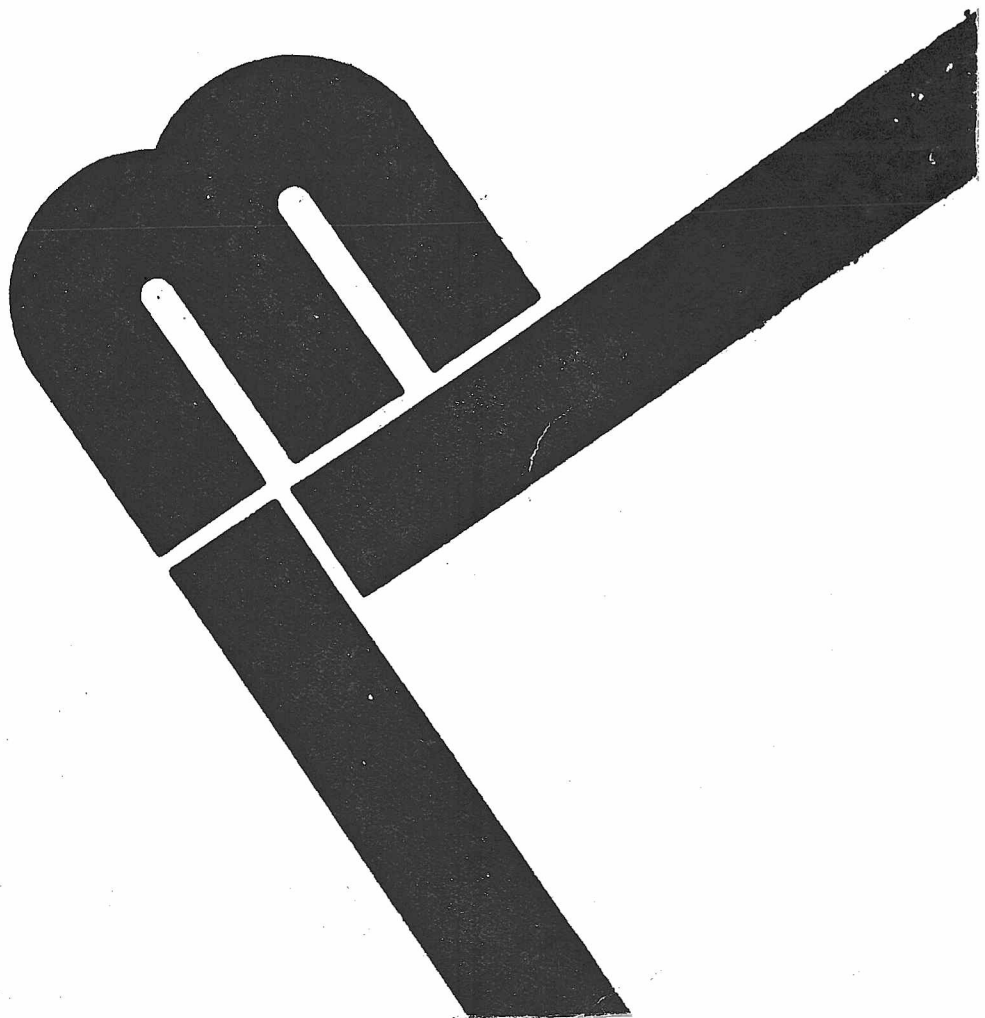

Janusz Szafran

**Rozpoznawanie sygnałów w cyfrowej automatyce
zabezpieczeniowej**

Wrocław 1990



PRACE NAUKOWE POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Scientific Papers of the Institute of Electric Power Engineering
No. 83 of the Technical University of Wrocław No. 83

Monographs

No. 23

1990

Janusz SZAFRAN

Signal recognition in digital power system protection

Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki
Politechniki Wrocławskiej

83

Seria:

Monografie

23

Janusz Szafran

Rozpoznawanie sygnałów w cyfrowej automatyce zabezpieczeniowej



Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 1990

Recenzenci

Wilibald WINKLER
Adam ŻUCHOWSKI

Redaktor naukowy

Jacek MALKO

Opracowanie redakcyjne

Maria KOPEĆ

Korekta

Aleksandra ŁUKASZEWICZ

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1990

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0324-976x

Nakład 170 + 70 egz. Ark. wyd. 14. Ark. druk. $11\frac{3}{8}$. Papier offset kl. III, 70 g, B1.
Oddano do druku w lutym 1990 r. Druk ukończono w marcu 1990 r.
Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 241/90. Cena zł 1800,-

*Cyfrowe zabezpieczenia elektro-
energetyczne, szybkie pomiary
cyfrowe, identyfikacja i estymacja,
filtracja cyfrowa*

Janusz SZAFRAN*

ROZPOZNAWANIE SYGNAŁÓW W CYFROWEJ AUTOMATYCE ZABEZPIECZENIOWEJ

Przedstawiono cyfrową identyfikację wielkości kryterialnych zabezpieczeń elektroenergetycznych, takich jak: amplitudy napięć i prądów, moce i składowe impedancji, mierzonych na podstawie sygnałów częstotliwości podstawowej. Rozważono trzy modele sygnałowe: deterministyczny, częściowo oraz całkowicie probabilistyczny. Dokonano syntezy algorytmów pomiarowych i wydzielono dwie podstawowe ich rodziny. Zbadano metody optymalizacji algorytmów oraz minimalizacji błędów powodowanych zakłóceniami. Zastosowano do tego metody fourierowskie o stałym i zmiennym oknie pomiarowym oraz filtrację Kalmana.

1. WSTĘP

Stosowane obecnie analogowe zabezpieczenia elektroenergetyczne są oparte na teoretycznych podstawach opracowanych dość dawno i następnie udoskonalonych. Ich istotą jest komparacja liniowych kombinacji napięć i prądów oraz określanie na tej podstawie obszaru, w którym znajduje się wyznaczana wielkość kryterialna. Układy cyfrowe pozwalają na rozdzielenie tego procesu na dwa etapy: pomiar poszukiwanych wielkości kryterialnych oraz stwierdzenie, w których obszarach ta zmierzona wielkość się znajduje. Jest bardzo wiele zalet wynikających z tego podziału funkcji, z których bodaj najważniejsze to ogromna dowolność w kształtowaniu obszarów działania oraz możliwości ściślejszej i efektywniejszej optymalizacji każdego z tych dwu procesów.

Kryteria decydujące o działaniu zabezpieczeń elektroenergetycznych najczęściej opierają się na informacji zawartej w napięciach i prądach o

częstotliwości podstawowej. W pracy zajęto się tylko tymi metodami, to jest pomiarem wielkości kryterialnych związanych ze składowymi podstawowymi napięć i prądów. Ten proces pomiaru jest zazwyczaj realizowany w dwu etapach. Pierwszy z nich to wydobycie z sygnału składowych podstawowych napięcia i (lub) prądu w postaci fazorów, a drugi to właściwy pomiar wartości danej wielkości kryterialnej. Szczególnie ważna jest realizacja zadań w ramach pierwszego etapu, ponieważ należy tutaj efektywnie stłumić szumy towarzyszące sygnałowi użytecznemu oraz wytworzyć jego składowe ortogonalne, stanowiące podstawowe wielkości w stosowanych algorytmach pomiarowych. Procesy filtracji i ortogonalizacji mogą być realizowane rozdzielnie lub łącznie, a rezultatem tego mogą być podobne lub różne właściwości oraz szczegółowe parametry pomiaru.

Najczęściej stosowanymi wielkościami kryterialnymi zabezpieczeń są: amplituda lub wartość skuteczna składowej podstawowej napięcia i prądu, moce czynna i bierna oraz rezystancja i reaktancja. Pomiary tych właśnie wielkości kryterialnych są przedmiotem pracy. Można tu zauważyć, że wiele spośród metod pomiaru amplitud lub mocy powstało jakby na marginesie metod pomiaru rezystancji i reaktancji. Tymczasem optymalizacja pomiaru tych pierwszych może czasem wymagać, aby traktować je odrębnie.

Technika cyfrowa zaoferowała takie możliwości w przetwarzaniu sygnałów, że w rezultacie opracowano ogromną liczbę algorytmów szczegółowych. Opublikowano bardzo dużo prac na ten temat, a liczba fundamentalnych pozycji bibliograficznych sięga kilkudziesięciu. Wiele spośród tych algorytmów różni się często tylko pozornie, gdyż wszystkie one wynikają z niewielu podstawowych metod. W pracy skoncentrowano się na syntezie tych metod i przedstawieniu ogólnych zależności, z których można wyznaczać mnogość szczegółowych postaci algorytmów pomiarowych różnych wielkości kryterialnych.

Mierzone wielkości kryterialne odznaczają się takimi cechami, jak własności dynamiczne oraz błędy w stanie ustalonym. Na własności dynamiczne składają się czas trwania i charakter stanu przejściowego po skokowej zmianie sygnałów oraz wynikające z niego błędy dynamiczne. Błędy ustalone są określone jako maksymalne wartości względnych błędów chwilowych zmierzonych wielkości kryterialnych w stanie ustalonym. Te cechy pomiaru są w pracy ujmowane łącznie dla obu etapów przetwarzania, to znaczy ortogonalizacji wraz z filtracją sygnałów oraz zastosowania właściwego algorytmu pomiarowego. Miary błędów mogą się różnić w poszczególnych przypadkach, co jest uzależnione od przyjętego modelu sygnałowego.

Omawiane rozważania były prowadzone z uwzględnieniem rzeczywistego układu pomiarowego i w związku z tym przyjęto dwa założenia. Jednym z nich jest założenie liniowości przekładników napięciowych i prądowych, a drugim stałość częstotliwości składowych podstawowych sygnałów.

2. STRUKTURA POMIARÓW CYFROWYCH ZABEZPIECZEŃ ELEKTROENERGETYCZNYCH

Zabezpieczenia elektroenergetyczne są skomplikowanymi układami pomiarowo-decyzyjnymi, dokonującymi złożonego przetwarzania napięć i prądów systemu. W ich długiej już historii rozwój technologii był wyznacznikiem konstrukcji, poczynając od tych wykorzystujących elementy stykowe - przekaźniki - co dało zabezpieczeniom nazwę do dzisiaj używaną w literaturze anglosaskiej, poprzez zastosowanie elementów analogowych, elektronicznych w układach konstruowanych i używanych do dzisiaj, aż po układy, które w coraz większym stopniu stosują i będą korzystać z techniki cyfrowej.

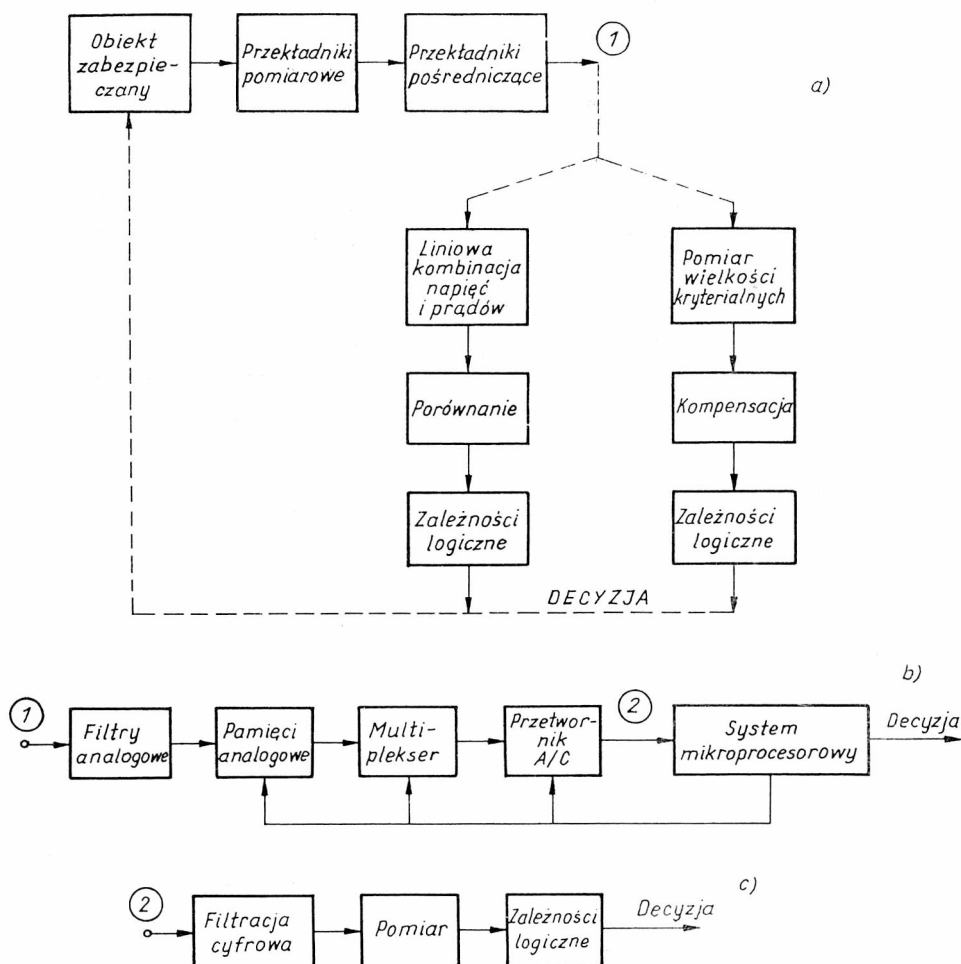
Pierwsze prace dotyczące algorytmów cyfrowych zabezpieczeń pojawiły się na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych, a ich tempo i zakres wyraźnie zwiększał się w miarę rozwoju technologii. Dotyczy to pojawienia się scalonego procesora najpierw 8- a potem 16-bitowego, scalonych pamięci odpowiedniej pojemności oraz odpowiednio szybkich przetworników analogowo-cyfrowych. Tak więc współczesne zabezpieczenia cyfrowe mogą być realizowane za pomocą aktualnej technologii, chociaż pewną barierą jest jeszcze ekonomia; nie ulega jednak wątpliwości, że bezsprzeczne zalety techniki cyfrowej spowodują, iż przyszłość będzie należeć do tych układów.

Stosownie do rozwoju technologii zmieniała się również struktura układów zabezpieczeń. Część elementów, chociaż udoskonalona, pozostała trwałym elementem całego układu, część ulegała całkowitej zmianie. Wraz z tym coraz wyraźniej można wyodrębniać pewne człony funkcjonalne, które uprzednio stanowiły jedną całość. Człon filtrująco-pomiarowo-decyzyjny, stanowiący początkowo jedną całość, zaczyna się stopniowo rozdzielać na osobne człony, które mogą być optymalizowane ze względu na pełnione funkcje. W zabezpieczeniach cyfrowych funkcje te są już wyraźnie rozdzielone, a wydzielony człon pomiarowy jest jednym z najważniejszych bloków, gdyż od jakości pomiaru zależą funkcje całego układu. W cyfrowym pomiarze różnych wielkości, wykorzystującym analogowe sygnały systemu, pojawia się wiele nowych niezbędnych elementów, które muszą spełniać określone wymagania, jeśli cały układ ma działać poprawnie.

2.1. Schemat blokowy zabezpieczeń cyfrowych

Funkcjonalny schemat blokowy zabezpieczenia przedstawiono na rys.

2.1a. Napięcia i prądy z obiektu zabezpieczanego są przetwarzane z zastosowaniem zabezpieczeniowych przekładników napięciowych i prądowych na



Rys. 2.1. Funkcyjny schemat blokowy układu zabezpieczenia elektroenergetycznego (a), interface między częścią analogową i cyfrową (b) oraz schemat blokowy części cyfrowej (c)
 Fig. 2.1. Functional block scheme of power system protection (a), interface between its analog and digital part (b) and block scheme of the digital part (c)

standardowe wielkości wtórne. Wielkości te są następnie transformowane do odpowiedniego poziomu napięcia lub prądu za pomocą przekładników pośredniczących, których dodatkową funkcją jest separacja galwaniczna. Te pierwsze trzy elementy, przedstawione na schemacie blokowym, mają za zadanie

sprowadzenie sygnałów pierwotnych do odpowiedniego poziomu oraz standaryzację używanej wielkości fizycznej - najczęściej jest nią napięcie. Dalsze elementy tego schematu stanowią właściwy układ zabezpieczenia. Może ono być w sensie ogólnym realizowane dwoma sposobami. Pierwszy z nich, w którym nie dokonuje się bezpośredniego pomiaru wielkości kryterialnych, polega na zastosowaniu liniowej kombinacji napięć i prądów i jej komparacji z pewnym skalarą czy wektorem odniesienia. Pozwala to na ukształtowanie wymaganej charakterystyki, czy też obszaru działania i podejmowania decyzji stosownie do rzeczywistych wielkości napięć i prądów. Drugi sposób polega na tym, że dokonuje się bezpośredniego pomiaru wielkości kryterialnych, które następnie są porównywane z wielkościami odniesienia, co pozwala na ukształtowanie charakterystyki czy też obszaru działania. Decyzja jest podejmowana stosownie do spełniania dodatkowych warunków, co jest realizowane za pomocą układów logicznych.

Pierwszy ze sposobów jest charakterystyczny dla układów zabezpieczeń analogowych, natomiast drugi z nich - dla układów zabezpieczeń cyfrowych. Wynika to przede wszystkim z tego, że analogowe operacje mnożenia i dzielenia z odpowiednią dokładnością są trudne w realizacji dla dużych zakresów zmian wartości napięć i prądów. Tymczasem komparatory potrafią dużo łatwiej sprostać zadaniu ukształtowania odpowiedniej charakterystyki w tych warunkach. W układach cyfrowych ta sytuacja zmienia się; mnożenie i dzielenie, chociaż są operacjami czasochłonnymi w porównaniu z innymi, to jednak są dość łatwe w realizacji. W sumie więc drugi ze sposobów w zabezpieczeniach cyfrowych jest dominujący, choć właściwie oba sposoby mogą być tu stosowane, wzajemnie się uzupełniając.

W cyfrowych zabezpieczeniach, jak zresztą w każdym cyfrowym systemie pomiarowym, pojawia się wiele nowych elementów i układów, których nie było w elektronicznych układach analogowych. Przedstawiono to na rys. 2.1b. Oprócz samego systemu mikroprocesorowego, są to układy niezbędne w dykretyzacji sygnału. Proces ten przebiega w dwu etapach. Pierwszy z nich to zastąpienie sygnału analogowego ciągiem próbek, których wartość, jeszcze analogowa, jest przekształcona z określoną rozdzielczością do postaci cyfrowej z zastosowaniem przetwornika analogowo-cyfrowego. Tak więc, oprócz systemu mikroprocesorowego, który między innymi steruje pracą pozostałych bloków, w układzie - zgodnie ze schematem blokowym na rys. 2.1b - pojawiają się następujące elementy:

- filtry analogowe
- pamięci analogowe (układy próbkująco-pamiętające)
- multiplekser
- przetwornik analogowo-cyfrowy.

Najkosztowniejszym elementem tego zestawu jest przetwornik analogowo-cyfrowy. Względy ekonomiczne powodują więc, że współpracuje on z multi-

plekserem, umożliwiając stosowanie jednego przetwornika A/C do przetwarzania wielu napięć i prądów. Obecność multipleksera z kolei powoduje, że ważnym elementem układu stają się pamięci analogowe, chociaż nie są one niezbędne. Możliwe są tutaj dwa rozwiązania. Jedno, bez użycia pamięci analogowych, polega na pobieraniu przez multiplekser próbek sygnałów w wyznaczonych, określonych odstępach czasu, a powstałe przesunięcie fazowe jest korygowane w systemie mikroprocesorowym podczas wyznaczania wielkości kryterialnych. W drugim rozwiązaniu pamięci analogowe, odrębne dla każdego sygnału, zapamiętują wartość wszystkich sygnałów w tej samej chwili, a następnie multiplekser dostarcza je kolejno do przetwornika A/C, gdzie są przetwarzane do postaci cyfrowej i przesyłane do systemu mikroprocesorowego. Po pełnym cyklu multipleksa w pamięci analogowej zapamiętuje się kolejne próbki wszystkich sygnałów i przetwarzanie powtarza się. Ważnym elementem całego układu są filtry analogowe, których niezbędność wynika z procesu przekształcania sygnału ciągłego do analogowej postaci impulsowej. Proces ten, jak wiadomo, wiąże się z przekształcaniem sygnału o widmie ograniczonym w sygnał o widmie nieograniczonym. Chcąc zachować swobodę wyboru częstotliwości próbkowania, trzeba ograniczyć pasmo sygnałów tak, aby po próbkowaniu widma nie nakładały się. W przeciwnym przypadku mogą powstawać duże błędy oraz mogą być trudności z odtwarzaniem sygnału pierwotnego. Tak więc zadaniem filtrów analogowych jest ograniczenie widma sygnałów, a ich parametry są uzależnione od przyjętej częstotliwości próbkowania.

System mikroprocesorowy, oprócz sterowania pracą omawianych układów, jako główne zadanie realizuje funkcje przedstawione schematycznie na rysunku 2.1c. Funkcje te to: filtracja cyfrowa, realizacja algorytmów pomiarowych wielkości kryterialnych oraz ukształtowanie obszaru decyzyjnego i podjęcie decyzji opartych na nastawionych wektorach progowych. Spośród wymienionych funkcji najbardziej złożone i czasochłonne operacje na sygnałach cyfrowych związane są z filtracją cyfrową, mającą najczęściej na celu wyfiltrowanie spośród zakłóceń napięć i prądów o częstotliwości podstawowej. Zastosowanie właściwych filtrów cyfrowych, zbliżonych do optymalnych, warunkuje dokładność i szybkość pomiaru wielkości kryterialnych i te same własności procesu decyzyjnego. Naturalnie system mikroprocesorowy może realizować wiele innych funkcji, ważnych, lecz mniej istotnych pod względem rozważań prowadzonych tutaj, jak na przykład: samotesztowanie, współpraca z innymi systemami itp.

Parametry poszczególnych bloków zabezpieczeń cyfrowych zostaną omówione, zaś na zakończenie warto podkreślić, że oprócz ostatniego bloku realizującego podjęcie decyzji, cały układ jest złożonym, cyfrowym systemem pomiarowym.

2.2. Podstawowe wymagania metrologiczne i funkcjonalne

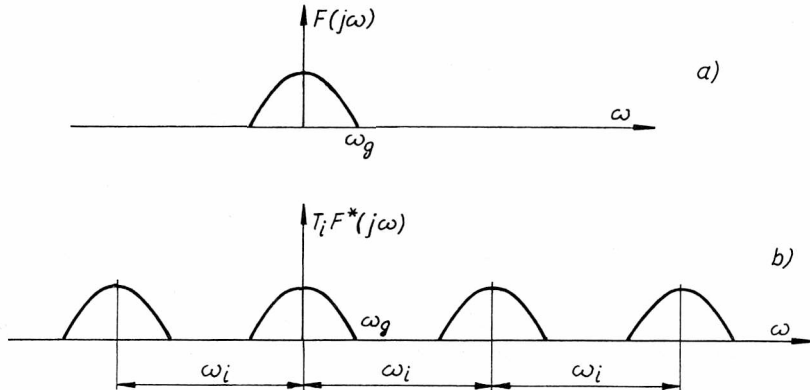
Cyfrowe zabezpieczenia elektroenergetyczne mają, jak wynika to z rys. 2.1, dwa wyraźnie wydzielone układy: analogowy oraz cyfrowy. Część analogowa, złożona z przekładników prądowych i napięciowych oraz przekładników pośredniczących, jest podobna jak w zabezpieczeniach analogowych. Wymagania stawiane tym elementom, ich własności i parametry, są dobrze znane, były i są przedmiotem intensywnych badań, których wyniki publikuje się od wielu lat. Są one też ujęte w normach krajowych i zagranicznych. Nieco więcej uwagi trzeba natomiast poświęcić części cyfrowej zabezpieczeń, a zwłaszcza układom, które są odpowiedzialne za przekształcanie sygnałów analogowych w ciąg próbek o wartościach danych w postaci cyfrowej. Są to układy umieszczone między punktami 1 i 2 na rys. 2.1b, a więc: filtry analogowe, pamięci analogowe, multiplekser oraz przetwornik A/C.

Parametry i wymagania stawiane tym układom trzeba rozpatrywać w kontekście stosowanej częstotliwości próbkowania ω_1 , której ograniczenie wynika z wykorzystywania do pomiaru wielkości kryterialnych napięć i prądów o częstotliwości podstawowej ω_1 i jednocześnie jest ona kompromisem związanym z konieczną rozdzielczością przetwornika A/C, wymaganą szybkością przetwarzania, kosztami, dokładnością oraz wydajnością systemu mikroprocesorowego. Ocenia się, że uzasadnione, wystarczające wartości wynoszą od 600 do 1600 Hz, to jest między 12 a 32 próbkami w okresie składowej podstawowej, przy czym wartości 600 lub 800 Hz uważa się za najlepiej wyważony kompromis między wymienionymi, sprzecznymi wymaganiami. Znając tę częstotliwość lub przedział, w której się ona znajduje, można już scharakteryzować wymagania w stosunku do innych elementów układu cyfrowego.

Filtry analogowe

Niezbędność stosowania filtrów analogowych wynika z twierdzenia Shannona o próbkowaniu, ograniczonej częstotliwości próbkowania oraz szerokiego pasma częstotliwości sygnałów - napięć i prądów systemu w stanie zaburzenia.

Niech sygnał $f(t)$ ma widmo $F(j\omega)$, będące transformatą Fouriera tej funkcji, o pasmie ograniczonym do maksymalnej częstotliwości ω_g , tak jak to przedstawiono na rys. 2.2a. Jeśli sygnał ten jest próbkowany z częstotliwością ω_1 , to widmo tego sygnału jest widmem sygnału ciągłego, powtarzanym w przedziale ω od $-\infty$ do ∞ w odstępach równym ω_1 , tak jak przedstawiono to na rys. 2.2b ($\omega_1 > 2\omega_g$). Można to też zapisać równaniami:



Rys. 2.2. Widma sygnału ciągłego (a) oraz dyskretnego (b) próbkowanego z częstotliwością ω_i
 Fig. 2.2. Spectra of continuous (a) and discrete (b) signals sampled with frequency ω_i

$$F\{f(t)\} = F(j\omega)$$

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kT_i) \quad (2.1)$$

$$T_i F\{f^*(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - k\omega_i)]$$

gdzie

T_i - okres próbkowania,

$\omega_i = 2\pi/T_i$,

$F\{\}$ - transformata Fouriera.

Widać na rysunku 2.2b, że wraz ze wzrostem ω_i poszczególne odbicia widma sygnału ciągłego oddalają się od siebie, a wraz ze zmniejszaniem ω_i zbliżają się. Dalsze zmniejszanie ω_i , poczynając od granicznej wartości $\omega_i = 2\omega_g$, powoduje nakładanie się widm i oryginalnego sygnału $f(t)$ nie można już odtworzyć, nawet po zastosowaniu idealnego filtra dolnoprzepustowego.

Przedstawiona sytuacja jest wyidealizowana, ponieważ widmo sygnału może być ograniczone do pewnego pasma tylko wtedy, gdy sygnał ten istnieje w nieskończonym przedziale czasu. Jednakże w rzeczywistości sygnał zawsze obserwuje się w przedziale skończonym i wobec tego jego widmo istnieje w nieskończonym pasmie. Sygnał ten po próbkowaniu będzie zawsze miał nakładające się widma, jeśli nie ograniczy się ich stosownymi filtrami analogowymi przed poddaniem procesowi dyskretyzacji.

Z przedstawionych rozważań wynikają wymagania dotyczące parametrów dolnoprzepustowych filtrów analogowych napięć i prądów:

a) pasmo zaporowe filtra powinno rozpoczynać się przy częstotliwości mniejszej niż połowa częstotliwości próbkowania;

b) wzmocnienie w pasmie zaporowym zależy od przewidywanej amplitudy składowych o częstotliwości wyższej niż połowa częstotliwości próbkowania obecnych w sygnale; wzmocnienie to najkorzystniej jest dobrać tak, aby amplitudy tych składowych po przejściu przez filtr były mniejsze od rozdzielczości przetwornika A/C;

c) szczególną uwagę należy zwrócić na tłumienie składowych o częstotliwości równej sumie częstotliwości identyfikowanej składowej podstawowej i wielokrotności częstotliwości próbkowania.

Przetwornik A/C

Przetwornik A/C jest jednym z bardziej kosztownych i odpowiedzialnych układów całego systemu cyfrowego. Powinien więc być wybrany bardzo starannie ze względu na stawiane mu wymagania, szczególnie, że wraz z poprawą jego parametrów koszty szybko wzrastają. Przetworniki analogowo-cyfrowe realizowane są przeważnie w wersji scalonej, a spośród wielu wielkości charakteryzujących ten układ, najważniejszymi dla użytkownika parametrami są: rozdzielczość i czas przetwarzania. Ten drugi parametr nie jest krytyczny, gdyż w technologii scalonej powszechne są przetworniki o czasach przetwarzania równych pojedynczym mikrosekundom. Przy stosowanych częstotliwościach próbkowania przetworzenie kilkunastu sygnałów z wykorzystaniem jednego przetwornika nie stanowi więc dużego problemu. Nieco inaczej jest z rozdzielczością. W wyniku przetwarzania sygnału analogowego w sygnał cyfrowy, reprezentowany za pomocą skończonej liczby bitów, następuje zaokrąglenie wartości sygnału do najbliższej wartości cyfrowej. Jeśli zakres analogowy przetwornika wynosi X_z , a sygnał cyfrowy jest reprezentowany za pomocą N bitów, to najmniejszy kwant sygnału rozróżniany przez przetwornik

$$q = \frac{X_z}{2^N - 1} \quad (2.2)$$

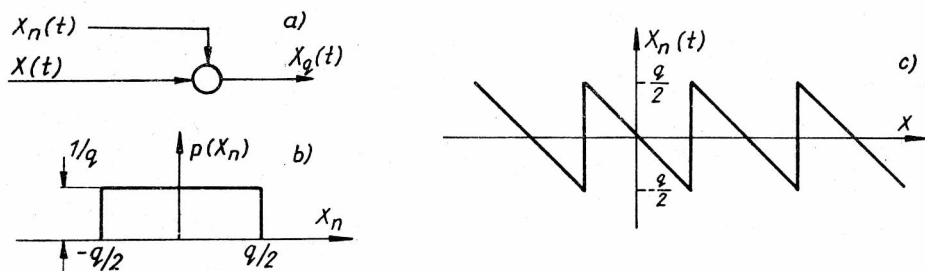
Przy założeniu zaokrąglania wartości przetwarzanej do najbliższej wartości cyfrowej (a większość scalonych przetworników to realizuje), błąd bezwzględny powodowany kwantyzacją wynosi połowę kwantu sygnału. Jednakże, podczas przetwarzania o mniejszej wartości niż zakres przetwornika, błąd bezwzględny jest równy także połowie kwantu, lecz rośnie błąd względny. Napięcia i prądy doprowadzane do zabezpieczeń cyfrowych podczas przetwarzania mogą zmieniać się w tak szerokim zakresie, że konieczne jest wyznaczenie dopuszczalnej wartości błędu przy minimalnej wartości przetwarzanej oraz dobór zakresu do wartości maksymalnej.

Kierunek zmian wartości jest w większości przypadków taki, że napięcie maleje od wartości nominalnej do kilku- lub kilkunastokrotnie mniejszej wartości minimalnej (w szczególnym przypadku jest ona bliska zeru), a prąd rośnie od wartości nominalnej do kilkanaście lub nawet kilkadziesiąt razy większych wartości. Ustalając wartość błędu względnego na poziomie ϵ oraz zakładając, że błąd powodowany kwantyzacją ma być mniejszy od ϵ dla minimalnego przetwarzanego sygnału ($X_{\min}$), otrzymuje się:

$$\frac{\frac{1}{2}q}{X_{\min}} = \frac{1}{2} \frac{X_z}{X_{\min}} \frac{1}{2^N - 1} \leq \epsilon \quad (2.3)$$

Przekształcenie zależności (2.3) pozwala na obliczenie wymaganej liczby bitów N i wynikającej z niej rozdzielczości (2.2) przetwornika A/C:

$$N \geq \frac{\log \left(\frac{1}{2} \frac{X_z}{\epsilon X_{\min}} + 1 \right)}{\log 2} \quad (2.4)$$



Rys. 2.3. Model procesu kwantyzacji (a), funkcja gęstości prawdopodobieństwa szumu kwantyzacji (b) oraz przebieg szumu w funkcji dyskretyzowanej wielkości x (c)

Fig. 2.3. A model of quantization process (a), probability density function of quantization noise (b) and the noise versus quantized value x (c)

Inna koncepcja obliczenia wymaganej rozdzielczości przetwornika A/C opiera się na modelu, w którym błąd kwantyzacji traktuje się jako zmienną losową [4]. W koncepcji tej wielkość cyfrowa jest traktowana jako suma odpowiadającej jej wielkości analogowej i szumu kwantyzacji (rys. 2.3a). Ponieważ wszystkie wielkości błędu z przedziału $\pm \frac{q}{2}$ (2.2) są jednakowo prawdopodobne, więc funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa jest taka jak na rys. 2.3b. Z kolei przebieg szumu kwantyzacji $x(t)$ w funkcji kwantowanej wielkości x przedstawiono na rys. (2.3c). Z obu rysunków widać, że wartość średnia szumu kwantyzacji jest zerowa, a jego wariancja jest wariancją rozkładu jednostajnego (2.3b):

$$\sigma^2 = \frac{q^2}{12} \quad (2.5)$$

Podstawiając do równania (2.5) zależność (2.2) otrzymuje się następujące odchylenie standardowe szumu kwantyzacji:

$$\sigma = \frac{X_z}{\sqrt{12}(2^N - 1)} \quad (2.6)$$

Jest to wartość odchylenia standardowego dla zakresu przetwornika o N bitach. Jeśli takie odchylenie standardowe ma być osiągnięte dla minimalnej przetwarzanej wielkości i ponieważ rośnie ono proporcjonalnie do ilorazu zakresu i tej wielkości, to można napisać równanie:

$$\sigma_0 = \frac{X_z}{\sqrt{12}(2^N - 1)} \frac{X_z}{X_{\min}} \quad (2.7)$$

gdzie σ_0 - odchylenie standardowe szumu kwantyzacji dla minimalnej przetwarzanej wielkości.

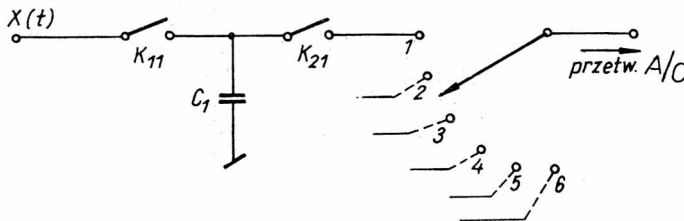
Po przekształceniach otrzymuje się wymaganą liczbę bitów przetwornika A/C; jeżeli odchylenie standardowe szumu kwantyzacji ma być mniejsze niż σ_0 , to:

$$N \geq \frac{\log \left[\frac{X_z}{\sqrt{12} \sigma_0 X_{\min}} \frac{X_z}{X_{\min}} + 1 \right]}{\log 2} \quad (2.8)$$

Zależności (2.4) i (2.8) są ekwiwalentnym sposobem obliczania rozdzielczości przetwornika A/C przy nieco innym traktowaniu błędów procesu dyskretyzacji sygnału.

Pamięci analogowe i multiplexer

Na rysunku 2.4 przedstawiono schematycznie jedną pamięć analogową oraz multiplexer. Działanie układu jest następujące: W pewnej chwili $t = nT_1$ następuje zamknięcie na krótką chwilę T_1 kluczy $K_{11} - K_{1n}$ i



Rys. 2.4. Schemat układu pamięci analogowej z multiplexserem
Fig. 2.4. A scheme of analog memory with multiplexer

naładowanie kondensatorów $C_1 - C_n$ do wartości szczytowych napięć $x_1(nT_1) - x_n(nT_1)$. W ten sposób zapamiętuje się próbki napięć w tej samej chwili. Następnie, korzystając z multipleksera, dokonuje się kolejno wyboru określonego wejścia 1 - n z jednoczesnym zamknięciem odpowiedniego z kluczy K_{21-n} . Napięcie istniejące na wybranym kondensatorze pamięci analogowej jest przetwarzane przez przetwornik A/C i zapamiętywane w postaci cyfrowej. Po przetworzeniu ostatniego z napięć cykl pracy powtarza się. Narysowane tu schematycznie styki multipleksera oraz pamięci analogowej są naturalnie realizowane elektronicznie z wykorzystaniem tranzystorów i scalonych multipleksów w technologii CMOS. Zapewnia to małą impedancję w stanie zamknięcia i bardzo dużą w stanie otwarcia. Dzięki temu możliwe jest uzyskiwanie małych stałych czasowych podczas ładowania kondensatora pamięci do wartości szczytowej oraz minimalne błędy powodowane jego rozładowaniem przed przetworzeniem do postaci cyfrowej. Cały problem zapewnienia odpowiednich własności pamięci analogowej i sterowanie nią jest przede wszystkim konstrukcyjny, a przy obecnej technologii i stosowanych częstotliwościach próbkowania uzyskiwanie dużych dokładności nie stwarza większych trudności.

3. MODELE SYGNAŁÓW I UKŁADÓW

Sygnałami wejściowymi układów zabezpieczeń są napięcia i prądy z obiektu zabezpieczanego, transformowane w układzie pomiarowym, tak jak to opisano w poprzednim rozdziale. Właściwe zaprojektowanie czy też badanie układu oraz algorytmów filtracyjnych i pomiarowych wymaga znajomości spodziewanych przebiegów tych napięć i prądów. Mogą one być uzyskane analitycznie jedynie w najprostszych przypadkach, to jest wtedy, gdy model obwodu zwarciovego był bardzo prosty. Rezultaty tych obliczeń prowadzą często do otrzymania przebiegów napięć i prądów, których postać odbiega od rzeczywistych mierzonych sygnałów zwarciovych. Tak więc często taki prosty model powinien być rozbudowany. Wówczas jednakże rozwiązania analityczne wiążą się z tak dużym nakładem obliczeniowym, że bardziej racjonalne jest opracowanie odpowiedniego modelu cyfrowego i uzyskanie napięć oraz prądów zwarciovych symulacyjnie. Łatwość symulacji różnych zmiennych parametrów pozwala na wyodrębnienie istotnych i mniej istotnych czynników wpływających na kształt napięć i prądów w warunkach powstałego zaburzenia systemu. Ponieważ ścisła analityczna postać tak uzyskanych napięć i prądów nie jest znana (i chyba byłaby mało użyteczna i przejrzysta), uzyskane symulacyjnie przebiegi odwzorowuje się pewnymi ich aproksymacjami, tworząc model sygnałowy. Liczne prace, których przykładem mogą być [46], [62], [165] opisują różne modele sygnałowe, które po-

wstały w ten sposób. W tych modelach sygnałowych wyodrębnia się na ogół dwie składowe: składową użyteczną oraz zakłócenia. Składowe użyteczne stanowią najczęściej napięcia i prądy o częstotliwości podstawowej, natomiast pozostałe składowe stanowią zakłócenia, które powinny być w maksymalnym stopniu tłumione przed zastosowaniem właściwego algorytmu pomiaru wielkości kryterialnej. Filtrowanie zakłóceń jest między innymi swego rodzaju redukcją rzędu modelu, w którym zostały one uzyskane. Ostatecznie więc przy skutecznym odfiltrowaniu zakłóceń można otrzymać prosty model, którego parametry mogą stanowić wykorzystywane wielkości kryterialne. Ten zredukowany model systemu, dla takich wielkości kryterialnych, jak wartości skuteczne sygnałów, moce czynna i bierna, odgrywa nieco mniejszą rolę. Jego postać ma jednak bardzo duże znaczenie wówczas, gdy obliczanie rezystancji i reaktancji jest oparte na rozwiązywaniu równania obwodu zwarciovowego, "zasilanego" napięciami i prądami systemu.

Ponieważ napięcia i prądy przechodzą długą drogę, zanim jako wartości cyfrowe wejdą do realizowanego algorytmu cyfrowego, istotne jest rozważenie, jak zmieniają się owe modele sygnałowe na tej drodze. Jest tu zwłaszcza istotne, jak zmienia się widmo sygnału, a konkretnie relacja między sygnałem użytecznym a zakłóceniami.

3.1. Model sygnałowy deterministyczny i sygnałowy model probabilistyczny

Stosowane modele sygnałowe można podzielić na trzy rodzaje:

- model sygnałowy całkowicie deterministyczny (np. [37], [145], [157])
- model częściowo deterministyczny [164]
- model probabilistyczny [47].

Najwcześniej stosowanym modelem był i nadal jest model całkowicie deterministyczny. W modelu tym zarówno sygnał użyteczny, jak też zakłócenia, uważane są za ściśle, zdeterminowane funkcje czasu, których parametry nie są znane. Zakres zmian niektórych z tych parametrów można przewidzieć, ocenić lub obliczyć (ewentualnie na drodze modelowej), inne z nich mogą być przewidziane w sensie znajomości wartości maksymalnych, a pewne na przykład fazy mogą być zupełnie dowolne. Tak określony model sygnałowy pozwala na zapisanie napięć i prądów obwodu zwarciovowego następującymi ogólnymi równaniami [86], [116], [145], [182]:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_u) + \sum_{k=1}^n U_{zk} \cos(\omega_k t + \varphi_{uk}) + \\
 &\quad + \sum_{m=1}^1 \exp(-t/T_{aum}) U_{zm} \cos(\omega_m t + \varphi_{um}) \quad (3.1) \\
 i(t) &= I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_i) + I_a \exp(-t/T_a) + \sum_{k=1}^n I_{zk} \cos(\omega_k t + \varphi_{ik}) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^1 \exp(-t/T_{aim}) \cos(\omega_m t + \varphi_{im})$$

gdzie:

$\omega_1, U_1, I_1, \varphi_u, \varphi_i$ - częstotliwość, amplitudy i fazy składowych podstawowych napięcia i prądu,

I_a, T_a - amplituda i stała czasowa zanikania składowej nieokresowej prądu,

$\omega_m, U_{zm}, I_{zm}, T_{aim}, T_{aum}, \varphi_{um}, \varphi_{im}$ - częstotliwości, amplitudy, stałe czasu zanikania oraz fazy zakłócających składowych oscylacyjnych napięć i prądów.

W powyższym modelu napięć i prądów oddzielono wyraźnie użyteczne składowe podstawowe oraz zakłócenia. W istocie liczba składowych zakłócających może być na ogół ograniczona do jednego dominującego w napięciu i dwu w prądzie (np. [145]), co pozwala na zapisanie zależności (3.1) w postaci uproszczonej:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_u) + \exp(-t/T_{au}) U_z \cos(\omega_z t + \varphi_{uz}) \\ i(t) &= I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_i) + I_a \exp(-t/T_a) + \\ &+ \exp(-t/T_{ai}) I_z \cos(\omega_z t + \varphi_{iz}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

W tak uproszczonych równaniach napięć i prądów można już pokusić się o sformułowanie najbardziej niekorzystnych warunków identyfikacji składowych podstawowych napięć i prądów. Można więc przewidywać, że występuje to wtedy, gdy składowa nieokresowa prądu ma najwyższą amplitudę, składowe oscylacyjne zanikają wolno, mają znaczne amplitudy, a ich częstotliwość jest niezbyt odległa od częstotliwości podstawowej. Szczegółowe parametry można uzyskać z badań modelowych chronionego elementu systemu elektroenergetycznego, co stanowi podstawę do oceny błędów identyfikacji wielkości kryterialnej przy zadanym algorytmie cyfrowej filtracji i pomiaru.

Drugi z omawianych modeli sygnałowych [164] zakłada, że identyfikowane składowe napięć i prądów mają charakter deterministyczny, a zakłócenie probabilistyczny. Napięcia i prądy zwarciove są tu opisane równaniami:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_u) + e_v(t) \\ i(t) &= I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_i) + I_a \exp(-t/T_a) + e_i(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie $e_v(t), e_i(t)$ - zakłócenia napięcia i prądu o charakterze procesu losowego.

Znajomość charakterystyk zakłóceń pozwala na określenie optymalnej zasady pomiaru parametrów napięć i prądów, a zatem i wielkości kryterialnych. Mierzone wielkości stają się teraz ich estymatami, gdyż stają się one, gdy zakłócenia są losowe, również zmiennymi losowymi. Szczególnie prostą zasadę estymacji optymalnej otrzymuje się, gdy zakłócenia są szumem białym normalnym o znanej funkcji gęstości mocy. Wówczas wartość oczekiwana błędu estymacji jest zerowa, a wielkość wariancji błędu zależy od widma gęstości mocy zakłóceń oraz czasu pomiaru. Funkcję gęstości mocy można określić na podstawie modelu cyfrowego chronionego fragmentu systemu, odpowiednio rozbudowanego, dla różnych zmiennych parametrów, takich jak na przykład: konfiguracja systemu, miejsce zwarcia, rezystancja przejścia w miejscu zwarcia, faza, przy której nastąpiło zaburzenie itp. Widmo gęstości mocy szumu białego jest widmem stałym w całym przedziale częstotliwości i jeśli uzyskane modelowo widmo nie odbiega znacznie od płaskiego, estymacja jest niemal dokładnie optymalna, a wartość wariancji błędów określi się dla maksymalnej wartości widma. Gdy widmo empiryczne odbiega bardzo znacznie od widma szumu białego, można albo rozbudować model sygnałowy (3.3) i otrzyma się stosownie rozbudowaną zasadę estymacji optymalnej, lub też można pozostać przy tym samym modelu, godząc się na rozwiązania prostsze i zasadę suboptymalną, lecz wówczas konieczne jest określenie, jakie błędy wynikają z takiego postępowania.

Trzeci z omawianych modeli sygnałowych może być opisany równaniami:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_d \cos \omega_1 t + U_q \sin \omega_1 t + e_u(t) \\ i(t) &= I_d \cos \omega_1 t + I_q \sin \omega_1 t + I_a \exp(-t/T_a) + e_i(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

W modelu tym zakłada się, że U_d , U_q , I_d , I_q , I_a są niezależnymi zmiennymi losowymi normalnymi (o rozkładzie normalnym), a zakłócenia są niezależnymi szumami białymi normalnymi.

Równania (3.4) prowadzą do modelu zmiennych stanu i estymacji optymalnej, która jest realizowana za pomocą filtru Kalmana [2]. Filtr ten, jak i sam model sygnałowy, omówiono w rozdz. 6.

3.2. Współzależność modeli sygnałów i układów pierwotnych

Wspomniano już uprzednio, że filtrowanie zakłóceń napięć i prądów, stosowanych następnie do obliczania wielkości kryterialnych, ma między innymi znaczenie dla redukcji rozmiaru modelu układu, w którym te sygnały powstały. Powiązanie modeli sygnałów i układu ma mniejsze znaczenie, gdy wielkościami mierzonymi są amplitudy, wartości skuteczne czy też moce. Nie ma to również istotnego wpływu wtedy, gdy zakłócenia są odpowiednio tłumione i korzysta się z obliczonych mocy oraz amplitud do określenia rezystancji lub reaktancji. Jeśli jednak określenie tych wielkości

jest oparte na rozwiązywaniu równania obwodu zwarciovowego, to problem nabiera zasadniczego znaczenia. Aby to zilustrować załóżmy, że przyjęto najprostszy model tego obwodu dany równaniem:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + R i(t) \quad (3.5)$$

Nie wnikając tutaj w szczegóły uzyskiwania dwu równań potrzebnych do obliczenia poszukiwanych wartości R i L , można jedynie stwierdzić, że ich rozwiązywanie jest oparte na rzeczywistym napięciu $u(t)$ i prądzie $i(t)$ systemu. Pochodna prądu jest co prawda niedostępna pomiarowo, lecz można ją obliczyć. Istotne są natomiast tutaj dwa czynniki: wierności modelu obwodu zwarciovowego oraz wierności sygnałów transformowanych w układzie pomiarowym. Po rozważeniu pierwszego czynnika można stwierdzić, że jeśli model opisany równaniem (3.5) był dokładny, to obliczone z tego równania wielkości R i L na podstawie rzeczywistych $u(t)$ i $i(t)$ też byłyby dokładne. Jeśli jednak wyniki są obciążone błędem, to oznacza to nieadekwatność modelu układu, modelu sygnałowego i sygnałów rzeczywistych. Jest możliwe w tej sytuacji albo rozbudowanie równania (3.5) o czynnik błędu modelowania $e(t)$ i poszukiwanie optymalnej metody jego rozwiązania, albo zwiększenie rzędu modelu i równania (uwzględniając równoległe pojemności), albo też filtracja sygnałów napięcia i prądu. Pierwsze dwa sposoby są skuteczne i prowadzą do dobrych wyników, lecz niestety bardzo rozbudowują algorytmy pomiarowe. Sposób trzeci jest chyba najprostszy, lecz wymaga zwrócenia uwagi na pewien dodatkowy problem. W celu jego zilustrowania można posłużyć się bardzo uproszczoną analizą. Załóżmy dla uproszczenia zerowe warunki początkowe równania (3.5). Obliczając jego transformatę Laplace'a otrzyma się

$$\frac{U(s)}{I(s)} = R + sL \quad (3.6)$$

gdzie $U(s)$, $I(s)$ - są transformatami Laplace'a napięcia i prądu z obiektu zabezpieczonego.

Założwszy, że operatorowe transmitancje toru pomiarowego oraz stosowanych filtrów napięcia i prądu są równe $G_U(s)$ i $G_I(s)$ można przyjąć, iż napięcie i prąd użyte w rozwiązywaniu równania (3.6) będą dane równaniami:

$$\begin{aligned} U'(s) &= G_U(s) U(s) \\ I'(s) &= G_I(s) I(s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Podstawiając (3.7) do równania (3.6) otrzymuje się:

$$\frac{U'(s)}{I'(s)} = R + sL$$

czyli

$$\frac{U(s)}{I(s)} = \frac{G_I(s)}{G_U(s)} (R + sL) \quad (3.8)$$

Tak więc równanie (3.8) oraz (3.6) są identyczne tylko wtedy, gdy łączne charakterystyki dynamiczne toru pomiarowego i filtrów napięcia oraz prądu są identyczne. Prowadzi to do wniosku, że metody pomiaru wielkości kryterialnych z zastosowaniem równań obwodu zwarciovego wymagają dużej ostrożności.

3.3. Transformacja sygnałów w torze pomiarowym

Miedzy systemem a układami pamięci analogowej, które zapoczątkowują dyskretną część układu pomiarowego, napięcia i prądy przechodzą przez szereg układów pośredniczących, które mogą przekształcać zarówno składowe użyteczne, jak i zakłócenia. Układy te to (rys. 2.1a,b): przekładniki napięciowe i prądowe, przekładniki pośredniczące oraz filtry analogowe. Bez wątpienia, przy stosowanych w praktyce częstotliwościach próbkowania, najbardziej ograniczone pasmo mają dolnoprzepustowe filtry analogowe. Z kolei przekładniki pośredniczące mają płaską, szerokopasmową charakterystykę i można przyjąć, że nie przekształcają one ani składowej podstawowej, ani zakłóceń. W tej sytuacji ewentualne odkształcenia czy przekształcenia sygnałów o modelach danych równaniami (3.2)-(3.4), związane są z przekładnikami napięciowymi i prądowymi (oprócz ograniczenia pasma).

Przeważnie stosowane przekładniki to indukcyjne i pojemnościowe przekładniki napięciowe oraz indukcyjne przekładniki prądowe. Największe zagrożenie odkształceń sygnałów dotyczy prądów i związane jest z niebezpieczeństwem nasycenia rdzenia przekładnika prądowego, spowodowanego składową nieokresową o znacznej wartości. Skutkiem tego jest duże odkształcenie składowej podstawowej prądu, któremu można zapobiegać przez przeciwdziałanie nasyceniu. Może ono polegać na stosowaniu przekładników odpowiednich konstrukcji, wykorzystaniu stosownych układów zewnętrznych, lub też na skróceniu czasu pomiaru tak, aby został on zakończony zanim przekładnik się nasyci [185]. Inne czynniki odgrywają mniejszą rolę i przekładniki transformują poprawnie sygnały w dość szerokim pasmie. Zagadnienie związane z parametrami tej transformacji stanowią odrębny obszerny problem i, aby nie rozważać zbyt dużej liczby szczegółów zaciemniających główny wątek pracy, zakłada się liniowość przekładników oraz stałość ich charakterystyki częstotliwościowej w pasmie przepuszczania filtra analogowego. Przy tych założeniach napięcia oraz prądy opisane modelem sygnałowym (3.2) nie ulegają istotnym zmianom w wyniku transformacji przez przekładniki napięciowe i prądowe. Natomiast szum biały wystę-

pujący w modelach (3.3) i (3.4) ma ograniczone pasmo albo skutek stosowania filtra analogowego, albo też transformacji przez przekładniki, i staje się szumem kolorowym. Projektowanie filtrów optymalnych z takim modelem szumu jest bardzo złożone i częściej stosuje się model szumu białego otrzymując filtr suboptymalny. Zazwyczaj ten filtr nie różni się znacznie od filtra ściśle optymalnego.

4. MIERZONE WIELKOŚCI KRYTERIALNE

4.1. Wprowadzenie

Systemy zabezpieczeń elektroenergetycznych w zależności od ich stopnia złożoności wykorzystują do podjęcia decyzji jedną, kilka lub wiele mierzonych wielkości. Określenie warunków kryterialnych i stwierdzenie, czy wielkości mierzone znajdują się odpowiednio w obszarze działania czy niedziałania zabezpieczeń może być realizowane dwoma sposobami. W pierwszym przypadku nie dokonuje się bezpośredniego pomiaru wielkości kryterialnych, a odpowiednia kombinacja sygnałów i warunków kryterialnych pozwala przez komparację na stwierdzenie, czy mierzone wielkości znajdują się w obszarze działania zabezpieczenia (por. rys. 2.1a). Sposób ten jest charakterystyczny dla zabezpieczeń analogowych i z dobrym skutkiem jest do dzisiaj stosowany. W drugim przypadku dokonuje się bezpośredniego pomiaru wielkości kryterialnych, które następnie są porównywane z wartościami tych wielkości, odpowiadającymi warunkom działania zabezpieczenia. Ten sposób jest charakterystyczny dla zabezpieczeń cyfrowych, co ma obszerne odzwierciedlenie w literaturze [14], [17], [35], [41], [46], [61], [92], [94], [120], [132], [142]. Taka linia podziału ma swoje uzasadnienie w możliwościach technicznych przetwarzania sygnałów analogowych i cyfrowych. W technice analogowej mnożenie sygnałów przez stałą i komparacja są łatwe do zrealizowania, ale mnożenie, dzielenie, przesuwanie fazy czy też całkowanie w zadanym przedziale wiąże się z pewnymi trudnościami i ma swoje skutki dynamiczne. Z kolei te właśnie operacje są łatwo realizowane w technice cyfrowej, umożliwiając bezpośredni pomiar wielkości kryterialnych.

Bezpośredni pomiar ma duże zalety w precyzyjnym wyborze obszaru działania zabezpieczeń. Może on w tym przypadku być ukształtowany zupełnie dowolnie, co jest tylko kwestią rozbudowy zależności logicznych prowadzących do podjęcia decyzji.

Mierzonymi wielkościami kryterialnymi, które będą rozważane w tej pracy, są:

- wartości skuteczne lub amplitudy prądów i napięć
- moce czynna i (lub) bierna

- składowe impedancji: rezystancja i reaktancja lub składowe admitancji: konduktancja i susceptancja.

Cyfrowy pomiar wymienionych wielkości jest obszernie reprezentowany w literaturze np. [6],[41],[62],[94]. Można tu zauważyć, że metody i algorytmy pomiaru prostszych wielkości kryterialnych powstają jakby na marginesie metod pomiaru składowych impedancji, stanowiących wielkości kryterialne najbardziej skomplikowanych zabezpieczeń, którymi są zabezpieczenia odległościowe linii. Na przykład rezystancja obwodu zwarciovego może być łatwo obliczona jako iloraz mocy czynnej i kwadratu amplitudy prądu. Sekwencja typu: sygnały (prądy i napięcia)-parametry sygnałów-proste wielkości kryterialne-złożone wielkości kryterialne, jest więc w pewnym sensie charakterystyczna. Naturalną tego konsekwencją jest cała grupa metod, w których do obliczenia wszystkich wymienionych wielkości kryterialnych wykorzystuje się ten sam zbiór składowych sygnałów, to jest składowych ortogonalnych. Cechą charakterystyczną tych metod jest to, że stanowią prosty, naturalny i bardzo spójny system pomiarowy.

Oprócz wymienionych tu metod stosuje się też inne, które są charakterystyczne tylko dla pomiaru wybranych wielkości, a także często wywodzą się z metod analogowych. Zaliczyć do nich trzeba uśrednienie wartości bezwzględnych lub kwadratów napięć i prądów w celu pomiaru amplitudy, czy też uśrednienie iloczynów prądów i napięć w celu pomiaru mocy. Często metodą jest również bezpośrednie rozwiązywanie równań modelu obwodu zwarciovego w celu obliczania rezystancji i reaktancji tego obwodu. Zarówno te pierwsze, jak i te ostatnie, mają swoją obszerną literaturę [61],[62],[63],[131], a ich zalety i wady są dobrze znane.

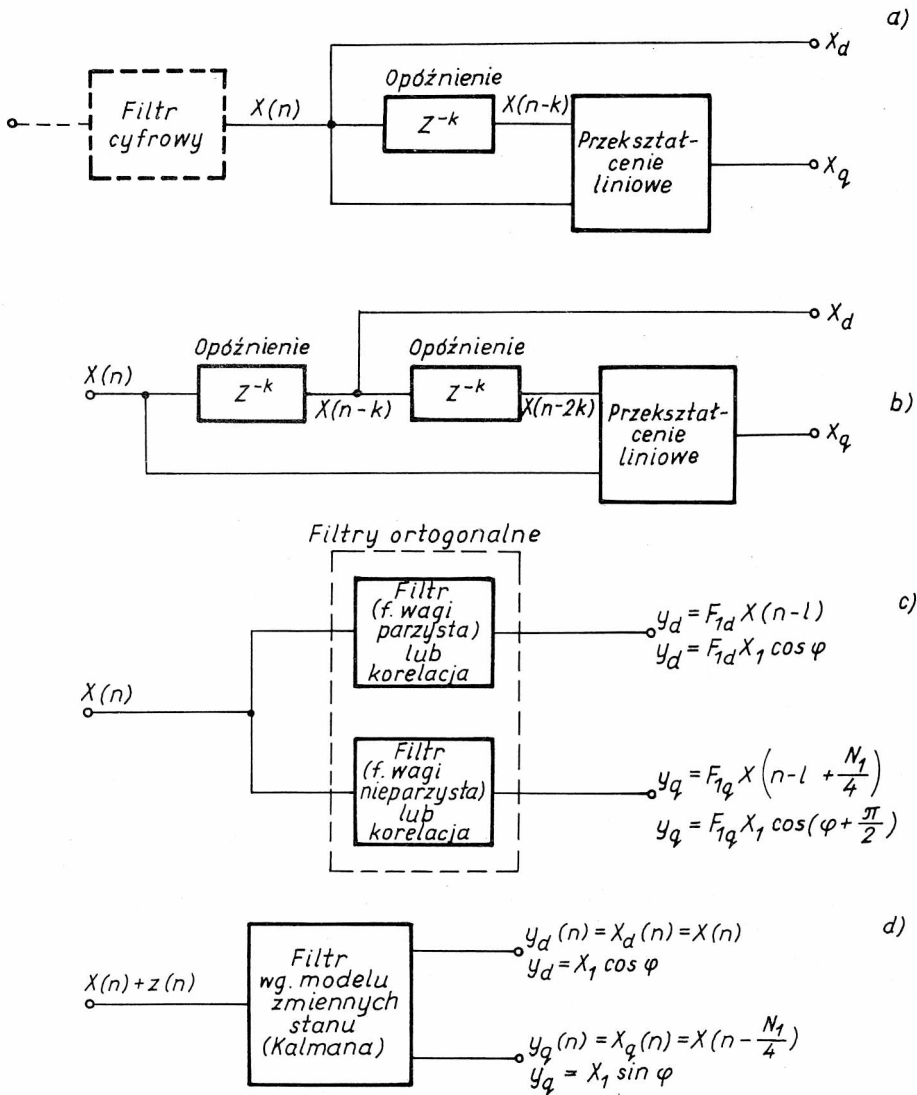
Jeszcze w jednej grupie metod stosuje się opóźnienia i liniowe przekształcenia sygnałów [41],[94]. Nie ma jednak potrzeby wydzielania tej grupy metod, ponieważ omawiane przekształcenia prowadzą do uzyskiwania składowych ortogonalnych, czego autorzy wyraźnie nie eksponują. Metody te należą więc do grupy pierwszej. Trzeba tu także dodać, że liniowa kombinacja sygnałów opóźnionych stanowi przecież filtr cyfrowy, którego charakterystyki są zależne od wartości opóźnienia i tej liniowej kombinacji. Tego faktu także w pracach [41],[94] nie omawia się, a ma to istotny wpływ na charakterystyki częstotliwościowe stosowanego algorytmu pomiaru. Zagadnienie to będzie omówione w następnym podrozdziale, w którym zawarto analizę i syntezę różnych metod wyznaczania składowych ortogonalnych sygnałów. Przedtem konieczne jest jednak wyjaśnienie dwu pojęć, które będą używane w kolejnych podrozdziałach: składowe ortogonalne sygnały oraz sygnały ortogonalne. To drugie pojęcie ma prostą definicję, analogiczną do iloczynu skalarnego wektorów. Otóż dwa sygnały są ortogonalne w pewnym przedziale T , jeśli całka ich iloczynu w tym przedziale jest zerowa [79]. Pojęcie to jest wykorzystywane na przykład do poszukiwania ortogo-

nalnych funkcji wagi filtrów (rozdz. 5). Drugie z pojęć, pojęcie składowych ortogonalnych jednego sygnału, dotyczy składowych zespolonego wektora $X e^{j(\omega t + \varphi)}$, nazywanego dalej fazorem. Jeśli przyjęto układ współrzędnych prostokątnych taki, że na jednej z osi jest odkładana część rzeczywista tego fazora, a na drugiej część urojona, to te dwie składowe fazora stanowią dwa ortogonalne wektory, będące funkcjami czasu. Na podstawie znajomości jednej ze składowych, na przykład jak przyjęto dalej - składowej fazora według osi rzeczywistej (jego rzutu na tę oś) - można wyznaczyć drugą składową na podstawie liniowej kombinacji różnie opóźnionej składowej rzeczywistej lub odpowiedniego filtru. Ten proces wyznaczania składowej ortogonalnej do znanej składowej fazora nazwano dalej ortogonalizacją. A więc, znając sygnał $X \cos(\omega_1 t + \varphi)$ należy wyznaczyć $X \sin(\omega_1 t + \varphi)$, co pozwala, przy znanej częstotliwości ω_1 , na pełną identyfikację fazora, to znaczy jego amplitudy X i fazy φ . Należy tu jeszcze dodać, że można przyjąć układ współrzędnych, który obraca się z taką samą prędkością kątową jak fazor i wówczas jego składowe nie będą jak poprzednio funkcjami czasu, lecz rzutami fazora na osie w chwili t równej zero ($X \cos \varphi$, $X \sin \varphi$). Takie składowe wyznacza się w metodach korelacji (rozdz. 5).

4.2. Metody otrzymywania składowych ortogonalnych sygnałów i ich charakterystyki

Metody i algorytmy pomiaru wielkości kryterialnych wykorzystujące ortogonalne składowe napięć i prądów są tak często stosowane, że w związku z nimi opracowano wiele sposobów ortogonalizacji sygnałów. Wszystkie one mogą być sprowadzone do metod przedstawionych schematami blokowymi na rys. 4.1a-d. Te schematy blokowe odzwierciedlają dwie grupy metod różnych pod względem funkcjonalnym.

W pierwszym przypadku (rys. 4.1a,b) procesy cyfrowej filtracji i ortogonalizacji są rozdzielone. Wobec tego w tych przypadkach, gdy filtracja sygnału nie jest konieczna, możliwe jest dokonanie jedynie ortogonalizacji zgodnie z przedstawionymi schematami blokowymi. Jeśli jednak sygnał jest na tyle zakłócony, że jego filtracja cyfrowa jest konieczna, to układ ortogonalizacji jest poprzedzony odpowiednim filtrem (blok zaznaczony linią przerywaną na rys. 4.1a). Podobny filtr może poprzedzać układ ortogonalizacji przedstawiony na rys. 4.1b. W drugim przypadku (rys. 4.1c,d) procesy filtracji i ortogonalizacji sygnałów są zespolone. Wymagane przetwarzanie sygnałów jest dokonywane z wykorzystaniem pary cyfrowych filtrów ortogonalnych (rys. 4.1c) lub filtru stanowego Kalmana (rys. 4.1d). Szczegółowe własności tych filtrów cyfrowych zostaną omówione w rozdz. 5 i 6, natomiast poniżej rozważono cechy wydzielonych metod ortogonalizacji.



Rys. 4.1. Metody uzyskiwania składowych ortogonalnych sygnałów: a - pojedyncze opóźnienie, b - podwójne opóźnienie, c - para filtrów ortogonalnych, d - filtr według modelu zmiennych stanu

Fig. 4.1. Methods of extraction of orthogonal signal components: a - single delay, b - double delay, c - a pair of orthogonal filters, d - a filter using state space model

Niech niezakłócony sygnał wejściowy x będzie w postaci ciągłej i dyskretniej opisany równaniami:

$$x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (4.1a)$$

$$x(n) = X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (4.1b)$$

gdzie

T_1 - okres próbkowania, (częstotliwość próbkowania $\omega_1 = 2\pi/T_1$),

nT_1 - czas dyskretny; $n = 0, 1, 2 \dots$

Założmy dalej, że sygnał opisany równaniem (4.1) stanowi jego składowa bezpośrednia, wobec tego składowa ortogonalna jest opisana funkcją sinus tego samego argumentu:

$$\begin{aligned} x_d(n) &= x(n) \\ x_q(n) &= X_1 \sin(n \omega_1 T_1 + \varphi) \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie x_d - składowa bezpośrednia, x_q - składowa kwadraturowa.

Poszukiwaną składową ortogonalną $x_q(n)$ należy otrzymać w wyniku liniowej kombinacji sygnału $x(n)$ oraz sygnału opóźnionego $x(n - k)$ (rys. 4.1a - opóźnienie jest tam reprezentowane operatorem opóźnienia z^{-k}). Określenie tej składowej ortogonalnej sprowadza się, jak łatwo zauważyć, do rozwiązania następującego układu równań:

$$\begin{aligned} x(n) &= x_d(n) \\ x(n - k) &= X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi) \cos(k \omega_1 T_1) + X_1 \sin(n \omega_1 T_1 + \varphi) \sin k \omega_1 T_1 = x_d(n) \cos k \omega_1 T_1 + x_q(n) \sin k \omega_1 T_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Rozwiązanie to jest opisane równaniami:

$$\begin{aligned} x_d(n) &= x(n) \\ x_q(n) &= \frac{x(n - k) - x(n) \cos(k \omega_1 T_1)}{\sin(k \omega_1 T_1)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Równania (4.4) pozwalają na stwierdzenie, że po pierwsze: składowa ortogonalna $x_q(n)$ może być obliczana łatwiej lub trudniej w zależności od opóźnienia dyskretnego k , a po drugie: ta ortogonalizacja jest filtrem cyfrowym sygnału $x(n)$. Przykładowo, szczególnie prostą postać równań otrzymuje się, gdy sygnał jest opóźniony o jedną czwartą okresu i wówczas

$$\begin{aligned} x_d(n) &= x(n) \\ x_q(n) &= x(n - k) \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie $k = T_1/4T_1 = N_1/4$.

Podobnie postępuje się podczas wyznaczania składowej ortogonalnej z zastosowaniem dwukrotnego opóźnienia sygnału (rys. 4.1b), to jest z użyciem $x(n)$, $x(n - 2k)$. Przyjmuje się tutaj, że składową bezpośrednią stanowi sygnał pojedynczo opóźniony, a stąd wynikają następujące równania:

$$\begin{aligned}x_d(n) &= x(n - k) = X_1 \cos[(n - k) \omega_1 t + \varphi] \\x_q(n) &= X_1 \sin[(n - k) \omega_1 t + \varphi]\end{aligned}\quad (4.6)$$

oraz

$$\begin{aligned}x(n) &= x_d(n) \cos(k \omega_1 T_1) - x_q(n) \sin(k \omega_1 T_1) \\x(n - 2k) &= x_d(n) \cos(k \omega_1 T_1) + x_q(n) \sin(k \omega_1 T_1)\end{aligned}\quad (4.7)$$

Rozwiązanie tego układu równań określa sposób wyznaczania składowych ortogonalnych z zastosowaniem podwójnego opóźnienia sygnału

$$\begin{aligned}x_d(n) &= x(n - k) \\x_q(n) &= \frac{x(n - 2k) - x(n)}{2 \sin(k \omega_1 T_1)}\end{aligned}\quad (4.8)$$

I w tym wypadku przekształcenie sygnałów odpowiada pewnemu filtrowi cyfrowemu, którego charakterystyki zależą od k , jak też dla pewnych k otrzymuje się szczególnie proste zależności. Na przykład, gdy opóźnienie sygnału jest równe $\pi/6$, równania (4.8) mają postać:

$$\begin{aligned}x_d(n) &= x(n - k) \\x_q(n) &= x(n - 2k) - x(n)\end{aligned}\quad (4.9)$$

gdzie $k = T_1/12T_1 = N_1/12$.

Porównując równania (4.5) i (4.9) można dojść do wniosku, że w szczególnych przypadkach opóźnienie pojedyncze pozwala na prostsze uzyskanie składowych ortogonalnych. Ten jeden parametr jest jednak niewystarczający, by scharakteryzować i porównać obie metody ortogonalizacji. Decydują o tym przynajmniej trzy wielkości, zależne od wartości opóźnień sygnału; są to: sama wartość opóźnienia sygnału warunkująca dynamikę pomiaru określonych wielkości, prostota równań (4.4) i (4.8) oraz charakterystyka częstotliwościowa ortogonalizacji, determinująca łączną charakterystykę częstotliwościową algorytmu pomiaru. Wartości opóźnień oraz współczynników w równaniach (4.4) i (4.8) otrzymuje się natychmiast, natomiast charakterystyki częstotliwościowe ortogonalizującego filtra cyfrowego w obu omawianych przypadkach uzyskuje się po prostych przekształceniach tych równań. Sposób postępowania zilustrowano na przykładzie ortogonalizacji z pojedynczym opóźnieniem sygnału.

Obliczmy najpierw transformatę Z obu stron drugiego z równań (4.4). Uzyskuje się wówczas następujące równanie:

$$Z\{x_q(n)\} = X_q(z) = \frac{z^{-k} - \cos(k \omega_1 T_1)}{\sin(k \omega_1 T_1)} X(z) \quad (4.10)$$

gdzie $z = e^{sT_1}$ - operator opóźnienia.

Pierwszy człon równania (4.10) określa dyskretną transmitancję analizowanego filtra cyfrowego. Po oznaczeniu jej przez $G_1(z)$ oraz podstawiając $s = j\omega$ w operatorze opóźnienia, otrzymuje się widmo filtra

$$G_1^*(j\omega) = \frac{e^{-jk\omega T_1} - \cos(k\omega_1 T_1)}{\sin(k\omega_1 T_1)} \quad (4.11)$$

Postępując identycznie z drugim z równań (4.8), otrzymuje się widmo filtra ortogonalizującego z zastosowaniem dwukrotnego opóźnienia sygnału

$$G_2^*(j\omega) = j \frac{\sin(k\omega T_1)}{\sin(k\omega_1 T_1)} e^{-jk\omega T_1} \quad (4.12)$$

Moduły oraz argumenty widm tych filtrów, wynikające bezpośrednio z równań (4.11) i (4.12), są określone następująco:

$$|G_1^*(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \cos^2(k\omega_1 T_1) - 2\cos(k\omega_1 T_1)\cos\left(\frac{\omega}{\omega_1} k\omega_1 T_1\right)}}{\sin(k\omega_1 T_1)} \quad (4.13a)$$

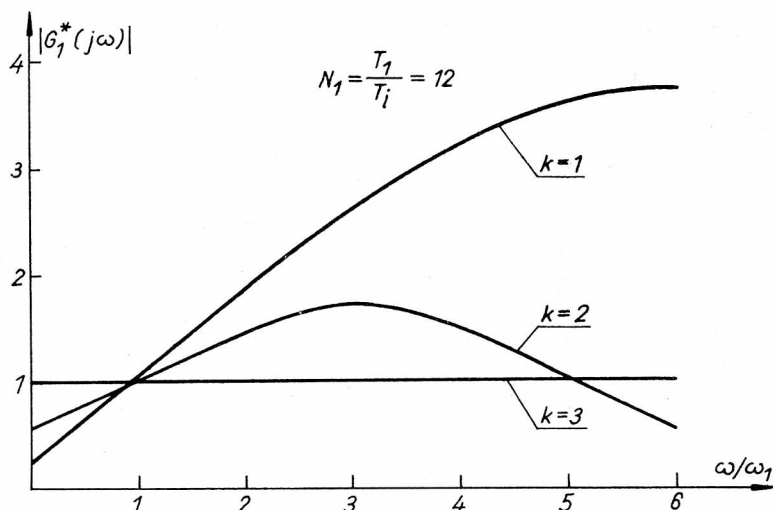
$$|G_2^*(j\omega)| = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{\omega_1} k\omega_1 T_1\right)}{\sin(k\omega_1 T_1)} \quad (4.13b)$$

$$\arg G_1^*(j\omega) = \arctg \frac{\sin\left(\frac{\omega}{\omega_1} k\omega_1 T_1\right)}{\cos(k\omega_1 T_1) - \cos\left(\frac{\omega}{\omega_1} k\omega_1 T_1\right)} \quad (4.13c)$$

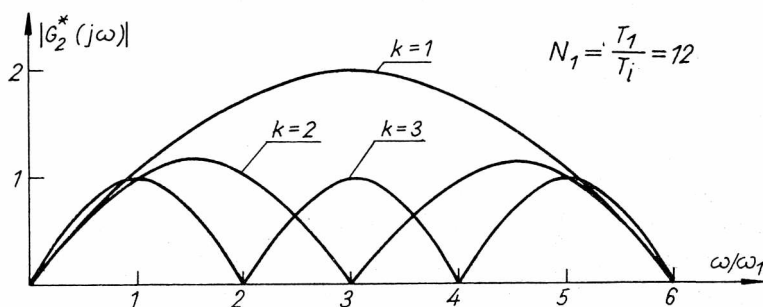
$$\arg G_2^*(j\omega) = \frac{\pi}{2} - k\omega T_1 \quad (4.13d)$$

Dwa ostatnie wzory wskazują, że gdy stosuje się podwójne opóźnienie sygnału, wzajemny argument jest niezależny od częstotliwości (jedna składowa ma argument $-k\omega T_1$, a druga $\pi/2 - k\omega T_1$), czyli składowe przy odchyleniu częstotliwości pozostają ortogonalne, gdy tymczasem przy opóźnieniu pojedynczym tak nie jest. Tak więc przy niewielkich odchyłkach częstotliwości powstają błędy ortogonalizacji związane ze zmianą modułu i argumentu, gdy opóźnienie jest pojedyncze oraz tylko zmianą modułu podczas ortogonalizacji z podwójnym opóźnieniem.

Moduły widm ((4.13a), (4.13b)), świadczące o zdolnościach filtracyjnych sygnału w procesie ortogonalizacji, przedstawiono na rys. 4.2 i 4.3 przy przyjętej przykładowo częstotliwości próbkowania 600 Hz, odpowiadającej dwunastu próbkom w okresie składowej podstawowej $T_1/T_i = 12$, dla różnych opóźnień sygnału kT_i ($k = 1, 2, 3$). Jak widać z tych rysunków, zwiększenie wartości opóźnienia poprawia charakterystyki widmowe i zwiększa skuteczność filtracji sygnału. Można też zauważyć, że charakterystyka widmowa, gdy stosuje się podwójne opóźnienie sygnału jest korzystniejsza niż przy opóźnieniu pojedynczym. Oba te spostrzeżenia są jeszcze jed-



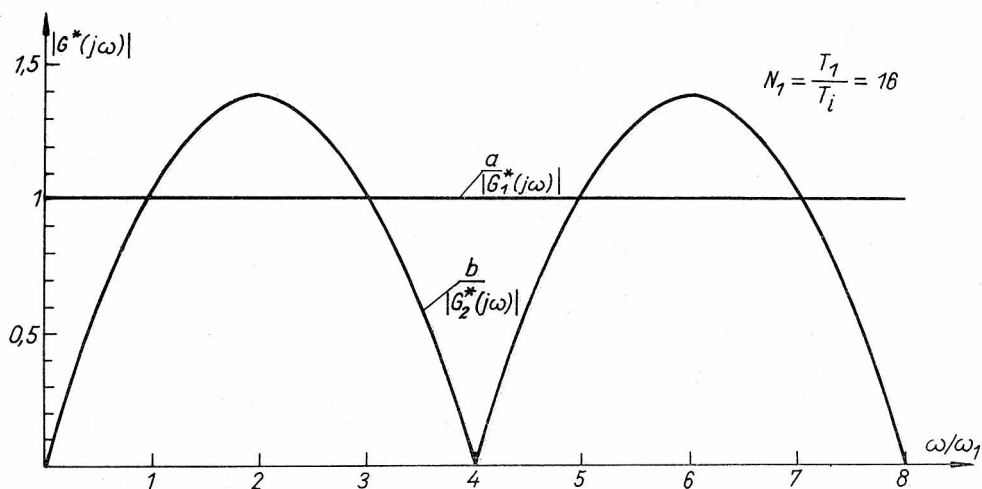
Rys. 4.2. Widma filtru ortogonalizującego z zastosowaniem pojedynczego opóźnienia sygnału przy różnych wartościach opóźnienia ($k = 1, 2, 3$)
 Fig. 4.2. Spectra of orthogonalizing filter using single delay for different delay values ($k = 1, 2, 3$)



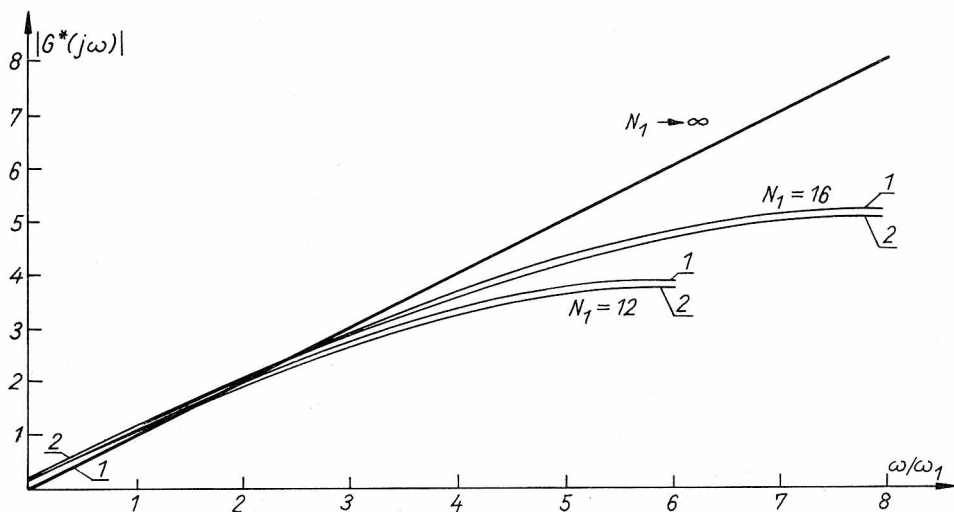
Rys. 4.3. Widma filtru ortogonalizującego z zastosowaniem podwójnego opóźnienia sygnału przy różnych wartościach opóźnienia (k - liczba próbek opóźnienia)

Fig. 4.3. Spectra of orthogonalizing filter using double delay for different delay values (k - number of samples)

na ilustracją znanego dylematu szybkość-dokładność. Najgorszy przypadek odpowiada pojedynczemu opóźnieniu sygnału o jeden okres impulsowania (rys. 4.2, $k = 1$). Wówczas w wyniku ortogonalizacji ewentualne wysoko-częstotliwościowe składowe zakłócające są wzmacniane i stają się istotnym źródłem błędów pomiaru wielkości kryterialnych. Optymalny natomiast wydaje się przypadek opóźnienia sygnału o kąt $\pi/2$ (to znaczy $k = \pi/2 \omega_1 T_i = N_1/4$), dając proste równanie ortogonalizacji (4.5) i płaską charakterystykę widmową ($k = 3$ na rys. 4.2), chociaż opóźnienie zwią-



Rys. 4.4. Przypadek szczególny widm filtrów ortogonalizujących z wykorzystaniem: a - pojedynczego, b - podwójnego opóźnienia sygnału przy tej samej efektywnej wartości opóźnienia
 Fig. 4.4. Particular case of orthogonalizing filters spectra using: a - single, b - double signal delay for the same effective delay value



Rys. 4.5. Widma wybranych metod ortogonalizacji: różniczkowanie ciągłe ($N_1 \rightarrow \infty$); 1 - różniczkowanie dyskretne; 2 - opóźnienie sygnału ($k = 1$)
 Fig. 4.5. Spectra of chosen methods of orthogonalization: continuous differentiation ($N_1 \rightarrow \infty$); 1 - discrete differentiation; 2 - signal delay ($k = 1$)

zane z ortogonalizacją - i w konsekwencji opóźnienie pomiaru - jest znaczne.

Na rysunku 4.4 przedstawiono dodatkowo przykładowe charakterystyki widmowe $G_1^*(j\omega)$ i $G_2^*(j\omega)$ dla tego samego efektywnego opóźnienia - to znaczy gdy $N_1 = 16$, $k = 4$ w ortogonalizacji z opóźnieniem pojedynczym oraz $k = 2$ z opóźnieniem podwójnym. Jak widać, charakterystyki widmowe są w zasadzie korzystniejsze, a i równania ortogonalizacji prostsze (4.5) w metodzie z pojedynczym opóźnieniem sygnału (dla tej szczególnej wartości opóźnienia).

Nie wspomniano dotychczas o jeszcze jednej metodzie ortogonalizacji, polegającej na wykorzystaniu pochodnej sygnału [94]. Metoda ta jest jednak analogiczna do ortogonalizacji przez opóźnienie sygnału, a charakterystyka widmowa niemal dokładnie zgodna z krzywymi przedstawionymi na rys. 4.2 i 4.3 gdy $k = 1$ (w tym drugim wypadku widma są identyczne).

Porównanie odpowiednich charakterystyk przedstawiono na rys. 4.5. Prosta na tym rysunku odzwierciedla widmo różniczkowania ciągłego, gdy z kolei krzywe 1 odpowiadają widmu różniczkowania dyskretnego, a krzywe 2 widmu ortogonalizacji przez opóźnienie sygnału dla dwu różnych częstotliwości próbkowania. Jak widać, krzywe 1 i 2 rzeczywiście różnią się nieznacznie, a także widmo pogarsza się (rośnie) wraz ze zwiększeniem częstotliwości próbkowania, zdążając do widma odpowiadającego różniczkowaniu sygnału ciągłego. Widmo tego sposobu ortogonalizacji jest więc ukształtowane tak niekorzystnie, że metoda może być stosowana tylko wtedy, gdy sygnał nie zawiera zakłóceń wysokoczęstotliwościowych, które są znacznie wzmacniane.

W zakończeniu omawiania własności tych metod ortogonalizacji warto jeszcze zauważyć, że możliwość realizacji pewnych szczególnie prostych przypadków jest uwarunkowana częstotliwością próbkowania. Otóż sygnał może być opóźniony tylko o całkowitą wielokrotność okresu próbkowania i wobec tego na przykład opóźnienie o $\pi/2$ może być zrealizowane tylko wtedy, gdy liczba próbek w okresie sygnału jest podzielna przez cztery (na przykład $N_1 = T_1/T_1 = 12; 16$ itp.).

W dotychczasowych rozważaniach omówiono własności metod mających tę wspólną cechę, że procesy filtracji i ortogonalizacji są rozdzielone. Znacznie większe znaczenie i zastosowanie mają jednakże te metody, w których filtracja i ortogonalizacja są zespolone w jeden algorytm przetwarzania próbek sygnału. Ilustracją tych metod są schematy blokowe przedstawione na rys. 4.1c i 4.1d. W pierwszym przypadku wykorzystuje się parę filtrów ortogonalnych, które na swym wyjściu mają odfiltrowane, ortogonalne sygnały y_d , y_q . Warunkiem koniecznym takiej ortogonalizacji jest ortogonalność funkcji wagi filtrów $w_d(t)$, $w_q(t)$ wewnątrz zadanego okna pomiarowego T , zapisywana równaniem:

$$\int_0^T w_d(t) w_q(t) dt = 0 \quad (4.14)$$

Prostym przykładem może być taka para funkcji, z których jedna jest parzysta, a druga nieparzysta w odniesieniu do środka okna pomiarowego $T/2$. Tak dobrane filtry, po doprowadzeniu do ich wejścia składowej podstawowej sygnału $x(n)$ (4.1), mają na wyjściu wzajemnie ortogonalne sygnały y_d i y_q opisane równaniami:

$$\begin{aligned} y_d &= F_{1d}x(n-1), \\ y_q &= F_{1q}x(n-1+N_1/4), \quad \text{lub} \quad y_q = F_{1q}x(n-1+\frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

gdzie

$$x(n) = X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi),$$

F_1 - moduł transmitancji filtra dla częstotliwości ω_1 ,

l - opóźnienie sygnału wprowadzane przez filtr (o kąt $l \omega_1 T_1$).

Współczynniki F_{1d} i F_{1q} w równaniu (4.15) mogą być różne, lecz w większości typowych przypadków są jednakowe, co upraszcza równania pomiaru różnych wielkości. Wskaźnik opóźnienia sygnałów l niekoniecznie musi być liczbą całkowitą. Zależy to od częstości próbkowania (parzyste lub nieparzyste N_1) i samych funkcji wagi filtrów. Zazwyczaj ta wartość opóźnienia jest równa połowie długości okna pomiarowego. Innymi słowy, faza sygnału wyjściowego filtra jest odniesiona do środka jego okna. Pozwala to na zapis równań (4.15) w uproszczonej postaci:

$$\begin{aligned} y_d &= F_1 X_1 \cos(n \omega_1 T_1 - \alpha + \varphi) \\ y_q &= -F_1 X_1 \sin(n \omega_1 T_1 - \alpha + \varphi) \end{aligned} \quad (4.16)$$

gdzie $F_{1q} = F_{1d} = F_1$, $\alpha = l \omega_1 T_1$.

Równania te, określające przekształcenie składowej podstawowej przez filtr, pozwalają dalej na sformułowanie odpowiednich algorytmów pomiarowych. Nie dostarczają one żadnej informacji o tłumieniu składowych o innych częstotliwościach, a więc o charakterystyce widmowej filtra. Zagadnienia te są rozpatrywane oddzielnie w p. 5.2.

Składowe ortogonalne mogą być także uzyskane w wyniku stosowania korelacji lub - inaczej mówiąc - odwzorowania przebiegu $x(n)$ z zastosowaniem współczynników szeregu Fouriera. Takie przekształcenie sygnału nie jest już w ścisłym sensie równaniem filtra, a sygnał wyjściowy nie jest przemienny, lecz stały. Uzyskiwane składowe mogą być zapisane przy podobnych jak w (4.16) założeniach upraszczających w postaci:

$$\begin{aligned} y_d &= F X_1 \cos(\beta - \varphi) \\ y_q &= F X_1 \sin(\beta - \varphi) \end{aligned} \quad (4.17)$$

gdzie β - położenie funkcji korelujących w chwili $t = 0$.

To przekształcenie sygnału ma jednak określone własności filtracyjne. Można tu dodać, że w przypadku, gdy funkcje wagi filtrów, funkcje korelujące oraz okna pomiarowe są takie same, wówczas również charakterystyki filtracyjne są identyczne. Zagadnienia te są szczegółowo rozważane w p. 5.3.

Najprostszą postać składowych ortogonalnych uzyskuje się dzięki zastosowaniu filtru Kalmana, lub ogólniej - modelu stanowego sygnału (rys. 4.1d). Filtr ten wyestymowuje wartości składowych ortogonalnych sygnału wejściowego. Mogą to być, w zależności od przyjętego modelu, albo składowe ortogonalne fazora, albo też składowe ortogonalne w chwili rozpoczęcia filtracji. Wartości oczekiwane tych estymat są równe składowym ortogonalnym sygnału wejściowego, co pozwala na zapisanie następujących równań odpowiednio dla obu rozważanych modeli:

- model estymacji składowych fazora

$$\begin{aligned} E \{ \hat{y}_d(n) \} &= y_d(n) = E \{ \hat{x}_d(n) \} = x_d(n) \\ E \{ \hat{y}_q(n) \} &= y_q(n) = E \{ \hat{x}_q(n) \} = x_q(n) \end{aligned} \quad (4.18a)$$

- model estymacji początkowych składowych ortogonalnych

$$\begin{aligned} E \{ \hat{y}_d(n) \} &= y_d(n) = X_1 \cos \varphi \\ E \{ \hat{y}_q(n) \} &= y_q(n) = X_1 \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.18b)$$

gdzie

$\hat{y}, \hat{x}$ - estymaty wielkości y, x ,

$E \{ \hat{x} \}$ - wartość oczekiwana x ,

$x(n) = x_d(n) = X_1 \cos(n \omega_1 T_i + \varphi)$.

Równania (4.18a) i (4.18b) są wystarczające do określania algorytmów pomiaru poszczególnych wielkości z zastosowaniem filtru Kalmana, a szczególnie rozważania jego własności i charakterystyk podano w rozdz. 6.

4.3. Podstawy algorytmów pomiarowych z zastosowaniem składowych ortogonalnych

Dysponowanie składowymi ortogonalnymi umożliwia obliczenia w szczególności spójny i prosty sposób omawianych wielkości kryterialnych. Postać końcowa równań jest różna w zależności od tego, jaki sposób ortogonalizacji zastosowano, ale równania wiążące składowe ortogonalne napięcie i prądów z mierzonymi wielkościami mają charakter ogólny.

Niech składowe ortogonalne prądu lub napięcia będą określone równaniami:

$$\begin{aligned} x_d(n) &= X_1 \cos(n \omega_1 T_i + \varphi) \\ x_q(n) &= X_1 \sin(n \omega_1 T_i + \varphi) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Algorytm pomiaru amplitudy X_1 wynika bezpośrednio z równań (4.19):

$$X_1(n) = \sqrt{x_d^2(n) + x_q^2(n)} \quad (4.20)$$

To ogólne równanie daje po podstawieniu składowych x , określonych w p. 4.2, szczegółowy algorytm pomiaru amplitudy $X_1(n)$.

Moce czynna i bierna odpowiednio są określone z definicji zależnościami:

$$P = \frac{1}{2} U_1 I_1 \cos(\varphi_u - \varphi_i) \quad (4.21a)$$

$$Q = \frac{1}{2} U_1 I_1 \sin(\varphi_u - \varphi_i) \quad (4.21b)$$

gdzie U_1, I_1 - amplitudy napięcia i prądu, φ_u, φ_i - fazy tych sygnałów.

Niech z kolei składowe ortogonalne napięcie i prądów będą, analogicznie do (4.19), dane równaniami:

$$\begin{aligned} u_d(n) &= U_1 \cos(n \omega_1 T_i + \varphi_u) \\ u_q(n) &= U_1 \sin(n \omega_1 T_i + \varphi_u) \\ i_d(n) &= I_1 \cos(n \omega_1 T_i + \varphi_i) \\ i_q(n) &= I_1 \sin(n \omega_1 T_i + \varphi_i) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Elementarne zależności trygonometryczne pozwalają na określenie mocy czynnej i biernej na podstawie tych składowych:

$$P(n) = \frac{1}{2} [u_d(n) i_d(n) + u_q(n) i_q(n)] \quad (4.23a)$$

$$Q(n) = \frac{1}{2} [u_q(n) i_d(n) - u_d(n) i_q(n)] \quad (4.23b)$$

Równania (4.23a) i (4.23b) są ogólną postacią algorytmów wyznaczania mocy czynnej i biernej na podstawie składowych ortogonalnych napięć i prądów. Szczegółowe algorytmy dla różnych metod ortogonalizacji otrzyma się podstawiając jedną z zależności (4.4), (4.8) itp. do tych wzorów.

Rezystancja i reaktancja zaś mogą być z definicji określone zależnościami:

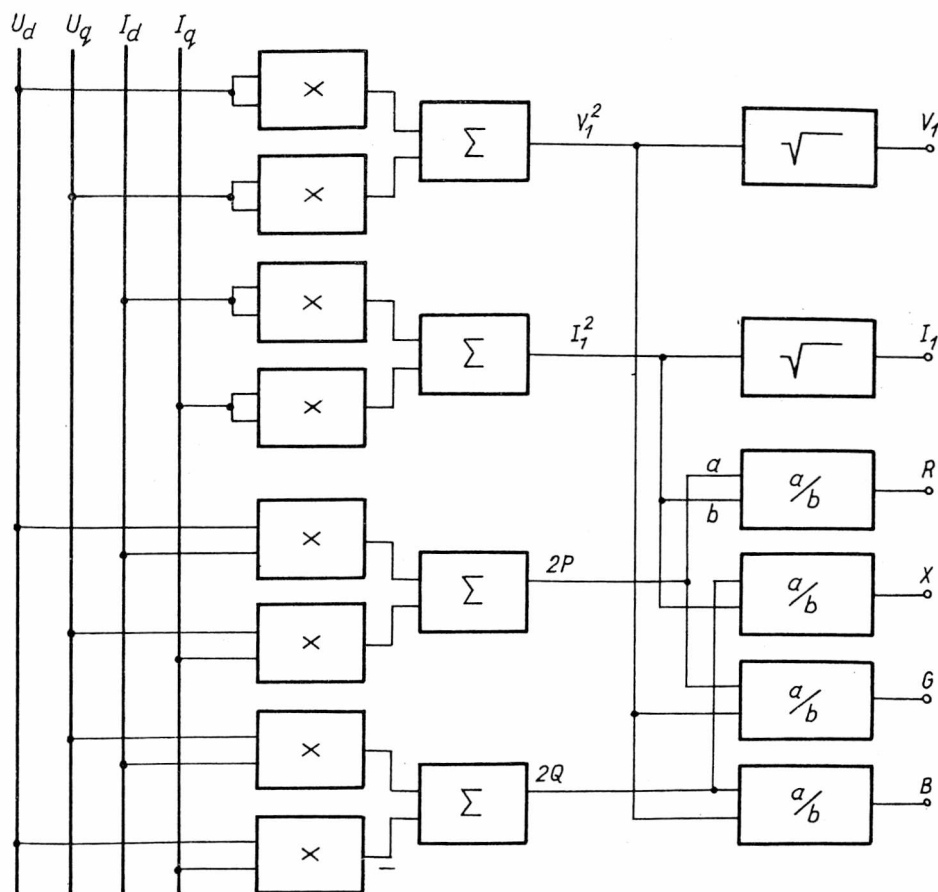
$$\begin{aligned} R &= \frac{U_1}{I_1} \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{2P}{I_1^2} \\ X &= \frac{U_1}{I_1} \sin(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{2Q}{I_1^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Wykorzystanie równań (4.23) oraz (4.20) (dla prądu) pozwala na określenie ogólnej postaci algorytmów pomiaru tych wielkości z zastosowaniem składowych ortogonalnych:

$$R(n) = \frac{u_d(n) i_d(n) + u_q(n) i_q(n)}{i_d^2(n) + i_q^2(n)} \quad (4.25a)$$

$$X(n) = \frac{u_q(n) i_d(n) - u_d(n) i_q(n)}{i_d^2(n) + i_q^2(n)} \quad (4.25b)$$

Zupełnie analogicznie można otrzymać równania pomiaru konduktancji i susceptancji. Liczniki obu wyrażeń pozostają przy tym niezmienione, natomiast w mianowniku należy wstawić sumę kwadratów składowych ortogonalnych napięcia.



Rys. 4.6. Schemat blokowy pomiaru wielkości kryterialnych według pierwszej rodziny algorytmów ((4.20)-(4.25))
 Fig. 4.6. Block scheme of measurement of criterion values according to the first family of algorithms ((4.20)-(4.25))

Wzory (4.20), (4.23) i (4.25) stanowią rodzinę algorytmów pomiaru wielkości kryterialnych, wykorzystującą składowe ortogonalne sygnały. Jest to chyba najpowszechniejszy sposób pomiaru, a metody ortogonalizacji mogą być różne. W celu podkreślenia spójności tego systemu przedstawiono na rys. 4.6. schemat blokowy pomiaru różnych wielkości.

Inną dużą rodzinę algorytmów pomiaru uzyskuje się przez zastosowanie składowych ortogonalnych prądów w różnych chwilach n oraz napięć w tych momentach. Podstawy metody opisano w pracy [41], a tutaj przedstawiono ją w ogólniejszej formie, która pozwoli wykazać, że jest ona równoważna - przy pewnych sposobach ortogonalizacji - metodzie rozwiązywania równań obwodu zwarcowego.

Założmy, że napięcie oraz składowe ortogonalne prądy są dane równaniami (4.22) (bez składowej $u_0(n)$), a ponadto dysponuje się tymi wielkościami w chwilach $n - k$ (w szczególnym przypadku $k = 1$). Algorytmy pomiarowe wynikają z dwu podstawowych równań, których spełnienie można sprawdzić przez proste przekształcenia trygonometryczne:

$$\begin{aligned} u_d(n - k_1) i_q(n) - u_d(n) i_q(n - k_1) &= \sin(k_1 \omega_1 T_1) U_1 I_1 \cos(\varphi_u - \varphi_i) \\ u_d(n - k_1) i_d(n) - u_d(n) i_d(n - k_1) &= \sin(k_1 \omega_1 T_1) U_1 I_1 \sin(\varphi_u - \varphi_i) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Po podstawieniu w pierwszym z tych równań x (4.19) zamiast u oraz i , otrzymuje się po prostych przekształceniach równanie pomiaru amplitudy prądu lub napięcia ($\varphi_u - \varphi_i = 0$):

$$X_1(n) = \sqrt{\frac{x_d(n - k_1) x_q(n) - x_d(n) x_q(n - k_1)}{\sin(k_1 \omega_1 T_1)}} \quad (4.27)$$

Równania pomiaru mocy czynnej i biernej wynikają natomiast z (4.26) bezpośrednio:

$$P(n) = \frac{1}{2 \sin(k_1 \omega_1 T_1)} [u_d(n - k_1) i_q(n) - u_d(n) i_q(n - k_1)] \quad (4.28a)$$

$$Q(n) = \frac{1}{2 \sin(k_1 \omega_1 T_1)} [u_d(n - k_1) i_d(n) - u_d(n) i_d(n - k_1)] \quad (4.28b)$$

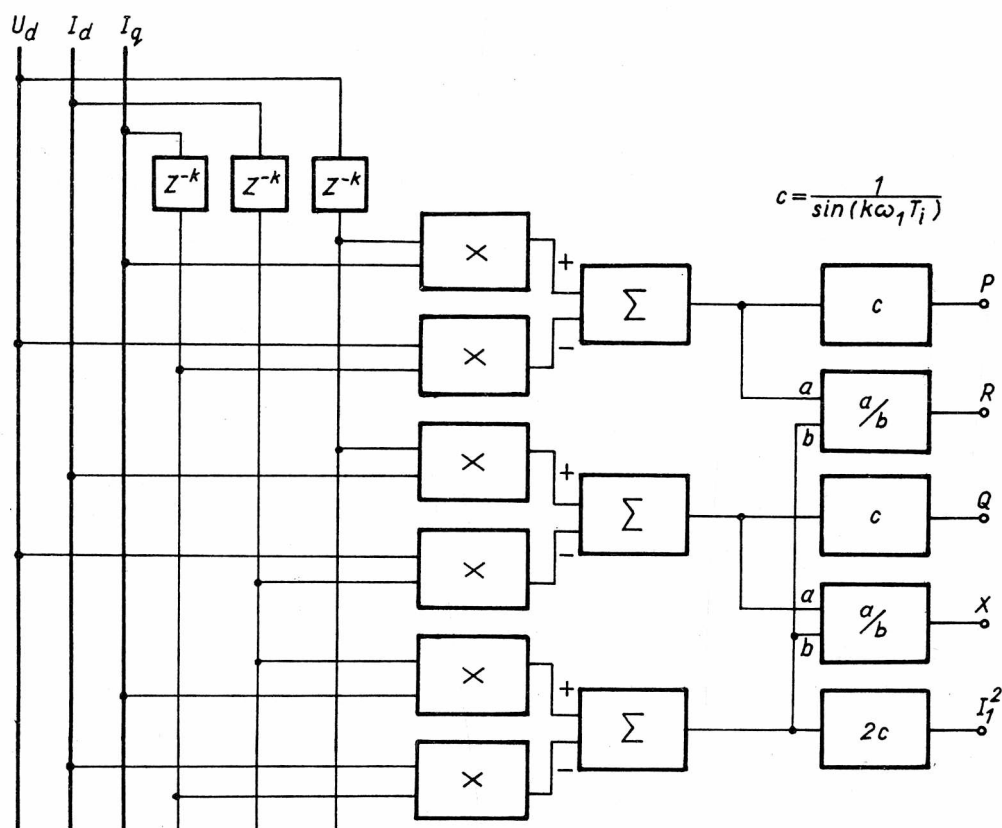
Równania (4.27) i (4.28) oraz (4.24) pozwalają na określenie rezystancji i reaktancji. Stały współczynnik upraszcza się tutaj i uzyskuje się ostatecznie:

$$R(n) = \frac{u_d(n - k_1) i_q(n) - u_d(n) i_q(n - k_1)}{i_d(n - k_1) i_q(n) - i_d(n) i_q(n - k_1)} \quad (4.29a)$$

$$x(n) = \frac{u_d(n-k) i_d(n) - u_d(n) i_d(n-k)}{i_d(n-k_1) i_q(n) - i_d(n) i_q(n-k_1)} \quad (4.29b)$$

Podobnie jak poprzednio, te ogólne algorytmy (4.27), (4.28) i (4.29) przyjmują postać szczegółową w zależności od sposobu ortogonalizacji prądu oraz wartości opóźnienia kT_i , które może być różne w algorytmach (4.29) oraz podczas ortogonalizacji. Związczą może być $k_1 = 1$ w obu przypadkach. Schemat blokowy pomiaru tymi metodami przedstawiono na rys. 4.7.

Różne czynniki, takie jak na przykład inne opóźnienia sygnałów w analogowej części przetwarzania napięć i prądów, niesynchroniczne próbkowanie itp., mogą spowodować, że różnica przesunięć fazy napięcia i prądu



Rys. 4.7. Schemat blokowy pomiaru wielkości kryterialnych według drugiej rodziny algorytmów ((4.27)-(4.29))

Fig. 4.7. Block scheme of criterion values measurement according to the second family of algorithms ((4.27)-(4.29))

jest inna niż $\varphi_u - \varphi_i$. Jeśli więc założy się, że ta różnica jest inna, oraz że prąd wyprzedza napięcie o pewien kąt φ , to korekcja tego przesunięcia może być dokonana przez opóźnienie sygnału cyfrowego o tę fazę. W istocie jednak korekcja ta może być dokładna tylko wtedy, gdy kąt ten odpowiada całkowitej wielokrotności okresu próbkowania ($\varphi = l \omega_1 T_1$). Jeśli jednak tak nie jest, to oprócz opóźnienia sygnału, trzeba dokonać jeszcze dodatkowej korekcji. Korekcja ta dotyczy teraz przesunięcia sygnału o pewien kąt α mniejszy od $\omega_1 T_1$ ($\alpha = \varphi - l \omega_1 T_1$). Niech więc napięcia będą określone równaniami (4.22), a prądy będą takie jak tam, lecz przesunięte o kąt α :

$$\begin{aligned} i_1(n) &= I_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi_1 + \alpha) \\ i_2(n) &= I_1 \sin(n \omega_1 T_1 + \varphi_1 + \alpha) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Proste przekształcenie równań (4.30), po wyrażeniu ich przez składowe ortogonalne $i_d(n)$ i $i_q(n)$ (4.22), pozwala na obliczenie tych składowych na podstawie liniowej kombinacji $i_1(n)$ i $i_2(n)$:

$$\begin{aligned} i_d(n) &= i_1(n) \cos \alpha + i_2(n) \sin \alpha \\ i_q(n) &= -i_1(n) \sin \alpha + i_2(n) \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.31)$$

Dla dużych częstotliwości próbkowania korekcja ta może nie być konieczna, gdyż wówczas $\sin \alpha$ jest bliski zeru, ale dla typowych częstotliwości próbkowania sygnał powinien być przekształcony według zależności (4.31). Jeśli natomiast napięcie wyprzedza prąd, to taką samą procedurę stosuje się do napięcia.

4.4. Pomiar amplitudy napięcia lub prądu

4.4.1. Zastosowanie składowych ortogonalnych

Algorytmy pomiaru amplitudy napięcia lub prądu otrzymuje się przez podstawienie do ogólnych równań (4.20) i (4.27) składowych ortogonalnych, uzyskiwanych różnymi metodami, tj. (4.4), (4.8), (4.15), (4.16) i (4.17). Ewentualne przekształcenia takich równań mogą prowadzić do uproszczenia algorytmu lub też najprostsza może okazać się jego postać początkowa. Najpierw rozpatrzono algorytmy wykorzystujące składowe ortogonalne w tej samej dyskretniej chwili n (4.20) dla różnych metod ortogonalizacji.

1. Ortogonalizacja przez pojedyncze opóźnienie sygnału

Po wstawieniu zależności (4.4) do (4.20) otrzymuje się

$$X_1(n) = \sqrt{x^2(n) + \left[\frac{x(n-k) - \cos(k \omega_1 T_1) x(n)}{\sin(k \omega_1 T_1)} \right]^2} \quad (4.32)$$

gdzie $x(n) = X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi)$, a po przekształceniach

$$X_1(n) = \frac{1}{\sin(k \omega_1 T_1)} \sqrt{x^2(n) + x^2(n-k) - 2\cos(k \omega_1 T_1) x(n) x(n-k)} \quad (4.33)$$

Można tu zauważyć, że w postaci ogólnej algorytm (4.32) jest prostszy do zrealizowania niż (4.33). Wymaga on bowiem dwu mnożeń próbek sygnału przez stałą, dwu mnożeń próbek przez siebie oraz dwu operacji sumowania, gdy tymczasem drugi z nich wymaga jednego mnożenia więcej.

Uproszczone wersje tych algorytmów otrzymuje się przy pewnych szczególnych wartościach opóźnienia k :

- gdy $k = \frac{N_1}{12}$, $\left(N_1 = \frac{T_1}{T_1}; k \omega_1 T_1 = \frac{\pi}{6}\right)$, wówczas

$$X_1(n) = 2 \sqrt{x^2(n) + x^2\left(n - \frac{N_1}{12}\right) - \sqrt{3} x(n) x\left(n - \frac{N_1}{12}\right)} \quad (4.34a)$$

- gdy $k = \frac{N_1}{6}$ ($k \omega_1 T_1 = \frac{\pi}{3}$), wówczas

$$X_1(n) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2(n) + x^2\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - x(n) x\left(n - \frac{N_1}{6}\right)} \quad (4.34b)$$

- gdy $k = \frac{N_1}{4}$ ($k \omega_1 T_1 = \frac{\pi}{2}$), wówczas

$$X_1(n) = \sqrt{x^2(n) + x^2\left(n - \frac{N_1}{4}\right)} \quad (4.34c)$$

Ostatni algorytm jest najprostszy i najoszczędniejszy w obliczeniach, gdyż wymaga realizacji tylko jednej operacji mnożenia ($x^2(n)$). Drugi z kwadratów w wyrażeniu (4.34c) został już obliczony $N_1/4$ próbek wcześniej. Jest to postać najczęściej używana w praktyce podczas stosowania tego sposobu ortogonalizacji.

2. Ortogonalizacja przez podwójne opóźnienie sygnału

Po wstawieniu zależności (4.8) do wzoru (4.20) otrzymuje się

$$X_1(n) = \sqrt{x^2(n-k) + \left[\frac{x(n-2k) - x(n)}{2\sin(k \omega_1 T_1)} \right]^2} \quad (4.35)$$

a po przekształceniach

$$X_1(n) = \frac{1}{2\sin(k \omega_1 T_1)} \sqrt{x^2(n) + x^2(n-k) - 2x^2(n-k) \cos(2k \omega_1 T_1)} \quad (4.36)$$

Podobnie jak poprzednio postać wyjściowa algorytmu pomiaru amplitudy (4.35) wymaga wykonania mniejszej liczby operacji arytmetycznych niż jego wersja przekształcona (4.36).

Analogicznie też dla pewnych szczególnych wartości opóźnienia k otrzymuje się uproszczone wersje tych algorytmów:

- gdy $k = \frac{N_1}{12}$, ($k \omega_1 T_1 = \frac{\pi}{6}$), wówczas

$$X_1(n) = \sqrt{2 \left[x^2(n) + x^2\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - x^2\left(n - \frac{N_1}{12}\right) \right]} \quad (4.37a)$$

- gdy $k = \frac{N_1}{8}$, ($k \omega_1 T_1 = \frac{\pi}{4}$), wówczas

$$X_1(n) = \sqrt{x^2(n) - x^2\left(n - \frac{N_1}{4}\right)}. \quad (4.37b)$$

Ostatnie równanie jest, jak można było oczekiwać, identyczne z równaniem (4.34c) (podwójne opóźnienie o $\pi/4$ jest równoważne opóźnieniu o $\pi/2$). Oba równania (4.37) zapewniają znaczną oszczędność w obliczeniach i wymagają jednego tylko podnoszenia do kwadratu, gdyż kwadraty opóźnionych próbek sygnału były już obliczane wcześniej.

3. Zastosowanie filtrów ortogonalnych

Najprostszą postać algorytmów pomiaru amplitudy otrzymuje się przez stosowanie filtrów ortogonalnych lub korelacji ortogonalnej. Składowe napięcia lub prądy są opisane równaniami (4.15)-(4.17). Po wstawieniu wartości x z tych równań do ogólnej zależności (4.20) otrzymuje się kolejno:

- gdy współczynniki filtrów są różne, wówczas

$$X_1 = \sqrt{\left(\frac{y_d(n)}{F_{1d}}\right)^2 + \left(\frac{y_q(n)}{F_{1q}}\right)^2} \quad (4.38a)$$

- gdy współczynniki filtrów są identyczne ($F_{1d} = F_{1q} = F_1$), wówczas

$$X_1 = \frac{1}{F_1} \sqrt{y_d^2(n) + y_q^2(n)} \quad (4.38b)$$

- gdy $F_1 = 1$, tak jak w filtrze Kalmana, wówczas

$$X_1 = \sqrt{y_d^2(n) + y_q^2(n)} \quad (4.38c)$$

gdzie $y_d(n)$, $y_q(n)$ - sygnały wyjściowe filtrów ortogonalnych.

Inny zestaw algorytmów pomiaru amplitudy otrzyma się przez zastosowanie równań ogólnych (4.27) i różnych metod ortogonalizacji sygnału. Na wstępie trzeba jednak podać pewne ograniczenie. Otóż suma kwadratów we wzorze ogólnym (4.20) gwarantuje dodatnią wartość wyrażenia podpierwiastkowego. W zależności (4.27) tak już nie jest i niewielkie nawet zakłócenie sygnału może spowodować ujemną wartość wyrażenia podpierwiastkowego. Stosowanie tego algorytmu wyłącznie do pomiaru amplitudy wymaga pewnej ostrożności i ewentualnie specjalnych zabiegów w rodzaju pierwiastkowania wartości bezwzględnej itp.

Duże znaczenie natomiast mogą mieć te algorytmy do obliczeń kwadratów amplitud napięć lub prądów, które są stosowane w algorytmach pomiaru składowych impedancji lub admitancji. Aby nie wdawać się w szczegółową analizę ograniczeń związanych z zastosowaniem równania (4.27) do pomiaru amplitudy, dalej omówiono tę metodę zastosowaną do pomiaru kwadratu amplitud.

1. Ortogonalizacja przez pojedyncze opóźnienie sygnału

Po wstawieniu równania (4.4) do (4.27) otrzymuje się

$$x_1^2(n) = \frac{1}{\sin(k_1 \omega_1 T_1)} \left[x(n - k_1) \frac{x(n - k) - x(n) \cos(k \omega_1 T_1)}{\sin(k \omega_1 T_1)} - x(n) \frac{x(n - k - k_1) - x(n - k_1) \cos(k \omega_1 T_1)}{\sin(k \omega_1 T_1)} \right] \quad (4.39)$$

a po uproszczeniach algebraicznych

$$x_1^2(n) = \frac{1}{\sin(k_1 \omega_1 T_1) \sin(k \omega_1 T_1)} [x(n - k_1) x(n - k) - x(n) x(n - k - k_1)] \quad (4.40)$$

Ten algorytm obliczania kwadratu amplitudy wymaga dwu mnożeń sygnałów oraz mnożenia przez stały współczynnik. To ostatnie mnożenie nie ma znaczenia, gdyż po zastosowaniu podobnej metody podczas pomiaru mocy czynnej i biernej, ów stały współczynnik upraszcza się. Gdyby jednak pomiar kwadratu amplitudy miał być także realizowany, można dobrać korzystną wartość tego współczynnika. Przyjawszy $k = k_1$ otrzymuje się dwa szczególnie proste przypadki:

- gdy $k = \frac{N_1}{12}$; ($k \omega_1 T_1 = \frac{\pi}{6}$), wówczas

$$x_1^2(n) = 4 \left[x^2\left(n - \frac{N_1}{12}\right) - x(n) x\left(n - \frac{N_1}{6}\right) \right] \quad (4.41a)$$

- gdy $k = \frac{N_1}{8}$; ($k \omega_1 T_1 = \frac{\pi}{4}$), wówczas

$$x_1^2(n) = 2 \left[x^2\left(n - \frac{N_1}{8}\right) - x(n) x\left(n - \frac{N_1}{4}\right) \right] \quad (4.41b)$$

2. Ortogonalizacja przez podwójne opóźnienie sygnału

Po wstawieniu zaś równania (4.8) do (4.27) otrzymuje się

$$x_1^2(n) = \frac{1}{\sin(k_1 \omega_1 T_1)} \left[x(n - k_1 - k) \frac{x(n - 2k) - x(n)}{2\sin(k \omega_1 T_1)} - x(n - k) \frac{x(n - 2k - k_1) - x(n - k_1)}{2\sin(k \omega_1 T_1)} \right] \quad (4.42)$$

Po przyjęciu $k_1 = k$ oraz wykorzystaniu tożsamości trygonometrycznej

$$x^2(n-k) - x(n)x(n-2k) = x^2(n-2k) - x(n-k)x(n-3k) \quad (4.43)$$

otrzymuje się

$$x_1^2(n) = \frac{1}{\sin^2(k\omega_1 T_1)} [x^2(n-k) - x(n)x(n-2k)] \quad (4.44)$$

a więc wzór identyczny jak (4.40) (gdy $k = k_1$) oraz uproszczone przypadki (4.41) też można tu zastosować.

Należy w tym miejscu podkreślić z całym naciskiem, że algorytmy opisane równaniami (4.42) (gdy $k = k_1$) oraz przekształcony algorytm (4.44) to w istocie różne algorytmy w sensie ich różnych charakterystyk. Zauważmy bowiem, że tożsamość (4.43) jest prawdziwa tylko wtedy, gdy sygnał x nie zawiera żadnych zakłóceń. W przeciwnym przypadku tożsamość ta nie obowiązuje, a więc amplituda obliczana według jednego i drugiego wzoru będzie obciążona innym błędem. Wynikają stąd właśnie różne charakterystyki obu algorytmów. Jest natomiast oczywiste, że oba algorytmy umożliwią dokładny pomiar kwadratu amplitudy sygnału niezakłóconego. Dla porównania, algorytmy (4.39) i (4.40) są identyczne, to znaczy mają identyczne charakterystyki, gdyż drugi z nich powstał przez uproszczenie pierwszego z zastosowaniem operacji jedynie algebraicznych.

Na podstawie tych spostrzeżeń można sformułować zasadę ogólną. Jej treść sprowadzałaby się do następującego stwierdzenia: Uproszczenia algorytmów, które wykorzystują tożsamości trygonometryczne między funkcjami próbek mierzonych sygnałów, zmieniają również charakterystykę algorytmu. Zmiana ta nie następuje tylko wtedy, jeśli owe uproszczenia są dokonywane przez operacje jedynie algebraiczne.

3. Zastosowanie filtrów ortogonalnych

Algorytmy pomiaru kwadratu amplitudy otrzymuje się bezpośrednio przez podstawienie przekształconych zależności (4.15) lub (4.16) do równania (4.27). Trzeba tu zauważyć, że w metodach opisanych zależnościami (4.27)-(4.29) (amplitudy, moce, składowe impedancji) nie mają zastosowania korelacje oraz odpowiadający jej model filtru Kalmana. W tych bowiem przypadkach uzyskuje się wartości stałe na wyjściach i wszystkie wymienione wielkości, oprócz stanu przejściowego, są zerowe. Omawiane równania są słuszne jedynie dla przemennych składowych ortogonalnych. Algorytm pomiaru jest więc opisany zależnością:

$$x_1^2(n) = \frac{1}{F_{1d}^F F_{1q} \sin(k_1 \omega_1 T_1)} [y_d(n-k_1) y_q(n) - y_d(n) y_q(n-k_1)] \quad (4.45)$$

gdzie

y_d, y_q - sygnały wyjściowe filtrów ortogonalnych, na wejściu których znajduje się $x(n)$,

$$x(n) = X_1 \cos(n\omega_1 T_1 + \varphi).$$

4.4.2. Metody uśredniania

Pomiar amplitud napięcia czy prądu lub ich wartości skutecznych przez uśrednianie wartości bezwzględnej lub kwadratu sygnałów to najbardziej naturalna metoda, stosowana od dawna w miernictwie analogowym. Metoda pomiarowa wynika bezpośrednio ze znanych relacji:

$$\int_{t-T}^t x^2(\tau) d\tau = \frac{T}{2} X_1^2, \quad \text{jeśli} \quad T = m \frac{T_1}{2} \quad (4.46a)$$

oraz

$$\int_{t-T}^t |x(\tau)| d\tau = \frac{2T}{\pi} X_1, \quad \text{jeśli} \quad T = m \frac{T_1}{2} \quad (4.46b)$$

gdzie: $x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi)$, $m = 1, 2, 3 \dots$

Z równań (4.46) można łatwo otrzymać postać cyfrową algorytmów pomiaru amplitudy, które dla całkowania metodą prostokątów są opisane zależnościami:

$$X_1(n) = \sqrt{\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_1^2(n-k)} \quad (4.47a)$$

$$X_1(n) = \frac{\pi}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} |x_1(n-k)| \quad (4.47b)$$

gdzie $N = iN_1/2$, $i = 1, 2 \dots m$.

Szczególnie atrakcyjna wydaje się metoda obliczania amplitudy według zależności (4.47b). Można zauważyć dużą oszczędność w obliczeniach, gdyż konieczne jest jedynie sumowanie wartości bezwzględnych próbek sygnału. W wyniku sumowania algorytm wykazuje też pewne własności filtracyjne (rozdz. 5 - okno prostokątne), zależne od przyjętej długości okna N . Własności te poprawiają się wraz ze wzrostem N , ale tylko w zakresie wysokich częstotliwości. Zakłócająca składowa stała jest natomiast źródłem dużych błędów, niezależnie od wartości N , i jeśli ta składowa jest zawarta w sygnale, musi on być wstępnie filtrowany lub trzeba zastosować inny algorytm pomiaru amplitudy. Inne błędy tej metody są związane z fazą sygnału w chwilach próbkowania. Ich wartości zależą od częstotliwości próbkowania, parzystej lub nieparzystej liczby próbek oraz położenia między chwilami próbkowania momentu przejścia przez zero sygnału [131].

4.5. Złożone wielkości kryterialne

4.5.1. Pomiar mocy

Szczegółowe algorytmy pomiaru mocy czynnej lub biernej otrzyma się przez podstawienie uzyskiwanych w różny sposób składowych ortogonalnych do ogólnych zależności (4.23) lub (4.28).

Rozpatrzmy kolejno te algorytmy, najpierw mocy czynnej, a potem mocy biernej dla różnych metod ortogonalizacji pamiętając, że dyskretne ortogonalne napięcia i prądy opisano zależnościami (4.22):

Moc czynna według algorytmu (4.23a)

1. Ortogonalizacja przez pojedyncze opóźnienie

Wykorzystujemy metodę ortogonalizacji (4.4) do prądu i napięcia oraz podstawiamy otrzymane składowe do równania (4.23a)

$$P(n) = \frac{1}{2} \left[u(n)i(n) + \frac{u(n-k) - \cos(k \omega_1 T_1) u(n)}{\sin(k \omega_1 T_1)} \times \right. \\ \left. \times \frac{i(n-k) - \cos(k \omega_1 T_1) i(n)}{\sin(k \omega_1 T_1)} \right] \quad (4.48)$$

Spośród możliwych przypadków szczególnych (analogicznie do (4.34), najprostszą postać ma wzór (4.48), gdy $\cos(k \omega_1 T_1)$ ma wartość zero. Wówczas funkcja sinus ma wartość jeden, $k = N_1/4$ i wzór (4.48) upraszcza się do

$$P(n) = \frac{1}{2} \left[u(n) i(n) + u\left(n - \frac{N_1}{4}\right) i\left(n - \frac{N_1}{4}\right) \right] \quad (4.49)$$

Równanie to można by zapisać w bardziej zwartej formie:

$$P(n) = \frac{1}{2} \left[u_i(n) + u_i\left(n - \frac{N_1}{4}\right) \right] \quad (4.49a)$$

Ostatnia forma zapisu ilustruje prostotę algorytmu i fakt, że do obliczeń potrzebna jest realizacja tylko jednego iloczynu.

2. Ortogonalizacja przez podwójne opóźnienie

Po podstawieniu wzoru (4.8) zastosowanego odpowiednio dla napięcia i prądu do (4.23a) otrzymuje się

$$P(n) = \frac{1}{2} \left\{ u(n-k) i(n-k) + \frac{1}{4 \sin^2(k \omega_1 T_1)} [u(n-2k) - u(n)] \times \right. \\ \left. \times [i(n-2k) - i(n)] \right\} \quad (4.50)$$

Prosty przypadek szczególny występuje, gdy $\sin(k \omega_1 T_1)$ jest równy 0,5. Argument funkcji sinus jest wówczas równy $\pi/6$, a stąd wynika wartość $k = N_1/12$ i uproszczony algorytm (4.50) dany równaniem

$$P(n) = \frac{1}{2} \left\{ u\left(n - \frac{N_1}{12}\right) i\left(n - \frac{N_1}{12}\right) + \left[u\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - u(n) \right] \left[i\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - i(n) \right] \right\} \quad (4.50a)$$

Swiadomie nie dokonano tutaj uproszczeń równania (4.50) na podstawie tożsamości trygonometrycznych, gdyż - jak podkreślono to w rozdz. 4.4 - operacja taka zmienia charakterystyki algorytmu. Z drugiej też strony postać wyjściowa jest właściwie prostsza w realizacji (równania (4.32) i (4.33)).

3. Zastosowanie filtrów ortogonalnych

Wyrażenie określające moc czynną w tym przypadku otrzyma się przez obliczenie składowych ortogonalnych prądu i napięcia z sygnałów wyjściowych ortogonalnych filtrów tych wielkości i podstawieniu tych składowych do (4.23a). Przyjawszy, że stałe współczynniki we wszystkich filtrach są w ogólności różne, oraz że:

$$\begin{aligned} \frac{u_{yd}(n)}{F_{ud}} &= u(n-1) = U_1 \cos[(n-1)\omega_1 T_i + \varphi_u] = u_d(n) \\ \frac{u_{yq}(n)}{F_{uq}} &= u\left(n-1 + \frac{N_1}{4}\right) = -U_1 \sin[(n-1)\omega_1 T_i + \varphi_u] = -u_q(n) \end{aligned} \quad (4.51)$$

gdzie

$u_{yd}(n)$, $u_{yq}(n)$ - sygnały wyjściowe filtrów ortogonalnych napięcia,
 F_{ud} , F_{uq} - stałe współczynniki tych filtrów,

i przyjmawszy analogiczne relacje dla sygnałów prądowych, otrzymuje się wyrażenie określające moc czynną:

$$P(n) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F_{ud} F_{id}} u_{yd}(n) i_{yd}(n) + \frac{1}{F_{uq} F_{iq}} u_{yq}(n) i_{yq}(n) \right] \quad (4.52)$$

Częsty jest w praktyce przypadek, gdy współczynniki te są identyczne, a wówczas

$$P(n) = \frac{1}{2F^2} [u_{yd}(n) i_{yd}(n) + u_{yq}(n) i_{yq}(n)] \quad (4.52a)$$

Równanie to, jak można było oczekiwać, jest przemnożonym przez stały współczynnik ogólnym równaniem (4.23a).

Moc czynna według algorytmu (4.28a)

1. Ortogonalizacja przez pojedyncze opóźnienie

Postępujemy podobnie jak poprzednio, to jest wstawiamy odpowiednie zależności (4.4) dla prądów i napięć do (4.28a) i otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(n) = \frac{1}{2 \sin(k \omega_1 T_i) \sin(k_1 \omega_1 T_i)} & \left\{ u(n-k_1) [i(n-k) - \right. \\ & \left. - \cos(k \omega_1 T_i) i(n)] - u(n) [i(n-k-k_1) - \cos(k \omega_1 T_i) i(n-k_1)] \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Podobnie jak w (4.49) uproszczoną postać wzoru (4.53) otrzymuje się, gdy $\cos(k \omega_1 T_1)$ jest równy zeru:

$$P(n) = \frac{1}{2\sin(k_1 \omega_1 T_1)} \left[u(n - k_1) i\left(n - \frac{N_1}{4}\right) - u(n) i\left(n - k_1 - \frac{N_1}{4}\right) \right] \quad (4.54a)$$

oraz gdy $k_1 = k = N_1/4$:

$$P(n) = \frac{1}{2} \left[u\left(n - \frac{N_1}{4}\right) i\left(n - \frac{N_1}{4}\right) - u(n) i\left(n - \frac{N_1}{2}\right) \right] \quad (4.54b)$$

2. Ortogonalizacja przez podwójne opóźnienie

Po wstawieniu (4.8) dla napięć i prądów do (4.28a) otrzymuje się

$$P(n) = \frac{1}{2\sin(k \omega_1 T_1) \sin(k_1 \omega_1 T_1)} \left\{ u(n - k - k_1) [i(n - 2k) - i(n)] - u(n - k) [i(n - 2k - k_1) - i(n - k_1)] \right\} \quad (4.55)$$

Gdy $k = k_1$, wówczas

$$P(n) = \frac{1}{2\sin^2(k \omega_1 T_1)} \left\{ u(n - 2k) [i(n - 2k) - i(n)] - u(n - k) [i(n - 3k) - i(n - k)] \right\} \quad (4.55a)$$

Nie skorzystano tutaj z możliwości uproszczeń algorytmu związanych z tożsamościami trygonometrycznymi aby - jak wyjaśniono to już poprzednio - nie zmieniać jego charakterystyk. W tym zresztą przypadku szczególne wartości k nie mają wpływu na złożoność obliczeniową, a tylko na szybkość oraz charakterystyki filtracyjne. Te ostatnie poprawiają się wraz ze wzrostem k , gdy tymczasem wynik uzyskuje się najszybciej dla $k = 1$.

3. Zastosowanie filtrów ortogonalnych

Uwzględniając zależność (4.51) oraz ogólne równanie (4.28a) otrzymuje się po prostych przekształceniach:

$$P(n) = \frac{1}{2\sin(k_1 \omega_1 T_1)} \frac{1}{F_{ud} F_{iq}} [u_{yd}(n) i_{yq}(n - k_1) - u_{yd}(n - k_1) i_{yq}(n)] \quad (4.56)$$

Szczególne wartości k_1 nie mają tutaj wpływu na ewentualne uproszczenia równań, gdyż wartość podana w nawiasie zależy od k_1 tylko w sensie lepszej lub gorszej dynamiki pomiaru i lepszych lub gorszych charakterystyk filtracyjnych. Współczynnik stały może mieć taką czy inną wartość zależną od współczynników poszczególnych filtrów, a w większości praktycznych przypadków ulegnie on (w algorytmach pomiaru składowych impedancji) uproszczeniu. W sumie można stwierdzić, że wzór (4.56) jest w pełni analogiczny do ogólnego algorytmu (4.28a).

Moc bierna według algorytmu (4.23b)

1. Ortogonalizacja przez pojedyncze opóźnienie

Po podstawieniu, podobnie jak poprzednio, prądu i napięcia przekształconych według tej metody ortogonalizacji do ogólnej zależności (4.23b), otrzymuje się po prostych algebraicznych przekształceniach:

$$Q(n) = \frac{1}{2\sin(k\omega_1 T_1)} [u(n-k)i(n) - u(n)i(n-k)] \quad (4.57)$$

Algorytm (4.57) jest bardzo prosty, analogiczny do zależności ogólnej (4.23b), lecz tu dotyczy próbek sygnałów, a nie składowych ortogonalnych. Najlepszą dynamikę pomiaru otrzymuje się gdy $k = 1$, a z kolei charakterystyki filtracyjne poprawiają się wraz ze wzrostem k . Przykładowo dla $\sin(k\omega_1 T_1)$ równego jedności otrzymuje się płaską charakterystykę filtracyjną (rys. 4.2, $k = 3$) i algorytm

$$Q(n) = \frac{1}{2} \left[u\left(n - \frac{N_1}{4}\right) i(n) - u(n) i\left(n - \frac{N_1}{4}\right) \right] \quad (4.57a)$$

2. Ortogonalizacja przez podwójne opóźnienie

Po wstawieniu z kolei (4.8) do (4.23b) otrzymuje się

$$Q(n) = \frac{1}{4\sin(k\omega_1 T_1)} \{ [u(n-2k) - u(n)] i(n-k) - u(n-k) [i(n-2k) - i(n)] \} \quad (4.58)$$

Można jednak wykazać, że zachodzi następująca tożsamość trygonometryczna:

$$u(n-k)i(n) - u(n)i(n-k) = u(n-2k)i(n-k) - u(n-k)i(n-2k) \quad (4.58a)$$

Po pomnożeniu składników w (4.58) i wykorzystaniu tej tożsamości otrzymuje się

$$Q(n) = \frac{1}{2\sin(k\omega_1 T_1)} [u(n-k)i(n) - u(n)i(n-k)] \quad (4.59)$$

Jest to wzór identyczny ze wzorem (4.57) dla pojedynczego opóźnienia sygnału i można uzyskać też identyczną wersję szczególną (4.57a). Trzeba tu jednak jeszcze raz podkreślić, że wzory (4.58) i (4.59) nie opisują algorytmów o tych samych charakterystykach. Po pierwsze więc w równaniu (4.59) czas pomiaru jest krótszy dwukrotnie, a po drugie - charakterystyki filtracyjne będą inne, gdyż wykorzystana tożsamość obowiązuje tylko dla sygnałów $u(n)$, $i(n)$ pozbawionych zakłóceń.

3. Zastosowanie filtrów ortogonalnych

Po obliczeniu składowych ortogonalnych na podstawie sygnałów wyjściowych filtrów zgodnie z (4.51) (rys. 4.1) i podstawieniu ich do (4.23b), uzyskuje się:

$$Q(n) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{F_{ud} F_{iq}} u_{yd}(n) i_{yq}(n) - \frac{1}{F_{uq} F_{id}} u_{yq}(n) i_{yd}(n) \right] \quad (4.60a)$$

Bardzo częstym w praktyce przypadkiem jest równość wszystkich stałych współczynników filtrów i wówczas

$$Q(n) = \frac{1}{2F^2} [u_{yd}(n) i_{yq}(n) - u_{yq}(n) i_{yd}(n)] \quad (4.60b)$$

Zależność ta jest analogiczna do równania (4.23b).

Moc bierna według algorytmu (4.28b)

Zależność ta nie wymaga wykorzystania składowych ortogonalnych w ogóle, tak samo równanie (4.28b) po pominięciu indeksów stanowi algorytm pomiaru identyczny jak algorytmy (4.57) i (4.59). Niepotrzebna jest tutaj także para filtrów ortogonalnych dla napięcia i prądu. Istotne jest jedynie, aby stosowane filtry napięcia i prądu wprowadzały takie samo opóźnienie. Jeśli założyć, że korzysta się z przekształconych sygnałów potrzebnych do pomiaru innych wielkości, to można wykorzystać prądy i napięcia albo z filtrów dostarczających składowych bezpośrednich albo kwadraturowych. Przyjawszy, że byłyby to sygnały z wyjść filtrów bezpośrednich, otrzymuje się

$$Q(n) = \frac{1}{2 \sin(k_1 \omega_1 T_1) F_{ud} F_{id}} [u_{yd}(n - k_1) i_{yd}(n) - u_{yd}(n) i_{yd}(n - k_1)] \quad (4.61)$$

Trzeba tu także zauważyć, że równie dobrze można by zastosować sygnały z wyjść filtrów kwadraturowych, jeśli miałyby korzystniejsze charakterystyki filtracyjne. Istotne jest także to, co podkreślano już uprzednio, że algorytmu (4.28b) nie można stosować dla napięć i prądów uzyskiwanych z korelacji lub równoważnego modelu sygnałowego filtra Kalmana, gdyż wówczas (4.61) jest tożsamościowo równe zeru.

Moc bierna i czynna obliczana przez uśrednianie

Ten sposób obliczania mocy wywodzi się od układów analogowych i jest tam od dawna z powodzeniem stosowany. Niech napięcie i prąd będą dane równaniami:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_u) \\ i(t) &= I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_i) \\ i_q(t) &= I_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_i) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Iloczyn pierwszego i drugiego z równań oraz pierwszego i trzeciego dają po przekształceniach:

$$\begin{aligned} u(t)i(t) &= U_1 I_1 [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega_1 t + \varphi_u + \varphi_i)] \\ u(t)i_q(t) &= U_1 I_1 [-\sin(\varphi_u - \varphi_i) + \sin(2\omega_1 t + \varphi_u + \varphi_i)] \end{aligned} \quad (4.63)$$

Składowe stałe równań (4.63) są równe odpowiednio wartości mocy czynnej i minus mocy biernej. Składowe przemienne to druga harmoniczna sygnałów, która może być odfiltrowana w wyniku stosowania dowolnego filtra dolnoprzepustowego, a zwłaszcza uśredniania w przedziale będącym wielokrotnością połowy okresu składowej podstawowej:

$$\int_{t-T}^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \frac{T}{2} U_1 I_1 \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

$$\int_{t-T}^t u(\tau) i_q(\tau) d\tau = -\frac{T}{2} U_1 I_1 \sin(\varphi_u - \varphi_i)$$
(4.64)

gdzie $T = mT_1/2$, $m = 1, 2 \dots$.

Dyskretna realizacja całek (4.64) z zastosowaniem metody prostokątów pozwala na następujące określenie algorytmów pomiaru mocy czynnej i biernej:

$$P(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(n-k) i(n-k)$$

$$Q(n) = -\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(n-k) i\left(n-k - \frac{N_1}{4}\right)$$
(4.65)

gdzie $N = mN_1/2$; $m = 1, 2 \dots$.

Podczas obliczania mocy biernej przyjęto najprostszy sposób ortogonalizacji przez opóźnienie sygnału o $N_1/4$. Zwiększanie czasu uśredniania poprawia charakterystykę filtracyjną, lecz wydłuża czas pomiaru. Zazwyczaj stosuje się półokresowy lub pełnookresowy czas uśredniania ($m = 1$, $m = 2$). Istotną wadą tych algorytmów jest duża wrażliwość na odchylenie częstotliwości sygnału i znaczne błędy tym spowodowane ($T_1 \neq 2\pi/\omega_1$).

4.5.2. Pomiar składowych impedancji

4.5.2.1. Zastosowanie składowych ortogonalnych

Składowe impedancji - rezystancję R oraz reaktancję X - można obliczyć z równań (4.25) i (4.29) lub też z obliczonych już wartości amplitud, mocy czynnych i biernych. Ostatni sposób jest prostszy i wymaga jedynie zastosowania ogólnych równań (4.24). Naturalnie można by wygenerować ogromną liczbę algorytmów pomiaru rezystancji i reaktancji, lecz jest uzasadnione, aby moce oraz amplitudy były obliczane podobną metodą. Niecelowe bowiem wydaje się obliczanie amplitudy algorytmem bardzo szybkim, ale o niezbyt korzystnych charakterystykach filtracyjnych, oraz z kolei obliczanie np. mocy czynnej algorytmem o lepszej filtracji lecz wolnym.

Zestawienie algorytmów pomiaru rezystancji i reaktancji, wynikających z równań (4.25)

Algorytm	Numer wzoru	Wykorzystane równania	Uwagi
$R(n) = \frac{u(n)i(n) + u\left(n - \frac{N_1}{4}\right) i\left(n - \frac{N_1}{4}\right)}{i^2(n) + i^2\left(n - \frac{N_1}{4}\right)}$ $X(n) = \frac{u\left(n - \frac{N_1}{4}\right) i(n) - u(n) i\left(n - \frac{N_1}{4}\right)}{i^2(n) + i^2\left(n - \frac{N_1}{4}\right)}$	(4.66)	(4.34c) (4.49) (4.57a) (4.24)	Opóźnienie pojedyncze Założenia: $k \omega_1 T_i = \pi/2$
$R(n) = \frac{u\left(n - \frac{N_1}{12}\right) i\left(n - \frac{N_1}{12}\right) + \left[u\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - u(n)\right] \left[i\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - i(n)\right]}{i^2\left(n - \frac{N_1}{12}\right) + \left[i\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - i(n)\right]^2}$ $X(n) = \frac{\left[u\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - u(n)\right] i\left(n - \frac{N_1}{12}\right) - u\left(n - \frac{N_1}{12}\right) \left[i\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - i(n)\right]}{i^2\left(n - \frac{N_1}{12}\right) + \left[i\left(n - \frac{N_1}{6}\right) - i(n)\right]^2}$	(4.67)	(4.35) (4.50) (4.58) (4.24)	Opóźnienie podwójne Założenia: $k \omega_1 T_i = \pi/6$
$R(n) = \frac{u_{yd}(n) i_{yd}(n) + u_{yq}(n) i_{yq}(n)}{i_{yd}^2(n) + i_{yq}^2(n)}$ $X(n) = \frac{u_{yd}(n) i_{yq}(n) - u_{yq}(n) i_{yd}(n)}{i_{yd}^2(n) + i_{yq}^2(n)}$	(4.68)	(4.38) (4.52) (4.60) (4.24)	Filtry ortogonalne

T a b e l a 4.2

Zestawienie algorytmów pomiaru rezystancji i reaktancji, wynikających z równań (4.29)

Algorytm	Numer wzoru	Wykorzystane równania	Uwagi
$R(n) = \frac{u(n-k) i\left(n-\frac{N_1}{4}\right) - u(n) i\left(n-k-\frac{N_1}{4}\right)}{i^2(n-k) - i(n) i(n-2k)} \sin(k\omega_1 T_1)$	(4.69)	(4.40)	Opóźnienie pojedyncze Założenia: $k_1 \omega_1 T_1 = \pi/2$; Przypadki szczególne: a) $k = N_1/4$ b) $k = 1$
$X(n) = \frac{u(n-k) i(n) - u(n) i(n-k)}{i^2(n-k) - i(n) i(n-2k)} \sin(k\omega_1 T_1)$		(4.54a) (4.57) (4.24)	
$R(n) = \frac{u(n-2k) [i(n-2k) - i(n)] - u(n-k) [i(n-3k) - i(n-k)]}{i(n-2k) [i(n-2k) - i(n)] - i(n-k) [i(n-3k) - i(n-k)]}$	(4.70)	(4.42)	Opóźnienie podwójne Założenia: $k = k_1$ Przypadki szczególne: a) $k = 1$
$X(n) = \sin(k\omega_1 T_1) \frac{u(n-k) i(n) - u(n) i(n-k)}{i(n-2k) [i(n-2k) - i(n)] - i(n-k) [i(n-3k) - i(n-k)]}$		(4.55a) (4.57) (4.24)	
$R(n) = \frac{u_{yd}(n) i_{yq}(n-k) - u_{yd}(n-k) i_{yq}(n)}{i_{yd}(n-k) i_{yq}(n) - i_{yd}(n) i_{yq}(n-k)}$	(4.71)	(4.45)	Filttry ortogonalne Przypadki szczególne: a) $k = 1$
$X(n) = \frac{u_{yd}(n-k) i_{yd}(n) - u_{yd}(n) i_{yd}(n-k)}{i_{yd}(n-k) i_{yq}(n) - i_{yd}(n) i_{yq}(n-k)}$		(4.56) (4.61) (4.24)	

Ostatecznie otrzyma się algorytm pomiaru rezystancji powolny i o niekorzystnych charakterystykach, co mija się z celem.

W tabelach przedstawiono zbiór algorytmów pomiaru rezystancji i reaktancji, w których moce oraz amplitudy obliczono tymi samymi omawianymi metodami. Zaletą takiego postępowania jest także redukcja stałych współczynników, a więc uproszczenie algorytmów.

Algorytmy te zestawiono w tab. 4.1 i 4.2, z których pierwsza grupuje te, które wynikają z równań (4.25) i należą do pierwszej rodziny algorytmów pomiaru wielkości kryterialnych, a druga te, które wynikają z równań (4.29) i należą do drugiej rodziny. W tabelach tych równania odpowiadające kolejnym algorytmom zostały ponumerowane oraz podano, które z uprzednio uzyskanych wzorów zastosowano w danym przypadku. W uwagach zawarto z kolei informacje o tym, która metoda ortogonalizacji była stosowana, jakie założenia upraszczające przyjęto oraz jakie przypadki szczególne mogą mieć istotne znaczenie dla dalszych przekształceń algorytmów (tab. 4.2). Te przypadki szczególne dotyczą parametru k , który - gdy przyjmuje wartość równą jedności - zapewnia najkrótszy dla danego algorytmu czas pomiaru przy niezbyt korzystnych charakterystykach filtracyjnych, a gdy k jest równe $N_1/4$, otrzymuje się lepsze niż poprzednio własności filtracyjne, lecz dłuższy czas pomiaru. Trzeba tu dodać, że dyskretne napięcia i prądy występujące w poszczególnych algorytmach są dane równaniami:

$$u(n) = U_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi_u)$$

$$i(n) = I_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi_i)$$

a z kolei indeksy y w tych wielkościach oznaczają sygnały wyjściowe filtrów ortogonalnych (równanie (4.51)); gdy składowa bezpośrednia ma dodatkowy indeks d , a składowa kwadraturowa - dodatkowy indeks q .

Obliczenie R , X metodą uśredniania

W metodzie tej nie stosuje się składowych ortogonalnych, lecz dołączono ją jako najbardziej naturalną i bezpośrednią metodę pomiaru R i X . Moce czynną i bierną uzyskuje się przez uśrednianie iloczynów napięcia i prądu lub odpowiednio przesuniętego prądu, a amplitudy przez uśrednianie kwadratu lub wartości bezwzględnych prądu. Odpowiednie z tych wielkości wstawia się do ogólnych równań (4.24) i otrzymuje dwie pary prostych algorytmów pomiaru R i X . Pierwsza z nich dana jest równaniami:

$$R(n) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u(n-k) i(n-k)}{\sum_{k=0}^{N-1} i^2(n-k)}$$

(4.72)

$$X(n) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u(n-k) i\left(n-k-\frac{N-1}{4}\right)}{\sum_{k=0}^{N-1} i^2(n-k)}$$

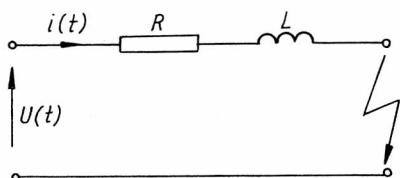
a drugi uzyskuje się przez wstawienie w mianownik wzorów (4.72) sumy wartości bezwzględnych (4.47b) zamiast sumy kwadratów i pomnożenie prawych stron obu równań (4.72) przez $8N/\pi^2$. Wszystkie z tych algorytmów wymagają przedziałów sumowania, będących całkowitą wielokrotnością półokresu. Wzrost tego przedziału poprawia charakterystyki filtracyjne, ale przedłuża oczywiście czas pomiaru.

Nie porównywano w tym rozdziale własności algorytmów wykorzystujących różne metody ortogonalizacji. Jednakże, oprócz podania tych cech algorytmów, które widoczne są na pierwszy rzut oka, bardziej szczegółowa analiza jest pozbawiona podstaw bez uwzględniania stosowanych filtrów. Zostaną one omówione w rozdz. 5 i 6, a następnie w rozdz. 7 dokona się szczegółowej analizy błędów.

4.5.2.2. Pomiar rezystancji i reaktancji z równań obwodu zwarciovego

Najczęściej stosowany i równocześnie najprostszy schemat obwodu zwarciovego przedstawiono na rys. 4.8. Obwód ten jest opisany równaniem:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.73)$$



Rys. 4.8. Uproszczony schemat obwodu zwarciovego
Fig. 4.8. Simplified scheme of fault circuit

Zazwyczaj rozwiązanie tego równania różniczkowego sprowadza się do obliczenia prądu $i(t)$ przy zadanym napięciu $u(t)$ oraz parametrach obwodu R, L . W rozważanym przypadku jest jednak inaczej. Tutaj chodzi o zmierzenie parametrów R i L na podstawie znanego napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$. Pochodna prądu nie występuje w sygnałach obwodu zwarciovego i musi być obliczona z $i(t)$. Niestety, operacja ta ma bardzo niekorzystnie ukształtowane widmo (rys. 4.5) i konieczne jest stosowanie różnych metod poprawy charakterystyki widmowej, głównie w celu zmniejszenia wpływu zakłóceń wysokoczęstotliwościowych na dokładność pomiaru R i L . Metody te mogą polegać na wstępnej filtracji napięcia i prądu (przede wszystkim), całkowaniu równania (4.73) w różnych interwałach, odpowiednim prze-

kształceniu transformaty Fouriera obu stron równania (4.73) oraz minimalizacji całki kwadratu błędu [6], [63], [120]. W przypadku najprostszym oblicza się wartości R i L bezpośrednio z równania (4.73), bez wstępnej filtracji. Obliczenie tych wartości wymaga jednak dwu równań i otrzymuje się je z (4.73) w dwu różnych chwilach t_1 i t_2 , oddalonych o dowolny interwał, najczęściej okres próbkowania T_1 .

Rozwiązywanie równania (4.73) w różnych chwilach

Równanie (4.73) zapisane w postaci dyskretnej, dla różnych chwil $(n-1)T_1$, $(n-2)T_1$, daje następujący układ równań:

$$\begin{aligned} L \Delta i(n-1) + R i(n-1) &= U(n-1) \\ L \Delta i(n-2) + R i(n-2) &= U(n-2) \end{aligned} \quad (4.74)$$

gdzie $\Delta i(n-1) = (i(n) - i(n-2))/2T_1$.

Rozwiązanie tego układu równań pozwala wyznaczyć nieznanne wartości R i L na podstawie próbek napięcia i prądu, stosownie do następujących równań:

$$\begin{aligned} R(n) &= \frac{u(n-2) \Delta i(n-1) - u(n-1) \Delta i(n-2)}{i(n-2) \Delta i(n-1) - i(n-1) \Delta i(n-2)} \\ L(n) &= \frac{u(n-1) i(n-2) - u(n-2) i(n-1)}{i(n-2) \Delta i(n-1) - i(n-1) \Delta i(n-2)} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Warto tu podkreślić, że równania te są identyczne z równaniem (4.70) z jedną tylko różnicą. Mianowicie tutaj przyjęto liniową aproksymację $u(t)$ oraz $i(t)$ między chwilami próbkowania, a tam dokładniejszą aproksymację funkcją sinus (4.8). Spostrzeżenie to jest potwierdzeniem uniwersalności wyrażeń (4.29), będących ogólną formą obliczania R oraz X . Wadą algorytmów (4.75) jest duża wrażliwość na zakłócenia wysokoczęstotliwościowe w związku z widmową charakterystyką Δi (rys. 4.5). Można tę wrażliwość znacznie ograniczyć przez stosowanie całkowania równań (4.73), a więc numerycznego całkowania układu równań (4.74).

Całkowanie równania pętli zwarciowej

Całkowanie numeryczne równań (4.74) daje:

$$\begin{aligned} L \sum_N \frac{i(n) - i(n-2)}{2T_1} + R \sum_N i(n-1) &= \sum_N u(n-1) \\ L \sum_N \frac{i(n-1) - i(n-3)}{2T_1} + R \sum_N i(n-2) &= \sum_N u(n-2) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Jednakże operacja sumowania oznacza zastosowanie uśredniającego filtru cyfrowego

$$i_{yd}(n) = i_y(n) = \sum_N i(n) = \sum_{k=0}^{N-1} i(n-k)$$

oraz, (uwzględnivszy (4.8)):

$$\sum_N \frac{i(n) - i(n-2)}{2T_i} = \frac{i_y(n) - i_y(n-2)}{2T_i} = i_{yq}(n-1) \omega_1 \frac{\sin \omega_1 T_i}{\omega_1 T_i}$$

Zależności te wynikają też z tego, że uśredniona różnica prądów jest równa różnicy wartości średnich i jest ortogonalna do wartości średniej prądów (w odpowiednich chwilach n), co wyraża równanie (4.8). Uwzględnienie tego pozwala na przepisanie równań (4.76) w postaci (po przesunięciu indeksu czasowego o jeden):

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\omega_1 T_i)}{\omega_1 T_i} \omega_1 L i_{yq}(n) + R i_{yd}(n) &= u_{yd}(n) \\ \frac{\sin(\omega_1 T_i)}{\omega_1 T_i} \omega_1 L i_{yq}(n-1) + R i_{yd}(n-1) &= u_{yd}(n-1) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Rozwiązanie tego układu równań jest już trywialne i pozwala na wyznaczenie R oraz X (równe $\omega_1 L$):

$$\begin{aligned} R(n) &= \frac{u_{yd}(n-1) i_{yq}(n) - u_{yd}(n) i_{yq}(n-1)}{i_{yd}(n-1) i_{yq}(n) - i_{yd}(n) i_{yq}(n-1)} \\ x(n) &= \frac{\omega_1 T_i}{\sin(\omega_1 T_i)} \frac{u_{yd}(n) i_{yd}(n-1) - u_{yd}(n-1) i_{yd}(n)}{i_{yd}(n-1) i_{yq}(n) - i_{yd}(n) i_{yq}(n-1)} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Algorytmy (4.78) są opisane podobnymi równaniami jak algorytmy (4.71) dla $k=1$ (z dokładnością do znaku i stałego współczynnika w reaktancji). Stały współczynnik wynika z różnej aproksymacji funkcji między chwilami próbkowania w ortogonalizacji (4.8) oraz podczas obliczania pochodnej (4.76). Piersza metoda jest dokładniejsza, a zresztą i tak przy praktycznie stosowanych częstotliwościach próbkowania współczynnik ten jest bardzo bliski jedności. Różnice w znaku wynikają z przyjętego w filtrach ortogonalnych jego odwrócenia podczas obliczania składowej kwadraturowej. Zgodność wyrażań (4.78) z ogólną postacią algorytmów (4.29) jest już całkowita. A więc znowu, rozwiązywanie równań obwodu zwarcioowego prowadzi do algorytmów (4.29), potwierdzając kolejny raz ich uniwersalność.

Obliczanie obustronnej transformaty Fouriera równania (4.73) prowadzi do identycznych analogii, z tym jednak, że zamiast uśredniania (funkcje wagi filtru są jednostkowe) stosuje się w tym przypadku filtry z funkcja-

mi wagi odpowiednio sinus i cosinus. Układ dwu równań wynika tutaj ze stosowania dwu różnych funkcji wagi, zamiast jednej, do równań przesuniętych w czasie.

Minimalizacja błędu średniokwadratowego [6]

Prosty model obwodu zwarcioowego opisany równaniem (4.73) - rys.4.8 - może być rozbudowany w wyniku uwzględnienia pojemności równoległej (rys. 4.8), co prowadzi do podwyższenia rzędu równania różniczkowego, opisującego ten obwód. Można też założyć, że błędy modelowania powodują, iż wygenerowany jest pewien sygnał zakłócający $e(t)$ i należy go uwzględnić w tym równaniu (w istocie gdyby nawet nie było błędów modelowania, to na przykład próbkowanie generuje pewien szum kwantowania). Równaniu (4.73) odpowiada więc teraz następujące równanie:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (4.79)$$

Optymalne wyznaczenie poszukiwanych wartości R oraz L polega na takim określeniu algorytmu pomiaru, aby średniokwadratowa wartość błędu była minimalna. Przy tym dokładne wartości spełniają równania (4.73).

Tak więc

$$I = \int_{t-T}^t e^2(\tau) d\tau = \int_{t-T}^t \left[u(\tau) - Ri(\tau) - L \frac{di(\tau)}{d\tau} \right]^2 d\tau = \min \quad (4.80)$$

Całka kwadratu błędu powinna być minimalna ze względu na R oraz L , to znaczy

$$\frac{\partial I}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial L} = 0.$$

Wynikają stąd następujące algorytmy obliczania R oraz L :

$$R = \frac{\int_{t-T}^t u(\tau) i(\tau) d\tau \int_{t-T}^t \left(\frac{di(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau - \int_{t-T}^t u(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau \int_{t-T}^t i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau}{M} \quad (4.81)$$

$$L = \frac{\int_{t-T}^t u(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau \int_{t-T}^t i^2(\tau) d\tau - \int_{t-T}^t u(\tau) i(\tau) d\tau \int_{t-T}^t i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau}{M}$$

$$\text{gdzie } M = \int_{t-T}^t i^2(\tau) d\tau \int_{t-T}^t \left[\frac{di(\tau)}{d\tau} \right]^2 d\tau - \left[\int_{t-T}^t i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau \right]^2.$$

Można także zauważyć, że algorytmy (4.81) można otrzymać jako rozwiązanie układu równań, z których jedno powstaje przez przemnożenie obu stron przez $i(t)$ i scałkowanie w przedziale T , a drugie przez prze-

mnożenie tego równania przez pochodną prądu i całkowanie. Błąd w wyznaczaniu rezystancji i indukcyjności zależy więc od dwóch całek:

$$e_1 = \int_{t-T}^t e(\tau) i(\tau) d\tau$$

$$e_2 = \int_{t-T}^t e(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau$$

Wynika stąd wniosek, że błąd ten będzie zerowy wówczas, gdy e_1 i e_2 są zerowe, a więc gdy zakłócenie $e(t)$ jest ortogonalne w przedziale T z prądem i jego pochodną.

Omawiana metoda daje bardzo dobre wyniki, lecz jest również bardzo złożona, przede wszystkim ze względu na konieczność obliczania wielu iloczynów sygnałów. Wymaga to stosowania wyraźnie większych dokładności i długości słowa maszynowego niż mnożenie sygnałów przez stałą.

W zakończeniu rozdziału, w którym podjęto próbę analizy i unifikacji stosowanych algorytmów pomiarowych, warto może podać nasuwający się wniosek ogólny. Mógłby on być sformułowany tak: Prawie wszystkie algorytmy pomiaru wielkości kryterialnych sprowadzają się do przetwarzania składowych ortogonalnych według zależności (4.20), (4.23), (4.25) oraz (4.27)-(4.29) tworzących dwie duże rodziny algorytmów, przedstawione blokowo na rys. (4.6) i (4.7). Badania własności tych algorytmów można więc ograniczyć do tych dwu przypadków ze względu na sposób otrzymywania wchodzących w ich skład ortogonalnych składowych.

5. CYFROWA FILTRACJA I KORELACJA

5.1. Wprowadzenie

Uzyskiwanie potrzebnej informacji zawsze wymaga takiego przekształcenia całego dostępnego zbioru, aby wielkości pożądane uwypuklić, a zbędne stłumić. Układ, który realizuje to zadanie, można nazwać, w sensie ogólnym, filtrem. Nie inaczej jest w przypadku napięć i prądów systemu elektroenergetycznego, używanych w zabezpieczeniach elektroenergetycznych. Tutaj pożądaną informację zawierają napięcia i prądy o częstotliwości podstawowej, które stanowią tylko część całej zawartości sygnału,

Ogólnie, filtrem liniowym jest układ opisany równaniem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(t - \tau) d\tau \quad (5.1)$$

gdzie

x , y - odpowiednio sygnał wejściowy i wyjściowy,

w - sygnał wyjściowy filtru, gdy $x(\tau) = \delta(\tau)$, zwany odpowiedzią impulsową lub funkcją wagi.

Transformacja Fouriera równania (5.1) z uwzględnieniem, że transformata całki spłotu jest iloczynem transformat, daje:

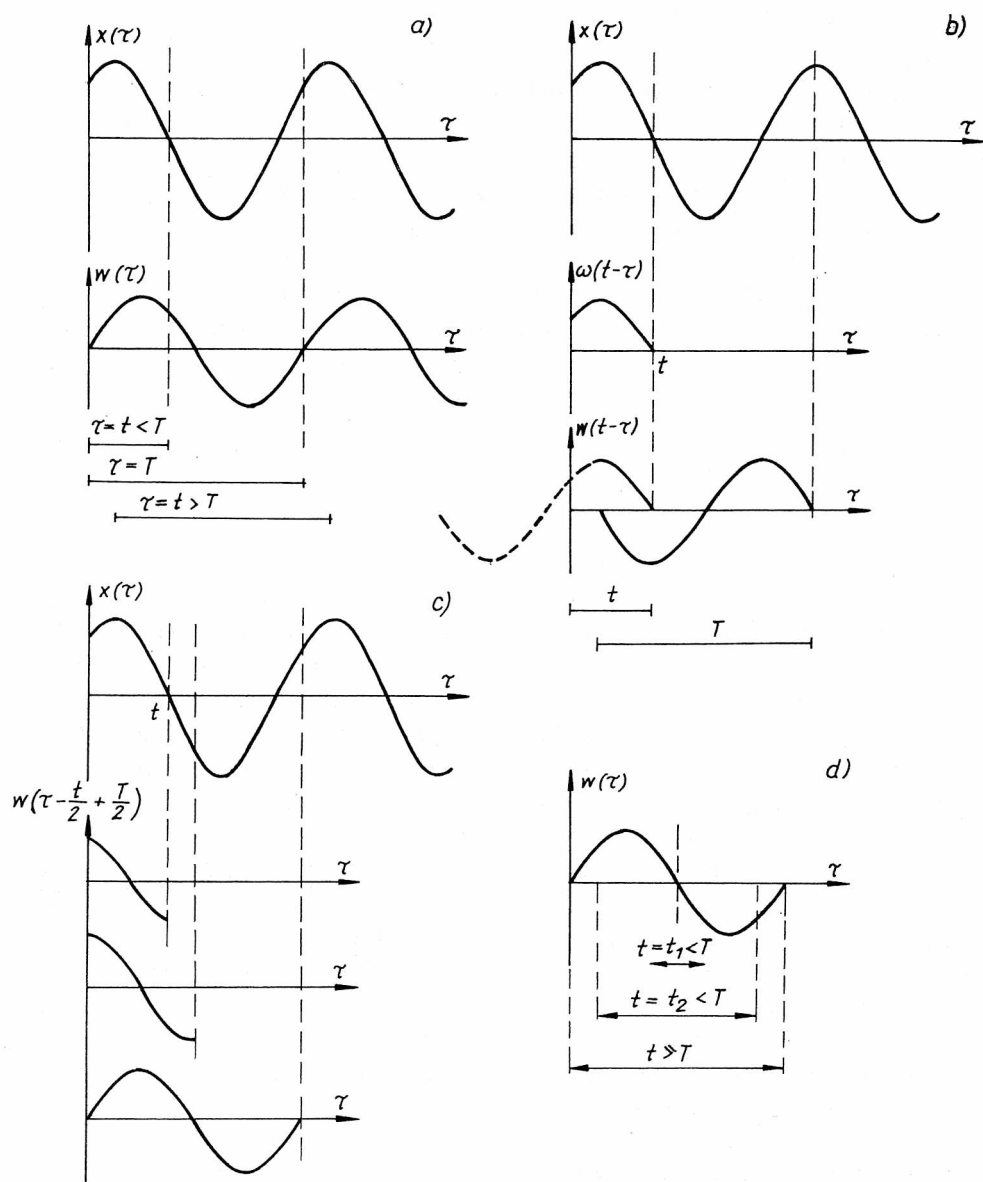
$$Y(j\omega) = X(j\omega) W(j\omega) \quad (5.2)$$

Para równań (5.1) i (5.2) charakteryzuje całkowicie filtr w dwu ważnych dziedzinach, w dziedzinie czasu i dziedzinie częstotliwości, a podstawowe znaczenie mają funkcje wagi filtru $w(\tau)$ oraz jej transformata Fouriera $W(j\omega)$ stanowiąca widmo filtru, a więc jego charakterystykę częstotliwościową. Znane twierdzenie o relacji między dziedzinami czasu i częstotliwości, wynikające z samych transformat Fouriera prostej i odwrotnej mówi, że jeśli funkcja wagi jest funkcją bramki w przedziale T ($w(t) = 1(t) - 1(t - T)$), to jej widmo jest nieskończenie rozległe, a także jeśli $W(j\omega)$ jest funkcją bramki, to funkcja wagi, czyli odpowiedź filtru, jest nieskończenie rozległa. Z twierdzenia tego wynika także dalej, że im węższy przedział T , tym wolniej zanika $W(j\omega)$, oraz im węższe pasmo $\Delta\omega$ funkcji bramki w dziedzinie częstotliwości, tym wolniej zanika $w(t)$. Wniosek nasuwa się sam i jest to znany dylemat szybkość-dokładność. Stan przejściowy filtru i zbliżanie się do wartości ustalonej trwa tym krócej, im gorsze są charakterystyki częstotliwościowe filtru, oraz im lepszy filtr, tym dłuższy czas ustalania. W praktyce osiąga się kompromis wynikający z postawionych wymagań, z tego czy ważniejsze jest osiągnięcie wymaganego czasu ustalania czy wysokiej jakości filtracji. W układach stosowanych na przykład w telekomunikacji, które pracują w stanie ustalonym, najważniejsze jest uzyskanie pożądanej charakterystyki filtracyjnej, a stan przejściowy filtru odgrywa mniejszą rolę. Klasyczna synteza filtru polega więc na skonstruowaniu filtru o zadanej charakterystyce częstotliwościowej.

[Inaczej jest w filtrach stosowanych w zabezpieczeniach elektroenergetycznych. Zaburzenie powstałe w systemie elektroenergetycznym powoduje skokowe zmiany napięć i prądów, a nowe wartości przebiegów ustalonych muszą być zmierzone możliwie szybko, w wyraźnie określonym przedziale czasu. Tak więc w tym wypadku potrzebny jest filtr, którego funkcja wagi albo zanika bardzo szybko, albo jest określona w przedziale T , a poza nim jest zerowa, a jego charakterystyki częstotliwościowe są możliwie najkorzystniejsze]. Drugi przypadek zilustrowano na rys. 5.1b. Jego sygnały wyjściowe po skokowej zmianie sygnału w stanie przejściowym i ustalonym są opisane równaniami:

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) w(t - \tau) d\tau, \quad \text{gdy } t \geq T \quad (5.3a)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) w(t - \tau) d\tau, \quad \text{gd}y \quad t < T \quad (5.3b)$$



Rys. 5.1. Ilustracja metod: a - korelacji, b - filtracji, c,d - filtracji ze zmiennym oknem pomiarowym

Fig. 5.1. Illustration of methods: a - correlation, b - filtration, c,d - filtration with variable data window

lub inaczej, z jeszcze bardziej widocznym czasem trwania stanu przejściowego filtru:

$$y(t) = \int_0^T x(t - \tau) w(\tau) d\tau, \quad \text{gdy } t \geq T \quad (5.4a)$$

$$y(t) = \int_0^t x(t - \tau) w(\tau) d\tau, \quad \text{gdy } 0 \leq t \leq T \quad (5.4b)$$

gdzie $x(-t) = 0$.

Pożądana informacja może być eksponowana z sygnału zawierającego zakłócenia nie tylko w wyniku filtracji, ale także przez inne przetwarzanie sygnału. Ważną metodę stanowi tak zwana metoda korelacji, w której określa się stopień skorelowania sygnału z funkcją $w(t)$ taką, jak poszukiwana w nim składowa (rys. 5.1a). Ta składowa jest więc najsilniej skorelowana z $w(t)$, a inne składowe słabiej, co daje pożądaný skutek filtracji. Korelacja jest opisana równaniami:

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) w(\tau) d\tau, \quad \text{gdy } t \geq T \quad (5.5a)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) w(\tau) d\tau, \quad \text{gdy } 0 \leq t < T \quad (5.5b)$$

Można tu zauważyć, że w wersji cyfrowej korelacja może być łatwiej realizowana niż splot w sensie prostszego uzyskania postaci rekursywnej, oraz że korelacja nie jest w sensie stosowanej klasyfikacji filtrem liniowym, gdyż sygnał wyjściowy $y(t)$ dla przemennego sygnału wejściowego $x(t)$, będzie miał inną częstotliwość, a w szczególnym przypadku będzie stały. Wynikają stąd także pewne konsekwencje dla pomiaru parametrów sygnałów i innych wielkości kryterialnych.

Otóż napięcia i prądy są sygnałami przemennymi o ustalonej częstotliwości i do ich identyfikacji potrzebne jest określenie dwu pozostałych parametrów, to jest amplitudy i fazy. Sygnał wyjściowy pojedynczego filtru, jako sygnał przemienny, może być dalej zortogonalizowany, co daje dwa równania wystarczające do określenia tych dwu parametrów (rozdz. 4). Pojedynczy sygnał wyjściowy korelacji nie pozwala już niestety na podobny zabieg, a konieczne jest stosowanie dwu funkcji korelujących $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$, najlepiej ortogonalnych. Dwa sygnały wyjściowe korelacji pozwalają już na obliczenie poszukiwanych parametrów. Problem ortogonalności filtrów korelacyjnych omówiono w p. 5.3.2.1 oraz w pracy [60].

W podsumowaniu można powiedzieć, że filtracja i ortogonalizacja mogą być rozdzielone lub połączone przez zastosowanie pary filtrów ortogonalnych, natomiast korelacja może być stosowana tylko w takiej wersji zespolonej wraz z ortogonalizacją.

W zilustrowanych na rys. 5.1a, 5.1b i opisanych wzorami (5.4) i (5.5) filtracji i korelacji stan przejściowy po skokowej zmianie sygnału trwa czas t i dopiero po jego upływie uzyskuje się ustalony sygnał wyjściowy. Jest to dla stałego okna pomiarowego T czas bezpowrotnie stracony. Jednakże przy pewnych założeniach i wykorzystaniu wartości w stanie przejściowym można tego uniknąć. Przykładowo można rozpatrzyć korelację wraz z najprostszym zestawem funkcji korelujących sinus i cosinus z założeniem, że badany sygnał jest opisany następującym równaniem:

$$x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi) \quad (5.6)$$

W wyniku korelacji tego sygnału z wymienionymi funkcjami korelującymi, w przedziale t mniejszym od T otrzymuje się:

$$\int_0^t x(\tau) \cos \omega_1 \tau d\tau = \int_0^t X_1 [\cos \varphi \cos \omega_1 \tau + \sin \varphi \sin \omega_1 \tau] \cos \omega_1 \tau d\tau$$

$$\int_0^t x(\tau) \sin \omega_1 \tau d\tau = \int_0^t X_1 [\cos \varphi \cos \omega_1 \tau + \sin \varphi \sin \omega_1 \tau] \sin \omega_1 \tau d\tau$$

i stąd

$$\begin{aligned} \int_0^t x(\tau) \cos \omega_1 \tau d\tau &= y_d \int_0^t \cos^2 \omega_1 \tau d\tau + y_q \int_0^t \sin \omega_1 \tau \cos \omega_1 \tau d\tau \\ \int_0^t x(\tau) \sin \omega_1 \tau d\tau &= y_d \int_0^t \sin \omega_1 \tau \cos \omega_1 \tau d\tau + y_q \int_0^t \sin^2 \omega_1 \tau d\tau \end{aligned} \quad (5.7)$$

gdzie $y_d = X_1 \cos \varphi$, $y_q = X_1 \sin \varphi$.

Wartości całek po prawej stronie równań (5.7) zmieniają się wraz ze zmianą czasu t , lecz są dla danego t ustalone. Umożliwia to obliczenie, dla znanych całek po lewej stronie tych równań, wartości y_d oraz y_q . Pozwala to na obliczenie amplitudy i fazy sygnału, a także na odwzorowanie sygnału pierwotnego $x(t)$ stosownie do równania

$$y(t) = y_d \cos \omega_1 t + y_q \sin \omega_1 t \quad (5.8)$$

Przedstawiono tutaj najprostszy przypadek metody odzorowania krzywych w celu jej zilustrowania, a ma ona liczne warianty. Związane one są ze stosowaniem większej liczby aproksymujących funkcji trygonometrycznych, aproksymacją wielomianami, warunkami optymalizacji według różnych kryteriów (najczęściej minimum całki kwadratu błędu) itd. Istotne uwarunkowania i szczegóły metody przedstawiono w p. 5.3.

Podobną metodę można też zastosować wykorzystując nie korelację, lecz splot. Wygodnie jest wówczas używać funkcji wagi, które są odpowiednio parzyste i nieparzyste w odniesieniu do środka okna pomiarowego (rys.

5.1c,d). Szczegóły takiej filtracji dla zmiennego okna pomiarowego omówiono w p. 5.5.

W podsumowaniu można stwierdzić, że stosowane metody przetwarzania napięć i prądów, które mają na celu wyeksponowanie pożądanej informacji spośród zakłóceń, można podzielić na trzy następujące grupy:

- a) cyfrowa filtracja nieortogonalna lub ortogonalna,
- b) korelacja,
- c) metody odzorowania krzywych.

Przy tym korelacja jest szczególnym przypadkiem metody odwzorowania krzywych. Metody z punktu a oraz b są metodami stałego okna pomiarowego, a metody z punktu c mają zmienne narastające okno pomiarowe, które może być ograniczone do pewnej ustalonej wartości (najczęściej okres lub połowa okresu składowej podstawowej sygnału).

Metody te są w stanie sprostać wymaganiom związanym z przetwarzaniem sygnałów szybkich zabezpieczeń, którymi są:

- szybkie ustalenie sygnałów wyjściowych po skokowej zmianie sygnału wejściowego w celu zapewnienia odpowiednio krótkiego czasu pomiaru,
- możliwie dobra skuteczność filtracji składowych zakłócających,
- niezbyt duże obciążenie obliczeniowe, zapewniające realizowalność w czasie rzeczywistym, to jest między chwilami próbkowania.

5.2. Filtracja cyfrowa

Filtracja cyfrowa jest operacją na ciągu dyskretnych danych wejściowych, w której ciąg wyjściowy zależy od ciągu wejściowego oraz charakterystyki filtru. Filtr cyfrowy, podobnie jak filtr analogowy, może być opisany za pomocą charakterystyk czasowych lub charakterystyk częstotliwościowych. Ze względu na uzyskiwane charakterystyki częstotliwościowe filtry cyfrowe mogą być podzielone na dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe, środkowoprzepustowe i środkowozaporowe. Największe znaczenie w omawianych zastosowaniach mają filtry cyfrowe dolnoprzepustowe oraz środkowoprzepustowe. Niekiedy także, w związku z realizacją pewnych przekształceń sygnałów mających na celu uzyskanie składowych ortogonalnych, otrzymuje się niepożądane charakterystyki filtrów górnoprzepustowych. Ze względu na uzyskiwane charakterystyki czasowe filtry cyfrowe można podzielić na dwie grupy: filtry czasowe ze skończoną, ograniczoną odpowiedzią impulsową, a więc skończoną pamięcią, zwane też filtrami nierekursywnymi, oraz filtry z nieograniczoną odpowiedzią impulsową, a więc nieskończoną pamięcią, zwane też filtrami rekursywnymi.

Filtr cyfrowy nierekursywny jest opisany równaniem:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k) \quad (5.9)$$

gdzie

x, y - próbki sygnału wejściowego i wyjściowego,

$a_k = w(k)$,

$w(k)$ - dyskretna funkcja wagi filtru.

Prawa strona równania (5.9) jest dyskretnym splotem funkcji wagi i sygnału wejściowego, równym sygnałowi wyjściowemu filtru. Równanie to jest analogiczne do równania (5.4). Filtr ma pamięć skończoną, ograniczoną do N próbek sygnału x .

Filtr cyfrowy rekursywny jest opisany równaniem:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k y(n-k) \quad (5.10)$$

gdzie $N - 1 > M$.

Drugi wyraz prawej strony równania (5.10), tworzący sumę ważoną $M+1$ poprzednich wartości sygnału wyjściowego powoduje, że jego pamięć jest nieskończona i stąd jego nazwa - filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej. Filtr rekursywny jest ogólniejszym typem filtru cyfrowego, a gdy M jest równe zeru, otrzymuje się filtr nierekursywny.

Transmitancje filtrów opisanych równaniami (5.9) oraz (5.10) otrzyma się po obliczeniu transformat Z lewej i prawej strony tych równań. Pamiętając z własności tej transformaty, że opóźnienie sygnału o jeden okres próbkowania odpowiada pomnożeniu przez operator z^{-1} , otrzymuje się odpowiednio dla filtru nierekursywnego i rekursywnego

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = W(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} \quad (5.11a)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}} \quad (5.11b)$$

Charakterystyki widmowe tych filtrów otrzyma się przez podstawienie w miejsce operatora z operatora jemu równoważnego, $\exp(j\omega T_i)$:

$$W^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp(-j\omega T_i) \quad (5.12a)$$

$$H^*(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp(-j\omega T_i)}{1 - \sum_{k=0}^M b_k \exp(-j\omega T_i)} \quad (5.12b)$$

gdzie gwiazdki przy transmitancji widmowej oznaczają, że jest to widmo układu dyskretnego.

Filtry nierekursywne, opisane równaniami (5.9), (5.11a) i (5.12b), mogą w zasadzie być zrealizowane tylko z zastosowaniem techniki cyfrowej, gdy z kolei filtry rekursywne opisane równaniami (5.10), (5.11b) i (5.12b), mogą być zrealizowane zarówno analogowo, jak i cyfrowo, jako że mają nieskończoną odpowiedź impulsową. Ta ostatnia cecha pozwala na zastosowanie całej bogatej teorii filtrów analogowych podczas projektowania cyfrowego filtra rekursywnego [4], [186].

Metody projektowania cyfrowych filtrów rekursywnych i nierekursywnych mają także bardzo bogatą bibliografię i niecelowe byłoby ich przytaczanie tutaj. Zastosowanie tych metod syntezy podczas projektowania filtrów cyfrowych do zabezpieczeń elektroenergetycznych jest niestety ograniczone ze względu na brak możliwości jednoczesnej optymalizacji charakterystyk widmowych i dynamiki filtru.

Cyfrowe filtry rekursywne znalazły niewielkie zastosowanie w zabezpieczeniach elektroenergetycznych. Składa się na to zapewne wiele czynników, z których, oprócz wymienionych, najważniejsze to: zazwyczaj długi czas zanikania procesu przejściowego, znaczna wrażliwość na niewielkie zmiany wartości współczynników a_k , b_k filtru oraz różniące się o kilka rzędów ich wielkości, co wymaga znacznych długości słowa maszynowego i ogranicza bardzo możliwości realizacji w czasie rzeczywistym.

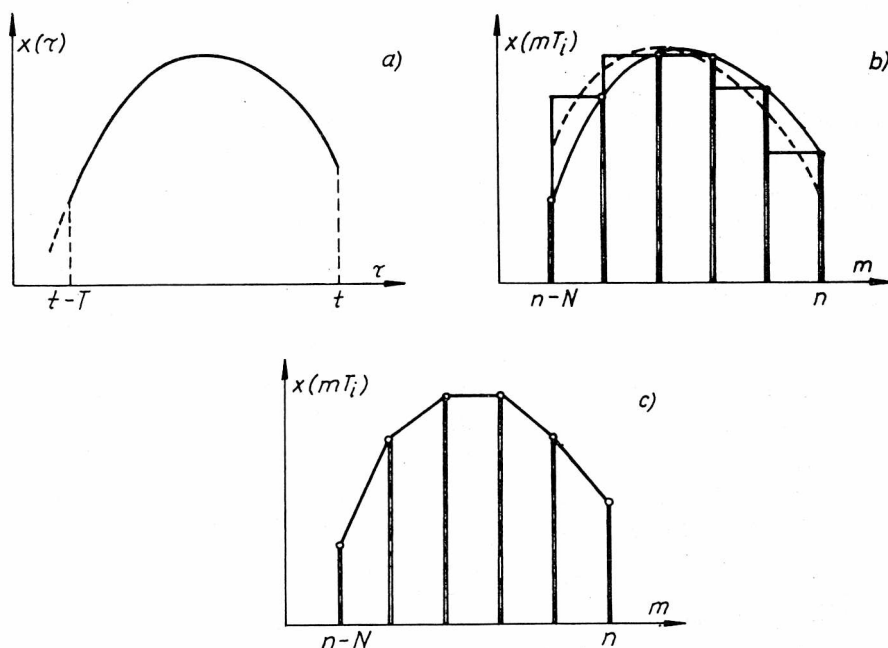
Możliwości optymalizacji filtrów nierekursywnych są także w pewnym sensie ograniczone. Związane to jest między innymi z tym, że sformułowanie dużych wymagań dotyczących pasma zaporowego i szybkości przejścia z pasma przepustowego do zaporowego może prowadzić do filtrów wysokich rzędów, trudnych do zrealizowania w czasie rzeczywistym [4], [186].

Przytoczone rozważania można tak podsumować: Ścisła synteza filtrów cyfrowych oraz ich optymalizacja ze względu na wymagane charakterystyki częstotliwościowe, pożądaną dynamikę oraz współczynniki filtru do zrealizowania w arytmetyce stałoprzecinkowej, jest trudna. Zagadnienie można próbować sformułować inaczej, a mianowicie, jakby syntetyzować filtr wychodząc z dziedziny czasu. Polega to na wyborze dopuszczalnej długości okna pomiarowego i możliwie prostej postaci funkcji wagi $w(k)$ (współczynniki a_k) i określeniu najlepszych lub satysfakcjonujących charakterystyk widmowych. Spośród wielu takich filtrów największe znaczenie mają te z funkcjami wagi sinus, cosinus [1], [60], [62], [165], [181], funkcją wagi stałą oraz funkcjami Walsha [35], [53], [60], [147]. Dodatkowy wymóg realizacji pary filtrów ortogonalnych jest tutaj łatwy do spełnienia.

Badanie charakterystyk tych filtrów, gdy ich funkcje wagi mogą być określone w postaci analitycznej, można znacznie uprościć i przyspieszyć obliczając widma ciągłych funkcji wagi zamiast widm dyskretnych.

5.2.1. Widmo całkowania ciągłego i dyskretnego

Obliczanie widma (5.12a) filtru nierekursywnego (5.9) wymaga niezbyt wygodnego sumowania zespolonych funkcji eksponencjalnych. Widmo to można otrzymać w uproszczony sposób znacznie łatwiej. Można to wykazać porównując widmo całkowania ciągłego i dyskretnego w skończonym przedziale $T = NT_1$.



Rys. 5.2. Funkcja ciągła (a) oraz odpowiadające jej funkcje dyskretne w całkowaniu metodą prostokątów (b) i trapezów (c)

Fig. 5.2. Continuous function (a) and adequate discrete functions when rectangular (b) and trapezoidal (c) rules of integration are applied

Niech będzie dana krzywa ciągła $x(\tau)$ oraz ta krzywa reprezentowana przez wartości próbek w chwilach mT_1 ; $x(mT_1)$ - rys. 5.2a,b,c. Całka ciągła w przedziale $t-T, t$ odpowiada polu pod krzywą ciągłą, a sumy w przedziale $(n-N)T_1, nT_1$ odpowiadają sumie pól prostokątnych na rys. 5.2b - gdy stosuje się tę metodę oraz sumie pól trapezów na rys. 5.2c - gdy stosuje się drugą z tych metod. Rozpatrzmy przypadek ciągły oraz całkowania metodą prostokątów. Można zapisać następujące równania:

$$y(t) = \int_0^T x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (5.13a)$$

$$y(n) = T_i \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) = T_i \sum_{k=-\infty}^{\infty} b(k) x(n-k) \quad (5.13b)$$

gdzie

$$b(\tau) = 1(\tau) - 1(\tau - T)$$

$$b(k) = 1 \quad 0 \leq k \leq N$$

$$b(k) = 0 \text{ dla pozostałych } k.$$

Z obliczenia transformat Fouriera równań (5.13) otrzymujemy się:

$$Y(j\omega) = B(j\omega) X(j\omega) \quad (5.14a)$$

$$Y^*(j\omega) = T_i B^*(j\omega) X^*(j\omega) \quad (5.14b)$$

Widma $B(j\omega)$ i $B^*(j\omega)$ są więc widmami operacji całkowania ciągłego i dyskretnego odpowiednio i charakteryzuje przekształcanie widma sygnału wejściowego w widmo sygnału wyjściowego w rezultacie całkowania w skończonym przedziale. Widma te są określone równaniami:

$$B(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^T e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.15a)$$

$$T_i B^*(j\omega) = T_i \sum_{k=-\infty}^{\infty} b(k) e^{-j\omega k T_i} = T_i \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k T_i} \quad (5.15b)$$

W wyniku obliczeń tych wyrażeń, a także podobnych wyrażeń dla metody trapezów, otrzymuje się następujące równania określające widma całkowania ciągłego oraz dyskretnego metodą prostokątów i trapezów:

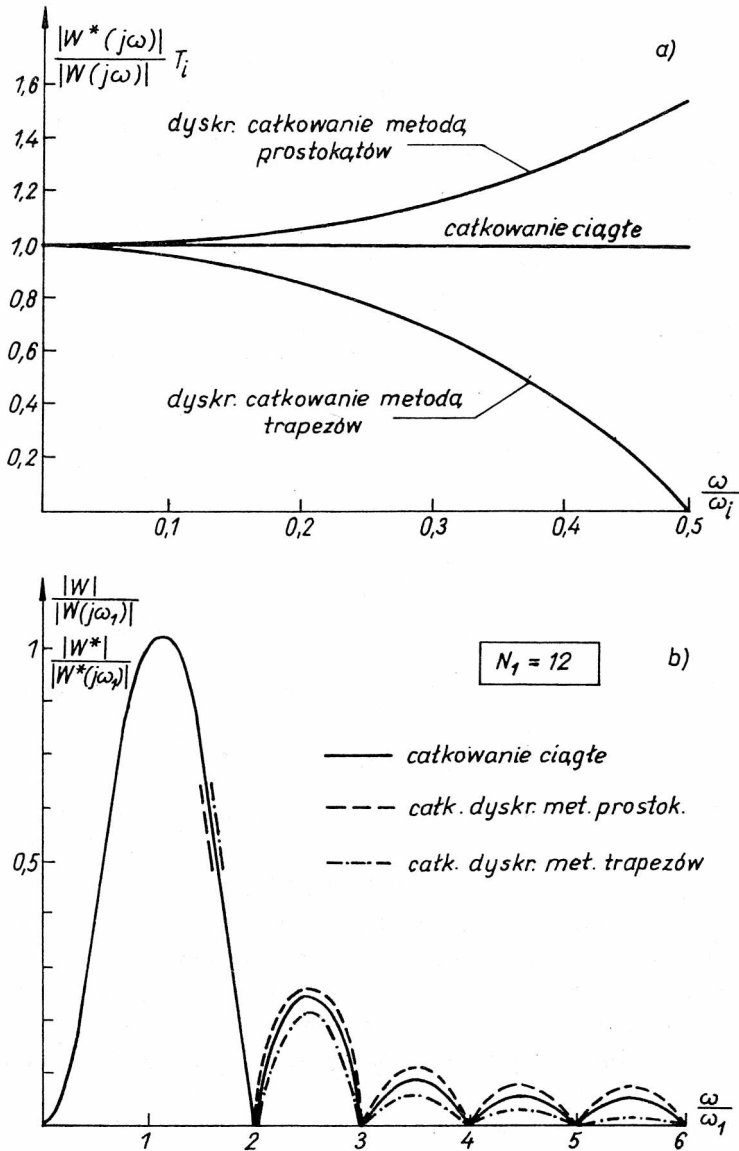
$$B(j\omega) = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j(\omega T/2)} \quad (5.16a)$$

$$T_i B_p^*(j\omega) = T \frac{\sin(\omega T/2)}{N \sin(\omega T/2N)} e^{-j(\omega T/2)} e^{j(\omega T/2N)} \quad (5.16b)$$

$$T_i B_t^*(j\omega) = T \frac{\sin(\omega T/2) \cos(\omega T/2N)}{N \sin(\omega T/2N)} e^{-j(\omega T/2)} \quad (5.16c)$$

Analiza wzorów (5,16a-c) prowadzi do licznych wniosków. Po pierwsze więc, operacja całkowania w skończonym przedziale $T = NT_i$ wprowadza przesunięcie fazy składowych o częstotliwości ω o wartości minus $\omega T/2$. Jest to przesunięcie fazy wynikające tylko z operacji całkowania ciągłego i dyskretnego. Zatem dla danej funkcji wagi filtru przesunięcie fazy sygnału wyjściowego jest sumą tego przesunięcia i przesunięcia widma funkcji wagi (w przedziale nieskończonym). Po drugie, widmo całkowania metodą prostokątów jest przesunięte o fazę $\omega T_i/2 = \omega T/2N$, co w oczywisty sposób wynika z aproksymacji linią przerywaną (rys. 5.2b, wzór (5.16b)) prostokątów odpowiadających całce dyskretniej. Można temu łatwo przeciw-

działać przez przesunięcie dyskretnej funkcji wagi o pół okresu próbkowania w przeciwnym kierunku. Podczas używania filtrów ortogonalnych nie odgrywa to w ogóle roli, gdyż wszystkie sygnały są tak samo przesunięte,



Rys. 5.3. Porównanie widm różnych metod całkowania (a) oraz przykładowe widma (b)

Fig. 5.3. Comparison of different rules of integration (a) and their spectra (b)

jeśli wszędzie stosowana jest metoda prostokątów. Całkowanie metodą trapezów nie wprowadza dodatkowego przesunięcia w ogóle, co wynika z rys. 5.2c i równania (5.16c). Po trzecie wreszcie, zbadanie ilorazów widm dyskretnych i ciągłego pozwala stwierdzić, że w zakresie niskich częstotliwości nie różnią się one znacznie (rys. 5.3a). W zakresie częstotliwości wyższych widmo podczas całkowania metodą prostokątów nieznacznie wzrasta, a widmo całkowania metodą trapezów spada do zera (5.16c). Aby zilustrować te wnioski, na rys. 5.3b przedstawiono przykładowe widma podczas całkowania ciągłego oraz metodą prostokątów i trapezów.

Najważniejszy wniosek dotyczy możliwości zastąpienia żmudnego obliczania sum (5.12a) przez całki w tym przedziale podzielone przez wartość T_1 (gdyż T_1 w (5.12a) nie występuje). Podobnie też można posługiwać się całką spłotu do obliczania spłotu dyskretnego. Można więc napisać następujące równoważne postaci wyrażen ciągłych i dyskretnych:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) w(k) \Longleftrightarrow \frac{1}{T_1} \int_0^T x(t-\tau) w(\tau) d\tau \quad (5.17a)$$

$$X^*(j\omega) W^*(j\omega) \Longleftrightarrow \frac{1}{T_1} X(j\omega) W(j\omega) \quad (5.17b)$$

$$W^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} w(k) e^{-jk\omega T_1} \Longleftrightarrow \frac{1}{T_1} \int_0^T w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.17c)$$

Szczególnie wyrażenie (5.17c) jest bardzo przydatne do obliczania widm filtrów nierekursywnych, których funkcje wagi są dane w postaci analitycznej.

5.2.2. Filtry nierekursywne o typowych funkcjach wagi i ich widma

5.2.2.1. Widma filtrów i unormowane charakterystyki częstotliwościowe

Na podstawie uproszczonej relacji (5.17c) można łatwo obliczyć widma szeregu typowych funkcji wagi, które dane są w postaci analitycznej i które mają korzystne dolnoprzepustowe lub pasmowoprzepustowe charakterystyki filtracyjne, szczególnie ważne i korzystne w omawianych zastosowaniach. Zaliczyć do nich trzeba przede wszystkim funkcje wagi, które są funkcjami Walsha zerowego (okno prostokątne), pierwszego i drugiego rzędu oraz szczególnie funkcjami sinus i cosinus.

Wszystkie omawiane funkcje wagi są albo parzyste albo nieparzyste w odniesieniu do środka okna pomiarowego. Jest więc wygodne dokonanie ich przesunięcia z przedziału $(0, T)$ do przedziału $(-T/2, T/2)$. Oznaczając taką przesuniętą wycelowaną funkcję przez $w_p(\tau)$ można napisać:

$$w_p(\tau) = w(\tau + \frac{T}{2})$$

$$W(j\omega) = W_p(j\omega) e^{-j\omega T/2} \quad (5.18)$$

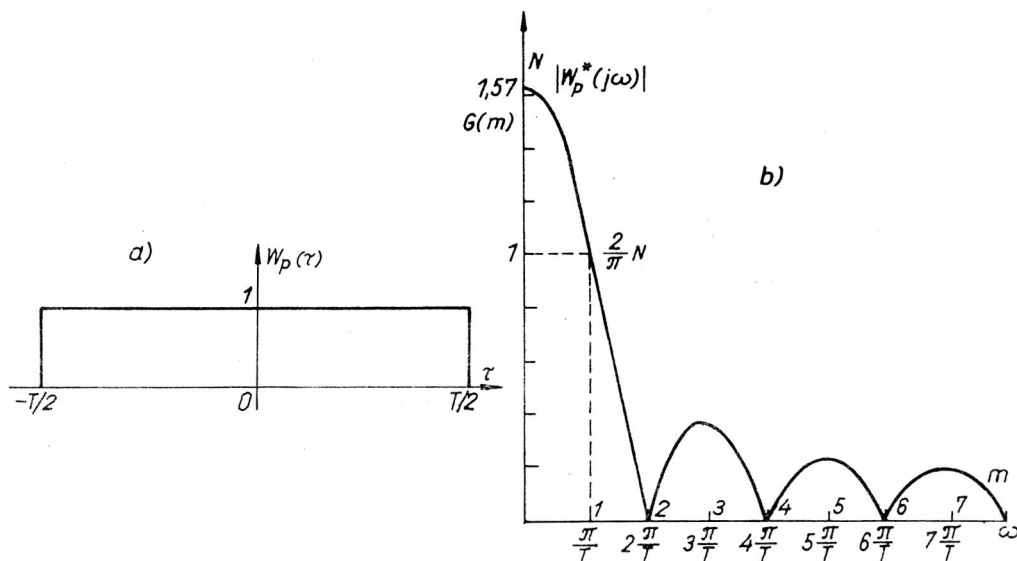
Oznacza to, że rzeczywisty argument filtru jest sumą argumentu widma przesuniętej funkcji wagi oraz $-\omega T/2$.

Istotne jest już teraz podkreślenie łatwości, z jaką uzyskuje się w przedstawiony sposób filtry ortogonalne, tak ważne dla wszystkich algorytmów pomiaru wielkości kryterialnych omawianych w rozdz. 4.

1. Funkcja Walsha zerowego rzędu (okno prostokątne)

Widmo okna prostokątnego było już obliczone poprzednio (5.16a), a po uwzględnieniu (5.17c) i (5.18), może być opisane równaniem:

$$W_p^*(j\omega) = \frac{T}{T_1} \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{(\frac{\omega T}{2})} = N \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{(\frac{\omega T}{2})} \quad (5.19)$$



Rys. 5.4. Funkcja Walsha zerowego rzędu (a) i jej widmo unormowane (b)
Fig. 5.4. Walsh function of zero order (a) and its normalized spectrum (b)

Moduł tego widma w funkcji częstotliwości przedstawiono na rys. 5.4 (dolna skala). Jest to typowa charakterystyka filtru dolnoprzepustowego, a właściwy wybór długości okna $T(NT_1)$ zapewnia wyfiltrowywanie pożądanych składowych sygnałów. Łatwo można w tym przypadku uzyskać charakterystykę unormowaną w funkcji zredukowanej częstotliwości. Przyjmijmy na

przykład, że okno T jest równe połowie okresu składowej podstawowej sygnału T_1 . Mamy wówczas:

$$W_p^*(j\omega_1) = N \frac{\sin \frac{\omega_1 T_1}{4}}{\frac{\omega_1 T_1}{4}} = \frac{2}{\pi} N = \frac{1}{\pi} N_1 \quad (5.20a)$$

$$G(m) = \frac{|W_p^*(j\omega)|}{|W_p^*(j\omega_1)|} = \frac{\pi}{2} \frac{\left| \sin \left(\frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2} \right) \right|}{\frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2}} = \frac{\omega_1}{\omega} \left| \sin \left(\frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2} \right) \right| \quad (5.20b)$$

gdzie $m = \omega/\omega_1$.

Ta unormowana charakterystyka jest analogiczna do modułu widma (5.19), tyle tylko, że nieco bardziej czytelna. Sygnał o częstotliwości ω_1 jest wzmacniany ze wzmacnieniem jeden, składowa stała ze wzmacnieniem 1,57, a częstotliwości większe niż ω_1 są tłumione. Parzyste harmoniczne sygnału są odrzucane (tłumione do zera).

2. Funkcja Walsha pierwszego rzędu

Funkcję wagi, będącą funkcją Walsha pierwszego rzędu, przedstawiono na rys. 5.5a. Jej widmo jest dane równaniem

$$W_{p1}^*(j\omega) = \frac{1}{T_1} \int_{-T/2}^0 e^{-j\omega\tau} d\tau - \frac{1}{T_1} \int_0^{T/2} e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.21)$$

po obliczeniu tych całek otrzymuje się

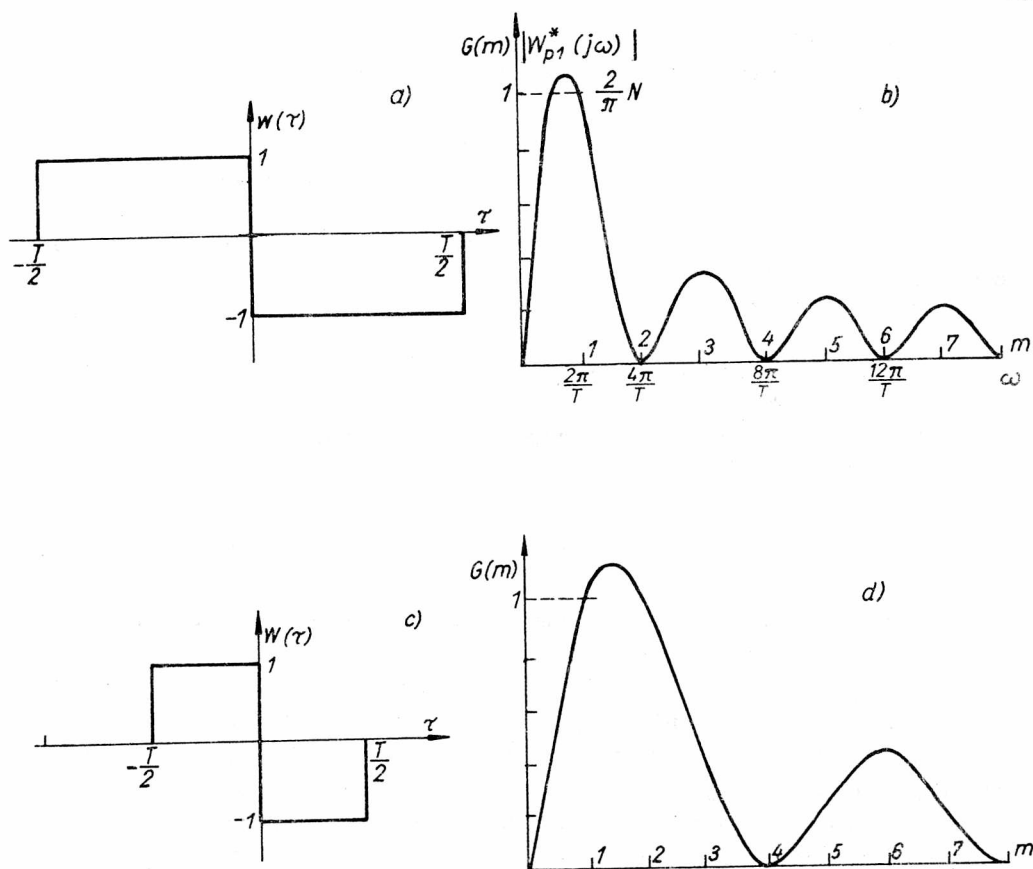
$$W_{p1}^*(j\omega) = jN \frac{\sin^2(\omega T/4)}{(\omega T/4)} \quad (5.22)$$

Indeks p_1 oznacza przesuniętą funkcję Walsha pierwszego rzędu. Przebieg modułu tego widma przedstawiono na rys. 5.5b. Jak widać, w tym przypadku otrzymuje się charakterystykę filtra pasmowo-przepustowego o słabym tłumieniu w pasmie zaporowym, chociaż składowe o niektórych częstotliwościach są odrzucane. Charakterystykę unormowaną otrzyma się przez podstawienie $T = T_1$ do (5.22) i wówczas

$$W_{p1}^*(j\omega_1) = j \frac{2}{\pi} N_1 \quad (5.23a)$$

$$G(m) = \frac{|W_{p1}^*(j\omega)|}{|W_{p1}^*(j\omega_1)|} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2}} = \frac{\omega_1}{\omega} \sin^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.23b)$$

Charakterystyka jest identyczna z poprzednią, lecz ma czytelniejszy opis (rys. 5.5b). Jeśli okno pomiarowe T skrócić o połowę do wartości $T_1/2$, to otrzymuje się funkcję wagi taką jak na rys. 5.5c. Jej unormowane widmo wynika z podstawienia $T = T_1/2$ do (5.22) i otrzymuje się wówczas



Rys. 5.5. Funkcja Walsha pierwszego rzędu (a) i jej widmo unormowane (b)
 Fig. 5.5. Walsh function of first order (a) and its normalized spectrum (b)

$$W_{p1}^*(j\omega_1) = j \frac{2}{\pi} N = j \frac{1}{\pi} N_1 \quad (5.24a)$$

$$G(m) = \frac{|W_{p1}^*(j\omega)|}{|W_{p1}^*(j\omega_1)|} = 2 \frac{\omega_1}{\omega} \sin^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{4} \right) \quad (5.24b)$$

Przebieg tego widma przedstawiono na rys. 5.5d. Jak widać, w wyniku dwukrotnego skrócenia okna T , nastąpiło "rozciągnięcie" osi częstotliwości i w rezultacie pogorszenie charakterystyk częstotliwościowych w stosunku do tych przedstawionych na rys. 5.5b.

Na marginesie dotychczasowych rozważań warto zauważyć pewną ogólną zależność, która jest związana z parzystością lub nieparzystością funkcji wagi w odniesieniu do środka okna. Transformatę Fouriera funkcji wagi, będącą jej widmem, można zapisać nieco inaczej:

$$W_p^*(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T_1} \int_{-T/2}^{T/2} w(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \frac{1}{T_1} \int_{-T/2}^{T/2} w(\tau) \sin \omega\tau d\tau$$

Jeśli teraz $w(\tau)$ jest funkcją parzystą, to druga z całek jest zerowa i otrzymuje się

$$W_p^*(j\omega) = \frac{1}{T_1} \int_{-T/2}^{T/2} w(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (5.25)$$

Jeśli natomiast $w(\tau)$ jest funkcją nieparzystą, to pierwsza z całek znika i otrzymuje się:

$$W_p^*(j\omega) = -j \frac{1}{T_1} \int_{-T/2}^{T/2} w(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau \quad (5.26)$$

Wynikają stąd dwa ważne wnioski: Po pierwsze więc widmo parzystej funkcji wagi jest rzeczywiste, a widmo nieparzystej funkcji wagi, w odniesieniu do środka okna, jest urojone. Po drugie, sygnały wyjściowe filtrów mających parzyste i nieparzyste funkcje wagi są ortogonalne, jeśli ich okna są jednakowej długości. Ostatni warunek wynika z przesunięcia fazy sygnału wyjściowego w stosunku do wejściowego o wartość $-\omega T/2$, niezależnie od przesunięcia fazy wynikającego z argumentów widm o funkcjach wagi przesuniętych ($w_p(\tau) = w(\tau + T/2)$). Zależności (5.25) i (5.26) oraz wynikające z nich wnioski mogą być wykorzystane zarówno w syntezie filtrów ortogonalnych, jak też do uproszczonego obliczania widm filtrów. Należy też wyraźnie podkreślić ważną cechę takich filtrów, którą jest liniowa faza w pasmie przepustowym. Otóż faza sygnału wyjściowego (w odniesieniu do wejściowego) jest sumą fazy równej zeru (funkcja wagi parzysta) lub $\pi/2$ (funkcja wagi nieparzysta) oraz wartości $-\omega T/2$, co jest z wielu powodów istotne i pożądane.

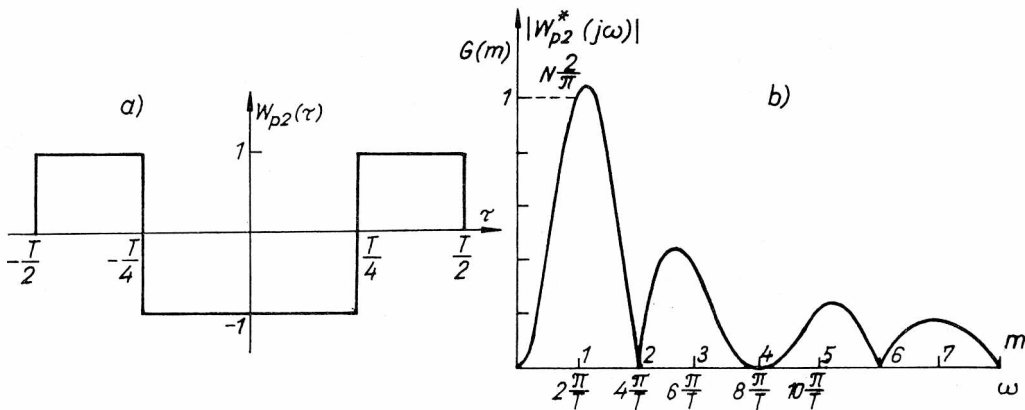
3. Funkcja Walsh'a drugiego rzędu

Funkcję wagi, która jest funkcją Walsh'a drugiego rzędu, przedstawiono na rys. 5.6a. Jej widmo wynika z zależności

$$W_{p2}^*(j\omega) = \frac{1}{T_1} \left\{ \int_{-T/2}^{-T/4} \cos \omega_1 \tau d\tau - \int_{-T/4}^{T/4} \cos \omega_1 \tau d\tau + \int_{T/4}^{T/2} \cos \omega_1 \tau d\tau \right\} \quad (5.27)$$

obliczenie wartości tych całek daje ostatecznie

$$W_{p2}^*(j\omega) = -N \frac{\sin(\omega T/4)}{(\omega T/4)} [1 - \cos(\omega T/4)] \quad (5.28)$$



Rys. 5.6. Funkcja Walsh'a drugiego rzędu (a) i jej widmo unormowane (b)
Fig. 5.6. Walsh function of second order (a) and its normalized spectrum (b)

Wykres modułu tego widma przedstawiono na rys. 5.6. Jak widać, pod wieloma względami przypomina ono widmo $|W_{p1}^*(j\omega)|$ funkcji Walsh'a pierwszego rzędu. Podobnie jak poprzednio, jest to widmo filtru pasmowoprzepustowego o słabym tłumieniu w pasmie zaporowym. Również podobnie jak poprzednio, harmoniczne parzyste częstotliwości okna są odrzucane. Jednakże między zdolnościami filtracyjnymi w zakresie niskich częstotliwości występuje istotna, choć mało widoczna z przebiegu widm, różnica. Otóż w tym ostatnim przypadku zdolność do filtracji składowej aperiodycznej jest dużo większa. Omówiono to szczegółowo w rozdz. 7.

Unormowaną charakterystykę widmową $G(m)$ otrzyma się po podstawieniu $T = T_1$ ($\omega = \omega_1$) w (5.28):

$$W_{p2}^*(j\omega_1) = -\frac{2}{\pi} N \quad (5.29a)$$

$$G(m) = \frac{|W_{p2}^*(j\omega)|}{|W_{p2}^*(j\omega_1)|} = \frac{\omega_1}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\pi}{\omega_1 2}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (5.29b)$$

Wykres unormowanej charakterystyki przedstawiono na rys. 5.6.

W zakończeniu omawiania charakterystyk funkcji Walsh'a trzeba dodać, że funkcje wyższych rzędów mają nieco mniejsze zastosowanie. Wynika to z tego, że maksimum ich charakterystyki widmowej przesuwają się w kierunku wyższych częstotliwości wraz ze wzrostem ich rzędu i stosowanie filtru o takich charakterystykach byłoby niecelowe. Funkcje te są natomiast wykorzystywane wówczas, gdy stosuje się rozkład w szereg Walsh'a innych funkcji wagi filtrów, np. sinus czy cosinus [36].

4. Filtry z sinusoidalnymi funkcjami wagi

Filtry z funkcjami wagi, będącymi fragmentem sinusoidy lub cosinusoidy, mają duże znaczenie ze względu na ich szczególną przydatność do od-filtrowywania sygnału o jednej ustalonej częstotliwości. Ich widma mogą być obliczone na podstawie następujących zależności:

$$W_{pc}^*(j\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 \tau) \cos(\omega \tau) d\tau \quad (5.30a)$$

$$W_{ps}^*(j\omega) = -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 \tau) \sin(\omega \tau) d\tau \quad (5.30b)$$

Proste obliczenia pozwalają na wyznaczenie tych widm w postaci

$$W_{pc}^*(j\omega) = \frac{N}{2} [Sa(p - p_0) + Sa(p + p_0)] \quad (5.31a)$$

$$W_{ps}^*(j\omega) = -j \frac{N}{2} [Sa(p - p_0) - Sa(p + p_0)] \quad (5.31b)$$

gdzie $Sa(x) = \sin(x)/x$, $p = \omega T/2$, $p_0 = \omega_0 T/2$.

Kształt widma tych filtrów zależy od dwóch parametrów - częstotliwości ω_0 oraz długości okna T . W zależności od ich wyboru (T często może być narzucone) można kształtować w pewnym zakresie pożądane cechy widma w wybranych przedziałach częstotliwości. Zilustrowano to kolejno dla funkcji wagi cosinus i sinus.

Funkcja wagi cosinus

Rozpatrzmy widmo funkcji wagi o kształcie jak na rys. 5.7a. Jej częstotliwość ω_0 jest tak dobrana, że $\omega_0 T = 2\pi$ oraz jest to funkcja $-\cos \omega_0 t$, wobec czego jej widmo jest dane równaniem (5.31a) ze znakiem przeciwnym:

$$W_{pc}^*(j\omega) = -\frac{N}{2} \left\{ Sa \left[\pi \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \right] + Sa \left[\pi \left(\frac{\omega}{\omega_0} + 1 \right) \right] \right\} \quad (5.32)$$

Przyjawszy, że częstotliwość tej funkcji wagi jest równa częstotliwości identyfikowanego sygnału ($\omega_0 = \omega_1$), łatwo otrzymuje się unormowaną charakterystykę widmową:

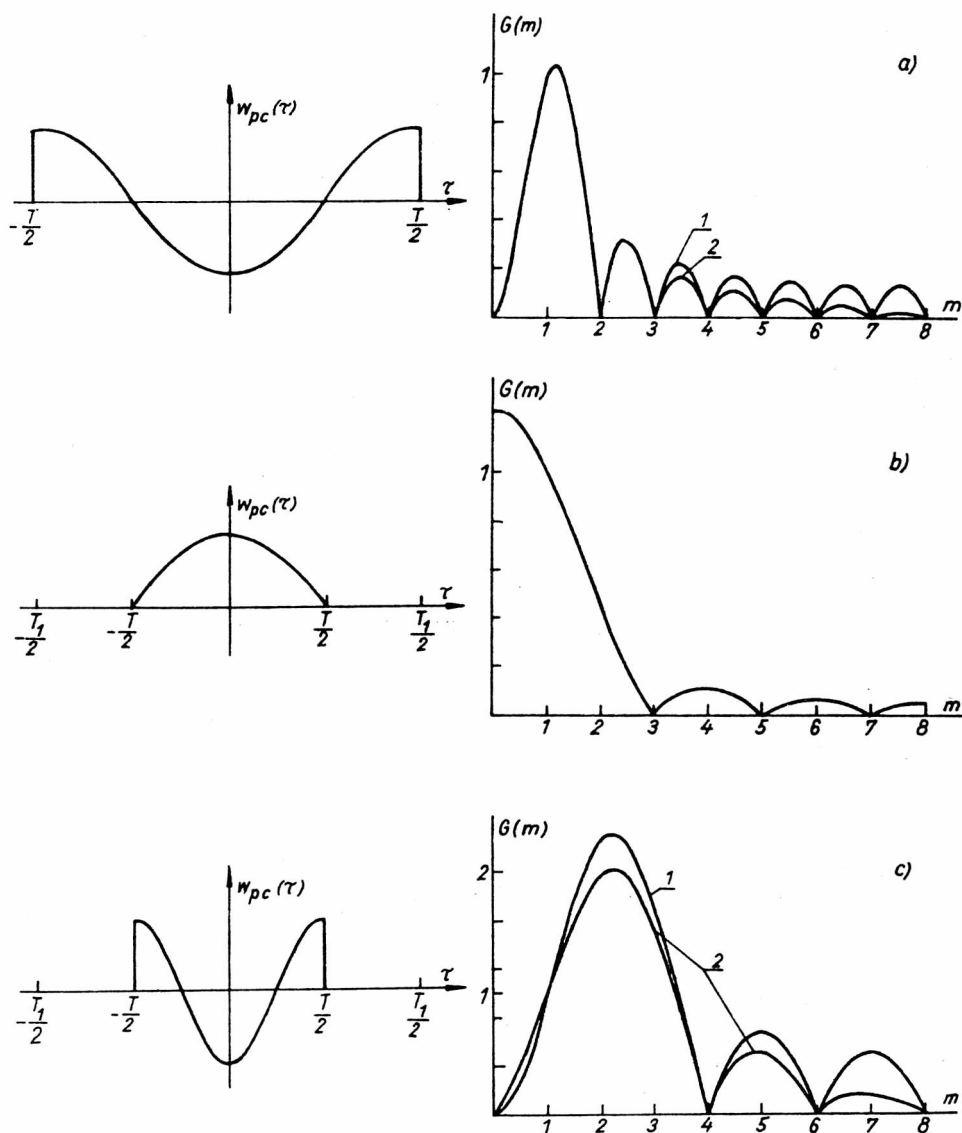
$$W_{pc}^*(j\omega_1) = -\frac{N}{2} = -\frac{N_1}{2} \quad (5.33a)$$

$$G(m) = \frac{|W_{pc}^*(j\omega)|}{|W_{pc}^*(j\omega_1)|} = Sa[\pi(m-1)] + Sa[\pi(m+1)] \quad (5.33b)$$

gdzie

N - liczba próbek w oknie,

N_1 - liczba próbek w okresie składowej podstawowej, $m = \omega/\omega_1$.



Rys. 5.7. Różne cosinusoidalne funkcje wagi i ich widma unormowane podczas całkowania metodami: 1 - prostokątów, 2 - trapezów
 Fig. 5.7. Different impulse responses of cosinusoidal type and their normalized spectra using: 1 - rectangular, 2 - trapezoidal rules of integration

Widmo tej funkcji wagi, przy stosowaniu metody całkowania prostokątów (górną krzywą) i metody trapezów, przedstawiono na rys. 5.7a. Widmo (5.33b) niemal dokładnie pokrywa się z górną krzywą widmem całkowania metodą prostokątów. Filtr ma charakterystykę pasmowoprzepustową o dość dobrym tłumieniu w pasmie zaporowym oraz wszystkie harmoniczne identyfikowanego sygnału są odrzucane. Są to wyraźnie lepsze charakterystyki niż ma, odpowiadająca tej funkcji, funkcja Walsha drugiego rzędu.

Zupełnie analogicznie otrzymuje się unormowane widma funkcji wagi przedstawione na rys. 5.7b i 5.7c, przy czym teraz okno pomiarowe zostało skrócone o połowę. Pomijając kolejne przekształcenia, końcowe wyrażenia określające widma są dane równaniami:

$$\omega_0 = \omega_1, \quad T = T_1/2 \quad (\text{rys. 5.7b})$$

$$W_{pc}^*(j\omega_1) = N/2 = N_1/4 \quad (5.34a)$$

$$G(m) = \frac{|W_{pc}^*(j\omega)|}{|W_{pc}^*(j\omega_1)|} = \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} (m-1) \right] + \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} (m+1) \right] \quad (5.34b)$$

$$\omega_0 = 2\omega_1, \quad T = T_1/2 \quad (\text{rys. 5.7c})$$

$$(5.35a)$$

$$W_{pc}^*(j\omega_1) = -\frac{N}{3\pi} = -\frac{N_1}{6\pi}$$

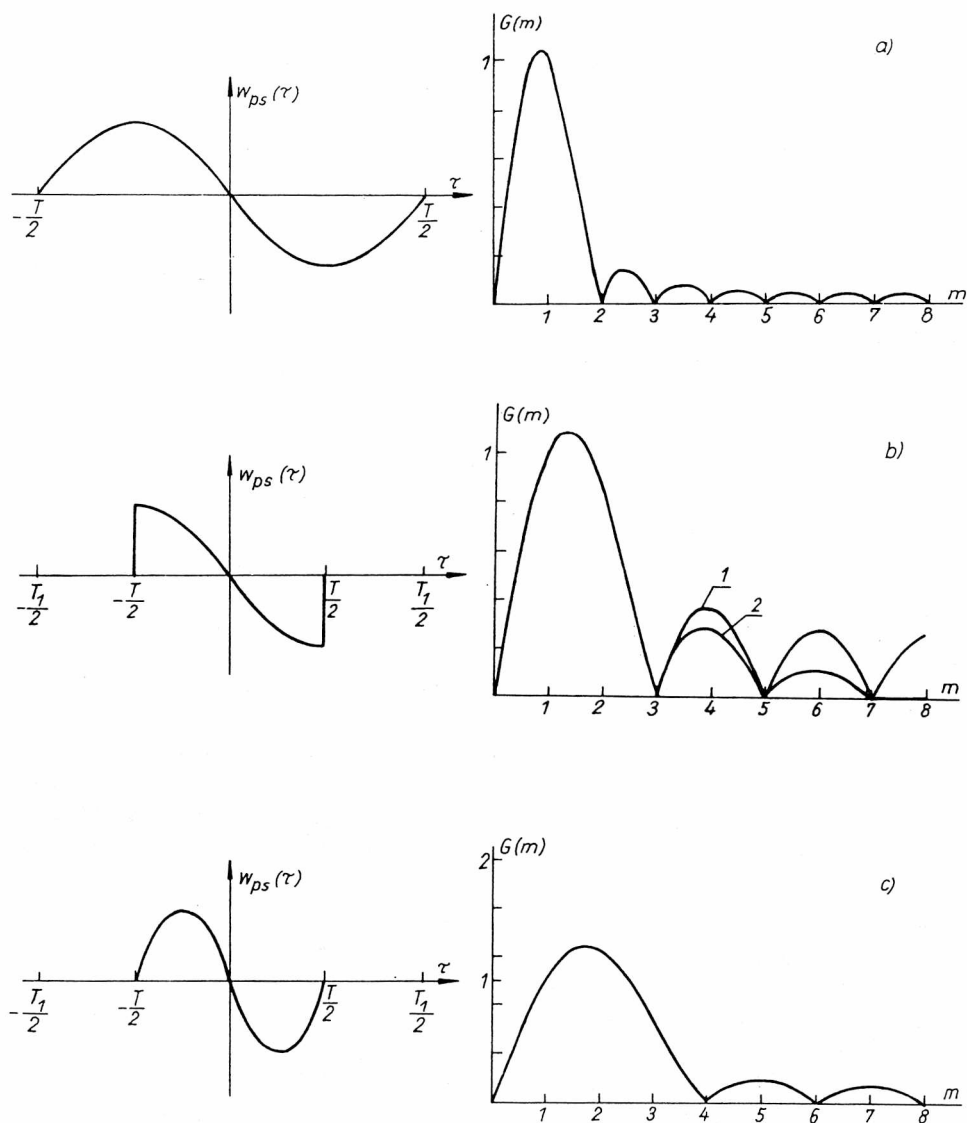
$$G(m) = \frac{|W_{pc}^*(j\omega)|}{|W_{pc}^*(j\omega_1)|} = \frac{3\pi}{2} \left\{ \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} (m-2) \right] + \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} (m+2) \right] \right\} \quad (5.35b)$$

gdzie $m = \omega/\omega_1$.

Unormowane widma, odpowiadające obu tym funkcjom wagi, przedstawiono odpowiednio na rys. 5.7b,c. Jak widać, w pierwszym z przypadków otrzymuje się bardzo dobry filtr pasmowoprzepustowy o silnym tłumieniu w pasmie zaporowym, a w drugim filtr pasmowoprzepustowy, lecz o niekorzystnie ukształtowanej charakterystyce i wzmacnianiu składowych zawartych między $m = 1$ a $m = 4$. Jest to rezultat wynikający z próby ukształtowania filtra, który odrzucałby składową stałą. Cel ten osiągnięto, lecz poprawienie charakterystyki w zakresie niskich częstotliwości spowodowało jej pogorszenie w zakresie częstotliwości wysokich. Warto tu zauważyć też różnicę między widmem podczas całkowania metodą trapezów (dolna krzywa) a prostokątów (górną krzywą) - rys. 5.7c.

Funkcja wagi sinus

Różne funkcje wagi, będące sinusoidą lub jej fragmentem w odniesieniu do ośrodka pomiarowego, przedstawiono na rys. 5.8a-c. Obok nich przedstawiono ich unormowane widma, obliczone analogicznie jak dla funkcji cosinus, lecz z zastosowaniem wzoru (5.31b). Poniżej podano, już bez przytaczania obliczeń wartości, widma dla częstotliwości podstawowej,



Rys. 5.8. Różne sinusoidalne funkcje wagi i ich widma unormowane podczas całkowania metodami: 1 - prostokątów, 2 - trapezów
 Fig. 5.8. Different impulse responses of sinusoidal type and their normalized spectra using: 1 - rectangular, 2 - trapezoidal rules of integration

potrzebne do określenia amplitudy sygnału wyjściowego filtru oraz zależności określające widma unormowane:

$$\omega_0 = \omega_1, \quad T = T_1 \quad (\text{rys. 5.8a})$$

$$W^*(j\omega_1) = j \frac{N}{2} = j \frac{N_1}{2} \quad (5.36a)$$

$$G(m) = \text{Sa} [\pi(m-1)] - \text{Sa} [\pi(m+1)] \quad (5.36b)$$

$$\omega_0 = \omega_1, \quad T = \frac{T_1}{2} \quad (\text{rys. 5.8b})$$

$$W^*(j\omega_1) = j \frac{N}{2} = j \frac{N_1}{4} \quad (5.37a)$$

$$G(m) = \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} (m-1) \right] - \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} (m+1) \right] \quad (5.37b)$$

$$\omega_0 = 2\omega_1, \quad T = \frac{T_1}{2} \quad (\text{rys. 5.8c})$$

$$W^*(j\omega_1) = j \frac{4}{3\pi} N = j \frac{2}{3\pi} N_1 \quad (5.38a)$$

$$G(m) = \frac{3\pi}{8} \left\{ \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} (m-2) \right] - \text{Sa} \left[\frac{\pi}{2} (m+2) \right] \right\} \quad (5.38b)$$

gdzie $m = \omega/\omega_1$, $\text{Sa}(x) = \sin(x)/x$.

Wszystkie przedstawione na rys. 5.8a-c widma to widma filtrów pasmo-woprzepustowych. Szczególnie korzystne własności filtracyjne ma pierwsze widmo (rys. 5.8a) z oknem pełnookresowym ($T = T_1$). Tłumienie w pasmie zaporowym jest bardzo dobre, a wszystkie harmoniczne są odrzucone. Jeśli okno jest i musi być krótsze, to przy stosowaniu funkcji wagi z rys. 5.8b,c otrzymuje się widma o podobnej charakterystyce i podobnej tłumienności w pasmie zaporowym. Główna różnica dotyczy odrzucanych harmonicznych. W pierwszym przypadku filtr odrzuca harmoniczne nieparzyste, a w drugim harmoniczne parzyste z wyjątkiem drugiej. W sumie funkcje wagi sinus mają widma o lepszych charakterystykach pasmowych, a w przypadku skróconych okien nie ma tu alternatywy, czy będą wzmacniane składowe wysoko-, czy niskoczęstotliwościowe.

5.2.2.2. Algorytmy i sygnały wyjściowe filtrów

Algorytmy filtrów wynikają bezpośrednio z funkcji wagi filtrów oraz ogólnego równania nierekursywnego filtru cyfrowego (5.9), przy czym współczynniki a_k są wartościami funkcji wagi $w(k)$ w chwilach kT_1 . Należy jednak pamiętać, że zgodnie z przyjętym sposobem określania widm filtrów, wycelowane okno pomiarowe trzeba przesunąć do początku układu współrzędnych ($\tau = 0$).

Sygnały wyjściowe filtrów natomiast będą miały amplitudę przemnożoną przez wartość modułu widma filtru dla danej częstotliwości oraz fazę, która jest sumą argumentu widma przy tej częstotliwości wycelowanej funkcji wagi i $-\omega T/2$, które wynika z przesunięcia funkcji wagi (5.18). Jeśli więc sygnał wejściowy ma częstotliwość ω_1 i jest dany równaniem:

$$x(n) = X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (5.39a)$$

to sygnał wyjściowy jest opisany zależnością:

$$y(n) = X_1 |W^*(j \omega_1)| \cos \left[n \omega_1 T_1 + \arg(W^*(j \omega_1)) - \frac{\omega_1 T}{2} + \varphi \right] \quad (5.39b)$$

Korzystając z przedstawionych na rys. (5.5)-(5.8) funkcji wagi oraz obliczonych widm można teraz kolejno otrzymać algorytmy i sygnały wyjściowe filtrów. Zostaną one pogrupowane tak, żeby można było rozpatrzeć oddzielnie algorytmy pełno- i półokresowe, a także zestawić filtry pozwalające uzyskać składowe ortogonalne.

1. Algorytmy i sygnały wyjściowe pełnookresowych filtrów ortogonalnych

Najprostsze algorytmy pełnookresowe otrzymuje się z zastosowaniem funkcji Walsha pierwszego i drugiego rzędu (rys. 5.5a, 5.6). Algorytmy tych filtrów są dane równaniami:

$$y_1(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N_1}{2}-1} x(n-k) - \sum_{k=\frac{N_1}{2}}^{N_1-1} x(n-k) \quad (5.40a)$$

$$y_2(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N_1}{4}-1} x(n-k) - \sum_{k=\frac{N_1}{4}}^{\frac{3}{4}N_1-1} x(n-k) + \sum_{k=\frac{3}{4}N_1}^{N_1-1} x(n-k) \quad (5.40b)$$

Sygnały wyjściowe tych filtrów dla składowej podstawowej (5.39) są opisane, z uwzględnieniem (5.23a) oraz (5.29a), równaniami:

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \left(\frac{2N_1}{\pi} \right) X_1 \cos \left(n \omega_1 T_1 - \frac{\omega_1 T_1}{2} + \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = \\ &= \left(\frac{2N_1}{\pi} \right) X_1 \sin(n \omega_1 T_1 + \varphi) \end{aligned} \quad (5.41a)$$

$$\begin{aligned} y_2(n) &= \left(\frac{2N_1}{\pi} \right) X_1 \cos \left(n \omega_1 T_1 + \pi - \frac{\omega_1 T_1}{2} + \varphi \right) = \\ &= \left(\frac{2N_1}{\pi} \right) X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi) \end{aligned} \quad (5.41b)$$

gdzie $\omega_1 T_1 = 2\pi$, $N_1 T_1 = T_1$.

Po zastosowaniu funkcji Walsh'a pierwszego i drugiego rzędu otrzymano parę filtrów ortogonalnych o niezłym widmie i bardzo prostych, pozbawionych konieczności mnożenia algorytmach. Zapisane w nawiasach współczynniki odpowiadają oznaczonym poprzednio przez F_d i F_q wartościom, które były stosowane do określenia algorytmów wielkości kryterialnych (rozdz. 4). Są one w tym przypadku identyczne, co umożliwia korzystanie z podanych uproszczonych wzorów dla tych wielkości.

Analogicznie otrzymuje się algorytmy i sygnały wyjściowe filtrów o funkcjach wagi sinus i cosinus (rys. 5.7a, 5.8a). Ich algorytmy dane są równaniami:

$$y_c(n) = \sum_{k=0}^{N_1-1} x(n-k) \cos k \omega_1 T_1 \quad (5.42a)$$

$$y_s(n) = \sum_{k=0}^{N_1-1} x(n-k) \sin k \omega_1 T_1 \quad (5.42b)$$

Z kolei ich sygnały wyjściowe opisują równania ((5.36a), (5.33a)):

$$y_c(n) = \left(\frac{N_1}{2}\right) X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (5.43a)$$

$$y_s(n) = \left(\frac{N_1}{2}\right) X_1 \sin(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (5.43b)$$

I znowu otrzymano parę filtrów ortogonalnych o bardzo korzystnym widmie. Współczynniki stałe obu filtrów są identyczne, co bardzo ułatwia dalsze przekształcenia i obliczenia złożonych wielkości kryterialnych. Odpowiadają one używanym w rozdz. 4 wartościom F_d i F_q . W porównaniu z poprzednim algorytmem pewną trudnością jest wykonywanie dużej liczby mnożeń, rosnącej z częstotliwością próbkowania. Co prawda mnożenie próbek funkcji przez stałą nie wymaga dużej precyzji, ale w porównaniu z algorytmami z funkcją Walsh'a jest to znaczne skomplikowanie, szczególnie, że operacje mnożenia są bardzo czasochłonne. Jednakże liczba mnożeń może być znacznie zredukowana przez stosowanie rekursywnej postaci wzorów (5.42). Tę rekursywną postać najłatwiej otrzymać wykorzystując zespoloną postać obu tych algorytmów łącznie.

Rozważmy omawiane zagadnienie otrzymania postaci rekursywnej w sposób ogólny, w dowolnym oknie pomiarowym N .

Niech więc zespolony sygnał wyjściowy filtrów ma postać

$$\underline{y}(n) = y_r(n) + jy_1(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) e^{jk\omega_1 T_1} \quad (5.44)$$

gdzie

$$y_r(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \cos k \omega_1 T_1$$

$$y_q(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \sin k \omega_1 T_1.$$

Te sygnały zespolone w chwilach n oraz $n+1$ można po rozpisaniu sum (5.44) przedstawić następująco:

$$\underline{y}(n) = x(n) + x(n-1)e^{j\omega T_1} + \dots + x(n+2-N)e^{j(N-2)\omega T_1} + \\ + x(n+1-N)e^{j(N-1)\omega T_1}$$

$$\underline{y}(n+1) = x(n+1) + x(n)e^{j\omega T_1} + x(n-1)e^{j2\omega T_1} + \dots + \\ + x(n+3-N)e^{j(N-2)\omega T_1} + x(n+2-N)e^{j(N-1)\omega T_1}$$

Z powyższych równań łatwo zauważyć, że zachodzi równość

$$\underline{y}(n)e^{j\omega T_1} = \underline{y}(n+1) - x(n+1) + x(n+1-N)e^{jN\omega T_1}$$

która po przekształceniu ma postać

$$\underline{y}(n+1) = \underline{y}(n)e^{j\omega T_1} + x(n+1) - x(n+1-N)e^{j\omega T_1} \quad (5.45)$$

gdzie $T = NT_1$.

Jest to zespolona postać algorytmu rekursywnego, w którym po podstawieniu $\underline{y}(n)$ z (5.44) można obliczyć $y_r(n+1)$ oraz $y_i(n+1)$ jako części rzeczywiste i urojone $\underline{y}(n+1)$. Otrzymuje się wtedy:

$$y_r(n+1) = y_r(n) \cos(\omega T_1) - y_i(n) \sin(\omega T_1) + \\ + x(n+1) - x(n+1-N) \cos(\omega T) \quad (5.46)$$

$$y_i(n+1) = y_r(n) \sin(\omega T_1) + y_i(n) \cos(\omega T_1) - x(n+1-N) \sin(\omega T)$$

Tę rekursywną formułę można ewentualnie zapisać krócej z zastosowaniem macierzy

$$[y(n+1)] = [A][y(n)] + [B][x] \quad (5.47)$$

gdzie

$$[y] = [y_r y_i]^T,$$

$$[x] = [x(n+1) \ x(n+1-N)]^T,$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos(\omega T_1) & -\sin(\omega T_1) \\ \sin(\omega T_1) & \cos(\omega T_1) \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\omega T) \\ 0 & -\sin(\omega T) \end{bmatrix}.$$

Przypadki szczególne występują wówczas, gdy ma się do czynienia z pełno- lub półokresowymi algorytmami. W pierwszym przypadku $\omega = \omega_1$, $T = T_1$ ($\omega_1 T_1 = 2\pi$) otrzyma się:

$$\begin{aligned} y_r(n+1) &= y_r(n) \cos(\omega_1 T_1) - y_1(n) \sin(\omega_1 T_1) + \\ &+ x(n+1) - x(n+1-N_1) \end{aligned} \quad (5.48a)$$

$$y_1(n+1) = y_r(n) \sin(\omega_1 T_1) + y_1(n) \cos(\omega_1 T_1)$$

a w drugim, jeśli $\omega = \omega_1$, $T = T_1/2$ ($\omega_1 T_1 = \pi$), to:

$$\begin{aligned} y_r(n+1) &= y_r(n) \cos(\omega_1 T_1) - y_1(n) \sin(\omega_1 T_1) + \\ &+ x(n+1) + x\left(n+1 - \frac{N_1}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.48b)$$

$$y_1(n+1) = y_r(n) \sin(\omega_1 T_1) + y_1(n) \cos(\omega_1 T_1)$$

Rekursywne algorytmy (5.46) oraz (5.48a,b) są bardzo ważne i przydatne, gdyż redukują liczbę mnożeń z $2N$ do czterech, niezależnie od częstotliwości próbkowania. Zwiększa to znacznie atrakcyjność algorytmów (5.42) z funkcjami wagi sinus i cosinus. Zapewniają one, że charakterystyka widmowa jest bardzo korzystna, ale teraz mają jeszcze oszczędny obliczeniowo algorytm. Może on zresztą być jeszcze nieco uproszczony przez wybór odpowiedniej częstotliwości próbkowania. Relację rekursywną (5.48b) można wykorzystać w algorytmach półokresowych.

2. Algorytmy i sygnały wyjściowe półokresowych filtrów ortogonalnych

Najprostszy z takich algorytmów otrzyma się przez zastosowanie funkcji wagi Walsh'a zerowego rzędu (rys. 5.4), równanie (5.20a) oraz Walsh'a pierwszego rzędu dla okna skróconego do $T_1/2$ (rys. 5.5c), równanie (5.24a). Otrzymuje się wówczas parę algorytmów:

$$y_0(n) = \sum_{k=0}^{(N_1/2)-1} x(n-k) \quad (5.49a)$$

$$y_1(n) = \sum_{k=0}^{(N_1/4)-1} x(n-k) - \sum_{k=N_1/4}^{(N_1/2)-1} x(n-k) \quad (5.49b)$$

i sygnały wyjściowe dla składowej podstawowej (5.39a):

$$y_0(n) = \left(\frac{N_1}{\pi}\right) X_1 \sin(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (5.50a)$$

$$y_1(n) = \left(\frac{N_1}{\pi}\right) X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (5.50b)$$

I znowu podobnie jak poprzednio, w algorytmach pełnookresowych zastosowanie funkcji Walsha daje najprostsze algorytmy, nie wymagające mnożeń, lecz jedynie dodawanie próbek sygnałów w określonych przedziałach. Współczynniki w sygnałach wyjściowych obu filtrów są identyczne, chociaż teraz dwa razy mniejsze, co jest oczywiste, a same sygnały są ortogonalne. Warto tu zwrócić uwagę na zaskakujący w pierwszej chwili fakt, że filtr o parzystej funkcji wagi w odniesieniu do środka okna daje na wyjściu sygnał ortogonalny w stosunku do sygnału wejściowego, a filtr o nieparzystej funkcji - sygnał zgodny (5.50a) (5.50b). Jest to po prostu rezultat występującego w obu filtrach (tak jak i we wszystkich rozpatrywanych) dodatkowego, oprócz argumentu wycelowanej funkcji wagi, przesunięcia $-\omega T/2$. W tym przypadku dla składowej podstawowej wynosi ono $-\pi/2$ i stąd owa "zmiana" składowych ortogonalnych. Widma obu filtrów nie są zbyt korzystnie ukształtowane, ale w pewnych zastosowaniach może to być wystarczające. Istotną wadą jest niezdolność do filtracji składowej stałej i ta para filtrów nie może być zastosowana w obwodach prądowych bez dodatkowej filtracji.

Inny algorytm półokresowy otrzyma się przez zastosowanie funkcji wagi sinus i cosinus, tak jak to pokazano na rys. 5.7b i 5.8b. Otrzymuje się wówczas:

$$y_c(n) = \sum_{k=0}^{(N_1/2)-1} x(n-k) \cos(k \omega_1 T_1) \quad (5.51a)$$

$$y_s(n) = \sum_{k=0}^{(N_1/2)-1} x(n-k) \sin(k \omega_1 T_1) \quad (5.51b)$$

Ich sygnały wyjściowe, gdy sygnał wejściowy tak jak wszędzie poprzednio jest dany równaniem (5.39a), mają postać:

$$y_c(n) = \left(\frac{N_1}{2}\right) X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (5.52a)$$

$$y_s(n) = \left(\frac{N_1}{2}\right) X_1 \sin(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (5.52b)$$

Widmo tego algorytmu jest korzystniejsze niż poprzedniego kosztem nieco większej złożoności obliczeniowej, chociaż po zastosowaniu rekursywnej postaci (5.48b) staje się ten algorytm obliczeniowo bardzo efektywny. Niestety, podobnie jak poprzedni algorytm, wykazuje on duże błędy gdy sygnał jest zakłócony składową stałą. Można to skorygować stosując funkcje wagi o zerowej wartości średniej w oknie pomiarowym (rys. 5.7c, 5.8c).

Algorytm i sygnały wyjściowe filtrów dla składowej podstawowej są w tym przypadku dane równaniami:

$$y_c(n) = \sum_{k=0}^{(N_1/2)-1} x(n-k) \cos(2k \omega_1 T_1) \quad (5.53a)$$

$$y_s(n) = \sum_{k=0}^{(N_1/2)-1} x(n-k) \sin(2k \omega_1 T_1) \quad (5.53b)$$

$$y_c(n) = \left(\frac{N_1}{6\pi}\right) X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (5.54a)$$

$$y_s(n) = \left(\frac{2N_1}{3\pi}\right) X_1 \sin(n \omega_1 T_1 + \varphi) \quad (5.54b)$$

Uzyskano w tym przypadku odrzucanie składowej stałej w obu filtrach, lecz niestety, kosztem pogorszenia ich charakterystyk w zakresie wysokich częstotliwości. Poza tym współczynniki stałe w sygnałach wyjściowych są różne, co jest pewnym utrudnieniem w realizacji różnych algorytmów pomiaru wielkości kryterialnych. Podobne do (5.54) i (5.55) algorytmy można uzyskać stosując funkcję Walsha pierwszego rzędu (rys. 5.5c) oraz funkcję Walsha drugiego rzędu o dwa razy większej częstotliwości.

Przytoczone algorytmy i charakterystyki filtracyjne mają, co warto tu jeszcze raz podkreślić, jedną wspólną cechę - ich sygnały wyjściowe są ortogonalne niezależnie od częstotliwości, a wypadkowy argument jest sumą argumentu widma oraz $-\omega T/2$. Cecha ta jest istotna w badaniach błędów pomiaru wywołanych zakłóceniami oraz może być wykorzystana do różnicowania przesunięć sygnałów przez filtrację z różną długością okna.

Filtry cyfrowe przedstawione tutaj mogą całkiem efektywnie spełniać swoje zadania w układach automatyki elektroenergetycznej. Można by nazwać je quasi-optymalnymi, gdyż powstały jako rezultat kompromisu między sprzecznymi wymogami dobrej filtracji zakłóceń, odpowiedniej dynamiki oraz prostego algorytmu do implementacji w szybkich układach czasu rzeczywistego. Te trzy czynniki jest trudno optymalizować jednocześnie, tym bardziej że możliwości poprawy ich wszystkich częściowo lub całkowicie się wykluczają.

5.3. Metoda korelacji i odwzorowania krzywych

5.3.1. Zasady i równania ogólne

Sygnały wyjściowe filtrów ortogonalnych o oknie T z takim właśnie opóźnieniem osiągają stan ustalony na wyjściu filtru po skokowej zmianie sygnału wejściowego. Jest to oczywiście czas stracony, a jeśli konieczne jest lepsze odfiltrowanie sygnału, to trzeba zastosować dłuższe okno pomiarowe, ale nadal informacja dostarczana w przedziale $0-T$ po skokowej

Zmianie sygnału jest mało użyteczna. Kosztem pewnego skomplikowania algorytmów można tego uniknąć stosując metody odwzorowania krzywych. Są one równoważne właściwie stosowaniu korelacji ze zmiennym oknem pomiarowym. W miarę pojawienia się nowej informacji w wyniku rozszerzania się okna pomiarowego t , korzysta się z obliczonych dla tej długości okna współczynników i wtedy oblicza się składowe ortogonalne sygnału. Po dalszym rozszerzeniu się okna korzysta się z innych wartości współczynników i procedura powtarza się aż do osiągnięcia ustalonego okna pomiarowego T . Od tego momentu współczynniki są już stałe, a procedura typowa. Interesującą, opracowaną metodę wykorzystującą spłot, a nie korelację, przedstawiono w p. 5.5 [185]. Obecnie omówione zostaną ogólne i szczególne przypadki metody odwzorowania krzywych z zastosowaniem korelacji.

Spośród różnych funkcji aproksymujących, stosowanych w metodach odwzorowania krzywych, największe znaczenie, ze względu na kształt krzywych prądu i napięcia zwarciovego, ma zbiór ortogonalnych funkcji $\sin l \omega_1 \tau$, $\cos l \omega_1 \tau$. Zakłada się dalej, że nieznan przebieg $x(\tau)$ może być aproksymowany skończonym zbiorem tych funkcji

$$x(\tau) = \sum_{l=1}^m (y_{dl} \cos l \omega_1 \tau + y_{ql} \sin l \omega_1 \tau) \quad (5.55)$$

Gdyby wiadomo było, że funkcja $x(\tau)$ jest równa $x_1 \cos(\omega_1 \tau + \varphi)$, wówczas

$$x(\tau) = X_1 \cos(\omega_1 \tau + \varphi) = X_1 \cos \varphi \cos \omega_1 \tau - X_1 \sin \varphi \sin \omega_1 \tau$$

i najlepsza aproksymacja jest określona tak:

$$\begin{aligned} y_{d1} &= X_1 \cos \varphi; & y_{q1} &= -X_1 \sin \varphi; \\ y_{di} &= 0; & y_{qi} &= 0 \quad \text{dla } i > 1. \end{aligned}$$

Niestety $x(\tau)$ nie jest znane i przyjmując mniejszą lub większą liczbę wyrazów w równaniu (5.55) popełnia się większy lub mniejszy błąd aproksymacji. Różne mogą być miary i kryteria minimalizacji tego błędu prowadzące do optymalnej aproksymacji. Najefektywniejszy chyba jest średni błąd kwadratowy i wymaganie jego minimalizacji. Na podstawie (5.55) określa się go równaniem

$$E(t) = \int_0^t \left[x(\tau) - \sum_{i=1}^m (y_{di} \cos i \omega_1 \tau + y_{qi} \sin i \omega_1 \tau) \right]^2 d\tau \quad (5.56)$$

Funkcja $x(\tau)$ powinna być aproksymowana tak, aby ten błąd miał wartość minimalną. Jest to równoważne wymaganiu, by pochodne błędu po wszystkich parametrach y_{di} , y_{qi} były zerowe:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial y_{d1}} = 0, \quad \frac{\partial E(t)}{\partial y_{q1}} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial E(t)}{\partial y_{dm}} = 0, \quad \frac{\partial E(t)}{\partial y_{qm}} = 0 \quad (5.57)$$

Wszystkie te pochodne mają ogólną postać następującą:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial y_{dj}} = -2 \int_0^t \left[x(\tau) \cos j \omega_1 \tau - \sum_{i=1}^m (y_{di} \cos i \omega_1 \tau \cos j \omega_1 \tau + y_{qi} \sin i \omega_1 \tau \cos j \omega_1 \tau) \right] d\tau = 0$$

$$\frac{\partial E(t)}{\partial y_{qj}} = -2 \int_0^t \left[x(\tau) \sin j \omega_1 \tau - \sum_{i=1}^m (y_{di} \cos i \omega_1 \tau \sin j \omega_1 \tau + y_{qi} \sin i \omega_1 \tau \sin j \omega_1 \tau) \right] d\tau = 0$$

Łatwo już teraz zauważyć, że 2m takich warunków tworzy układ równań, który można tak zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a_{cc}(1,1) & a_{cs}(1,1) & a_{cc}(1,2) & a_{cs}(1,2) & \dots & a_{cc}(1,m) & a_{cs}(1,m) \\ a_{sc}(1,1) & a_{ss}(1,1) & a_{sc}(1,2) & a_{ss}(1,2) & \dots & a_{sc}(1,m) & a_{ss}(1,m) \\ a_{cc}(2,1) & & & & & & \cdot \\ a_{sc}(2,1) & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ a_{cc}(m,1) & & & & & & \cdot \\ a_{sc}(m,1) & a_{ss}(m,1) & \dots & \dots & \dots & a_{sc}(m,m) & a_{ss}(m,m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{d1} \\ y_{q1} \\ y_{d2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{dm} \\ y_{qm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{c1} \\ I_{s1} \\ I_{c2} \\ I_{s2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{cm} \\ I_{sm} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$[A][y] = [I]$$

gdzie

$$a_{cc}(i,j) = \int_0^t \cos(i \omega_1 \tau) \cos(j \omega_1 \tau) d\tau,$$

$$a_{sc}(i,j) = a_{cs}(j,i) = \int_0^t \sin(i \omega_1 \tau) \cos(j \omega_1 \tau) d\tau$$

$$a_{ss}(i,j) = \int_0^t \sin(i \omega_1 \tau) \sin(j \omega_1 \tau) d\tau$$

$$I_{ci} = \int_0^t x(\tau) \cos(i \omega_1 \tau) d\tau$$

$$I_{si} = \int_0^t x(\tau) \sin(i \omega_1 \tau) d\tau$$

$$x(\tau) = 0 \quad \text{dla} \quad \tau < 0$$

W równaniach (5.58) macierz $[A]$ jest dla danego t macierzą stałą, wektor $[I]$ jest określony na podstawie $x(t)$, a poszukiwany jest wektor $[y]$. Rozwiązaniem jest więc równanie macierzowe

$$[y] = [A]^{-1} [I] = \frac{1}{\det[A]} [A_{ji}] [I] \quad (5.59)$$

gdzie

$[A]^{-1}$ - macierz odwrotna macierzy $[A]$,

$\det [A]$ - wyznacznik tej macierzy,

$[A_{ji}]$ - transponowana macierz dopełnień algebraicznych $[A_{ij}]$ macierzy $[A]$.

Wzór (5.59) pozwala na obliczenie każdego z elementów wektora y według zależności

$$y_j = \frac{1}{\det [A]} \sum_{i=1}^{2m} A_{ji} I_i \quad (5.60)$$

gdzie

jeśli j jest nieparzyste, to $y_j = y_d((j+1)/2)$,

jeśli j jest parzyste, to $y_j = y_q(j/2)$,

jeśli i jest nieparzyste, to $I_i = I_c((j+1)/2)$

jeśli i jest parzyste, to $I_i = I_s(j/2)$.

W aproksymacji (5.55) nie uwzględniono składowej stałej ani ewentualnej składowej aperiodycznej. Zrobiono tak dla większej przejrzystości zapisu równań, które obowiązują oczywiście także w tych przypadkach. Można też na podstawie przedstawionych równań zauważyć, że dodanie w tej aproksymacji jednej składowej o danej częstotliwości zwiększa rząd macierzy $[A]$ i rozmiary wektorów o dwa (wskaźnik $2m$ w równaniu (5.60)).

Ważne przypadki szczególne występują wtedy, gdy czas t jest wielokrotnością półokresu identyfikowanej składowej sygnału, oraz gdy redukuje się liczbę wyrazów wielomianu aproksymującego do jednego ($m = 2$), a także gdy zachodzą oba te warunki.

5.3.2. Przypadki szczególne korelacji i odwzorowania krzywych

5.3.2.1. Zastosowanie współczynników szeregu Fouriera. Charakterystyki częstotliwościowe

Najprostszy przypadek szczególny otrzymuje się, gdy czas t jest całkowitą wielokrotnością półokresu identyfikowanej składowej, to znaczy $t = T = l(T_1/2)$, (gdzie $l = 1, 2, \dots$). W tym przypadku, ze względu na ortogonalność, wszystkie składniki leżące poza główną przekątną macierzy $[A]$ zerują się i otrzymuje się macierz diagonalną. Trzeba tu podkreślić, że owa ortogonalność i wynikające z niej uproszczenia są właśnie rezultatem przyjęcia szczególnej długości okna pomiarowego T . Wobec tego obliczenie poszukiwanych wartości y_d oraz y_q jest bardzo proste (5.58), stosownie do zależności:

$$y_d = \frac{\int_0^T x(\tau) \cos(\omega_1 \tau) d\tau}{\int_0^T \cos^2(\omega_1 \tau) d\tau}$$

$$y_q = \frac{\int_0^T x(\tau) \sin(\omega_1 \tau) d\tau}{\int_0^T \sin^2(\omega_1 \tau) d\tau} \quad (5.61)$$

gdzie obie całki w mianownikach są równe $T/2$ ($T = l(T_1/2)$), $x(\tau) = 0$ dla $\tau < 0$.

Nietrudno zauważyć, że tak obliczane wartości y_d i y_q są pierwszymi dwoma współczynnikami rozwinięcia w szereg Fouriera $x(\tau)$. Równania (5.61) wykazują podobieństwo do tych stosowanych podczas filtracji z funkcjami wagi sinus i cosinus, a różnica sprowadza się do tego, że splot jest zastąpiony iloczynem. Ma to swoje konsekwencje w tym, że równania (5.61) nie opisując filtru, nie dostarczają na wyjściu składowej przemiennej, lecz składową stałą (5.55). Niemniej jednak algorytm według nich zrealizowany będzie niewątpliwie wykazywał określone własności filtracji zakłóceń. Łatwo przecież zauważyć, że w pełnookresowej wersji zakłócenia harmoniczne będą odrzucane, podobnie jak w pełnookresowej filtracji z funkcjami wagi sinus i cosinus.

Charakterystyki filtracyjne otrzyma się przez podstawienie w równaniach (5.61) za $x(\tau)$ sygnału o dowolnej częstotliwości zamiast składowej podstawowej

$$y_{d1} = \frac{2}{T} \int_0^T X_1 \cos(1 \omega_1 \tau + \phi_1) \cos(\omega_1 \tau) d\tau$$

$$y_{q1} = \frac{2}{T} \int_0^T X_1 \cos(1 \omega_1 \tau + \phi_1) \sin(\omega_1 \tau) d\tau$$
(5.62)

gdzie 1 - dowolna liczba rzeczywista (dodatnia), mnożnik częstotliwości składowej podstawowej.

Obliczenie wartości całek (5.62) daje zależności:

$$y_{d1} = X_1 \left\{ \text{Sa} \left[(1+1) \frac{\omega_1 T}{2} \right] \cos \left[(1+1) \omega_1 \frac{T}{2} + \phi_1 \right] + \right. \\ \left. + \text{Sa} \left[(1-1) \frac{\omega_1 T}{2} \right] \cos \left[(1-1) \omega_1 \frac{T}{2} - \phi_1 \right] \right\}$$

$$y_{q1} = X_1 \left\{ \text{Sa} \left[(1+1) \frac{\omega_1 T}{2} \right] \sin \left[(1+1) \omega_1 \frac{T}{2} + \phi_1 \right] + \right. \\ \left. + \text{Sa} \left[(1-1) \frac{\omega_1 T}{2} \right] \sin \left[(1-1) \frac{\omega_1 T}{2} - \phi_1 \right] \right\}$$
(5.63)

gdzie $\text{Sa}(x) = \sin(x)/x$.

Jeśli teraz przedział T jest wielokrotnością półokresu składowej podstawowej (to znaczy $\omega_1 T = 2k\pi$), to dla sygnału o częstotliwości podstawowej otrzymuje się:

$$y_{d1} = X_1 \cos(-\phi) = X_1 \cos \phi$$

$$y_{q1} = -X_1 \sin \phi$$
(5.64)

Jak widać to po sygnale wyjściowym o częstotliwości podstawowej, a również po zależności (5.63), w wyniku korelacji następuje przesunięcie częstotliwości i składowa o częstotliwości $1 \omega_1$ wytwarza na wyjściu sygnały o częstotliwościach $(1+1)\omega_1$ i $(1-1)\omega_1$. Gdy $1 = 1$, te pierwsze znikają, ponieważ funkcja $\text{Sa}(k\pi)$ jest zerowa.

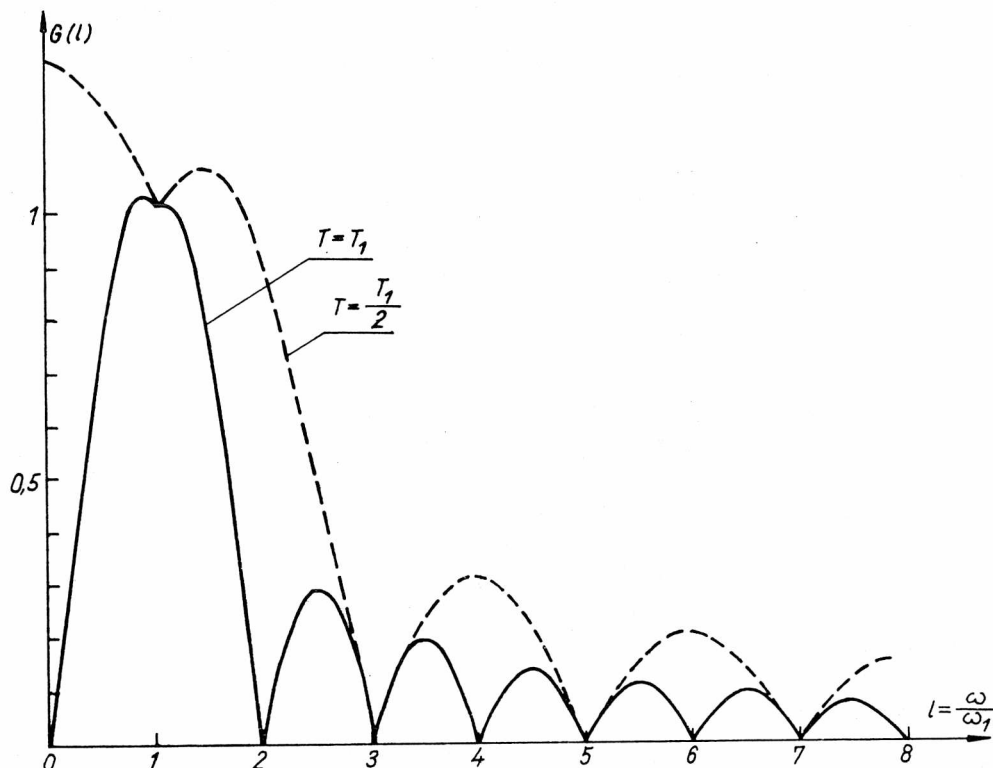
Tak więc określenie charakterystyki widmowej dla każdej ze składowych byłoby raczej trudne. Można natomiast to uczynić dla obu składowych łącznie, w algorytmie pomiaru amplitudy. Przyjawszy identyczną jednostkową amplitudę sygnałów o dowolnej częstotliwości otrzymuje się z (5.63) następującą wartość kwadratu amplitudy w funkcji częstotliwości zredukowanej 1:

$$G^2(1) = \frac{1}{X_1^2} (y_{d1}^2 + y_{q1}^2)$$

$$G^2(1) = \text{Sa}^2 \left[(1+1) \frac{\omega_1 T}{2} \right] + \text{Sa}^2 \left[(1-1) \frac{\omega_1 T}{2} \right] +$$
(5.65a)

$$+ 2\text{Sa}\left[(1 + 1) \frac{\omega_1 T}{2}\right] \text{Sa}\left[(1 - 1) \frac{\omega_1 T}{2}\right] \cos 2\left(\frac{\omega_1 T}{2} + \varphi_1\right) \quad (5.65b)$$

gdzie $T = 2\pi/\omega_1$ lub $T = \pi/\omega_1$, $G(1) = 1$.



Rys. 5.9. Widma pomiaru amplitudy metodami korelacji pełno- i półokresowej

Fig. 5.9. Spectra of magnitude measurement using half and full cycle correlation methods

W zależności od fazy φ_1 sygnału otrzymuje się więc wartość $G^2(1)$ i jak widać, waha się ona między kwadratem sumy i różnicy funkcji próbujących Sa . Obwiednia maksymalnych wartości dla danej częstotliwości jest więc wyznaczona przez większą z wartości sumy lub różnicy tych funkcji. Charakterystykę tę przedstawiono na rys. (5.9) i jest ona taka sama jak częstotliwościowa charakterystyka pomiaru amplitudy z użyciem filtrów cyfrowych z funkcjami wagi sinus i cosinus. Na rys. 5.9 pokazano dwie takie charakterystyki: pół- i pełnookresową. Mają one te same zalety i wady jak opisane w p. 5.2.2.

Algorytmy cyfrowe realizujące korelację wynikają bezpośrednio z (5.62) i mają postać

$$\begin{aligned} y_d(n) &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \cos(n-k) \omega_1 T_1 \\ y_q(n) &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \sin(n-k) \omega_1 T_1 \end{aligned} \quad (5.66)$$

gdzie $x(n) = X_1 \cos(n \omega_1 T_1 + \varphi)$, $N = N_1$ lub $N = N_1/2$.

W tym przypadku jeszcze łatwiej niż podczas filtracji można otrzymać postać rekursywną algorytmu (5.66) i jest on jeszcze prostszy. Wystarczy zauważyć, że po zwiększeniu wskaźnika n o jeden do $n+1$ jeden składnik $x(n+1)$ pojawia się w oknie T oraz jeden składnik $x(n+1-N)$ opuszcza okno. Wobec tego algorytm ten przyjmie postać rekursywną:

$$\begin{aligned} y_d(n+1) &= y_d(n) + \frac{2}{N} [x(n+1) - x(n+1-N)] \cos(n+1) \omega_1 T_1 \\ y_q(n+1) &= y_q(n) + \frac{2}{N} [x(n+1) - x(n+1-N)] \sin(n+1) \omega_1 T_1 \end{aligned} \quad (5.67)$$

gdzie $N = N_1$ lub $N = N_1/2$; gdy zachodzi drugi przypadek, trzeba zmienić znaki minus na plus.

Jest to niezwykle prosta postać algorytmu, wymagająca realizacji dla obu składowych tylko trzech dodawań i dwu mnożeń.

Rozważając łącznie charakterystyki widmowe, algorytm i dynamikę należy uważać pełno- i półokresową korelację za jedną z metod szczególnie korzystnych i dogodnych do realizacji w czasie rzeczywistym.

5.3.2.2. Optymalna estymacja i wariancje błędów

Drugi z uproszczonych przypadków szczególnych otrzymuje się, gdy funkcje aproksymujące są ograniczone do dwóch, tj. $\sin(\omega_1 \tau)$ i $\cos(\omega_1 \tau)$.

Równanie (5.58) redukuje się wówczas do postaci:

$$\begin{bmatrix} a_{cc} & a_{cs} \\ a_{sc} & a_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{d1} \\ y_{q1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{c1} \\ I_{s1} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

gdzie dla uproszczenia pominięto wskaźniki charakteryzujące częstotliwość w macierzy $[A]$, gdyż wszędzie jest to częstotliwość podstawowa ω_1 .

Rozwiązanie tego układu równań jest następujące:

$$\begin{bmatrix} y_{d1} \\ y_{q1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} a_{ss} & -a_{cs} \\ -a_{sc} & a_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{c1} \\ I_{s1} \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

gdzie

$$I_{c1} = \int_0^t x(\tau) \cos \omega_1 \tau d\tau,$$

$$I_{s1} = \int_0^t x(\tau) \sin \omega_1 \tau d\tau,$$

$$a_{ss} = \int_0^t \sin^2 \omega_1 \tau d\tau = \frac{t}{2} \left[1 - \frac{\sin 2\omega_1 t}{2\omega_1 t} \right],$$

$$a_{cc} = \int_0^t \cos^2 \omega_1 \tau d\tau = \frac{t}{2} \left[1 + \frac{\sin 2\omega_1 t}{2\omega_1 t} \right],$$

$$a_{cs} = a_{sc} = \int_0^t \sin \omega_1 \tau \cos \omega_1 \tau d\tau = \frac{t}{2} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t},$$

$$\det[A] = a_{cc} a_{ss} - a_{cs} a_{sc} = \frac{t^2}{4} \left[1 - \left(\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \right)^2 \right],$$

$$x(\tau) = 0 \quad \text{dla} \quad \tau < 0.$$

Parametr t jest teraz zmienny w przedziale od zera do T_1 i dla każdej wartości t otrzymuje się inne wartości współczynników a .

Ocena i sam sposób oceny błędu aproksymacji zależy od tego, w jakim stopniu przyjęte funkcje aproksymujące odwzorowują rzeczywisty sygnał $x(\tau)$. Jeśli więc $x(\tau)$ przy przyjętej tu aproksymacji funkcjami $\cos \omega_1 \tau$, $\sin \omega_1 \tau$ będzie zawierał zakłócenia o innej częstotliwości, to będzie popełniany pewien błąd. Jednak w przedziale t między zerem a T_1 mamy teraz do czynienia z filtrem niestacjonarnym, którego współczynniki są różne dla każdej kolejnej chwili $t_1, t_2 \dots T_1$. Racjonalne wydaje się przyjęcie modelu sygnału o postaci [165]:

$$x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) + e(t) = Y_d \cos \omega_1 t + Y_q \sin \omega_1 t + e(t) \quad (5.70)$$

gdzie $e(t)$ - zakłócenie sygnału x .

Ponieważ (5.69) jest określone tak, że średniokwadratowy błąd aproksymacji jest minimalny, to można by spróbować obliczyć tę wartość. Jednakże przy dowolnej postaci $e(t)$ jest to dość złożone. Najłatwiej obliczyć ten błąd, gdy przyjmie się, że $e(t)$ jest procesem losowym o stałym widmie gęstości mocy [2], [4], [5], [8]. Rezultaty badań symulacyjnych wykazują, że ten model dość dobrze odwzorowuje pozwarciowe zakłócenia składowych podstawowych prądu i napięcia [165]. Jeśli zresztą nawet istnieją pewne rozbieżności, to i tak jest to typ zakłócenia, które jest do odfiltrowania najtrudniejsze, gdyż ma stałe widmo w całym pasmie. Proces

losowy o stałym widmie gęstości mocy jest nazywany szumem białym i może być scharakteryzowany tak:

$$\begin{aligned} E \{e(t)\} &= 0 \\ S_e(\omega) &= M_e \\ R_e(\tau) &= M_e \delta(\tau) \end{aligned} \quad (5.71)$$

gdzie

$S_e(\omega)$ - widmo gęstości mocy,

$R_e(\tau)$ - funkcja autokorelacji zakłócenia (szumu białego).

Obliczane z równań (5.69) wielkości y_d , y_q nie są już teraz wielkościami deterministycznymi, lecz zmiennymi losowymi $\hat{y}_d$, $\hat{y}_q$ estymującymi te wielkości. Równania te, które służyły do obliczenia y z minimalnym błędem średniokwadratowym, minimalizują teraz wariancję estymacji.

Podstawiając sygnał (5.70) do równania (5.69) otrzymuje się po przekształceniach:

$$\begin{aligned} \hat{y}_d - y_d &= \frac{1}{\det A} \left\{ a_{ss} \int_0^t e(\tau) \cos \omega_1 \tau d\tau - a_{cs} \int_0^t e(\tau) \sin \omega_1 \tau d\tau \right\} \\ \hat{y}_q - y_q &= \frac{1}{\det A} \left\{ -a_{sc} \int_0^t e(\tau) \cos \omega_1 \tau d\tau + a_{cc} \int_0^t e(\tau) \sin \omega_1 \tau d\tau \right\} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Jak widać, ze względu na wartości oczekiwane obu stron tych równań, wartość oczekiwana estymat jest równa wartościom rzeczywistym, jeśli wartość oczekiwana zakłócenia $e(t)$ jest zerowa. Ponieważ szum biały ma tę cechę, więc

$$\begin{aligned} E \{ \hat{y}_d - y_d \} &= 0 \\ E \{ \hat{y}_q - y_q \} &= 0 \end{aligned} \quad (5.73)$$

A więc estymaty wielkości y są nieobciążone i uśredniona wielkość mierzona zdąża do rzeczywistej.

Wariancje tych składowych są określone z kolei zależnościami:

$$\begin{aligned} \sigma_d^2 &= E(\hat{y}_d - y_d)^2 \\ \sigma_q^2 &= E(\hat{y}_q - y_q)^2 \end{aligned} \quad (5.74)$$

gdzie E - oznacza wartość oczekiwaną.

Do obliczenia wariancji (5.74) można by podstawić wartości z (5.72) i po dość złożonych przekształceniach otrzymać poszukiwane wartości. Ale wariancje takich funkcjonałów jak w (5.72) można znacznie łatwiej obliczyć, wykorzystując w tym przypadku fakt, że funkcja autokorelacji zakłócenia $e(t)$ ma postać (5.71). Jeśli więc należy określić wariancję funk-

cjonu procesu $e(t)$, a proces ten jest szumem białym, to

$$E \left\{ \int_0^t e(\tau) f_1(\tau) d\tau \int_0^t e(\tau) f_2(\tau) d\tau \right\} = M_e \int_0^t f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (5.75)$$

Wykorzystując tę tożsamość w pierwszej z wariancji (5.74), po podstawieniu (5.72) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \sigma_d^2 &= \frac{1}{(\det A)^2} \left\{ a_{ss}^2 E \left[\int_0^t e(\tau) \cos \omega_1 \tau d\tau \right]^2 + a_{cs}^2 E \left[\int_0^t e(\tau) \sin \omega_1 \tau d\tau \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2a_{ss}a_{cs} E \left[\int_0^t e(\tau) \sin \omega_1 \tau \cos \omega_1 \tau d\tau \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{(\det A)^2} (a_{ss}^2 a_{cc} M_e - 2a_{ss} a_{cs}^2 M_e + a_{ss} a_{cs}^2 M_e) = \\ &= \frac{M_e a_{ss}}{(\det A)^2} (a_{ss} a_{cc} - a_{cs}^2) = \frac{M_e a_{ss}}{\det A} \\ \sigma_q^2 &= \frac{M_e a_{cc}}{\det A} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Podstawiając wartości z (5.69) można by otrzymać wariancję każdej z estymat. Wygodniej jest jednak określić wariancję estymacji amplitudy:

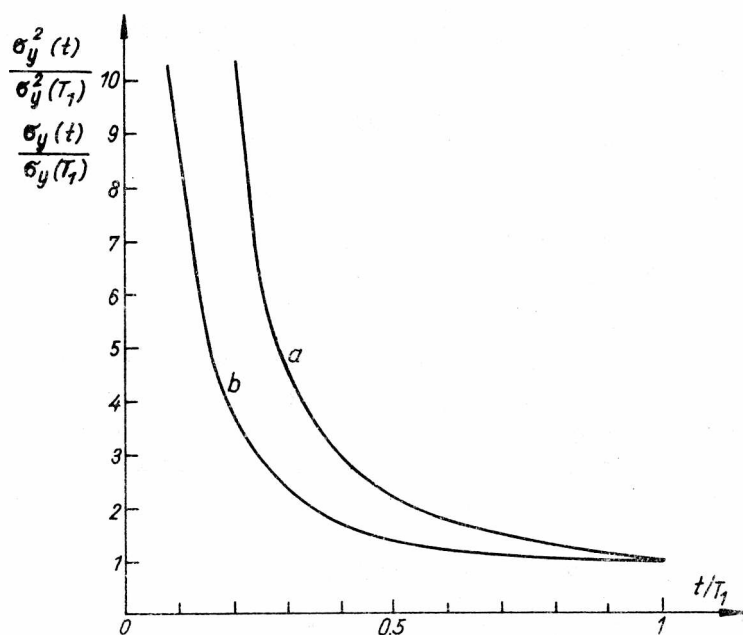
$$\sigma_y^2 = \sigma_d^2 + \sigma_q^2 = \frac{4M_e}{t} \frac{1}{1 - Sa^2(\omega_1 t)} \quad (5.77)$$

gdzie $Sa(x) = (\sin)/x$.

Jak więc widać, czego można było oczekiwać, wariancja maleje wraz ze wzrostem t . Jeśli założyć, że aż do osiągnięcia czasu T_1 stosuje się metodę odwzorowania krzywych, a dalej korelację ze stałym oknem T_1 , to można obliczyć względną wariancję odniesioną do tej minimalnej wartości, która daje pogląd, z jaką szybkością wariancja maleje wraz ze wzrostem t do T_1 ($0 \leq t/T_1 \leq 1$):

$$\frac{\sigma_y^2(t)}{\sigma_y^2(T_1)} = \frac{T_1}{t} \frac{1}{1 - Sa^2(\omega_1 t)} \quad (5.78)$$

Wykres tego ilorazu wariancji przedstawiono na rys. 5.10. Rozpatrując ten wykres w kierunku malejących t widać, że wariancja w przedziale $t/T_1 = 1-0,5$ początkowo wzrasta bardzo powoli, by następnie wzrastać z ogromną szybkością (gdy $t/T_1 = 0,1$ już jest równa 80). Tak więc sensowne rezultaty pomiarów przy tak krótkich czasach otrzymuje się tylko wtedy, gdy widmo gęstości zakłócenia ma bardzo małą wartość (M_e). Zależność (5.77) pozwala również na obliczenie wariancji w metodach stałego okna, jeśli stosuje się model sygnałowy (5.70) i zakłócenie jest scha-



Rys. 5.10. Względna wariancja (a) i odchylenie standardowe (b) błędów estymacji amplitudy metodą korelacji w zależności od długości okna pomiarowego

Fig. 5.10. Variance (a) and a standard deviation (b) of errors ratio of magnitude measurement versus data window, using correlation method

rakteryzowane w (5.71). Aby to obliczyć wystarczy podstawić T_1 lub $T_1/2$ w (5.77). Można też zauważyć, że jakościowo podobne zmiany występują w charakterystykach częstotliwościowych podczas skracania okna pomiarowego (rys. 5.9).

Gdy są tak krótkie okna pomiarowe, nie występuje już taka zgodność między widmem całkowania ciągłego i dyskretnego i wielkości występujące w równaniu (5.69) powinny być obliczone jako sumy dyskretnie. Wprawdzie można zrobić elementarnie prosty program ich obliczania dla danego N_1 , ale tu przytoczy się odpowiednie wzory analogiczne do (5.69) (oczywiście ogólne równanie macierzowe pozostaje bez zmian):

$$I_{c1} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cos(k\omega_1 T_1)$$

$$I_{s1} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sin(k\omega_1 T_1)$$

(5.79)

$$\begin{aligned}
 a_{cc} &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2 k(\omega_1 T_i) = \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \sin^2(N\omega_1 T_i) + \frac{1}{4} \sin(2N\omega_1 T_i) \frac{\cos(\omega_1 T_i)}{\sin(\omega_1 T_i)} \\
 a_{ss} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2(k\omega_1 T_i) = \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \sin^2(N\omega_1 T_i) - \frac{1}{4} \sin(2N\omega_1 T_i) \frac{\cos(\omega_1 T_i)}{\sin(\omega_1 T_i)} \\
 a_{cs} &= a_{sc} = \sum_{k=0}^{N-1} \sin(k\omega_1 T_i) \cos(k\omega_1 T_i) = \frac{1}{2} \sin[(N-1)\omega_1 T_i] \frac{\sin(N\omega_1 T_i)}{\sin(\omega_1 T_i)}
 \end{aligned}$$

gdzie $N = t/T_i$.

Wzrost wariancji wraz ze skracaniem długości okna pomiarowego rodzi pytanie, jakie z kolei są skutki, gdy sygnał po skokowej zmianie tylko częściowo znajduje się wewnątrz okna pomiarowego, a więc jaki jest przebieg stanu przejściowego w metodach stałego okna; stałookiennej filtracji i korelacji.

5.4. Stany przejściowe filtracji i korelacji

Badanie stanów przejściowych algorytmów, które wykorzystują okno stałe, ma znaczenie głównie ze względu na możliwość występowania przerostów mierzonych wielkości po skokowej zmianie sygnału, a przed pojawieniem się sygnału w całości wewnątrz tego okna. Konieczne jest określenie, czy sama składowa podstawowa nie będzie powodować takich przerostów, a również czy ich źródłem nie mogą być składowe zakłócające, nawet jeśli w stanie ustalonym są odrzucane; jak na przykład składowa stała i harmoniczne w algorytmach pełnookresowych. Na ten temat opublikowano kilka prac [60], [147], [149] tych samych autorów i dotyczyły one stanów przejściowych filtrów z funkcjami wagi sinus, cosinus oraz funkcjami Walsha. Tutaj przedstawiono dokładniejszą analizę dotyczącą filtracji i korelacji.

Niech sygnał o jednostkowej amplitudzie będzie korelowany z funkcjami sinus i cosinus zgodnie z równaniami (5.62). W stanie przejściowym współczynniki stałe w tych równaniach są ustalone, natomiast przedział całkowania jest mniejszy od T i zmienia się w zakresie od zera do T , stosownie do pojawiających się nowych wartości po skokowej zmianie sygnału (rys. 5.11):

$$\begin{aligned}
 y_d(t) &= \frac{2}{T} \int_0^t \cos(\omega_1 \tau + \varphi) \cos \omega_1 \tau \, d\tau \\
 y_q(t) &= \frac{2}{T} \int_0^t \cos(\omega_1 \tau + \varphi) \sin \omega_1 \tau \, d\tau
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

Wyrażenia te łatwo przekształcić do postaci wykorzystującej oznaczenia w zależności (5.69):

$$y_d(t) = \frac{2}{T} (a_{cc} \cos \varphi - a_{sc} \sin \varphi) \quad (5.81)$$

$$y_q(t) = \frac{2}{T} (a_{cs} \cos \varphi - a_{ss} \sin \varphi)$$

gdzie współczynniki a są funkcją położenia okna t .

Ponieważ faza sygnału φ może być dowolna, to stosownie do tego jaka jest jej wartość, będą zmieniać się wartości y_d , y_q . Łatwo zauważyć, że mogą one się zmieniać między zerem a pierwiastkiem sumy kwadratów współczynników a , pomnożonym przez $2/T$:

$$0 \leq y_d(t) \leq \frac{2}{T} \sqrt{a_{cc}^2 + a_{sc}^2} \quad (5.81a)$$

$$0 \leq y_q(t) \leq \frac{2}{T} \sqrt{a_{cs}^2 + a_{ss}^2}$$

Wartości fazy φ , przy których zerują się y_d i y_q , są oczywiście różne. W tej sytuacji więcej informacji może dostarczyć stan przejściowy amplitudy, a nie składowych. Jest ona obliczana w stanie ustalonym jako pierwiastek sumy kwadratów składowych y_d i y_q . Podstawiając wartości y z (5.81) otrzymuje się po przekształceniach:

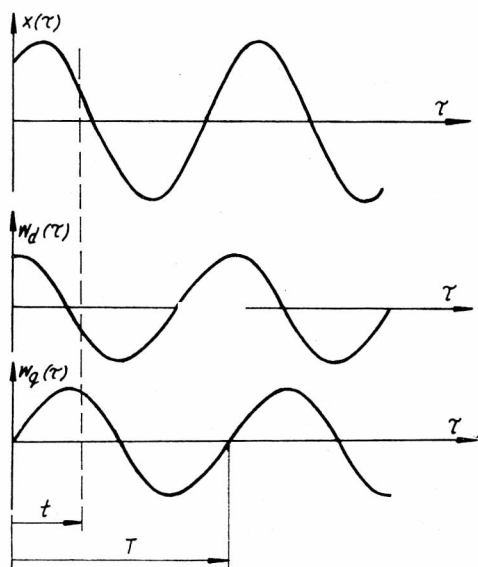
$$\begin{aligned} X_1(t) &= \sqrt{y_d^2(t) + y_q^2(t)} = \\ &= \frac{2}{T} \sqrt{a_{sc} (a_{sc} + t \sin 2\varphi) + \left(\frac{t}{2}\right)^2 [1 + Sa^2(2\omega_1 t) + 2Sa(2\omega_1 t) \cos 2\varphi]} \end{aligned} \quad (5.82)$$

gdzie

$$Sa(2\omega_1 t) = \frac{\sin(2\omega_1 t)}{2\omega_1 t},$$

$$a_{sc} = \frac{t}{2} \frac{\sin^2(\omega_1 t)}{\omega_1 t}.$$

Ekstremalne wartości amplitudy (5.82) otrzyma się przez przyrównanie do zera pochodnej wyrażenia podpierwiastkowego. Otrzymuje się stąd warunek



Rys. 5.11. Ilustracja zmiany długości okna pomiarowego po skokowej zmianie sygnału ($x(\tau) = 0$ dla $\tau < 0$)
Fig. 5.11. Illustration of data window variation after step change of the signal ($x(\tau) = 0$ for $\tau < 0$)

$$\frac{dX_1^2(t)}{d\varphi} = t^2 \text{Sa}(\omega_1 t) \sin(\omega_1 t - 2\varphi) = 0$$

czyli

$$2\varphi = \omega_1 t - k\pi.$$

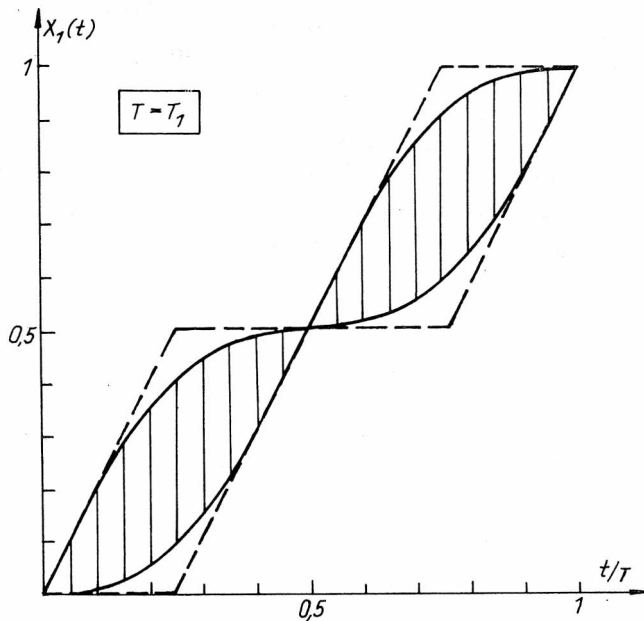
Wstawiając wartość 2φ do równania (5.82) otrzymuje się po przekształceniach

$$X_1(t) = \frac{t}{T} \sqrt{1 + \text{Sa}^2(\omega_1 t) + 2\text{Sa}(\omega_1 t) \cos(k\pi)} \quad (5.83)$$

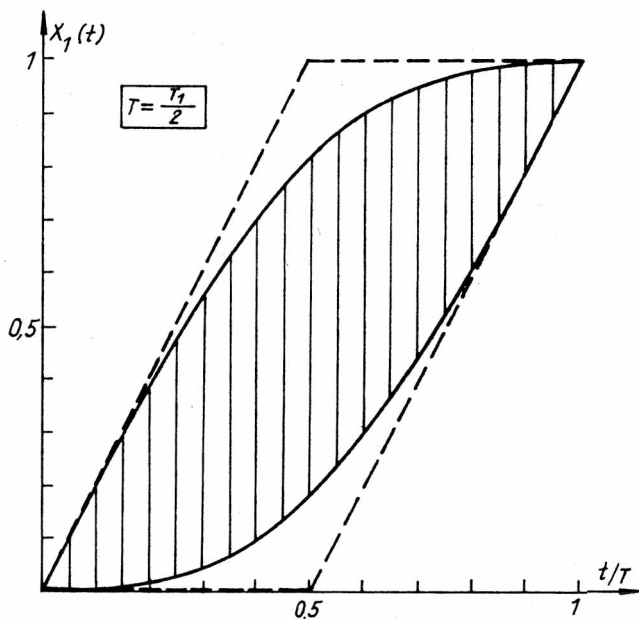
skąd wynikają od razu maksymalne i minimalne wartości $X_1(t)$:

$$\begin{aligned} X_1(t)_{\max} &= \frac{t}{T} [1 + \text{Sa}(\omega_1 t)] \\ X_1(t)_{\min} &= \frac{t}{T} [1 - \text{Sa}(\omega_1 t)] \end{aligned} \quad (5.84)$$

Wykresy tych krzywych przedstawiono na rys. 5.12 i 5.13, odpowiednio dla pełno- i półokresowej korelacji. Obszary zakreskowane na tych rysunkach to obszary, w których znajduje się mierzona amplituda X_1 (5.82). Jak widać, w zależności od fazy różnice między maksymalną i minimalną amplitudą w stanie przejściowym mogą być znaczne, szczególnie w korelacji



Rys. 5.12. Obszary, w których może znajdować się mierzona amplituda w stanie przejściowym z zastosowaniem pełnookresowej korelacji
Fig. 5.12. Regions of measured magnitude during signal transients using full cycle correlation



Rys. 5.13. Obszar, w którym może znajdować się mierzona amplituda w stanie przejściowym z zastosowaniem półokresowej korelacji
Fig. 5.13. Region of measured magnitude during signal transients using half cycle correlation

półokresowej. Można też zauważyć, że w środku przedziału, w korelacji pełnookresowej, krzywe te przecinają się, co wynika z tego, że dla $t/T_1 = 0,5$ składowe są ortogonalne. Z krzywych tych wynika także, że pełno- i półokresowa korelacje nie wykazują przerostów składowej podstawowej.

Stany przejściowe składowych i amplitudy, gdy stosuje się filtry ortogonalne, można określić albo w dziedzinie czasu, albo w dziedzinie częstotliwości na podstawie (5.33) i (5.36). Jest intuicyjnie wyczuwalne, że stan przejściowy amplitudy powinien być, dla filtracji i korelacji, identyczny z tymi samymi zakresami zmian amplitud. Można by przeprowadzić podobne rozważania jak dla korelacji, lecz właśnie wystarczy zauważyć, że splot (5.46) może być dla każdej z wyznaczonych na wyjściu filtru składowych, przy funkcjach wagi sinus i cosinus, przedstawiony następująco:

$$\frac{2}{T} \int_0^t \cos[\omega_1(t - \tau) + \phi] \cos \omega_1 \tau d\tau = \frac{2}{T} [a_{cc} \cos(\omega_1 t + \phi) - a_{sc} \sin(\omega_1 t + \phi)] \quad (5.85)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^t \cos[\omega_1(t - \tau) + \phi] \sin \omega_1 \tau d\tau = \frac{2}{T} [a_{cs} \cos(\omega_1 t + \phi) - a_{ss} \sin(\omega_1 t + \phi)]$$

gdzie współczynniki a są takie jak w (5.69) i (5.81).

Z porównania wyrażeń (5.85) i (5.81) widać, że są one identyczne, jeśli zastąpi się argumenty φ przez $\omega_1 t + \varphi$. Wobec tego ekstremalne wartości amplitudy występują, gdy fazy są przesunięte o $\omega_1 t$, ale wyrażenia określające ekstremalne amplitudy (5.83) i (5.84) będą identyczne dla filtracji. Tak więc obszary ograniczone liniami ciągłymi na rys. (5.12) i (5.13) wyznaczają granice ekstremalnych amplitud podczas pełno- i półokresowej filtracji z funkcjami wagi sinus i cosinus.

Można wykazać [147], że gdy stosuje się funkcje wagi Walsha (rys. 5.4-5.6) obwiednie stanów przejściowych są takie jak zaznaczone liniami przerywanymi na rys. 5.12 i 5.13 (odpowiednio funkcje Walsha pierwszego i drugiego rzędu oraz obcięta pierwszego i zerowego rzędu). Pozornie zaskakujący może wydawać się fakt, że minimalna amplituda może być zerowa, aż do jednej czwartej okresu składowej podstawowej. Jednakże przy stosowaniu funkcji Walsha w tym przedziale obie funkcje wagi są identyczne, a uzyskiwane składowe zgodne. Wobec tego, zależnie od fazy sygnału wejściowego, amplituda waha się między zerem a pewną wartością maksymalną.

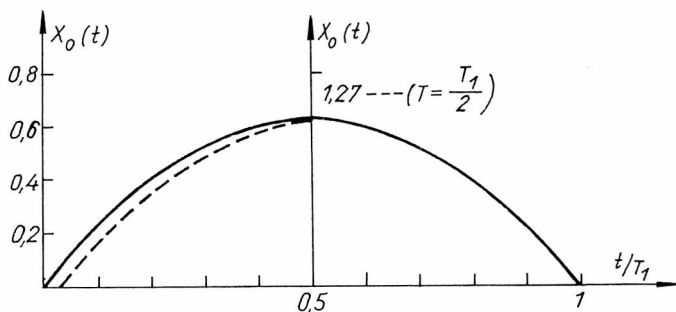
Stan przejściowy wywołany składową podstawową jest modyfikowany, jeśli sygnał wejściowy zawiera składowe zakłócające, nawet jeśli są to składowe, które w stanie ustalonym są odrzucane. Rozpatrzmy przykładowo zakłócenie sygnałem stałym, a także drugą harmoniczną o amplitudzie jednostkowej.

W tym pierwszym przypadku, zarówno w metodzie korelacji, jak i filtracji ((5.80, 5.85)), po podstawieniu zamiast podstawowej składowej stałą otrzyma się:

$$\begin{aligned} y_d(t) &= \frac{2}{\omega_1 T} \sin \omega_1 t \\ y_q(t) &= \frac{2}{\omega_1 T} (1 - \cos \omega_1 t) \\ x_o &= \sqrt{y_d^2(t) + y_q^2(t)} = \frac{4}{\omega_1 T} \sin \left(\frac{\omega_1 T}{2} \frac{t}{T} \right) \end{aligned} \quad (5.86)$$

Jeśli do ostatniego z tych wzorów podstawia się $T = T_1$ lub $T = T_1/2$, otrzyma się wykresy stanu przejściowego składowej stałej odpowiednio dla pełno- i półokresowej filtracji i korelacji. Przedstawiono je na rys. 5.14 (linia przerywana algorytm półokresowy). Jak widać, składowa stała ma w stanie przejściowym dość dużą wartość maksymalną, która wynosi 0,64 (na jednostkę).

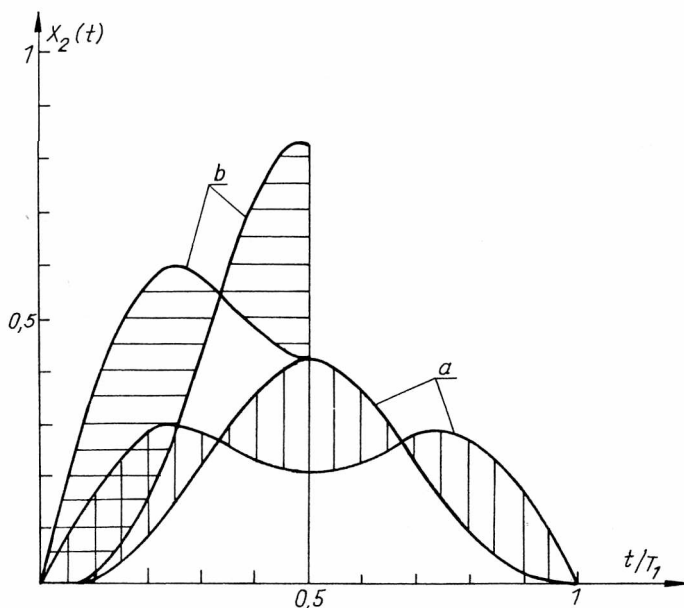
Stan przejściowy powodowany składową o dowolnej częstotliwości można ocenić na podstawie zależności (5.62)-(5.65). Otóż jeśli w równaniu (5.62) zamienić przedział całkowania z ustalonej wartości T na zmienną t ($0 \leq t \leq T$), to w składowych (5.63) należy zastąpić T przez t oraz trzeba te składowe pomnożyć przez t/T (wynika to z (5.62)). Podobnie



Rys. 5.14. Stan przejściowy składowej stałej z zastosowaniem pełno- i półokresowej filtracji lub korelacji
 Fig. 5.14. DC component transients using full and half cycle filtration or correlation

będzie też w (5.65), które jest równaniem kwadratu amplitudy i w naszym przypadku będzie mnożone przez $(t/T)^2$. Ale z (5.65) wynika, że amplituda waha się między sumą a różnicą odpowiednich funkcji $Sa(x) = (\sin(x))/x$.

Można więc napisać, że stan przejściowy powodowany składową o względnej częstotliwości 1 jest zawarty w przedziale:



Rys. 5.15. Stan przejściowy drugiej harmonicznej z zastosowaniem:
 a - pełnookresowej, b - półokresowej filtracji lub korelacji
 Fig. 5.15. 2-nd harmonic transients using full (a) and half (b) cycle filtration or correlation

$$\min \left\{ \left| \text{Sa}(1 + 1) \frac{\omega_1 t}{2} \pm \text{Sa}(1 - 1) \frac{\omega_1 t}{2} \right| \frac{t}{T} \right\} \leq \quad (5.87)$$

$$\leq X_1(t) \leq \max \left\{ \left| \text{Sa}(1 + 1) \frac{\omega_1 t}{2} \pm \text{Sa}(1 - 1) \frac{\omega_1 t}{2} \right| \frac{t}{T} \right\}$$

gdzie $1 = \omega/\omega_1$.

Po podstawieniu przykładowo $1 = 2$ otrzyma się obszar stanu przejściowego drugiej harmonicznej. Przedstawiono to na rys. 5.15 dla algorytmu pełno- i półokresowego (na jednostkę amplitudy). Jak widać, wartości amplitudy mogą być znaczne w stanie przejściowym, i sięgają prawie pięćdziesięciu procent w algorytmie pełnookresowym, w którym przecież druga harmoniczna w stanie ustalonym jest odrzucona.

Podobne badanie stanów przejściowych można przeprowadzić korzystając z widm funkcji wagi [147], [149]. Oblicza się je dla tej części funkcji wagi, która w stanie przejściowym znajduje się wewnątrz okna pomiarowego, a w pozostałej części okna jest zerowa (rys. 5.16). Sposób ten daje wyniki identyczne, lecz może być prostszy, gdy korzysta się w badaniach z symulacji komputerowej.

W podsumowaniu trzeba stwierdzić, że wykorzystywanie algorytmów pomiarowych w warunkach skokowych zmian sygnałów powoduje konieczność badania ich stanów przejściowych w celu określenia trajektorii dochodzenia do stanu ustalonego, gdy sygnały w całości znajdują się wewnątrz okna pomiarowego. Cechy tego stanu przejściowego to jeden z elementów charakterystyki algorytmu.

5.5. Filtracja przy oknie pomiarowym zmiennej długości

5.5.1. Zasady i równania ogólne

Wyniki przedstawione w p. 5.4 wskazują, że stan przejściowy identyfikowanej składowej podstawowej sygnału może zmieniać się w tak szerokich granicach, że przed upływem czasu równego długości okna pomiarowego T od chwili skokowej zmiany sygnału wejściowego niewiele można powiedzieć o mierzonej wielkości. Można tego uniknąć, jeśli jest znany moment w którym nastąpiła skokowa zmiana sygnału. Można teraz dobrać taką parę funkcji wagi filtrów, aby w miarę pojawienia się sygnału w oknie składowe wyjściowe filtrów były ortogonalne [185]. Osiąga się to przez takie usytuowanie funkcji wagi sinus, cosinus, aby niezależnie od bieżącej długości okna t były one odpowiednio parzyste i nieparzyste w odniesieniu do jego środka. Wówczas, jak wiadomo, argumenty widm filtrów wynoszą odpowiednio zero oraz $\pi/2$, zapewniając ortogonalność sygnałów wyjściowych. Tak więc poczynając od t równego zero aż do T_1 , funkcje wagi zmieniają się tak, jak to opisano w p. 5.4 oraz przedstawiono na rys. 5.16. Dla

czasów t większych od T_1 realizuje się normalną filtrację pełnookresową.

Sygnały wyjściowe filtrów są w rozpatrywanym przedziale opisane równaniami:

$$y_c(t) = \int_0^t x(\tau) \cos \omega_1 \left(\frac{t}{2} - \tau \right) d\tau \quad (5.88)$$

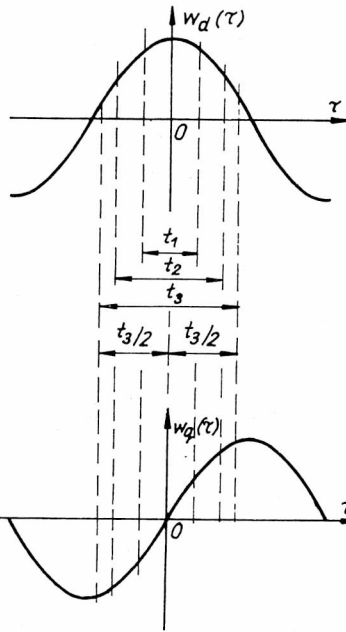
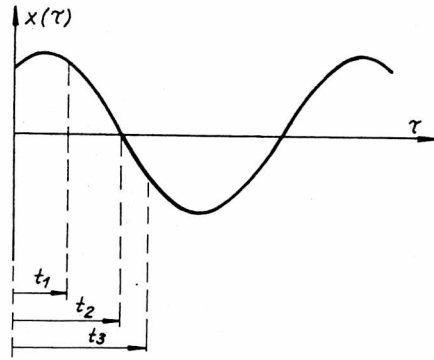
$$y_s(t) = \int_0^t x(\tau) \sin \omega_1 \left(\frac{t}{2} - \tau \right) d\tau$$

gdzie $x(\tau) = X_1 \cos(\omega_1 \tau + \varphi)$.

Po uwzględnieniu ogólnych zależności dotyczących widma spłotu, sygnały wyjściowe filtrów mogą być dane równaniami:

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \operatorname{Re}\{F_c\} X_1 \cos(\omega_1 \frac{t}{2} + \varphi) \\ y_s(t) &= -\operatorname{Im}\{F_s\} X_1 \sin(\omega_1 \frac{t}{2} + \varphi) \end{aligned} \quad (5.89)$$

Rys. 5.16. Ilustracja doboru funkcji wagi w metodzie filtracji o zmiennym oknie pomiarowym
Fig. 5.16. Selection of impulse responses in the filtration method with variable data window



gdzie

$$F_c(t) = \int_{-t/2}^{t/2} \cos \omega_1 \tau e^{-j\omega_1 \tau} d\tau = \frac{t}{2} \left[1 + \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} \right],$$

$$F_s(t) = \int_{-t/2}^{t/2} \sin \omega_1 \tau e^{-j\omega_1 \tau} d\tau = -j \frac{t}{2} \left[1 - \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} \right].$$

Tak więc widma dla składowej podstawowej, dane równaniami w opisie zależności (5.89), są odpowiednio rzeczywiste i urojone, a stąd otrzymano ortogonalizowane sygnały (5.89). Warto tu zauważyć, że w rozpatry-

wanym przedziale czasu sygnały mają dwukrotnie mniejszą częstotliwość. To przekształcenie częstotliwości jest wynikiem wycentrowania funkcji wagi w oknie w każdym jego nowym położeniu.

Na podstawie ortogonalnych składowych sygnału łatwo można określić amplitudę sygnału:

$$X_1 = \sqrt{\left[\frac{y_c(t)}{F_c(t)}\right]^2 + \left[\frac{y_s(t)}{F_s(t)}\right]^2} \quad (5.90)$$

Przebiegi amplitudy oraz składowych unormowanych sygnału przedstawiono na rys. 5.17. Jak widać z badań symulacyjnych, rzeczywiście następuje przesunięcie częstotliwości w wyniku splotu z przesuwającym się w opisany sposób oknem. Na rysunku przedstawiono też przebieg pomiaru amplitudy według klasycznego algorytmu pełnookresowego, z którego wynika, że różnice w czasie osiągania wartości ustalonej są ogromne, nieznacznie tylko mniejsze od okresu składowej podstawowej (symulacji dokonano, gdy $N_1 = 12$), bo już po pobraniu drugiej próbki sygnału otrzymuje się wartość ustaloną, gdy korzysta się z omawianej metody. Odbywa się to oczywiście pewnym kosztem, a jest nim pogorszenie charakterystyk widmowych, co zostanie omówione.

Obserwując rysunek 5.16 można zauważyć, że metoda jest wrażliwa na zakłócenie składową stałą, bowiem wartość średnia wycentrowanej funkcji cosinus jest zerowa dopiero wtedy, gdy przedział t jest równy T_1 . Aby składowa stała była odrzucana, jest konieczne, by wartości średnie wycentrowanych funkcji były w każdym przedziale t zerowe. Wycentrowaną funkcję cosinus należy więc przesunąć o odpowiednią wartość. Jest ona równa wartości średniej funkcji cosinus w przedziale t :

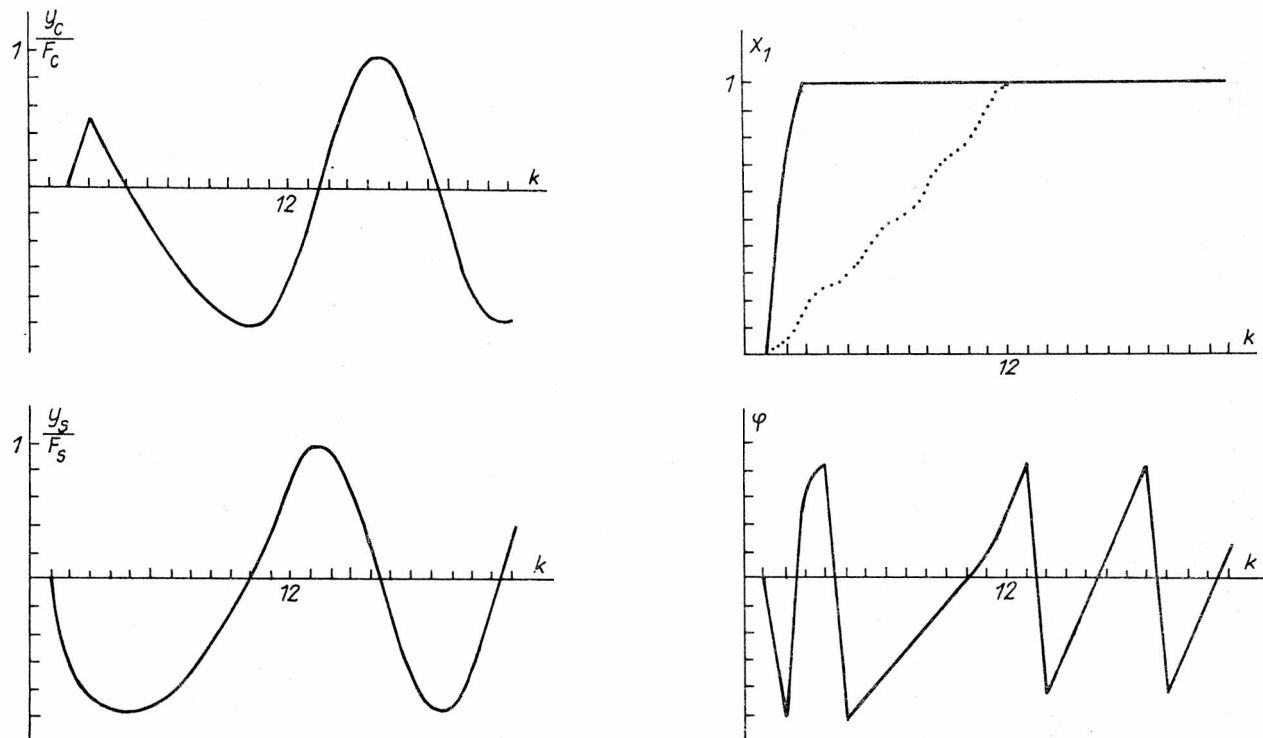
$$c_t = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \cos \omega_1 \tau \, d\tau = \frac{\sin \frac{\omega_1 t}{2}}{\frac{\omega_1 t}{2}}$$

Tak więc w tym przypadku składowa $y_s(t)$ jest obliczona tak samo, jak poprzednio (5.88), natomiast druga ze składowych $y_c(t)$ jest obliczana według równania

$$y_c(t) = \int_0^t x(\tau) \left[\cos \omega_1 \left(\frac{t}{2} - \tau \right) - c_t \right] d\tau \quad (5.91)$$

Zmienia się też odpowiednio współczynnik $F_c(t)$ i jest teraz określany równaniem

$$F_{c1}(t) = \frac{t}{2} \left[1 + \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} - 2 \left(\frac{\sin \frac{\omega_1 t}{2}}{\frac{\omega_1 t}{2}} \right)^2 \right] \quad (5.92)$$



Rys. 5.17. Przebiegi składowych, amplitudy i fazy podczas symulacji pomiaru metodą filtracji o zmiennym oknie pomiarowym (linia przerywana - przebieg amplitudy w stanie przejściowym przy standardowej filtracji pełnookresowej)

Fig. 5.17. Signal components, its magnitude and phase during simulation of measurements using filtration method with variable data window (dotted line - measured magnitude using standard full cycle filtration)

Naturalnie sam algorytm obliczania amplitudy (5.90) pozostaje bez zmian.

Zależności (5.88)-(5.92) mają tę cechę, że minimalizowany jest błąd średniokwadratowy aproksymacji funkcji $x(\tau)$ wycelowanymi w stosunku do środka okna t funkcjami sinus i cosinus i składową stałą, stosownie do równania

$$x(\tau) = x_c \cos \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) + x_s \sin \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) + c \quad (5.93)$$

Błąd średniokwadratowy tej aproksymacji jest dany zależnością

$$E(t) = \int_0^t \left[x(\tau) - x_c \cos \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) - x_s \sin \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) - c \right]^2 d\tau \quad (5.94a)$$

a jego minimalizacja wynika z jednoczesnego spełnienia warunków:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial x_c} = 0; \quad \frac{\partial E(t)}{\partial x_s} = 0; \quad \frac{\partial E(t)}{\partial c} = 0 \quad (5.94b)$$

Uwzględnienie zależności (5.94a) i (5.94b) prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} \int_0^t x(\tau) \cos \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau &= x_c \int_0^t \cos^2 \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau + \\ &+ x_s \int_0^t \sin \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) \cos \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau + c \int_0^t \cos \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau \end{aligned} \quad (5.95a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t x(\tau) \sin \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau &= x_c \int_0^t \cos \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) \sin \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau + \\ &+ x_s \int_0^t \sin^2 \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau + c \int_0^t \sin \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau \end{aligned} \quad (5.95b)$$

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = x_c \int_0^t \cos \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau + ct \quad (5.95c)$$

Po uwzględnieniu, że druga z całek prawej strony równania (5.95a), jak również pierwsza i trzecia całka równania (5.95b) są zerowe, oraz parzystości funkcji cosinus i nieparzystości funkcji sinus w stosunku do środka okna pomiarowego t , otrzymuje się:

$$\int_0^t x(\tau) \cos \omega_1 \left(\frac{t}{2} - \tau \right) d\tau = x_c \int_0^t \cos^2 \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau + c \int_0^t \cos \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau \quad (5.96a)$$

$$-\int_0^t x(\tau) \sin \omega_1 \left(\frac{t}{2} - \tau \right) d\tau = x_s \int_0^t \sin^2 \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau \quad (5.96b)$$

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = x_c \int_0^t \cos \omega_1 \left(\tau - \frac{t}{2} \right) d\tau + ct \quad (5.96c)$$

Przy założeniu, że sygnał $x(\tau)$ nie zawiera składowej stałej ($c=0$), z pierwszych dwu równań (5.96) otrzymuje się bezpośrednio zależności (5.88)-(5.89), gdzie $y_c = F_c x_c$, $y_s = F_s x_s$.

Jeśli natomiast sygnał $x(\tau)$ zawiera również składową stałą, to składowa x_s sygnału jest obliczona tak samo jak poprzednio (5.96b), a x_c określa się z pierwszego oraz trzeciego równania (5.96) i przekształca je tak, aby wyrugować c . Otrzymuje się teraz po prostych przekształceniach równanie (5.91) i (5.92), gdzie $y_c = F_{c1} x_c$.

Tak więc przedstawione uprzednio, niejako intuicyjne, zależności (5.88)-(5.92) mają jak widać cechę minimalizacji błędu średniokwadratowego aproksymacji identyfikowanego sygnału.

W podsumowaniu można stwierdzić, że stosując jako funkcje wagi filtrów ortogonalnych wycentrowane funkcje cosinus i sinus oraz zmieniając je tak, aby pozostawały wycentrowane dla każdej długości okna pomiarowego, otrzymuje się wyjściowe sygnały ortogonalne, które umożliwiają pomiar poczynając od chwili pojawienia się pierwszych próbek nowych wartości sygnału w oknie pomiarowym. Pośród dwóch wariantów metody jeden jest dostosowany do sygnałów nie zawierających składowej stałej (lub aperiodycznej), drugi do sygnałów, które ją zawierają. Oba warianty różnią się właściwościami, to znaczy widmem (a właściwie pseudowidmem) dla modelu sygnałowego deterministycznego oraz wariancjami dla modelu zakłóceń probabilistycznych.

5.5.2. Własności metody - charakterystyki widmowe i wariancje

Omawiana metody nie ma w ścisłym sensie charakterystyki widmowej. Wynika to całkiem bezpośrednio z faktu, że funkcje wagi filtrów ortogonalnych (5.88) zmieniają się z czasem t . Dlatego można tu raczej mówić o charakterystykach pseudowidmowych, które są funkcją dwu parametrów częstotliwości ω oraz czasu t , będącego długością okna zawierającego sygnał (same filtry są po prostu filtrami niestacjonarnymi, ale liniowymi). Obliczania widm filtrów dokonuje się na podstawie transformaty Fouriera funkcji wagi, przedstawionych na rys. 5.16:

$$W_c(j\omega, t) = \int_{-t/2}^{t/2} \cos \omega_1 \tau e^{-j\omega \tau} d\tau = \frac{t}{2} \left[\text{Sa}\pi(m-1) \frac{t}{T_1} + \text{Sa}\pi(m+1) \frac{t}{T_1} \right] \quad (5.97a)$$

$$W_s(j\omega, t) = \int_{-t/2}^{t/2} \sin \omega_1 \tau e^{-j\omega \tau} d\tau = \frac{t}{2} \left[\text{Sa}\pi(m-1) \frac{t}{T_1} - \text{Sa}\pi(m+1) \frac{t}{T_1} \right] \quad (5.97b)$$

$$W_{c1}(j\omega, t) = \frac{t}{2} \left[\text{Sa}\pi(m-1) \frac{t}{T_1} + \text{Sa}\pi(m+1) \frac{t}{T_1} - 2\text{Sa}^2(\pi m \frac{t}{T_1}) \right] \quad (5.97c)$$

gdzie

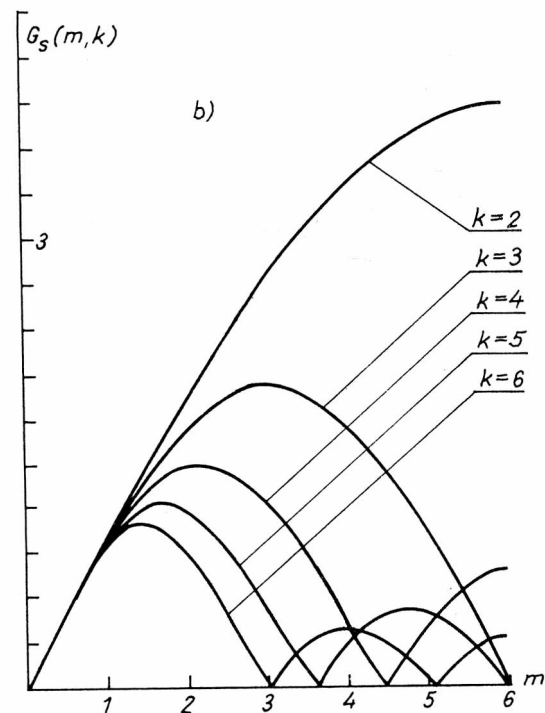
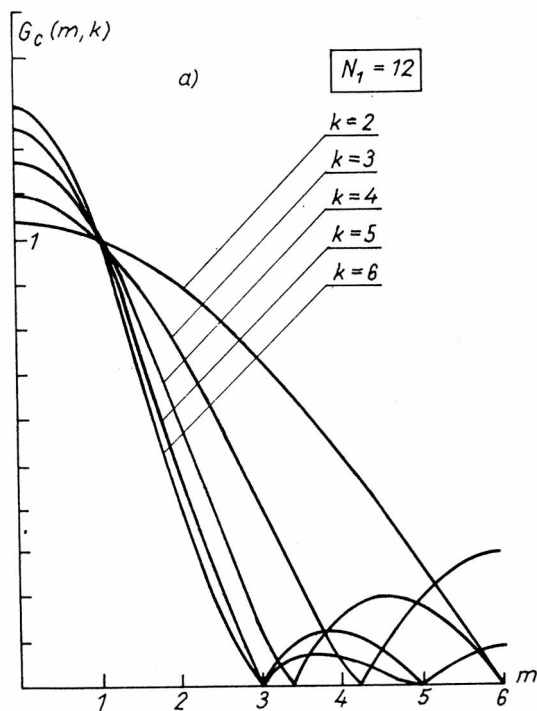
$$\text{Sa}(x) = \sin(x)/x,$$

$$m = \omega/\omega_1,$$

W_{c1} - widmo przesuniętej funkcji cosinus o wartości średniej równej zeru (5.91).

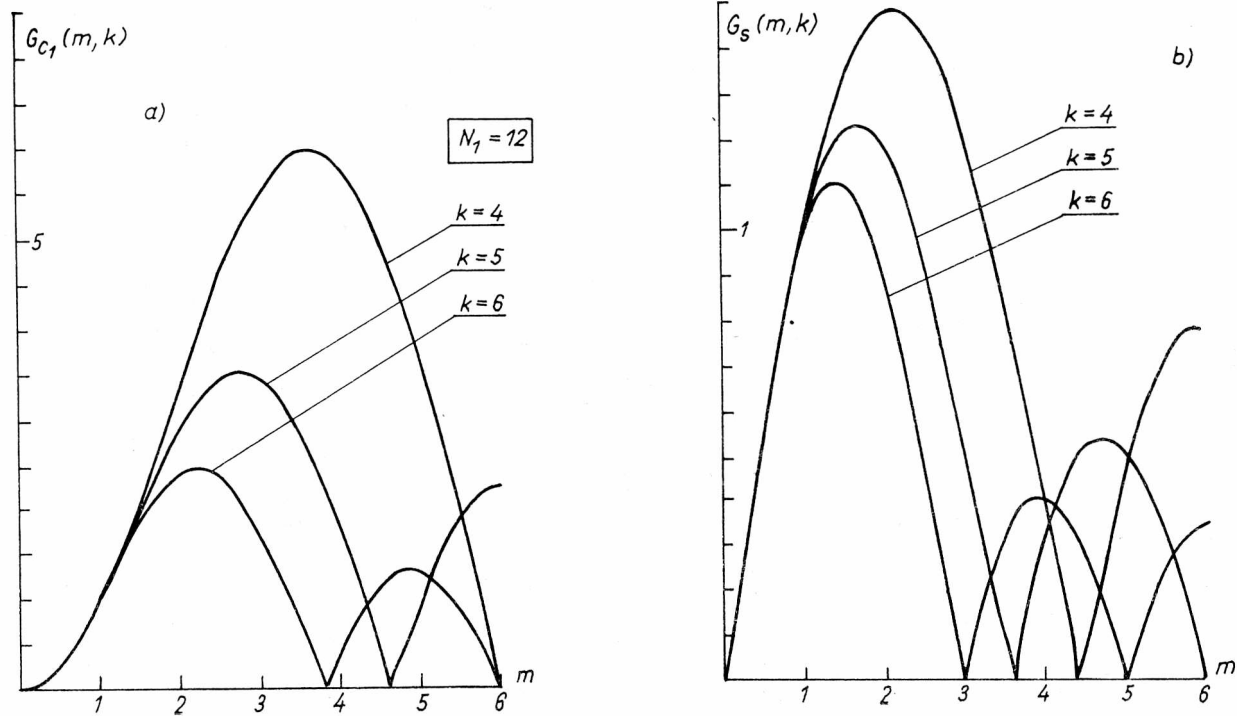
Współczynniki F_c , F_s w (5.89) są więc, co jest oczywiste, widmami (5.97) dla ω równego ω_1 . Dzieląc widma (5.97) przez te współczynniki otrzymuje się widma unormowane, odniesione do wartości przy częstotliwości podstawowej $G_c(m, t)$, $G_s(m, t)$ oraz G_{c1} . Przy tym G_c , G_s stanowią parę widm standardowej wersji metody, a G_{c1} , G_s metody odrzucającej składową stałą. Wykresy tych unormowanych widm w funkcji względnej częstotliwości ($\omega/\omega_1 = m$) przedstawiono na rys. 5.18 i 5.19. Parametrem jest dyskretny czas k i dla różnych wartości tego parametru, dla przyjętej częstotliwości próbkowania odpowiadającej 12 próbkom w okresie składowej podstawowej (N_1) otrzymuje się różne widma. Jak widać na tych rysunkach, wraz z powiększaniem okna w wyniku wzrostu liczby próbek, charakterystyki widmowe poprawiają się bardzo szybko. Oczywiście, gdy $k = 6$, otrzymuje się widmo standardowej filtracji półokresowej. Jest również widoczne, że o błędach w zakresie niskich częstotliwości decyduje widmo G_c , co jest zrozumiałe (rys. 5.16), a w zakresie częstotliwości wysokich widmo G_s (rys. 5.18). Jeśli natomiast stosuje się metodę zmodyfikowaną (rys. 5.19), to widmo w zakresie niskich częstotliwości poprawia się wydatnie, lecz kosztem pogorszenia w zakresie częstotliwości wysokich. Teraz o filtracji składowych wysokoczęstotliwościowych decyduje widmo G_{c1} . Niekorzystny charakter widma przy małej liczbie próbek jest oczywiście spowodowany bardzo krótkim oknem pomiarowym i gdyby zastosować takie krótkie okno jako ustalone, otrzymałoby się algorytm mający ustaloną niekorzystną charakterystykę. Niewątpliwą zaletą omawianego w tym rozdziale algorytmu jest więc poprawa tych charakterystyk widmowych wraz ze zwiększeniem okna i zdążanie do ustalonego widma pełnookresowego. Jeśli więc sygnał nie będzie zakłócony, to otrzyma się dokładne wartości amplitudy, począwszy od drugiej próbki sygnału, jeśli natomiast będzie on zakłócony, to z każdą kolejną próbką wynik będzie dokładniejszy.

Interesujące może być porównanie wariancji błędów omawianej metody i metody odwzorowania krzywych (p. 5.3.2.2). Założy się tutaj podobnie jak poprzednio, że zakłócenie jest szumem białym określonym tak jak w (5.71). Równanie (5.88) staje się teraz równaniem estymacji, a wielkości y_c, y_s stają się estymatami $\hat{y}_c, \hat{y}_s$. Błędy wyznaczania składowych sygnału, z założeniem, że sygnał zawiera teraz składową podstawową i szum biały, są



Rys. 5.18. Pseudowidma filtrów ortogonalnych w metodzie zmiennego okna pomiarowego
(k - liczba próbek odpowiadająca bieżącej długości okna)

Fig. 5.18. Quasispectra of orthogonal filters in the method of variable data window
(k - number of samples related to current data window)



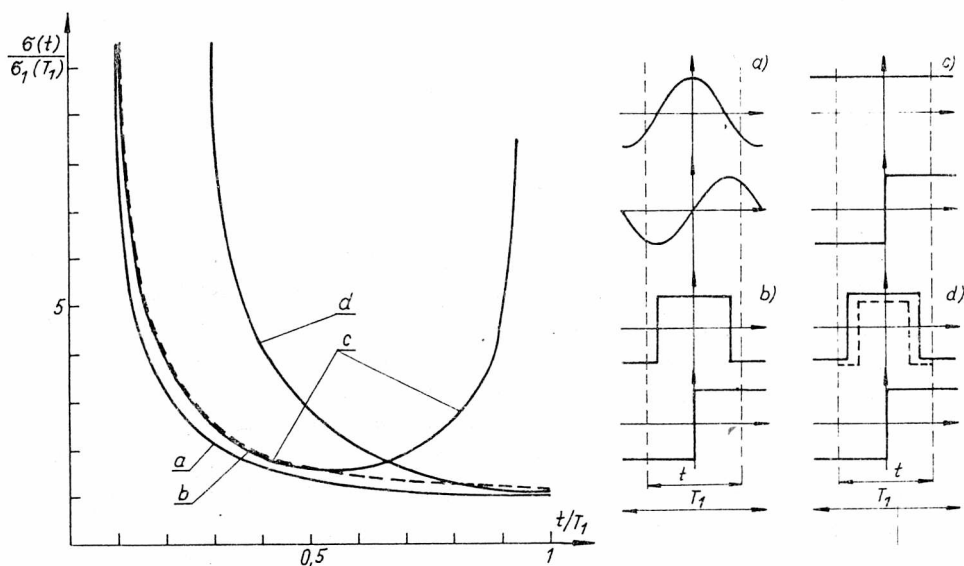
Rys. 5.19. Pseudowidma filtrów ortogonalnych w zmodyfikowanej metodzie zmiennego okna pomiarowego
 Fig. 5.19. Quasispectra of orthogonal filters in a modified method of variable data window

procesem losowym określonym równaniami wynikającymi z (5.88), (5.89) i (5.90):

$$e_d = \frac{\hat{y}_c - y_c}{F_c} = \frac{1}{F_c} \int_0^t e(\tau) \cos \omega_1 \left(\frac{t}{2} - \tau \right) d\tau \quad (5.98a)$$

$$e_q = \frac{\hat{y}_s - y_s}{F_s} = \frac{1}{F_s} \int_0^t e(\tau) \sin \omega_1 \left(\frac{t}{2} - \tau \right) d\tau \quad (5.98b)$$

Jak widać, wartości oczekiwane błędów są zerowe. Natomiast wariancje błędów estymacji, wyznaczone tak samo jak poprzednio, z uwzględnieniem upraszczającej tożsamości (5.75), dają identyczne wartości dla składowych (5.76) i amplitudy (5.77).



Rys. 5.20. Względne odchylenia standardowe błędów estymacji amplitudy metodą zmiennego okna dla różnych funkcji wagi filtrów (a,b,c,d)
Fig. 5.20. Ratio of standard deviation of errors of magnitude estimation using variable data window method for different impulse responses of filters (a,b,c,d)

Tak więc ze względu na błędy pomiaru omawiana metoda i metoda odwzorowania krzywych (p. 5.3.2.2) są tożsame. Wykres odchylenia standardowego błędu, odniesionego do wartości minimalnej (gdy $t = T_1$) przedstawiono na rys. 5.20 - krzywa a. Podczas stosowania funkcji Walsh'a wariancje nie różnią się znacznie - krzywa b narysowana linią przerywaną. Jeśli

natomiast wykorzystuje się funkcje wagi Walsha, tak jak to przedstawiono na rys. 5.20c,d, to znaczy w pierwszym przypadku funkcje Walsha zerowego i pierwszego rzędu w całym przedziale okna c , oraz funkcje Walsha pierwszego i drugiego rzędu, lecz ta ostatnia ma okres dostosowany do długości okna (zerowa wartość średnia) d , to unormowane wariancje błędów amplitudy są dane równaniami:

$$\frac{\sigma_c^2(t)}{\sigma_a^2(T_1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{T_1}{t} \cdot \frac{p^2}{\sin^4 p \cos^2 p} \quad (5.99a)$$

$$\frac{\sigma_d^2(t)}{\sigma_a^2(T_1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1}{t} \cdot \frac{p^2}{\sin^4 p (1 - \cos p)} \quad (5.99b)$$

gdzie $p = (\pi/2) (t/T_1)$.

Przebiegi odchyień standardowych w tych dwu przypadkach przedstawiono na rys. 5.20 - krzywe c oraz d . Jak można zauważyć, w pierwszym przypadku otrzymuje się, dla krótkich okien ($t < 0,6 T_1$), odchylenia standardowe podobne jak w poprzednich metodach. Jednak po przedłużeniu długości okna wariancja zaczyna narastać, co jest powodowane wzrostem wariancji składowej rzeczywistej. Po prostu funkcja Walsha zerowego rzędu nie nadaje się do wydzielenia składowych ortogonalnych dla okna pełnokresowego (jej widmo jest zerowe dla $\omega = \omega_1$). W drugim przypadku (krzywa d) odchylenie standardowe dla dłuższych okien jest niewiele różne od tego uzyskiwanego metodami omawianymi poprzednio, lecz zaczyna bardzo szybko narastać, gdy względne okno jest mniejsze niż 0,5. Jest to skutek korygowania funkcji Walsha drugiego rzędu, tak aby jej wartość średnia była zerowa. Ten wykres odchylenia standardowego, uzyskany dla funkcji Walsha, jest niemal identyczny dla drugiego wariantu omawianej metody (5.91), (5.97c). Szybszy wzrost odchylenia standardowego jest zrozumiały i zgodny z obserwowanym już wyraźnym pogorszeniem widma (rys. 5.19).

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że nawet tak prosty model zakłócenia może dostarczyć wielu pożytecznych informacji o własnościach algorytmów. Naturalnie, gdy są znane widma gęstości mocy zakłócenia (M_e - (5.71)), można obliczyć konkretne wartości wariancji i odchyień standardowych oraz ocenić, jaka jest minimalna długość okna pomiarowego, od której wyniki są wiarygodne.

6. FILTRACJA KALMANA

Modele sygnału i zakłóceń rozpatrywane dotychczas były albo całkowicie deterministyczne, albo też zakładano, że identyfikowane składowe podstawowe napięć lub prądów są deterministyczne, a zakłócenie jest proce-

sem losowym. W istocie jeden i drugi model mogą dość dobrze odzwierciedlać rzeczywistość w tym sensie, że po wystąpieniu konkretnego zaburzenia systemu, w określonych warunkach, identyfikowane składowe będą miały określone wartości. Sporo jednak argumentów przemawia za modelem całkowicie probabilistycznym. Wynika on z tego, że wywołane przez zaburzenia napięcia i prądy są uwarunkowane tak dużą liczbą czynników, że ich wartości są zdeterminowane, lecz niemożliwe do przewidzenia, a mogą być scharakteryzowane z zastosowaniem modeli i parametrów probabilistycznych. Problem optymalnego odtworzenia identyfikowanych napięć i prądów może być rozwiązany z wykorzystaniem filtru Kalmana [2],[8]. Filtr ten opiera się na modelu zmiennych stanu, a ich liczba zależy od konkretnego rozważanego procesu. W przypadku identyfikacji napięć i prądów systemu minimalny rozmiar filtru to filtr dwustanowy. Zastosowanie filtru Kalmana w zabezpieczeniach elektroenergetycznych było tematem wielu prac [26],[44],[45],[46],[89]. Wynika z nich, że dwustanowy filtr Kalmana nie może sprostać wymogom filtracyjnemu, przede wszystkim prądu, ze względu na istnienie w tym sygnale niestacjonarnej składowej aperiodycznej. Konieczne jest więc rozbudowanie modelu sygnałowego i zwiększenie liczby stanów, gdyż błędy powstałe w filtrze dwustanowym można uważać za błędy modelowania. Z kolei w pewnych okolicznościach napięcie może zawierać składową zakłócającą o wyższej częstotliwości i wariancji dość dużej w odniesieniu do wariancji identyfikowanej składowej i wówczas łączne traktowanie zakłóceń jako szumu białego może być zbyt dużym przybliżeniem (a warunkuje to optymalność filtru). W tych warunkach może być konieczne zwiększenie liczby stanów, a więc rzędu modelu sygnałowego i filtru. W dotychczas publikowanych pracach na ogół proponuje się stosowanie 2-stanowego filtru w obwodach napięciowych i 3-stanowego w obwodach prądowych [45],[47]. Jednakże istnieją też propozycje stosowania nawet 11-stanowego filtru do pomiaru prądu [66]. Ten rozmiar filtru wynika z założenia modelu sygnałowego, który zawiera (może zawierać), przy częstotliwości próbkowania 12 próbek w okresie składowej podstawowej, zakłócenia drugą do piątej harmonicznej o istotnie dużych wariancjach, i składową aperiodyczną. Ponieważ każda harmoniczna zwiększa rząd filtru o dwa, a składowa aperiodyczna o jeden, stąd otrzymuje się wymieniony rozmiar filtru. Wydaje się jednak, że te założenia są przesadzone (zresztą wysokoczęstotliwościowe zakłócenia wcale nie muszą być harmoniczne), a ponadto obecny poziom techniki cyfrowej raczej uniemożliwia stosowanie takich filtrów w czasie rzeczywistym ze względu na ogromne nakłady obliczeniowe. Tak więc rozsądny kompromis odpowiada raczej małym rozmiarom filtrów i wydaje się, że filtry drugiego, trzeciego, a najwyżej czwartego rzędu, są wystarczające i realizowalne w czasie rzeczywistym.

Istotne podczas porównywania efektów filtracji lub estymacji z wykorzystaniem różnego rodzaju filtrów jest dysponowanie tymi samymi miarami błędów w stanie przejściowym i ustalonym. Metody oparte na korelacji lub filtracji nierekursywnej są metodami stałego okna, a więc stan przejściowy i ustalony są wyraźnie rozdzielone. Błędy w stanie ustalonym wynikają tu bezpośrednio z charakterystyk częstotliwościowych filtru oraz założonego poziomu zakłóceń sygnału użytecznego. Filtr Kalmana jest z kolei filtrem rekursywnym, projektowanym w dziedzinie czasu, i liniowym lecz niestacjonarnym, ze względu na niestacjonarność macierzy wzmocnień $[K]$. Miarą jego błędów zarówno w stanie przejściowym, jak i zbliżonym do ustalonego (które trudno wyraźnie rozdzielić), jest macierz kowariancji błędów. Elementy tej macierzy nie dają na ogół czytelnej informacji o czasie trwania stanu przejściowego, jak też utrudniają porównywanie uzyskiwanych dokładności w stanie ustalonym z innymi metodami. Aby te porównania ułatwić, opracowano metodę określania charakterystyk częstotliwościowych (pseudowidmo) filtru Kalmana oraz określono jego czasy ustalania po skokowej zmianie sygnału wejściowego. Te miary są być może przybliżone, lecz uzyskane wyniki mają dwójakie znaczenie; umożliwiają łatwe porównanie różnych metod lub dostarczają bardziej czytelnych wskaźników charakteryzujących dynamikę oraz błędy w stanie ustalonym sygnałów stosowanych dalej do pomiaru wielkości kryterialnych.

6.1. Podstawowe równania i modele procesu oraz filtru

Zadaniem filtracji Kalmana jest wyestymowanie składowych wektora stanu procesu X , który jest opisany następującym równaniem macierzowym:

$$[X(k+1)] = [A][X(k)] + [B][U(k)] \quad (6.1)$$

Ponieważ nie wszystkie składowe wektora procesu mogą być mierzone, można to wyrazić za pomocą równania pomiaru w następującej postaci:

$$[Y(k)] = [C][X(k)] + [V(k)] \quad (6.2)$$

gdzie

- $[A]$ - macierz stanu rozmiaru $[n \times n]$,
- $[B]$ - macierz zakłóceń stanu rozmiaru $[n \times n]$,
- $[C]$ - macierz pomiaru rozmiaru $[m \times n]$, gdzie $1 \leq m \leq n$,
- $[X(k)] = [X_1(k) \dots X_n(k)]^T$ - wektor stanu o rozmiarze $[n \times 1]$ (T oznacza transpozycję macierzy),
- $[Y(k)] = [Y_1(k) \dots Y_m(k)]^T$ - wektor pomiaru o rozmiarze $[m \times 1]$,
- $[U(k)]$ - wektor zakłóceń stanu,
- $[V(k)]$ - wektor zakłóceń pomiaru.

Należy tu dodać, że macierze $[A]$, $[B]$ oraz $[C]$ mogą być niestacjonarne i wtedy również im trzeba przypisać indeks k . Jeśli $Y(k)$ jest cią-

giem próbek jednego, skalarne go sygnału, tak jak to omówiono dalej, to w tym przypadku wektor pomiaru staje się skalar, podobnie wektor zakłóceń pomiaru, a macierz pomiaru $[C]$ ma wymiar $[1 \times m]$.

Jeśli składowe wektora stanu oraz zakłócenia spełniają określone warunki, to optymalny filtr, dostarczający najlepszych estymat wektora stanu, jest dany równaniem znanym jako równanie filtru Kalmana:

$$[\hat{X}(k+1)] = [A][\hat{X}(k)] + [K(k+1)] \{ [Y(k+1)] - [C][A][\hat{X}(k)] \} \quad (6.3)$$

gdzie

$[\hat{X}(k)]$ - estymaty wektora stanu $[X(k)]$,

$[K(k+1)]$ - macierz wzmacnienia filtru.

Uruchomienie procedury filtracji sygnału $[Y(k+1)]$ wymaga więc znajomości chwili powstania zaburzenia ($k=0$), określenia warunków początkowych $[\hat{X}(0)]$ oraz obliczenia macierzy wzmacnienia $[K(k)]$. Pozostałe macierze są już określone w równaniach stanu (6.1) i pomiaru (6.2). Trzeba tu dodać, że w pewnych rozważanych dalej modelach procesu i pomiaru macierz pomiaru $[C]$ zależy od dyskretnej chwili k .

Obliczenie macierzy wzmacnienia $[K(k)]$ jest dokonywane na podstawie znanych dotychczas macierzy oraz macierzy kowariancji zakłóceń procesu i pomiaru, a także macierzy kowariancji procesu w chwili $k=0$, która stanowi warunek początkowy rekursywnej procedury obliczeń, stosownie do następujących równań:

$$[K(k)] = [M(k)][C]^T [C][M(k)][C]^T + [P(k)]^{-1} \quad (6.4a)$$

$$[W(k)] = [[J] - [K(k)][C]][M(k)] \quad (6.4b)$$

$$[M(k+1)] = [A][W(k)][A]^T + [B][Q][B]^T \quad (6.4c)$$

gdzie

$[P], [Q]$ - macierze kowariancji zakłóceń odpowiednio pomiaru i procesu (uprzednio obliczone lub uzyskane na drodze pomiarowej lub modelowej),

$[M(k)]$ - jednokrokowa macierz kowariancji błędów estymacji stanu (między $k-1$ a k),

$[W(k)]$ - macierz kowariancji błędów estymacji stanu,

$[J]$ - macierz jednostkowa.

Wszystkie z powyższych równań mają tę istotną cechę, że nie zawierają wielkości mierzonych $[Y(k)]$. Dzięki temu obliczenia macierzy $[K(k)]$ mogą być przeprowadzone off-line zanim filtr zacznie pracować, przechowane w pamięci i zastosowane do konkretnej realizacji po uruchomieniu filtru. Zapewnia to ogromne zredukowanie nakładu obliczeniowego, szczególnie istotne dlatego, że filtr ma być stosowany w czasie rzeczywistym. Również przed uruchomieniem procedury filtracji znana jest macierz kowariancji błędu estymacji $[W(k)]$, tak więc jego jakość jest znana z góry.

Równania (6.1)-(6.4) charakteryzują łącznie proces, pomiar, filtr oraz jego jakość. Filtr opisany równaniem (6.3) jest filtrem optymalnym minimalizującym wariancję (6.6b), jeśli wektor procesu oraz wektory zakłóceń procesu i pomiaru mają odpowiednie charakterystyki probabilistyczne. Zakłada się więc w teorii filtru Kalmana, że wszystkie składowe procesu mają rozkład normalny o zerowej wartości średniej i są niezależne. Z niezależności składowych tego wektora wynika, że ma on rozkład łącznie normalny o gęstości będącej iloczynem indywidualnych gęstości rozkładu i jego scharakteryzowanie wymaga jedynie znajomości macierzy kowariancji (wartość średnia jest zerowa). Przy tych założeniach macierz kowariancji błędu stanu (4.6b) jednoznacznie charakteryzuje stan procesu.

Wymagania dotyczące zakłóceń są w teorii filtru Kalmana nieco ostrzejsze (można od niektórych z nich odstąpić, lecz kosztem często znacznego zwiększenia rozmiaru macierzy procesu i filtru oraz zwiększenia obciążenia obliczeniowego). Zakłada się więc, że wektory zakłóceń procesu $[U(k)]$ i pomiaru $[V(k)]$ są szumami białymi o rozkładzie normalnym, mającymi zerowe wartości średnie, znane są ich kowariancje, oraz że ich składowe są procesami niezależnymi. Implikuje to tak jak poprzednio normalność łącznego rozkładu prawdopodobieństwa i jednoznaczne scharakteryzowanie rozkładu za pomocą macierzy kowariancji tych zakłóceń, które muszą być znane. Ponadto jeszcze z właściwości szumu białego wynika, że macierze kowariancji błędów są diagonalne, a elementy głównej przekątnej są po prostu wariancjami błędów poszczególnych składowych wektorów. Ponieważ dodatkowo zakłada się niezależność zakłóceń procesu i pomiaru, więc omawiane własności zakłóceń można opisać następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} E \{ [U(k)] [U(i)]^T \} &= \begin{aligned} &Q(k) \quad \text{dla } i = k \\ &0 \quad \text{dla } i \neq k \end{aligned} \\ E \{ [V(k)] [V(i)]^T \} &= \begin{aligned} &P(k) \quad \text{dla } i = k \\ &0 \quad \text{dla } i \neq k \end{aligned} \\ E \{ [U(k)] [V(i)]^T \} &= 0 \quad \text{dla wszystkich } k, i \end{aligned} \tag{6.5}$$

gdzie E - oznacza wartość oczekiwaną.

Zastosowanie wymienionych procedur i uruchomienie rzeczywistego filtru wymaga jeszcze określenia warunków początkowych. Wymaga to wyznaczenia kowariancji procesu w chwili $k = 0$, co pozwala na zainicjowanie rekursywnych procedur (6.4) i obliczenia macierzy wzmocnień $[K(k)]$. Należy także określić warunki początkowe równania filtracji, to jest oczekiwane wartości wektora stanu $[X]$ w chwili $k = 0$. W rozważanym przypadku modeli sygnałowych ma się do czynienia z procesami stacjonarnymi i wektor

stanu ma ustaloną wartość oczekiwaną i znane kowariancje. Można by więc przyjąć warunki początkowe o tych wartościach. Jednakże rozważając bardziej szczegółowo przechodzenie ze stanu normalnego do stanu zwarcia można by przyjąć na przykład wektor stanu w chwili początkowej o wartościach równych odpowiednim składowym w chwili poprzedzającej zwarcie ($k = 1$), a kowariancje równe kowariancom przejścia między tymi stanami. Założywszy pewną dowolność w przyjęciu warunków początkowych, można zapisać następujące równania:

$$\begin{aligned} E\{[X(0)]\} &= [\bar{X}_0] \\ E\{[X_0 - \bar{X}_0][X_0 - \bar{X}_0]^T\} &= [W_0] \\ [\hat{X}(0)] &= [\bar{X}_0] \\ [W(0)] &= [W_0] \end{aligned} \quad (6.6)$$

Opracowanie i uruchomienie filtra Kalmana przebiega w trzech etapach:

- a) opracowanie modelu procesu i pomiaru,
- b) określenie własności probabilistycznych procesu i zakłóceń oraz obliczenie macierzy wzmocnień $[K]$,
- c) uruchomienie procedury filtracji.

Punkty a i b są ze sobą wzajemnie powiązane w tym sensie, że przyjęty minimalnego rozmiaru model procesu może mieć modele zakłóceń odbiegające od szumu białego. Wówczas trzeba uwzględnić dodatkowe stany tak, aby otrzymać ten wymagany model zakłóceń. W przeciwnym przypadku filtr będzie suboptymalny, a nawet estymacja może być obciążona bardzo dużym błędem. Przykładem tu może być stosowanie dwustanowego filtra do estymacji prądów, w których istnieje składowa aperiodyczna o znacznej wartości. Zakłócenia w tym przypadku nie są szumem białym, a błędy powodowane przez błędne modelowanie procesu są ogromne.

6.2. Modele i filtry o różnej liczbie stanów

Na podstawie modeli zakłóceń, ich widm gęstości mocy i funkcji autokorelacji znanych z publikacji (np. [47]) można sądzić, że przy aktualnych możliwościach technicznych stosowane będą filtry 2-4-stanowe, zapewniając satysfakcjonującą optymalność filtracji. Wszystkie te filtry mogą być zrealizowane z użyciem dwu wariantów modeli procesu, analogicznych do filtracji i korelacji. Różnią się one macierzami stanu i pomiaru, natomiast pozostałe wielkości są takie same. Obecnie określi się te macierze dla odpowiednich modeli sygnałowych napięć i prądów systemu elektroenergetycznego. Trzeba jednak od razu na wstępie podkreślić, że przypadek filtracji Kalmana jest inny od omawianych dotychczas filtrów. Nie ma bowiem tutaj bezpośredniego związku między pojedynczą realizacją pro-

cesu (na przykład przebiegi zakłóconego napięcia lub prądu generowane w wyniku danego zaburzenia) a parametrami filtru. Nie określa się również, odmiennie niż poprzednio, jakości filtracji dla takiej pojedynczej realizacji sygnału. Wynika to z przyjętych w tej filtracji probabilistycznych modeli procesu i zakłóceń, a także nieergodyczności zakłóceń i procesu powodującej, że ich parametry muszą być określone po zbiorze realizacji, a nie po czasie. Naturalnie dla danego modelu sygnałowego macierze procesu i pomiaru są zdeterminowane i zostaną określone.

Niech wolny od zakłóceń fazor napięcia lub prądu będzie dany równaniem

$$X(t) = X_1 \exp[j(\omega_1 t + \varphi_1)] \quad (6.7)$$

Fazor ten będzie znany, jeśli będą znane dwie rzeczywiste funkcje czasu. Po przejściu na czas dyskretny można zauważyć, że wraz ze wzrostem czasu z chwili k do $k+1$ składowe fazora zmieniają się stosownie do równań:

$$\begin{aligned} X_1 \cos[(k+1)\omega_1 T_1 + \varphi_1] &= \cos(\omega_1 T_1) X_1 \cos(k\omega_1 T_1 + \varphi_1) - \\ &\quad - \sin(\omega_1 T_1) X_1 \sin(k\omega_1 T_1 + \varphi_1) \\ X_1 \sin[(k+1)\omega_1 T_1 + \varphi_1] &= \sin(\omega_1 T_1) X_1 \cos(k\omega_1 T_1 + \varphi_1) + \\ &\quad + \cos(\omega_1 T_1) X_1 \sin(k\omega_1 T_1 + \varphi_1) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Zapisując te równania w postaci macierzowej otrzymuje się równanie i macierz stanu w postaci

$$\begin{bmatrix} X_{d1}(k+1) \\ X_{q1}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_1 T_1 & -\sin \omega_1 T_1 \\ \sin \omega_1 T_1 & \cos \omega_1 T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{d1}(k) \\ X_{q1}(k) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

gdzie

$$X_{d1}(k) = X_1 \cos(k\omega_1 T_1 + \varphi_1),$$

$$X_{q1}(k) = X_1 \sin(k\omega_1 T_1 + \varphi_1),$$

$$[X(k)] = [X_{d1}(k) \ X_{q1}(k)]^T \text{ - wektor stanu,}$$

- macierz kwadratowa jest macierzą stanu $[A]$.

Znając równanie stanu można określić równania i macierz pomiaru. Zależy ono od tego, jaki sygnał jest dostępny pomiarowo. Jeśli założyć, że dostępna pomiarowo jest składowa rzeczywista fazora (6.7), to macierz pomiaru jest dana równaniem:

$$[C] = [1 \ 0] \quad (6.10)$$

Założmy obecnie, że fazor $X(t)$ jest nieco bardziej złożony i może być opisany równaniem:

$$X(t) = X_1 \exp[j(\omega_1 t + \varphi_1)] + X_m \exp[j(m\omega_1 t + \varphi_m)] + X_a \exp(-t/T_a) \quad (6.11)$$

Jeśli przyjąć, że X_m jest równe zero, to do określenia fazora (6.11) potrzebna jest znajomość trzech rzeczywistych funkcji czasu i otrzymuje się odpowiednio model 3-stanowy. Gdy X_a jest równe zero, trzeba znać cztery funkcje czasu i odpowiedni model jest wówczas 4-stanowy.

Macierze stanu i pomiaru w tych przypadkach są określone analogicznie jak poprzednio i mają postać:

Model 3-stanowy:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \omega_1 T_i & -\sin \omega_1 T_i & 0 \\ \sin \omega_1 T_i & \cos \omega_1 T_i & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(-\frac{T_i}{T_a}\right) \end{bmatrix} \quad (6.12a)$$

$$[C] = [1 \quad 0 \quad 1] \quad (6.12b)$$

Model 4-stanowy

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \omega_1 T_i & -\sin \omega_1 T_i & 0 & 0 \\ \sin \omega_1 T_i & \cos \omega_1 T_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos m\omega_1 T_i & -\sin m\omega_1 T_i \\ 0 & 0 & \sin m\omega_1 T_i & \cos m\omega_1 T_i \end{bmatrix} \quad (6.13a)$$

$$[C] = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0], \quad (6.13b)$$

gdzie

T_i - okres impulsowania,

m - mnożnik częstotliwości składowej innej niż podstawowa,

T_a - oczekiwana wartość stałej czasowej składowej aperiodycznej.

Na marginesie warto wspomnieć, że stosowane równania stanu i pomiaru powinny zapewniać obserwowalność [67]. Łatwo sprawdzić, że przedstawione równania i macierze warunek ten spełniają.

W podobny sposób można by tworzyć modele o dowolnym stopniu rozbudowy, lecz jest zrozumiałe, że powinien być stosowany model o możliwie małym rozmiarze. Jest istotne, jak ów rozmiar minimalny określić. Odpowiedź tkwi w charakterystykach zakłóceń fazora $X(t)$ (6.7), (6.11), a w konsekwencji zakłóceń procesu i pomiaru w modelu stanowym. Tymi istotnymi, najważniejszymi charakterystykami zakłóceń są widmo gęstości mocy i (lub) funkcja autokorelacji oraz ich wariancje [2], [5], [8]. Jeśli więc przy najmniejszym rozmiarze modelu, modelu 2-stanowym, widmo gęstości mocy zakłóceń jest stałe lub prawie stałe, albo też ich funkcja autokorela-

cji jest zbliżona do impulsu Diraca, to rozmiar modelu jest odpowiedni. Jeśli tak nie jest, to konieczna jest zmiana modelu. Określenie rozmiaru i parametrów tego rozbudowanego modelu może być dokonane z zastosowaniem złożonych, zaawansowanych metod, na przykład faktoryzacji widmowej [2], lub też analizy widma gęstości mocy. Załóżmy, że widmo to w otoczeniu pewnej częstotliwości ω_m wykazuje wyraźnie większe wartości, a dla pozostałych częstotliwości jest stałe lub niemal stałe. Wówczas, zwiększając rozmiar modelu procesu przez uwzględnienie w nim składowej o tej częstotliwości ω_m , uzyska się model procesu i filtru zbliżony do optymalnego. Aby się o tym przekonać, należy jeszcze zbadać widmo gęstości mocy lub funkcję autokorelacji tego "nowego" zakłócenia powstałego przez wydzielenie z sygnału modelowanych składowych procesu o częstotliwości ω_1 i ω_m .

Jeśli widmo jest płaskie, to znaczy, że taka uproszczona metoda przyniosła pożądane wyniki, a model procesu jest właściwy i odpowiedniego rozmiaru.

Mówiąc o zakłóceniach trzeba jeszcze wspomnieć o macierzy [B] modelu procesu ((6.1), (6.4c)). Otóż macierz ta odzwierciedla przypadkowe zmiany wektora procesu między dwiema chwilami próbkowania, nie uwzględnione w macierzy stanu. Jest uzasadnione przyjęcie, że ów biały szum dodawany do wektora stanu będzie zmieniał się tak, jak sam wektor stanu, to znaczy, że macierz [B] (lub [B']) jest równa macierzy stanu [A]. Trzeba tutaj także podkreślić, że zmiany wektora stanu między chwilami próbkowania są tak małe, że ich widmo gęstości mocy jest bardzo małe w porównaniu z widmem gęstości mocy błędów pomiaru i często przyjmuje się zerową macierz [B].

Obecnie można już podać brakujące w opisie modeli 2-, 3- i 4-stanowych macierze kowariancji zakłóceń oraz warunków początkowych:

Model 2-stanowy:

- kowariancje zakłóceń

$$[Q] = \begin{bmatrix} \sigma_{u1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{u1}^2 \end{bmatrix} \quad (6.14a)$$

$$[P] = \sigma_v^2 \quad (6.14b)$$

- warunki początkowe

$$[\hat{X}_0] = \begin{bmatrix} E\{x_{d1}(0)\} & E\{x_{q1}(0)\} \end{bmatrix}^T \quad (6.14c)$$

$$[\hat{W}_0] = \begin{bmatrix} \sigma_{x10}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x10}^2 \end{bmatrix} \quad (6.14d)$$

gdzie E - wartość oczekiwana, σ - odchylenie standardowe.

Model 3-stanowy:

- kowariancje zakłóceń

$$[Q] = \begin{bmatrix} \sigma_{u1}^2 & & 0 \\ & \sigma_{u1}^2 & \\ 0 & & \sigma_{ua}^2 \end{bmatrix} \quad (6.15a)$$

$$[P] = \sigma_v^2 \quad (6.15b)$$

- warunki początkowe

$$[\hat{X}_0] = [E\{X_{d1}(0)\} \ E\{X_{q1}(0)\} \ E\{X_a(0)\}]^T \quad (6.15c)$$

$$[W_0] = \begin{bmatrix} \sigma_{x10}^2 & & 0 \\ & \sigma_{x10}^2 & \\ 0 & & \sigma_{xa0}^2 \end{bmatrix} \quad (6.15d)$$

Model 4-stanowy:

- kowariancje zakłóceń

$$[Q] = \begin{bmatrix} \sigma_{u1}^2 & & & 0 \\ & \sigma_{u1}^2 & & \\ & & \sigma_{um}^2 & \\ 0 & & & \sigma_{um}^2 \end{bmatrix} \quad (6.16a)$$

$$[P] = \sigma_v^2 \quad (6.16b)$$

- warunki początkowe

$$[\hat{X}_0] = [E\{X_{d1}(0)\} \ E\{X_{q1}(0)\} \ E\{X_{dm}(0)\} \ E\{X_{qm}(0)\}]^T \quad (6.16c)$$

$$[W_0] = \begin{bmatrix} \sigma_{x10}^2 & & & 0 \\ & \sigma_{x10}^2 & & \\ & & \sigma_{xm0}^2 & \\ 0 & & & \sigma_{xm0}^2 \end{bmatrix} \quad (6.16d)$$

Znając rozmiar filtra oraz konkretne wartości występujące w poszczególnych macierzach kowariancji błędów i warunków początkowych można obliczyć macierz wzmocnienia $[K]$ (6.4a), przechować ją w pamięci i uruchomić cyfrowy filtr Kalmana (6.3).

Jak wspomniano na początku tego paragrafu, filtr Kalmana w omawianym przypadku może być zrealizowany według dwu modeli procesu analogicz-

nych do splotu i korelacji. Omówiony dotychczas odpowiada realizacji według tego pierwszego modelu, to znaczy przy danym przemennym sygnale wejściowym $[Y(k)]$ (wynik pomiaru (6.2)) filtr dokonuje estymacji dwu przemennych ortogonalnych składowych sygnału $\hat{X}_d(k)$, $\hat{X}_q(k)$.

Drugi wariant modelu analogiczny do korelacji otrzymuje się równie łatwo. Weźmy rzeczywistą składową fazora $X(t)$ (6.7):

$$\operatorname{Re}\{X(t)\} = X_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = X'_{d1} \cos \omega_1 t - X'_{q1} \sin \omega_1 t \quad (6.17)$$

Ponieważ częstotliwość jest ustalona, więc do określenia dwu pozostałych parametrów sygnału konieczna jest znajomość X'_{d1} oraz X'_{q1} i odpowiednie równanie stanu ma teraz postać:

$$\begin{bmatrix} X'_{d1}(k+1) \\ X'_{q1}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{d1}(k) \\ X'_{q1}(k) \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

gdzie $X'_{d1}(k) = X_1 \cos \phi_1$, $X'_{q1}(k) = X_1 \sin \phi_1$.

Jeśli przyjąć podobnie jak poprzednio, że dostępna pomiarowo jest składowa rzeczywista fazora (6.7), to macierz pomiaru w tym modelu jest dana równaniem:

$$[C'_K] = [\cos k\omega_1 T_i \quad -\sin k\omega_1 T_i] \quad (6.19)$$

W analogiczny sposób otrzymuje się macierze stanu i pomiaru filtrów wyższych rozmiarów, realizowanych według tego wariantu. Są one opisane zależnościami:

Model 3-stanowy:

$$[A'] = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \exp\left(-\frac{T_i}{T_a}\right) & \end{bmatrix} \quad (6.20a)$$

$$[C'_K] = [\cos k\omega_1 T_i \quad -\sin k\omega_1 T_i \quad 1] \quad (6.20b)$$

Model 4-stanowy:

$$[A'] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (6.21a)$$

$$[C'_K] = [\cos k\omega_1 T_i \quad -\sin k\omega_1 T_i \quad \cos km\omega_1 T_i \quad -\sin km\omega_1 T_i] \quad (6.21b)$$

Macierze kowariancji zakłóceń oraz warunków początkowych są naturalnie w obu modelach identyczne. Podano je już poprzednio - równania (6.14)-(6.16).

Przedstawione tu modele są równoważnym sposobem opisu tego samego procesu. O wyborze jednego lub drugiego z nich mogą decydować dodatkowe czynniki, takie jak na przykład prostota interpretacji rezultatów, złożoność obliczeniowa algorytmu realizacji filtru, czy też dalsze przewidywane przetwarzanie jego sygnałów wyjściowych.

6.3. Parametry projektowe filtru i macierz [K]

W przedstawionych wyżej równaniach trzy macierze i ich elementy mają przede wszystkim wpływ na uzyskiwane charakterystyki filtru. Są to macierze $[Q]$, $[P]$ oraz $[W_0]$ (równania (6.14)-(6.16)). Wartości elementów tych macierzy mogłyby być uzyskane na podstawie:

- pomiarów w systemie rzeczywistym w punkcie zainstalowania zabezpieczenia
- badań modelowych w układzie odpowiadającym rzeczywistej konfiguracji systemu i sygnałów z modelu cyfrowego w punkcie zainstalowania zabezpieczenia
- oszacowania wartości parametrów opartych na doświadczeniach eksploatacyjnych.

Pierwszy sposób trzeba uznać za mało efektywny, gdyż niewiele jest sposobności do prowadzenia pomiarów podczas zwarć w systemie, a w punkcie zainstalowania zabezpieczenia obserwuje się je kilka razy do roku. Druga z metod jest bardziej efektywna, gdyż pozwala na dokładne określenie wszystkich wymaganych wielkości, i to dość łatwo, przez symulowanie różnych konfiguracji systemu, różnych rodzajów zwarć, dowolnych warunków początkowych, różnego miejsca zwarcia itp. Ograniczenia tej metody wynikają z konieczności opracowania złożonego modelu cyfrowego, co jest i czasochłonne i kosztowne. Niemniej jednak trzeba jeszcze raz podkreślić, że jest to metoda pozwalająca na najbardziej precyzyjne określenie parametrów projektowych filtru, a ponadto weryfikację poprawności jego modelu.

Trzecia z metod jest obciążona znacznymi błędami, a uzyskany filtr może kumulować błędy modelowania i błędy wartości parametrów. Niemniej jednak, orientując się, że w zasadzie w obwodach napięciowych właściwy jest (może być) filtr 2-stanowy, a w obwodach prądowych 3-stanowy, można próbować taki suboptymalny filtr zaprojektować. Można więc przyjąć bardzo uproszczone założenie, że wartości warunków początkowych są równe wielkościom przedzwarciovym, a dalej, że wariancje początkowe są kwadratami odchyień standardowych równych jednej trzeciej względnych wartości maksymalnych napięcia i prądu ($\sigma_{x10V} = 1/3$, $\sigma_{x10I} = (1/3)(I_{\max}/I_{\text{nom}})$).

Z kolei można przyjąć macierze $[Q]$ oraz $[B]$ zerowe. W tych bardzo uproszczonych rozważaniach najtrudniejsze jest określenie σ_v przede wszystkim dlatego, że σ_v może zmieniać się wraz z dyskretnym czasem k .

Z badań publikowanych w pracy [47], przeprowadzonych na modelu cyfrowym wynika, że wariancje zakłóceń napięcia i prądu maleją ze stałą czasową określoną równaniem:

$$T = \frac{1}{2} \frac{L_1 l}{R_1 l + R_F} \quad (6.22)$$

gdzie

R_F - średnia oczekiwana rezystancja w miejscu zwarcia,

l - połowa długości linii,

$R_1 L_1$ - jednostkowa rezystancja i indukcyjność.

Po przyjęciu tej wartości stałej czasowej oraz szacunkowych wartości początkowych wariancji zakłócenia możliwe jest już obliczenie macierzy wzmocnień $[K(k)]$ i uruchomienie filtru. Naturalnie taki suboptymalny filtr może nie być najlepszy i należy raczej projektować go dokładniej na podstawie możliwie dobrego modelu cyfrowego fragmentu systemu, którego zabezpieczenie będzie oparte na filtracji Kalmana sygnałów.

6.4. Charakterystyki efektywności filtru

6.4.1. Macierz $[K]$ i wariancje błędów estymacji

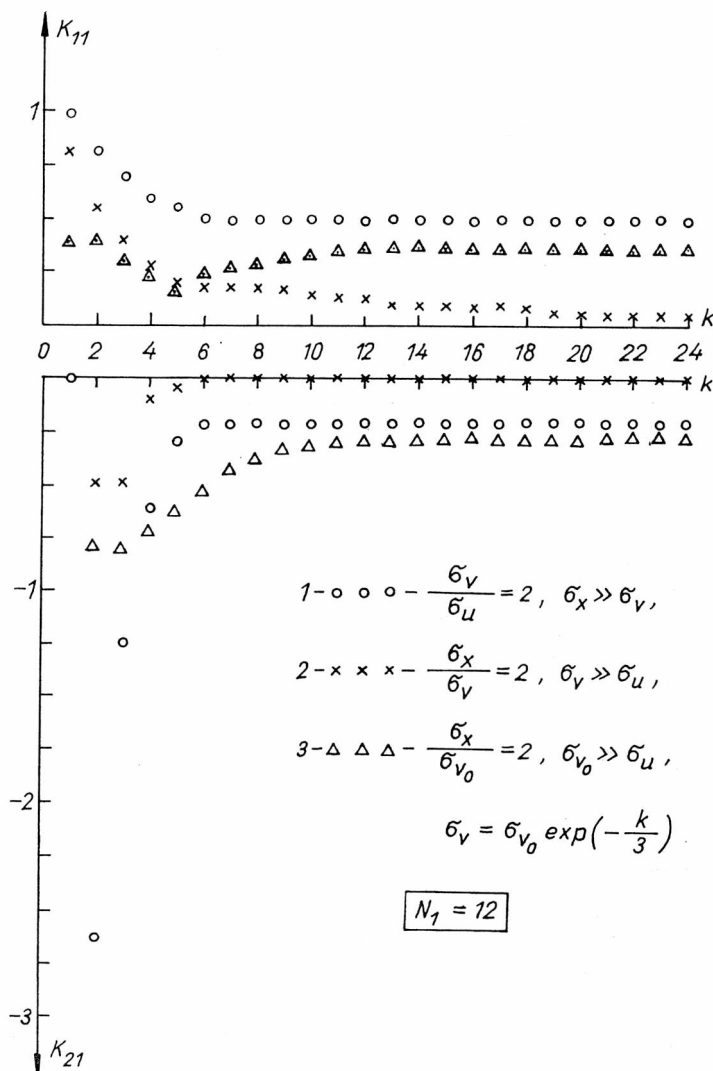
Wariancje błędów to naturalne miary jakości składowych wektora stanu w filtrze Kalmana. Jak już wspomniano, macierz kowariancji błędów jest obliczana w trakcie obliczeń macierzy wzmocnienia $[K]$ filtru. Rozważmy najpierw elementy macierzy $[K]$, gdyż również one dostarczają sporo pożytecznej informacji. Gdy wielkością zmierzoną jest skalar, a filtr jest 2-stanowy, macierz $[K]$ składa się z dwu elementów K_{11} i K_{21} . Przykładowe wartości tych elementów w funkcji dyskretnego czasu k przedstawiono na rys. 6.1. Wybrano tutaj pewne szczególne wartości parametrów, jako że nawet bardzo pobieżna analiza pozwala ocenić, które z nich są istotne i które mają wpływ na charakter przebiegu elementów macierzy $[K]$, a także wariancji błędów estymat $[W]$. Ważne są tutaj trzy przypadki:

a) początkowa kowariancja wektora stanu jest znacznie większa niż kowariancje zakłóceń, przy czym kowariancja zakłóceń pomiaru jest większa niż zakłóceń procesu (ale obie są bardzo małe w odniesieniu do tej pierwszej),

b) początkowa kowariancja wektora stanu nieznacznie tylko przewyższa kowariancje zakłóceń pomiaru, kowariancja zakłóceń stanu pozostaje bardzo mała,

c) początkowa kowariancja wektora stanu i zakłóceń pomiaru są zbliżone wartościami, lecz ta ostatnia maleje eksponencjalnie; sytuacja ta najlepiej chyba odzwierciedla realia systemu.

Krzywe 1, 2 i 3 na rys. 6.1 odzwierciedlają przebieg elementów macierzy $[K]$ w tych przypadkach. W pierwszym z nich duże początkowo wartości (1 i -2,7 odpowiednio) szybko maleją do wartości ustalonych i dalej K_{11}



Rys. 6.1. Elementy macierzy $[K]$ 2-stanowego filtra Kalmana w funkcji dyskretnego czasu k dla różnych parametrów projektowych

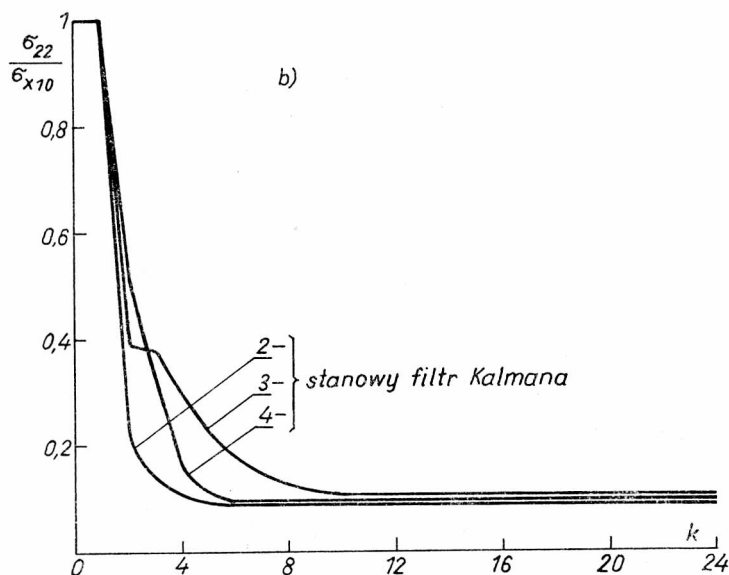
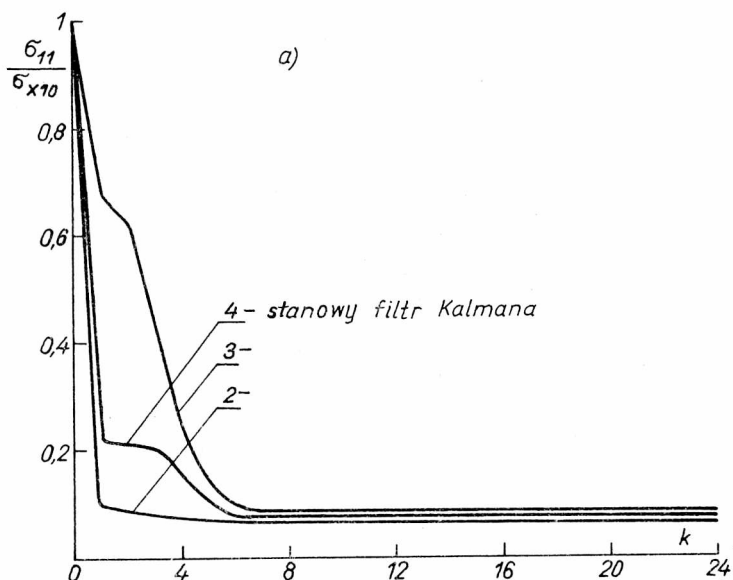
Fig. 6.1. Elements of matrix $[K]$ of 2-state Kalman filter versus discrete time k for different design parameters

i K_{21} pozostają stałe. Oznacza to dynamiczne dojście do wartości ustalonej, a także stacjonarny dla większych wartości czasu k filtr o odpowiednio silnym ujemnym sprzężeniu zwrotnym (znaczące wartości $[K]$ w stanie ustalonym). W przypadku drugim (krzywe 2) początkowe wartości $[K]$ (szczególnie K_{21}) są znacznie mniejsze, K_{21} szybko, a K_{11} powoli zmierzają do zera. Po niezbyt długim czasie filtr nasycy się danymi i kolejne próbki mierzonego sygnału mają znikomy wpływ na wyestymowane wartości. Widać, że i dynamika dochodzenia do wartości ustalonej będzie zła, a wariancje błędów estymat duże. W przypadku trzecim uzyskuje się przebieg i właściwości pośrednie między dwoma pierwszymi przypadkami. Otóż duża początkowo wariancja zakłóceń powoduje, że dynamika dochodzenia do wartości ustalonej początkowo nie jest duża, a wariancje błędów znaczne. Ale następnie, na skutek malenia wariancji błędów, uzyskuje się duże ustalone wartości K_{11} i K_{21} i małe wariancje błędów estymacji jak w przypadku pierwszym.

Obserwacje i wnioski z przebiegu elementów macierzy $[K]$ mają naturalnie charakter jakościowy, natomiast konkretne wartości otrzyma się przez obliczenie wariancji błędów estymacji (6.4b).

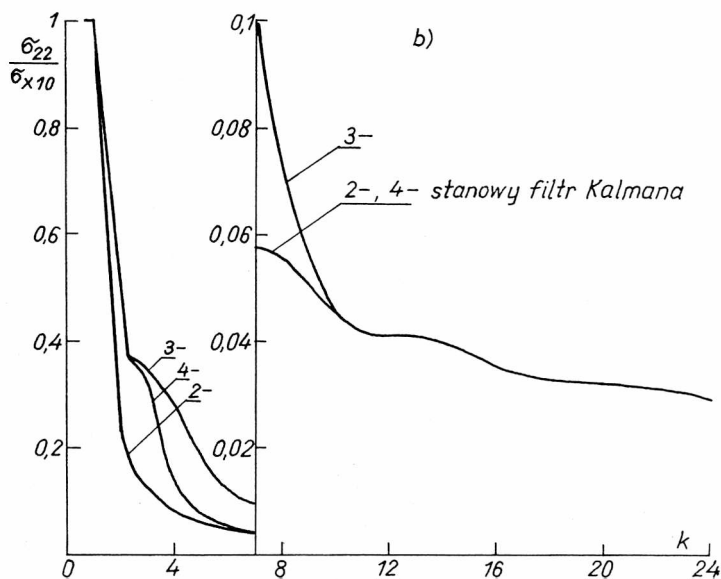
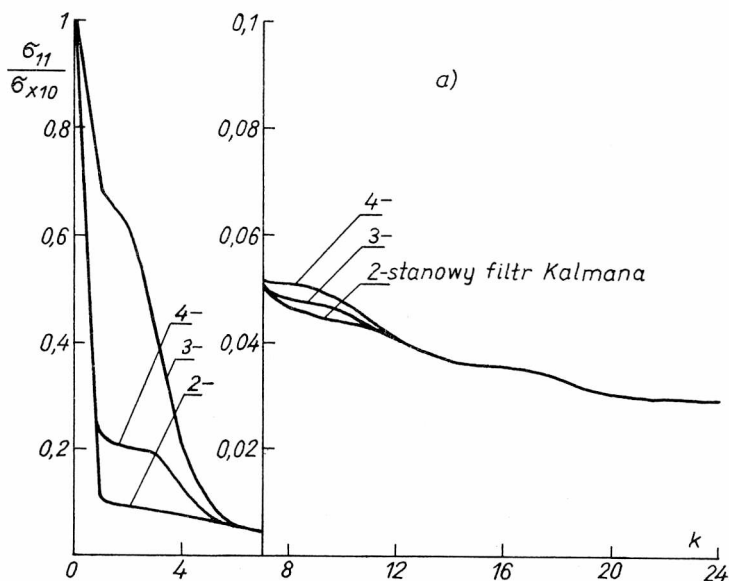
Wariancje błędów estymacji każdej ze składowych wektora stanu są to diagonalne elementy macierzy $[W]$ - $W_{ii}(k) = \sigma_{ii}^2$ (6.4b). Niezależnie od tego, jaki jest rozmiar wektora stanu, wielkości kryterialne są obliczane na podstawie składowej podstawowej sygnału. Tak więc błędy estymacji związane są z wariancjami dwu pierwszych składowych wektora stanu, to jest σ_{11}^2 i σ_{22}^2 . Przedstawiono je na rys. 6.2-6.6 dla filtrów 2-, 3- i 4- stanowych i różnych parametrów projektowych filtru.

W przypadku pierwszym (rys. 6.2) przebieg filtracji będzie charakteryzować doskonała dynamika. Po kilku pierwszych próbkach od rozpoczęcia pracy filtru wariancje $W_{11}(k)$ i $W_{22}(k)$ zmniejszają się od dużych wartości początkowych W_{x10} do wartości determinowanych przez σ_v^2 i σ_u^2 . Relacja między tymi wielkościami wpływa na dalszy przebieg wariancji. Jeśli σ_v jest nieznacznie tylko większe od σ_u (obie te wartości są znacznie mniejsze od σ_{x10}), to wariancje $W_{11}(k)$ i $W_{22}(k)$ ustalają się bardzo szybko i praktycznie nie maleją wraz z dalszym wzrostem dyskretnego czasu k . Ponieważ odchylenia standardowe maleją wolniej niż wariancje, więc dla zachowania większej dokładności właśnie te wielkości przedstawiono na tym i dalszych wykresach. Dodatkowo unormowano je ze względu na początkową wartość odchylenia standardowego błędu estymacji (σ_{11}/σ_{x10}). Szczegółowe parametry tego wykresu (rys. 6.2) są następujące: $\sigma_{x10} = 10$, $\sigma_v = 1$, $\sigma_u = 0,5$, a liczba próbek w okresie składowej podstawowej wynosi $N_1 = 12$ (przy tej samej wartości N_1 określa się odchylenia standardowe dla następnych wykresów). Jak już powiedziano, wartości ustalone odchylen standardowych błędu są osiągnane bardzo szybko, lecz szybkość ta jest



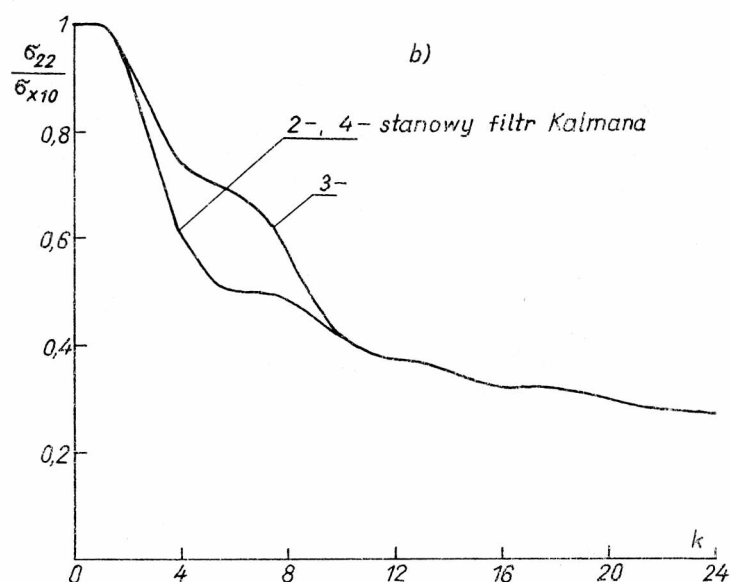
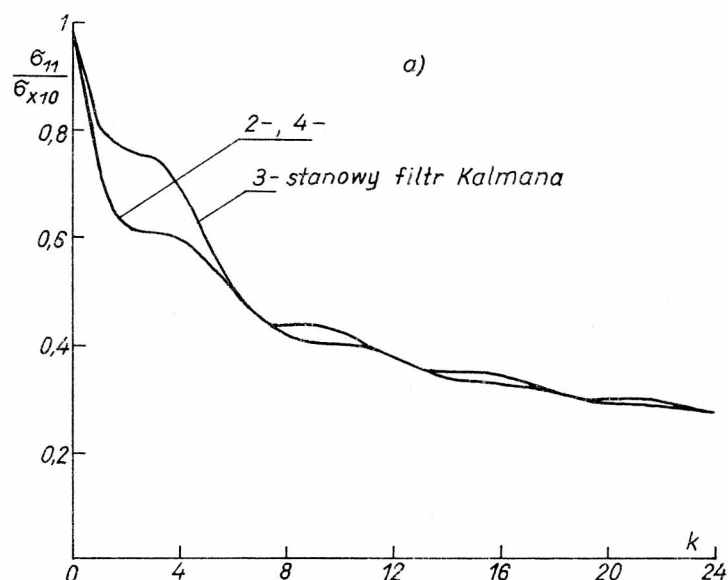
Rys. 6.2. Względne odchylenia standardowe błędów estymacji w funkcji dyskretnego czasu k , składowej bezpośredniej (a) i kwadraturowej (b); parametry filtru: $\sigma_{x10} = 10$, $\sigma_v = 1$, $\sigma_u = 0,5$

Fig. 6.2. Ratio of standard deviation of estimation errors versus discrete time k of direct (a) and quadrature (b) signal components; filter parameters: $\sigma_{x10} = 10$, $\sigma_v = 1$, $\sigma_u = 0,5$



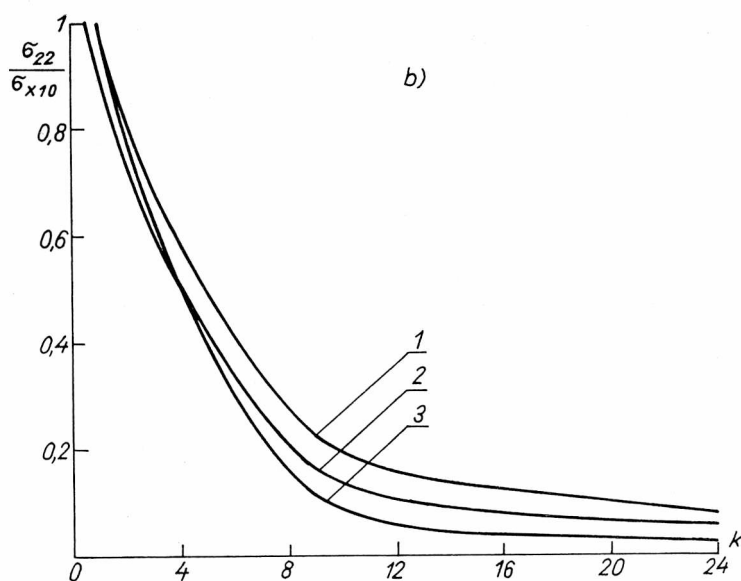
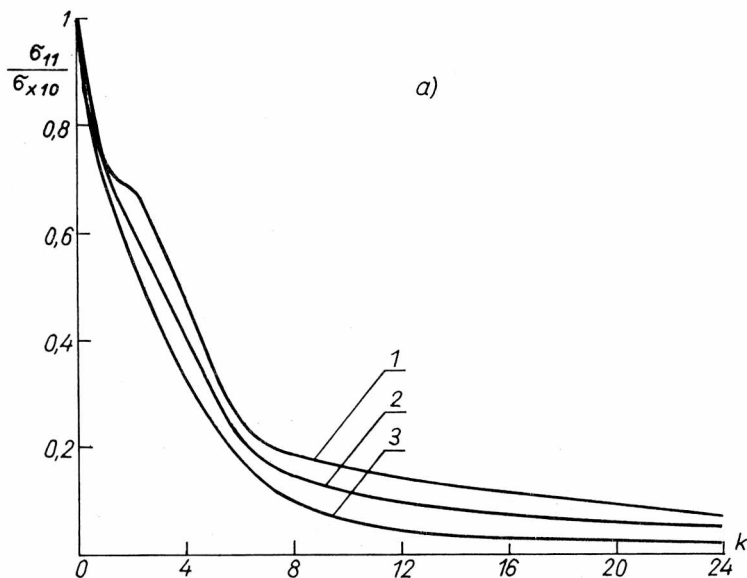
Rys. 6.3. Względne odchylenia standardowe błędów estymacji w funkcji dyskretnego czasu k , składowej bezpośredniej (a) i kwadraturowej (b); parametry filtru: $\sigma_{x10} = 10$, $\sigma_v = 1$, $\sigma_u = 0$

Fig. 6.3. Ratio of standard deviation of estimation errors versus discrete time k of direct (a) and quadrature (b) signal components; filter parameters: $\sigma_{x10} = 10$, $\sigma_v = 1$, $\sigma_u = 0$



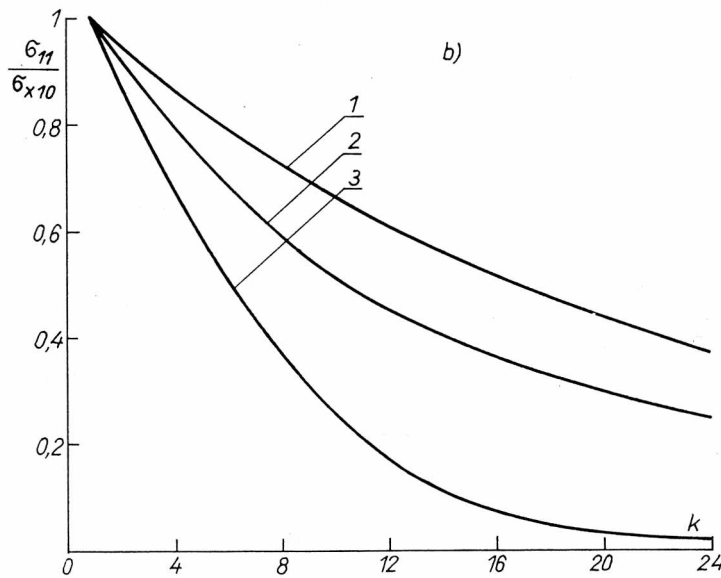
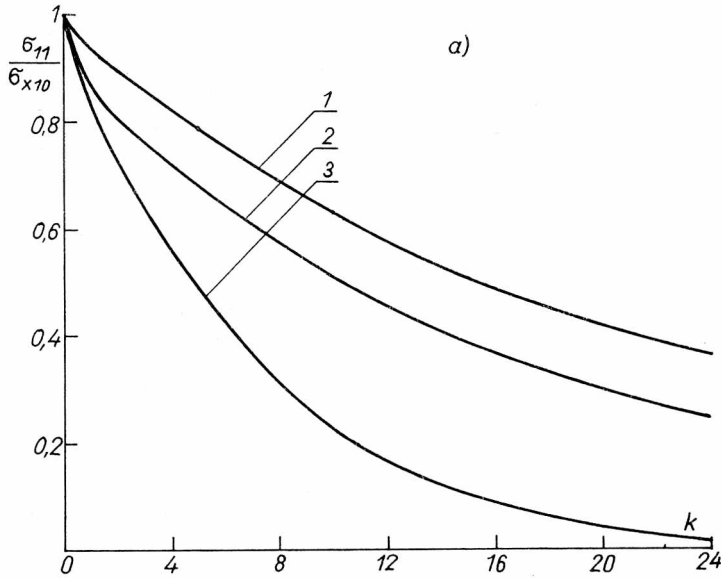
Rys. 6.4. Względne odchylenia standardowe błędów estymacji w funkcji dyskretnego czasu k składowej bezpośredniej (a) i kwadraturowej (b); parametry filtru: $\sigma_{x10} = 10$, $\sigma_v = 10$, $\sigma_u = 0$

Fig. 6.4. Ratio of standard deviation of estimation errors versus discrete time k of direct (a) and quadrature (b) signal components; filter parameters: $\sigma_{x10} = 10$, $\sigma_v = 10$, $\sigma_u = 0$



Rys. 6.5. Względne odchylenia standardowe błędów estymacji składowej bezpośredniej (a) i kwadraturowej (b) prądu; 3-stanowy filtr Kalmana; parametry: 1 - $\sigma_{x10} = 2$, $\sigma_v = \exp(-k/12)$, $\sigma_u = 0,001$; 2 - jak 1 lecz $N_1 = 24$; 3 - jak 1 lecz $\sigma_v = \exp(-k/3)$

Fig. 6.5. Ratio of standard deviation of estimation errors of direct (a) and quadrature (b) current components; 3-state Kalman filter; parameters: 1 - $\sigma_{x10} = 2$, $\sigma_v = \exp(-k/12)$, $\sigma_u = 0,001$; 2 - as in 1 but $N_1 = 24$; 3 - as in 1 but $\sigma_v = \exp(-k/3)$



Rys. 6.6. Względne odchylenia standardowe błędów estymacji składowej bezpośredniej (a) i kwadraturowej (b) napięcia; 2-stanowy filtr Kalmana; parametry: 1 - $\sigma_{x10}^2 = 0,1$, $\sigma_v^2 = 0,6 \exp(-k/6)$; 2 - jak 1 lecz $\sigma_v^2 = 0,3 \exp(-k/6)$; 3 - $\sigma_v^2 = 0,3 \exp(-k/1,5)$

Fig. 6.6. Ratio of standard deviation of estimation errors of direct (a) and quadrature (b) voltage components; 2-state Kalman filter; parameters: 1 - $\sigma_{x10}^2 = 0,1$, $\sigma_v^2 = 0,6 \exp(-k/6)$; 2 - as in 1 but $\sigma_v^2 = 0,3 \exp(-k/6)$; 3 - $\sigma_v^2 = 0,3 \exp(-k/1,5)$

uzależniona od rzędu filtru. I tak: najwolniej odbywa się to w filtrze 2-stanowym i jak stwierdzono, jest to praktycznie niewiele zależne od przyjętej oczekiwanej stałej czasowej T_a aperiodycznej zmiennej stanu. Ten najwolniejszy spadek jest zapewne związany ze znanymi już z metod fourierowskich trudnościami w rozpoznawaniu sygnału w obecności, posiadającej szerokie widmo, składowej aperiodycznej. W każdym jednak przypadku spadek do poziomu ustalonego odchylenia standardowego odbywa się bardzo szybko: w filtrze 2-stanowym potrzeba na to 2 próbek, w filtrze 4-stanowym potrzeba na to 5 próbek, a w filtrze 3-stanowym 6 próbek. Tak więc odchylenia standardowe błędów maleją z doskonałą dynamiką i odpowiednio dokładne estymaty sygnałów filtru również otrzyma się bardzo szybko.

Jak wykazały badania symulacyjne, wartości ustalone odchyleni standardowych są zależne jedynie od relacji między odchyleniami standardowymi zakłóceń (jeśli σ_v i $\sigma_u \ll \sigma_{x10}$). Na wykresach rys. 6.2 przyjęto iloraz $\sigma_v/\sigma_u = 2$. Jeśli iloraz tych odchyleni standardowych jest identyczny, lecz ich wartości bezwzględne są na przykład sto razy mniejsze ($\sigma'_v = 10^{-2}\sigma_v$, $\sigma'_u = 10^{-2}\sigma_u$), to odpowiednio ustalone odchylenia standardowe błędów estymacji będą także sto razy mniejsze ($\sigma'_{11} = 10^{-2}\sigma_{11}$, $\sigma'_{22} = 10^{-2}\sigma_{22}$). Tak więc wykresy z rys. 6.2 pozwalają na ocenę odchyleni standardowych (lub wariancji) błędów estymacji przy dowolnych wariancjach błędów (lecz tym samym ich ilorazie).

Powstaje teraz pytanie: jak będą się zmieniać przebiegi tych odchyleni standardowych, gdy ten iloraz się zmienia. Jest to o tyle istotne, że - jak stwierdzono poprzednio - wartości σ_u będą w rzeczywistości bardzo małe lub zerowe.

Badania symulacyjne wykazały, że zmiany te wpływają przede wszystkim na charakter wykresu w stanie ustalonym. Przy niewielkich wartościach tego ilorazu (σ_v/σ_u) odchylenia standardowe błędów estymat są ustalone po kilku próbkach i praktycznie dalej nie zmieniają się z czasem. Gdy iloraz ten rośnie, wówczas obserwuje się powolny spadek tych odchyleni standardowych. Graniczny przypadek $\sigma_v/\sigma_u \rightarrow \infty$ ($\sigma_v = 1$, $\sigma_u = 0$) przedstawiono na rys. 6.3. Aby poprawić dokładność tego wykresu, począwszy od $k = 7$ zmieniono jego skalę. Jakościowo i ilościowo przebiegi odchyleni standardowych błędów estymacji są niemal identyczne (rys. 6.2 i rys. 6.3) dla kilku początkowych próbek, gdyż decyduje tu relacja między początkową wariancją wektora stanu a wariancjami błędów. Wraz z dalszym wzrostem liczby próbek różnice stają się ilościowo znaczące. Na przykład po dwunastu próbkach (a więc po okresie składowej podstawowej, gdy $N_1 = 12$) odchylenia standardowe błędów są około 2,5 raza mniejsze niż poprzednio, a po dwudziestu czterech próbkach ponad 3 razy mniejsze. Odpowiada to wariancjom błędów 6 i prawie 10 razy mniejszym niż poprzednio.

Na rysunku 6.4 przedstawiono odchylenia standardowe błędów estymacji dla dużych zakłóceń pomiaru. Szczegółowe parametry tego wykresu są następujące: $\sigma_{x10} = 1$, $\sigma_v = 1$, $\sigma_u = 0$. Z podobnym przypadkiem można mieć do czynienia podczas pomiaru napięcia, gdzie początkowa kowariancja stanu i kowariancje zakłóceń mogą być zbliżone wartościami. Charakter wykresów na tym rysunku jest zasadniczo różny od poprzednich. Odchylenia standardowe błędów estymacji maleją od samego początku wolno i mają dość duże wartości także w pobliżu czasów odpowiadających podejmowaniu decyzji ($k \geq 12$).

Ostatnie dwa wykresy wariancji błędów estymacji sporządzono dla modeli i parametrów zakłóceń wziętych z literatury [47]. Pierwszy z nich (rys. 6.5) przedstawia odchylenia standardowe błędów w wyniku stosowania 3-stanowego filtra prądu o szczegółowych parametrach podanych na rysunku, a drugi z nich (rys. 6.6) - 2-stanowego filtra napięcia. Podstawowe różnice dotyczące założonych parametrów projektowych dotyczą malejącej eksponencjalnie wariancji zakłóceń [47]. Fakt, że kowariancje te maleją, ma bardzo korzystny wpływ na wariancje błędów estymacji. Otóż filtr, którego parametry początkowe są podobne do tego z rys. 6.4, dzięki malejącej wariancji zakłóceń wykazuje lepszą dynamikę spadku wariancji (rys. 6.5) i mniejsze wartości ustalone (szczegółowe parametry podano na tym rysunku). Wykresy te można by uznać za szczegółową ilustrację własności 3-stanowego filtra prądu. Z kolei rys. 6.6 odzwierciedla odchylenia standardowe błędów estymacji filtra Kalmana napięcia. Błędy te maleją dość wolno, ale warto zwrócić uwagę na przyjęte parametry filtra, a szczególnie na dużą początkową wariancję zakłóceń. Otóż filtr napięcia, mimo że ma mniejszą liczbę stanów, będzie wykazywał gorsze charakterystyki ze względu na spadek wartości skutecznej mierzonej składowej podstawowej. Stąd też trudności z dokładnym pomiarem napięcia niezależnie od tego, jaką metodę filtracji się stosuje.

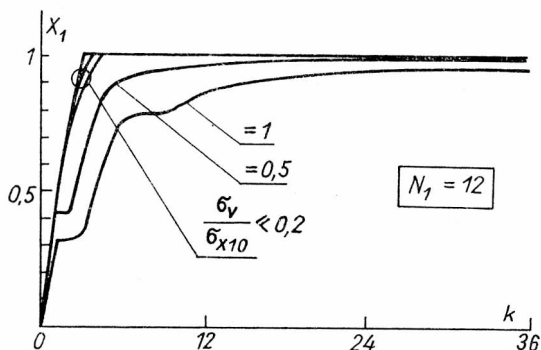
W podsumowaniu można stwierdzić, że badania wariancji błędów estymacji wykazały bardzo dobrą dynamikę zmian wartości tych wariancji oraz małe wartości ustalone i można sądzić, że znaczenie filtra Kalmana w estymacji wielkości kryterialnych zabezpieczeń elektroenergetycznych będzie wzrastało.

6.4.2. Czasy odpowiedzi i charakterystyki częstotliwościowe filtra

Wariancje lub odchylenia standardowe błędów estymacji dostarczają syntetycznej informacji o własnościach filtra. Jednakże w teorii filtrów deterministycznych dziedzina czasu i częstotliwości są rozdzielone i okno pomiarowe lub czasy ustalania (w filtrach rekursywnych) dostarczają informacji o dynamice filtra (i dalej dynamice pomiaru), a charakterystyki częstotliwościowe o możliwej do uzyskania skuteczności filtracji. Po-

nieważ filtr Kalmana jest filtrem rekursywnym, wykonano badania jego czasów ustalania.

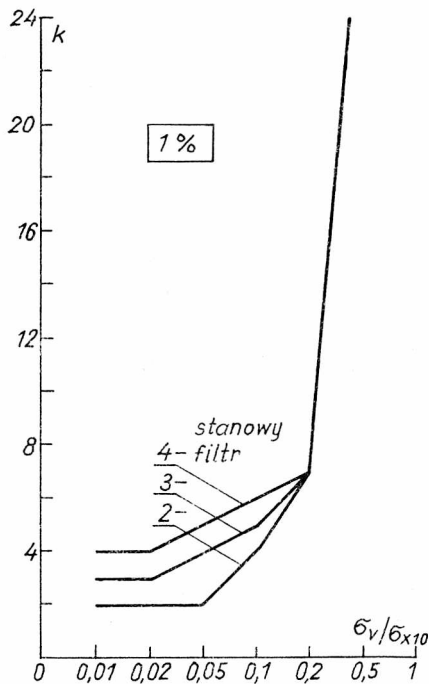
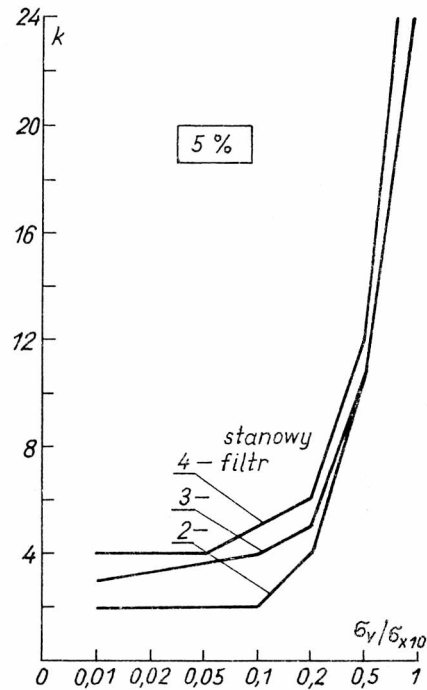
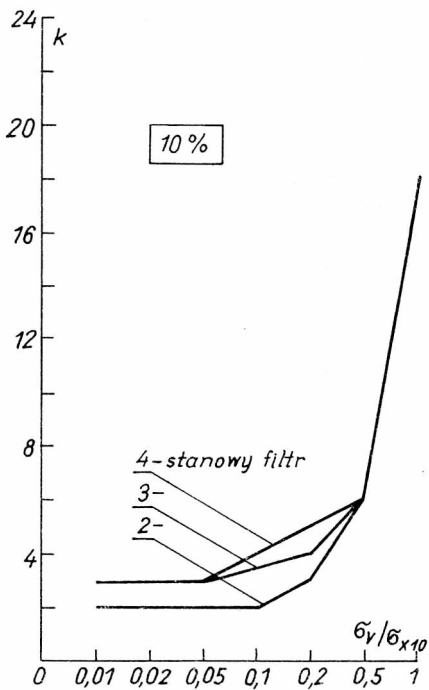
Ponieważ, jak to stwierdzono w p. 6.4.1, dynamika filtru jest zależna od relacji między wariancjami (odchyleniami standardowymi) zakłóceń pomiaru i początkową wariancją procesu, więc przeprowadzono badania dla różnego ilorazu tych wariancji. Były to: $\sigma_v/\sigma_{x10} = 0,001; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1$.



Rys. 6.7. Przebiegi estymacji amplitudy sygnału w funkcji dyskretnego czasu k dla różnych parametrów projektowych filtru
Fig. 6.7. Signal magnitude estimation versus discrete time k for different design parameters of the filter

Na rysunku 6.7 przedstawiono przebiegi estymacji amplitudy dla tych relacji między wariancjami. Widać tam wyraźnie, że doskonała dynamika i niewielkie różnice w przebiegu tych krzywych występuje aż do dwu ostatnich wartości tych ilorazów. W dwu ostatnich przypadkach ($\sigma_v/\sigma_{x10} = 0,5; 1$) estymacja bardzo się wydłuża i nawet po trzech okresach składowej podstawowej odchylenia od wartości ustalonej są wyraźne. Trzeba tu dodać, że w celu ujednolicenia warunków porównania przyjęto, że sygnał jest niezakłóconą składową podstawową. Wykres z rys. 6.7 dostarcza w zasadzie jakościowych informacji o czasach ustalania estymacji.

Przeprowadzono również bardziej szczegółowe badania czasów ustalania przyjmując trzy poziomy dokładności: 10; 5 i 1%. Wyniki przedstawiono dla 2-, 3- i 4-stanowych filtrów na rys. 6.8. Jak widać z tych rysunków, filtr Kalmana rzeczywiście charakteryzuje doskonała dynamika. Przy niezbyt dużych wartościach σ_v/σ_{x10} dwie, trzy, lub co najwyżej cztery próbki odpowiadają jednocentowemu czasowi ustalania. Mniejsze wymagania dokładnościowe (5 lub 10%) pozwalają na osiągnięcie tych samych czasów ustalania dla wyższych wartości ilorazu σ_v/σ_{x10} . Jeśli iloraz ten wzrasta, zbliżając się do jedności, to 10-procentowy czas ustalania odpowiada 17 próbkom, a więc 1,5 okresu składowej podstawowej, a do osiągnięcia wyższych dokładności nie wystarczają dwa okresy składowej podstawowej.



Rys. 6.8. Czasy ustalania odpowiedzi podczas estymacji amplitudy sygnału z zastosowaniem filtrów Kalmana o różnej liczbie stanów w zależności od ilorazu odchyłeń standardowych zakłóceń pomiaru σ_v i początkowego odchylenia standardowego procesu σ_{x10}

Fig. 6.8. Settling time of signal magnitude estimation using different state Kalman filters versus ratio of standard deviation of measurement noises σ_v and initial standard deviation of the process σ_{x10}

W podsumowaniu można stwierdzić, że przedstawione na rys. 6.8 wykresy odzwierciedlające dynamikę 2-, 3- i 4-stanowych filtrów Kalmana przekonują o ich bardzo dobrych własnościach dynamicznych i mogą posłużyć jako diagramy do oceny dokładności dynamicznej filtru po zadanej liczbie próbek, lub oceny czasu odpowiadającego zadanej dokładności estymacji przy założonych lub znanych innych parametrach projektowych filtru.

Filtr Kalmana o przyjętych modelach procesu i pomiaru jest filtrem niestacjonarnym, a ta jego cecha wynika ze zmienności elementów macierzy $[K]$ wraz ze zmianą dyskretnego czasu próbkowania k . Elementy tej macierzy szybciej lub wolniej zbiegają do wartości ustalonej wraz ze wzrostem k (rys. 6.1), ale można w pewnym przybliżeniu przyjąć, że w większości przypadków przedział niestacjonarności jest nie większy niż okres składowej podstawowej. Dla większych przedziałów czasu filtr jest stacjonarny i można mówić o jego widmie w normalnym sensie. Jeżeli jednak, ze względu na wymagane w zabezpieczeniach elektroenergetycznych możliwie krótkie czasy estymacji, chce się ocenić widmo dla tych krótkich przedziałów, to należy raczej mówić o pseudowidmie, które pomimo pewnych trudności interpretacyjnych też może dostarczyć pożytecznych informacji. Tak więc to pseudowidmo filtru jest w rozważanym przedziale czasu także niestacjonarne i jest funkcją trzech parametrów: względnej częstotliwości m , dyskretnego czasu k oraz fazy sygnału.

Metoda postępowania podczas określania charakterystyk częstotliwościowych sprowadza się do obliczenia (lub zmierzenia) w jakim stopniu moc, wartość skuteczna lub amplituda sygnału wyjściowego filtru (składowych wektora) jest zmniejszona w stosunku do wielkości sygnału wejściowego o danej częstotliwości. W tym wypadku sygnałem wejściowym w równaniu estymacji (6.3) jest

$$Y_m(k) = \cos(km\omega_1 T_1 + \varphi_m) \quad (6.23)$$

gdzie m - względna częstotliwość.

Trzeba tu podkreślić, że niezależnie od tego czy stosuje się filtr 2-, 3- czy 4-stanowy, wyestymowane składowe wektora stanu odpowiadające sygnałowi o częstotliwości podstawowej (X_{d1} , X_{q1} w równaniu (6.9)) są ortogonalne, jeśli sygnał wejściowy ma tę częstotliwość. Jeśli natomiast sygnał wejściowy filtru ma inną częstotliwość, to już tak nie jest i jego amplituda nie może być obliczona bezpośrednio z pierwiastka z sumy kwadratów składowych wektora stanu. Można natomiast postąpić nieco inaczej. Metoda polega na zastosowaniu dwu identycznych filtrów pobudzanych ortogonalnymi sygnałami sinus, cosinus o danej częstotliwości i wykorzystaniu wyestymowanych wielkości do określania charakterystyki częstotliwościowej.

Niech więc przez analogię do równań (6.1) i (6.2), $Y_m(k)$ z równania (6.23) będzie zapisane w postaci:

$$\begin{aligned} [Z_m(k+1)] &= [A_m][Z_m(k)] \\ [Y_m(k)] &= [C_m][Z_m(k)] \end{aligned} \quad (6.24)$$

gdzie

$$[A_m] = \begin{bmatrix} \cos(m\omega_1 T_1) & -\sin(m\omega_1 T_1) \\ \sin(m\omega_1 T_1) & \cos(m\omega_1 T_1) \end{bmatrix},$$

$$[C_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[Z_m(k)] = \begin{bmatrix} \cos(km\omega_1 T_1) & \sin(km\omega_1 T_1) \end{bmatrix}.$$

Dla uproszczenia przyjęto odpowiednie macierze dla filtru 2-stanowego, lecz mógłby to być rozmiar dowolny. Z pierwszego z równań (6.24) wynika, że wartość sygnału wejściowego filtru (6.3) w chwili k może być wyrażona przez sygnał w chwili $k=1$ rozpoczęcia pomiaru:

$$[Y_m(k)] = [C_m][A_m]^k [Z_m(1)] \quad (6.25)$$

Ta forma przedstawienia sygnału wejściowego (6.23) pozwala na stwierdzenie, że wyestymowane przez filtr (6.3) wartości $[X]$ przy zerowych warunkach początkowych, mogą być zapisane w formie

$$[X_m(k)] = [F_m(k)][Z_m(1)] \quad (6.26)$$

gdzie $[F_m(k)] = [C_m][A_m]^k$.

Można zauważyć z równań (6.24)-(6.26), że właśnie macierz $[F_m(k)]$ charakteryzuje stopień tłumienia przez filtr sygnału o danej względnej częstotliwości m dla danej dyskretnej chwili k . Po uwzględnieniu drugiego z równań (6.24) oraz samego równania estymacji (6.3) widać, że moduł charakterystyk częstotliwościowych, to jest widmo filtru dla każdej z wyestymowanych składowych wyjściowych, można opisać równaniami:

$$\begin{aligned} F_d(m,k) &= \sqrt{F_{m11}^2(k) + F_{m12}^2(k)} \\ F_q(m,k) &= \sqrt{F_{m21}^2(k) + F_{m22}^2(k)} \end{aligned} \quad (6.27)$$

gdzie $[F_m(k)] = \begin{bmatrix} F_{m11} & F_{m12} \\ F_{m21} & F_{m22} \end{bmatrix}.$

Obliczenie elementów macierzy $[F_m]$ w celu określenia tych charakterystyk byłoby dość trudne, gdyż są one złożoną funkcją macierzy $[A]$, $[C]$, $[K(k)]$, $[A_m]$, $[C_m]$, $[k]$. Zamiast tego można je obliczyć symulacyjnie, realizując dyskretny filtr Kalmana. Trzeba tu zauważyć, że po doprowadzeniu do tego filtru sygnału (6.23) otrzymuje się rezultaty zależne od fazy sygnału (wzmiankowana nieortogonalność). Aby się od tego uniezależnić, można zastosować parę identycznych filtrów Kalmana i do jednego z nich doprowadzić sygnał wejściowy $\cos(km\omega_1 T_i + \varphi_m)$, a do drugiego $\cos(km\omega_1 T_i + \varphi_m + \pi/2)$. W tym wypadku otrzymuje się wyestymowane wartości, które na podstawie poprzednio wprowadzonych zmiennych mogą być opisane następująco:

- w pierwszym z filtrów:

$$X_{dc}(k) = F_{m11}(k) \cos(m\omega_1 T_i + \varphi_m) + F_{m12} \sin(m\omega_1 T_i + \varphi_m),$$

$$X_{qc}(k) = F_{m21}(k) \cos(m\omega_1 T_i + \varphi_m) + F_{m22} \sin(m\omega_1 T_i + \varphi_m),$$

- w drugim z filtrów:

$$X_{ds}(k) = -F_{m11}(k) \sin(m\omega_1 T_i + \varphi_m) + F_{m12} \cos(m\omega_1 T_i + \varphi_m),$$

$$X_{qs}(k) = -F_{m21}(k) \sin(m\omega_1 T_i + \varphi_m) + F_{m22} \cos(m\omega_1 T_i + \varphi_m).$$

Na podstawie tych składowych otrzymuje się już łatwo charakterystyki widmowe (6.27):

$$\begin{aligned} F_d(m, k) &= \sqrt{X_{dc}^2(k) + X_{ds}^2(k)} \\ F_q(m, k) &= \sqrt{X_{qc}^2(k) + X_{qs}^2(k)} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Tak więc wzory (6.28) umożliwiają obliczenie widma, a właściwie pseudowidma filtru Kalmana dla ustalonego parametru - dyskretnej chwili k od momentu rozpoczęcia pracy filtru. Gdy wartości k są niewielkie, a macierz $[K(k)]$ zmienia się, wówczas filtr jest niestacjonarny i jego pseudowidmo może dostarczyć pewnych informacji pod warunkiem, że uzyskane charakterystyki są odpowiednio ostrożnie interpretowane.

W istocie jednak macierz $[K(k)]$ dla reprezentatywnych wartości parametrów projektowych filtru osiąga wartości ustalone po czasie zawartym w przedziale między połową a okresem identyfikowanej składowej podstawowej (rys. 6.1) i pseudowidma określone dla czasów $kT_i > T_1$ są już widmami stacjonarnymi.

Oprócz widma określanego odrębnie dla każdej ze składowych ((6.28)) możliwe jest również określenie widma amplitudy, dostarczającego informacji o widmie obu składowych łącznie.

Niech więc sygnał wejściowy filtru zawiera identyfikowaną składową podstawową oraz zakłócenie o częstotliwości $m\omega_1$. Ponieważ tylko składo-

we sygnału użytecznego pozostają ortogonalne w sygnałach wyjściowych filtru, więc sygnały te mogą na wyjściu filtru być określone równaniami:

$$X_d(k) = \cos(k\omega_1 T_i + \varphi) + a_m F_d(m, k) \quad (6.29)$$

$$X_q(k) = \sin(k\omega_1 T_i + \varphi) + a_m F_q(m, k)$$

gdzie a_m - iloraz amplitud zakłócenia i sygnału.

Obliczając amplitudę jako pierwiastek z sumy kwadratów składowych (6.29) oraz poszukując wartości ekstremalnych ze względu na fazę φ otrzymuje się:

$$\sqrt{X_d^2(k) + X_q^2(k)}_{\text{ekstr}} = 1 \pm a_m \sqrt{F_d^2(m, k) + F_q^2(m, k)} \quad (6.30)$$

Gdy a_m jest równe jedności, drugi człon prawej strony równania (6.30) odpowiada wartości skutecznej sygnału na wyjściu filtru, jeśli zakłócający sygnał wejściowy ma jednostkową amplitudę i częstotliwość $m\omega_1$. Normując to wyrażenie przez podzielenie przez $\sqrt{2}$, a więc wartość uzyskiwaną dla częstotliwości ω_1 , otrzymuje się:

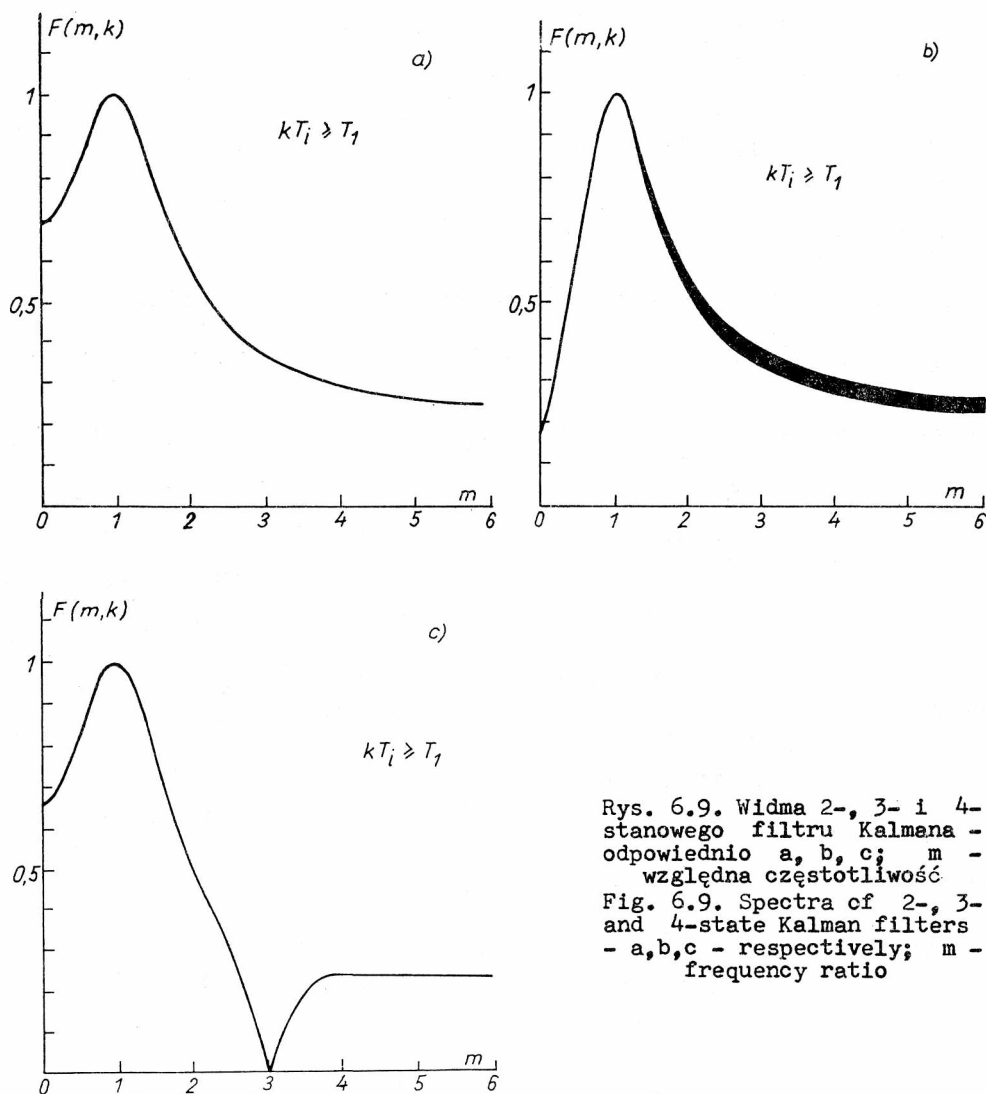
$$F(m, k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{F_d^2(m, k) + F_q^2(m, k)} \quad (6.31)$$

Wyrażenie to charakteryzuje łączne widmo filtru.

Na rysunku 6.9a-c przedstawiono tak określone widmo filtrów Kalmana 2-, 3- i 4-stanowych dla czasów większych od okresu składowej podstawowej ($N_1 = 12$, $k = 12 - 24$)

Uzyskano je na drodze symulacji komputerowej i krzywe w przedziale dyskretnych czasów k od 12-24 właściwie nie różnią się, a więc filtry są już stacjonarne. Szczegółowe parametry projektowe filtru są takie jak te, których wariancje przedstawiono na rys. 6.2 i 6.5. Odpowiada to małym zakłóceniom procesu i pomiaru, lub też zakłóceniom początkowo dużym, lecz malejącym eksponencjalnie, co jest najbliższe rzeczywistości. Charakterystyki widmowe stacjonarne w obu wypadkach różnią się nieznacznie. W filtrze 4-stanowym założonymi dodatkowymi składowymi wektora procesu jest część rzeczywista i urojona fazora o częstotliwości $3\omega_1$. Charakterystyka widmowa dla tej częstotliwości zeruje się (rys. 6.9c).

Ogólnie filtry 2- i 4-stanowe mają widma odpowiadające filtrom dolnoprzepustowym (rys. 6.9a,c), a widmo filtru 3-stanowego (rys. 6.9b) zbliża się do charakterystyki filtru pasmowoprzepustowego. W pasmie zaporowym tłumienie jest prawie czterokrotne, ale składowe harmoniczne nie są odrzucane jak w filtrach nierekursywnych pełnookresowych z funkcjami wagi sinus, cosinus. Filtr Kalmana ma więc gorsze charakterystyki widmowe niż wybrane filtry nierekursywne, lecz jest to rekompensowane bardzo dobrą jego dynamiką.



Rys. 6.9. Widma 2-, 3- i 4-
stanowego filtru Kalmana -
odpowiednio a, b, c; m -
względna częstotliwość
Fig. 6.9. Spectra of 2-, 3-
and 4-state Kalman filters
- a, b, c - respectively; m -
frequency ratio

Skoro nawiązano do porównań z filtracją Fouriera, to może warto jeszcze na zakończenie ocenić obciążenie obliczeniowe w filtracji Kalmana. Macierzowe równanie filtru (6.3) sprawia wrażenie, że obciążenie obliczeniowe może być znaczne. Równanie to można jednak przepisać w następującej postaci:

$$[\hat{X}(k+1)] = [[J] - [K(k+1)][C]] [A] [\hat{X}(k)] + [K(k+1)][Y(k+1)] \quad (6.32)$$

W równaniu (6.32) wszystkie macierze pierwszego członu po prawej stronie są znane i jeśli dodatkowo $[Y]$ jest skalar, to liczba operacji do wykonania w kolejnych chwilach k jest mała. Otóż w filtrze 2-stanowym należy dla każdej składowej zrealizować 3 mnożenia i jedno dodawanie, w 3-stanowym o jedno mnożenie więcej, w 4-stanowym 5 mnożeń i jedno dodawanie. Tak więc obciążenie obliczeniowe związane z realizacją filtra również nie jest duże i porównywalne z rekursywną realizacją algorytmów omawianych w rozdz. 5.

7. DOKŁADNOŚĆ WIELKOŚCI KRYTERIALNYCH

Pomiar wielkości kryterialnych według algorytmów opisanych w rozdz. 4 przy stosowaniu filtrów opisanych w rozdz. 5 i 6 jest obarczony różnego rodzaju błędami. Są one wywołane wieloma czynnikami związanymi z samą techniczną realizacją algorytmów w rzeczywistym układzie cyfrowym, jak też zakłóceniami sygnałów.

Podstawowymi przyczynami błędów są:

- zakłócenia napięć i prądów
- zmiany częstotliwości składowej podstawowej napięcia i prądu
- zbyt słabe tłumienie filtra analogowego w pasmie zaporowym
- szum kwantowania sygnałów
- szum ograniczonego słowa maszynowego.

Błędy wywołane trzema ostatnimi czynnikami w odpowiednio zaprojektowanym i skonstruowanym układzie cyfrowym są mniej więcej o rząd mniejsze od błędów spowodowanych zakłóceniami sygnałów. Te ostatnie stanowią podstawowe źródło błędów przy założeniu ustalonej częstotliwości składowych podstawowych napięć i prądów. Z omówionych w rozdz. 3 modeli sygnałowych wynika, że zakłócenia sygnałów mają charakter oscylacyjny i (lub) aperiodyczny. Zakłócenie o charakterze oscylacyjnym, to najczęściej sygnał o jednej dominującej częstotliwości i na ogół niezbyt dużej względnej amplitudzie [145]. W tej sytuacji błędy pomiaru różnych wielkości kryterialnych można otrzymać w zwartej postaci analitycznej. Będą one omówione w p. 7.2.

Źródłem trudnych do usunięcia i znacznych błędów jest zakłócenie aperiodyczne. Szczególnie w sygnale prądowym przyjmuje ono znaczne wartości początkowe. Trudności związane z jego odfiltrowaniem powodowane są kilkoma czynnikami. Po pierwsze, wartość stałej czasowej tej składowej nie jest znana i może zmieniać się w szerokim zakresie. Można oszacować, uwzględniając stałe czasowe poszczególnych elementów systemu, że ta war-

tość zawiera się w zakresie od ułamków aż do około dwudziestu pięciu okresów składowej podstawowej. W efekcie jest to przebieg niemal stały lub krótki impuls, a energia zakłócenia może być skoncentrowana w zakresie niskich częstotliwości lub też rozłożona dość równomiernie w szerokim pasmie. Inna trudność związana jest ze znaczną wartością początkową tego zakłócenia, która może być równa amplitudzie identyfikowanej składowej podstawowej. Jeśli więc wartości błędów mają być niewielkie, to zakłócenie to musi być efektywnie tłumione. Istnieje wiele metod zmniejszania błędów przez nie powodowanych. Jedną z nich to wykorzystanie układu odwzorowującego impedancję chronionej linii, ale uwzględniając szeroki zakres stałej czasowej trzeba uznać, że metoda ta jest tylko częściowo skuteczna.

Cyfrowa filtracja sygnałów stwarza jednak nowe możliwości opracowania metod skutecznej minimalizacji błędów powodowanych zakłóceniem aperiodycznym. Łatwość opóźnienia sygnałów i wykorzystanie odpowiednio dopasowanych funkcji wagi filtrów pozwalają na rzeczywiście efektywne jego tłumienie.

Za miary błędów omawianych dalej przyjęto ich względne chwilowe wartości zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}\delta A(t) &= \frac{I_m(t) - I_1}{I_1} \\ \delta P(t) &= \frac{2}{U_1 I_1} [P_m(t) - P] \\ \delta Q(t) &= \frac{2}{U_1 I_1} [Q_m(t) - Q] \\ \delta R(t) &\cong \delta P(t) - \delta A(t) \\ \delta X(t) &\cong \delta Q(t) - \delta A(t)\end{aligned}\tag{7.1}$$

gdzie

I_1, P, Q - wartości dokładne amplitudy prądu, mocy czynnej i biernej odpowiednio (przy niezakłóconych sygnałach),

$I_m(t), P_m(t), Q_m(t)$ - wartości mierzone danych wielkości w warunkach zakłóceń sygnałów,

$\delta A(t), \delta P(t) \dots$ - względne chwilowe wartości błędów amplitudy, mocy czynnej itd.

W ocenie dokładności wielkości kryterialnych w warunkach zakłóceń sygnałów przyjmowano maksymalne wartości błędów chwilowych zdefiniowanych wzorami (7.1).

7.1. Filtracja składowej aperiodycznej

7.1.1. Błędy wywołane składową aperiodyczną w metodach standardowych

Metody standardowe to pełno- i półokresowy spłot oraz korelacja. Błędy wywołane składową aperiodyczną określi się tutaj dla funkcji wagi oraz funkcji korelujących sinus i cosinus jako najbardziej reprezentatywnych, a można zresztą wykazać, że gdy stosuje się funkcje Walsha, wówczas różnią się one nieznacznie. Rozważana składowa nieokresowa pojawia się w prądzie i niech będzie ona określona następującym równaniem:

$$i(t) = I_1 [\cos(\omega_1 t + \varphi) - \cos\varphi \exp(-\alpha t)] \quad (7.2)$$

gdzie

$$\alpha = 1/T_a,$$

T_a - stała czasowa zanikania składowej nieokresowej.

Jeśli sygnał ten zostanie poddany korelacji pełno- lub półokresowej (p. 5.3.2.1), to otrzymuje się następujące składowe prądu:

$$i_d(t) = I_1 \frac{T}{2} [\cos\varphi - \cos\varphi A_d(t)] \quad (7.3)$$

$$i_q(t) = I_1 \frac{T}{2} [-\sin\varphi - \cos\varphi A_q(t)]$$

gdzie

$$A_d(t) = \frac{2}{T} \frac{\exp(-\alpha(t - T))}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_1^2}} \left\{ \cos[\omega_1(t - T) - \Psi] - \exp(-\alpha T) \cos(\omega_1 t - \Psi) \right\},$$

$$A_q(t) = \frac{2}{T} \frac{\exp(-\alpha(t - T))}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_1^2}} \left\{ \sin[\omega_1(t - T) - \Psi] - \exp(-\alpha T) \sin(\omega_1 t - \Psi) \right\},$$

$$t \geq T,$$

$$\operatorname{tg}\Psi = \omega_1 T_a,$$

T - długość okna pomiarowego równa w tym przypadku okresowi lub półokresowi składowej podstawowej: $T = T_1$ lub $T = T_1/2$.

Składowe błędy są więc zanikającym aperiodycznie sygnałem harmonicznym. Amplitudy błędów nie są duże w korelacji pełnookresowej (funkcje cosinus i sinus w nawiasach klamrowych są identyczne i funkcja wykładnicza jest odejmowana od jedności), lecz bardzo wzrastają i mogą przekraczać 100% w korelacji półokresowej (wówczas funkcja wykładnicza jest dodawana do jedności).

W razie realizacji spłotu sygnału (7.2) z parą funkcji ortogonalnych (p. 5.2.2.2) otrzymuje się następujące składowe prądu:

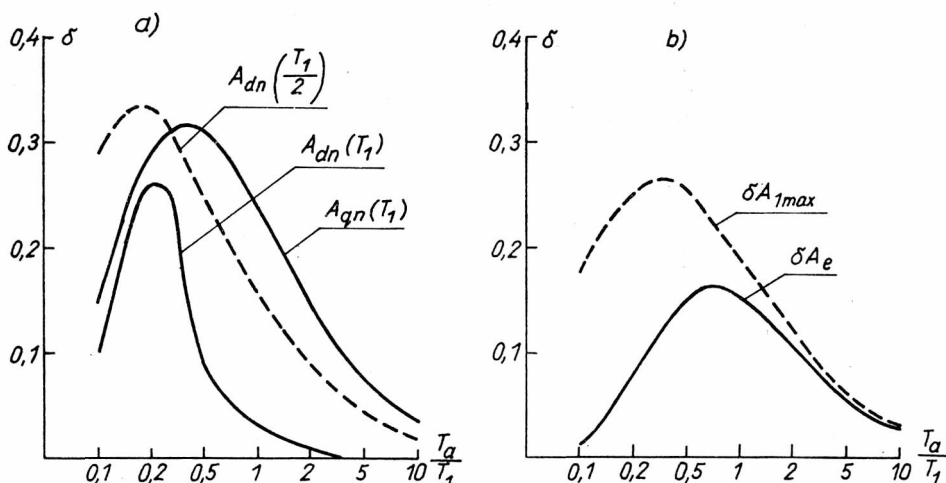
$$i_{dn}(t) = I_1 F_d [\cos(\omega_1 t + \varphi) - \cos\varphi A_{dn}(t)] \quad (7.4)$$

$$i_{qn}(t) = I_1 F_q [\sin(\omega_1 t + \varphi) - \cos\varphi A_{qn}(t)]$$

Jeśli funkcje wagi stosowanych filtrów są odpowiednio funkcjami sinus i cosinus, analogicznie do algorytmu korelacji, otrzymuje się następujące składowe błędów pochodzących od zakłócenia aperiodycznego ($F_d = F_q = T/2$):

$$\begin{aligned} A_{dn}(t) &= \frac{2}{T} \frac{\exp(-\alpha(t-T))}{\alpha^2 + \omega_1^2} \{ \omega_1 \sin(\omega_1 T) + \alpha [\cos(\omega_1 T) - \exp(-\alpha T)] \} \\ A_{qn}(t) &= \frac{2}{T} \frac{\exp(-\alpha(t-T))}{\alpha^2 + \omega_1^2} \{ \alpha \sin(\omega_1 T) - \omega_1 [\cos(\omega_1 T) - \exp(-\alpha T)] \} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Obecnie można wykreślić błędy wywołane składową nieokresową w funkcji względnej stałej czasu (T_a/T_1). Są one największe w chwili, gdy rozpoczyna się stan ustalony po skokowej zmianie sygnału ($t = T$). Te maksymalne wartości błędów w algorytmie filtracji pełnookresowej ($T = T_1$) przedstawiono na rys. 7.1a. Jak widać, błędy podczas określania kwadra-



Rys. 7.1. Maksymalne względne błędy chwilowe, powodowane składową aperiodyczną, w zależności od jej stałej czasu: a - w wyznaczaniu składowych ortogonalnych sygnału, b - podczas pomiaru amplitudy
Fig. 7.1. Maximum values of instantaneous errors ratio due to decaying DC: a - for orthogonal signal components, b - for magnitude measurement

turowej składowej ortogonalnej są znacznie większe niż podczas określania drugiej ze składowych. Szczególnie duże różnice występują w pobliżu jednostkowej względnej stałej czasowej zakłócenia ($T_a/T_1 = 1$). Wówczas podczas określania jednej ze składowych błąd powodowany zakłóceniem jest 3-procentowy, a drugiej prawie 25-procentowy. W ogóle błędy są znaczne i sięgają 30%. Nie oznacza to naturalnie, że podczas pomiaru amplitudy lub innych wielkości kryterialnych błędy będą aż tak duże, gdyż trzeba uwzględnić uwarunkowania czasowe i fazowe, a więc pełne zależności (7.4)

i (7.5). Obliczany w ten sposób kwadrat amplitudy prądu jest dany równaniem:

$$I_m^2 = \left(\frac{2}{T_1}\right)^2 [i_{dn}^2(t) + i_{qn}^2(t)] = I_1^2 [1 + \cos^2 \varphi B^2 - 2 \cos \varphi B \cos(\omega_1 t + \varphi + \Psi)] \quad (7.6)$$

gdzie $B = \frac{2}{T_1} \frac{\exp[-\alpha(t - T_1)]}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_1^2}} [1 - \exp(-\alpha T_1)]$.

Trzeba tu podkreślić, że identyczne równanie jak (7.6) otrzyma się obliczając amplitudę z zastosowaniem składowych (7.3). A więc błędy powodowane składową nieokresową są przy stosowaniu korelacji i filtracji pełnookresowej identyczne.

Pierwsze oszacowanie od góry wartości błędów względnych pomiaru amplitudy (7.1) można otrzymać przyjmując zerową fazę początkową oraz zakładając, że funkcja cosinus w ostatnim członie wyrażenia (7.6) ma wartość plus lub minus jeden. Takie ograniczenie wartości błędów od góry jest dane równaniem:

$$\delta A(t) \leq \delta A_{1\max} = \frac{2}{T_1} \frac{[1 - \exp(-\alpha T_1)]}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_1^2}} \quad (7.7)$$

Te wartości błędów przedstawiono linią przerywaną na rys. 7.1b. Jak widać, są to nadal duże wartości błędów, sięgające prawie 30%. Oszacowanie (7.7) jest jednak na szczęście znacznym zawyżeniem ich wartości, szczególnie w zakresie krótkich względnych stałych czasu, gdy uwarunkowania fazowe są bardzo istotne. W zasadzie tym przybliżeniem można się posługiwać dla względnych stałych czasowych składowej nieokresowej większych od jedności. Znacznie dokładniej można obliczyć błędy powodowane składową nieokresową uwzględniając argumenty funkcji cosinus w równaniu (7.6). I tutaj dokonuje się pewnego uproszczenia, lecz ma ono znikomy wpływ na wyniki. Otóż w wyrażeniu (7.6) pomija się składnik w kwadracie jako znacznie mniejszy i znacznie szybciej zanikający składnik błędu. Możliwe jest teraz określenie w postaci analitycznej czasów występowania ekstremów błędu przez obliczenie pochodnej tego równania po czasie (założono jak poprzednio najtrudniejsze warunki, to znaczy $\varphi = 0$). Otrzymuje się stąd czasy, przy których występuje ekstremum i jego wartości:

$$\omega_1 t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (7.8)$$

$$\delta A_e = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi \left(\frac{T_a}{T_1}\right)^2}{1 + \left(2\pi \frac{T_a}{T_1}\right)^2} \exp\left(-\frac{T_1}{4T_a}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{T_1}{T_a}\right)\right]$$

Błąd ten w funkcji względnej stałej czasu zakłócenia przedstawiono linią ciągłą na rys. 7.1b. Jak widać, maksymalne wartości nie przekraczają 16% w otoczeniu $T_a/T_1 = 0,5; 1$. Maleją one dość szybko wraz ze wzrostem, jak i spadkiem wartości stałych czasu.

Po zmniejszeniu długości okna pomiarowego T do połowy okresu składowej podstawowej błąd $A_{qn}(t)$ może przekraczać 100%, a wykres błędu $A_{dn}(t)$ przedstawiono linią przerywaną na rys. 7.1. W prawie całym przedziale stałych czasu składowej nieokresowej jest on zawarty między obu błędami dla algorytmu pełnookresowego. Naturalnie w tym przypadku standardowe metody korelacji lub filtracji nie mogą być stosowane, gdyż błędy byłyby ogromne (ze względu na $A_{qn}(t)$ - (7.5)). Można natomiast w tym przypadku wykorzystać spłot z tą samą funkcją (o zerowej wartości średniej w oknie pomiarowym), a do uzyskania składowych ortogonalnych wykorzystać przesunięcie sygnału o czas $T_1/4$.

Błędy wynikające ze stosowania funkcji Walsha mają wartości, które znikomo różnią się od określonych dla funkcji wagi sinus i cosinus. Dotyczy to zarówno składowych błędów przedstawionych na rys. 7.1a, jak też błędów w określaniu amplitudy (rys. 7.1b) [60].

Interesujące może być zbadanie jak kształtują się te błędy podczas pomiaru mocy czynnej i biernej z zastosowaniem standardowej metody składowych ortogonalnych. Niech więc składowe ortogonalne napięcia będą dane równaniami:

$$u_d(t) = \frac{I}{2} U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_u),$$

$$u_q(t) = \frac{I}{2} U_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_u),$$

a składowe prądu są określone zależnościami (7.4).

Moc czynna jest wobec tego dana równaniem:

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{2}{T} [u_d(t) i_{dn}(t) + u_q(t) i_{qn}(t)] = \\ &= \frac{1}{2} U_1 I_1 \{ \cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos \varphi_i [A_{dn} \cos(\omega_1 t + \varphi_u) + \\ &\quad + A_{qn} \sin(\omega_1 t + \varphi_u)] \} \end{aligned} \quad (7.9)$$

gdzie A_{dn}, A_{qn} są określone równaniami (7.5).

Powyższe wyrażenie, przy założeniu $T = T_1$, może być łatwo przekształcone do postaci:

$$P_m = \frac{1}{2} U_1 I_1 [\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos \varphi_i B \cos(\omega_1 t + \varphi_u + \varphi_i)] \quad (7.10)$$

gdzie B jest określone w równaniu (7.6).

Można zauważyć, że równania (7.6) i (7.10) są analogiczne z pominięciem w tym pierwszym członem w kwadracie. Obliczając ekstremalne wartości

błędów otrzymuje się identyczne chwile występowania ekstremum i identyczne wartości - wzór (7.8), rys. 7.1b (krzywa ciągła). Podobnie do (7.9) i (7.10) można obliczyć błędy wywołane składową nieokresową podczas pomiaru mocy biernej. Otrzymuje się podobną do (7.10) zależność i identyczne ekstremalne wartości błędów jak podczas pomiaru amplitudy i mocy czynnej. Tak więc można napisać, że:

$$\delta A_e = \delta P_e = \delta Q_e \quad (7.11)$$

gdzie A_e jest dane równaniem (7.8) (patrz też (7.1)), indeks e oznacza ekstremalną wartość błędu.

W standardowych metodach filtracji i korelacji, przy założeniu najgorszego przypadku zakłócenia nieokresowego, błędy maksymalne przyjmują dość duże wartości (około 15%). Istotne jest czy błędy te można zmniejszyć kosztem skomplikowania algorytmu pomiarowego lub też niezbyt dużego zwiększenia efektywnego okna pomiarowego. Pomocne przy tym może być określenie rozkładu w szereg Fouriera składowej aperiodycznej w przedziale okna pomiarowego T .

7.1.2. Szereg Fouriera składowej aperiodycznej

Skutek filtracji lub odrzucenia składowych zakłócających o określonych częstotliwościach może być odczytany z charakterystyk częstotliwościowych. W razie zakłócenia aperiodycznego tak nie jest, gdyż zawiera ono składowe o różnych częstotliwościach, a ich wartości mogą być określone na podstawie jego aproksymacji w przedziale okna pomiarowego T . Rozkład ten jest wyrażony równaniem:

$$\exp\left(-\frac{t}{T_a}\right) = A_0 \frac{T_a}{T} \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{T_a}\right)\right] \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \left(2\pi m \frac{T_a}{T}\right)^2}} \times \cos\left(\frac{2\pi m}{T} t - \beta_m\right)\right] \quad (7.12)$$

gdzie

$$\beta_m = \arctg\left(2\pi m \frac{T_a}{T}\right),$$

$$A_0 = 1 \quad \text{dla } 0 \leq t \leq T,$$

$$A_0 = \exp(-t_0/T_a) \quad \text{dla } t > T, \quad t_0 = t - T.$$

Uważna obserwacja powyższego rozkładu pozwala na wyciągnięcie licznych wniosków. Po pierwsze: gdy są duże względne stałe czasowe T_a/T , dominująca jest składowa stała o wartości zbliżającej się do jedności, a amplitudy harmonicznnych częstotliwości okna pomiarowego są niewielkie. Gdy są krótkie stałe czasowe T_a , składowa stała maleje, a zwiększa się względny udział harmonicznnych rozkładu (o częstotliwości $2\pi m/T$). Prowadzi to do wniosku, że stosowanie rzeczywistych lub idealnych układów

różniczkujących, które odrzucają składową stałą, jest skuteczne w minimalizacji błędów pochodzących od składowej aperiodycznej, jeśli ma ona dość dużą stałą czasową.

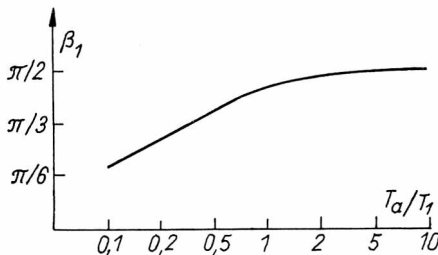
Rozkład (7.12) może także posłużyć do obliczania błędów powodowanych składową aperiodyczną podczas stosowania filtracji lub korelacji. Niech okno pomiarowe T będzie równe okresowi T_1 identyfikowanej składowej. Z charakterystyk widmowych metody splotu z funkcjami wagi sinus i cosinus wynika, że składowa stała oraz wszystkie harmoniczne są odrzucane (stłumione do zera). Tak więc z rozkładu (7.12) stłumione do zera są wszystkie składowe z wyjątkiem jednej: tej o częstotliwości składowej podstawowej. Ten jedyny czynnik błędu (jeśli sygnał ma postać (7.2)) jest dany równaniem:

$$A(t) = 2 \frac{T_a}{T_1} \frac{[1 - \exp(-T_1/T_a)]}{\sqrt{1 + \left(2\pi \frac{T_a}{T_1}\right)^2}} \cos(\omega_1 t - \beta_1) \quad (7.13)$$

gdzie $\beta_1 = \arctg\left(2\pi \frac{T_a}{T_1}\right)$.

Warto tu zauważyć, że amplituda sygnału (7.13) jest równa opisanej zależnością (7.7) wartości, określonej jako ograniczenie od góry wartości błędu (linia przerywana - (rys. 7.1b)). W istocie, gdyby zakłócenie (7.13) i sygnał użyteczny były zgodne w fazie (oba mają częstotliwość ω_1), a ponadto wartość początkowa składowej aperiodycznej nie zależała od początkowej fazy sygnału, to rzeczywiście błąd byłby równy amplitudzie sygnału danego równaniem (7.13). Ze względu na wymienione ograniczenia fazowe, błąd jest w istocie mniejszy, tak jak to oceniono poprzednio (rys. 7.1b - linia ciągła).

Zależność (7.13) pozwala także na wyjaśnienie źródeł różnicy wartości błędów składowych A_d , A_q z zastosowaniem filtrów ortogonalnych. Okazuje się, że decyduje tutaj argument β_1 , który jest funkcją stałej czasowej T_a . Jego wykres został przedstawiony na rys. 7.2. Jak widać, wartość tego argumentu dla dużych względnych stałych czasu jest bliska $\pi/2$, a następnie jego wartości zmniejszają się powoli wraz ze spadkiem T_a/T_1



Rys. 7.2. Argument pierwszej harmonicznej rozkładu w szereg Fouriera składowej aperiodycznej ((7.12), (7.13)) w zależności od jej stałej czasu
Fig. 7.2. Argument of the first harmonic of the Fourier series of decaying DC ((7.12), (7.13)) versus time constant

poniżej jedności. Owo przesunięcie fazy powoduje, że zakłócenie (7.13) przy dużych stałych czasu (powyżej jedności) jest niemal ortogonalne z funkcją cosinus i stąd bardzo małe wartości błędów A_{dn} w tym zakresie (rys. 7.1, równanie (7.5)). Spostrzeżenie to może być wykorzystane do minimalizacji błędów wywołanych składową aperiodyczną.

7.1.3. Metody minimalizacji błędów

Istnieje wiele metod minimalizacji błędów pochodzących od zakłócenia aperiodycznego. Zaliczyć do nich można:

- stosowanie układów różniczkujących lub układów odwzorowujących impedancję linii,
- stosowanie metody pomiaru opartej na rozwiązywaniu równania obwodu zwarcowego (odnosi się to tylko do pomiaru składowych impedancji).

Wadą tych metod jest górnoprzepustowy charakter filtrów realizujących wymagane operacje na sygnałach, co powoduje, że zmniejszanie błędów od zakłóceń niskoczęstotliwościowych jest "rekompensowane" zwiększeniem błędów od zakłóceń wysokoczęstotliwościowych. Opracowano metody, które są tych wad pozbawione [60], [127], [153], [155], [181].

Pierwsza z tych metod opiera się na omawianym już zastosowaniu prawie ortogonalności funkcji wagi cosinus oraz jedynej nie odrzucanej w algorytmie pełnookresowym składowej rozkładu w szereg Fouriera omawianego zakłócenia (równanie (7.13)). Zamiast wytwarzać ortogonalne składowe sygnału na podstawie funkcji wagi sinus i cosinus, stosuje się jedynie funkcję wagi cosinus (lub odpowiednią funkcję Walsha drugiego rzędu), a do ortogonalizacji wykorzystuje się opóźnienie sygnału. Składowe ortogonalne uzyskuje się więc stosownie do równań:

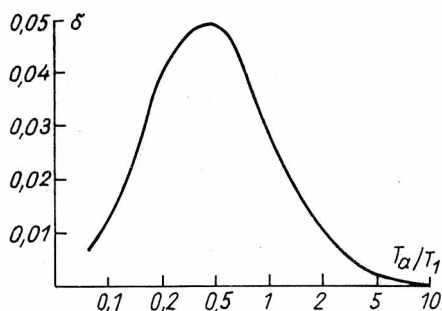
$$\begin{aligned} i_{dn}(t) &= \int_0^{T_1} i(t - \tau) \cos \omega_1 \tau d\tau \\ i_{qn}(t) &= \int_0^{T_1} i(t - \frac{T_1}{4} - \tau) \cos \omega_1 \tau d\tau \end{aligned} \quad (7.14)$$

gdzie $t \geq T_1 + T_1/4$.

Po podstawieniu $i(t)$ z równania (7.2) oraz uwzględnieniu (7.4) otrzymuje się składowe i_d oraz i_q w postaci:

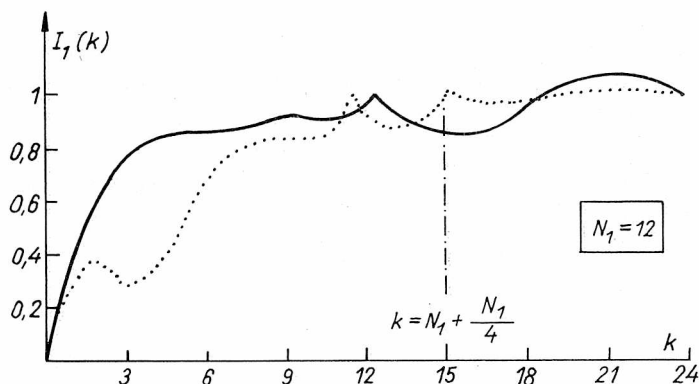
$$\begin{aligned} i_{dn}(t) &= I_1 \frac{T_1}{2} [\cos(\omega_1 t + \varphi) - \cos \varphi A_{dn}(t)] \\ i_{qn}(t) &= I_1 \frac{T_1}{2} \left[\sin(\omega_1 t + \varphi) - \cos \varphi \exp\left(\frac{\alpha T_1}{4}\right) A_{dn}(t) \right] \end{aligned} \quad (7.15)$$

gdzie $A_{dn}(t)$ jest określone w równaniu (7.2).



Rys. 7.3. Błędy powodowane składową aperiodyczną podczas pomiaru amplitudy; funkcja wagi filtru - cosinus, ortogonalizacja przez opóźnienie sygnału ((7.14), (7.15))

Fig. 7.3. Errors of magnitude measurement due to decaying DC; impulse response of the filter - cosinus; orthogonalization using signal delay ((7.14), (7.15))



Rys. 7.4. Symulacja pomiaru amplitudy prądu przy standardowej filtracji pełnookresowej z funkcjami wagi sinus i cosinus (linia ciągła) oraz metodą zmodyfikowaną (7.14) (linia przerywana); $T_a/T_1 = 1$

Fig. 7.4. Simulation of current magnitude measurement using standard full cycle filters with impulse responses sinus and cosinus - solid line and modified method (7.14), dashed line; $T_a/T_1 = 1$

Tak więc teraz błędy zależą jedynie od $A_{dn}(t)$, które jest znacznie mniejsze niż $A_{qn}(t)$ (rys. 7.1), a dla dużych stałych czasu bliskie zero. Błędy w określaniu amplitudy sygnału są w istocie jeszcze mniejsze niż $A_{dn}(t)$ ze względu na występujące, podobnie jak poprzednio, uwarunkowania fazowe. Podobnie jak poprzednio można też obliczyć ekstremum wartości błędów amplitudy powodowanych zakłóceniem aperiodycznym. Przedstawiono je na rys. 7.3 w zależności od względnej stałej czasowej T_a/T_1 . Są one wielokrotnie mniejsze niż dla metod standardowych i nie przekraczają 5%.

Błąd jest więc co najmniej trzykrotnie mniejszy, a przy niektórych stałych czasu jeszcze mniejszy (dla $T_a/T_1 = 1$ wynosi 3%, a w metodzie standardowej 15%). Na rysunku 7.4 przedstawiono rezultaty symulacji pomiaru amplitudy prądu metodą standardową oraz opisaną powyżej dla zerowej fazy początkowej prądu oraz $T_a = T_1$. Pomiar metodą standardową

przedstawiono linią ciągłą. Jak widać, zwiększenie dokładności w stanie ustalonym ($k \gg (5/4)N_1$) jest bardzo wyraźne. Jedyną wadą omawianej metody jest zwiększenie efektywnego okna pomiarowego o jedną czwartą okresu składowej podstawowej.

Po skróceniu okna pomiarowego do połowy okresu składowej podstawowej składowa błędu A_{qn} może przekraczać 100% ze względu na nieodrzućanie składowej stałej (wartość średnia odpowiedniej funkcji wagi jest różna od zera i znaczna). Składowa błędu A_{dn} jest natomiast tego samego rzędu co odpowiednie składowe dla okna pełnookresowego. Tak więc, ponieważ standardowy algorytm półookresowy z ortogonalnymi funkcjami wagi nie może być stosowany, należy zastosować ortogonalizację przez wykorzystanie opóźnionego sygnału, podobnie jak poprzednio. Wystarczy w tym celu zastosować równania (7.14) i zmniejszyć przedział całkowania do $T_1/2$. Błędy pochodzące od składowej aperiodycznej mają w tym przypadku wartości nieznacznie przewyższające te otrzymywane metodą standardową (rys. 7.1b - linia ciągła).

Algorytmy cyfrowe stosujące ortogonalizację przez opóźnienie sygnału były już omawiane w rozdz. 4, ale tu przytoczy się je jeszcze raz. Otóż postać równań (7.14) jest następująca:

$$i_{dn}(n) = \sum_{k=0}^{N_1-1} i(n-k) \cos \omega_1 T_i$$

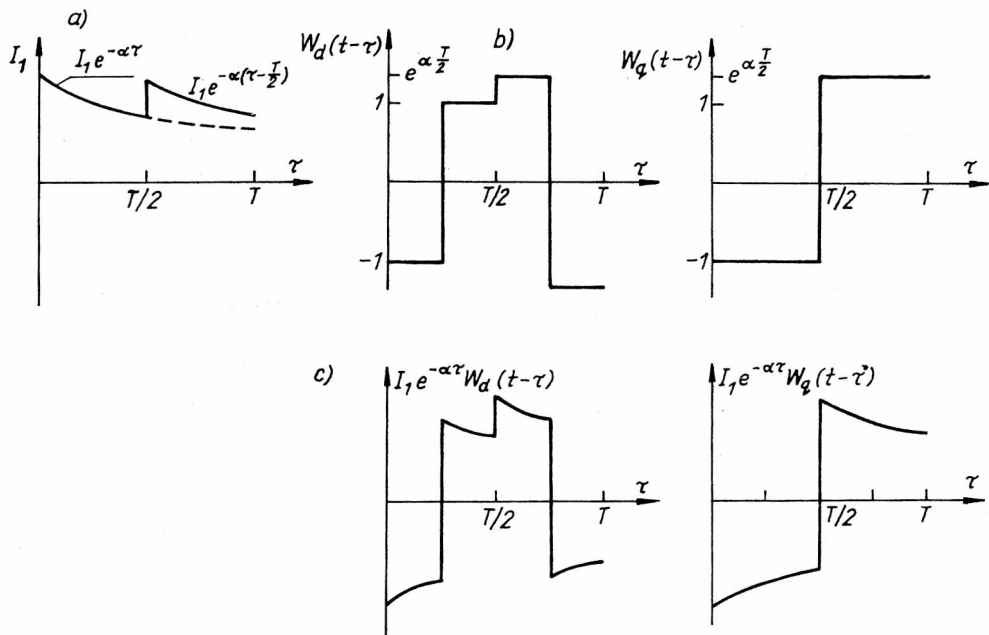
$$i_{qn}(n) = \sum_{k=0}^{N_1-1} i\left(n - \frac{N_1}{4} - k\right) \cos \omega_1 T_i$$
(7.16)

gdzie

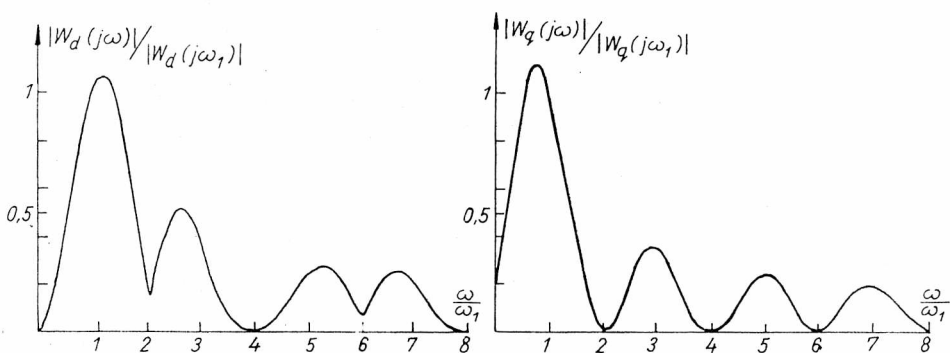
$$i(n) = I_1 [\cos(n\omega_1 T_i + \varphi) - \cos \varphi \exp(-n\alpha T_i)],$$

T_i - okres próbkowania.

Istnieje także możliwość redukcji błędu powodowanego składową aperiodyczną do zera, jeśli znana jest stała czasowa tej składowej. Otóż, aby składowa aperiodyczna mogła być odfiltrowana całkowicie, nie powinna ona zawierać składowych o częstotliwości równej częstotliwości identyfikowanego przebiegu, gdyż wtedy składowa podstawowa i składowa rozwinięcia aperiodycznego są odstrojone. Jedną z możliwości jest periodyzacja tej składowej zakłócającej wewnątrz okna pomiarowego (rys. 7.5b) [60]. Najprościej można to uzyskać przez pomnożenie funkcji wagi filtru w połowie okna pomiarowego przez funkcję $\exp(\alpha T/2)$. Zilustrowano to na przykładzie funkcji wagi, które są funkcjami Walsha (rys. 5b). W rezultacie sploty zakłócenia i funkcji wagi mają przebieg jak na rys. 7.5c, a ich całki w przedziale okna pomiarowego są zerowe. Tak więc błąd powodowany



Rys. 7.5. Ilustracja w dziedzinie czasu metody odfiltrowania składowej aperiodycznej o znanej stałej czasu: a - składowa aperiodyczna periodyzowana wewnątrz okna pomiarowego; b - zmodyfikowane funkcje wagi umożliwiające uzyskanie spłotów z zakłóceniem; c - o zerowej wartości średniej Fig. 7.5. Presentation of the method of rejection of decaying DC with known time constant: a - decaying DC periodized inside data window, b - modified impulse responses which make it possible to obtain convolution with the noise, c - having zero mean value

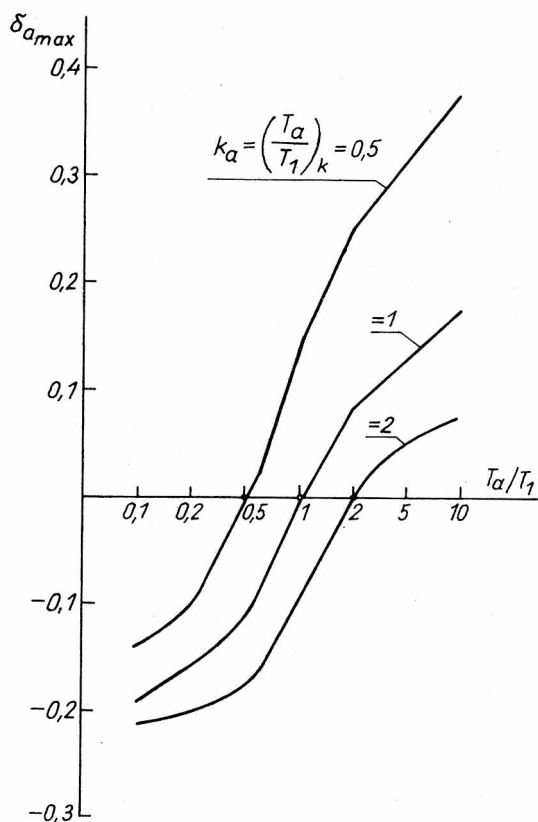


Rys. 7.6. Widma zmodyfikowanych funkcji wagi z rys. 7.5b
Fig. 7.6. Spectra of modified impulse responses from fig. 7.5b

tym zakłóceniem jest zerowy. Jest istotne, że funkcje wagi przekształcone tak jak na rys. 7.5b pozostają ortogonalne i można stosować standardowe algorytmy identyfikacji. Również widma tych skorygowanych funkcji wagi nie różnią się bardzo od widm oryginalnych funkcji wagi. Na rysunku 7.6 przedstawiono przykładowo takie widma dla funkcji Walsha z rys. 7.5b, gdy korekcji dokonano dla $T_a/T_1 = 2$ ($\alpha T_1 = 1/2$). Porównując je z widmami standardowych funkcji Walsha z rozdz. 5 widać, że istotnie różnice nie są duże w zakresie wysokich częstotliwości. Jedyna ważna różnica to niezerowe widmo $W_q(0)$, co jest zrozumiałe, gdyż funkcja wagi w_q ma niezerową wartość średnią. Tak więc skompensowanie błędu pochodzącego od składowej aperiodycznej o względnej stałej czasowej $T_a/T_1 = 2$ powoduje, że może wystąpić błąd powodowany składową stałą. W istocie kompensowanie błędu jest celowe wtedy, gdy stała czasowa zakłócenia zmienia się w niewielkim zakresie. W przeciwnym przypadku błąd maksymalny może być nawet większy niż w metodach standardowych.

7.1.4. Ocena błędów podczas stosowania filtru Kalmana

Ocena błędów wywołanych składową aperiodyczną w przypadku stosowania filtracji Kalmana dotyczy naturalnie filtru 3-stanowego. Filtr 2-stanowy zupełnie nie jest w stanie sprostać filtracji nawet składowej stałej, zresztą jeśli model sygnałowy ją zawiera, to stosowanie filtru 2-stanowego jest błędem modelowania. Tak więc dla filtru 3-stanowego (rozdz. 6) istnieje pewna oczekiwana wartość stałej czasu składowej aperiodycznej i model filtru ma parametry obliczone dla tej wartości. Jeśli jednak pewna realizacja sygnału ma inną wartość stałej czasu składowej aperiodycznej niż oczekiwana, to powstają pewne błędy, które maleją z czasem, niemniej jednak istotne pozostaje określenie ich wartości maksymalnych. Wartości te byłyby raczej trudne do obliczenia, dlatego wykonano badania symulacyjne. W badaniach tych przyjęto typowe modele zakłóceń o wariancji malejącej z czasem (rys. 6.6). Maksymalne wartości błędów badano dla czasów większych od czasu ustalania filtru dla trzech założonych wartości oczekiwanych stałych czasu, tj.: $T_a/T_1 = 2$; 1 i 0,5. Wartości tych błędów, w szerokim zakresie zmian rzeczywistej stałej czasu, pokazano na rys. 7.7. Jak widać, przy tak dużych zmianach stałej czasu wartości błędów też zmieniają się w szerokich granicach i mogą przyjmować znaczne wartości. Wykres ten wskazuje także, że racjonalne jest przyjmowanie raczej za dużych niż za małych jej wartości. Jak widać, dla $T_a/T_1 = 0,5$ błędy dla rzeczywistej stałej czasu, równej 10, wynoszą prawie 40% i bardzo wolno zanikają. Tymczasem, gdy założymy $T_a/T_1 = 2$, błędy dla dłuższych, wolno zanikających stałych czasowych są mniejsze niż 10%, a dla krótszych stałych czasowych wynoszą około 20%, ale bardzo szybko zanikają. Tak więc przy stałej czasu rzeczywistej, równej założonej ocze-



Rys. 7.7. Maksymalne błędy powodowane składową aperiodyczną w 3-stanowym filtrze Kalmana dla różnych wartości oczekiwanej stałej czasu $(T_a/T_1)_k$
 Fig. 7.7. Maximum errors due to decaying DC using 3-state Kalman filter for different expected time constant $(T_a/T_1)_k$

kiwanej wartości, pomiar jest bezbłędny, przy niewielkich odchyleniach błędy nie są duże, a dla szerokiego zakresu zmian rzeczywistych stałych czasu błędy są zbliżone do tych uzyskiwanych podczas standardowej filtracji lub korelacji fourierowskiej.

7.2. Błędy wywołane zakłóceniami oscylacyjnymi

Drugi istotny czynnik błędów pomiaru wielkości kryterialnych stanowią zakłócenia oscylacyjne sygnałów. Zakłócenia te to najczęściej sygnał o jednej dominującej częstotliwości i na ogół niezbyt dużej względnej amplitudzie (rozdz. 3 [140], [145]). Dla takich założeń można otrzymać dość zwarte, analityczne postacie błędów pomiaru różnych wielkości powodowanych przez zakłócenie prądów i (lub) napięć. W istocie głównym celem tego podrozdziału jest porównanie błędów powstających podczas stosowania

dwu wyróżnionych rodzin algorytmów; pierwszej opisanej równaniami (4.20), (4.23) i (4.25) oraz drugiej, którą opisują równania (4.27)-(4.29) (rozdz. 4). Porównanie to jest o tyle istotne, że - jak wykazano - prawie wszystkie znane algorytmy pomiaru wielkości kryterialnych można zaliczyć do jednej lub drugiej rodziny. Jeśli więc założyć, że przed zastosowaniem właściwego algorytmu pomiarowego, należącego do jednej lub drugiej rodziny, sygnały były tak samo filtrowane i ortogonalizowane, to można przez to porównanie stwierdzić, w jakim zakresie częstotliwości i który z algorytmów jest skuteczniejszy w sensie mniejszych błędów powodowanych zakłóceniem.

Do celów tej analizy wygodnym sposobem zapisu sygnałów może być przedstawienie ich w postaci wykładniczej, a sygnały takie bywają nazywane fazorami. Przyjęte zostaną następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= U_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_u)} \\ \bar{I}_1 &= I_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_i)} \\ \bar{U}_{1\tau} &= U_1 e^{j[\omega_1(t-\tau) + \varphi_u]} \\ \bar{I}_{1\tau} &= I_1 e^{j[\omega_1(t-\tau) + \varphi_i]} \\ \bar{U}_1^* &= U_1 e^{-j(\omega_1 t + \varphi_u)}\end{aligned}\quad (7.17)$$

gdzie $\bar{U}_1^*$ - wartość sprzężona do $\bar{U}_1$, podobnie $\bar{I}_1^*$ jest sprzężone z $\bar{I}_1$.

Algorytmy należące do obu omawianych rodzin mogą być, z zastosowaniem fazorów, zapisane w następującej, zwartej formie:

- równania (4.20), (4.23)

$$\begin{aligned}I_1^2(t) &= \bar{I}_1 \bar{I}_1^* \\ 2P &= \operatorname{Re} \{ \bar{U}_1 \bar{I}_1^* \} \\ 2Q &= \operatorname{Im} \{ \bar{U}_1 \bar{I}_1^* \}\end{aligned}\quad (7.18)$$

gdzie $\operatorname{Re} \{ \}$ oraz $\operatorname{Im} \{ \}$ oznaczają część rzeczywistą oraz urojoną

- równania (4.27), (4.28)

$$\begin{aligned}I_1^2(t) &= \frac{1}{2\sin \omega_1 \tau} \operatorname{Im} \{ \bar{I}_{1\tau} \bar{I}_1^* - \bar{I}_{1\tau} \bar{I}_1^* \} \\ 2P &= \frac{1}{2\sin \omega_1 \tau} \operatorname{Im} \{ \bar{U}_1 \bar{I}_{1\tau}^* - \bar{U}_{1\tau} \bar{I}_1^* \} \\ 2Q &= - \frac{1}{2\sin \omega_1 \tau} \operatorname{Re} \{ \bar{U}_1 \bar{I}_{1\tau}^* - \bar{U}_{1\tau} \bar{I}_1^* \}\end{aligned}\quad (7.19)$$

gdzie P, Q - moc czynna oraz bierna, τ - czas opóźnienia sygnału.

Równania (7.18) i (7.19) zostały określone przy założeniu niezakłóconych sygnałów, zawierających tylko napięcia i prądy o częstotliwości podstawowej. Równania te są naturalnie również podstawą do wyznaczania mierzonych wielkości wtedy, gdy napięcia lub prądy są zakłócone i wówczas rezultat jest obciążony pewnym błędem. Jeśli na przykład zakłócony jest prąd, to w równaniach (7.18) i (7.19) fazory $\bar{I}_1, \bar{I}_1^*, \bar{I}_T, \bar{I}_T^*$ trzeba zastąpić przez fazory $\bar{I}, \bar{I}^*, \bar{I}_T, \bar{I}_T^*$, które są sumą fazorów o częstotliwości podstawowej i zakłócenia. Analogicznie też postępuje się podczas zakłócenia fazora napięcia lub wtedy, gdy oba sygnały są zakłócone. Aby ocenić wartości błędów w tych warunkach, trzeba określić równania fazorów $\bar{U}, \bar{I}$, opisujących sygnały zakłócone, które są filtrowane przed obliczaniem wielkości kryterialnych. Stosowane filtry ortogonalne mają tę właściwość, że na ich wyjściu otrzymuje się składowe ortogonalne sygnały o częstotliwości podstawowej, mające tę samą amplitudę oraz sygnały o innej częstotliwości też ortogonalne, jednak o różnej amplitudzie równej $G_d(m)$ i $G_q(m)$, gdzie $G(m)$ jest unormowaną charakterystyką widmową filtrów, a m - względną częstotliwością (rozdz. 5). Gdy założymy, że do wydzielania składowych ortogonalnych napięcia oraz prądu stosuje się takie same filtry, oraz że zakłócenia mają względną częstotliwość m taką samą w prądzie i napięciu, a amplitudy ich wynoszą U_m, I_m , otrzyma się następujące sygnały wyjściowe filtrów:

$$\begin{aligned} u_d(t) &= U_1 [\cos \gamma_{1u} + k_{mu} G_d(m) \cos \gamma_{mu}] \\ u_q(t) &= U_1 [\sin \gamma_{1u} + k_{mu} G_q(m) \sin \gamma_{mu}] \\ i_d(t) &= I_1 [\cos \gamma_{1i} + k_{mi} G_d(m) \cos \gamma_{mi}] \\ i_q(t) &= I_1 [\sin \gamma_{1i} + k_{mi} G_q(m) \sin \gamma_{mi}] \end{aligned} \quad (7.20)$$

gdzie

$$\gamma_{1u} = \omega_1 t + \varphi_u,$$

$$\gamma_{1i} = \omega_1 t + \varphi_i,$$

$$\gamma_{mu} = m \omega_1 t + \varphi_{mu},$$

$$\gamma_{mi} = m \omega_1 t + \varphi_{mi},$$

$$k_{mu} = U_m/U_1, \quad k_{mi} = I_m/I_1,$$

$G_d(m), G_q(m)$ - unormowane widma filtrów,

$$m = \omega_m/\omega_1.$$

Fazor napięcia można, stosownie do równań (7.20), przedstawić następująco:

$$\bar{U} = u_d(t) + j u_q(t) = U_1 \{ e^{j\gamma_{1u}} + k_{mu} [G_d(m) \cos \gamma_{mu} + j G_q(m) \sin \gamma_{mu}] \} \quad (7.21)$$

Ponieważ widma unormowane filtrów $G_d(m)$, $G_q(m)$ mają różne wartości (z wyjątkiem szczególnych wartości m), to aby zakłócenie na wyjściu filtrów przedstawić w postaci fazora (wykładniczej), trzeba część równania (7.21) w nawiasie kwadratowym przekształcić. Po prostych przekształceniach otrzymuje się równoważną postać tego wyrażenia:

$$\begin{aligned} G_d(m) \cos \gamma_{mu} + j G_q(m) \sin \gamma_{mu} = \\ = \frac{G_d(m) + G_q(m)}{2} e^{j\gamma_{mu}} + \frac{G_d(m) - G_q(m)}{2} e^{-j\gamma_{mu}} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Szczególnie proste wyrażenia określające połowę sumy i różnicy widm unormowanych otrzymuje się, gdy stosuje się filtrację z funkcjami wagi sinus i cosinus pełno- lub półokresową (rozdz. 5). Odpowiednie równania mają teraz postać:

$$G_d(m) = S_a \pi(m-1) + S_a \pi(m+1) \quad (7.23a)$$

$$G_q(m) = S_a \pi(m-1) - S_a \pi(m+1)$$

gdzie $S_a(x) = \sin(x)/x$,

(w algorytmie półokresowym zastępuje się π przez $\pi/2$) i stąd

$$\frac{G_d(m) + G_q(m)}{2} = S_a \pi(m-1) \quad (7.23b)$$

$$\frac{G_d(m) - G_q(m)}{2} = S_a \pi(m+1)$$

Uwzględnivszy równania (7.20)-(7.23) można ostatecznie fazory zakłóconych napięć i prądów zapisać w postaci:

$$\bar{U} = U_1 \{ e^{j\gamma_{1u}} + k_{mu} [S_a \pi(m-1) e^{j\gamma_{mu}} + S_a \pi(m+1) e^{-j\gamma_{mu}}] \} \quad (7.24)$$

$$\bar{I} = I_1 \{ e^{j\gamma_{1i}} + k_{mi} [S_a \pi(m-1) e^{j\gamma_{mi}} + S_a \pi(m+1) e^{-j\gamma_{mi}}] \}$$

gdzie

$$\gamma_{1u} = \omega_1 t + \phi_u,$$

$$\gamma_{1i} = \omega_1 t + \phi_i,$$

$$\gamma_{mu} = m \omega_1 t + \phi_{mu},$$

$$\gamma_{mi} = m \omega_1 t + \phi_{mi}.$$

Fazory sprzężone do $\bar{U}$, $\bar{I}$ otrzyma się przez zastąpienie j przez $-j$, a fazory opóźnione $\bar{U}_\tau$, $\bar{I}_\tau$ ((7.17)) przez zastąpienie w argumentach wartości t przez $t - \tau$. Mierzone wartości stosownie do pierwszej i drugiej rodziny algorytmów otrzyma się ze wzorów (7.18) i (7.19) i zastąpienie tamże $\bar{U}_1$, $\bar{I}_1$ przez $\bar{U}$, $\bar{I}$ z równań (7.24).

Wartości błędów mierzonych wielkości kryterialnych w pierwszej rodzinie algorytmów otrzyma się przez podstawienie zależności (7.24) do równań (7.18). Po prostych przekształceniach uzyskuje się mierzone jednostkowe wielkości wraz z błędem na jednostkę, dane następującymi równaniami:

$$\left(\frac{I_m(t)}{I_1}\right)^2 = 1 + 2D_i \cos[\omega_1 t + \varphi_i - \alpha_i(t)] + D_i^2 \quad (7.25a)$$

$$\frac{2P_m(t)}{U_1 I_1} \cong \cos(\varphi_u - \varphi_i) + D_u \cos[\omega_1 t + \varphi_i - \alpha_u(t)] + D_i \cos[\omega_1 t + \varphi_u - \alpha_i(t)] \quad (7.25b)$$

$$\frac{2Q_m(t)}{U_1 I_1} \cong \sin(\varphi_u - \varphi_i) - D_u \sin[\omega_1 t + \varphi_i - \alpha_u(t)] + D_i \sin[\omega_1 t + \varphi_u - \alpha_i(t)] \quad (7.25c)$$

$$\frac{R_m(t)}{|\bar{Z}|} \cong \cos(\varphi_u - \varphi_i) + D_u \cos[\omega_1 t + \varphi_i - \alpha_u(t)] + D_i \cos[\omega_1 t + \varphi_u - \alpha_i(t)] - 2D_i \cos[\omega_1 t + \varphi_i - \alpha_i(t)] \quad (7.25d)$$

$$\frac{X_m(t)}{|\bar{Z}|} \cong \sin(\varphi_u - \varphi_i) - D_u \sin[\omega_1 t + \varphi_i - \alpha_u(t)] + D_i \sin[\omega_1 t + \varphi_u - \alpha_i(t)] - 2D_i \cos[\omega_1 t + \varphi_i - \alpha_i(t)] \quad (7.25e)$$

gdzie

$$D_u = k_{mu} \sqrt{Sa^2(m+1)\pi + Sa^2(m-1)\pi - 2Sa(m+1)\pi Sa(m-1)\pi \cos 2\gamma_{mu}},$$

$$D_i = k_{mi} \sqrt{Sa^2(m+1)\pi + Sa^2(m-1)\pi - 2Sa(m+1)\pi Sa(m-1)\pi \cos 2\gamma_{mi}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_u(t) = \frac{Sa(m-1)\pi - Sa(m+1)\pi}{Sa(m-1)\pi + Sa(m+1)\pi} \operatorname{tg} \gamma_{mu}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_i(t) = \frac{Sa(m-1)\pi - Sa(m+1)\pi}{Sa(m-1)\pi + Sa(m+1)\pi} \operatorname{tg} \gamma_{mi},$$

$$\gamma_{mu} = m \omega_1 t + \varphi_{mu},$$

$$\gamma_{mi} = m \omega_1 t + \varphi_{mi},$$

$$k_{mu} = U_m / U_1,$$

$$k_{mi} = I_m / I_1.$$

Najprościej można określić wartości błędów podczas pomiaru amplitudy lub kwadratu amplitudy prądu (podobnie też napięcia), wynikające z zależności (7.25a). Założywszy, że fazy składowej podstawowej i zakłócenia są niezależne, otrzymuje się maksymalną wartość błędu amplitudy prądu wynoszącą D_i . Ponieważ wartość D_i zależy od parametrów zakłócenia, to błąd będzie maksymalny przy maksymalnej wartości D_i . Można to zapisać tak:

$$\delta I_{\max} = |D_{i\max}| = |k_{mi}| \max \left\{ \| |Sa(m+1)\pi| + |Sa(m-1)\pi| \|, \| |Sa(m+1)\pi| - |Sa(m-1)\pi| \| \right\} \quad (7.26)$$

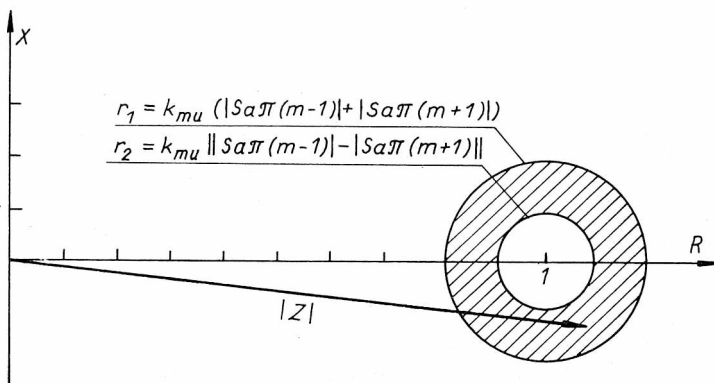
Na przykład podczas zakłócenia prądu składową o 3,5 razy większej częstotliwości i względnej dwudziestoprocentowej amplitudzie maksymalny błąd nie przekracza 4%.

W podobny sposób, przy założeniu niezależnych i dowolnych faz składowych podstawowych napięcia i prądu oraz ich zakłóceń można oszacować, że maksymalne błędy mocy czynnej i biernej (na jednostkę) wynoszą $|D_u| + |D_i|$.

Niewiele trudniejsze jest obliczenie maksymalnych błędów podczas wyznaczania rezystancji i reaktancji; można to oszacować podobnie jak poprzednio. W tym wypadku można by pokusić się o wykreślenie trajektorii błędów na płaszczyźnie R-X. Najłatwiej uzyskać trajektorę błędów powodowanych zakłóceniami napięcia.

Łatwo tu zauważyć, że jeśli zakłócenia prądu są zerowe, to można napisać następujące równanie na podstawie (7.25a) i (7.25c):

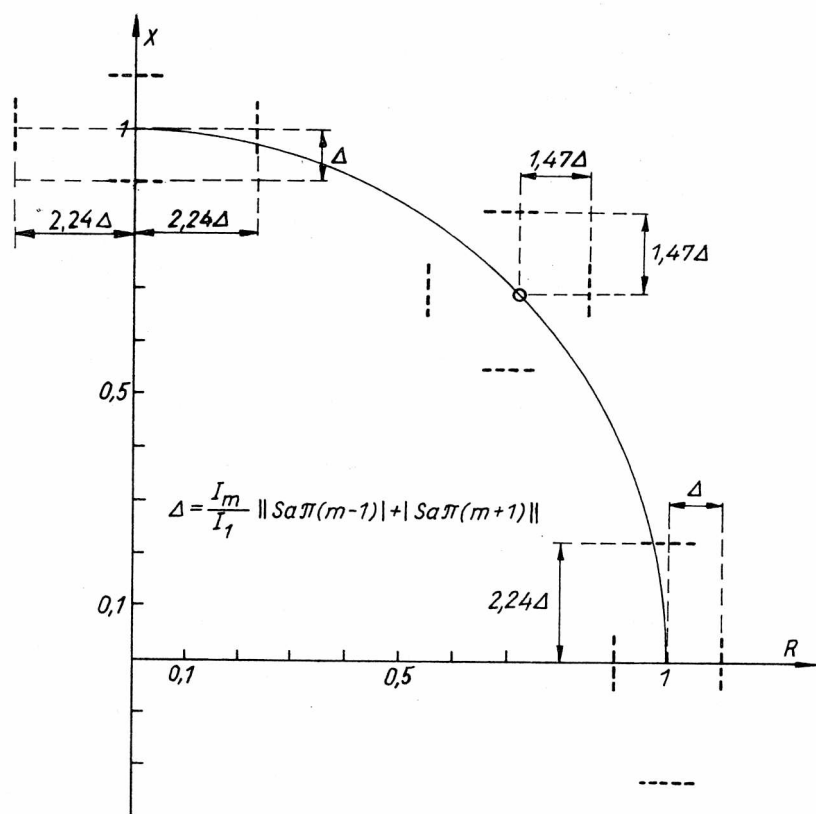
$$\left[\frac{R_m(t)}{|Z|} - \cos(\varphi_u - \varphi_i) \right]^2 + \left[\frac{X_m(t)}{|Z|} - \sin(\varphi_u - \varphi_i) \right]^2 = D_u^2 \quad (7.27)$$



Rys. 7.8. Obszar, wewnątrz którego znajduje się mierzony wektor $|Z|$ podczas zakłócenia napięcia składową oscylacyjną
Fig. 7.8. Region of measured vector $|Z|$ on impedance plane when voltage noise includes oscillatory component

Tak więc trajektoria błędów znajduje się wewnątrz dwu współśrodkowych okręgów, tak jak zaznaczono to na rys. 7.8. Zakreskowana powierzchnia na tym rysunku to właśnie obszar, gdzie znajduje się koniec wektora impedancji, którego początek znajduje się w początku układu współrzędnych. Ten pierścień błędu wykreślono tutaj dla zerowej różnicy faz napięcia i prądu (składowej podstawowej), lecz pierścień ten nie ulega zmianie podczas zmian tej różnicy faz, a jedynie zmienia się położenie środka tych okręgów (równanie (7.27)).

W razie zakłóceń prądu lub też napięcia i prądu narysowanie takich trajektorii byłoby bardzo trudne, gdyż zbyt wiele parametrów ma wpływ na ich kształt. Można jednakże wyznaczyć maksymalne wartości błędów rezystancji i reaktancji w zależności od różnicy faz napięcia i prądu. Zakre-



Rys. 7.9. Zakresy błędów pomiaru rezystancji i reaktancji w zależności od przesunięcia fazy między napięciem a prądem podczas zakłócenia prądu składową oscylacyjną

Fig. 7.9. Ranges of errors of resistance and reactance measurement for different phase shift between voltage and current and when current noise includes oscillatory component

sy tych błędów spowodowanych zakłóceniami prądu przedstawiono na rys.7.9 dla $\varphi_u - \varphi_i = 0, \pi/4$ oraz $\pi/2$. Jak widać, wraz ze wzrostem tego kąta błędy rezystancji rosną, a błędy reaktancji maleją.

Takie same wartości błędów maksymalnych rezystancji i reaktancji osiąga się dla różnicy faz $\pi/4$. Podobny wykres można by sporządzić także dla zakłóceń prądu i napięcia, lecz łatwo te maksymalne błędy ocenić na podstawie równania (7.25).

Wartości błędów mierzonych wielkości kryterialnych według równań drugiej rodziny algorytmów otrzyma się po podstawieniu fazorów (7.24) do równań (7.19). Po przekształceniach otrzyma się mierzone jednostkowe wielkości zawierające błąd, które dane są równaniami:

$$\left[\frac{I_m(t)}{I_1} \right]^2 \cong 1 + 2C_i \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_i - \beta_i(t) \right] \quad (7.28a)$$

$$\frac{2P_m(t)}{U_1 I_1} \cong \cos(\varphi_u - \varphi_i) + C_u \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_i - \beta_u(t) \right] + \\ + C_i \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_u - \beta_i(t) \right] \quad (7.28b)$$

$$\frac{2Q_m(t)}{U_1 I_1} \cong \sin(\varphi_u - \varphi_i) - C_u \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_i - \beta_u(t) \right] + \\ + C_i \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_u - \beta_i(t) \right] \quad (7.28c)$$

$$\frac{R_m(t)}{|\bar{Z}|} \cong \cos(\varphi_u - \varphi_i) + C_u \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_i - \beta_u(t) \right] + \\ + C_i \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_u - \beta_i(t) \right] - \\ - 2C_i \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_i - \beta_i(t) \right] \quad (7.28d)$$

$$\frac{X_m(t)}{|\bar{Z}|} \cong \sin(\varphi_u - \varphi_i) - C_u \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_i - \beta_u(t) \right] + \\ + C_i \sin \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_u - \beta_i(t) \right] - \\ - 2C_i \cos \left[\omega_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + \varphi_i - \beta_i(t) \right] \quad (7.28e)$$

gdzie

$$C_u = k_{mu} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 \cos 2 \left(\gamma_{mu} - m \omega_1 \frac{T}{2} \right)},$$

$$C_i = k_{mi} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 \cos 2 \left(\gamma_{mi} - m \omega_1 \frac{T}{2} \right)},$$

$$\operatorname{tg} \beta_u(t) = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \operatorname{ctg} \left(\gamma_{mu} - m \omega_1 \frac{T}{2} \right),$$

$$\operatorname{tg} \beta_i(t) = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \operatorname{ctg} \left(\gamma_{mi} - m \omega_1 \frac{T}{2} \right),$$

$$S_1 = S a \pi (m - 1) \frac{\sin \left(\frac{m+1}{2} \omega_1 \tau \right)}{\sin(\omega_1 \tau)},$$

$$S_2 = S a \pi (m + 1) \frac{\sin \left(\frac{m-1}{2} \omega_1 \tau \right)}{\sin(\omega_1 \tau)},$$

$$\gamma_{mu} = m \omega_1 t + \varphi_{mu},$$

$$\gamma_{mi} = m \omega_1 t + \varphi_{mi},$$

τ - czas opóźnienia sygnałów.

Jak można zauważyć, ogólne postacie równań (7.25) i (7.28) są bardzo do siebie podobne, a pewne różnice dotyczą mniej lub bardziej istotnych szczegółów związanych z parametrami, a zwłaszcza wartością opóźnienia τ . Tak więc na przykład błąd w określeniu amplitudy ma wartość maksymalną wynoszącą C_i (poprzednio D_i). Przy tym ta wartość jest osiągana dla innej fazy φ_i ze względu na opóźnienie $\tau/2$ oraz wartość $\beta_i(t)$ różną od $\alpha_i(t)$. To jest akurat nieco mniej istotne, natomiast ważne jest to, że maksymalne wartości C_i są różne od maksymalnych wartości D_i . A konkretniej: ta wartość maksymalna jest teraz iloczynem względnej amplitudy zakłócenia i sumy bezwzględnych wartości S_1 i S_2 (poprzednio występowała tu suma wartości bezwzględnych funkcji $S a$). Wartości tych dwu funkcji (S_1 i S_2) są, jak można zauważyć z ich równań w opisie wzorów (7.28), większe niż funkcji $S a$, i to tym większe, im mniejsza jest wartość opóźnienia τ . Przykładowo: jeśli opóźnienie τ jest takie, że $\omega_1 \tau$ jest równe $\pi/6$ (opóźnienie o jedną próbkę przy częstotliwości próbkowania 600 Hz), to S_1 i S_2 mogą być maksymalnie dwukrotnie większe niż odpowiednie funkcje $S a$. Ostatecznie, w omawianym przykładzie błędy maksymalne z zastosowaniem drugiej rodziny algorytmów będą także w przybliżeniu dwukrotnie większe niż z zastosowaniem pierwszej z nich dla częstotliwości zakłócenia bliskiej częstotliwości Nyquista, to jest równej połowie częstotliwości próbkowania. Przy niższych częstotliwościach zakłócenia będą one mniej niż dwukrotnie większe, a co jest bardzo istotne w pewnym zakresie częstotliwości, mogą być mniejsze niż w pierwszej rodzinie algorytmów. Dotyczy to częstotliwości zakłócenia mniejszych od częstotliwości podstawowej. Jak widać z równań określających S_1 i S_2 , są one wtedy mniejsze od odpowiednich wartości $S a$ i właśnie dlatego błędy są mniejsze.

W podsumowaniu można stwierdzić, że istotną cechą wyróżniającą algorytmy pierwszej i drugiej rodziny jest to, że te pierwsze mają charakter

dolnoprzepustowy, a drugie górnoprzepustowy. Ta uwaga o charakterze ogólnym pozwala przewidzieć typ filtrów wstępnych napięcia i prądu, które powinny poprzedzać stosowanie jednej lub drugiej rodziny algorytmów,

Rozważania te można sprowadzić do kilku wniosków:

1. Powodowane zakłóceniami błędy pomiaru wielkości kryterialnych zależą od wstępnej filtracji sygnałów oraz stosowanej rodziny algorytmów. Tak więc filtry używane do wydzielania składowych ortogonalnych sygnałów powinny mieć inne charakterystyki widmowe zależne od tego, czy wielkości kryterialne oblicza się na podstawie pierwszej, czy drugiej rodziny algorytmów.

2. W pierwszym przypadku należy zwrócić uwagę przede wszystkim na skuteczną wstępną filtrację zakłóceń aperiodycznych, a nawet stosować ewentualne metody specjalne tłumiące to zakłócenie.

3. Podczas stosowania drugiej rodziny algorytmów należy uprzednio skutecznie stłumiać zakłócenia wysokoczęstotliwościowe, gdyż one mają swój główny udział w błędach pomiaru wielkości kryterialnych.

7.3. Przykłady symulacji pomiaru amplitudy różnymi metodami

W celu zilustrowania skutków stosowania różnego rodzaju filtracji i ich porównania dokonano symulacyjnych badań pomiaru amplitudy prądów i napięć. Świadomie zdecydowano się na badania najprostszych wielkości, gdyż wówczas znacznie bardziej przejrzysta staje się ocena wpływu różnego rodzaju zakłóceń na ich przebiegi w stanie przejściowym i ustalonym.

W badaniach tych przyjęto modele sygnałowe, które zmieniają się skokowo w chwili $t = 0$ powstania zaburzenia. Sygnały te są opisane następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos \omega_1 t \quad \text{dla } t < 0 \\ u(t) &= 0,5 [\cos \omega_1 t + h_1 \cos \omega_p t] \quad \text{dla } t \geq 0 \end{aligned} \quad (7.29)$$

gdzie $h_1 = 0,25$, $\omega_p = 3,5 \omega_1$.

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 \quad \text{dla } t < 0, \\ i(t) &= \cos(\omega_1 t + \varphi) - \cos \varphi \exp(-t/T_a) + \\ &\quad + h \sin \varphi \sin \omega_p t \quad \text{dla } t \geq 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

gdzie

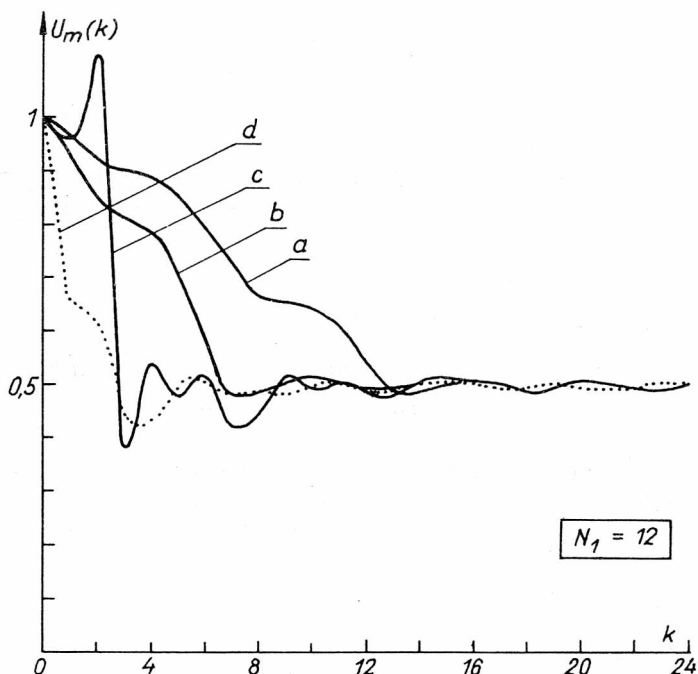
$$T_a = 2T_1, \quad (T_1 = 2\pi / \omega_1),$$

$$h = 0,1,$$

$$\omega_p = 3,5 \omega_1.$$

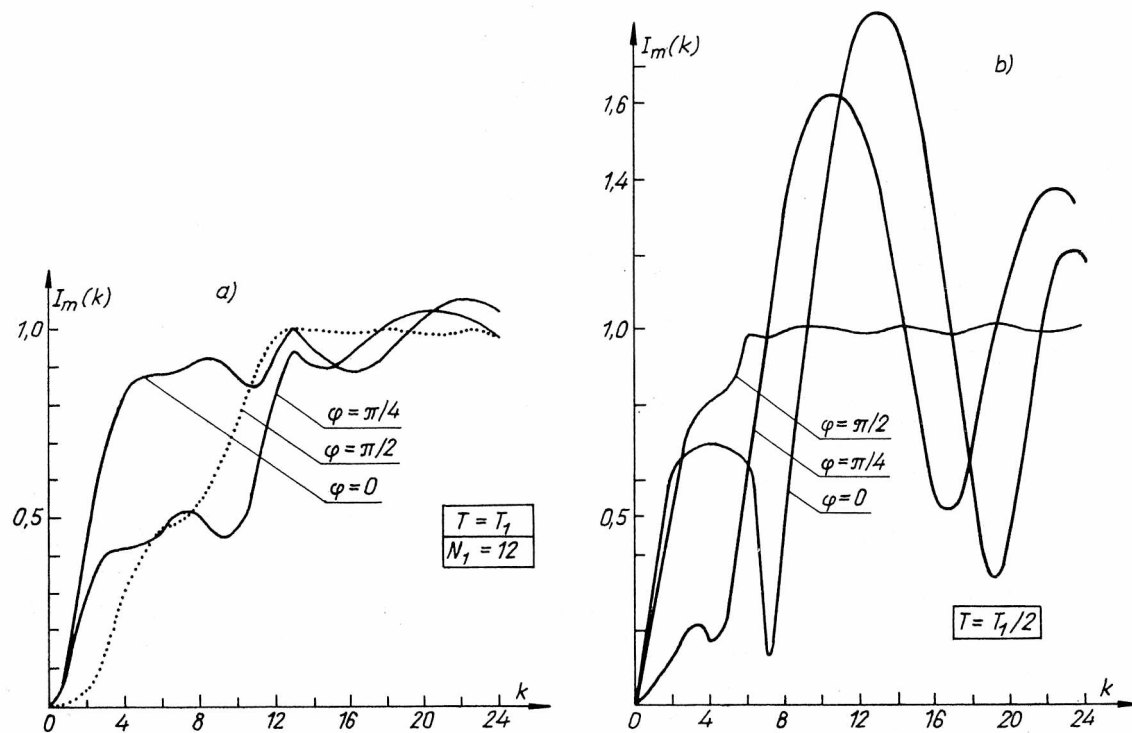
Symulacyjne pomiary amplitud tak określonych napięć i prądów dokonano z zastosowaniem czterech sposobów ortogonalnej filtracji sygnałów:

- a) filtracja rekursywna z funkcjami wagi sinus i cosinus; okno pomiarowe długości równej okresowi składowej podstawowej $T = T_1$ (p. 5.2.2),
- b) jak wyżej, lecz okno pomiarowe równe połowie okresu składowej podstawowej $T = T_1/2$,
- c) filtracja o zmiennym oknie pomiarowym; podczas pomiaru prądu wariancie metody z kompensacją składowej stałej (p. 5.5),
- d) filtracja Kalmana - filtr 2-stanowy podczas pomiaru napięcia i 3-stanowy podczas pomiaru prądu (rozdz. 6).



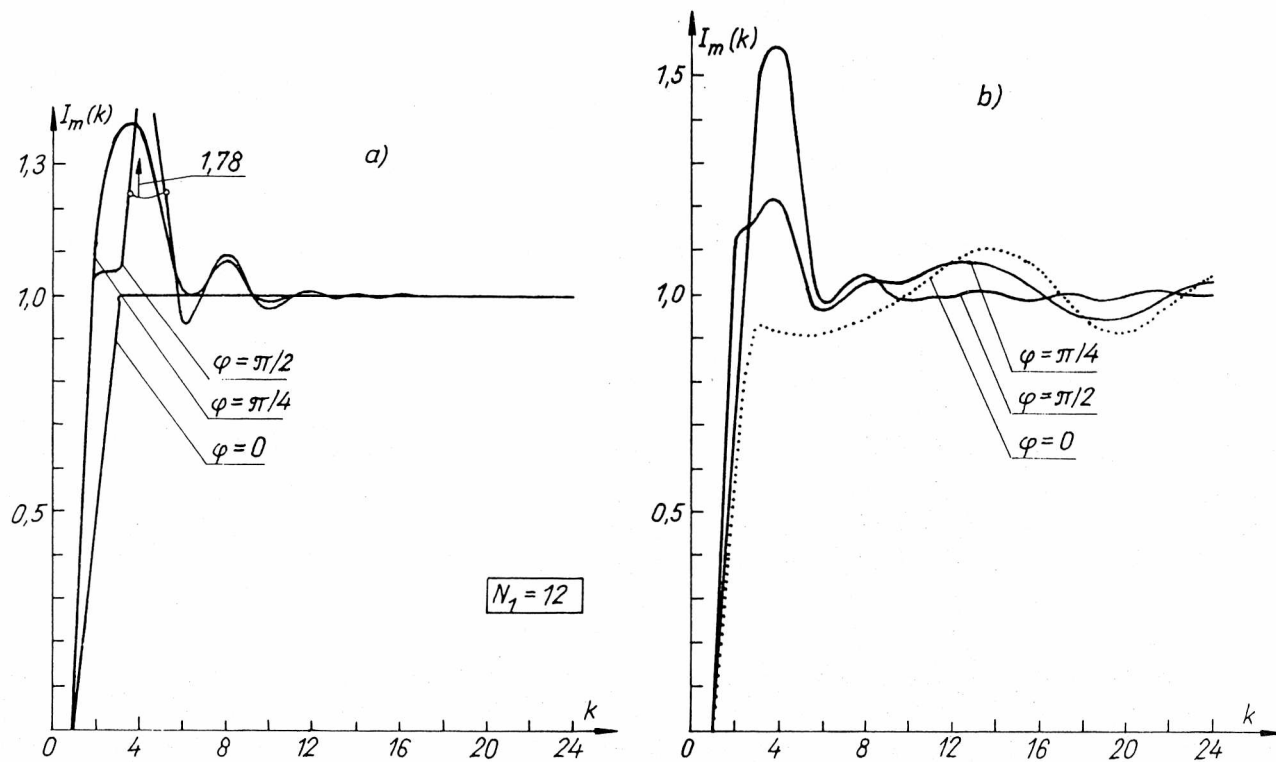
Rys. 7.10. Przebiegi symulacji pomiaru amplitudy napięcia z wykorzystaniem: a - standardowej filtracji pełnookresowej, b - półokresowej, c - metody filtracji o zmiennym oknie, d - filtracji Kalmana
 Fig. 7.10. Simulation of voltage magnitude measurement using: a - standard full cycle filters, b - half cycle filters, c - filters with variable data window, d - Kalman filter

Rezultaty symulacji pomiaru amplitudy napięcia przedstawiono na rys. 7.10, a pomiaru prądu na rys. 7.11 i 7.12. Jak widać na rys. 7.10, stosowanie różnych metod filtracji napięcia ma swoje odbicie przede wszystkim w charakterze i parametrach stanu przejściowego po skokowej zmianie sygnału. Podczas stosowania pełno- i półokresowej filtracji nierekursywnej (a,b) mierzona amplituda wolno i monotonicznie zmierza od jednej wartości ustalonej (1) do nowej wartości ustalonej (0,5). Czas trwania tego stanu przejściowego jest równy długości okna pomiarowego i wynosi w jed-



Rys. 7.11. Przebiegi symulacji pomiaru amplitudy prądu z wykorzystaniem standardowej filtracji:
a - pełnookresowej, b - półokresowej

Fig.7.11. Simulation of current magnitude measurement using: a - standard full cycle filters,
b - half cycle filters



Rys. 7.12. Przebiegi symulacji pomiaru amplitudy prądu z wykorzystaniem: a - 3-stanowego filtra Kalmana, b - zmodyfikowanej metody filtracji o zmiennym oknie pomiarowym

Fig. 7.12. Simulation of current magnitude measurement using: a - 3-state Kalman filter, b - modified filter with variable data window

nym przypadku jeden okres, a w drugim pół okresu składowej podstawowej (odpowiednio T_1 i $T_1/2$). Błędy w stanie ustalonym mają w obu przypadkach zbliżone wartości i są niewielkie. Zupełnie inna jest dynamika stanu przejściowego pomiaru podczas stosowania dwu pozostałych metod filtracji, to znaczy metody zmiennego okna pomiarowego (c) i filtracji Kalmana (d). Otóż teraz przejście między jednym a drugim stanem ustalonym jest bardzo szybkie i niemonotoniczne, lecz z niewielkimi oscylacjami wokół wartości ustalonej. W zasadzie po jednej czwartej okresu składowej podstawowej jest już osiągany ten nowy stan ustalony przy kilkuprocentowym błędzie dynamicznym, który szybko zanika. Błędy stanu ustalonego powodowane zakłóceniami są bardzo małe (około 1,5%) – podobnie jak z zastosowaniem poprzednich metod filtracji. Są one najmniejsze podczas stosowania filtru Kalmana, lecz różnice w porównaniu z pozostałymi metodami są niewielkie.

Przebiegi symulacji pomiaru amplitudy prądu przedstawiono na rys. 7.11 i 7.12. Parametrem tych wykresów była faza sygnału opisana równaniem (7.30). Przyjęto trzy wartości fazy: $\varphi = 0$, $\pi/4$ oraz $\pi/2$. Odpowiada to przypadkom, w których prąd zawiera jedynie zakłócenie aperiodyczne ($\varphi = 0$), jedynie zakłócenie oscylacyjne ($\varphi = \pi/2$) oraz jest sumą obu tych odpowiednio wyważonych zakłóceń. Zmiana tego parametru pozwala więc dodatkowo na ocenę wrażliwości omawianych metod na różne zakłócenia sygnału.

Na rysunku 7.11 zilustrowano przebiegi symulacji podczas filtracji z funkcjami wagi sinus i cosinus w pełnookresowym (rys. 7.11a) i półokresowym (rys. 7.11b) oknie pomiarowym. Jak można zauważyć, stan przejściowy jest równy długości okna pomiarowego, a jego przebieg zależy od fazy początkowej φ . Błędy stanu ustalonego zależą przede wszystkim od zakłócenia aperiodycznego. Gdy φ ma wartość $\pi/2$, błędy pomiaru są bardzo małe, gdyż sygnał jest zakłócony jedynie składową oscylacyjną (7.30), która ma niedużą amplitudę i jest skutecznie filtrowana. Dla dwu pozostałych wartości fazy dominuje już zakłócenie aperiodyczne i błędy pomiaru wyraźnie rosną. W algorytmie pełnookresowym ($T = T_1$) błędy te mają wartości maksymalne takie, jak obliczono w p. 7.2 i są przy stałej czasowej $T_a/T_1 = 2$ mniejsze niż 10%. Inaczej jest w algorytmie półokresowym, gdzie błędy sięgają 100%, co oznacza, że standardowy algorytm półokresowy nie może być stosowany podczas pomiaru amplitudy prądu, jak też innych wielkości kryterialnych wykorzystujących składowe ortogonalne prądu, bez specjalnych metod zmniejszających zawartość zakłócenia aperiodycznego.

Na rys. 7.12 pokazano rezultaty symulacji pomiaru amplitudy prądu podczas stosowania filtracji o zmiennym oknie pomiarowym (rys. 7.12b) i filtracji Kalmana (rys. 7.12a). Można zauważyć na obu tych rysunkach dominujący wpływ zakłócenia oscylacyjnego na przerosty stanu przejściowego.

Otóż w miarę zbliżania się fazy sygnału do $\pi/2$ rośnie udział tego zakłócenia (dla $\varphi = \pi/2$ istnieje tylko zakłócenie oscylacyjne) i wzrastają też przerosty, które są nieco większe podczas stosowania filtracji Kalmana. Błędy w stanie ustalonym zależą natomiast przede wszystkim od zakłócenia aperiodycznego. Wprawdzie nie obserwuje się ich w filtrze Kalmana, lecz wynika to z tego, że przyjęto identyczne wartości oczekiwanej i rzeczywistej (w równaniu (7.30)) stałej czasowej. Mogą one być różne i wówczas wartości błędów będą zbliżone do tych rozważanych w p. 7.2.4. Tak więc, gdy dominuje zakłócenie oscylacyjne ($\varphi = \pi/2$) stan ustalony jest, przy znacznych przerostach, osiągany po czasie około pół okresu składowej podstawowej, ale błędy w stanie ustalonym są niewielkie. Z kolei, gdy dominuje zakłócenie aperiodyczne ($\varphi = 0$), wówczas błędy w stanie ustalonym mają wartości zbliżone do błędów osiąganych podczas standardowej filtracji pełnookresowej (rys. 7.11a), ale stan przejściowy nie ma przerostów i jest bardzo krótki, bo trwa tylko jedną czwartą okresu składowej podstawowej.

Badania symulacyjne pozwalają na sformułowanie kilku wniosków:

1. Najszybszy pomiar amplitud prądu i napięcia uzyskuje się z zastosowaniem filtracji Kalmana oraz filtracji metodą zmiennego okna pomiarowego. Pewną przewagę ma tutaj ostatnia metoda, gdyż nie wymaga żadnych danych a priori w przeciwieństwie do filtracji Kalmana, której stosowanie musi być poprzedzone długimi seriami badań modelowych w celu określenia parametrów projektowych filtru.
2. Stosowanie tak szybkich metod pomiaru wymaga jednak zwrócenia uwagi na znaczne przerosty w stanach przejściowych, powodowane przez zakłócenia oscylacyjne i redukcję lub usunięcie powstałych błędów dynamicznych, na przykład przez stosowanie zwłoki czasowej.
3. Gdy tak szybki pomiar nie jest wymagany, wówczas może być stosowana standardowa filtracja pełnookresowa. Stosowanie filtracji półokresowej do pomiaru wielkości kryterialnych z udziałem prądu jest uwarunkowane efektywnym ograniczeniem zakłócenia aperiodycznego.
4. Dynamika pomiaru wielkości kryterialnych jest zdeterminowana dynamiką toru prądowego.
5. Źródłem największych błędów pomiaru w stanie ustalonym jest zakłócenie aperiodyczne.

8. WNIOSKI

1. W pracy rozważono cyfrowe pomiary wielkości kryterialnych zabezpieczeń elektroenergetycznych, oparte na napięciach i prądach o częstotliwości podstawowej. Istotne trudności w przeprowadzeniu pomiaru w odpo-

wiednio krótkim czasie i z wymaganą dokładnością związane są z silnym zakłóceniem sygnałów użytecznych stacjonarnymi i niestacjonarnymi składowymi o różnych nieznanymi częstotliwościach, których źródłem jest powstałe zaburzenie w chronionym obiekcie. Sprostanie stawianym wymaganiom metrologicznym powoduje konieczność stosowania złożonych metod teoretycznych, środków technicznych oraz odpowiedniej rozbudowy systemu pomiarowego.

2. Podstawą w przygotowaniu optymalnej metody pomiarowej jest założenie adekwatnego do rzeczywistości modelu sygnałowego, zawierającego sygnał użyteczny i model zakłóceń. Wyodrębniono trzy takie modele sygnałowe: deterministyczny, częściowo i całkowicie probabilistyczny. Przygotowanie odpowiedniego modelu sygnałowego wymaga stosownego nakładu pracy, innego w każdym przypadku. Scharakteryzowanie modelu deterministycznego nie wymaga właściwie wiedzy a priori, gdy tymczasem określenie parametrów pozostałych dwu modeli jest bardzo czasochłonne. Konieczne jest tutaj stosowanie zaawansowanych metod modelowania cyfrowego oraz odpowiednie przygotowanie teoretyczne do umiejętnej oceny parametrów tych modeli sygnałowych. Przyjęte modele implikują różne metody optymalizacji, a także inne ich miary.

3. W cyfrowym przetwarzaniu sygnałów wchodzących w skład procesu pomiaru wielkości kryterialnych wyodrębniono trzy etapy: filtrację, ortogonalizację oraz właściwy algorytm pomiarowy. Filtracja ma na celu stłumienie, w wymaganym stopniu, zakłóceń w stosunku do sygnału użytecznego, ortogonalizacja - rozszczepienie sygnałów użytecznych na składowe umożliwiające możliwie proste obliczenie wielkości kryterialnych przez właściwy algorytm.

4. Ortogonalizacja jest procesem wydzielania składowych zespolonego wektora będącego funkcją czasu, zwanego też fazorem, lub też jego rzutów na wzajemnie prostopadłe osie w chwili $t = 0$ (szczegółowe definicje podano w zakończeniu p. 4.1). Ortogonalizacja może być realizowana oddzielnie lub też łącznie z filtracją przez zastosowanie pary filtrów ortogonalnych. W pierwszym przypadku wykorzystuje się liniową kombinację opóźnionych sygnałów lub dyskretne różniczkowanie. Metody wyodrębnionej ortogonalizacji stanowią, jak stwierdzono, filtry cyfrowe o różnie ukształtowanych górnoprzepustowych charakterystykach widmowych.

5. Klasyczne metody cyfrowej nierekursywnej filtracji ortogonalnej oraz korelacji stanowią skuteczny sposób jednoczesnej ortogonalizacji sygnałów użytecznych i filtracji składowych zakłócających. Ich stosowanie nie wymaga żadnych danych a priori. Filtry wydzielające składowe ortogonalne powinny mieć funkcje wagi, z których jedna jest parzystą, a druga nieparzystą funkcją czasu w odniesieniu do okna pomiarowego. Klasyczna korelacja, jak stwierdzono, zapewnia wydzielanie składowych ortogonalnych, jeśli okno pomiarowe jest całkowitą wielokrotnością półokresu identyfikowanej składowej podstawowej sygnału.

Algorytmy realizujące filtrację lub korelację są proste, a także mogą być znacznie modyfikowane i upraszczane przez stosowanie postaci rekursywnych lub odpowiednio ukształtowanych funkcji wagi filtrów, na przykład funkcji Walsha, Haara i innych. Ich charakterystyki widmowe mają korzystny dolnoprzepustowy przebieg, których szczegółowe parametry zależą od wymaganej długości okna pomiarowego. Składowe zakłócające najskuteczniej są tłumione w algorytmach pełnookresowych z funkcjami wagi sinus i cosinus.

Ważną cechą wszystkich rozpatrywanych filtrów ortogonalnych jest liniowość fazy w funkcji częstotliwości. Właściwość ta może być zastosowana do specjalnych typów filtrów, na przykład filtrów składowych symetrycznych. Stosowanie opracowanych metod specjalnych umożliwia minimalizację błędów powodowanych zakłóceniami aperiodycznymi, co jest szczególnie ważne, gdyż jest to źródło największych błędów.

W klasycznej filtracji nierekursywnej oraz korelacji po skokowej zmianie sygnałów występują stany przejściowe, których czas trwania jest równy długości okna pomiarowego. Charakter przebiegu tego stanu przejściowego zależy od szczegółowych parametrów sygnałów, a wielkość mierzona może być w tak szerokim zakresie, że jest w tym przedziale mało użyteczna. W omawianych w pracy zastosowaniach stan przejściowy jest ważnym elementem charakterystyki filtracji, a także algorytmu pomiarowego.

6. Czas trwania stanu przejściowego można skrócić przez stosowanie metod zmiennego okna pomiarowego, odwzorowania krzywych lub optymalizujących stan przejściowy. W każdym z tych przypadków konieczna jest dodatkowa informacja dotycząca modelu sygnałowego, jego własności i parametrów. Najmniej informacji a priori potrzeba w metodach zmiennego okna i odwzorowania krzywych. Istotna jest tu jedynie taka znajomość modelu sygnałowego (deterministycznego lub częściowo probabilistycznego), aby właściwie dobrać funkcje aproksymujące. Jeśli są one dobrane optymalnie, to pomiar będzie odbywał się w zasadzie bez stanu przejściowego, a charakterystyki widmowe będą poprawiać się wraz ze zwiększaniem długości okna i dostarczaniem nowych informacji, aż do osiągnięcia widma odpowiadającego temu dla ustalonego okna pomiarowego. Omawiane metody zapewniają podobne własności statyczne i dynamiczne, jak te wykorzystujące filtrację Kalmana, do mniejszej i łatwiej dostępnej wiedzy a priori.

Filtr Kalmana zastosowany do ortogonalizacji i filtracji sygnałów wymaga przechowywania najmniejszego ciągu danych, gdyż potrzebne są tylko ich bieżące wartości. Filtr ten, jeśli starannie zaprojektowany, wykazuje bardzo korzystne cechy dynamiczne, wyrażające się bardzo krótkim stanem przejściowym. Jego charakterystyka widmowa jest niezbyt korzystnie ukształtowana i wykazuje na ogół słabe tłumienie składowych zakłócających. Zależy ona w pewnym stopniu od parametrów projektowych filtru i mo-

że być poprawiona kosztem dynamiki filtracji. Algorytm realizujący ten filtr jest prosty i nie wymaga dużego nakładu obliczeń. Tłumienie zakłócenia aperiodycznego z zastosowanie filtra 3-stanowego jest - w wyniku zmiany stałej czasu tego zakłócenia w szerokim zakresie - gorsze niż w filtrach fourierowskich, a błędy nim powodowane są niewielkie tylko wtedy, gdy rzeczywista stała czasu odchyła się nieznacznie od wartości oczekiwanej. Zwłaszcza nie jest odrzucana składowa stała i może ona być źródłem znacznych błędów pomiaru.

7. Cyfrowe algorytmy pomiaru wielkości kryterialnych sprowadzono do dwu podstawowych rodzin algorytmów, niezależnie od stosowanych metod filtracji i ortogonalizacji. Umożliwiło to znaczną redukcję ich zbioru oraz ograniczenie liczby testów i badań przeprowadzonych w celu określenia ich własności. Na podstawie tych dwu rodzin można utworzyć dużą liczbę szczegółowych algorytmów o pożądanych cechach. Algorytmy pierwszej rodziny ((4.20)-(4.25)) wykazują dolnoprzepustowe charakterystyki filtracyjne i wykorzystują próbki sygnałów w tych samych dyskretnych chwilach. Algorytmy drugiej rodziny ((4.27)-(4.29)) wykazują górnoprzepustowe charakterystyki filtracyjne oraz wprowadzają dodatkowe opóźnienie pomiaru, gdyż wymagają użycia odpowiednio opóźnionych składowych ortogonalnych sygnałów. Ogólnie więc algorytmy pierwszej rodziny są lepiej dostosowane do tłumienia wysokoczęstotliwościowych zakłóceń sygnałów, a drugiej - do tłumienia zakłóceń o niskiej częstotliwości i (lub) składowej aperiodycznej.

Fundamentalnymi wielkościami w obu rodzinach algorytmów są: amplitudy oraz kwadraty amplitud napięć i prądów, tudzież moce czynna i bierna. Składowe impedancji są obliczane jako iloraz odpowiednich z tych wielkości.

8. Podstawową przyczyną błędów pomiaru są zakłócenia sygnałów. Miary i sposoby minimalizacji błędów są różne, zależne od przyjętego modelu sygnałowego. Jak stwierdzono, największe i najtrudniejsze w minimalizacji są błędy powodowane zakłóceniami aperiodycznymi sygnałów. Trajektorie błędów złożonych wielkości kryterialnych, takich jak składowe impedancji, są złożonymi krzywymi zamkniętymi na płaszczyźnie R-X. Ich wartości maksymalne, zależne od stosowanych metod filtracji oraz rodziny algorytmów pomiarowych określono na podstawie błędów pomiaru prostych wielkości kryterialnych wchodzących w algorytm pomiarowy.

W każdej ze stosowanych metod filtracji i algorytmach pomiaru ma swoje odzwierciedlenie znany dylemat szybkość-dokładność. Oznacza on, że zwiększenie dokładności może następować tylko przez wydłużenie czasu pomiaru (okno filtrów) i odwrotnie - każde skrócenie czasu pomiaru spowoduje zwiększony błąd, jakiegokolwiek byłoby jego miary.

LITERATURA

- [1] ALEGRIA C.M., MALIK O.P., COSTA E., Performance comparison of Fourier and Kalman filter techniques for transmission line impedance. IEE Conference Publication No. 249. Developments in Power System Protection. London 1985.
- [2] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B., Filtracja optymalna. Warszawa, WNT, 1984.
- [3] ANTONIOU A., Digital filters: analysis and design. McGraw-Hill, 1979.
- [4] BEAUCHAMP K., Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi. Warszawa, WNT, 1978.
- [5] BENDAT J.S., CORNELL C.A., Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. Warszawa, PWN, 1976.
- [6] BONARD P.B., BASTIDE J.C., A prototype of multiprocessor based distance relays. IEEE Trans. PAS-101. 1982, No. 2, s. 491-498.
- [7] BOX G.E.P., JENKINS G.M., Analiza szeregów czasowych. Warszawa, PWN, 1983.
- [8] BOZIC S.M., Digital and Kalman filtering. London, Edward Arnold Ltd., 1979.
- [9] BRACEWELL R., Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania. Warszawa, WNT, 1968.
- [10] BRADLEY D.A., GRAY C.B., O'KELLY P., Transient compensation of current transformers. IEEE Trans. PAS-97, 1978, No. 4, s. 1264-1271.
- [11] BREINGAN M.D., CHEN M.M., GALLAN T.F., The laboratory investigation of a digital system for the protection of transmission lines. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 2, s. 320-368.
- [12] BROOKS A.W., Distance relaying using last-squares estimates of voltage, current and impedance. Proceedings of the IEEE PICA Conference, IEEE Pub. No. 77 CH 1131-2-PWR, 1977, s. 394-402.
- [13] BURKE J.J., LAWRENCE D.J., Characteristics of fault currents on distribution systems. IEEE Trans. PAS-103, No. 1, 1984, s. 1-6.
- [14] CARR J., JACKSON R., Frequency domain analysis applied to digital transmission line protection. IEEE Trans. PAS-94, 1975, No. 4, s. 1157-1166.
- [15] CARTER R.P., Ultra high speed relay for EHV/UHV lines based on directional wave detection principles. IEE Conference Publication No. 185. Developments in Power System Protection. London 1980, s. 168-170.
- [16] CHAMIA M., Transient behaviour of associated instrument transformers and high-speed distance and directional comparison protection. CIGRE SC 34 Colloquium, Melbourne 1979.
- [17] CHAMIA M., LIBERMAN S., Ultra high speed relay for EHV/UHV transmission lines - development, design and application. IEEE Trans. PAS-97, 1978, No. 6, s. 2104-2116.
- [18] CHUDY T., IŻYKOWSKI J., MARCZONEK S., WISZNIEWSKI A., Correction of errors of protective current and voltage transformers. Jugoslovanski Simpozij Elektroenergetiskih Sistemow. Lubljana 1984, s. 35-42.
- [19] CHU H.Y., CHEN S.L., Fault impedance calculation algorithms for transmission line distance protection. Electric Power System Research, 1986, No. 10, s. 69-75.

- [20] CLULEY J.C., Computer interfacing and on line operation. London, Edward Arnold Ltd, 1975.
- [21] CORY B.J., RANJBAR A.M., Analogue and digital filtering techniques for digital relaying schemes. 12-th Universities Power Engineering Conference. Brunel University. Uxbridge 1977.
- [22] Criteria for the evaluation of digital impedance methods of transmission line protection. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 1, s. 126-135.
- [23] CROSSELEY P.A., McLAREN P.G., Distance protection based on travelling waves. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 9, s. 2971-2983.
- [24] DAHLQUIST G., BJOERCK A., Metody numeryczne. Warszawa, PWN, 1983.
- [25] DASGUPTA K.S., MALIK O.P., HOPE G.S., Digital impedance protection using a Kalman filter. Proceedings of the Eight Power System Computation Conference, Helsinki 1984, s. 1135-1141.
- [26] DASGUPTA K.S., MALIK O.P., HOPE G.S., Kalman filtering approach to impedance protection. Transactions of the Engineering and Operating Division of the Canadian Electrical Association, Montreal, Vol. 22, Pt. 4, 1983, Paper No. 83-SP-171.
- [27] DASH P.K., PUTHAL B., KHAWAS T.K., Microprocessor based power system monitoring and protection. Second International Symposium on Security of Power System Operation. Wrocław 1981, s. 243-249.
- [28] DAVALL P.W., AU YEUNG G., A software design for a computer based impedance relay for transmission line protection. IEEE Trans. PAS-99, 1980, No. 1, s. 235-245.
- [29] DAWID Z., SOWA P., WINKLER W., Wyższe harmoniczne w prądzie wtórnym konwencjonalnych przekładników prądowych. W: Podstawy teorii nowoczesnej automatyki elektroenergetycznej, Pr. nauk. Inst. Energoelekt. Pwr. Nr 66, Wrocław 1985, s. 33-40.
- [30] DESIKACHAR K.V., SINGH L.P., Digital travelling wave protection of transmission lines. Electric Power System Research, 1984, No. 7, s. 19-28.
- [31] DOMMEL H.W., MICHELS J.M., High speed relaying using travelling wave transient analysis. IEEE PES Winter Meeting, IEEE Pub. No. 78 CH 1295-5 PWR, Paper No. A 78 214-9, New York 1978.
- [32] ELLIOT D.F., RAO K.R., Fast transforms. Algorithms, analyses, applications. New York-London, Academic Press, 1982.
- [33] ENGLER F., LANZ O.E., HANGGLI M., BACCHINI G., Transient signals and their processing in an ultra high-speed directional relay for EHV/UHV transmission line protection. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 6, s. 1463-1473.
- [34] EYKHOFF P., Identyfikacja w układach dynamicznych. Warszawa, PWN, 1980.
- [35] FAKRUDDIN D.B., PARTHASARATHY K., JENKINS L., Comparative evaluation of signal processing algorithms for power system protection. International Conference on Computers, Systems and Signal Processing. BANGALORE, 1984.
- [36] FAKRUDDIN D.B., PARTHASARATHY K., JENKINS L., Transmission line protection using half-cycle Haar algorithm. W: Systemy elektroenergetyczne, eksploatacja i rozwój. Pr. nauk. Instytut. Energoelekt. Pwr. Nr 65, Wrocław 1985, s. 220-225.
- [37] Fault-induced wave distortion of interest to relay engineers. IEEE Committee Report. IEEE Trans. PAS-104, 1985. No. 12, s. 3574-3585.
- [38] FRANKS L.E., Teoria sygnałów, Warszawa, PWN, 1975.

- [39] GABEL R.A., ROBERTS R.A., Sygnały i systemy liniowe. Warszawa, WNT, 1978.
- [40] GALLAN T.F., BREINGAN W.D., CHEN M.M., A digital system for directional comparison relaying. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 3, s. 948-956.
- [41] GILBERT J.G., SHOVLIN R.J., High speed transmission line fault impedance calculation using a dedicated minicomputer. IEEE Trans. PAS-94, 1975, No. 3, s. 872-883.
- [42] GILBERT J.G., UDREN A.A., SACKIN M., The development and selection of algorithms for relaying of transmission lines by digital computers. Power System Control and Protection. New York, Academic Press, 1978, s. 83-127.
- [43] GILCREST G.B., ROCKEFELLER G.D., UDREN E.A., High-speed distance relaying using a digital computer. Part I - system description. IEEE Trans. PAS-91, 1972, No. 3, s. 1235-1243.
- [44] GIRGIS A.A., BROWN R.G., Adaptive Kalman filtering in computer relaying: fault classification using voltage models. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 5, s. 1168-1177.
- [45] GIRGIS A.A., A new Kalman filtering based digital distance relay. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 9, s. 3471-3479.
- [46] GIRGIS A.A., BROWN R.G., Application of Kalman filtering in computer relaying. IEEE Trans. PAS-100, 1981, No. 7, s. 3387-3397.
- [47] GIRGIS A.A., BROWN R.G., Modelling of fault - induced noise signals for computer relaying application. IEEE Trans. PAS-102, 1983, Nr 9, s. 2831-2841.
- [48] GIRGIS A.A., HAM F.M., A new FFT - based digital frequency relay for load shedding. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 2, s. 433-439.
- [49] GIRGIS A.A., HWANG T.L.D., Optimal estimation of voltage phasors and frequency deviation using linear and nonlinear Kalman filtering: theory and limitations. IEEE Trans. PAS-103, 1984, No.10, s. 2943-2952.
- [50] HOPE G.S., UMAMAHESWARAN V.S., Sampling for computer protection of transmission lines. IEEE Trans. PAS-93, 1974, No. 5, s.1522-1534.
- [51] HOPE G.S., MALIK O.P., DASH P.K., A new algorithm for impedance protection of transmission lines. IEEE PES Summer Meeting, 1979, Paper No. A79 413-416.
- [52] HOPE G.S., MALIK O.P., RASMY M.E., Digital transmission line protection in real time. IEE Proc. 123, 1976, s. 1349-1353.
- [53] HORTON J.W., The use of Walsh function for high speed digital relaying. IEEE PES Summer Meeting, Publication No. CH 1034-8 PWR, Paper No. A 75 582-7, San Francisco 1975.
- [54] HOSEMAN G., ŁOBOS T., Ermittlung der Symmetrischen Komponenten durch abtastalgorithmen. Archiv für Elektrotechnik, 1985, Vol. 68, No. 1, s. 1-16.
- [55] IŻYKOWSKI J., ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., WISZNIEWSKI A., Kształtowanie charakterystyk filtrów sygnałów wejściowych szybkich zabezpieczeń elektroenergetycznych. W: Podstawy teorii nowoczesnej automatyki elektroenergetycznej, Pr. nauk. Inst. Energoelekt. PWR. Nr 66, Wrocław 1985, s. 63-70.
- [56] IŻYKOWSKI J., ROSOŁOWSKI E., SEBASTIAN R., SZAFRAN J.I., Synteza filtrów przeznaczonych do analizy sygnałów. W: Podstawy teorii nowoczesnej automatyki elektroenergetycznej, Pr. nauk. Inst. Energoelekt. PWR. Nr 66, Wrocław 1985, s. 71-77.

- [57] IŻYKOWSKI J., ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Zabezpieczenia elektroenergetyczne jako układy decyzyjne. IV międzynarodowa konferencja naukowa nt. Aktualne problemy automatyki w energetyce, Gliwice 1985, Cz. A, s. 56-68.
- [58] IŻYKOWSKI J., SZAFRAN J.I., ROSOŁOWSKI E., Korekcja błędów przejściowych pojemnościowego przekładnika napięciowego. IV międzynarodowa konferencja naukowa nt. Aktualne problemy automatyki w energetyce, Gliwice 1985, Cz. A, s. 439-448.
- [59] IŻYKOWSKI J., SZAFRAN J.I., ROSOŁOWSKI E., Korrelationsalgorithmen der Identifizierung von den Grossen im elektroenergetischen System. VII Wissenschaftliche Konferenz für Energiewirtschaft. Ingenieurhochschule Zittau, 1985, H. III, s. 28-30.
- [60] IŻYKOWSKI J., SZAFRAN J.I., WISZNIEWSKI A., Korelacyjna identyfikacja sygnałów. Rozprawy Elektrotechniczne, T. XXXII, Z. 3, Warszawa 1986, s. 869-891.
- [61] JEYASURYA B., SMOLIŃSKI W.J., Design and testing of microprocessor based distance relay. IEEE Trans. PAS-103, 1984, No. 5, s. 1104-1110.
- [62] JEYASURYA B., SMOLIŃSKI W.J., Identification of a best algorithm for digital distance protection of transmission lines. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 10, s. 3358-3369.
- [63] JEYASURYA B., VU T.H., SMOLIŃSKI W.J., Determination of transient apparent impedances of faulted transmission lines. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 10, s. 3370-3378.
- [64] JOHNS A.T., EL-ALAILY A.A., New distance protective relay with improved coverage for high-resistance earth faults. Proceedings IEE, Vol. 124, 1977, No. 4, s. 349-355.
- [65] JOHNS A.T., MARTIN M.A., Fundamental digital approach to the distance protection of EHV transmission lines. Proceedings IEE, No. 125(5), 1978, s. 377-384.
- [66] JOHNSON N.G., SACHDEW M.S., WOOD H.C., Use of the Kalman filtering technique for power system protection - an insight. IEE Conference Publication No. 249, Developments in Power System Protection, London 1985.
- [67] KACZOREK T., Teoria układów regulacji automatycznej. Warszawa, WNT, 1977.
- [68] KEZUNOVIC M., Digital protective relaying algorithms and systems - an overview. Electric Power System Research, 1981, No. 4, s. 167-180.
- [69] KEZUNOVIC M., CAIN J.T., PERUNICIC B., Digital protective relaying algorithm sensitivity study and evaluation. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 3, No. 3, July 1988, s. 912-923.
- [70] KEZUNOVIC M., PERUNOVIC B., KRESO S., Digital algorithms for parameter estimation in distance protection. IV międzynarodowa konferencja naukowa nt. Aktualne problemy automatyki w energetyce, Gliwice 1985, Cz. A, s. 201-214.
- [71] KOGLIN H.J., ŁOBOS T., Distanzschutz mit Mikrorechnern. ETZ-Archiv, 1981, Bd. 3, H. 6, s. 169-177.
- [72] KOGLIN H.J., SCHLABBACH J., Application of microprocessor as a digital protection relays. Advantages and Problems - from Electronics to Microelectronics. W.A. Kaiser and W.E. Proebster, North-Holland Publishing Company 1980, s. 508-512.
- [73] KOLLA S.R., Application of block pulse functions for signal recognition in power system relays. IEEE Trans. on Power Delivery, 1987, No. 12, s. 1695-1696.

- [74] KOREJWO E., SYNAL B., TROJAK J., Short HV transmission line protection problems. IEE Conference Publication, No. 185, Developments in Power System Protection. London 1980, s. 196-220.
- [75] KOUUDA T., HAYASHI T., New protection algorithm for digital control systems. Paper presented at CIGRE SC 34 Colloquium, Melbourne, 1979.
- [76] KUDO H., WATANABE A., SEO K., OHURA Y., MATSUZAWA K., Development of new distance relays to cope with natural frequency transients in UHV/EHV transmission system. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 12, s. 3518-3523.
- [77] KULESZA W., Systemy widmowej analizy danych cyfrowych, Warszawa, WKiŁ, 1984.
- [78] KUMAR ASHOK B.S., Time delay compensation for high speed digital protection. IEE Trans. on Power Delivery, PWRD-1, 1986, No. 4, s. 68-73.
- [79] LAHTI B.P., Systemy telekomunikacyjne, Warszawa, WNT, 1972.
- [80] LAU K.P., NILSSON S.L., KOENIG D.F., UDREN E.A., ALLGUREN B.J., Pros and cons of integrating protection and control in transmission substations. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 5, s. 1207-1225.
- [81] LAYCOCK G.K., McLAREN P.G., REDFERN M.A., Signal processing techniques for power system protection applications. IEE Conference Publication No. 125, Modern Developments in Protection, London 1975, s. 284-290.
- [82] LONG R.W., GELOPULOS D., Component transformations - eigenvalue analysis succinctly defines their relationships. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 10, s. 4055-4063.
- [83] LUCKETT R.G., MUNDAY P.J., MURRAY B.E., A substation based computer for control and protection. IEE Conference Publication No. 125. Modern Developments in Protection, London 1975, s. 252-260.
- [84] ŁADNIAK L., Faktoren zur Beurteilung des elektroenergetischen Digitalschutzes. III Interdisziplinäre Zentrale Wissenschaftliche Konferenz der Studenten und jungen Wissenschaftler "Energietechnik und Energiewirtschaft", Ingenieurhochschule Zittau 1986.
- [85] ŁADNIAK L., Metod oceny izmeritelnych cifrovych algoritmov distancjonnych zaščit. Konferencja nt. Chraneni elektroenergetických zařízení ve výrobe a rozvodu elektrické energie. Brno 1987, s. 62-69.
- [86] ŁADNIAK L., Statystyczno-decyzyjna metoda oceny algorytmów pomiarowych cyfrowych zabezpieczeń odległościowych. Praca nie publ., Bibl. Inst. Energoelekt. Pwr., Wrocław 1987.
- [87] ŁADNIAK L., SYNAL B., Problemy oceny cyfrowych zabezpieczeń odległościowych. Konferencja nt. Podstawy teorii rozwoju układów elektroenergetycznych, Jabłonna 1985.
- [88] ŁOBOS T., Algorytmy cyfrowej identyfikacji zwarć w liniach elektroenergetycznych. Przegląd Elektrotechniczny, 1982, Nr 1-4, s. 26-30.
- [89] ŁOBOS T., Non-recursive methods for on-line estimation of the fundamental waveforms of signals using Kalman filter theory. 3-rd European Signal Processing Conference, Haga 1986, s. 993-996.
- [90] ŁOBOS T., Non-recursive methods for on-line estimation of voltages and currents and symmetrical components using Kalman filter theory. Electric Power System Research, Vol. 9, No. 3, Nov. 1985, s. 243-252.
- [91] ŁOBOS T., Uproszczone algorytmy dla cyfrowych zabezpieczeń odległościowych. III międzynarodowa konferencja naukowa nt. Aktualne problemy automatyki w energetyce, Gliwice 1979, s. 270-278.
- [92] ŁOBOS T., KOGLIN H.J., Investigation of fast algorithms for digital line protections. Proceedings of the 6-th Power System Computation Conference, Darmstadt 1978, s. 620-628.

- [93] LOBOS T., SCHNEIDER E., EICHHORN K., Digital methods for on-line estimation of the basic components of signals in electrical power systems. 9-th Power System Computation Conference, Lizbona 1987, s. 739-745.
- [94] MANN B.J., MORRISON I.F., Digital calculation of impedance for transmission line protection. IEEE Trans. PAS-90, 1971, No. 1, s. 270-279.
- [95] MANN B.J., MORRISON I.F., Relaying a three-phase transmission line with a digital computer. IEEE Trans. PAS-90, 1971, No. 2, s. 742-750.
- [96] MARTIN M.A., JOHNS A.T., Developments in distance protection for power lines using the finite transform processing principle. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 177-181.
- [97] McINNES A.D., MORRISON I.F., Real time calculation of resistance and reactance for transmission line protection by digital computer. Electrical Engineering Transactions, Institute of Engineers, Melbourne 1971, Vol. EE7, No. 1, s. 16-23.
- [98] McLAREN P.G., REDFERN M.A., Fourier series techniques applied to distance protection. IEE Proc. No. 122, 1975, s. 1301-1305.
- [99] MEDTCH J.S., Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach losowych. Warszawa, WNT, 1975.
- [100] MIKINO J., MIKI Y., Study of operating principles and digital filters for protective relays with digital computer. IEEE Winter Power Meeting, Paper No. C 755 197-9, New York 1975.
- [101] MIKRUT M., PILCH Z., WINKLER W., Laboratorium elektroenergetycznej automatyki zabezpieczeniowej. Gliwice, Wyd. Pol. Śląskiej, 1988.
- [102] MIR M., McCLEER P.J., Simulation methods for optimum performance estimation of analog and computer impedance relays. IEEE Trans. PAS-103, 1984, No. 6, s. 1142-1154.
- [103] MONSEU M., Evaluation of characteristics and performance of power system protection relays and protective system. CIGRE Report No. 34-07, Paris 1984.
- [104] MURTY Y.V.V.S., SMOLINSKI W.J., Design and implementation of digital differential relay for a 3-phase power transformer based on Kalman filtering theory. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 3, No. 2, April 1988, s. 525-533.
- [105] OGATA K., Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania. Warszawa, WNT, 1974.
- [106] OKAMURA M., ANDOW F., MITANI I., OKITA Y., MASUI M., Development of new relays with significantly improved performance against badly distorted transient waveforms. IEEE Trans. PAS-99, 1980, No. 4, s. 1426-1436.
- [107] OKAMURA M., ANDOW F., SUZUKI S., Improved phase comparison relaying with higher performance. IEEE Trans. PAS-99, 1980, No. 2, s. 522-527.
- [108] PAINTHANKER Y.G., SANT M.T., A new algorithm for relaying and fault location based on autocorrelation of travelling waves. Electric Power System Research, Vol. 8, No. 2, March 1985, s. 179-185.
- [109] PENG Z., LI M.S., WU C.Y., CHENG T.C., NING T.S., A dynamic state space model of an MHO distance relay. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 12, s. 3558-3564.
- [110] PERKOWSKI P., Technika symulacji cyfrowej. Warszawa, WNT, 1980.

- [111] PHADKE A.G., HLIBKA T., ADAMIAK M.G., IBRAHIM M., THORP J., A microcomputer based ultra-high-speed distance relay: field tests, IEEE Trans. PAS-100, 1981, No. 4, s. 2026-2036.
- [112] PHADKE A.G., HLIBKA T., IBRAHIM M., A digital computer system for EHV substations: analysis and field tests. IEEE Trans. PAS-95, 1976, No. 1, s. 291-301.
- [113] PHADKE A.G., IBRAHIM M., HLIBKA T., Fundamental basis for distance relaying with symmetrical components. IEEE Trans. PAS-96, 1977, No. 2, s. 635-645.
- [114] PHADKE A.G., THORP J.S., ADAMIAK M.G., A new measurement technique for tracking voltage phasors, local system frequency and rate change of frequency. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 5, s. 1025-1038.
- [115] PILCH Z., SAUCZEK M., WINKLER W., Generation and transformation harmonics and oscillations in current and potential transformers. 12-th Universities Power Engineering Conference, Brunel University, Uxbridge UK, 1977, Va 5.4, s. 1-5.
- [116] Power system harmonics: an overview. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 8, s. 2455-2460.
- [117] PROULX R., CREVIER D., A new iterative short-circuit calculation algorithm. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 8, s. 2681-2685.
- [118] RAHMAN M.A., DASH P.K., DOWNTON E.R., Digital protection of power transformer based on weighted least square algorithm. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 11, s. 4204-4210.
- [119] RAMAMOORTY M., A note on impedance measurement using digital computers. IEE-IERE Proc. (India), 1971, No. 9(6), s. 243-247.
- [120] RANJBAR A.M., CORY B.J., An improved method for the digital protection of high voltage transmission lines. IEEE Trans. PAS-94, 1975, No. 2, s. 544-550.
- [121] RANJBAR A.M., CORY B.J., Filters for digital protection of long transmission lines. IEEE Summer Power Meeting, Paper No. A 79 416-9, Vancouver 1979.
- [122] REDFERN M.A., ELKATEB M.M., WALKER E.P., An investigation into the effects of travelling wave phenomena on the performance of distance relay. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection. London 1980, s. 269-273.
- [123] RICHARDS G.G., OWEN T.T., An accurate fault location estimator for transmission lines. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 4, s. 945-949.
- [124] ROCKEFELLER G.D., Fault protection with a digital computer. IEEE Trans. PAS-88, 1969, No. 4, s. 438-464.
- [125] ROCKEFELLER G.D., UDREN E.A., High-speed distance relaying using a digital computer. Pt II - Test results. IEEE Trans. PAS-91, 1972, No. 3, s. 1234-1258.
- [126] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Application of median filters to fast signal recognition. International Symposium on Electric Devices. Circuits and Systems. Kharagpur 1987.
- [127] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Nowa metoda filtracji zakłóceń aperiodycznych. W: Algorytmy cyfrowych zabezpieczeń elektroenergetycznych, Pr. nauk. Inst. Energoelekt. PWr. Nr 76, Wrocław 1987, s. 83-93.
- [128] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Rekursywne i nierekursywne algorytmy identyfikacji parametrów sygnałów. Materiały konferencji nt. Metody komputerowe w automatyce i elektrotechnice, Częstochowa 1986, Z. III, s. 24-32.

- [129] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Wybrane zagadnienia z teorii filtracji i korelacji. W: Teoria cyfrowych systemów zabezpieczeń, Pr. nauk. Inst. Energoelekt. PWr., Nr 70, Wrocław 1986, s. 87-103.
- [130] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., IŻYKOWSKI J., Metoda cyfrowego określania miejsca zwarcia w linii elektroenergetycznej z wykorzystaniem sygnału analitycznego. IV międzynarodowa konferencja naukowa nt. Aktualne problemy automatyki w energetyce, Gliwice 1985, Cz.A, s. 225-234.
- [131] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., SEBASTIAN R., Szybki pomiar wartości skutecznej prądu i napięcia. Materiały konferencji nt. Metody komputerowe w automatyce i elektrotechnice, Częstochowa 1986, Z. I, s. 91-97.
- [132] SACHDEV M.S., BARIBEAU M.A., A new algorithm for digital impedance relays. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 6, s. 2232-2240.
- [133] SACHDEV M.S., GIRAY M.M., A least error squares technique for determining power system frequency. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 2, s. 437-443.
- [134] SACHDEV M.S., WOOD H.C., JOHNSON N.G., Kalman filtering applied to power system measurements for relaying. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 12, s. 3565-3573.
- [135] SAKAGUCHI T., A statistical decision theoretic approach to digital relaying. IEEE Trans. PAS-99, 1980, No. 5, s. 1918-1926.
- [136] SANDERSON J.W.H., KWONG W.S., WONG C.C., Microprocessor based distance relaying - some design considerations. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 127-132.
- [137] SCHWEITZER E.O., ALIAGA A., Digital programmable time-parameter relay offers versatility and accuracy. IEEE Trans. PAS-99, 1980, No. 1, s. 152-157.
- [138] SCHWEITZER E.O., FLECHSIG A.J., An efficient directional distance algorithm for digital computer relaying. IEEE PES Summer Meeting, 1977, IEEE Publ. No. 77 CH 1193-2 PWR, Paper No. A 77 725-5.
- [139] SCHWEPPE F.C., Układy dynamiczne w warunkach losowych, Warszawa, WNT, 1978.
- [140] SCHULTZ R.G., SMITH R.A., HICKEY G.L., Calculation of maximum harmonic currents and voltages on transmission lines. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 4, s. 817-821.
- [141] SLEMON G.R., ROBERTSON D.T., RAMAMOORTY M., High speed protection of power systems based on improved power system models. CIGRE paper 31-09, Paris 1969.
- [142] SMOLIŃSKI W., An algorithm for digital impedance calculation using a single PI section transmission line model. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 5, s. 1546-1551.
- [143] St.-JACQUES A.L., SANTERRE G., A multiprocessor based distance relay: design features. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 12, s. 3842-3849.
- [144] STEIGLITZ K., Wstęp do systemów dyskretnych. Warszawa, WNT, 1975.
- [145] SWIFT G.W., The spectra of fault induced transients. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 3, s. 940-947.
- [146] SZABATIN J., Podstawy teorii sygnałów. Warszawa, WKiŁ, 1982.
- [147] SZAFRAN J.I., An accurate method of signal recognition. International Conference on Computers, Systems and Signal Processing. Bangalore 1984.

- [148] SZAFRAN J.I., Charakterystyki dwustanowego filtra Kalmana w dziedzinie czasu i częstotliwości. W: Teoria cyfrowych systemów zabezpieczeń. Pr. nauk. Inst. Energoelekt. PWR. Nr 79, Wrocław 1988.
- [149] SZAFRAN J.I., Dynamika metody korelacyjnej rozpoznawania sygnałów z funkcjami Walsha. Materiały IX Sympozjum nt. Zastosowanie maszyn matematycznych w elektrotechnice, Łódź 1984, s. 333-338.
- [150] SZAFRAN J.I., Identyfikacja przebiegów zniekształconych metodą korelacji z sygnałem prostokątnym. Sympozjum AGH nt. Metody matematyczne w elektrotechnice, Zakopane 1983, s. 364-373.
- [151] SZAFRAN J.I., Metoda szybkiej analizy sygnałów elektrycznych. Archiwum Elektrotechniki, T. XXXIV, Z. 131/132-1/2, 1985, Warszawa 1986.
- [152] SZAFRAN J.I., IŻYKOWSKI J., Korrelationsanalysator der Harmonischen. VII Wissenschaftliche Konferenz für Energiewirtschaft. Ingenieurhochschule Zittau, 1985, Z. III, s. 93-96.
- [153] SZAFRAN J.I., IŻYKOWSKI J., ROSOŁOWSKI E., Ocena granicznych możliwości filtracji zakłóceń aperiodycznych. Międzynarodowe sympozjum nt. Systemy elektroenergetyczne - eksploatacja i rozwój. Pr. nauk. Inst. Energoelekt. PWR., Nr 65, Wrocław 1985, s. 180-185.
- [154] SZAFRAN J.I., ROSOŁOWSKI E., IŻYKOWSKI J., Estymacja sygnałów zakłóconych losowo w zastosowaniu do automatyki elektroenergetycznej. Systemy elektroenergetyczne - eksploatacja i rozwój. Pr. nauk. Inst. Energoelekt. PWR., Nr 65, Wrocław 1985, s. 225-234.
- [155] SZAFRAN J.I., ROSOŁOWSKI E., Fast signal recognition for power system protection. 2-nd International Symposium on Measurement of Electrical Quantities. Warszawa 1987.
- [156] TAKAGI T., BABA J., UEMURA K., SAKAGUCHI T., Fault protection based on travelling wave theory. Part II - Sensitivity analysis and laboratory test. IEEE PES Winter Meeting, IEEE Publication No. 78 CH 1295-5-PWR, Paper No. A 78 220-6, 1978.
- [157] TAKAGI T., YAMAKOSHI Y., BABA J., UEMURA K., SAKAGUCHI T., A new algorithm of an accurate fault location for EHV/UHV transmission lines. Part I - Fourier transformation method. IEEE Trans. PAS-100, 1981, No. 3, s. 1316-1322.
- [158] TAKAGI T., YAMAKOSHI Y., BABA J., UEMURA K., SAKAGUCHI T., A new algorithm of an accurate fault location for EHV/UHV transmission lines: part II - Laplace transform method. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 3, s. 564-573.
- [159] TAKAGI T., YAMAKOSHI Y., YAMAMURA M., KONDOW R., MATSUSHIMA T., Development of a new type fault locator using the one terminal voltage and current data. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 8, s. 2892-2898.
- [160] TANAKA K., KANOU K., HARUMOTO Y., MORI T., SUZUKI K., GOUDA T., Application of microprocessors to the control and protection system at substation. IEEE Trans. PAS-99, 1980, No. 1, s. 344-351.
- [161] The distribution system of year 2000. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 8, s. 2485-2490.
- [162] The effects on EHV relaying of fault and switching generated transients. CIGRE Report No. 34-04, Villach 1977.
- [163] The impact of sine-wave distortions on protective relays. Wave Distortion Working Group of Power System Relaying Committee. IEEE Trans. on Ind. Appl., Vol. IA-20, 1984, No. 2, s. 335-343.
- [164] THORP J., PHADKE A.G., A microprocessor based three-phase transformer differential relay. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 2, s. 426-432.

- [165] THORP J.S., PHADKE A.G., HOROWITZ S.H., BECHLER J.G., Limits to impedance relaying. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No.1, s. 246-260.
- [166] Van ZEE W.H., FELTON R.J., 500 kV system relaying - design and operating experience. CIGRE Report, No. 34-07 Paris 1978.
- [167] VITINS M., A correlation method for transmission line protection IEEE Trans. PAS 97, 1978, No. 5, s. 1607-1618.
- [168] VITINS M., A fundamental concept for high speed relaying. IEEE Trans. PAS-100, 1981, No.1, s. 163-173.
- [169] VITINS M., Transient phenomena in high voltage networks and their influence on the design of protective equipment. Brown Boveri Review, 1978, Vol. 65, No. 6, s. 358-363.
- [170] VITINS M., BULATY P., Fundamental principles for distance protection. III międzynarodowa konferencja naukowa nt. Aktualne problemy automatyki w energetyce, Gliwice 1979, s. 227-243.
- [171] WALKER L.N., SACHDEV M.S., Power system protection by mini and microcomputers: Research conducted in North America. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 93-96.
- [172] WILKINSON S.B., MATHEWS C.A., KEENEY M.F., Design considerations in the development of a new ground distance relay. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 5, s. 1566-1575.
- [173] WINKLER W., Ocena wrażliwości algorytmów cyfrowej lokalizacji zwarcia na sygnały zakłócające w prądzie i napięciu. W: Podstawy teorii nowoczesnej automatyki elektroenergetycznej, Pr. nauk. Inst. Energo-elekt. Pwr. Nr 66, Wrocław 1985, s. 41-47.
- [174] WINKLER W., KORBASIEWICZ I., KORBASIEWICZ M., A microprocessor based protective system for generator-transformer unit. Fourth International Conference on Developments in Power System Protection, IEE Conference Publication No. 302, Edinburgh 1989.
- [175] WINKLER W., MIKRUT M., WITEK B., Performance of differential protection for three winding power transformers during transient CTs saturation. Fourth International Conference on Developments in Power System Protection. IEE Conference Publication No. 302, Edinburgh 1989, s. 66-69.
- [176] WISZNIEWSKI A., Accurate fault impedance locating algorithm. IEE Proc. Vol. 130, 1983, s. 311-314.
- [177] WISZNIEWSKI A., Calculation of current transformers transient errors. IEEE Trans. PAS-97, 1978, No. 6, s. 2339-2345.
- [178] WISZNIEWSKI A., Fault location correction of errors due to current transformers. IEE Conference Publication No. 249. Developments in Power System Protection, London 1985, s. 185-187.
- [179] WISZNIEWSKI A., Filtracja analogowa sygnałów w układach sterowania systemem energetycznym za pomocą maszyn cyfrowych. Przegląd Elektrotechniczny Nr 6, 1975, s. 244-247.
- [180] WISZNIEWSKI A., How to reduce errors of distance fault locating algorithms. IEEE Trans. PAS-100, 1981, No. 12, s. 4815-4821.
- [181] WISZNIEWSKI A., New algorithm of calculating current and voltage phasors for fast protection. IEE Proc. 134, 1987, No. 1, s.81-82.
- [182] WISZNIEWSKI A., Przekładniki w elektroenergetyce. Warszawa, WNT, 1982.
- [183] WISZNIEWSKI A., Signal recognition in protective relaying. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 132-136.

- [184] WISZNIEWSKI A., Zabezpieczenia elektroenergetyczne w punkcie zwrotnym. Przegląd Elektrotechniczny Nr 1-4, 1982, s. 16-18.
- [185] WISZNIEWSKI A., SZAFRAN J.I., Distance digital algorithm immune to saturation of current transformers. Fourth International Conference on Developments in Power System Protection, IEE Conference Publication No. 302, Edinburgh 1989, s. 196-199.
- [186] WOJTKIEWICZ A., Elementy syntezy filtrów cyfrowych. Warszawa, WNT, 1984.
- [187] YAMAGUCHI H., HORI A., MORI T., SUZUKI K., The use of microprocessors in digital protection and control in substations, IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 74-78.
- [188] YEE M.T., ESZTERGALYOS J., Ultra high speed relay for EHV/UHV transmission lines. Installation staged fault tests and operational experience. IEEE Trans. PAS-97, 1978, No. 5, s. 1814-1825.
- [189] ŻYDANOWICZ J., Elektroenergetyczna automatyka zabezpieczeniowa. T. 1. Podstawy zabezpieczeń elektroenergetycznych, Warszawa, WNT, 1979.
- [190] ŻYDANOWICZ J., Elektroenergetyczna automatyka zabezpieczeniowa. T. 2. Automatyka eliminacyjna, Warszawa, WNT, 1985.

Praca wpłynęła do Redakcji 5 października 1989 r.

SIGNAL RECOGNITION IN DIGITAL POWER SYSTEM PROTECTION

A digital identification of criterion values of power system protection has been presented. The following criterion values have been considered: magnitudes of voltages and currents, active and reactive power, resistance and reactance (conductance, susceptance), which are measured using voltages and currents of fundamental frequency of protected system.

A structure of digital power system protection and in particular a separated block of measurement have been considered. Signal processing consists of two steps in the digital part of the protection: digital filtration or estimation and digital algorithms themselves. The synthesis of such algorithms made it possible to divide them into two fundamental families, which include most of the algorithms worked out until now. To both of them, orthogonal signal components are applied. These components can be obtained in different ways resulting in different features of the given algorithm.

Optimization of digital signal processing in the measurement block has been done, taking into consideration three signal models: deterministic, partially and completely probabilistic. The method of optimization as well as minimalization of measurement errors due to signal noises have been examined according to the models assumed. To this purpose, digital filtration and correlation having constant and variable data window, curve fitting method and Kalman filter as well as methods of

analysis of measurement errors of criterion values, have been used. Different methods of minimalization of measurement errors due to decaying DC, which in standard methods is a source of substantial and difficult to be removed errors, have been also presented.

Results of analysis, synthesis and optimalization have been illustrated by computer simulations, which confirmed the conclusions resulting from the theoretical approach.

ОПОЗНАВАНИЕ СИГНАЛОВ В ЦИФРОВОЙ ЗАЩИТНОЙ АВТОМАТИКЕ

В работе представлены цифровые методы идентификации сигналов, выступающих в качестве критериальных величин электроэнергетических защит. Рассматриваются следующие критериальные величины: амплитуды напряжений и токов, активные и реактивные мощности, активное и реактивное сопротивление, которые определяются посредством значений тока и напряжения основной гармоники в защищаемом объекте.

Рассматривается структура цифровых электроэнергетических защит, а в особенности, структура их измерительного органа. В его цифровой подсистеме преобразование сигналов проводится в следующие два этапа: цифровая фильтрация или оптимальная эстимация и измерение критериальной величины посредством соответствующего алгоритма. Проведенный синтез позволил выделить два основных семейства этих измерительных алгоритмов, в которых помещаются все основные разработанные до сих пор методы. Они базируются на разложении сигнала на ортогональные составляющие. Методы выделения этих составляющих обуславливают свойства алгоритмов.

Оптимизацию цифрового преобразования сигналов в измерительных органах проводится относительно трех следующих моделей сигналов: детерминистической, частично и вполне стохастической. Соответственно этому, проведен анализ методов оптимизации алгоритмов и минимизации ошибок, вносимых помехами. Для этого используется цифровая фильтрация и коррекция с постоянным и переменным измерительными окнами, методы аппроксимации функции, калмановская фильтрация, а также разработанные методы анализа ошибок критериальных величин. Представлены также методы минимизации ошибок от аperiodической составляющей, которая в известных методах является источником значительных и трудноопределимых ошибок.

Результаты анализа, синтеза и оптимизации проиллюстрированы проведенными модельными экспериментами, которые подтверждают выводы, вытекающие из теоретических исследований.

SPIS TRESCI

1. Wstęp	3
2. Struktura pomiarów cyfrowych zabezpieczeń elektroenergetycznych..	5
2.1. Schemat blokowy zabezpieczeń cyfrowych	5
2.2. Podstawowe wymagania metrologiczne i funkcjonalne	9
3. Modele sygnałów i układów	14
3.1. Model sygnałowy deterministyczny i sygnałowy model proba- listyczny	15
3.2. Współzależność modeli sygnałów i układów pierwotnych	17
3.3. Transformacje sygnałów w torze pomiarowym	19
4. Mierzone wielkości kryterialne	20
4.1. Wprowadzenie	20
4.2. Metody otrzymywania składowych ortogonalnych sygnałów i ich charakterystyki	22
4.3. Podstawy algorytmów pomiarowych z zastosowaniem składowych ortogonalnych	31
4.4. Pomiar amplitudy napięcia lub prądu	36
4.4.1. Zastosowanie składowych ortogonalnych	36
4.4.2. Metody uśredniania	41
4.5. Złożone wielkości kryterialne	42
4.5.1. Pomiar mocy	42
4.5.2. Pomiar składowych impedancji	47
4.5.2.1. Zastosowanie składowych ortogonalnych	47
4.5.2.2. Pomiar rezystancji i reaktancji z równań obwodu zwarciovego	51
5. Cyfrowa filtracja i korelacja	55
5.1. Wprowadzenie	55
5.2. Filtracja cyfrowa	60
5.2.1. Widmo całkowania ciągłego i dyskretnego	63
5.2.2. Filtry nierekursywne o typowych funkcjach wagi i ich widma	66
5.2.2.1. Widma filtrów i unormowane charakterystyki często- tliwościowe	66
5.2.2.2. Algorytmy i sygnały wyjściowe filtrów	76
5.3. Metoda korelacji i odwzorowania krzywych	82
5.3.1. Zasady i równania ogólne	82
5.3.2. Przypadki szczególne korelacji i odwzorowania krzy- wych	86

5.3.2.1. Zastosowanie współczynników szeregu Fouriera. Charakterystyki częstotliwościowe	86
5.3.2.2. Optymalna estymacja i wariancje błędów	89
5.4. Stany przejściowe filtracji i korelacji	94
5.5. Filtracja przy oknie pomiarowym zmiennej długości	100
5.5.1. Zasady i równania ogólne	100
5.5.2. Własności metody - charakterystyki widmowe i warian- cje	105
6. Filtracja Kalmana	110
6.1. Podstawowe równania i modele procesu oraz filtru	112
6.2. Modele i filtry o różnej liczbie stanów	115
6.3. Parametry projektowe filtru i macierz [K]	121
6.4. Charakterystyki efektywności filtru	122
6.4.1. Macierz [K] i wariancje błędów estymacji	122
6.4.2. Czasy odpowiedzi i charakterystyki częstotliwościowe filtru	131
7. Dokładność wielkości kryterialnych	139
7.1. Filtracja składowej aperiodycznej	141
7.1.1. Błędy wywołane składową aperiodyczną w metodach standardowych	141
7.1.2. Szereg Fouriera składowej aperiodycznej	145
7.1.3. Metody minimalizacji błędów	147
7.1.4. Ocena błędów podczas stosowania filtru Kalmana	151
7.2. Błędy wywołane zakłóceniami oscylacyjnymi	152
7.3. Przykłady symulacji pomiaru amplitudy różnymi metodami	161
8. Wnioski	166
Literatura	170

CONTENTS

1. Preface	3
2. Structure of digital measurements of power system protection ...	5
2.1. Block scheme of digital protection	5
2.2. Fundamental metrological and functional requirements	9
3. Signal and circuit models	14
3.1. Deterministic and probabilistic signal models	15
3.2. Interdependence of signal and circuit models	17
3.3. Signal transformation in measurement system	19
4. Criterion values measured	20
4.1. Introduction	20

4.2. Methods of extraction of orthogonal signal components and their characteristics	22
4.3. Fundamentals of measurement algorithms using orthogonal components	31
4.4. Voltage and current magnitude measurement	36
4.4.1. Application of orthogonal components	36
4.4.2. Averaging methods	41
4.5. Complex criterion values	42
4.5.1. Power measurements	42
4.5.2. Measurement of impedance components	47
4.5.2.1. Application of orthogonal components	47
4.5.2.2. Measurement of resistance and reactance solving the equation of fault circuit	51
5. Digital filtration and correlation	55
5.1. Introduction	55
5.2. Digital filtration	60
5.2.1. Spectra of continuous and discrete integration rules	63
5.2.2. Nonrecursive filters having typical impulse responses and their spectra	66
5.2.2.1. Spectra of filters and their normalized frequency responses	66
5.2.2.2. Algorithms and output signals of filters	76
5.3. Correlation and curve fitting methods	82
5.3.1. Principles and general equations	82
5.3.2. Particular cases of correlation and curve fitting methods	86
5.3.2.1. Applications of coefficients of Fourier series. Frequency responses	86
5.3.2.2. Optimum estimation and variance of errors	89
5.4. Transients of filtration and correlation	94
5.5. Filtration with variable data window	100
5.5.1. Principles and general equations	100
5.5.2. The method characteristic: spectra and variances	105
6. Kalman filter	110
6.1. Fundamental equations, process and filter models	112
6.2. Models and filters having different number of states	115
6.3. Design parameters of the filter and matrix [K]	121
6.4. Characteristics of filter quality	122
6.4.1. Matrix [K] and variances of estimation errors	122
6.4.2. Settling time and frequency responses	131
7. Accuracy of criterion values	139
7.1. Filtration of decaying DC	141
7.1.1. Errors due to decaying DC in standard methods	141

7.1.2. Fourier series of decaying DC	145
7.1.3. Methods of errors minimalization	147
7.1.4. Errors estimation when Kalman filters are applied ..	151
7.2. Errors due to oscillatory noise components	152
7.3. Simulation examples of magnitude measurements using different methods	161
8. Conclusions	166
Bibliography	170

PRACE NAUKOWE INSTYTUTU ENERGOELEKTRYKI
(wydane w latach 1988—1989)

Nr 78, Monografie nr 20, M. Zieliński, <i>Procesy ziemnozwarciowe w stojanach turbogeneratorów</i> , Wrocław 1988	250,—
Nr 79, Konferencje nr 29, <i>Teoria cyfrowych systemów zabezpieczeń</i> , Wrocław 1988	170,—
Nr 80, Monografie nr 21, Z. Wróblewski, <i>Wielowariantowa metoda prognozowania niezawodności styczników elektromagnetycznych prądu przemiennego z bieżącej produkcji</i> , Wrocław 1988	250,—
Nr 81, Konferencje nr 30, <i>Systemy elektroenergetyczne — eksploatacja i rozwój. II</i> , Wrocław 1988	190,—
Nr 82, Monografie nr 22, Z. Kremens, <i>Analiza błędnych danych z testem obserwowalności w ocenie stanu pracy systemu elektroenergetycznego</i> , Wrocław 1989	540,—

Cena zł 1800,—

Subscription should be sent (at any time of the year) to:
„Ars Polona”

Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

Bank account number: PBK XIII Oddz. W-wa 370044-1195-139-11

Zamówienia na prenumeratę można składać:

OR PAN, PKiN, 00-901 Warszawa

Nr konta bankowego: PEK IX Oddz. W-wa, 370031-4792

**Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
ma stale na składzie Księgarnia Wr 49
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
oraz Wojewódzka Księgarnia Techniczna
ul. Świdnicka 8, 50-067 Wrocław**

ISSN 0324-976X