązanie $\{X_n\}$ ma następującą postać (Twierdzenie 3):

$$X_n = \begin{cases} - \sum_{s=2-q}^{\infty} \sum_{j=\max\{1,s\}}^{q-1+s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j-s}(n+j) \xi_{n+s}, & \text{gdy } |P| > 1 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=-s}^{\min\{0, q-1-s\}} (B_{n+j+1}^n) a_{j+s}(n+j) \xi_{n-s}, & \text{gdy } |P| < 1, \end{cases} \quad (3.6)$$

gdzie $P = b_1 b_2 \cdots b_T$ oraz B_k^l jest zdefiniowane w (2.6). Następujące twierdzenie dotyczy modeli PARMA(1,q).

Twierdzenie 7 Niech $f_n(\lambda)$ będzie ciągiem unitarnie równoważnym rozwiązaniu $\{X_n\}$ systemu PARMA(1,q) poprzez odwzorowanie D (tzn. $f_n(\lambda) = D(X_n)(\lambda)$), wówczas następująca formuła jest prawdziwa:

$$f_n(\lambda) = e^{in\lambda} [1 - P e^{-iT\lambda}]^{-1} G_n(\lambda) + e^{in\lambda} R_n(\lambda),$$

gdzie

$$G_n(\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=q-1}^{T+q-2} \sum_{j=0}^{q-1} B_{n-k+j+1}^n a_j(n+j-k) e^{-i\lambda k} & \text{gdy } |P| < 1, \\ \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{q-1} B_{n-k+j+1}^n a_j(n+j-k) e^{-i\lambda k} & \text{gdy } |P| > 1, \end{cases} \quad (3.7)$$

oraz

$$R_n(\lambda) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=0}^s B_{n-s+j+1}^n a_j(n+j-s) e^{-i\lambda s} & \text{gdy } |P| < 1, \\ - \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=1}^{q-1+s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j+s}(n+j) e^{-i\lambda s} & \text{gdy } |P| > 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Dowód:

Jeśli $|P| < 1$, wówczas mamy

$$\begin{aligned}
 g_n(\lambda) &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=-s}^{\min\{0, q-1-s\}} B_{n+j+1}^n a_{j+s}(n+j) e^{-i\lambda s} = \\
 &= \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=0}^s B_{n+j-s+1}^n a_j(n+j-s) e^{-i\lambda s} + \sum_{s=q-1}^{\infty} \sum_{j=-s}^{q-1-s} B_{n+j+1}^n a_{j+s}(n+j) e^{-i\lambda s} = \\
 &= \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=0}^s B_{n+j-s+1}^n a_j(n+j-s) e^{-i\lambda s} + \sum_{s=q-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{q-1} B_{n+j-s+1}^n a_j(n+j-s) e^{-i\lambda s} = \\
 &= \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=0}^s B_{n+j-s+1}^n a_j(n+j-s) e^{-i\lambda s} + \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=q-1}^{T+q-2} \sum_{j=0}^{q-1} B_{n+j-NT-k+1}^n a_j(n+j-NT-k) e^{-i\lambda(NT+k)} = \\
 &= [1 - Pe^{-i\lambda}]^{-1} G_n(\lambda) + \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=0}^s B_{n+j-s+1}^n a_j(n+j-s) e^{-i\lambda s}.
 \end{aligned}$$

Jeśli $|P| > 1$, wówczas mamy

$$\begin{aligned}
 g_n(\lambda) &= - \sum_{s=2-q}^{\infty} \sum_{j=\max\{1, s\}}^{q-1+s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j-s}(n+j) e^{i\lambda s} = \\
 &= - \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=1}^{q-1-s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j+s}(n+j) e^{-i\lambda s} - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=s}^{q-1+s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j-s}(n+j) e^{i\lambda s} = \\
 &= - \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=1}^T \sum_{j=0}^{q-1} (B_{n+1}^{n+j+NT+k})^{-1} a_j(n+j+NT+k) e^{i\lambda(NT+k)} - \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=1}^{q-1-s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j+s}(n+j) e^{-i\lambda s} = \\
 &= - \sum_{N=0}^{\infty} P^{-N} e^{i\lambda TN} \sum_{k=1}^T \sum_{j=0}^{q-1} (B_{n+1}^{n+j+k})^{-1} a_j(n+j+k) e^{i\lambda k} - \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=1}^{q-1-s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j+s}(n+j) e^{-i\lambda s} = \\
 &= [1 - Pe^{-i\lambda T}]^{-1} \sum_{k=1}^T \sum_{j=0}^{q-1} (B_{n+1}^{n+j+k-T})^{-1} a_j(n+j+k) e^{i\lambda(k-T)} - \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=1}^{q-1-s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j+s}(n+j) e^{-i\lambda s} = \\
 &= [1 - Pe^{-i\lambda T}]^{-1} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{q-1} (B_{n+1}^{n+j+k})^{-1} a_j(n+j-k) e^{-i\lambda k} - \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=1}^{q-1-s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j+s}(n+j) e^{-i\lambda s} = \\
 &= [1 - Pe^{-i\lambda T}]^{-1} G_n(\lambda) - \sum_{s=0}^{q-2} \sum_{j=1}^{q-1-s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j+s}(n+j) e^{-i\lambda s}.
 \end{aligned}$$

Ponieważ $f_n(\lambda) = e^{in\lambda} g_n(\lambda)$, zatem otrzymujemy tezę twierdzenia. \square

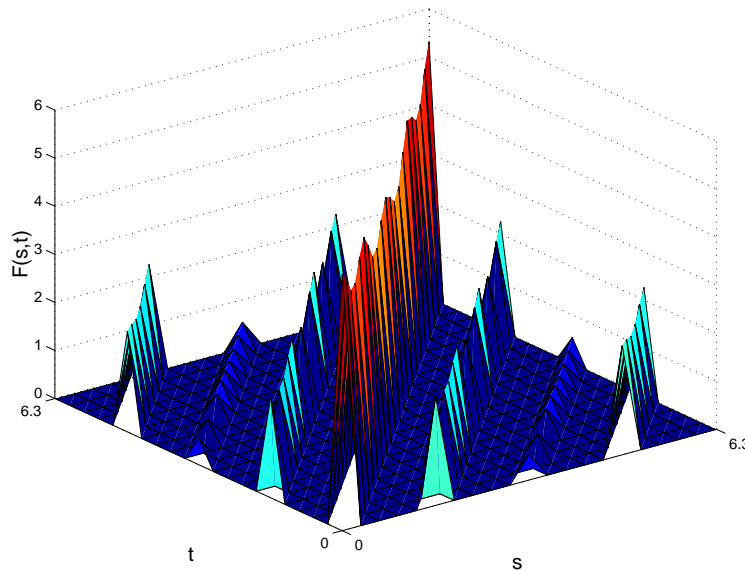
Przykład 1 Rozpatrzmy model PARMA(1,1) dany równaniem

$$X_n - b_n X_{n-1} = a_n \xi_n,$$

gdzie $a_n = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{4}) + 2$ oraz

$$b_n = \begin{cases} 1 & n = 1, 5, 9, \dots \\ \frac{1}{2} & n = 2, 6, 10, \dots \\ \frac{1}{3} & n = 3, 7, 11, \dots \\ \frac{1}{4} & n = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

W tym wypadku $T = 4$ oraz $P = \frac{1}{24}$. Na Rysunku 1 pokazano miarę spektralną F szeregu $\{X_n\}$.



Rysunek 1: Miara spektralna modelu PARMA(1,1).

Przykład 2 Rozpatrzmy stacjonarny model ARMA(1,1) dany równaniem:

$$X_n - bX_{n-1} = \xi_n.$$

Jest to model PARMA(1,1) z okresem $T = 1$. Do wyznaczenia estymatora parametru b użyjemy formuły (3.4) oraz Twierdzeń 6 i 7. Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} B_n(0) &= \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} \gamma_0(d\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} \hat{g}_0(\lambda) \overline{\hat{g}_0(\lambda)} d\lambda = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} g_0(\lambda) \overline{g_0(\lambda)} d\lambda = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} |1 - be^{-i\lambda}|^{-2} d\lambda. \end{aligned}$$

Jeśli weźmiemy $n = 1$ możemy zapisać

$$B_1(0) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} |1 - be^{-i\lambda}|^{-2} d\lambda = 2 \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda)}{1 + b^2 - 2b \cos(\lambda)} d\lambda = \frac{\pi(1 + b^2)}{b|1 - b^2|} - \frac{\pi}{b}.$$

Jako przykład rozpatrzmy model ARMA(1,1) z $b = 0.4$. $B_1(0)$ estymujemy za pomocą funkcji autokowariancji i otrzymujemy, że parametr b , który spełnia równanie $B_1(0) = \frac{\pi(1+b^2)}{b|1-b^2|} - \frac{\pi}{b}$ wynosi 0.3760. W tym wypadku miara spektralna $\gamma_0(\lambda) = \frac{1}{|1 - be^{-i\lambda}|^2}$.

Przykład 3 Rozpatrzmy system PARMA(1,1) z okresem $T = 2$ dany równaniem:

$$X_n - b_n X_{n-1} = \xi_n.$$

Do wyznaczenia miar γ_0 i γ_1 wykorzystamy Twierdzenia 6 i 7. W tym wypadku mamy

$$\begin{aligned} \gamma_0(\lambda) &= \frac{|b_0 - b_1|^2 + |2 + b_0 e^{-i\lambda} + b_1 e^{-i\lambda}|^2}{4|1 - b_0 b_1 e^{-2i\lambda}|^2} = \frac{2 + 2(b_0 + b_1) \cos(\lambda) + b_0^2 + b_1^2}{2 - 4b_0 b_1 \cos(2\lambda) + 2b_0^2 b_1^2}, \\ \gamma_1(\lambda) &= \frac{e^{i\lambda} \overline{(b_1 - b_0)} (2 + b_0 e^{-i\lambda} + b_1 e^{-i\lambda}) + e^{-i\lambda} (b_1 - b_0) \overline{(2 - b_0 e^{-i\lambda} - b_1 e^{-i\lambda})}}{4|1 - b_0 b_1 e^{-2i\lambda}|^2} = \\ &= \frac{\cos(\lambda)(b_0 - b_1)}{1 - 2b_0 b_1 \cos(2\lambda) + b_0^2 b_1^2}. \end{aligned}$$

Do estymacji współczynników b_0 i b_1 wykorzystamy formułę (3.4). Dla próbki długości NT z modelu PARMA z okresem T estymatory wielkości $B_n(k)$ dla $n + k, n \in \{1, 2, \dots, T\}$ mają następującą formę

$$\hat{B}_n(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{T-1} X_{jT+k+n} X_{jT+k}.$$

Otrzymujemy zatem

$$\frac{2\pi(b_0 + b_1)b_0 b_1}{1 - (b_0 b_1)^2} = \hat{B}_1(0) + \hat{B}_1(1), \quad \frac{2\pi(b_0 - b_1)b_0 b_1}{1 - (b_0 b_1)^2} = \hat{B}_1(0) - \hat{B}_1(1).$$

Wnioskujemy stąd, że $b_0 = \frac{\hat{B}_1(0)}{\hat{B}_1(1)} b_1$ oraz że estymator b_1 spełnia następujące równanie:

$$2\pi \left(\frac{\hat{B}_1(0)}{\hat{B}_1(1)} + 1 \right) b_1^3 = \left(1 - \left(\frac{\hat{B}_1(0)}{\hat{B}_1(1)} \right)^2 b_1^4 \right) (\hat{B}_1(0) + \hat{B}_1(1)). \quad (3.9)$$

Jako przykład, symulujemy próbkę długości 1000 z modelu PARMA(1,1) z okresem $T = 2$ danego równaniem:

$$X_n - b_n X_{n-1} = \xi_n,$$

gdzie $b_1 = 0.2$ oraz $b_2 = 0.4$. Estymator wielkości b_1 uzyskany z (3.9) wynosi 0.2401 oraz $\hat{b}_2 = 0.4207$.

Rozdział 4

Modelowanie procesów okresowych metodą szeregów PARMA

4.1 Teoretyczne podejście do problemu estymacji

W praktyce częściej stosuje się modele PARMA(p,1) niż ogólne PARMA(p,q). Jest to związane z tym, że ogólny model można przedstawić jako model PARMA(p,1) z większym rzędem autoregresji p ([12]). Ponadto ograniczenie się do tego modelu powoduje zmniejszenie liczby estymowanych współczynników, a co za tym idzie zmniejszenie błędów estymacji. Dlatego przy estymacji współczynników ograniczymy się do rozpatrywania jedynie modeli PARMA(p,1) danych wzorem:

$$X_n - \sum_{i=1}^p b_i(n)X_{n-i} = a_n \xi_n, \quad (4.1)$$

gdzie współczynniki oraz innowacje mają takie same własności jak w ogólnym modelu (Definicja 7).

Istnieje wiele metod estymacji współczynników modelu PARMA(p,1). Jedną z nich jest metoda momentów (metoda Yule-Walkera), najczęściej stosowana w praktyce. W metodzie momentów ([31]) zakłada się, że dana próba losowa $(X_1, X_2, \dots, X_{NT})$ (T -okres) spełnia równanie (4.1) dla innowacji pochodzących z rozkładu $N(0, 1)$ dla nieznanymi wielkości współczynników $(b_j(n))$, $(j = 1, 2, \dots, p)$ oraz (a_n) ($n = 1, 2, \dots, NT$). Zakłada się również znajomość wartości parametru p oraz że okres (a_n) i $(b_j(n))$, $(j = 1, 2, \dots, p)$ jest

taki sam i wynosi T . W praktyce wielkości te wyznaczone są na podstawie kryteriów wyboru optymalnego modelu (np. BIC, AIC, FPE) lub miar poprawności predykcji. Pierwszym krokiem estymacji jest wyznaczenie estymatora okresowej średniej $\mu(v)$ ($v = 1, 2, \dots, T$):

$$\hat{\mu}(v) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_{nT+v}$$

oraz przekształcenie wyjściowych danych do szeregu $Y(1), Y(2), \dots, Y(NT)$ według wzoru:

$$Y(nT + v) = X_{nT+v} - \hat{\mu}(v), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad v = 1, 2, \dots, T. \quad (4.2)$$

Zapisując równanie (4.1) jako

$$Y(nT + v) - \sum_{i=1}^p b_i(nT + v)Y(nT + v - i) = a_{nT+v}\xi_{nT+v}$$

oraz mnożąc je przez $Y(nT + v - i)$ ($i = 0, 1, \dots, p$) i biorąc wartość oczekiwaną obydwu stron otrzymujemy zbiór $p + 1$ równań, które możemy napisać w formie macierzowej (równanie Yule-Walkera):

$$\Gamma_v B_v = R_v, \quad v = 1, 2, \dots, T, \quad (4.3)$$

$$a_v^2 = R(v, v) - B_v' R_v, \quad (4.4)$$

gdzie Γ_v jest macierzą kwadratową rozmiaru p , której współczynniki zdefiniowane są następująco:

$$(\Gamma_v)_{ij} = R(v - i, v - j) = EY(v - i)Y(v - j), \quad i, j = 1, 2, \dots, p.$$

Ponadto

$$B_v = [b_1(v), b_2(v), \dots, b_p(v)]',$$

$$R_v = [R(v, v - 1), R(v, v - 2), \dots, R(v, v - p)]'.$$

Estymatory parametrów B_v i a_v dla $v = 1, 2, \dots, T$ są wyznaczone według wzorów (4.3) oraz (4.4) poprzez zastąpienie kowariancji $R(v - i, v - j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, p$), $R(v, v)$ oraz $R(v, v - i)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) przez ich estymatory dane odpowiednio wzorami:

$$\hat{R}(v - i, v - j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y(nT + v - i)Y(nT + v - j),$$

$$\hat{R}(v, v) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y(nT + v)Y(nT + v),$$

$$\hat{R}(v, v - i) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y(nT + v)Y(nT + v - i).$$

Estymatory wyznaczone metodą momentów przy innowacjach pochodzących z rozkładu normalnego są zgodne i mają asymptotycznie rozkład normalny ([19]). Ponadto własności estymatorów współczynników spełniają warunek jednoznaczności i ograniczoności rozwiązania.

Inną metodą wykorzystywaną w estymacji współczynników modelu PARMA(p,1) jest metoda najmniejszych kwadratów i polega ona na znalezieniu parametrów modelu, które minimalizują wagową sumę kwadratów:

$$S(\vec{b}) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{v=1}^T a_v^{-2} \left(\xi_{nT+v}^*(\vec{b}) \right)^2, \quad (4.5)$$

gdzie

$$\vec{b} = (b_1(1), b_2(1), \dots, b_p(1), b_2(2), \dots, b_p(2), \dots, b_1(T), \dots, b_p(T))$$

oraz

$$\xi_{nT+v}^*(\vec{b}) = Y(nT + v) - \sum_{i=1}^p b_i(v)Y(nT + v - i).$$

Wielkości $Y(nT + v)$ dla $n = 1, 2, \dots, N$ oraz $v = 1, 2, \dots, T$ wyznaczone są według wzoru (4.2).

We wzorze (4.5) zakłada się znajomość wielkości a_v dla $v = 1, 2, \dots, T$. Jeśli wielkość ta nie jest znana, wówczas zastępuje się ją estymatorem danym wzorem:

$$\hat{a}_v^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi_{nT+v}^*(\hat{b}_0),$$

gdzie wielkość \hat{b}_0 spełnia równanie:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{v=1}^T \xi_{nT+v}^*(\vec{b}) \left(\frac{\delta \xi_{nT+v}^*(\vec{b})}{\delta \vec{b}} \right) = 0.$$

Estymator wyznaczony metodą najmniejszych kwadratów ma asymptotycznie rozkład normalny i ma podobne własności jak estymator wyznaczony metodą momentów.

4.1.1 Kryteria wyboru optymalnej wielkości p w modelu PARMA($p,1$)

Istnieją różne kryteria wyboru optymalnej wielkości p (rzędu autoregresji). Jednym z nich jest FPE (Final Prediction Error) ([6]). Wielkość statystyki FPE dla modelu PARMA($p,1$) wyznaczona jest ze wzoru:

$$FPE(p) = \frac{NT + p}{NT - p} \sum_{v=1}^T \hat{a}_v^2,$$

gdzie T jest okresem, NT - ilością danych, a \hat{a}_v ($v = 1, 2, \dots, T$) estymatorem wielkości a_v . Innym kryterium służącym do wyznaczania wielkości p jest BIC (Bayesian Information Criterion) ([25]). Wartość statystyki testowej dla modelu PARMA($p,1$) ma postać:

$$BIC(p) = N \left(\sum_{v=1}^T \ln \hat{a}_v^2 + p \ln N \right),$$

gdzie podobnie jak przy FPE, NT jest ilością danych, T - okresem, a \hat{a}_v ($v = 1, 2, \dots, T$) estymatorem wielkości a_v .

Kolejnym kryterium jest AIC (Akaike Information Criterion) ([18]). Wielkość statystyki AIC dla modelu PARMA($p,1$) wyznacza się ze wzoru:

$$AIC(p) = -2 \ln L(\hat{b}_1(1), \dots, \hat{b}_p(1), \dots, \hat{b}_1(T), \dots, \hat{b}_p(T), \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_T) + 2T(p + 1),$$

gdzie T jest okresem oraz $L(\cdot)$ jest funkcją wiarygodności zależną od wyestymowanych wielkości $\hat{b}_1(1), \dots, \hat{b}_p(1), \dots, \hat{b}_1(T), \dots, \hat{b}_p(T)$ i $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_T$. Postać funkcji wiarygodności dla modelu PARMA($p,1$) z okresem T została wyznaczona w pracy [18]. Kierując się kryteriami FPE, BIC, AIC przy wyborze optymalnej wielkości rzędu autoregresji p wybiera się najmniejszą wielkość statystyki testowej.

4.2 Zastosowanie modeli PARMA do rzeczywistych danych energetycznych

Analizę danych rzeczywistych poprzedzimy rozważaniami dotyczącymi teoretycznych modeli. Wszystkie procedury estymacji i kryteriów oceny optymalnej wielkości p zostały

zaimplementowane w środowisku MATLAB. Tabela 1 zawiera teoretyczne wyniki (estymacja współczynników metodą momentów oraz wielkości statystyk testowych) dla zasy-mulowanych 20000 danych z modelu PARMA(2,1) z okresem $T = 2$ z następującymi współczynnikami $b_i(v)$ oraz a_v ($i = 1, 2$ $v = 1, 2$):

$$b_1(1) = 0.6, b_1(2) = 0.2, b_2(1) = 0.4, b_2(2) = 0.3,$$

$$a_1^2 = 0.4, a_2^2 = 0.1.$$

p	1	2	3	4
BIC	-60340	<u>-64189</u>	-64172	-64164
AIC	-3598.5	<u>-7459.2</u>	-7456.4	-7452.1
FPE	0.1777	<u>0.1707</u>	0.1707	0.1707
$b_i(1)$	0.9225	0.5594 0.2287	0.5457 0.2307 0.0091	0.5458 0.2313 0.0244 -0.010
$b_i(2)$	0.4840	0.3995 0.3042	0.3993 0.2991 0.0033	0.3993 0.2925 0.0047 0.0064
a_1^2	0.1630	0.1605	0.1605	0.1605
a_2^2	0.0147	0.0101	0.0101	0.0101

Tabela 1: Estymacja współczynników modelu PARMA(2,1) metodą momentów.

Najbardziej optymalną wielkością p jest 2 (statystyki testowe mają najmniejszą wartość dla modelu PARMA(2,1)). Estymację współczynników modelu oraz wariancji wykonano również metodą najmniejszych kwadratów. Tabela 2 zawiera wyniki tych analiz.

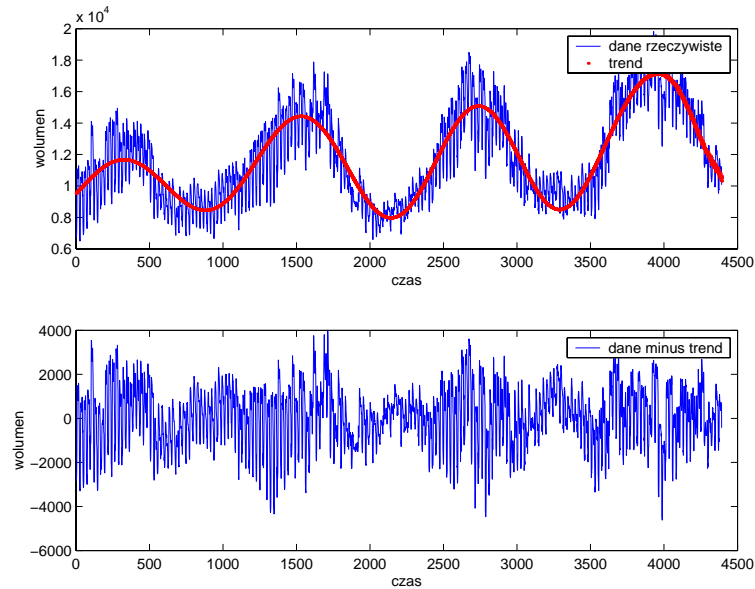
Również przy estymacji współczynników metodą najmniejszych kwadratów wartości statystyk testowych (BIC, AIC, FPE) są najmniejsze dla $p = 2$.

p	1	2	3	4
BIC	-60340	<u>-64188</u>	-64170	-64153
AIC	-3598.5	<u>-7459.2</u>	-7456.4	-7452.1
FPE	0.1777	<u>0.1707</u>	0.1707	0.1708
$b_i(1)$	0.9222	0.5548 0.2287	0.5455 0.2307 0.0092	0.5456 0.2313 0.0244 -0.0099
$b_i(2)$	0.4840	0.3995 0.3042	0.3993 0.2990 0.0033	0.3992 0.2924 0.0047 0.0065
a_1^2	0.1631	0.1605	0.1605	0.1605
a_2^2	0.0147	0.0101	0.0101	0.0101

Tabela 2: Estymacja współczynników modelu PARMA(2,1) metodą najmniejszych kwadratów.

Jak wspomniano, modele PARMA używane są do opisu danych wykazujących okresowość na różnych płaszczyznach. Wykorzystywano je do opisu danych ekonomicznych, hydrologicznych i energetycznych ([4],[9]).

Zajmiemy się teraz analizą danych rzeczywistych pochodzących z giełdy Nord Pool. Dane opisują wolumen sprzedaży energii (w MWh) w każdej godzinie doby w każdy wtorek począwszy od 5.01.1999 roku do 13.05.2003 roku. Dane wybrano z konkretnego dnia tygodnia ze względu na istnienie tygodniowej okresowości, która zaburzała okresowość dobową ([7]). Rysunek 2 przedstawia dane rzeczywiste oraz trend wielomianowy, który usunięto z danych przed dalszą analizą.



Rysunek 2: Analizowane dane rzeczywiste przed i po usunięciu trendu.

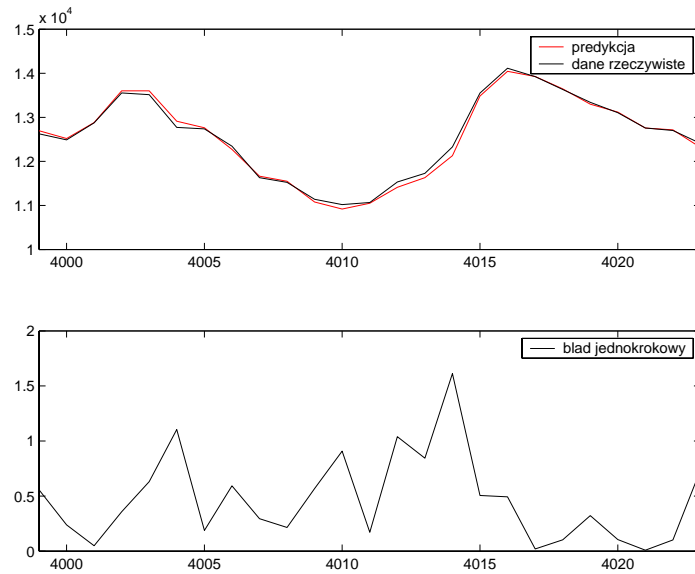
Tabela 3 zawiera wartości statystyk testowych dla każdej z trzech metod: BIC, AIC oraz FPE i wybranych wielkości p . Przy analizie przyjęto $T = 24$ (okresowość dobową), a współczynniki estymowano metodą momentów.

p	1	2	3	4	5
BIC	41998	41041	<u>40936</u>	40957	40962
AIC	57944	54827	<u>54622</u>	54682	54864
FPE	2128800	1763600	1704700	1681800	<u>167100</u>

Tabela 3: Estymacja parametrów modelu $PARMA(p,1)$ dla wolumenu sprzedaży.

Na podstawie wielkości statystyk wnioskujemy, że najbardziej optymalnym modelem jest model $PARMA(3,1)$ (wartości BIC i AIC są najmniejsze). Kolejnym krokiem analizy danych będzie predykcja (jednokrokowa i wielokrokowa). Na Rysunku 3 przedstawiono wykres jednokrokowej predykcji (do przewidywania wolumenu na daną chwilę wykorzystano dane rzeczywiste i wyestymowane współczynniki) wolumenu sprzedaży dla wybranych

momentów oraz jej błąd procentowy (Percent Error).

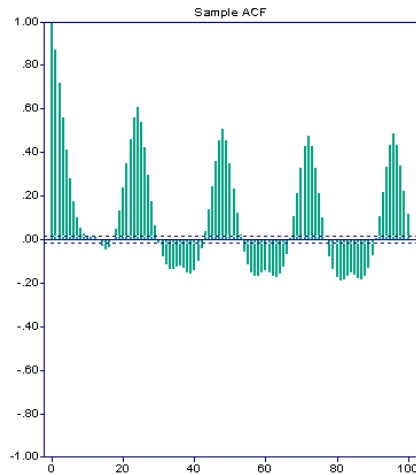


Rysunek 3: Predykcja jednokroowa dla modelu PARMA(3,1) i jej błąd procentowy.

Modele PARMA mogą być również wykorzystywane do modelowania danych opisujących cenę sprzedaży energii elektrycznej na polskiej Towarowej Giełdzie Energii SA.

Do analizy wykorzystano dane godzinowe opisujące cenę energii elektrycznej na Towarowej Giełdzie Energii SA. od stycznia 2003 do stycznia 2005. W celu wyznaczenia wielkości T (okresu) przeanalizowano wykres funkcji autokowariancji dla danych, z których usunięto trend wielomianowy. Wykres funkcji autokowariancji wskazuje na okresowość 24 godzinną. Jednakże w przypadku danych energetycznych mamy również do czynienia z okresowością tygodniową (w przypadku danych godzinowych okres wynosi wówczas 168), a także roczną. Na Rysunku 4 przedstawiono wykres funkcji autokowariancji z maksymalnym opóźnieniem wynoszącym 100, natomiast Rysunek 5 przedstawia funkcję autokowariancji z maksymalnym opóźnieniem 1000. Wykres tej funkcji wskazuje na okresowość tygodniową.

Ze względu na kilka rodzajów okresowości, podobnie jak w przypadku danych opisujących wolumen sprzedaży, do analizy wybrano dane godzinowe pochodzące z jednego dnia tygodnia. Optymalny model PARMA(p,1) został dobrany do danych pochodzących z lat 2003 i 2004, a następnie dokonano predykcji dla 24 danych z 2005 roku. Tabela 4 zawiera wyniki estymacji.

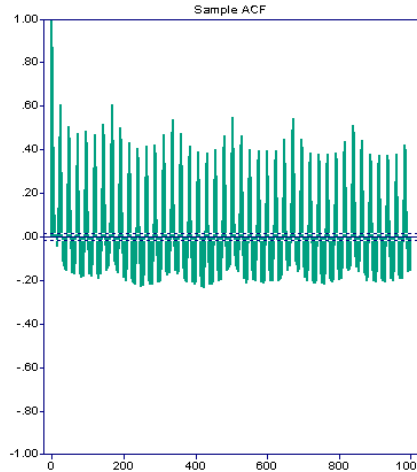


Rysunek 4: Funkcja autokowariancji z maksymalnym opóźnieniem 100.

p	1	2	3	4	5	6
BIC	<u>8844.4</u>	8862.3	8856.5	8902.9	8924.9	8949.4
AIC	18103	<u>18096</u>	18183	18233	18251	18313
FPE	572.6536	568.5676	552.6070	547.8862	538.8243	<u>533.2761</u>

Tabela 4: Estymacja parametrów modelu $PARMA(p,1)$ dla ceny energii.

Kryterium BIC wskazuje na model $PARMA(1,1)$. Statystyka AIC ma najmniejszą wartość dla parametru $p = 2$. Natomiast kryterium FPE ma najmniejszą wartość dla $p = 6$. Odrzucając kryterium FPE, możemy przyjąć, że optymalnym modelem jest $PARMA(1,1)$, ze względu na dwa kryteria (BIC i średni błąd predykcji).



Rysunek 5: Funkcja autokowariancji z maksymalnym opóźnieniem 1000.

Optymalny model PARMA(1,1) ma postać:

$$X_n - b_n X_{n-1} = a_n \xi_n, \quad (4.6)$$

gdzie (b_n) jest ciągiem okresowym z okresem 24 oraz $P = b_1 \dots b_{24} = 0.0053$. Zatem postać rozwiązania równania (4.6) jest następująca:

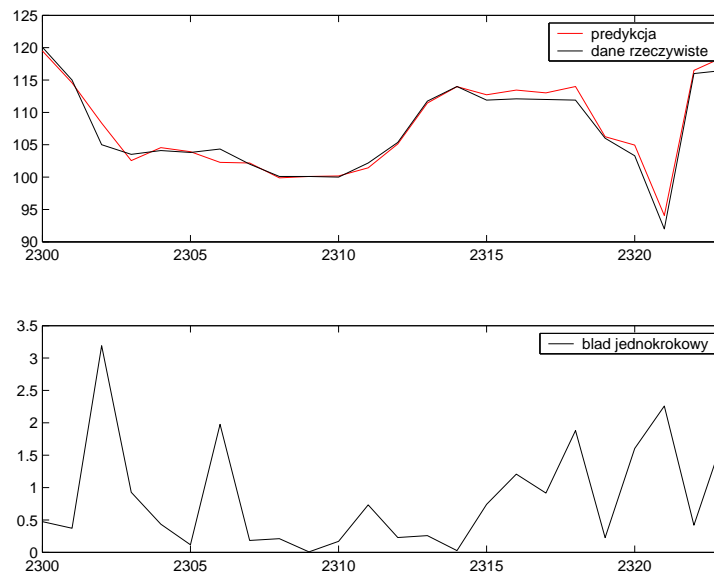
$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} B_{n-s+1}^n a_{n-s} \xi_{n-s}.$$

Funkcja kowariancji w tym przypadku ma postać

$$R_X(n, n+k) = EX_n X_{n+k} = \frac{B_{n+1}^{n+k}}{1 - |P|^2} \sum_{l=0}^{23} |a_{n-l} B_{n-l+1}^n|^2$$

i jest okresowa względem n dla każdego $k \in Z$.

Modele ARMA ze zmiennymi współczynnikami mają ważne znaczenie w opisie danych niestacjonarnych, a ich podklasa, modele PARMA, mogą być wykorzystywane w przypadku zjawisk okresowych. Znajomość postaci rozwiązania tych modeli w znacznym stopniu umożliwia wykorzystanie ich do opisu danych rzeczywistych, a co za tym idzie także do predykcji tych danych, co w przypadku danych energetycznych (np. ceny lub wolumenu sprzedaży energii elektrycznej) może mieć ważne znaczenie nie tylko teoretyczne, ale również praktyczne.



Rysunek 6: Predykcja jednokrokowa dla ceny sprzedaży energii elektrycznej.

Rozdział 5

Szeregi wielowymiarowe związane z modelami PARMA(1,q)

W tym rozdziale zostanie omówionych pięć wielowymiarowych stacjonarnych szeregów czasowych, które są związane z modelami PARMA(1,q). Niektóre z nich (szereg generujący, indukowany oraz jego diagonalizacja) były analizowane w pracy [21] jako wielowymiarowe procesy stacjonarne związane z procesami okresowo skorelowanymi. Przy pewnych warunkach na współczynniki modelu, szereg PARMA(1,q) ma jednoznaczne rozwiązanie posiadające okresową średnią i kowariancję, dlatego może być traktowany jako proces okresowo skorelowany. Wyniki uzyskane w tym rozdziale mogą być punktem wyjścia do stosowania nowych metod analizy modeli PARMA, jak również miar spektralnych wielowymiarowych szeregów czasowych.

W pierwszej części omówiono szereg generujący modelu PARMA(1,q) i pokazano związek jego miary spektralnej ze spektrum jednowymiarowego szeregu. Następnie przeanalizowano indukowany szereg stacjonarny jak również jego diagonalizację. Podobnie jak w przypadku szeregu generującego, uzyskano postać miary spektralnej i pokazano jej związek z miarą spektralną szeregu PARMA. Jako ostatnie omówiono dwa inne typy wielowymiarowych szeregów czasowych związanych z szeregami PARMA(1,q) i na podstawie postaci funkcji kowariancji pokazano ich stacjonarność.

5.1 Szereg generujący systemu PARMA(1,q)

Dla każdego procesu okresowo skorelowanego $\{X_n\}$ z okresem T odwzorowanie $V : X_n \rightarrow X_{n+T}$, $n \in Z$, jest liniowym operatorem $V : M_X \rightarrow M_X$ zwanym T -tym przesunięciem procesu $\{X_n\}$. Jeśli U jest unitarnym T -tym pierwiastkiem V , tzn U jest unitarnym operatorem w podprzestrzeni $K \supseteq M_X$ takim, że $U^T = V$ w M_X , wówczas $p(n) = U^{-n} X_n$ jest T -okresowym ciągiem oraz $X_n = U^n p(n)$, $n \in Z$.

Definiując szereg $\{W^r(n)\} = \{[W^r(n)]\}$ jako $W^r(0) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} e^{-2\pi i n r / T} p(n)$ oraz $W^r(n) = U^n W^r(0)$ ($n \in Z$) możemy otrzymać następującą reprezentację procesu X_n :

$$X_n = \sum_{r=0}^{T-1} e^{2\pi i n r / T} W^r(n), \quad n \in Z. \quad (5.1)$$

Szereg $\{X_n\}$ jest zatem procesem okresowo skorelowanym z okresem T wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przestrzeń Hilberta $K \supseteq M_X$, operator unitarny U w K oraz T -okresowy ciąg $(p(n))$ w K taki że $X_n = U^n p(n)$ ($n \in Z$) lub równoważnie, wtedy i tylko wtedy gdy istnieje przestrzeń Hilberta $K \supseteq M_X$ oraz T -wymiarowy szereg stacjonarny $\{W(n)\} = \{[W^r(n)]\}$ w K taki że X_n ma reprezentację (5.1). Każdy T -wymiarowy szereg stacjonarny $\{W(n)\}$ w $K \supseteq M_X$ który spełnia (5.1) nazywany jest szeregiem generującym szeregu $\{X_n\}$ ([22]).

Definicja 9 ([20]) *T -wymiarowy szereg $\{H(n)\}$ jest stacjonarny, jeśli dla każdych $k, j = 0, 1, \dots, T-1$ jego funkcja kowariancji $R_H^{j,k}(m+n, m) = E H^j(m+n) H^k(m)$ zależy jedynie od n . Funkcja kowariancji T -wymiarowego stacjonarnego szeregu $\{H(n)\}$ ma następującą reprezentację całkową:*

$$R_H^{j,k}(n) = \int_0^{2\pi} e^{i n x} \Gamma^{j,k}(dx), \quad (5.2)$$

gdzie miara macierzowa $\Gamma = [\Gamma^{j,k}]$ jest zwana miarą spektralną szeregu $\{H(n)\}$.

Lemat 3 *Jeśli T -wymiarowy szereg $\{W(n)\} = \{[W^r(n)]\}$ z miarą spektralną $\Gamma = [\Gamma^{j,k}]$ ($j, k = 0, 1, \dots, T-1$) jest szeregiem generującym procesu okresowo skorelowanego $\{X_n\}$ wówczas funkcja kowariancji $B_n(k) = R_X(n+k, k)$ procesu $\{X_n\}$ ma następującą postać:*

$$B_n(k) = \sum_{q=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{2\pi i k l / T} \int_0^{2\pi} e^{i n x} \Gamma^{q, [l-q]}(dx - 2\pi q / T),$$

gdzie $[w]$ oznacza niezerową resztę z dzielenia w przez T .

Dowód:

Wykorzystując formuły (5.1) i (5.2) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
B_n(k) &= \sum_{q=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{2\pi i(nq+k(q+l))/T} EW^q(n+k)W^l(k) = \sum_{q=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{2\pi i(nq+k(q+l))/T} R_W^{q,l}(n) = \\
&= \sum_{q=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{2\pi i(nq+k(q+l))/T} \int_0^{2\pi} e^{inx} \Gamma^{q,l}(dx) = \sum_{q=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{2\pi ik(q+l)/T} \int_0^{2\pi} e^{inx} \Gamma^{q,l}(dx - 2\pi q/T) = \\
&= \sum_{q=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{2\pi ikl/T} \int_0^{2\pi} e^{inx} \Gamma^{q,[l-q]}(dx - 2\pi q/T).
\end{aligned}$$

□

Lemat 4 *Jeśli $\{X_n\}$ jest procesem okresowo skorelowanym z okresem T i spektrum (γ_j) ($j = 0, 1, \dots, T-1$) oraz $\{W(n)\} = \{[W^r(n)]\}$ jest jego szeregiem generującym z miarą spektralną $\Gamma = [\Gamma^{j,k}]$ ($j, k = 0, 1, \dots, T-1$), wówczas zachodzi następujący warunek:*

$$\gamma_j(dx) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{q=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{2\pi ik(l+j)/T} \Gamma^{q,[l-q]}(dx - 2\pi q/T),$$

gdzie $[w]$ oznacza niezerową resztę przy dzieleniu w przez T .

Dowód:

Z Uwagi 1 mamy:

$$\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} e^{2\pi ikj/T} B_n(k) = \int_0^{2\pi} e^{inx} \gamma_j(dx).$$

z drugiej strony z Lematu 3 otrzymujemy:

$$B_n(k) = \sum_{q=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{2\pi ikl/T} \int_0^{2\pi} e^{inx} \Gamma^{q,[l-q]}(dx - 2\pi q/T).$$

Zatem

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \gamma_j(dx) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{q=0}^{T-1} \sum_{l=0}^{T-1} e^{2\pi ik(l+j)/T} \int_0^{2\pi} e^{inx} \Gamma^{q,[l-q]}(dx - 2\pi q/T).$$

□

Uwaga 2 *Jeśli $\{X_n\}$ jest szeregiem PARMA(1,q) z okresem T , $|P = b_1 \dots b_T| \neq 1$ oraz $\{W(n)\} = \{[W^r(n)]\}$ jest szeregiem generującym $\{X_n\}$, wówczas miara spektralna $\Gamma = [\Gamma^{j,k}]$ szeregu $\{W(n)\}$ jest absolutnie ciągle względem unormowanej miary Lebesgue'a $d\lambda$ (tzn miary Lebesgue'a podzielonej przez 2π).*

Uzasadnienie tego faktu wynika bezpośrednio z Lematu 4 i Twierdzenia 6.

Mimo że istnieje wiele różnych unitarnych T -tych pierwiastków operatora V działającego na proces $\{X_n\}$ i każdy z nich prowadzi do innego szeregu generującego, jednakże trójka $(U^n, p(n), K)$ jest jednoznacznie zdeterminowana przez $\{X_n\}$ ([21]).

5.2 Szereg indukowany modelu PARMA(1,q)

Niech $\{X_n\}$ będzie procesem okresowo skorelowanym z okresem T w przestrzeni Hilberta. Dla każdego $n \in Z$ oraz $r = 1, 2, \dots, T-1$ definiujemy $Z^r(n)$ jako element przestrzeni $K = M_X^T$, którego p -ty czynnik ma postać:

$$Z^r(n)(p) = \frac{1}{T} X_{n-p} e^{-2\pi r(n-p)/T}, \quad p = 0, \dots, T-1. \quad (5.3)$$

Szereg $\{X_n\}$ jest okresowo skorelowany wtedy i tylko wtedy gdy T -wymiarowy szereg $\{Z(n)\} = \{[Z^r(n)]\}$ jest stacjonarny ([21]).

Propozycja 4 *Jeśli $\{X_n\}$ jest szeregiem PARMA(1,q) z okresem T , $|P| = |b_1 \dots b_T| \neq 1$, wówczas*

$$Z^r(n)(p) = \frac{1}{T} e^{-2\pi r(n-p)/T} \begin{cases} - \sum_{s=2-q}^{\infty} \sum_{j=\max\{1,s\}}^{q-1+s} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j-s}(n+j) \xi_{n+s}, & \text{gdy } |P| > 1 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=-s}^{\min\{0,q-1-s\}} (B_{n+j+1}^n) a_{j+s}(n+j) \xi_{n-s}, & \text{gdy } |P| < 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

dla $p, r = 0, 1, \dots, T-1$.

Propozycja 5 ([22]) *Niech $\{X_n\}$ będzie procesem okresowo skorelowanym z okresem T oraz $\{Z(n)\} = \{[Z^r(n)]\}$ jego szeregiem indukowanym zdefiniowanym w (5.3), wówczas funkcja kowariancji szeregu $\{Z(n)\}$ dana jest następującym wzorem:*

$$R_Z^{j,k}(n) = \frac{1}{T} e^{-2\pi i j n / T} \int_0^{2\pi} e^{i \lambda n} \gamma_{j-k}(d\lambda),$$

gdzie rodzina miar (γ_j) ($j = 0, 1, \dots, T-1$) jest spektrum szeregu $\{X_n\}$.

Propozycja 6 ([22]) *Niech $\{X_n\}$ będzie procesem okresowo skorelowanym z okresem T ze spektrum (γ_j) oraz niech $\{Z(n)\} = \{[Z^r(n)]\}$ będzie jego szeregiem indukowanym zdefiniowanym w (5.3) z miarą spektralną $\Gamma = [\Gamma^{j,k}]$. Wówczas*

$$\Gamma^{j,k}(\Delta) = \frac{1}{T} \gamma_{j-k}(\Delta + 2\pi j / T) \quad (5.5)$$

Uwaga 3 Jeśli $\{X_n\}$ jest rozwiązaniem modelu PARMA(1,q) z okresem T , $|P| = |b_1 \dots b_T| \neq 1$, a $\{Z(n)\} = \{[Z^r(n)]\}$ - jego szeregiem indukowanym zdefiniowanym w (5.3), wówczas miara spektralna $\Gamma = [\Gamma^{j,k}]$ szeregu $\{Z(n)\}$ jest absolutnie ciągła względem unormowanej miary Lebesgue'a $d\lambda$ oraz spełnia warunek

$$\frac{d\Gamma^{j,k}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{T} \sum_{l=0}^{T-1} \hat{g}_l(\lambda + 2\pi(l+j)/T) \overline{\hat{g}_{[l-j+k]}(\lambda + 2\pi(l+j)/T)},$$

gdzie współczynniki $\hat{g}_j(\lambda)$ ($j = 0, 1, \dots, T-1$) zdefiniowane są w Twierdzeniu 6, a $[w]$ oznacza resztę z dzielenia w przez T .

Dowód wynika bezpośrednio z Propozycji 6 i Twierdzenia 6.

Zdefiniujmy T -wymiarowy szereg $\{V(n)\} = \{[V^p(n)]\}$ jako

$$V^p(n) = \sum_{k=0}^{T-1} e^{2\pi i p k / T} Z^k(n), \quad (5.6)$$

gdzie $p = 0, 1, 2, \dots, T-1$ oraz $\{Z(n)\} = \{[Z^r(n)]\}$ jest szeregiem indukowanym procesu okresowo skorelowanego $\{X_n\}$ zdefiniowanym w (5.3). Szereg $\{V(n)\} = \{[V^p(n)]\}$ jest zwany diagonalizacją szeregu $\{Z(n)\}$.

Formuła (5.6) może być zapisana jako $V(n) = HZ(n)$ gdzie H jest T -wymiarową macierzą kwadratową $H = [H^{p,r}] = [e^{2\pi i p r / T}]$ dla $p, r = 0, 1, \dots, T-1$.

Propozycja 7 Jeśli $\{V(n)\} = \{[V^p(n)]\}$ jest diagonalizacją szeregu $\{Z(n)\} = \{[Z^r(n)]\}$, gdzie $\{Z(n)\}$ jest szeregiem indukowanym procesu okresowo skorelowanego zdefiniowanym w (5.3), wówczas macierz kowariancji szeregu $\{V(n)\}$ przyjmuje następującą postać

$$R_V(n+p, p) = HR_Z(n+p, p)H'.$$

Dowód:

$$R_V(n+p, p) = EZ(n+p)(EZ(p))' = HEZ(n+p)(EZ(p))'H' = HR_Z(n+p, p)H'.$$

Zatem $\{V(n)\}$ jest stacjonarny wtedy i tylko wtedy gdy $\{Z(n)\}$ jest stacjonarny. □

Uwaga 4 ([22]) Jeśli $\{Z(n)\} = \{[Z^r(n)]\}$ jest szeregiem indukowanym szeregu okresowo skorelowanego $\{X_n\}$ oraz $\{V(n)\} = \{[V^p(n)]\}$ jest jego diagonalizacją, wówczas następujące trzy warunki są równoważne:

- $\{X_n\}$ jest okresowo skorelowany z okresem T
- $\{Z(n)\}$ jest T -wymiarowym szeregiem stacjonarnym
- $\{V(n)\}$ jest T -wymiarowym szeregiem stacjonarnym.

5.3 Inne wielowymiarowe szeregi stacjonarne związane z modelami PARMA(1,q)

Lemat 5 Jeśli $\{X_n\}$ jest jednoznacznym ograniczonym rozwiązaniem szeregu PARMA(1,q) z okresem T oraz $|P| = |b_1 \dots b_T| \neq 1$, wówczas T -wymiarowy szereg $\{Q(n)\} = \{[Q^r(n)]\}$, $r = 0, 1, \dots, T-1$ zdefiniowany następująco:

$$Q^r(n) = \begin{cases} - \sum_{s=2-q}^{\infty} \sum_{j=\max\{1,s\}}^{q-1+s} (B_{r+1}^{r+j})^{-1} a_{j-s}(r+j) \xi_{n+s}, & \text{gdy } |P| > 1 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=-s}^{\min\{0,q-1-s\}} (B_{r+j+1}^r) a_{j+s}(r+j) \xi_{n-s}, & \text{gdy } |P| < 1, \end{cases} \quad (5.7)$$

jest stacjonarny oraz spełnia warunek $X_n = Q^{[n]}(n)$, gdzie $[n]$ oznacza niezerową resztę dzielenia n przez T .

Dowód:

Jeśli $X_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j(n) \xi_{n-j}$, gdzie współczynniki $\beta_j(n)$ są okresowe względem n z okresem T dla każdego $j \in Z$, wówczas T -wymiarowy szereg $Y(n) = [Y^r(n)]$, ($r = 0, 1, \dots, T-1$) zdefiniowany następująco:

$$Y^r(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j(r) \xi_{n-j}$$

jest stacjonarny ponieważ funkcja kowariancji nie zależy od n :

$$EY^j(n+p)Y^k(n) = E \sum_{u=-\infty}^{\infty} \beta_u(j) \xi_{n+p-u} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \beta_w(k) \xi_{n-w} = \sum_{w=-\infty}^{\infty} \beta_{p+w}(j) \beta_w(k).$$

Ponadto

$$Y^{[n]}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j([n]) \xi_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j(n) \xi_{n-j} = X_n.$$

Jeśli $\{X_n\}$ jest jednoznacznym ograniczonym rozwiązaniem systemu PARMA(1,q), wówczas współczynniki $\beta_k(n)$ są okresowe względem n z okresem T oraz mają postać:

$$\beta_k(n) = \begin{cases} - \sum_{j=\max\{1,k\}}^{q-1+k} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j-k}(n+j), & \text{gdy } |P| > 1 \text{ oraz } k \geq 2 - q \\ \sum_{j=-k}^{\min\{0,q-1-k\}} (B_{n+j+1}^n) a_{j+k}(n+j), & \text{gdy } |P| < 1 \text{ oraz } k \geq 0. \end{cases}$$

□

Uwaga 5 Macierz kowariancji $R_Q = [R_Q^{j,k}]$ ($j, k = 0, 1, \dots, T-1$) T -wymiarowego szeregu $\{Q(n)\} = \{[Q^r(n)]\}$ zdefiniowanego w (5.7) ma następującą własność:

$$R_Q^{j,k}(n) = R_X(n+k, k) \quad \text{gdy } j-k = n \pmod T.$$

Lemat 6 Jeśli $\{X_n\}$ jest jednoznaczny ograniczony rozwiązaniem szeregu PARMA(1,q) z okresem T oraz $|P| = |b_1 \dots b_T| \neq 1$, wówczas T -wymiarowy szereg $\{Y(n)\} = \{[Y^r(n)]\}$, $r = 0, 1, \dots, T-1$ zdefiniowany następująco:

$$Y^r(n) = \begin{cases} - \sum_{s=2-q}^{\infty} \sum_{j=\max\{1,s\}}^{q-1+s} (B_{r+1}^{r+j})^{-1} \widetilde{a}_{j-s}(r+j) \xi_{n+s}, & \text{gdy } |P| > 1 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=-s}^{\min\{0,q-1-s\}} (B_{r+j+1}^r) \widetilde{a}_{j+s}(r+j) \xi_{n-s}, & \text{gdy } |P| < 1, \end{cases} \quad (5.8)$$

jest stacjonarny i spełnia warunek $X_n = \sum_{q=0}^{T-1} e^{2\pi i n q / T} Y^q(n)$, gdzie

$$\widetilde{s}(n) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} e^{-2\pi i n k / T} s(k)$$

dla T -okresowego ciągu $(s(n))$.

Dowód:

Jeśli $X_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j(n) \xi_{n-j}$, gdzie $\beta_j(n)$ są okresowe względem n z okresem T dla każdego $j \in Z$, wówczas T -wymiarowy szereg $L(n) = [L^r(n)]$, ($r = 0, 1, \dots, T-1$) zdefiniowany jako $L^r(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{\beta}_j(r) \xi_{n-j}$ jest stacjonarny, gdyż kowariancja

$$EL^j(n+p)L^k(n) = E \sum_{u=-\infty}^{\infty} \widetilde{\beta}_u(j) \xi_{n+p-u} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \overline{\widetilde{\beta}_w(k)} \xi_{n-w} = \sum_{w=-\infty}^{\infty} \beta_{p+w}(j) \overline{\beta_w(k)}$$

nie zależy od n . Ponadto

$$\sum_{q=0}^{T-1} e^{2\pi i n q / T} L^q(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{T-1} e^{2\pi i n q / T} \widetilde{\beta}_j(q) \xi_{n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j(n) \xi_{n-j} = X_n.$$

Jeśli $\{X_n\}$ jest jednoznaczym ograniczonym rozwiązaniem systemu PARMA(1,q), wówczas współczynniki $\beta_k(n)$ są okresowe względem n z okresem T i mają postać:

$$\beta_k(n) = \begin{cases} - \sum_{j=\max\{1,k\}}^{q-1+k} (B_{n+1}^{n+j})^{-1} a_{j-k}(n+j), & \text{gdy } |P| > 1 \text{ oraz } k \geq 2 - q \\ \sum_{j=-k}^{\min\{0,q-1-k\}} (B_{n+j+1}^n) a_{j+k}(n+j), & \text{gdy } |P| < 1 \text{ oraz } k \geq 0. \end{cases}$$

□

Przykład 4 Rozpatrzmy model PARMA(1,1) z okresem $T = 2$:

$$X_n - b_n X_{n-1} = a_n \xi_n,$$

gdzie współczynniki są następujące:

$$b_1 = 0.2, \quad b_2 = 1, \quad a_1 = 0.3, \quad a_2 = 2. \quad (5.9)$$

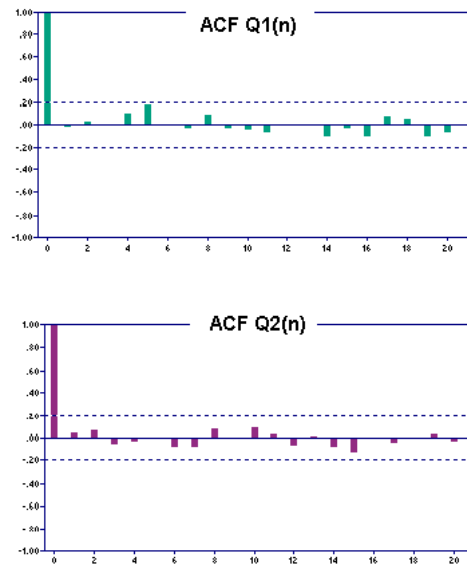
W tym wypadku $P = 0.2 < 1$, zatem $\{X_n\}$ dany jest wzorem (2.18). Dwuwymiarowy szereg

$$Q^r(n) = \sum_{s=0}^{\infty} B_{r-s+1}^r a(r-s) \xi_{n-s},$$

gdzie współczynniki (a_n) są dane w (5.9) oraz

$$B_{r-s+1}^r = \begin{cases} P^k, & \text{gdy } s = 2k \text{ dla } k = 0, 1, \dots \\ P^k b_1, & \text{gdy } s = 2k + 1 \text{ dla } k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

utworzony z $\{X_n\}$ jest stacjonarny. Na Rysunku 7 pokazano funkcję autokowariancji dla składowych szeregu $\{[Q^r(n)]\}$ ($r = 1, 2$). Wykres tej funkcji wskazuje, że rozpatrywany szereg jest stacjonarny, a ponadto, iż jego składowe traktowane jako szeregi jednowymiarowe ($\{Q^1(n)\}$ i $\{Q^2(n)\}$) mogą być modelowane szeregiem AR(1). Do analizy wykorzystano 500 realizacji każdej składowej.



Rysunek 7: Autokowariancja składowych szeregu $\{[Q^r(n)]\}$.

Rozdział 6

Szeregi ARMA ze zmiennymi współczynnikami i α -stabilnymi innowacjami

6.1 Miary zależności

W tym rozdziale zajmiemy się systemami ARMA(1,1) ze zmiennymi współczynnikami i innowacjami pochodzącymi z symetrycznego rozkładu α -stabilnego, to jest szeregami czasowymi spełniającymi następujące równanie:

$$X_n - b_n X_{n-1} = a_n \xi_n, \quad (6.1)$$

gdzie współczynniki (b_n) oraz (a_n) są niezerowe dla każdego $n \in Z$ oraz innowacje $\{\xi_n\}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o symetrycznym rozkładzie α -stabilnym ($S\alpha S$) z parametrem skali 1, tzn z funkcją charakterystyczną daną następującym wzorem:

$$E \exp(i\theta \xi_n) = \exp(-|\theta|^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 2. \quad (6.2)$$

W odróżnieniu od [26] i [27], gdzie rozpatrywano stacjonarne modele ARMA (stałe współczynniki), zajmujemy się tutaj szeregami ARMA(1,1) ze zmiennymi współczynnikami. Ponadto zakładamy, że system (6.1) spełnia jeden z następujących warunków:

$$(I) \sup_q |B_q^0|^{-1} = \infty \text{ oraz } \sup_{n \in Z} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_{n-s}|^\alpha < \infty$$

$$(II) \sup_q |B_0^q| = \infty \text{ oraz } \sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^\alpha < \infty,$$

gdzie B_r^s jest zdefiniowane w (2.6). Warunki (I) oraz (II) gwarantują istnienie jednoznacznego ograniczonego rozwiązania systemu (6.1) (Twierdzenie 8).

W tym rozdziale zostanie zbadana relacja pomiędzy miarami zależności (kodyferencji i kowariacji) dla rozpatrywanego systemu ARMA(1,1) ze zmiennymi współczynnikami i $S\alpha S$ innowacjami. Główne wyniki są zawarte w Twierdzeniach 9 oraz 10. W dowodach tych twierdzeń wykorzystano warunki gwarantujące istnienie jednoznacznego i ograniczonego rozwiązania omawianych szeregów oraz jego formę. Uzyskane wyniki są uogólnieniem rezultatów zawartych w [26] i [27], jakkolwiek dają również nowe wyniki, także w przypadku stałych współczynników.

Gdy $\alpha = 2$, wówczas funkcja kowariancji opisuje strukturę zależności procesu $\{X_n\}$. W przypadku, gdy $\alpha < 2$ funkcja kowariancji nie jest zdefiniowana dlatego rozpatruje się inne miary zależności.

Definicja 10 *Miary zależności $S\alpha S$ zmiennych losowych X_1 i X_2 ([26]).*

- **Kowariacja $CV(X_1, X_2)$** X_1 i X_2 zdefiniowana jest dla $1 < \alpha \leq 2$ i ma postać:

$$CV(X_1, X_2) = \int_{S_2} s_1 s_2^{\langle \alpha-1 \rangle} \Gamma(ds), \quad (6.3)$$

gdzie Γ jest miarą spektralną wektora (X_1, X_2) , $z^{\langle p \rangle} = |z|^{p-1} \bar{z}$.

- **Kodyferencja $CD(X_1, X_2)$** X_1 i X_2 zdefiniowana dla $0 < \alpha \leq 2$ ma postać:

$$CD(X_1, X_2) = \ln E \exp\{i(X_1 - X_2)\} - \ln E \exp\{iX_1\} - \ln E \exp\{-iX_2\}. \quad (6.4)$$

Dla $\alpha = 2$ mamy zależność

$$CD(X_1, X_2) = \frac{1}{2} CV(X_1, X_2) = Cov(X_1, X_2).$$

Podstawowymi własnościami kodyferencji są ([29]):

- w przeciwieństwie do kodyferencji, kowariacja jest niesymetryczna względem argumentów,
- liniowość względem pierwszego argumentu: $CV(X_1 + X_2, Y) = CV(X_1, Y) + CV(X_2, Y)$,

- skalowanie: $CV(aX, bY) = ab^{\langle \alpha-1 \rangle} CV(X, Y)$,
- jeśli X oraz Y są niezależne, wówczas $CV(X, Y) = 0$,
- jeśli Y_1 oraz Y_2 są niezależne, wówczas $CV(X, Y_1 + Y_2) = CV(X, Y_1) + CV(X, Y_2)$.

Jeśli $\alpha > 1$, wówczas kowariacja definiuje normę w przestrzeni liniowej K $S\alpha S$ zmiennych losowych, których norma jest równa parametrowi skali ([29]). Norma kowariacyjna zmiennej losowej $X \in K$ dla $\alpha > 1$ jest zdefiniowana jako $\|X\|_\alpha = (CV(X, X))^{1/\alpha}$. Szereg $\{X_n\}$, $n \in Z$ jest ograniczony w przestrzeni K z normą $\|\cdot\|_\alpha$, gdy $\sup_{n \in Z} \|X_n\|_\alpha^\alpha < \infty$. Ponadto przyjmujemy $X = Y$ w K wtedy i tylko wtedy, gdy $\|X - Y\|_\alpha = 0$.

Lemat 7 Niech $X_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n)\xi_{n-j}$, gdzie innowacje $\{\xi_n\}$ są niezależnymi $S\alpha S$ zmiennymi losowymi z parametrem skali 1.

(i) Jeśli $1 < \alpha \leq 2$, wówczas

$$CV(X_n, X_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n)c_{k-n+j}(k)^{\langle \alpha-1 \rangle} \quad \alpha > 1. \quad (6.5)$$

(ii) Jeśli $0 < \alpha \leq 2$, wówczas

$$CD(X_n, X_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|c_j(n)|^\alpha + |c_{k-n+j}(k)|^\alpha - |c_j(n) - c_{k-n+j}(k)|^\alpha). \quad (6.6)$$

Dowód:

(i) Jeśli $X_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n)\xi_{n-j}$, wówczas

$$CV(X_n, X_k) = CV\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n)\xi_{n-j}, \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s(k)\xi_{k-s}\right).$$

Ponieważ kowariacja jest funkcją liniową ze względu na pierwszy argument oraz $\{\xi_n\}$ są niezależne, zatem

$$\begin{aligned} CV(X_n, X_k) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n) CV\left(\xi_{n-j}, \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s(k)\xi_{k-s}\right) = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n) \sum_{s=-\infty}^{\infty} CV(\xi_{n-j}, c_s(k)\xi_{k-s}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n)c_{k-n+j}(k)^{\langle \alpha-1 \rangle}. \end{aligned}$$

(ii) Ponieważ $X_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n)\xi_{n-j}$ oraz $\{\xi_n\}$ są niezależne, zatem otrzymujemy

$$\ln E \exp(iX_n) = \ln E \exp\left(i \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n)\xi_{n-j}\right) = \ln \prod_{j=-\infty}^{\infty} E \exp(ic_j(n)\xi_{n-j}) =$$

$$\begin{aligned} \ln \prod_{j=-\infty}^{\infty} \exp(-|c_j(n)|^\alpha) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(n)|^\alpha, \\ \ln E \exp(-iX_k) &= \ln E \exp(-i \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(k)\xi_{k-j}) = \ln E \exp(-i \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{k-n+j}(k)\xi_{n-j}) = \\ \ln \prod_{j=-\infty}^{\infty} E \exp(-ic_{k-n+j}(k)\xi_{n-j}) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_{k-n+j}(k)|^\alpha, \\ \ln E \exp(i(X_n - X_k)) &= \ln E \exp(i(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (c_j(n) - c_{k-n+j}(k))\xi_{n-j})) = \\ \ln \prod_{j=-\infty}^{\infty} E \exp(i(c_j(n) - c_{k-n+j}(k))\xi_{n-j}) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(n) - c_{k-n+j}(k)|^\alpha. \end{aligned}$$

Zatem

$$CD(X_n, X_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|c_j(n)|^\alpha + |c_{k-n+j}(k)|^\alpha - |c_j(n) - c_{k-n+j}(k)|^\alpha).$$

□

6.2 Ograniczone rozwiązanie szeregu ARMA(1,1) z $S\alpha S$ innowacjami

W Rozdziale 2 udowodniono warunki gwarantujące istnienie jednoznacznego i ograniczonego (w sensie L_2) rozwiązania systemu ARMA(1,q) dla innowacji, które są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi ze średnią 0 oraz wariancją równą 1. W tym wypadku otrzymano trzy warunki dające ograniczone rozwiązanie, ale tylko dwa z nich gwarantują jego jednoznaczność:

$$(a) \sup_q |B_q^0|^{-1} = \infty \text{ oraz } \sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_{n-s}|^2 < \infty$$

$$(b) \sup_q |B_0^q| = \infty \text{ oraz } \sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^2 < \infty,$$

z B_r^s zdefiniowanym w (2.6). Łatwo zauważyć, że warunki (I) oraz (II) są analogonem odpowiednio warunków (a) oraz (b).

W tym podrozdziale udowodniony zostanie fakt, że każdy z warunków (I) i (II) prowadzi do istnienia jednoznacznego rozwiązania systemu ARMA(1,1) z $S\alpha S$ innowacjami oraz podana zostanie forma tego rozwiązania.

Twierdzenie 8 *Jeśli jeden z warunków (I) lub (II) jest spełniony, wówczas system (6.1) ma ograniczone rozwiązanie i ma ono następującą formę:*

$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} B_{n-s+1}^n a_{n-s} \xi_{n-s} \quad \text{jeśli (I) jest spełniony,}$$

$$X_n = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \xi_{n+s} \quad \text{jeśli (II) jest spełniony.}$$

Dowód:

Łatwo jest pokazać, że iterując k razy równanie (6.1) otrzymujemy

$$X_{n-k} = \frac{X_n}{B_{n-k+1}^n} - \sum_{j=1}^k \frac{a_{n-k+j}}{B_{n-k+1}^{n-k+j}} \xi_{n-k+j}, \quad (6.7)$$

$$X_{n+k} = B_{n+1}^{n+k} X_n + \sum_{j=1}^k B_{n+j+1}^{n+k} a_{n+j} \xi_{n+j}. \quad (6.8)$$

Jeśli warunek (I) jest spełniony, wówczas $X_n = \sum_{s=0}^{\infty} B_{n-s+1}^n a_{n-s} \xi_{n-s}$ spełnia równanie (6.1). Ponadto

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|X_n\|_{\alpha}^{\alpha} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{\infty} \left| B_{n-s+1}^n a_{n-s} \right|^{\alpha} < \infty.$$

Z drugiej strony, jeśli $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1) oraz warunek (I) jest spełniony, wówczas z (6.7) mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| X_n - \sum_{j=1}^k a_{n-k+j} B_{n-k+j+1}^n \xi_{n-k+j} \right\|_{\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|X_{n-k} B_{n-k+1}^n\|_{\alpha} = 0,$$

zatem

$$X_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k a_{n-k+j} B_{n-k+j+1}^n \xi_{n-k+j} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} B_{n-j+1}^n \xi_{n-j}.$$

Jeśli warunek (II) jest spełniony, wówczas $X_n = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \xi_{n+s}$ spełnia równanie (6.1).

Ponadto

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|X_n\|_{\alpha}^{\alpha} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^{\alpha} < \infty.$$

Z drugiej strony, gdy $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1) oraz warunek (II) jest spełniony, wówczas z (6.8) mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| X_n + \sum_{j=1}^k \frac{a_{n+j}}{B_{n+1}^{n+j}} \xi_{n+j} \right\|_{\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{X_{n+k}}{B_{n+1}^{n+k}} \right\|_{\alpha} = 0,$$

zatem

$$X_n = - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{a_{n+j}}{B_{n+1}^{n+j}} \xi_{n+j} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{n+j}}{B_{n+1}^{n+j}} \xi_{n+j}.$$

□

6.3 Modele ARMA(1,1) spełniające warunek (I)

Jeśli $\sup_q |B_q^0|^{-1} = \infty$ oraz $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_{n-s}|^\alpha < \infty$ (warunek (I)), wówczas system zdefiniowany w (6.1) ma ograniczone rozwiązanie w przestrzeni K z normą $\|\cdot\|_\alpha$ i ma ono następującą postać:

$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} B_{n-s+1}^n a_{n-s} \xi_{n-s}. \quad (6.9)$$

W tym wypadku $X_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s(n) \xi_{n-s}$, gdzie

$$c_s(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < 0 \\ B_{n-s+1}^n a_{n-s} & \text{if } s \geq 0. \end{cases}$$

Propozycja 8 *Jeśli $\sup_q |B_q^0|^{-1} = \infty$, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_{n-s}|^\alpha < \infty$ (warunek (I)) oraz $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1), wówczas dla $1 < \alpha \leq 2$ i $n \in \mathbb{Z}$:*

(i) *kowariancja X_n i X_{n-k} dla $k > 0$ ma następującą postać:*

$$CV(X_n, X_{n-k}) = B_{n-k+1}^n \sum_{s=k}^{\infty} |B_{n-s+1}^{n-k} a_{n-s}|^\alpha \quad (6.10)$$

(ii) *kowariancja X_n i X_{n+k} dla $k > 0$ ma następującą postać:*

$$CV(X_n, X_{n+k}) = \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^{n+k} a_{n-s}|^\alpha. \quad (6.11)$$

Dowód:

(i) Do wyznaczenia postaci kowariancji X_n i X_{n-k} wykorzystamy Lemat 7(i). Ponieważ $\{X_n\}$ ma formę (6.9), zatem dla $k > 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} CV(X_n, X_{n-k}) &= \sum_{s=k}^{\infty} c_s(n) c_{s-k}(n-k)^{\langle \alpha-1 \rangle} = \sum_{s=k}^{\infty} (B_{n-s+1}^n a_{n-s}) (B_{n-s+1}^{n-k} a_{n-s})^{\langle \alpha-1 \rangle} = \\ &= B_{n-k+1}^n \sum_{s=k}^{\infty} |B_{n-s+1}^{n-k} a_{n-s}|^\alpha. \end{aligned}$$

(ii) Do wyznaczenia postaci kowariancji X_n i X_{n+k} wykorzystamy Lemat 7(i). Ponieważ $\{X_n\}$ ma postać (6.9), więc dla $k > 0$ mamy:

$$CV(X_n, X_{n+k}) = \sum_{s=0}^{\infty} c_j(n) c_{j+k}(n+k) \langle \alpha-1 \rangle =$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left(B_{n-s+1}^n a_{n-s} \right) \left(B_{n-s+1}^{n+k} a_{n-s} \right) \langle \alpha-1 \rangle = \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \sum_{s=0}^{\infty} \left| B_{n-s+1}^{n+k} a_{n-s} \right|^\alpha.$$

□

Uwaga 6 Jeśli $\sup_q |B_q^0|^{-1} = \infty$, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_{n-s}|^\alpha < \infty$ (warunek (I)) oraz $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1), wówczas dla $1 < \alpha \leq 2$ i $n \in \mathbb{Z}$:

(i) kowariancja X_n i X_{n-k} dla $k > 0$ ma następującą postać:

$$CV(X_n, X_{n-k}) = B_{n-k+1}^n \sum_{s=k}^{\infty} \left| B_{n-s+1}^{n-k} a_{n-s} \right|^\alpha$$

(ii) kowariancja X_{n-k} i X_n dla $k > 0$ ma następującą postać:

$$CV(X_{n-k}, X_n) = \frac{1}{B_{n-k+1}^n} \sum_{s=0}^{\infty} \left| B_{n-k-s+1}^n a_{n-k-s} \right|^\alpha.$$

(iii) kowariancja X_n i X_{n+k} dla $k > 0$ ma następującą postać:

$$CV(X_n, X_{n+k}) = \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \sum_{s=0}^{\infty} \left| B_{n-s+1}^{n+k} a_{n-s} \right|^\alpha$$

(iv) kowariancja X_{n+k} i X_n dla $k > 0$ ma następującą postać:

$$CV(X_{n+k}, X_n) = B_{n+1}^{n+k} \sum_{s=k}^{\infty} \left| B_{n+k-s+1}^n a_{n+k-s} \right|^\alpha.$$

Propozycja 9 Jeśli $\sup_q |B_q^0|^{-1} = \infty$, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_{n-s}|^\alpha < \infty$ (warunek (I)) oraz $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1), wówczas dla $0 < \alpha \leq 2$ kodyferencja X_n i X_m ($n, m \in \mathbb{Z}$) przyjmuje następującą postać:

$$CD(X_n, X_m) = \sum_{s=\max(0, n-m)}^{\infty} |a_{n-s}|^\alpha \left(|B_{n-s+1}^n|^\alpha + |B_{n-s+1}^m|^\alpha - |B_{n-s+1}^m - B_{n-k+1}^n|^\alpha \right) \quad (6.12)$$

Dowód:

Stosując Lemat 7(ii) oraz wykorzystując postać rozwiązania $\{X_n\}$ daną wzorem (6.9) otrzymujemy tezę.

□

Uwaga 7 Jeśli $\sup_q |B_q^0|^{-1} = \infty$, $\sup_{n \in Z} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_{n-s}|^\alpha < \infty$ (warunek (I)) oraz $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1), wówczas dla $0 < \alpha \leq 2$ i $n, k \in Z$ ($k > 0$) mamy:

(i)

$$CD(X_n, X_{n-k}) = CD(X_{n-k}, X_n) = \sum_{s=k}^{\infty} |a_{n-s}|^\alpha \left(|B_{n-s+1}^n|^\alpha + |B_{n-s+1}^{n-k}|^\alpha - |B_{n-s+1}^n - B_{n-s+1}^{n-k}|^\alpha \right)$$

(ii)

$$CD(X_n, X_{n+k}) = CD(X_{n+k}, X_n) = \sum_{s=k}^{\infty} |a_{n+k-s}|^\alpha \left(|B_{n+k-s+1}^{n+k}|^\alpha + |B_{n+k-s+1}^n|^\alpha - |B_{n+k-s+1}^{n+k} - B_{n+k-s+1}^n|^\alpha \right).$$

Twierdzenie 9 Jeśli $\sup_q |B_q^0|^{-1} = \infty$, $\sup_{n \in Z} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_{n-s}|^\alpha < \infty$ (warunek (I)) oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} |B_{-k}^0|$ istnieje, a $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem systemu (6.1), wówczas dla każdego $1 < \alpha < 2$ i $n \in Z$ spełnione są następujące warunki:

(i)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n-k})}{CV(X_n, X_{n-k})} = \alpha,$$

(ii)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_{n-k}, X_n)}{CV(X_{n-k}, X_n)} = 0,$$

(iii)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} CD(X_n, X_{n+k})}{\left(\frac{1}{|B_{n+1}^{n+k}|^\alpha} + 1 - \left| 1 - \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \right|^\alpha \right) CV(X_n, X_{n+k})} = 1,$$

(iv)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}^{n+k} CD(X_{n+k}, X_n)}{\left(|B_{n+1}^{n+k}|^\alpha + 1 - \left| 1 - B_{n+1}^{n+k} \right|^\alpha \right) CV(X_{n+k}, X_n)} = 1.$$

Dowód:

Do dowodu zostaną wykorzystane Propozycje 8 i 9 oraz Uwagi 6 i 7.

(i) Dla $k > 0$ mamy

$$\frac{CD(X_n, X_{n-k})}{CV(X_n, X_{n-k})} = \frac{1 + |B_{n-k+1}^n|^\alpha - |1 - B_{n-k+1}^n|^\alpha}{B_{n-k+1}^n} =$$

$$|B_{n-k+1}^n|^{\alpha-1} \overline{B_{n-k+1}^n} + \frac{1 - |1 - B_{n-k+1}^n|^\alpha}{B_{n-k+1}^n}.$$

Ponieważ $\sup_q |B_q^0|^{-1} = \infty$ oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} |B_{-k}^0|$ istnieje, zatem $\lim_{k \rightarrow \infty} |B_{n-k+1}^n| = 0$ dla każdego $n \in Z$. Ponadto dla $1 < \alpha < 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - |1 - x|^\alpha}{x} = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \bar{x} = 0.$$

Zatem otrzymujemy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n-k})}{CV(X_n, X_{n-k})} = \alpha.$$

(ii)

$$\frac{CD(X_{n-k}, X_n)}{CV(X_{n-k}, X_n)} = \frac{\frac{1}{|B_{n-k+1}^n|^\alpha} + 1 - |1 - \frac{1}{B_{n-k+1}^n}|^\alpha}{\frac{1}{B_{n-k+1}^n}}.$$

Ostatnie wyrażenie dąży do zera, gdyż

$$\frac{\frac{1}{|B_{n-k+1}^n|^\alpha} + 1 - |1 - \frac{1}{B_{n-k+1}^n}|^\alpha}{\frac{1}{B_{n-k+1}^n}} = \frac{(B_{n-k+1}^n)^2 (1 + |B_{n-k+1}^n|^\alpha - |1 - B_{n-k+1}^n|^\alpha)}{B_{n-k+1}^n |B_{n-k+1}^n|^\alpha} =$$

$$\alpha \frac{(B_{n-k+1}^n)^2}{|B_{n-k+1}^n|^\alpha} = 0.$$

(iii) oraz (iv) wynikają bezpośrednio z Uwag 6 i 7.

□

Uwaga 8 Rozpatrzmy specjalny przypadek systemu ARMA(1,1) danego wzorem (6.1), tzn. model ze stałymi współczynnikami dany równaniem:

$$X_n - bX_{n-1} = a\xi_n, \quad (6.13)$$

gdzie $a \neq 0$, $|b| < 1$ oraz $\{\xi_n\}$ są niezależnymi $S\alpha S$ zmiennymi losowymi z parametrem skali 1. W tym wypadku $\sup_q |B_q^0|^{-1} = \sup\{1, 1/|b|, 1/|b|^2, \dots\} = \infty$ oraz

$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{\infty} |B_{n-s+1}^n a_{n-s}|^\alpha = \frac{|a|^\alpha}{1-|b|^\alpha} < \infty$. Zatem warunek (I) jest spełniony, a rozwiązanie równania (6.13) ma następującą postać:

$$X_n = a \sum_{s=0}^{\infty} b^s \xi_{n-s}.$$

Stosując Twierdzenie 9 otrzymujemy dla $1 < \alpha \leq 2$:

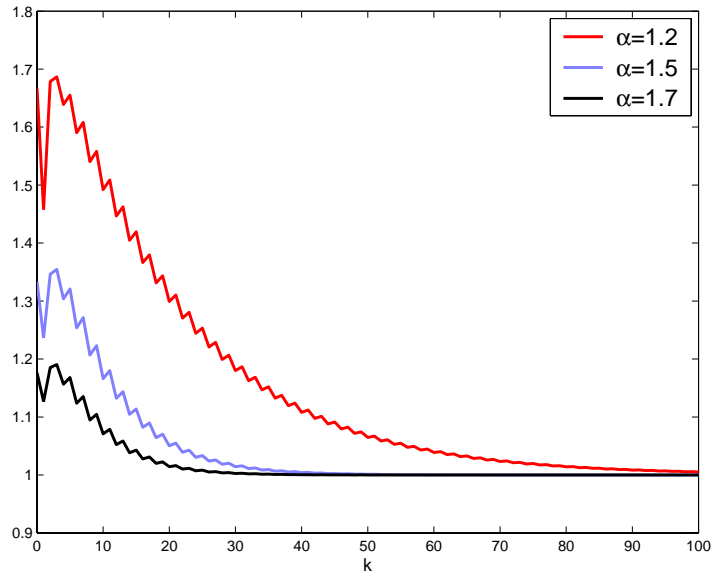
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_0, X_{-k})}{CV(X_0, X_{-k})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_k, X_0)}{CV(X_k, X_0)} = \alpha,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_{-k}, X_0)}{CV(X_{-k}, X_0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_0, X_k)}{CV(X_0, X_k)} = 0.$$

Przykład 5 Rozpatrzmy system ARMA(1,1) ze zmiennymi współczynnikami dany następującym równaniem:

$$X_n + b_n X_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \xi_n,$$

gdzie współczynniki $b_n = 1.2$ dla n parzystych oraz $b_n = 0.5$ dla n nieparzystych. Współczynniki modelu spełniają warunek (I). Na Rysunku 8 pokazano wielkość $\frac{CD(X_n, X_{n-k})}{\alpha CV(X_n, X_{n-k})}$ dla $k = 0, 1, \dots, 100$, $n = 10$ oraz $\alpha = 1.2$, $\alpha = 1.5$ i $\alpha = 1.7$. Zgodnie z Twierdzeniem 9 iloraz $\frac{CD(X_n, X_{n-k})}{\alpha CV(X_n, X_{n-k})}$ zbiega do 1 dla rosnących wielkości k .



Rysunek 8: Wielkość $\frac{CD(X_n, X_{n-k})}{\alpha CV(X_n, X_{n-k})}$ dla $\alpha = 1.2$, $\alpha = 1.5$ i $\alpha = 1.7$.

6.4 Modele ARMA(1,1) spełniające warunek (II)

Jeśli $\sup_q |B_0^q| = \infty$ oraz $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^\alpha < \infty$ (warunek (II)), wówczas system (6.1) ma ograniczone rozwiązanie mające postać:

$$X_n = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \xi_{n+s} = - \sum_{s=-\infty}^{-1} \frac{a_{n-s}}{B_{n+1}^{n-s}} \xi_{n-s}. \quad (6.14)$$

W tym wypadku $X_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s(n) \xi_{n-s}$, gdzie

$$c_s(n) = \begin{cases} 0 & \text{gdym } s \geq 0 \\ -\frac{a_{n-s}}{B_{n+1}^{n-s}} & \text{gdym } s < 0. \end{cases}$$

Propozycja 10 Jeśli $\sup_q |B_0^q| = \infty$, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^\alpha < \infty$ (warunek (II)) oraz $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1), wówczas dla $1 < \alpha \leq 2$ i $n, k \in \mathbb{Z}$:

(i) kowariancja X_n i X_{n+k} dla $k > 0$ ma następującą postać:

$$CV(X_n, X_{n+k}) = \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \sum_{s=-\infty}^{-k-1} \left| \frac{a_{n-s}}{B_{n+k+1}^{n-s}} \right|^\alpha, \quad (6.15)$$

(ii) kowariancja X_n i X_{n-k} dla $k > 0$ ma następującą postać:

$$CV(X_n, X_{n-k}) = B_{n-k+1}^n \sum_{s=-\infty}^{-1} \left| \frac{a_{n-s}}{B_{n-k+1}^{n-s}} \right|^\alpha. \quad (6.16)$$

Dowód:

(i) Do wyznaczenia postaci kowariancji X_n i X_{n+k} wykorzystany zostanie Lemat 7(i).

Ponieważ $\{X_n\}$ ma postać daną równaniem (6.14), zatem mamy

$$\begin{aligned} CV(X_n, X_{n+k}) &= \sum_{s=-\infty}^{-k-1} c_s(n) c_{s+k}(n+k)^{\langle \alpha-1 \rangle} = \\ &= - \sum_{s=-\infty}^{-k-1} \frac{a_{n-s}}{B_{n+1}^{n-s}} \left(-\frac{a_{n-s}}{B_{n+k+1}^{n-s}} \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} = \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \sum_{s=-\infty}^{-k-1} \left| \frac{a_{n-s}}{B_{n+k+1}^{n-s}} \right|^\alpha. \end{aligned}$$

(ii) Do wyznaczenia postaci kowariancji X_n i X_{n-k} wykorzystamy Lemat 7(i). Ponieważ $\{X_n\}$ ma postać (6.14), dlatego dla $k > 0$ mamy

$$CV(X_n, X_{n-k}) = \sum_{s=-\infty}^{-1} c_s(n) c_{s-k}(n-k)^{\langle \alpha-1 \rangle} =$$

$$-\sum_{s=-\infty}^{-1} \frac{a_{n-s}}{B_{n+1}^{n-s}} \left(-\frac{a_{n-s}}{B_{n-k+1}^{n-s}} \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} = B_{n-k+1}^n \sum_{s=-\infty}^{-1} \left| \frac{a_{n-s}}{B_{n-k+1}^{n-s}} \right|^\alpha.$$

□

Uwaga 9 Jeśli $\sup_q |B_0^q| = \infty$, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^\alpha < \infty$ (warunek (II)) oraz $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1), wówczas dla $1 < \alpha \leq 2$ i $n \in \mathbb{Z}$:

(i) kowariancja X_n i X_{n+k} dla $k > 0$ przyjmuje postać:

$$CV(X_n, X_{n+k}) = \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \sum_{s=-\infty}^{-k-1} \left| \frac{a_{n-s}}{B_{n+k+1}^{n-s}} \right|^\alpha,$$

(ii) kowariancja X_{n+k} i X_n dla $k > 0$ przyjmuje postać:

$$CV(X_{n+k}, X_n) = B_{n+1}^{n+k} \sum_{s=-\infty}^{-1} \left| \frac{a_{n+k-s}}{B_{n+1}^{n+k-s}} \right|^\alpha,$$

(iii) kowariancja X_n i X_{n-k} dla $k > 0$ przyjmuje postać:

$$CV(X_n, X_{n-k}) = B_{n-k+1}^n \sum_{s=-\infty}^{-1} \left| \frac{a_{n-s}}{B_{n-k+1}^{n-s}} \right|^\alpha,$$

(iv) kowariancja X_{n-k} i X_n dla $k > 0$ przyjmuje postać:

$$CV(X_{n-k}, X_n) = \frac{1}{B_{n-k+1}^n} \sum_{s=-\infty}^{-k-1} \left| \frac{a_{n-k-s}}{B_{n+1}^{n-k-s}} \right|^\alpha.$$

Propozycja 11 Jeśli $\sup_q |B_0^q| = \infty$, $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^\alpha < \infty$ (warunek (II)) oraz $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1), wówczas kodyferencja X_n i X_m dla $0 < \alpha \leq 2$ i $n, m \in \mathbb{Z}$ ma następującą postać:

$$CD(X_n, X_m) = \sum_{s=-\infty}^{\min(-1, n-m-1)} |a_{n-s}|^\alpha \left(\left| \frac{1}{B_{n+1}^{n-s}} \right|^\alpha + \left| \frac{1}{B_{m+1}^{n-s}} \right|^\alpha - \left| \frac{1}{B_{n+1}^{n-s}} - \frac{1}{B_{m+1}^{n-s}} \right|^\alpha \right). \quad (6.17)$$

Dowód:

Stosując Lemat 7(ii) oraz wykorzystując formę rozwiązania równania (6.1) daną wzorem (6.14) otrzymujemy tezę.

□

Uwaga 10 Jeśli $\sup_q |B_0^q| = \infty$, $\sup_{n \in Z} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^\alpha < \infty$ (warunek (II)) oraz $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem równania (6.1), wówczas dla $0 < \alpha \leq 2$ i $n, k \in Z$ ($k > 0$) mamy:

(i)

$$CD(X_n, X_{n+k}) = CD(X_{n+k}, X_n) = \sum_{s=-\infty}^{-1} |a_{n+k-s}|^\alpha \left(\left| \frac{1}{B_{n+k+1}^{n+k-s}} \right|^\alpha + \left| \frac{1}{B_{n+1}^{n+k-s}} \right|^\alpha - \left| \frac{1}{B_{n+k+1}^{n+k-s}} - \frac{1}{B_{n+1}^{n+k-s}} \right|^\alpha \right),$$

(ii)

$$CD(X_n, X_{n-k}) = CD(X_{n-k}, X_n) = \sum_{s=-\infty}^{-1} |a_{n-k-s}|^\alpha \left(\left| \frac{1}{B_{n-k+1}^{n-k-s}} \right|^\alpha + \left| \frac{1}{B_{n+1}^{n-k-s}} \right|^\alpha - \left| \frac{1}{B_{n-k+1}^{n-k-s}} - \frac{1}{B_{n+1}^{n-k-s}} \right|^\alpha \right).$$

Twierdzenie 10 Jeśli $\sup_q |B_0^q| = \infty$, $\sup_{n \in Z} \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^\alpha < \infty$ (warunek (II)) oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} |B_1^k|^{-1}$ istnieje, a $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem systemu (6.1), wówczas dla każdego $1 < \alpha < 2$ i $n \in Z$ spełnione są warunki:

(i)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n+k})}{CV(X_n, X_{n+k})} = \alpha,$$

(ii)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_{n+k}, X_n)}{CV(X_{n+k}, X_n)} = 0,$$

(iii)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B_{n-k+1}^n CD(X_n, X_{n-k})}{\left(1 + |B_{n-k+1}^n|^\alpha - |1 - B_{n-k+1}^n|^\alpha\right) CV(X_n, X_{n-k})} = 1,$$

(iv)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{B_{n-k+1}^n} CD(X_{n-k}, X_n)}{\left(1 + \left|\frac{1}{B_{n-k+1}^n}\right|^\alpha - \left|1 - \frac{1}{B_{n-k+1}^n}\right|^\alpha\right) CV(X_{n-k}, X_n)} = 1.$$

Dowód:

Do dowodu zostaną wykorzystane Propozycje 10 i 11 oraz Uwagi 9 i 10.

(i) Dla $k > 0$ mamy

$$\frac{CD(X_n, X_{n+k})}{CV(X_n, X_{n+k})} = B_{n+1}^{n+k} \left(1 + \left| \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \right|^\alpha - \left| 1 - \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \right|^\alpha \right) = \left| \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \right|^{\alpha-1} \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} + \frac{1 - \left| 1 - \frac{1}{B_{n+1}^{n+k}} \right|^\alpha}{\frac{1}{B_{n+1}^{n+k}}}.$$

Ponieważ $\sup_q |B_0^q| = \infty$ oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} |B_1^k|^{-1}$ istnieje, zatem $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_{n+1}^{n+k}|} = 0$. Ponadto dla $1 < \alpha < 2$ mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - |1 - x|^\alpha}{x} = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \bar{x} = 0.$$

Otrzymujemy zatem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n+k})}{CV(X_n, X_{n+k})} = \alpha.$$

(ii)

$$\frac{CD(X_{n+k}, X_n)}{CV(X_{n+k}, X_n)} = \frac{1 + |B_{n+1}^{n+k}|^\alpha - |1 - B_{n+1}^{n+k}|^\alpha}{B_{n+1}^{n+k}} = 0.$$

Warunki (iii) oraz (iv) otrzymujemy wykorzystując bezpośrednio Uwagi 9 i 10.

□

Uwaga 11 Dla stacjonarnego przypadku danego równaniem (6.13), gdzie $a \neq 0$, $|b| > 1$ oraz $\{\xi_n\}$ niezależnych $S\alpha S$ zmiennych losowych z parametrem skali 1 mamy $\sup_q |B_0^q| = \sup\{1, |b|, |b|^2, \dots\} = \infty$ oraz $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{\infty} \left| \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \right|^\alpha = \frac{|ab|^\alpha}{|b|^{\alpha-1}} < \infty$. Zatem warunek (II) jest spełniony oraz rozwiązanie równania (6.13) ma następującą postać

$$X_n = a \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{b^s} \xi_{n+s}.$$

Stosując Twierdzenie 10 otrzymujemy dla $1 < \alpha \leq 2$:

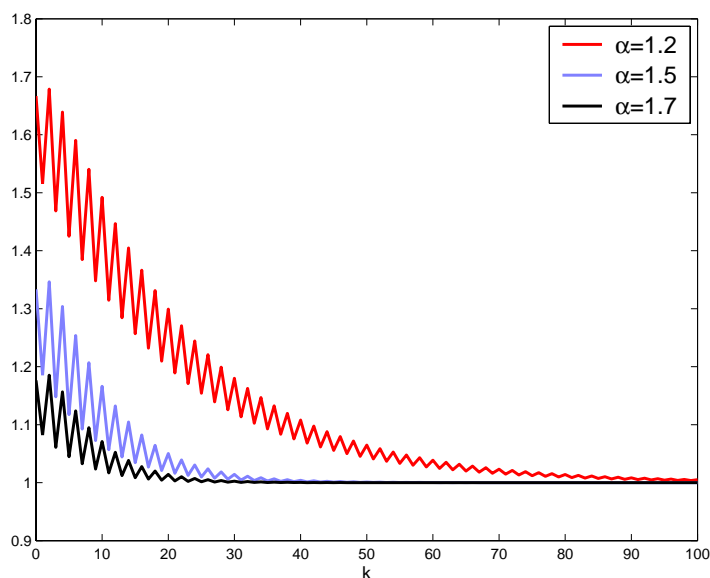
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_0, X_k)}{CV(X_0, X_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_{-k}, X_0)}{CV(X_{-k}, X_0)} = \alpha,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_k, X_0)}{CV(X_k, X_0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_0, X_{-k})}{CV(X_0, X_{-k})} = 0.$$

Przykład 6 Rozpatrzmy system ARMA(1,1) ze zmiennymi współczynnikami dany równaniem:

$$X_n + b_n X_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \xi_n,$$

gdzie współczynniki $b_n = \frac{1}{6}$ dla n parzystych oraz $b_n = 10$ dla n nieparzystych, spełniają warunek (II). Na Rysunku 9 pokazano wielkość $\frac{CD(X_n, X_{n+k})}{\alpha CV(X_n, X_{n+k})}$ dla $k = 0, 1, \dots, 100$, $n = 10$ oraz $\alpha = 1.2$, $\alpha = 1.5$ i $\alpha = 1.7$. Zgodnie z Twierdzeniem 10 iloraz $\frac{CD(X_n, X_{n+k})}{\alpha CV(X_n, X_{n+k})}$ dąży do 1 przy rosnącej wielkości k .



Rysunek 9: Wielkość $\frac{CD(X_n, X_{n+k})}{\alpha CV(X_n, X_{n+k})}$ dla $\alpha = 1.2$, $\alpha = 1.5$ i $\alpha = 1.7$.

W Tabeli 5 zawarto wyniki otrzymane w tym rozdziale. Jednocześnie pokazano, które z rozpatrywanych warunków i w jakich przypadkach gwarantują, że iloraz dwóch miar zależności (kodyferencji i kowariancji) w granicy daje parametr α .

Warunek	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n-k})}{CV(X_n, X_{n-k})} = \alpha$	$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n+k})}{CV(X_n, X_{n+k})} = \alpha$
(I)	+	-
(II)	-	+

Tabela 5: Warunki, przy których iloraz dwóch miar zależności w granicy daje parametr α .

Rozdział 7

Podsumowanie

Modele ARMA ze zmiennymi współczynnikami mają ważne zastosowanie w opisie danych niestacjonarnych, a ich podklasa, modele ARMA z okresowymi współczynnikami (PARMA), wykorzystywane najczęściej są przy opisie danych wykazujących okresowość. I tak między innymi wykorzystywane były do modelowania danych meteorologicznych, hydrologicznych i ekonomicznych ([7], [10], [17], [18], [30], [31]).

Pierwsza część pracy poświęcona jest modelom ARMA(1,q) ze zmiennymi współczynnikami i innowacjami będącymi niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero i jednostkowej wariancji. W tej części pokazano warunki na istnienie ograniczonych rozwiązań takich szeregów (Rozdział 2, Twierdzenie 2), jak również udowodniono fakt istnienia jednoznacznych rozwiązań (Rozdział 2, Twierdzenie 3). Pokazano także postaci tych rozwiązań. Następnie wyniki rozszerzono na ogólne szeregi ARMA(p,q) ze zmiennymi współczynnikami i w Twierdzeniu 4 zawarto rezultaty dotyczące ogólnych modeli.

Kolejnym krokiem było zastosowanie otrzymanych rezultatów do szczególnego przypadku modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami, a mianowicie do modeli PARMA. W tym wypadku pokazano warunki, które gwarantują istnienie jednoznacznych i ograniczonych rozwiązań takich modeli (Rozdział 3, Twierdzenie 5). Otrzymane formuły zastosowano do wyznaczenia postaci gęstości spektralnej szeregów PARMA i udowodnienie jej najważniejszej własności (Rozdział 3, Twierdzenia 6, 7). Pokazano również sposób wykorzystania otrzymanej postaci gęstości spektralnej do estymacji współczynników modelu.

Rozdział 4 zawiera teoretyczne podejście do problemu estymacji współczynników szeregów PARMA, jak również wykorzystanie modeli do opisu danych rzeczywistych pochodzących

z rynku energii.

Rozdział 5 poświęcony jest stacjonarnym wielowymiarowym modelom związanym z szeregami PARMA(1,q). Omówiono tu pięć wielowymiarowych szeregów, których stacjonarność implikuje istnienie okresowo skorelowanego rozwiązania systemu ARMA(1,q) z okresowymi współczynnikami.

W Rozdziale 6 omówiono modele ARMA(1,1) ze zmiennymi współczynnikami i α -stabilnymi innowacjami. Udowodniono w nim warunki na istnienie rozwiązań takich modeli, które są ograniczone (Rozdział 5, Twierdzenie 8), a także pokazano asymptotyczne zachowanie dwóch miar, kodyferencji i kowariacji, opisujących strukturę zależności modeli. Główne wyniki tego rozdziału zawarte są w Twierdzeniach 9 oraz 10.

Zadania realizowane w ramach rozprawy doktorskiej prowadziły nie tylko do uzyskania wyników teoretycznych, ale również mających ważne zastosowanie w praktyce. Podjęto próbę wykorzystania modeli ARMA z okresowymi współczynnikami do opisu danych energetycznych (ceny i wolumenu). Uzyskane wyniki wykorzystano także do przewidywania (predykcji) ceny i wolumenu sprzedaży energii elektrycznej na giełdzie energii. Mogą one ulepszyć dotychczas używane techniki w modelowaniu i predykcji danych energetycznych, a także rzucić nowe światło na problem opisu danych, w których odrzuca się hipotezę o stacjonarności.

Dodatek A

Najczęściej używane oznaczenia w tekście

- B_r^s

Dla ciągu liczb zespolonych (b_n) , $B_r^s = \prod_{j=r}^s b_j$, jeśli $r < s$ oraz $B_r^s = 1$, gdy $r > s$.

- P

Dla okresowego ciągu liczb zespolonych (b_n) z okresem T , $P = b_1 \dots b_T$.

- \mathbf{B}_r^s

Dla ciągu kwadratowych macierzy zespolonych (B_n) rozmiaru T , $\mathbf{B}_r^s = B_s \dots B_r$, jeśli $r < s$ oraz $\mathbf{B}_r^s = I$, gdy $r > s$ (I -macierz jednostkowa rozmiaru T).

- $(X_n, X_m) = R_X(n, m) = EX_n \overline{X_m}'$.

- $B_n(k) = R_X(n+k, k)$.

- Zmienna losowa X jest $S\alpha S$ oznacza, że ma ona symetryczny rozkład α -stabilny.

Spis rysunków

- Rysunek 1: Miara spektralna modelu PARMA(1,1).
- Rysunek 2: Analizowane dane rzeczywiste przed i po usunięciu trendu.
- Rysunek 3: Predykcja jednokrokowa dla modelu PARMA(3,1) i jej błąd procentowy.
- Rysunek 4: Funkcja autokowariancji z maksymalnym opóźnieniem 100.
- Rysunek 5: Funkcja autokowariancji z maksymalnym opóźnieniem 1000.
- Rysunek 6: Predykcja jednokrokowa dla ceny sprzedaży energii elektrycznej.
- Rysunek 7: Autocovariancja składowych szeregu $\{[Q^r(n)]\}$.
- Rysunek 8: Wielkość $\frac{CD(X_n, X_{n-k})}{\alpha CV(X_n, X_{n-k})}$ dla $\alpha = 1.2$, $\alpha = 1.5$ i $\alpha = 1.7$.
- Rysunek 9: Wielkość $\frac{CD(X_n, X_{n+k})}{\alpha CV(X_n, X_{n+k})}$ dla $\alpha = 1.2$, $\alpha = 1.5$ i $\alpha = 1.7$.

Spis tabel

- Tabela 1: Estymacja współczynników modelu PARMA(2,1) metodą momentów.
- Tabela 2: Estymacja współczynników modelu PARMA(2,1) metodą najmniejszych kwadratów.
- Tabela 3: Estymacja współczynników modelu PARMA(p,1) dla wolumenu sprzedaży.
- Tabela 4: Estymacja współczynników modelu PARMA(p,1) dla ceny energii.
- Tabela 5: Warunki, przy których iloraz dwóch miar zależności w granicy daje parametr α .

Bibliografia

- [1] M. Bentarzi, M. Hallin (1994), On the invertibility of periodic moving-average models, *J. Time Ser. Anal.* **15** (3), 263-268.
- [2] P. Bloomfield, H.L. Hurd, R.B. Lund (1994), Periodic correlation in stratospheric ozone data, *J. Time Ser. Anal.* **15** (2), 127-150.
- [3] M. Borgosz-Koczwara, A. Wyłomańska (2004), The equilibrium models in oligopoly electricity market, Międzynarodowa Konferencja *The European Electricity Market EEM-04*, 67-75.
- [4] M. Borgosz-Koczwara, A. Wyłomańska (2005), Okresowe szeregi czasowe wykorzystywane w prognozowaniu wolumenu sprzedaży, XI Konferencja Naukowo-Techniczna *Rynek Energii Elektrycznej*, vol. **2**, 269-276.
- [5] G.N. Boshnakov (1997), Periodically correlated solutions to a class of stochastic difference equations, in: *Stochastic Differential and Difference Equations*, I. Csiszár and G. Michaletzky, eds.(Birkhauser), 1-9.
- [6] P.J. Brockwell, R.A. Davies, *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [7] E. Broszkiewicz-Suwaj (2003), Wykrywanie okresowej korelacji danych z TGE SA w oparciu o analizę spektralną, *Rynek Terminowy* **20** (2), 92-95.
- [8] E. Broszkiewicz-Suwaj, A. Makagon, R. Weron, A. Wyłomańska (2004), On detecting and modeling periodic correlation in financial data, *Physica A* **336**, 196-205.

-
- [9] E. Broszkiewicz-Suwaj, A. Wyłomańska (2004), Analiza wolumenu sprzedaży energii elektrycznej na giełdzie Nord Pool metodą szeregów PARMA, *Rynek Terminowy* **26** (4), 83-87.
- [10] T. Cipra, P. Tlusty (1987), Estimation in multiple autoregressive-moving average models using periodicity, *J. Time Ser. Anal.* **15**, 293-300.
- [11] D. Dehay, H. Hurd (1993), Representation and estimation for PC and almost PC random processes, in: *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*, W. Gardner, ed. (IEEE Press), 295-328.
- [12] E. Ghysels, D.R. Osborn, *The Econometric Analysis of Seasonal Time Series*, Cambridge University Press, New York 2001.
- [13] E.G. Gladyshev (1961), Periodically correlated random sequences, *Sov. Math.* **2**, 385-388.
- [14] H.L. Hurd (1989), Representation of strongly harmonizable periodically correlated processes and their covariance, *J. Mult. Anal.* **29**, 53-67.
- [15] H.L. Hurd, N.L. Gerr (1991), Graphical methods for determining the presence of periodic correlation, *J. Time Ser. Anal.* **12** (4), 337-350.
- [16] H.L. Hurd, A. Makagon, A.G. Miamee (2002), On AR(1) models with periodic and almost periodic coefficients, *Stoch. Proc. Appl.* **100**, 167-185.
- [17] R. Jones, W. Brelford (1967), Time series with periodic structure, *Biometrika* **54**, 403-408.
- [18] R. Lund, I.V. Basawa (2000), Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic ARMA models, *J. Time Series Analysis* **1** (21), 75-93.
- [19] R. Lund R., I.V. Basawa (2001), Large sample properties of parameter estimates for periodic ARMA models, *J. Time Series Analysis* **6** (22), 651-663.
- [20] H. Lutkepohl, *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, 1991.
- [21] A. Makagon (1999), Theoretical prediction of periodically correlated sequences, *Probab. Math. Statist.* **19** (2), 287-322.

-
- [22] A. Makagon (2001), Characterization of the spectra of a periodically correlated processes, *J. Mult. Anal.* **78**, 1-10.
- [23] A. Makagon, A. Miamee, H. Salehi (1991), Periodically correlated processes and their spectrum, in: *Nonstationary Stochastic Processes and Their Applications*, A. G. Miamee, ed. (Word Scientific), 147-164.
- [24] A. Makagon, A. Weron, A. Wyłomańska (2004), Bounded solutions of ARMA models with varying coefficients, *Appl. Math.* **31** (3), 273-285.
- [25] A.I. McLeod (1995), Diagnostic checking periodic autoregression models with application, *J. Time Series Analysis* **2** (15), 221-233.
- [26] J. Nowicka (1997), Asymptotic behavior of the covariation and the codifference for ARMA models with stable innovations, *Stochastic Models* **13**, 673-686.
- [27] J. Nowicka, A. Weron (1997), Measures of dependence for ARMA models with stable innovations, *Annales UMCS, Section A (Mathematica)* **51**, 133-144.
- [28] M. Pagano (1978), On periodic and multiple autoregression, *Ann. Statist.* **6**, 1310-1317.
- [29] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, New York, 1994.
- [30] A.V. Vecchia (1985), Periodic autoregressive moving average (PARMA) modeling with applications to water resources, *Water Resources Bull.* **21** (5), 721-730.
- [31] A.V. Vecchia (1985), Maximum likelihood estimation for periodic autoregressive moving average models, *Technometrics* **4** (27), 375-384 .
- [32] A. Weron, A. Wyłomańska (2004), On ARMA(1,q) models with bounded and periodically correlated solutions, *Probab. Math. Statist.* **24** (2), 165-172.
- [33] A. Wyłomańska (2005), Description of the spectral measures for periodically correlated solutions o PARMA sequences, preprint, praca wysłana do *Journal of Time Series Analysis*.