

Ryszard Kutylowski

Optymalizacja topologii kontinuum materialnego



**Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2004**

Recenzje

Leszek MIKULSKI
Paweł ŚNIADY

Opracowanie redakcyjne i korekta

Maria IZBICKA

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-788-4

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 345/2004.

Spis treści

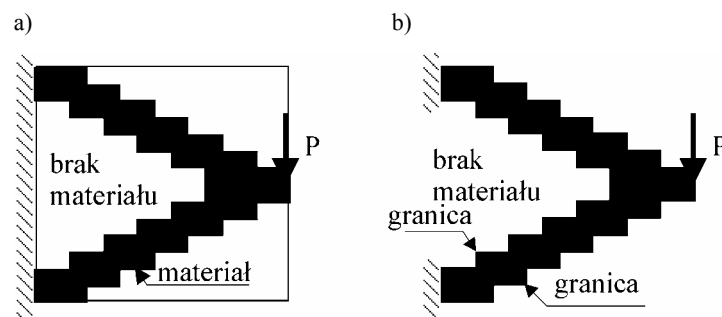
| | |
|--|-----|
| 1. Wprowadzenie | 5 |
| 1.1. Wstęp | 5 |
| 1.2. Zakres dziedziny – optymalizacja topologii | 7 |
| 1.3. Rys historyczny | 12 |
| 1.4. Przegląd literatury | 13 |
| 1.5. Cel i zakres pracy | 18 |
| 1.6. Układ pracy | 20 |
| 2. Problem brzegowy mechaniki trójwymiarowego kontinuum materialnego | 24 |
| 2.1. Wstęp | 24 |
| 2.2. Sformułowanie wariacyjne problemu brzegowego dla trójwymiarowego kontinuum materialnego | 24 |
| 3. Sformułowanie problemu optymalizacji topologii | 38 |
| 3.1. Wstęp | 38 |
| 3.1.1. Opis sformułowania zadania | 38 |
| 3.1.2. Założenia | 39 |
| 3.1.3. Opis obszaru projektowego | 39 |
| 3.1.4. Podstawy zastosowanej teorii homogenizacji | 41 |
| 3.1.5. Opis charakteru procesu optymalizacji | 44 |
| 3.2. Sformułowanie homogenizacyjne i podejście relaksacyjne | 46 |
| 3.2.1. Wprowadzenie | 46 |
| 3.2.2. Sformułowanie wariacyjne problemu optymalizacji dla obszaru poddanego homogenizacji | 47 |
| 3.2.3. Sformułowanie wariacyjne homogenizacyjno-relaksacyjne problemu optymalizacji | 51 |
| 4. Algorytm metody elementów skończonych wraz z przykładami liczbowymi | 56 |
| 4.1. Wstęp | 56 |
| 4.2. Algorytm metody elementów skończonych | 58 |
| 4.3. Przykłady liczbowe | 62 |
| 4.4. Postprocessing | 81 |
| 5. Funkcje progowe | 86 |
| 5.1. Wstęp | 86 |
| 5.2. Przykłady rozwiązań dla zaproponowanych funkcji progowych | 87 |
| 6. Podejście relaksacyjne | 106 |
| 6.1. Wstęp | 106 |
| 6.2. Podejście relaksacyjne dla kontinuum materialnego | 107 |
| 6.3. Rozważania dotyczące definicji wielkości relaksacyjnej ε | 110 |
| 6.4. Analiza wyników | 111 |
| 6.5. Uwagi końcowe | 125 |

| | |
|--|-----|
| 7. Aktualizacja modułu Younga dla materiału fikcyjnego | 127 |
| 7.1. Wstęp | 127 |
| 7.2. Definicje uaktualnionego modułu Younga | 128 |
| 7.3. Analiza numeryczna | 130 |
| 7.4. Uwagi końcowe | 140 |
| 8. Analiza otrzymanych topologii w aspekcie energetycznym | 142 |
| 8.1. Wstęp | 142 |
| 8.2. Analiza rozwiązania wynikająca z przyjęcia różnych funkcji progowych | 143 |
| 8.3. Analiza rozwiązania wynikająca z przyjęcia różnych funkcji relaksacyjnych | 149 |
| 8.4. Analiza rozwiązania wynikająca z przyjęcia różnych funkcji aktualizujących moduł Younga | 152 |
| 8.5. Podsumowanie | 155 |
| 9. Optymalizacja topologii dla ciała z założonymi otworami | 157 |
| 9.1. Wprowadzenie oraz sformułowanie problemu | 157 |
| 9.2. Przykłady | 159 |
| 10. Optymalizacja topologii dla ciała o zmniejszającej się masie oraz zwiększającym się obciążeniu ... | 164 |
| 10.1. Wprowadzenie oraz sformułowanie problemu | 164 |
| 10.2. Przykłady | 166 |
| 11. Optymalizacja topologii przekroju poprzecznego wewnętrznie uźebrowanej tarczy | 178 |
| 11.1. Wprowadzenie oraz sformułowanie problemu | 178 |
| 11.2. Przykłady | 180 |
| 12. Optymalizacja topologii ciała o rosnącej masie i powiększającym się obszarze zajmowanym przez to ciało | 199 |
| 12.1. Wprowadzenie oraz sformułowanie problemu | 199 |
| 12.2. Przykłady | 201 |
| 13. Podsumowanie | 209 |
| Literatura | 212 |

1. Wprowadzenie

1.1. Wstęp

Optymalizacja topologii (*topology optimization*) daje odpowiedź na pytanie o sposób rozmieszczenia w pewnej przestrzeni materiału przeznaczonego do wykonania danej konstrukcji tak, aby przy zadanych warunkach brzegowych i dla zadanego obciążenia kształt konstrukcji był optymalny. Proces optymalizacji polega na poszukiwaniu maksymalnej bądź minimalnej wartości funkcji, bądź funkcjonału celu przy równoczesnym spełnieniu pewnej liczby warunków ograniczających. W niniejszej pracy funkcjonał określający podatność konstrukcji będzie minimalizowany przy pewnych ograniczeniach nałożonych na masę ciała. Optymalizacja przeprowadzana będzie w ustalonym, stałym w trakcie procesu optymalizacji obszarze projektowym, w którym podczas tego procesu powstają podobszary pozbawione materiału i podobszary wypełnione materiałem. Proces optymalizacji jest to proces, w którym optymalizacji dokonuje się dla każdego kolejnego kroku, dla którego poszukiwane jest minimum podatności. Końcowym efektem procesu optymalizacji jest optymalny rozkład materiału w obszarze projektowym.



Rys. 1.1. Opis materiałowy (a) i geometryczny (b)

W niniejszej pracy stosuje się opis materiałowy problemu optymalizacji topologii (rys. 1.1a). W obszarze projektowym (zaznaczonym ramką na rys. 1.1a) konstrukcję

identyfikuje się poprzez rozpoznanie, czy dany podobszar zajmowany jest przez materiał o określonych własnościach (kolor czarny), czy też dany podobszar jest pozbawiony materiału (kolor biały). Ten sposób opisu jest dominujący w literaturze. W nielicznych pracach (np. w [19]) można spotkać się z opisem geometrycznym (rys. 1.1b), w którym konstrukcję identyfikuje się określając położenie granic obszarów zajmowanych przez materiał (granice zewnętrzne) oraz określając położenie granic otworów występujących w materiale (granice wewnętrzne). W podejściu tym nie istnieje pojęcie obszaru projektowego.

Optymalizacja topologii jest dziedziną wiedzy stosunkowo młodą, ale bardzo szybko rozwijającą się, szczególnie w ostatniej dekadzie. Ma ona bardzo duże zastosowanie praktyczne, a jej rozwój wynika z potrzeb niektórych gałęzi nowoczesnego przemysłu. Zastosowania optymalizacji topologii można rozpatrywać zarówno w skali makro (w budownictwie oraz w przemyśle biomedycznym, motoryzacyjnym i lotniczym), jak i w skali mikro (konstrukcje stosowane jako mikro-mechanizmy). Jednym z przykładów konstrukcji w skali makro może być konstrukcja, której topologia musi być optymalna dla każdego, zmieniającego się w trakcie eksploatacji, położenia obciążenia [40]. Przykładem konstrukcji w skali mikro mogą być mechanizmy wielkości rzędu dziesiątek czy setek mikrometrów, pracujące w układach elektronicznych, nazywane MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), np. [72].

Działania naukowe dotyczące optymalizacji topologii w skali globalnej są koordynowane przez ISSMO (International Society of Structural and Multidisciplinary Optimization) skupiające ponad 500 naukowców z ponad 35 krajów. Założycielem stowarzyszenia (w 1991 roku) był George Rozvany z Węgier, a obecnie przewodniczącym jest Martin Bendsøe z Danii. W ramach ISSMO działają też tzw. Working Groups obejmujące swym zasięgiem podstawowe dziedziny optymalizacji topologii (Topology Optimization, Shape Optimization, Optimization in Biomechanics itd.). Czasopismem stowarzyszenia ISSMO jest *Structural and Multidisciplinary Optimization* wydawane przez Springer Verlag. Należy dodać, że ISSMO jest stowarzyszeniem afiliowanym przy IUTAM (International Union of Theoretical and Applied Mechanics).

W ostatnim okresie (od początku lat dziewięćdziesiątych) odbyło się wiele znaczących konferencji i kongresów, których tematem były problemy optymalizacji, w tym optymalizacji topologii:

- WCSMO – World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization: 1995 – Goslar, Niemcy, 1997 – Zakopane, Polska, 1999 – Buffalo, USA, 2001 – Dalian, Chiny, 2003 – Lido di Jesolo, Włochy.
- NATO Advanced Research Workshop: 1992 – Sesimbra, Portugalia, 2000 – Budapeszt, Węgry.
- Konferencje CISM w Udine, Włochy, w latach 1990 i 1996.

- Cykliczne AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization: (1994 – Panama City, 1996 – Seattle, 1998 – St. Louis, 2000 – Long Beach (USA)).

- Euromech Colloquium – 345; The future of Structural Optimisation, 1996 – Liverpool, Anglia.

- Dwie internetowe konferencje organizowane przez ISSMO (2000 i 2002).

Ponadto organizowano następujące konferencje:

- Konferencje z serii OPTI (Computer Aided Optimum Design of Structures).

- Doroczne Konferencje Belgian–French–German Conferences on Optimization, odbywające się w Namur w Belgii, koncentrujące się na ogólnych problemach dotyczących teorii optymalizacji.

- Inne lokalne spotkania (m.in. spotkania ASMO UK/ISSMO (Conference on Engineering Design Optimization), Swansea – Wielka Brytania, MDO symposium w Pretorii, Australasian Conference on Structural Optimisation itd.)

Na wielu multidyscyplinarnych konferencjach i kongresach poruszana jest tematyka optymalizacyjna, dotycząca między innymi optymalizacji topologii. Są to np.:

- International Congresses of Theoretical and Applied Mechanics (ostatni odbył się w Chicago w roku 2000, a następny odbędzie się w Warszawie w 2004 roku, gdzie specjalną sesję poświęconą optymalizacji topologii współorganizuje ISSMO).

- World Congresses on Computational Mechanics (ostatni odbył się w Wiedniu w roku 2002).

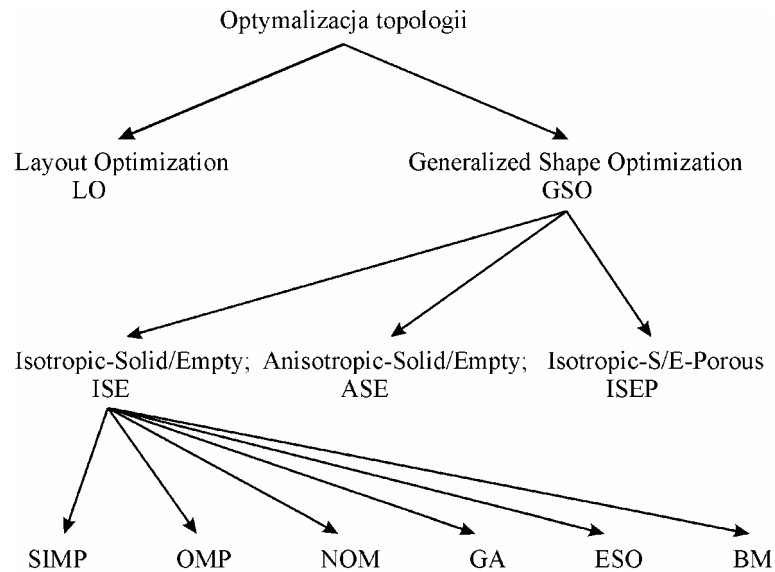
- Konferencje GAMM (Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik).

Poza cyklicznymi znanymi już konferencjami pojawiają się nowe. Wśród nich wymienić można choćby współorganizowaną przez ISSMO International Conference on Modelling, Simulation, Optimization for Design of Multi-disciplinary Engineering Systems, która odbyła się we wrześniu 2003 w Goa (Indie).

1.2. Zakres optymalizacji topologii

Optymalizacja topologii jest dynamicznie rozwijającą się dziedziną nauki, której klasyfikacja i terminologia szybko się w związku z tym zmieniają. Od początku lat dziewięćdziesiątych dokonywano prób usystematyzowania tej gałęzi wiedzy. Najbardziej aktualne omówienie problemów związanych z klasyfikacją, zakresem poruszanej tematyki, historią i terminologią znajdujemy w pracach [66] i [67] z 2001 roku. Ponieważ były one przedstawione i dyskutowane na NATO ARW w Budapeszcie w roku 2000 z udziałem wielu czołowych przedstawicieli tej dziedziny, można stwierdzić, że stanowią one wiarygodne źródło aktualnej wiedzy

dotyczącej systematyzacji tej dziedziny. Wcześniejsze uwagi odnoszące się do głównych zagadnień analizowanych w optymalizacji topologii wraz z pewną analizą historyczną zawarte są w [65]. Dotyczą one jednak przede wszystkim konstrukcji prętowych.



SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization)

OMP (Optimal Microstructure with Penalization)

NOM (NearOptimal Microstructure)

GA (Genetic Algorithms)

ESO (Evolutionary Structural Optimization)

BM (Bubble Method)

Rys. 1.2. Klasyfikacja optymalizacji topologii

Optymalizacja topologii dzieli się na dwie zasadnicze dziedziny (rys. 1.2):

1. Layout Optimization (LO) – dotyczy konstrukcji prętowych. Głównym problemem jest tu wyznaczenie optymalnej siatki prętów stanowiących połączenia węzłów siatki. Zazwyczaj rozpatrywane są tu trzy następujące po sobie problemy:

- optymalny wybór przestrzennej konfiguracji prętów i ich połączeń, np. prace [42] i [43]; warto podkreślić, że wyniki w tych pracach otrzymano na drodze analitycznej,
- optymalizacja geometrii (określenie najlepszej lokalizacji węzłów),
- optymalizacja przekrojów poprzecznych prętów.

2. Generalized Shape Optimization (GSO) – dotyczy optymalizacji topologii kontinuum materialnego, które może być jednorodne, może też być kompozytem. Do ciała jednorodnych zalicza się również ciała porowate. Optymalizacja dokonywana jest wewnątrz ściśle określonego obszaru projektowego, gdzie podczas procesu optymalizacji tworzą się podobszary wypełnione materiałem i podobszary pozbawione materiału. Mamy więc do czynienia z wewnętrznymi, zmieniającymi się podczas procesu granicami tych podobszarów.

W dalszej części pracy będziemy się zajmować optymalizacją topologii kontinuum materialnego. Tematyka ta zawiera się w GSO, która jest stosowana, gdy w obszarze projektowym mamy do dyspozycji relatywnie większą ilość materiału w stosunku do ilości materiału stosowanego podczas optymalizacji typu LO. W dalszym ciągu rozważań skupimy się na omawianiu GSO, która jest używana do optymalizacji topologii:

- ciało izotropowych (Isotropic-Solid/Empty – ISE),
- ciało anizotropowych (Anisotropic-Solid/Empty – ASE),
- porowatych ciał izotropowych (Isotropic-Solid/Empty/Porous – ISEP).

Zagadnienie dotyczące optymalizacji topologii kontinuum materialnego zawiera się w grupie ISE. Do rozwiązania zadania ISE stosuje się następujące metody:

- **SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalization)**

Jest to metoda stosowana podczas procesu optymalizacji dokonywanego numerycznie, np. metodą elementów skończonych. Jej zadaniem jest eliminacja materiału z tych elementów należących do obszaru projektowego, dla których zastępczy materiał powstały w trakcie tego procesu ma gęstość stosunkowo niewielką. Metoda SIMP wymaga zastosowania odpowiednio zdefiniowanego uaktualnionego modułu Younga w poszczególnych elementach oraz określenia gęstości materiału, która uznana będzie za pomijalnie małą. Gęstość materiału przyjmuje wartości pośrednie między wielkością początkową a zerem. Podczas procesu optymalizacji mamy więc do czynienia z pewnym „sztucznym” czy też „fikcyjnym” materiałem.

Za początek stosowania metody SIMP w rozwiązaniu numerycznym uważa się pracę [8] z 1989 roku. Z bardzo wielu prac, które ukazały się później, warto wspomnieć o [61], gdzie precyzyjniej zdefiniowano sposób aktualizacji modułu Younga, mający wpływ na gęstość materii w poszczególnych elementach podczas kolejnych kroków procesu optymalizacji. W niniejszej pracy w rozdziałach piątym i siódmym analizowano wpływ definicji funkcji progowych i sposobu aktualizacji modułu Younga na zbieżność rozwiązania. Okazało się, że rozwiązanie zależy od ścieżki optymalizacji, która wynika z przyjętych parametrów zadania. Podobnie w [74] (konstrukcje prętowe) stwierdzono, że rozwiązanie zależy od wielkości przyjętego wykładnika

potęgi funkcji służącej do aktualizacji modułu Younga (odpowiadającej funkcji $\mu(x)$ zdefiniowanej w [8]). W [74] podano też, że rozwiązanie nie zawsze jest zbieżne z rozwiązaniem optymalnym. Ustosunkowanie się do tego faktu można znaleźć w rozdziale ósmym, gdzie analizowano wpływ parametrów ścieżki optymalizacji na zbieżność rozwiązania z rozwiązaniem optymalnym. Ponadto w [74] rozwiązywano zadanie przy zwiększającym się stopniu penalizacji dla kolejnych kroków procesu optymalizacji, co odpowiada sposobowi rozwiązywania zadania dla różnych i zależnych m.in. od numeru kroku funkcji progowych, co pokazano w rozdziale piątym. Podobnie w [62] analizowano wpływ na rozwiązanie wielkości wykładnika potęgi, o jakim była mowa wcześniej. Również i w tym przypadku analiza dotyczyła konstrukcji prętowych. W [31] rozwiązano problem optymalnej topologii dla laminatów. Zauważono (bez podawania szczegółów) pozytywny wpływ rosnącego wykładnika potęgi na zbieżność rozwiązania. Jeszcze inaczej (dla konstrukcji ciągłej) sformułowano funkcję $\mu(x)$ w [56], gdzie dla kolejnych kroków uwzględniono pewne przyrosty gęstości dla danego elementu w stosunku do gęstości z poprzedniego kroku. Nie precyzowano jednak, jakie są to przyrosty i jak się je otrzymuje. W [70] dokonano pewnych porównań dla rozwiązań, w których zastosowano lub nie zastosowano metody SIMP.

Pewną odmianą SIMP można nazwać ATO (Adaptive Topology Optimization), metodę obszernie omówioną w [46]. Polega ona na adaptowaniu siatki podziału w trakcie procesu i równoczesnym wygładzaniu kształtów konstrukcji.

Generalnie, w literaturze brakuje opracowań podających szczegóły związane ze stosowanymi funkcjami progowymi i sposobem aktualizacji modułu Younga dla konstrukcji o strukturze ciągłej, co omówiono w rozdziałach piątym i siódmym. Niektóre wyniki zamieszczone w rozdziale siódmym wcześniej były publikowane w [38], natomiast niektóre wyniki dotyczące problemu zbieżności rozwiązania w zależności od przyjętych funkcji progowych były publikowane w [36].

W ostatnich latach SIMP stał się coraz bardziej szeroko stosowaną metodą w rozwiązywaniu zagadnień związanych z optymalizacją topologii.

Warto też zwrócić uwagę, że metoda SIMP była też używana razem z metodą COC (Continuum-type Optimality Criteria) [80], która po modyfikacji związanej z rozwiązywaniem numerycznym zadania przyjęła nazwę DCOC (dodano Discretized) [81]. Stosowana ona była do optymalizacji konstrukcji prętowych. Swe korzenie ma w [33], gdzie sformułowano algorytmy, które pozwoliły na projektowanie konstrukcji o minimalnym ciężarze, przy nałożeniu warunków ograniczających na naprężenia i przemieszczenia.

• **OMP (Optimal Microstructure with Penalization).** W związku z tym, że problem dotyczy mikrostruktur, w tym przypadku rośnie liczba niewiadomych. Na przykład dla problemu dwuwymiarowego mamy dla każdego elementu trzy niezależne parametry (dwie gęstości warstwowe i kierunek zorientowania mikrostruktury) [55].

• **NOM (Near Optimal Microstructure)**. Jest to pewna odmiana metody OMP, dla której generalnie nie stosuje się penalizacji, przez co zadanie staje się słabo zbieżne. W takim przypadku niekiedy można posiłkować się pewnym rodzajem postępowania, które można określić jako penalizację o ustalonym poziomie. Poprawia to zbieżność zadania. Metoda ta czasami ma mniejszą liczbę niezależnych parametrów dla każdego elementu niż występuje to w metodzie OMP [10].

• **GA (Genetic Algorithms)**. Algorytmy genetyczne znajdują coraz szersze zastosowanie w wielu dziedzinach, również w optymalizacji topologii. Przykładami mogą być prace [12] i [34]. Należy dodać, że ostatnio w Polsce dział ten bardzo silnie rozwijany jest w ośrodku gliwickim.

• **ESO (Evolutionary Structural Optimization)**. Metoda została nazwana i sformułowana w 1992 roku. W [77] dokonano szczegółowego jej opisu. Zajmowały się nią przede wszystkim ośrodki australijskie. Pewne rozszerzenie o pełną możliwość ponownego uwzględniania danego elementu po uprzednim jego odrzuceniu daje metoda BESO ([60] i [78]). Ze względu na to, że używa się tu nazw raczej zarezerwowanych dla algorytmów genetycznych (np. Evolutionary Optimization) w [67] zaproponowano nazwę tej metody jako SERA (Sequential Element Rejections and Admissions). Przykład zastosowania metody SERA można znaleźć w [69]. Warto dodać, że nie zawsze prowadzi ona do uzyskania rozwiązania optymalnego. Tak więc dotychczas SERA jest metodą raczej intuicyjną, dla której nie ma dowodów istnienia rozwiązania optymalnego. Jako przykład bazującego na ESO, ale innego sposobu wyznaczenia optymalnej topologii jest [16], gdzie optymalizację prowadzi się dla zmniejszającej się dostępnej masy, przy czym dla danego procesu zakłada się współczynnik zmniejszania się masy (np. 1%). Optymalną topologią spośród wszystkich otrzymanych topologii będzie ta, dla której energia odkształcenia będzie najmniejsza podczas zmniejszania się dostępnej masy. Problem otrzymywania optymalnej topologii dla ciała o zmniejszającej się dostępnej masie w nieco innym ujęciu niż w pracy [16] rozwiązywany jest w rozdziale dziesiątym.

• **BM (Bubble Method)**. Metoda bąbelkowa, choć nie jest ujęta w cytowanym podziale, również jest rozwijana w ostatnich latach, czego przykładem są prace [19], [20] i [21]. Polega ona na iteracyjnym umieszczaniu otworów (bąbelków) w optymalizowanej konstrukcji. Parametrem optymalizacji jest tu wektor określający położenie otworu. Jest to metoda będąca przykładem tzw. geometrycznego opisu problemu optymalizacji topologii, podczas gdy wszystkie wymienione wcześniej są przykładami opisu materiałowego.

Zastosowana w niniejszej pracy metoda mieści się w metodzie SIMP, stosuje się do materiału izotropowego i wykorzystuje penalizację. Jej algorytm jest oryginalny i będzie przedstawiony w rozdziale czwartym. W pracy stosuje się podejście energetyczne MC (*Minimum Compliance*).

Warto podkreślić, że badania w dziedzinie optymalizacji topologii są prowadzone przez dwie grupy badaczy wzajemnie się uzupełniające. Jedna grupa zajmuje się podstawami teoretycznymi, badając zagadnienia od strony formalnej, podając m.in. do-

wody na istnienie rozwiązania i w ten sposób pozwala prowadzić badania bardziej praktyczne drugiej grupie, która przede wszystkim zajmuje się wyznaczaniem optymalnych topologii dla danych klas zagadnień.

Rozwiązania problemów optymalizacji topologii mogą być analityczne i numeryczne. Najczęściej stosowaną metodą numeryczną jest metoda elementów skończonych, pozwalająca w sposób dyskretny analizować parametry projektowe. Odpowiednio zagęszczona siatka podziału MES daje możliwości traktowania rozpatrywanego obszaru z jednej strony jako dyskretnego, z drugiej z makroskopowego punktu widzenia jako kontinuum.

Do niedawna, wobec szybkiego rozwoju tej dyscypliny wiedzy, w wielu ośrodkach prowadzono badania niezależnie, tak jak niezależnie wprowadzano terminologię. Wiele pojęć i terminów funkcjonuje obecnie równolegle, również wiele wyników otrzymywano równolegle. Jako przykład można podać określenia, które opisują to, czym jest SIMP. Są nimi np. *direct approach* zaproponowany w [8], opisujący sposób aktualizacji modułu Younga poprzez zastosowanie pewnego sztucznego materiału. Inną nazwą tego sposobu postępowania jest *artificial approach* [61], gdzie idea *direct approach* jest kontynuowana i doprecyzowano tu definicję sztucznego materiału stosowanego podczas procesu optymalizacyjnego. Zresztą sama nazwa SIMP też ma różne interpretacje słowne. Zamiast *solid* wielu autorów używa słowa *simple*. Zamiast *solid microstructure* mówi się *simple material*, jako że jest to materiał, którego formuły opisujące jego własności ulegają pewnym modyfikacjom i – rzecz by można – uproszczeniom. Słowo *material* jest stosowane, aby wyraźnie podkreślić, że mamy do czynienia z izotropowym materiałem jednorodnym, choć *microstructure* też może być interpretowane jako materiał jednorodny, o mikrostrukturalnych porach. Należy jednak pamiętać, że w większości przypadków słowo *microstructure* odnosi się do materiałów mających budowę typowo mikrostrukturalną. W rozważaniach prowadzonych w niniejszej pracy SIMP należy tłumaczyć jako *Solid Isotropic Material with Penalization*, gdyż materiał jest materiałem jednorodnym, a nie materiałem o powtarzalnych tzw. „celach” („komórkach”).

1.3. Rys historyczny

Pierwszą, fundamentalną pracą, na którą powołują się wszyscy sięgający do początków rozważań nad optymalną topologią ciała jest praca australijskiego badacza Michella z roku 1904 [47]. Potem, przez długie lata, dziedzina ta nie była rozwijana i dopiero z końcem lat pięćdziesiątych i w ciągu lat sześćdziesiątych rozpoczęto prace nad optymalizacją topologii struktur prętowych (Cox (1958), Dorn, Gomory, Greenberg (1964), Dobbs, Felton (1969)). Prace te dotyczyły zastosowania kryteriów optymalizacji do bardzo gęstej siatki możliwych połączeń pomiędzy węzłami. Niektóre z węzłów były

obciążone, a niektóre były punktami podparcia konstrukcji. Ta siatka potencjalnych połączeń nazywana była „strukturą podstawową” (*ground structure*), a później „strukturą bazową”. W trakcie procesu optymalizacji następowała eliminacja zbędnych połączeń, co prowadziło do uzyskania optymalnej struktury prętowej.

Dość kompleksowo problem optymalizacji konstrukcji prętowych potraktowany jest w [45], gdzie przedstawiono przede wszystkim różne metody optymalizacji stosowanej podczas projektowania konstrukcji. Książka przeznaczona jest dla inżynierów zajmujących się projektowaniem.

Początkowo optymalizacja topologii dotyczyła wyłącznie konstrukcji prętowych. Od końca lat sześćdziesiątych zaczęto się zajmować także optymalizacją topologii ciała o strukturze ciągłej, a nie tylko prętowej. Obecnie tę dziedzinę optymalizacji można nazwać optymalizacją topologii kontinuum materialnego. Jako przykłady jednych z pierwszych prac dotyczących struktur ciągłych można podać np. artykuł z roku 1968 [59], w którym rozważano zagadnienia teoretyczne optymalnego projektowania konstrukcji, m.in. w celu otrzymania konstrukcji o maksymalnej sztywności. W [63] określono optymalną grubość konstrukcji płytowej.

Dopiero pod koniec lat osiemdziesiątych powstają prace dające podstawy do dalszych badań ([8] oraz [10]). Następnie w latach dziewięćdziesiątych i później, aż do chwili obecnej, notuje się burzliwy rozwój optymalizacji topologii ciągłych ciał, zarówno jednorodnych, jak i kompozytowych.

Historię kształtują ludzie i dlatego warto wspomnieć o pewnych osobach, które miały bardzo duży wpływ na rozwój tej dziedziny wiedzy: Martina Bendsøe z Technical University of Denmark w Lyngby, Nielsa Olhoffa z Aalborg University, Georga Rozvanego obecnie pracujący na Uniwersytecie Technicznym w Budapeszcie, a także Johna Taylora z Ann Arbor University, który jest autorem wielu fundamentalnych prac i osobą, która wskazywała i wskazuje kierunki rozwoju tej dziedziny. Z artykułów autorstwa Johna Taylora, mających duże znaczenie dla niniejszej pracy, warto wymienić [25] oraz cytowane wcześniej [59] i [63]. Na uwagę zasługuje też praca [58], gdzie zajmowano się optymalną topologią ciała z inkluzjami, i [75], w której przedstawiono optymalną topologię ciała z dużym założonym otworem (konstrukcja mostu), co wiąże się tematyką poruszoną w rozdziale dziewiątym – wyznaczaniem optymalnej topologii ciała z założonymi otworami. Prace pozostałych wspomnianych osób omawiane są w dalszej części pracy.

1.4. Przegląd literatury

W dalszej części zostaną omówione przede wszystkim prace dotyczące optymalizacji topologii jednorodnego kontinuum materialnego oraz niektóre prace dotyczące ciał kompozytowych, w zakresie wiążącym się z rozważaną tematyką.

Rozpocznijmy od bardzo ważnej pozycji z dziedziny optymalizacji topologii, a mianowicie od wydanej w 1995 roku książki Martina Bendsøe [9]. Stanowi ona podsumowanie wiedzy dotyczącej optymalizacji topologii według stanu na około połowę lat dziewięćdziesiątych, zawiera też bardzo szczegółowy przegląd literatury, usystematyzowany w ciekawy sposób. Prace są podzielone na trzy grupy: książki dotyczące pewnych podstawowych zagadnień (optymalne projektowanie, klasyczne optymalizowanie kształtu, optymalizacja topologii, homogenizacja, relaksacja), najważniejsze artykuły dotyczące tych samych dziedzin co wspomniane książki i wreszcie artykuły z czasopism i konferencji, podzielone na dwadzieścia pięć grup tematycznych. Dopiero po nich znajduje się typowy spis literatury. Układ taki pozwala na przejrzystą analizę tzw. *state of art* w omawianej dziedzinie oraz na bardzo szybkie odnalezienie potrzebnego w danej chwili tytułu. Literatura cytowana w książce opisuje bardzo szerokie spektrum problemów optymalizacji topologii. Między innymi formułuje się w niej podejście homogenizacyjne, następnie przedstawia się funkcjonały energetyczne stosowane przy rozwiązywaniu różnych zagadnień oraz nawiązuje się do struktur prętowych jako osobnej znaczącej dziedziny. Przedmiotem rozważań jest również zastosowanie optymalizacji topologii do rozwiązywania m.in. problemów dynamiki, problemów z nieliniowymi związkami fizycznymi, zagadnień topologii dla wybranych teorii płyt itd.

Podobny układ ma monografia *Topology optimization, theory, methods and applications* napisana przez M. Bendsøe i O. Sigmunda z 2003 roku. Jest ona uaktualnioną i rozszerzoną wersją pracy [9].

Warto też wspomnieć, poza przytaczaną już wcześniej pracą [77], dotyczącą ESO, jeszcze o publikacji [29] – dotyczącej aspektów teoretycznych związanych z aproksymacją problemów optymalizacji topologii elementami skończonymi, o [48] – dotyczącej aspektów teoretycznych związanych z brakiem wypukłości w problemach optymalizacji oraz o [1], gdzie zawarto szczegółowy opis metody homogenizacji stosowanej w optymalizacji topologii.

Omówmy teraz w sposób nieco bardziej szczegółowy wymienione książki. W pracy [29] (Haslingera i Neittaanmäkiego) przeprowadzono kompleksową analizę matematyczną problemów optymalizacji topologii od sformułowania zadania w sensie matematycznym poprzez dyskretyzację metodą elementów skończonych, aż do analizy wrażliwości. Uwypuklono praktyczne aspekty zagadnienia. Rozważano problem istnienia rozwiązania. Z bardzo szerokiego spektrum zagadnień poruszanych w tej książce, w niniejszej pracy wykorzystano przede wszystkim dwa ostatnie rozdziały poświęcone optymalizacji topologii, również z wykorzystaniem materiału „fikcyjnego”, o czym wcześniej wspomniano przy omawianiu m.in. tzw. *direct approach* [8]. W [29] problem optymalizacji topologii jest traktowany jako problem optymalnej grubości projektowanego ciała, jest on dobrze uwarunkowany i nie wymaga podejścia relaksacyjnego. W [29] zamieszczono też niezbędne twierdzenia i ich dowody.

Z kolei w pracy [48] (Mistakidisa i Stavroulakisa) zajęto się problemem braku wypukłości i nieciągłością w zagadnieniach mechaniki, w tym także w optymalizacji topologii, której poświęcony jest jeden z rozdziałów. Przedstawiono w nim bardzo skrótowo niektóre aspekty optymalizacji topologii, w tym przede wszystkim problem dotyczący aktualizacji modułu Younga. Podano też literaturę dotyczącą tego zagadnienia (m.in. [24], [49], [50] i [79]).

Wydana w 2002 roku książka Allaira [1] stanowi podsumowanie prowadzonych przez autora prac dotyczących metody homogenizacji stosowanej do optymalizacji topologii oraz do zagadnień przewodnictwa. Prezentuje ona typowo matematyczne spojrzenie na rozpatrywany problem. Ostatni rozdział jest poświęcony algorytmom numerycznym i zawiera przykłady liczbowe dotyczące m.in. różnych aspektów optymalizacji topologii. W książce znaleźć można bardzo szczegółowy wykład dotyczący teorii homogenizacji z uwzględnieniem H -zbieżności oraz G -zbieżności, przedstawiono także matematyczny model materiałów kompozytowych oraz podano zasady optymalnego projektowania. Zamieszczono też wiele typowych dla optymalizacji topologii przykładów liczbowych. Książka ta stanowi bazę, do której można się odnieść, rozważając różne aspekty problemów optymalizacji topologii.

W dalszej części tego rozdziału omówione będą artykuły dotyczące optymalizacji topologii, mające związek z przedstawianą pracą, czyli dotyczące optymalizacji topologii kontinuum materialnego, choć różniące się podejściem, zastosowaną metodą rozwiązania, bądź innymi szczegółami. Mogą też być tu prezentowane prace, które dotyczą optymalizacji struktur prętowych, wiążące się z poruszonym w tej pracy zagadnieniem.

W pierwszej grupie omówione będą prace dotyczące optymalizacji topologii kontinuum materialnego, rozważane w ustalonym obszarze projektowym, w których zastosowano minimalizację podatności. Istotnym wyróżnikiem tego podejścia jest narzucenie ograniczeń na obwód powstałych otworów (*perimeter method*). Ponadto ograniczenia narzucono na dostępną w procesie masę. W zaproponowanej metodzie unika się konieczności relaksacji zmiennej projektowej, jaką jest gęstość względna w poszczególnych podobszarach. Zamiast ustalania dolnej granicy gęstości względnej zakłada się górne ograniczenie na obwód otworu. Zwiększanie liczby otworów powoduje zmniejszenie podatności [15]. W tym przypadku materiał stawał się strukturą z mikroporami. Rozważania dotyczące omawianej metody można znaleźć też w [26], a także w [7] oraz w [6], gdzie rozwiązano również konstrukcje trójwymiarowe. Warto zaznaczyć, że podejście to jest dobrze uwarunkowane ze względu na stosowanie ograniczeń narzuconych na obwód powstałych otworów, ponieważ problem opisany jest w obszarze, w którym jest materiał, a granice otworów są granicami rozpatrywanego ciała. Stosowanie tej metody daje możliwość kontrolowania wielkości i położenia otworów na każdym etapie procesu optymalizacji. Ponadto stosowanie odpowiednich filtrów, będących pewnym odpowiednikiem penalizacji, poprawia

zbieżność rozwiązania. Inne podejście prezentuje się w [23], gdzie dzięki zastosowaniu pewnej funkcji i włączeniu jej do funkcji celu unika się rozkładu szachownicowego, a także udaje się uzyskać rozkład zero-jedynkowy (pustka–materiał). Metoda ta została zastosowana do materiału o periodycznej budowie mikrostrukturalnej.

Wspomnijmy jeszcze o metodzie bąbelkowej opisaney w 1993 roku w [19] i rozwijanej później w [20] i [21]. Po wyznaczeniu topologii dla rozważanej funkcji celu i uwzględnianych w zadaniu ograniczeń w obszar zoptymalizowanego w danym kroku ciała wprowadza się otwór. Celem tego wprowadzenia jest „poprawienie” otrzymanej topologii, tzn. uzyskanie topologii, dla której funkcja celu przyjmie mniejszą wartość. Dla danej funkcji celu i zadanych ograniczeń formułowane są kryteria określające położenie otworu. Następnie, dla ciała, do którego wprowadzono otwór poszukiwana jest optymalna topologia. Proces ten powtarzany jest iteracyjnie, aż do otrzymania optymalnej topologii rozumianej w ten sposób, że kolejne wprowadzenie otworu „nie poprawi” już topologii. Trzeba przy tym zauważyć, że w kolejnych krokach zazwyczaj zmieniają się granice obszaru zajmowanego przez materiał, obszaru, który w tym przypadku każdorazowo jest tożsamy z obszarem projektowym.

Nieco inaczej zbudowany jest algorytm otrzymywania optymalnej topologii ciała w [44]. Nazwany jest on całkowicie zautomatyzowanym algorytmem (ACOS). Wykorzystano w nim minimalizację podatności, homogenizację i otrzymano rozkład z tzw. odcieniami szarości. Dopiero wtedy w drugim etapie dzięki zastosowaniu wielkości progowych uzyskuje się rozkład czarno-biały, nazywany tu binarnym. Okazuje się, że tzw. *thresholding*, sformułowany do tego zagadnienia przez autorów nie daje ani symetrii w zagadnieniu symetrycznym, ani nie daje prawidłowego rozwiązania, co wyraża się tym, iż algorytm pozostawia masę (czarne punkty) w miejscach, w których materiału nie powinno być. Wobec tego wprowadzono do algorytmu procedurę „naprawy” topologii sprowadzającej się do eliminacji zbędnej masy i przesuwaniu jej do właściwych miejsc. Tę procedurę można nazwać pewną formą postprocessingu. W dalszym etapie, właściwego postprocessingu, następuje wygładzanie kształtów za pomocą specjalnych procedur.

W tym miejscu warto wspomnieć o różnorodności uzyskanych rozwiązań danego problemu optymalizacji topologii. Pomimo że zarówno w omówionej powyżej pracy [44], jak i w [27] i [28], a także w niniejszej pracy w rozdziale czwartym mamy rozwiązany taki sam przykład; topologie są różne, nawet dla takiej samej dostępnej masy. Porównanie topologii jest wręcz niemożliwe, ponieważ rozwiązania podane w literaturze nie mają opisanych parametrów identyfikacyjnych. Pomimo nawet takiego samego podziału na elementy skończone są to różne zadania. Poza tym należy zauważyć, że zastosowane metody rozwiązania z reguły są różne. Zazwyczaj jednak charakter topologii jest bardzo podobny, a różnice często dotyczą pewnych szczegółów, co pokazano w rozdziale czwartym (np. w przypadku takiej samej dostępnej ma-

sy w procesie optymalizacji). Ponadto problem otrzymywania różnych rozwiązań danego zadania związany jest generalnie z wyborem ścieżki optymalizacji, na co zwraca się uwagę w rozdziale ósmym, gdzie jako podstawowe kryterium analizy dotyczącej wyznaczenia optymalnej topologii przyjęto kryterium energetyczne. Zauważmy także, że nie mamy tu do czynienia z występowaniem lokalnych minimów, tylko właśnie z różnorodnością uzyskanych rozwiązań danego problemu optymalizacji topologii, gdyż dla przyjętych parametrów minimalizacja rozważanego funkcjonału prowadzi do uzyskania ściśle określonego optymalnego rozwiązania, a dla innych parametrów do innego rozwiązania. Pewne wcześniejsze analizy dotyczące problemu różnorodności uzyskanych rozwiązań można znaleźć w [41].

W niewielu pracach podano algorytm opisujący postępowanie podczas procesu optymalizacji. Wśród nich można wymienić wspomnianą wyżej pracę [44], a także większość prac dotyczących ESO [77] i jej odmian, jak choćby [78]. Algorytm podano też w [27]. Zastosowany w niniejszej pracy algorytm, pozwalający na otrzymanie optymalnej topologii w ogólnej postaci, opublikowany był w [37]. Analiza stosowanych algorytmów jest użyteczna ze względu na możliwość lepszego porównania otrzymanych wyników.

Bardzo istotne znaczenie dla problemów optymalizacji topologii miało zastosowanie teorii homogenizacji, której początki można wiązać z pracą [10]. Pozycją podsumowującą rozważania dotyczące różnych aspektów związanych z zastosowaniem homogenizacji jest wydana ostatnio [1]. Warto przy tej okazji wspomnieć wcześniejsze prace dotyczące tej tematyki. Można wśród nich wymienić [2], [3] i [5], zawierające zarówno formalizm matematyczny problemu (wraz z odpowiednimi dowodami), jak i rozwiązania konkretnych problemów optymalizacji topologii. Wymienione pozycje opierają się m.in. na pracach [17], [22] oraz na [51]. Należy jeszcze dodać, że niektóre prace Allaire'a, Francfort'a, czy też Kohn'a wcześniej były prezentowane na np. NATO Advanced Workshop w Portugalii w 1992 roku (opublikowane przez Kluwer Academic Publishers w 1993 roku NATO ASI Series – Topology Design of Structures).

Praca [4], choć ukazała się przed [1], zawiera nowe aspekty dotyczące zastosowania teorii homogenizacji z uwzględnieniem relaksacji, która pozwala uzyskać rozwiązanie dla całego obszaru projektowego w sytuacji, gdy coraz większe jego obszary są pozbawiane materiału. Materiał zaczyna się wtedy koncentrować w pewnych obszarach, gdzie ze względu na wyężenie materiału jest niezbędny. Dla całego obszaru projektowego zadanie staje się źle uwarunkowane i niezbędne staje się wprowadzenie w obszar pozbawiony materiału odpowiednio wiotkiego materiału zastępczego, którego parametry będą w trakcie procesu optymalizacji poddane relaksacji. Oprócz rozważań teoretycznych w [4] zamieszczono też przykłady liczbowe. Wcześniejszą pracą, w której zastosowano formalizm relaksacyjny dla kontinuum materialnego była praca [18]. Z kolei w [39] analizowano wpływ relaksacji na szybkość otrzymania optymalnej topologii.

Dość szerokie spektrum problemów związanych z optymalizacją topologii jest poruszane w wielu pracach, których współautorem jest Ramm. Wymieńmy tylko niektóre z nich. W [61] poza bardzo ogólnymi uwagami na temat optymalizacji przedstawiono aspekty teoretyczne oraz rozwiązania wielu problemów. Są nimi np. wyznaczenie optymalnego kształtu konstrukcji płyty, powłoki cylindrycznej i sferycznej pod obciążeniem skupionym, a także m.in. płyty uźebrowanej. Ponadto analizowano problem optymalnej konstrukcji powłok ze względu na wyboczenie. W [46] przedstawiono pewną technikę adaptacyjną pozwalającą na otrzymanie podczas procesu optymalizacyjnego gładkich kształtów konstrukcji. Można to uzyskać poprzez aproksymowanie kształtów obszarów zajętych przez materiał w kolejnych cyklach za pomocą krzywych Beziera. Konieczne przy tym jest aktualizowanie siatki podziału konstrukcji na elementy skończone. Warto wspomnieć jeszcze o [11], gdzie optymalizowana jest konstrukcja lekkich przekryć. Praca ta jest o tyle ciekawa, że porównuje się w niej istniejące konstrukcje (Panteon w Paryżu, hale Uniwersytetu w Mainz i Uniwersytetu MIT) z obliczonymi odpowiednimi konstrukcjami optymalnymi. Również warta odnotowania jest praca [35], w której wyznaczono optymalną topologię konstrukcji ramowej ze względu na wyboczenie. Interesujące jest tu dodatkowo zastosowanie dwóch rodzajów podobszarów wewnątrz obszaru projektowego. Pierwszy z podobszarów jest z założenia wypełniony materiałem, natomiast w drugim prowadzimy proces optymalizacji. Możemy odnaleźć tu pewne podobieństwa do pokazanego w rozdziale jedenastym procesu optymalizacji, gdzie mamy również pewien podobszar z założenia wypełniony materiałem. Dodatkowo w rozdziale jedenastym założone są też rdzenie żeber, wokół których gromadzi się materiał w trakcie procesu optymalizacji.

Na zakończenie należy dodać, że niektóre z istotnych dla niniejszej pracy publikacji są cytowane w kolejnych rozdziałach, gdyż mają bezpośredni związek z przedstawianą w nich treścią, w związku z czym w tym rozdziale są pominięte.

1.5. Cel i zakres pracy

Jednym z wyzwań, jakie stają przed inżynierami w obecnych czasach jest konieczność projektowania konstrukcji w sposób optymalny. Dotyczy to projektowania konstrukcji typowych hal, konstrukcji mostowych, konstrukcji powłokowych stanowiących przekrycia dużych hal, czy wreszcie pewnych elementów konstrukcji budowlanych, gdzie szczególnie znaczenia nabiera problem zmniejszenia ciężaru, pełnego wykorzystania własności zastosowanego materiału, czy też uzyskania przy zadanej masie możliwie jak najszywniejszej konstrukcji. Rozważania dotyczące optymalnego kształtowania konstrukcji są obecnie coraz istotniejsze ze względu na pojawianie się nowych materiałów o parametrach zupełnie odmiennych od dotychczas stosowanych. Wreszcie nowe technologie pozwalają konstruować również w nowy, nieznan

tychczas sposób. Wszystko to zmusza projektantów do optymalnego projektowania konstrukcji.

Optymalne kształtowanie konstrukcji ma dość bogatą literaturę w ostatnich pięćdziesięciu latach. Dziedzina ta podzieliła się na szereg bardzo wąskich specjalności. Na przełomie lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych zaczęła się wyodrębniać specjalność nieco później nazwana optymalizacją topologii. Burzliwy rozwój tej dziedziny w ostatniej dekadzie owocował bardzo wieloma pracami, dzięki którym wiele problemów dotyczących optymalnego kształtowania konstrukcji zostało rozwiązanych. Jednak bardzo wiele problemów jest jeszcze w trakcie rozpoznania, trwa proces rozszerzania tej gałęzi wiedzy, zwłaszcza badanie wielu aspektów, które niejako intuicyjnie zostały wykorzystane w optymalizacji.

Po rozpoznaniu aktualnej sytuacji dotyczącej optymalizacji topologii, w tym metod, jakimi można się posługiwać, postanowiono zbadać szereg problemów dotychczas nie rozwiązanych, a także usprawnić sposoby otrzymywania optymalnej topologii ciała.

Autor niniejszej monografii miał na celu opracowanie szybkiego algorytmu optymalizacji topologii oraz rozpoznanie wielu parametrów ścieżki optymalizacji mających wpływ na szybkość i jakość otrzymanej topologii. Istotne było przy tym, aby otrzymana topologia była topologią optymalną, to znaczy, aby osiągnięte było minimum globalne rozpatrywanego funkcjonału. Wobec tego należało przeanalizować parametry sterujące procesem optymalizacji pod kątem odpowiedniego przyjęcia wielkości odpowiadających za jego przebieg.

Można więc określić teraz szczegółowe cele niniejszej pracy:

1. Sformułowanie w jednolitym zapisie problemu optymalizacji topologii kontinuum materialnego.
2. Analiza numeryczna zagadnienia.
3. Ocena wpływu parametrów ścieżki optymalizacji na otrzymaną topologię.
4. Otrzymanie optymalnej topologii ciała, co jest równoznaczne z osiągnięciem przez funkcjonal minimum globalnego.
5. Rozwiązanie wybranych problemów optymalizacji za pomocą otrzymanego algorytmu.

Zakres pracy obejmuje:

1. Przygotowanie podstaw teoretycznych w zakresie niezbędnym do sformułowania i rozwiązania rozważanego problemu.
2. Zbudowanie algorytmu optymalizacji topologii kontinuum materialnego, który powinien być bardziej efektywny niż algorytmy znane z literatury.
3. Zbudowanie odpowiednich programów komputerowych.
4. Wykonanie testów numerycznych weryfikujących możliwości zbudowanego algorytmu i pozwalających potwierdzić uzyskaną, wyższą efektywność tego algorytmu od efektywności algorytmów prezentowanych w literaturze.

5. Wykonanie obliczeń umożliwiających zbadanie wpływu parametrów ścieżki optymalizacyjnej na otrzymaną topologię. Rozważać się tu będzie wpływ:

- a) zastosowanych funkcji progowych,
- b) zastosowanych funkcji relaksacyjnych,
- c) przyjętego modelu aktualizacji tensora sprężystości podczas trwania procesu optymalizacji dla poszczególnych punktów materialnych.

6. Przeprowadzenie analizy otrzymanych topologii w poszukiwaniu optymalnej topologii ciała, co jest równoznaczne z poszukiwaniem minimum globalnego zastosowanego funkcjonału z uwzględnieniem różnych parametrów ścieżki optymalizacji.

7. Przeprowadzenie obliczeń niezbędnych do rozwiązania wybranych problemów optymalizacji.

Realizacja wymienionych celów w przedstawionym zakresie dała ostatecznie twierdzącą odpowiedź na pytanie o możliwość sformułowania w jednolitym zapisie problemu optymalizacji topologii kontinuum materialnego, a także na pytanie o możliwość zbudowania efektywniejszego od znanych z literatury algorytmów, który pozwala na otrzymanie optymalnej topologii w rozumieniu globalnym.

1.6. Układ pracy

Monografia składa się z trzynastu rozdziałów. Rozdział pierwszy podzielony jest na sześć podrozdziałów. W pierwszym podrozdziale bardzo krótko opisano rozpatrywane zagadnienie oraz przedstawiono szereg informacji dotyczących międzynarodowych spotkań związanych z optymalizacją topologii i informacji o stowarzyszeniu grupującym naukowców zajmujących się tą dziedziną. W drugim podrozdziale przedstawiono zakres optymalizacji topologii, podano szczegółowy podział dziedziny, lokalizując tematykę niniejszej pracy na jej ogólnym tle. W trzecim podrozdziale przedstawiono rys historyczny, nawiązując do najwcześniejszych prac dotyczących optymalizacji topologii. W czwartym podrozdziale dokonano przeglądu literatury. Na wstępie omówiono pozycje książkowe z ostatnich kilku lat, a następnie powołano się na literaturę opisującą różne podejścia, dzięki którym można otrzymać optymalną topologię ciała. Poruszono pewne podstawowe dla pracy zagadnienia, a także pokazano (na przykładzie literatury) jak szerokie spektrum zagadnień optymalizacji wiąże się z niniejszą pracą. W podrozdziale piątym znaleźć można określenie celu i zakresu pracy. Wreszcie w podrozdziale szóstym pokazano układ pracy.

W rozdziale drugim przedstawiono sformułowanie wariacyjne problemu brzegowego dla trójwymiarowego kontinuum materialnego, co pozwoliło otrzymać komplet równań opisujący rozpatrywane zagadnienie (związki geometryczne, fizyczne, równa-

nia równowagi, przemieszczeniowe lub naprężeniowe warunki brzegowe oraz kinematyczne lub statyczne warunki na granicach podobszarów znajdujących się wewnątrz obszaru projektowego).

W rozdziale trzecim, podzielonym na dwa podrozdziały, omówiono wszystkie aspekty teoretyczne dotyczące problemu optymalizacji topologii kontinuum materialnego. W podrozdziale pierwszym przedstawiono opis zadania, podano zastosowane założenia, opisano obszar projektowy, wewnątrz którego dokonuje się optymalizacji. Ponadto podano niezbędne podstawy zastosowanej teorii homogenizacji, a także opisano cechy charakteryzujące proces optymalizacji. W drugim podrozdziale, po krótkim wprowadzeniu, sformułowano w sposób wariacyjny problem optymalizacji dla obszaru poddanego homogenizacji oraz homogenizacyjno-relaksacyjny problem optymalizacji topologii kontinuum materialnego.

Rozdział czwarty zawiera cztery podrozdziały, z których pierwszy jest krótkim wstępem, w drugim przedstawiono algorytm metody elementów skończonych, w trzecim przedstawiono przykłady liczbowe. Ponadto zamieszczono w nim analizę porównawczą z przykładami zamieszczonymi w literaturze. Dokonano też analizy dla różnej gęstości siatki podziału. W ostatnim podrozdziale zdefiniowano pojęcie postprocessingu będącego zespołem działań mających na celu albo doprowadzenie do rozkładu materiał-pustka, albo (i) mających na celu wygładzenie kształtów. Pewne elementy postprocessingu są wykorzystane w kolejnych rozdziałach niniejszej pracy.

Następne trzy rozdziały (piąty, szósty i siódmy) zawierają analizę wpływu trzech parametrów sterujących szybkością i jakością otrzymanej topologii. W rozdziale piątym, po krótkim przeglądzie literatury dotyczącej wykorzystywania penalizacji, podaje się definicje funkcji progowych, za pomocą których poszukuje się optymalnej topologii, oraz rozwiązania dla różnych funkcji progowych. Wreszcie formułuje się wnioski dotyczące właściwego doboru funkcji progowych zapewniających odpowiednio szybko otrzymanie optymalnej topologii.

Rozdział szósty podzielony jest na pięć podrozdziałów. W pierwszym omówiono relaksację stosowaną dla układów prętowych, w drugim nawiązano do badań literaturowych dotyczących stosowania relaksacji dla kontinuum materialnego oraz sformułowano wielkość relaksacyjną. W trzecim podrozdziale bardzo krótko przedstawiono rozważania dotyczące definicji wielkości relaksacyjnej, a w czwartym podano wyniki dla zaproponowanych definicji funkcji relaksacyjnych. W piątym podrozdziale zamieszczono uwagi końcowe dotyczące właściwego doboru funkcji relaksacyjnej.

Rozdział siódmy dotyczy analizy wpływu na rozwiązanie różnych sposobów aktualizacji modułu Younga w kolejnych krokach procesu optymalizacji i jest podzielony na cztery podrozdziały. W pierwszym z nich zawarto uwagi wstępne, w drugim podano badane definicje, w trzecim przeprowadzono obliczenia dla przyjętych funkcji uaktualniających. W czwartym podrozdziale podsumowano badania,

podano wnioski dotyczące efektywności poszczególnych definicji uaktualniających moduł Younga.

Bardzo ważny jest rozdział ósmy, w którym podsumowano wyniki z poprzednich trzech rozdziałów. Przeprowadzono w nim obszerną analizę otrzymanych topologii w aspekcie energetycznym. Rozdział dzieli się na pięć podrozdziałów. Po krótkim wstępie w kolejnych trzech podrozdziałach analizowano rozwiązania danego zadania otrzymane dla różnych ścieżek optymalizacji. Ta różnorodność rozwiązań związana była ze stosowaniem kolejno różnych funkcji progowych, różnych funkcji relaksacyjnych i różnych funkcji aktualizujących moduł Younga. Obliczenia wykonano zmieniając jeden z parametrów przy stałych dwóch pozostałych. Analizę przeprowadzono pod kątem znalezienia topologii o minimalnej energii odkształcenia dla danej zmiennej. W ostatnim podrozdziale podsumowano rozważania dotyczące znalezienia takich parametrów zadania, przy których wyznaczona topologia będzie optymalna.

Kolejne cztery rozdziały (dziewiąty, dziesiąty, jedenasty i dwunasty) zawierają rozwiązania czterech problemów optymalizacji topologii. Układ tych rozdziałów jest taki sam. Dzieli się one na dwa podrozdziały, z których w pierwszym formuluje się problem, w drugim wykonuje się obliczenia w celu otrzymania optymalnej topologii rozważanego zadania. Zawsze na końcu drugiego podrozdziału można znaleźć krótkie uwagi podsumowujące dany rozdział. W rozdziale dziewiątym przedstawiono problem wyznaczenia optymalnej topologii dla ciała z założonymi otworami. We wstępie do rozdziału dziewiątego sformułowano problem od strony teoretycznej, a następnie rozwiązano przykłady dla zmieniającego się położenia i wielkości otworu.

Rozdział dziesiąty poświęcony jest problemowi znalezienia optymalnej topologii dla ciała, którego masa zmniejsza się w trakcie procesu optymalizacyjnego, a dodatkowo może nastąpić zwiększanie się obciążenia w trakcie tego procesu. To zagadnienie może znaleźć zastosowanie w tzw. inteligentnych konstrukcjach.

Rozdział jedenasty dotyczy wyznaczania optymalnej topologii przekroju poprzecznego dźwigara powierzchniowego, jakim jest wewnętrznie uźebrowana tarcza. Algorytm podany w tym rozdziale dodatkowo umożliwia projektantowi sprawdzenie, czy założona liczba żeber w przekroju poprzecznym jest optymalna.

Wreszcie w rozdziale dwunastym znajdujemy rozważania dotyczące otrzymania optymalnej topologii ciała, którego masa i zajmowany przez nią obszar zwiększa się w trakcie procesu optymalizacji. Rozpatrywany temat dotyczy dwóch niezależnych od siebie problemów:

1. Po dokonaniu homogenizacji masa jest równomiernie rozłożona w całym obszarze projektowym. Poszukuje się topologii dla początkowo małej dostępnej masy. Następnie masa ta rośnie, by na końcu osiągnąć swą docelową wartość.

2. Po dokonaniu homogenizacji masa jest równomiernie rozłożona tylko w pewnej części obszaru projektowego. Optymalizuje się topologię w tej części obszaru projek-

towego, w której zgromadzona była masa. Rozwiązuje się takie zadanie dla coraz bardziej zwiększającego się obszaru zajmowanego przez masę, przy czym masa rośnie proporcjonalnie do zwiększania się obszaru przez nią zajmowanego. W efekcie można otrzymać topologie umożliwiające zbudowanie konstrukcji, która na każdym etapie montażu będzie konstrukcją optymalną.

W rozdziale trzynastym dokonano podsumowania, po którym zamieszczono wykaz cytowanej literatury.

2. Problem brzegowy mechaniki trójwymiarowego kontinuum materialnego

2.1. Wstęp

W niniejszym rozdziale sformułowano problem brzegowy, w ujęciu liniowym, dla trójwymiarowego kontinuum materialnego, podlegającego ruchowi na skutek działania zadanego obciążenia. Oparto się na kierunkowej teorii powłok przedstawionej w [53] i [54]. Zastosowano rachunek wariacyjny – wykorzystano funkcjonal Hu-Wazhizu [64]. Na rozpatrywane ciało nakładano pewne więzy. Podczas ich formułowania wykorzystano elementy teorii więzów [76], która daje możliwość jednolitego opisu zagadnienia.

Przedstawione podstawowe równania dla trójwymiarowego kontinuum stanowią podstawę dla sformułowania w następnym rozdziale problemu optymalizacji topologii.

2.2. Sformułowanie wariacyjne problemu brzegowego dla trójwymiarowego kontinuum materialnego

Kontinuum zajmuje pewien obszar zwany obszarem projektowym Ω , którego objętość wynosi V . Geometrię trójwymiarowego kontinuum materialnego opisuje się w globalnym kartezjańskim układzie współrzędnych x_i oraz w lokalnym konwekcyjnym układzie współrzędnych \underline{x}_i . Wektor położenia dowolnego punktu w konfiguracji początkowej przyjmuje się

$$\mathbf{P}(\vartheta^\alpha, \xi) = \mathbf{R}(\vartheta^\alpha) + \mathbf{A}_3 \xi(\vartheta^\alpha), \quad (2.1)$$

gdzie \mathbf{R} jest wektorem położenia punktów na powierzchni podstawowej S , ϑ^α określa współrzędne krzywoliniowe na S , a \mathbf{A}_3 jest jednostkowym wektorem normalnym do S . Kowariantne wektory bazy zapisujemy jako

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \Theta^\alpha} = \mu_\alpha^\gamma \mathbf{A}_\gamma, \\ \mathbf{G}_3 &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \Theta^3} = \mathbf{A}_3,\end{aligned}\quad (2.2)$$

gdzie

$$\mu_\alpha^\gamma = \delta_\alpha^\gamma - \xi B_\alpha^\gamma \quad (2.3)$$

nazywany jest translatozem, a wielkość B_α^γ jest współrzędną drugiej formy podstawowej. Wektory \mathbf{A}_α tworzą bazę na powierzchni podstawowej S . Współrzędne tensora metrycznego wynoszą

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta} &= \mu_\alpha^\gamma \mu_\beta^\delta A_{\gamma\delta}, \\ G_{33} &= 1.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Zdefiniujmy

$$\mu = \det|\mu_\alpha^\gamma| = 1 - 2\xi H - \xi^2 K, \quad (2.5)$$

gdzie $H = \frac{1}{2} B_\alpha^\alpha$ jest średnią krzywizną, a $K = \det|B_\beta^\alpha|$ jest krzywizną Gaussa.

Zapiszmy kowariantne wektory bazy

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^\alpha &= (\mu^{-1})^\alpha_\gamma \mathbf{A}^\gamma, \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{A}_3,\end{aligned}\quad (2.6)$$

gdzie

$$(\mu^{-1})^\alpha_\beta = \frac{1}{\mu} [\delta_\beta^\alpha + \xi (B_\beta^\alpha - 2H \delta_\beta^\alpha)]. \quad (2.7)$$

Wobec tego współrzędne tensora metrycznego oblicza się następująco:

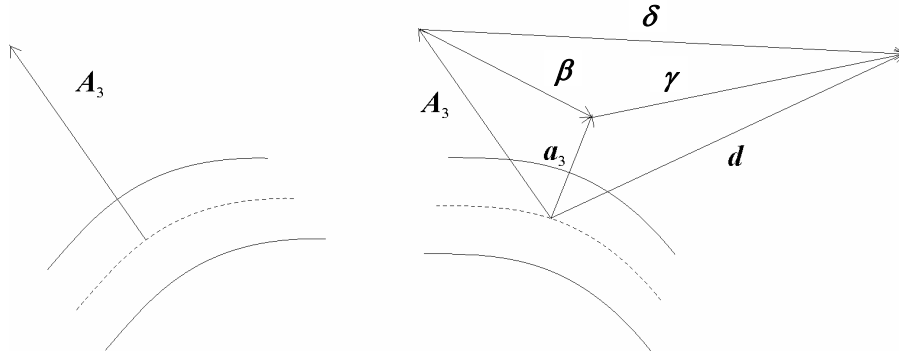
$$\begin{aligned}G^{\alpha\beta} &= (\mu^{-1})^\alpha_\gamma (\mu^{-1})^\beta_\delta A^{\gamma\delta}, \\ G^{33} &= 1.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Wektor położenia dowolnego punktu w konfiguracji aktualnej we współrzędnych konwekcyjnych wyrazić można zależnością

$$\mathbf{p}(\Theta^\alpha, \xi) = \mathbf{r}(\Theta^\alpha) + \xi \mathbf{d}(\Theta^\alpha), \quad (2.9)$$

w której

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R} + \mathbf{u}, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{A}_3 + \boldsymbol{\delta}, \\ \boldsymbol{\delta} &= \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \quad (2.10)$$



Rys. 2.1. Interpretacja geometryczna zależności (2.10)

Geometryczne zależności pomiędzy niektórymi powyższymi wielkościami pokazane są na rysunku 2.1. Wielkości te definiujemy następująco:

\mathbf{u} – wektor przemieszczenia powierzchni podstawowej S ,
 $\boldsymbol{\gamma}$ – wektor deformacji poprzecznej,
 natomiast

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_\alpha \mathbf{A}^\alpha, \quad (2.11)$$

$$\beta_\alpha = -\left(u_{3 \parallel \alpha} + B_\alpha^\beta u_\beta\right). \quad (2.12)$$

Podwójną kreską pionową oznaczono różniczkowanie kowariantne w bazie \mathbf{A}_α .
 Mając na względzie powyższe zależności można teraz zapisać wektor \mathbf{p} w postaci

$$\mathbf{p}(\Theta^\alpha, \xi) = \mathbf{R} + \mathbf{u} + \xi \boldsymbol{\delta} + \xi \mathbf{A}_3. \quad (2.13)$$

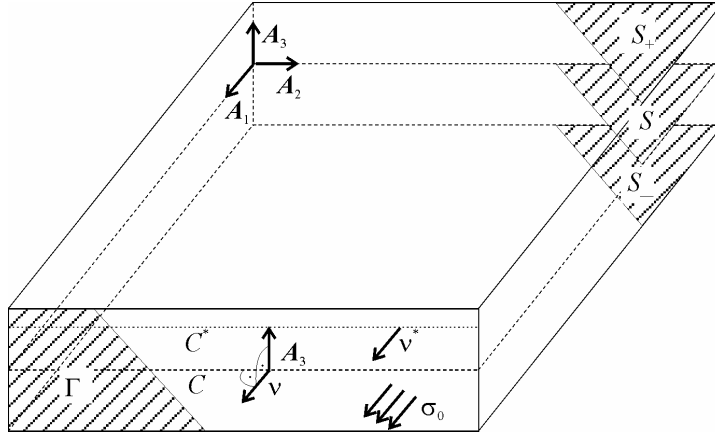
Wektory bazy wyznacza się następująco:

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \Theta^\alpha} = \mu_\alpha^\gamma \mathbf{A}^\gamma + \mathbf{u}_{\parallel \alpha} + \xi \boldsymbol{\delta}_{\parallel \alpha}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi} = \mathbf{A}_3 + \boldsymbol{\delta}. \quad (2.15)$$

Wektor przemieszczeń punktów kontinuum trójwymiarowego przyjmuje więc postać

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{P} = \mathbf{u} + \xi \boldsymbol{\delta}. \quad (2.16)$$



Rys. 2.2. Widok rozpatrywanego ciała

Równania opisujące trójwymiarowe kontinuum sprowadzone do powierzchni podstawowej uzyskano stosując pierwszą formę funkcjonału Hu-Washizu

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma^{ij}, e_{ij}, v_i) &= \frac{1}{2} \int_V C^{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV \\ &+ \int_V \sigma^{ij} \left[\frac{1}{2} (v_{i|j} + v_{j|i}) - e_{ij} \right] dV \\ &- \int_V X^i v_i dV - \int_{\Gamma_\tau} t^i v_i dS - \int_{\Gamma_u} \sigma^{ij} v_j^* (v_i - v_i^0) ds \\ &- \int_{S_+} q_+^i v_i dS_+ - \int_{S_-} q_-^i v_i dS_-, \end{aligned} \quad (2.17)$$

gdzie naprężenia, przemieszczenia i odkształcenia zapisane są w bazie trójwymiarowej konfiguracji początkowej. Powierzchnie S_+^i i S_-^i są powierzchniami granicznymi, na które działa obciążenie q_+^i i q_-^i . Siły objętościowe oznaczono jako X^i . Powierzchnie Γ_σ i Γ_u są powierzchniami brzegowymi, na których zadano odpowiednio obciążenia brzegowe t^i lub przemieszczenia brzegowe v_i^0 (rys. 2.2). Wektor \mathbf{v}^* jest wektorem normalnym do powierzchni Γ , a C^{ijkl} jest tensorem sprężystości, nato-

miast e_{ij} jest tensorem odkształcenia. Kreską pionową oznaczono różniczkowanie kowariantne w bazie trójwymiarowej \mathbf{G}_i . Na powierzchni podstawowej składowe wektora przemieszczenia można zapisać

$$\begin{aligned} v_\alpha &= u_\alpha + \xi \delta_\alpha, \\ v_3 &= u_3 + \xi \delta_3. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Zapiszmy funkcjonał

$$\Pi^* = \int_V r^\alpha (v_\alpha - u_\alpha - \xi \delta_\alpha) dV + \int_V r^3 (v_3 - u_3 - \xi \delta_3) dV, \quad (2.19)$$

gdzie r^α , r^3 są reakcjami więzi kinematycznych. Po uzupełnieniu funkcjonału Π funkcjonałem Π^* otrzymujemy $\tilde{\Pi} = \Pi + \Pi^*$ zapisany w bazie trójwymiarowej

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \frac{1}{2} \int_V C^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} dV + 2 \int_V C^{\alpha 3 \gamma 3} e_{\alpha 3} e_{\gamma 3} dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_V C^{3333} e_{33} e_{33} dV + \int_V C^{\alpha\beta 33} e_{\alpha\beta} e_{33} dV \\ &+ \int_V \sigma^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - e_{\alpha\beta} \right] dV \\ &+ \int_V \sigma^{\alpha 3} \left[\frac{1}{2} (v_{\alpha|3} + v_{3|\alpha}) - e_{\alpha 3} \right] dV \\ &+ \int_V \sigma^{33} \left[\frac{1}{2} (v_{3|3} + v_{3|3}) - e_{33} \right] dV \\ &- \int_V X^\alpha v_\alpha dV - \int_V X^3 v_3 dV - \int_{\Gamma_T} t^\alpha v_\alpha dS - \int_{\Gamma_T} t^3 v_3 dS \\ &- \int_{\Gamma_u} \sigma^{\alpha\beta} v_\beta^* (v_\alpha - v_\alpha^0) dS - \int_{\Gamma_u} \sigma^{\alpha 3} v_\alpha^* (v_3 - v_3^0) dS \\ &- \int_{S_+} q_+^\alpha v_\alpha dS_+ - \int_{S_+} q_+^3 v_3 dS_+ - \int_{S_-} q_-^\alpha v_\alpha dS_- - \int_{S_-} q_-^3 v_3 dS_- \\ &+ \int_V r^\alpha (v_\alpha - u_\alpha - \xi \delta_\alpha) dV + \int_V r^3 (v_3 - u_3 - \xi \delta_3) dV. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Przechodząc do zapisu funkcjonału na powierzchni podstawowej w bazie \mathbf{A}_i posłużono się zależnościami [53]

$$\begin{aligned}
v_{\alpha|\beta} &= \mu_{\alpha}^{\gamma} [v_{\gamma|\beta} - B_{\gamma\beta} u_3], \\
v_{\alpha|3} &= \mu_{\alpha}^{\gamma} v_{\gamma,3}, \\
v_{3|\alpha} &= v_{3,\alpha} + B_{\alpha}^{\gamma} v_{\gamma}, \\
v_{3|3} &= v_{3,3}, \\
v_{\alpha} &= \mu_{\alpha}^{\gamma} v_{\gamma},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

w których po lewej stronie ostatniej równości mamy przemieszczenie zapisane w bazie G_i , a po prawej w bazie A_i . Podwójną kreską oznaczono różniczkowanie kowariantne na powierzchni A_{α} , a przecinkiem różniczkowanie cząstkowe. W dalszej części całki po objętości zastąpiono całkami po powierzchni podstawowej S całkując po ξ

$$dV = \mu dS d\xi. \tag{2.22}$$

Zdefiniowano następujące siły wewnętrzne

$$\begin{aligned}
N^{\alpha\gamma} &= \int_{\xi} \mu \sigma^{\alpha\beta} \mu_{\beta}^{\gamma} d\xi, & N^{\alpha 3} &= \int_{\xi} \mu \sigma^{\alpha 3} d\xi, \\
M^{\alpha\gamma} &= \int_{\xi} \mu \sigma^{\alpha\beta} \mu_{\beta}^{\gamma} \xi d\xi, & N^{33} &= \int_{\xi} \mu \sigma^{33} d\xi, \\
M^{\alpha 3} &= \int_{\xi} \mu \sigma^{\alpha 3} \xi d\xi,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

gdzie zmienna ξ przybiera wartości $-0,5h$ do $0,5h$. Po uwzględnieniu (2.18) i (2.21) można zapisać

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) &= \frac{1}{2}(\mu_{\alpha}^{\gamma} u_{\gamma|\beta} - \mu_{\alpha}^{\gamma} B_{\gamma\beta} u_3 + \xi \mu_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\gamma|\beta}) \\
&+ \frac{1}{2}(-\xi \mu_{\alpha}^{\gamma} B_{\gamma\beta} \delta_3 + \mu_{\beta}^{\gamma} u_{\gamma|\alpha} - \mu_{\beta}^{\gamma} B_{\gamma\alpha} u_3) \\
&+ \frac{1}{2}(\xi \mu_{\beta}^{\gamma} \delta_{\gamma|\alpha} - \xi \mu_{\beta}^{\gamma} B_{\gamma\alpha} \delta_3), \\
\frac{1}{2}(v_{\alpha|3} + v_{3|\alpha}) &= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha} - \beta_{\alpha} + \xi \delta_{3,\alpha}), \\
\frac{1}{2}(v_{3|3} + v_{3|3}) &= \delta_3,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

a także

$$\begin{aligned}
e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\mu_{\alpha}^{\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} + \xi \mu_{\alpha}^{\gamma} \kappa_{\gamma\beta} + \mu_{\beta}^{\gamma} \varepsilon_{\gamma\alpha} + \xi \mu_{\beta}^{\gamma} \kappa_{\gamma\alpha} \right), \\
e_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(\xi \varepsilon_{\alpha 3} + \gamma_{\alpha} \right), \\
e_{33} &= \gamma_3,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

gdzie $\varepsilon_{\gamma\beta}$, $\varepsilon_{\gamma 3}$, $\kappa_{\gamma\beta}$, γ_{α} , γ_3 są tensorami odkształcenia zdefiniowanymi na powierzchni podstawowej. Tensory te określone są przez co najwyżej pierwsze pochodne przemieszczeń uogólnionych (\mathbf{u} oraz $\boldsymbol{\delta}$). Tensory sprężystości wyrazić można przez

$$\begin{aligned}
C^{\alpha\beta\gamma\delta} &= (\mu^{-1})_{\varepsilon}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\lambda}^{\beta} (\mu^{-1})_{\kappa}^{\gamma} (\mu^{-1})_{\nu}^{\delta} A^{\varepsilon\lambda\kappa\nu}, \\
C^{\alpha\beta 33} &= (\mu^{-1})_{\gamma}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\delta}^{\beta} A^{\gamma\delta 33}, \\
C^{\alpha 3\gamma 3} &= (\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\delta}^{\gamma} A^{\beta 3\delta 3}, \\
C^{3333} &= A^{3333},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

gdzie $A^{\varepsilon\lambda\kappa\nu}$, $A^{\gamma\delta 33}$, $A^{\beta 3\delta 3}$, A^{3333} są tensorami zdefiniowanymi na powierzchni podstawowej.

Oznaczmy następujące tensory:

$$\begin{aligned}
E^{\alpha\beta\tau\varepsilon} &= A^{\mu\beta\tau\kappa} \int_{\xi} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\kappa}^{\varepsilon} d\xi, \\
E_M^{\alpha\beta\tau\varepsilon} &= A^{\mu\beta\tau\kappa} \int_{\xi} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\kappa}^{\varepsilon} \xi d\xi, \\
E_{MM}^{\alpha\beta\tau\varepsilon} &= A^{\mu\beta\tau\kappa} \int_{\xi} \mu (\mu^{-1})_{\mu}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\kappa}^{\varepsilon} \xi^2 d\xi, \\
E^{\alpha\beta 33} &= A^{\alpha\gamma 33} \int_{\xi} \mu (\mu^{-1})_{\gamma}^{\beta} d\xi, \\
E_M^{\alpha\beta 33} &= A^{\alpha\gamma 33} \int_{\xi} \mu (\mu^{-1})_{\gamma}^{\beta} \xi d\xi, \\
E^{\alpha 3\gamma 3} &= A^{\beta 3\delta 3} \int_{\xi} \mu (\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\delta}^{\gamma} d\xi, \\
E_M^{\alpha 3\gamma 3} &= A^{\beta 3\delta 3} \int_{\xi} \mu (\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\delta}^{\gamma} \xi d\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{MM}^{\alpha 3 \gamma 3} &= A^{\beta 3 \delta 3} \int_{\xi} \mu (\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\delta}^{\gamma} \xi^2 d\xi, \\
E^{3333} &= A^{3333} \int_{\xi} \mu d\xi.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Składowe wektora przemieszczenia można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
v_{\alpha}^{+} &= u_{\alpha} + \xi^{+} \delta_{\alpha}, \\
v_{\alpha}^{-} &= u_{\alpha} + \xi^{-} \delta_{\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Zapiszmy

$$dS_{+} = \mu^{+} dS, \quad dS_{-} = \mu^{-} dS. \tag{2.29}$$

Uogólnione siły działające na granicach dS_{+} i dS_{-} definiuje się następująco:

$$\begin{aligned}
F^{\alpha} &= q_{+}^{\alpha} \mu^{+} + q_{-}^{\alpha} \mu^{-} + \int_{\xi} \mu X^{\alpha} d\xi, \\
F^3 &= q_{+}^3 \mu^{+} + q_{-}^3 \mu^{-} + \int_{\xi} \mu X^3 d\xi, \\
L^{\alpha} &= q_{+}^{\alpha} \mu^{+} \xi + q_{-}^{\alpha} \mu^{-} \xi + \int_{\xi} \mu X^{\alpha} \xi d\xi, \\
L^3 &= q_{+}^3 \mu^{+} \xi + q_{-}^3 \mu^{-} \xi + \int_{\xi} \mu X^3 \xi d\xi.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Natomiast uogólnione siły brzegowe są zdefiniowane jako

$$\begin{aligned}
T^{\alpha} &= \int_{\xi} \mu q^{\alpha} d\xi, & T^3 &= \int_{\xi} \mu q^3 d\xi, \\
T_M^{\alpha} &= \int_{\xi} \mu q^{\alpha} \xi d\xi, & T_M^3 &= \int_{\xi} \mu q^3 \xi d\xi,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

gdzie

$$q^{\alpha} = q_{+}^{\beta \alpha} v_{\beta}^{*}, \quad q^3 = q_{+}^{\beta 3} v_{\beta}^{*}, \tag{2.32}$$

a

$$v_{\alpha}^0 = u_{\alpha}^0 + \xi \delta_{\alpha}^0. \tag{2.33}$$

Znany jest związek pomiędzy powierzchnią Γ a krzywymi C_σ , C_u jako składowymi krzywej C

$$v_\beta^* d\Gamma = \mu v_\beta d\xi dC. \quad (2.34)$$

Można więc teraz zapisać funkcjonal \tilde{I} na powierzchni podstawowej

$$\begin{aligned} \tilde{I} = & \int_S \frac{1}{2} \left(E^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \varepsilon_{\tau\varepsilon} \varepsilon_{\beta\alpha} + E_M^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \kappa_{\tau\varepsilon} \varepsilon_{\beta\alpha} \right) dS \\ & + \int_S \frac{1}{2} \left(E_M^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \varepsilon_{\tau\varepsilon} \kappa_{\beta\alpha} + E_{MM}^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \kappa_{\tau\varepsilon} \kappa_{\beta\alpha} \right) dS \\ & + \int_S \frac{1}{2} \left(E_{MM}^{\alpha 3 \gamma 3} \varepsilon_{\alpha 3} \varepsilon_{\gamma 3} + E_M^{\alpha 3 \gamma 3} \varepsilon_{\alpha 3} \gamma_\gamma \right) dS \\ & + \int_S \frac{1}{2} \left(E_M^{\alpha 3 \gamma 3} \varepsilon_{\gamma 3} \gamma_\alpha + E^{\alpha 3 \gamma 3} \gamma_\alpha \gamma_\gamma + E^{3333} \gamma_3 \gamma_3 \right) dS \\ & + \int_S \frac{1}{2} \left(E^{\varepsilon\beta 33} \gamma_3 \varepsilon_{\varepsilon\beta} + E_M^{\varepsilon\beta 33} \gamma_3 \kappa_{\varepsilon\beta} \right) dS \\ & + \int_S \left(N^{\alpha\beta} u_{\beta\|\alpha} + M^{\alpha\beta} \delta_{\beta\|\alpha} - N^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} u_3 \right) dS \\ & + \int_S \left(-M^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} \delta_3 - N^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\alpha} - M^{\alpha\beta} \kappa_{\beta\alpha} \right) dS \\ & + \int_S \left(M^{\alpha 3} \delta_{3,\alpha} - M^{\alpha 3} \varepsilon_{\alpha 3} + N^{\alpha 3} (\delta_\alpha - \beta_\alpha) \right) dS \\ & + \int_S \left(-N^{\alpha 3} \gamma_\alpha + N^{33} \delta_3 - N^{33} \gamma_3 \right) dS \\ & - \int_S \left(F^\beta u_\beta + F^3 u_3 + L^\beta u_\beta + L^3 \delta_3 \right) dS \\ & - \int_{C_\sigma} \left(T^\beta u_\beta + T_M^\beta u_\beta + T^3 u_3 + T_M^3 \delta_3 \right) dC_\sigma \\ & - \int_{C_u} \left(N^{\alpha\beta} (u_\beta - u_\beta^0) v_\alpha + M^{\alpha\beta} (\delta_\beta - \delta_\beta^0) v_\alpha \right) dC_u \\ & - \int_{C_u} \left(N^{\alpha 3} (u_3 - u_3^0) v_\alpha + M^{\alpha 3} (\delta_3 - \delta_3^0) v_\alpha \right) dC_u. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Rozpatrywany obszar jest wypełniony izotropowym materiałem liniowo sprężystym o ściśle określonych parametrach materiałowych. Funkcjonał zapisany na powierzchni podstawowej zależy od tych parametrów. Dokonując wariacji tego funkcyjonału traktujemy przyrosty wirtualne argumentów funkcyjonału jako wzajemnie niezależne. Warunkiem stacjonarności jest zerowanie się pierwszej wariacji funkcyjonału. Z tego warunku otrzymujemy kolejno związki geometryczne, związki konstytutywne, równania równowagi, przemieszczeniowe i naprężeniowe warunki brzegowe.

Związki geometryczne:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\beta\alpha} &= u_{\beta|\alpha} - B_{\beta\alpha} u_3, \\
\kappa_{\beta\alpha} &= \delta_{\beta|\alpha} - B_{\beta\alpha} \delta_3, \\
\varepsilon_{\alpha 3} &= \delta_{3,\alpha}, \\
\gamma_\alpha &= \delta_\beta - \beta_\alpha, \\
\gamma_3 &= \delta_3.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Związki konstytutywne:

$$\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} &= E^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \varepsilon_{\tau\varepsilon} + E_M^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \kappa_{\tau\varepsilon} + E^{\alpha\beta 33} \gamma_3, \\
M^{\alpha\beta} &= E_M^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \varepsilon_{\tau\varepsilon} + E_{MM}^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \kappa_{\tau\varepsilon} + E_M^{\alpha\beta 33} \gamma_3, \\
M^{\alpha 3} &= E_{MM}^{\alpha 3\gamma 3} \varepsilon_{\gamma 3} + E_M^{\alpha 3\gamma 3} \gamma_\gamma, \\
N^{\alpha 3} &= E_M^{\alpha 3\gamma 3} \varepsilon_{\gamma 3} + E^{\alpha 3\gamma 3} \gamma_\gamma, \\
N^{33} &= E^{3333} \gamma_3 + E^{\alpha\beta 33} \varepsilon_{\alpha\beta} + E_M^{\alpha\beta 33} \kappa_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Równania równowagi:

$$\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} |_\alpha + F^\beta - N^{\alpha 3} B_\alpha^\beta &= 0, \\
N^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} + F^3 + N^{\alpha 3} |_\alpha &= 0, \\
M^{\alpha\beta} |_\alpha + L^\beta - N^{\beta 3} &= 0, \\
M^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} + L^3 + M^{\alpha 3} |_\alpha - N^{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Warunki brzegowe nałożone na przemieszczenia:

$$\begin{aligned} u_\beta &= u_\beta^0, & \delta_\beta &= \delta_\beta^0, \\ u_3 &= u_3^0, & \delta_3 &= \delta_3^0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

i na naprężenia

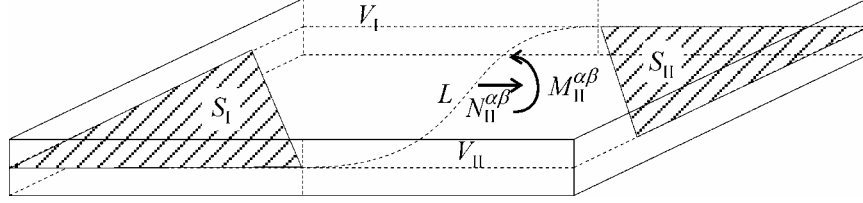
$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} v_\alpha &= T^\beta, \\ M^{\alpha\beta} v_\alpha &= T_M^\beta, \\ N^{\alpha 3} v_\alpha &= T^3, \\ M^{\alpha 3} v_\alpha &= T_M^3. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Powyższe równania zostały wyprowadzone dla ośrodka ciągłego jednospójnego. Rozważmy teraz ten sam obszar, jeśli chodzi o jego zasięg, ale składający się z dwóch podobszarów, z których każdy ma inne parametry materiałowe, co sprowadza się do tego, iż tensory sprężystości w obu podobszarach są różne. Podobszary te stykają się wzdłuż granicy, której położenie jest znane. Załóżmy, że wszelkie parametry dotyczące podobszaru V_I odpowiadają parametrom wcześniej rozpatrywanego obszaru V , natomiast podobszar V_{II} ma inne parametry. Ponieważ funkcjonal \tilde{II} został sprowadzony na powierzchnię podstawową, więc granica dzieląca podobszary jest teraz pewną krzywą L (rys. 2.3), a odpowiednie podobszary są teraz reprezentowane poprzez odpowiednie powierzchnie podstawowe S_I i S_{II} . Wzdłuż krzywej L , ze względu na ciągłość budowy materii w rozpatrywanym obszarze, założono następujące więzy:

$$\begin{aligned} u_\beta &= u_\beta^{II}, & u_3 &= u_3^{II}, \\ \delta_\beta &= \delta_\beta^{II}, & \delta_3 &= \delta_3^{II}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

gdzie $u_\beta, u_3, \delta_\beta, \delta_3$ dotyczą podobszaru V_I , natomiast $u_\beta^{II}, u_3^{II}, \delta_\beta^{II}, \delta_3^{II}$ dotyczą podobszaru V_{II} .

Rozpatrzmy teraz tylko podobszar V_I wiedząc, że wzdłuż krzywej L występują oddziaływania z podobszaru V_{II} zastąpione odpowiednimi uogólnionymi siłami wewnętrznymi z tego podobszaru $(N_{II}^{\alpha\beta}, M_{II}^{\alpha\beta}, N_{II}^{\alpha 3}, M_{II}^{\alpha 3})$. Przykładowo na rys. 2.3 pokazano dwie z tych sił.

Rys. 2.3. Obszar V_I i obszar V_{II}

Możemy teraz uzupełnić funkcjonal $\tilde{\Pi}$ o funkcjonal $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(u_i, \delta_i)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = & - \int_L (N^{\alpha\beta} (u_\beta - u_\beta^{II}) v_\alpha + M^{\alpha\beta} (\delta_\beta - \delta_\beta^{II}) v_\alpha) dL \\ & - \int_L (N^{\alpha 3} (u_3 - u_3^{II}) v_\alpha + M^{\alpha 3} (\delta_3 - \delta_3^{II}) v_\alpha) dL \\ & - \int_L (N_{II}^{\alpha\beta} v_\alpha u_\beta + M_{II}^{\alpha\beta} v_\alpha \delta_\beta + N_{II}^{\alpha 3} v_\alpha u_3 + M_{II}^{\alpha 3} v_\alpha \delta_3) dL. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Otrzymamy wtedy funkcjonal $\Pi^* = \tilde{\Pi} + \bar{\Pi}$. Jeśli teraz dokonamy wariacji funkcjonału Π^* , to oprócz równań od (2.36) do (2.40) otrzymamy jeszcze zależności takie, jakie występują na krzywej L . Są to warunki kinematyczne

$$\begin{aligned} u_\beta &= u_\beta^{II}, & u_3 &= u_3^{II}, \\ \delta_\beta &= \delta_\beta^{II}, & \delta_3 &= \delta_3^{II} \end{aligned} \quad (2.43)$$

oraz warunki statyczne

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= N_{II}^{\alpha\beta}, & M^{\alpha\beta} &= M_{II}^{\alpha\beta}, \\ N^{\alpha 3} &= N_{II}^{\alpha 3}, & M^{\alpha 3} &= M_{II}^{\alpha 3}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Jeżeli rozpatrywany obszar projektowy składa się ze skończonej liczby podobszarów o różnych parametrach materiałowych, to funkcjonal Π^* jest odpowiednio uzupełniony i otrzymujemy oprócz równań dotyczących danych podobszarów także odpowiednią liczbę równań (2.43) i (2.44) spełnionych osobno na każdej granicy podobszarów.

Przykłady liczbowe przedstawione są dla dźwigara powierzchniowego, jakim jest tarcza. Wtedy $\mu = 1$, $\mu_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$, $(\mu^{-1})_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$. Wobec tego równania od (2.36) do (2.40) sprowadzają się do

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= u_{\alpha,\beta}, \\ N^{\alpha\beta} &= E^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \varepsilon_{\tau\varepsilon}, \\ N^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} + F^\beta &= 0, \\ u_\beta &= u_\beta^0, \\ N^{\alpha\beta} \nu_\alpha &= T^\beta, \end{aligned} \tag{2.45}$$

gdzie

$$N^{\alpha\beta} = \int_\xi \sigma^{\alpha\beta} d\xi, \tag{2.46}$$

oraz

$$\begin{aligned} E^{\alpha\beta\tau\varepsilon} &= A^{\mu\beta\tau\kappa} \int_\xi \delta_\mu^\alpha \delta_\kappa^\varepsilon d\xi = A^{\alpha\beta\tau\varepsilon} \int_\xi d\xi \\ &= \left(\lambda^* A^{\alpha\beta} A^{\tau\varepsilon} + \mu (A^{\alpha\tau} A^{\beta\varepsilon} + A^{\alpha\varepsilon} A^{\beta\tau}) \right) \int_\xi d\xi, \end{aligned} \tag{2.47}$$

natomiast

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{2.48}$$

Wymienione wielkości λ oraz μ są stałymi Lamego, E jest modułem Younga, a ν jest współczynnikiem Poissona. $A^{\alpha\beta}$ reprezentuje składowe tensora metrycznego powierzchni podstawowej i jest równy $\delta^{\alpha\beta}$. Wtedy

$$E^{\alpha\beta\tau\varepsilon} = \left(\lambda^* \delta^{\alpha\beta} \delta^{\tau\varepsilon} + \mu (\delta^{\alpha\tau} \delta^{\beta\varepsilon} + \delta^{\alpha\varepsilon} \delta^{\beta\tau}) \right) \int_\xi d\xi, \tag{2.49}$$

W zadaniu rozpatruje się tarczę grubości h . Siły $N^{\alpha\beta}$ ostatecznie przyjmują postać

$$\begin{aligned}N^{11} &= ((\lambda^* + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda^* \varepsilon_{22})h, \\N^{22} &= ((\lambda^* + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda^* \varepsilon_{11})h, \\N^{12} = N^{21} &= (\mu(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}))h.\end{aligned}\tag{2.50}$$

Równania (2.43) i (2.44) sprowadzają się do

$$\begin{aligned}u_\beta &= u_\beta^{\text{II}}, \\N^{\alpha\beta} &= N_{11}^{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{2.51}$$

3. Sformułowanie problemu optymalizacji topologii

3.1. Wstęp

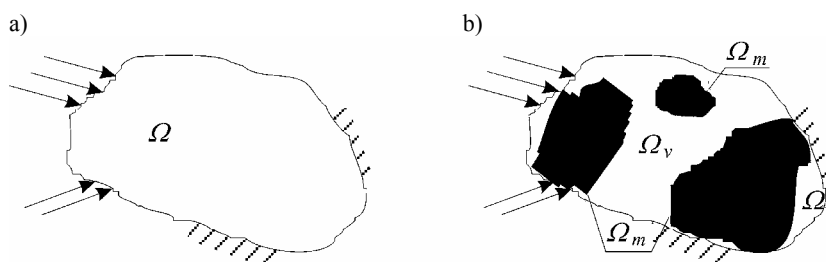
3.1.1. Opis sformułowanego zadania

W niniejszym rozdziale sformułowano i rozwiązano problem optymalizacji topologii kontinuum materialnego. Problem ten polega na znalezieniu optymalnego rozmieszczenia dostępnego materiału wewnątrz zadanego obszaru projektowego Ω , przy założeniu, że zdefiniowane są warunki brzegowe, a rozpatrywany obszar obciążony jest w ściśle określony sposób (rys. 3.1a). Do sformułowania problemu zastosowano podejście wariacyjne. Początkowo w całym obszarze projektowym mamy do czynienia z dowolnym rozkładem materiału (rys. 3.1b). W związku z tym zagadnienie rozwiązywane jest sekwencyjnie:

- **po pierwsze**, stosując podejście wariacyjne należy sformułować problem optymalizacji topologii dla obszaru poddanego homogenizacji.

W momencie rozpoczęcia procesu optymalizacji (kiedy gęstość masy w niektórych podobszarach obszaru projektowego przyjmuje wartość równą zero) zadanie staje się źle uwarunkowane i dlatego

- **po drugie**, stosując również podejście wariacyjne należy sformułować problem optymalizacji topologii w sposób relaksacyjny.



Rys. 3.1. Obszar projektowy Ω

Podany sposób postawienia problemu optymalizacji topologii przedstawiony będzie szczegółowo w rozdziale 3.2.

3.1.2. Założenia

Rozwiązując problem optymalizacji topologii przyjęto następujące założenia:

1. Rozważa się kontinuum materialne rozumiane jako jednorodny, izotropowy ośrodek ciągły i dla takiego ośrodka sformulowano problem w sensie teoretycznym oraz numerycznym.

2. Materiał jest liniowo sprężysty.

3. Rozwiązuje się zagadnienie statyczne.

4. Zakłada się, że tensor odkształcenia jest liniowy (teoria małych odkształceń).

5. W trakcie całego procesu optymalizacji zagadnienie rozpatruje się dla stałego obszaru projektowego Ω , co oznacza, że można posługiwać się w trakcie całego procesu zarówno tym samym formalizmem teoretycznym, jak i numerycznym.

6. Stosuje się podejście wariacyjne.

7. W procesie optymalizacji dysponuje się pewną określoną masą ciała, zwaną dostępną masą.

8. Przyjętym kryterium optymalizacji jest minimalizacja funkcjonału podatności rozważanego ciała przy ograniczeniach nałożonych na masę ciała.

3.1.3. Opis obszaru projektowego

Rozważania prowadzone są dla pewnego, ściśle określonego, obszaru projektowego Ω , w którym mamy do czynienia z kontinuum materialnym. Obszar projektowy traktuje się z punktu widzenia geometrycznego jako skończony zbiór **punktów geometrycznych**. Punkt geometryczny jest to obiekt geometryczny parametryzowany trzema współrzędnymi. Zakłada się, że każdemu takiemu punktowi można przyporządkować pewne własności materiałowe. Mogą one zmieniać się od punktu do punktu w trakcie procesu optymalizacji. Rozważając punkt geometryczny ze względu na jego własności materiałowe, będziemy go nazywali **punktem materialnym** (rys. 3.2).

Rozpatrywane kontinuum materialne traktuje się jako ciągłe w skali obszaru projektowego. Z drugiej strony rozpatruje się je jako dyskretne, identyfikując każdy punkt materialny jako osobny, niezależny punkt mający odrębne własności materiałowe.

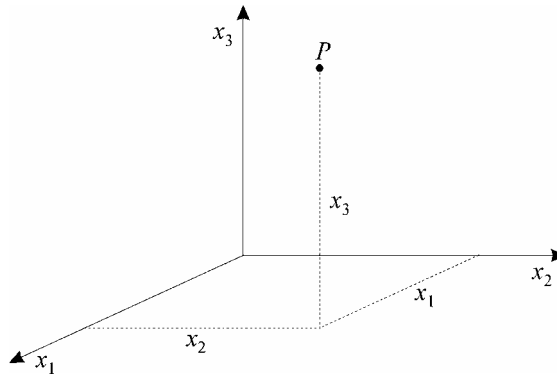
Masę całkowicie wypełniającą obszar projektowy Ω nazywamy m . Jej gęstość oznaczona jest jako ρ , a moduł sprężystości (moduł Younga) jako E . Najważniejszym parametrem początkowym jest wielkość dostępnej w procesie masy m_0 . Definiuje się **dostępną masę** w trakcie danego procesu optymalizacji jako

$$m_0 = \alpha m, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.1)$$

gdzie

$$m = V \rho, \quad (3.2)$$

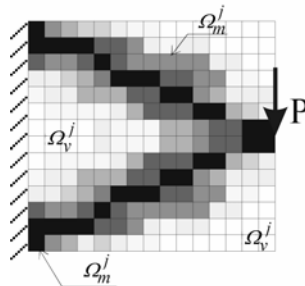
a współczynnik α jest **współczynnikiem redukcji masy**, określającym jaką część masy m bierze udział w procesie optymalizacji, natomiast V jest objętością obszaru Ω . W innym procesie dla tego samego obszaru projektowego dostępna masa może przyjmować inną wartość (w zależności od parametru α), dla której otrzymamy inną optymalną topologię.



Rys. 3.2. Punkt materialny

Rozpatrujemy w konfiguracji odniesienia obszar projektowy Ω , w którym, w ogólnym przypadku, początkowo można wyróżnić dwa obszary: Ω_m i Ω_v , zdefiniowane w ten sposób, że Ω_m wypełniony jest materiałem (dostępna masa), natomiast obszar Ω_v jest pozbawiony materiału (rys. 3.1b)

$$\Omega = \Omega_m \cup \Omega_v. \quad (3.3)$$



Rys. 3.3. Obszar projektowy Ω^j

W trakcie procesu optymalizacji dla rozpatrywanego obszaru zajmujemy się poszczególnymi punktami materialnymi, dla których otrzymujemy w kolejnych j -tych krokach dyskretny rozkład materiału. Rozkład ten charakteryzuje się tym, że obszar projektowy podczas procesu optymalizacji składać się będzie z dwóch rodzajów obszarów (rys. 3.3), co można przedstawić jako

$$\Omega^j = \Omega_m^j \cup \Omega_v^j, \quad (3.4)$$

gdzie dla kolejnego j -tego kroku Ω_m^j jest obszarem, w którym jest zgromadzony materiał, a Ω_v^j jest obszarem, w którym nie ma materiału. Zakładamy, że w ramach określonych równaniem (3.4) nie ma ograniczenia zarówno liczby i rozmiaru podobszarów pozbawionych materiału, jak i liczby oraz rozmiaru podobszarów wypełnionych materiałem, sumujących się odpowiednio w obszary Ω_v^j oraz Ω_m^j . Mogą one powstawać zarówno wewnątrz obszaru projektowego, jak i mieć wspólny brzeg z brzegiem obszaru projektowego. Należy dodać, że obszar Ω_m^j obejmuje punkty materialne o różnej gęstości masy przypisanej kolejnym punktom, co oznaczono różnymi odcieniami szarości. Gęstość masy w trakcie procesu optymalizacji dla danego kroku zmienia się od punktu do punktu. Liczba punktów materialnych należących do obszaru Ω_v^j wzrasta podczas procesu, a należących do obszaru Ω_m^j maleje. Jak widać na rysunku 3.3, każdy z dwóch wymienionych powyżej obszarów jest sumą pewnych podobszarów, często rozłącznych (jak w przypadku Ω_v^j). Po zakończeniu procesu optymalizacji otrzymamy

$$\Omega = \Omega_m \cup \Omega_v. \quad (3.5)$$

Obszar Ω_m składa się z punktów materialnych o gęstości materiału takiej, jaką miał początkowy materiał dostępnej do procesu masy (czyli ρ), co oznacza, że gęstość względna dla wszystkich punktów projektowych tego obszaru wynosi jeden.

3.1.4. Podstawy zastosowanej teorii homogenizacji

W niniejszej pracy zastosowana zostanie metoda homogenizacji, opierająca się na tzw. reprezentatywnej elementarnej objętości (Ω_{REO}), którą to objętością jest albo ściśle określona część rozważanego obszaru, albo cały obszar projektowy Ω [30]. Uśredniając analizowane pole fizyczne w reprezentatywnej elementarnej objętości otrzymuje się w tej objętości ciało zhomogenizowane. Metoda ta zwana jest metodą wygładzania, gdyż dzięki niej udaje się wygładzić początkowo silnie nieciągłe pola fizyczne. Homogenizacja może dotyczyć dowolnego pola $r(x)$ i określa ją zależność

$$z(x) = \frac{\int_{\Omega_{\text{REO}}} r(x) m(x) d\Omega}{\|\Omega_{\text{REO}}\|}, \quad (3.6)$$

w której $z(x)$ jest uśrednioną wielkością opisującą pole $r(x)$, $m(x)$ jest funkcją wagi, $\|\Omega_{\text{REO}}\|$ jest miarą objętości reprezentatywnej elementarnej objętości, wektor x określa położenie rozpatrywanego punktu materialnego.

W naszym przypadku funkcja $r(x)$ określa pole gęstości materiału, a $z(x)$ jest uśrednioną, czyli zhomogenizowaną wielkością pola gęstości materiału. Przyjęto, że miara objętości REO ($\|\Omega_{\text{REO}}\|$) jest wprost równa mierze całego obszaru projektowego Ω . Wartość funkcji wagi przyjęto równą jedności.

$$z(x) = \frac{\int_{\Omega} r(x) d\Omega}{\Omega}. \quad (3.7)$$

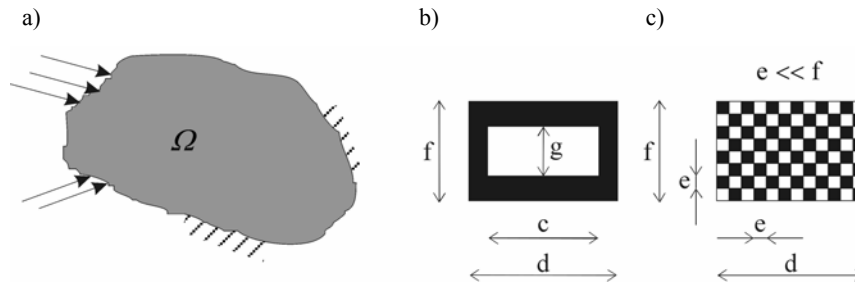
Rozważmy teraz dwa podobszary obszaru Ω (dotyczy to stanu początkowego pokazanego na rysunku 3.1b). Są nimi podobszar Ω_{m_p} , który jest wypełniony materiałem, oraz podobszar Ω_{v_p} , który jest pozbawiony materiału. Podobszary Ω_{m_p} i Ω_{v_p} są tożsame z obszarami Ω_m i Ω_v , lecz wyróżniono je tylko ze względu na potrzebę sformułowania poniższego równania. Ponieważ w naszym przypadku funkcja $r(x)$ jest równa gęstości dostępnej masy $\rho = \rho_m$ w podobszarze Ω_{m_p} i jest wielkością stałą oraz jest równa $\rho = \rho_v = 0$ w podobszarze Ω_{v_p} , to możemy zapisać

$$\int_{\Omega} r(x) d\Omega = \int_{\Omega_{m_p}} \rho_m d\Omega_{m_p} + \int_{\Omega_{v_p}} \rho_v d\Omega_{v_p} = m_0. \quad (3.8)$$

Wobec tego

$$z(x) = \frac{m_0}{\Omega} = \rho_h. \quad (3.9)$$

Jak widać, funkcja $z(x)$ jest stała na całym obszarze projektowym Ω . Gęstość ρ_h jest oczywiście mniejsza od początkowej gęstości ρ . Dzięki homogenizacji rozpatrywany obszar stał się jednorodnym obszarem wypełnionym materiałem o stałej gęstości ρ_h . Uzyskaliśmy w ten sposób nowy materiał o rozrzedzonej strukturze. Odcień szarości wewnątrz obszaru jest graficznym odpowiednikiem gęstości ρ_h (rys. 3.4a).



Rys. 3.4. Homogenizacja w obszarze projektowym

Definiujemy gęstość względną materiału zastępczego ρ_0 w obszarze projektowym Ω dla określonej dostępnej masy m_0

$$\rho_0 = \frac{m_0}{m}. \quad (3.10)$$

Po podstawieniu za m_0 zależności (3.1) mamy

$$\rho_0 = \alpha, \quad \alpha \in (0,1). \quad (3.11)$$

Gęstość materiału zastępczego ρ_0 jest to względna gęstość mieszcząca się w przedziale otwartym $(0,1)$. Jest ona liczbowo równa współczynnikowi α i dotyczy materiału po homogenizacji. W dalszej części pracy gęstość względną nazywana będzie krótko gęstością.

Często, między innymi w [3], podchodzi się do homogenizacji ciała w ten sposób, że w obszar projektowy wprowadza się równomiernie pory (otwory) o bardzo małych wymiarach geometrycznych (mikropory). Proces wypełniania mikroporami prowadzi się aż do momentu, gdy materiał z mikroporami całkowicie wypełni obszar projektowy (rys. 3.4a). Proces ten nazywany jest mikroperforacją materiału, którego parametrem jest wielkość otworów, określanymi wymiarami geometrycznymi, charakterystycznymi dla rozpatrywanej rodziny otworów (rys. 3.4b). Przykładowo, dla zagadnienia dwuwymiarowego zakłada się, że wymiarami tymi będą charakterystyczne długości boków prostokątnego (w ogólnym przypadku) otworu. W ten sposób otrzymujemy w obszarze projektowym zbiór tzw. „cel”. Obszar projektowy staje się ośrodkiem dwufazowym, w którym wyróżnić można materiał o gęstości ρ jako jedną fazę oraz otwory jako drugą fazę. Tak zdefiniowany ośrodek dwufazowy jest materiałem, który definiuje się jako materiał porowaty.

W niniejszej pracy homogenizacja będzie rozumiana nieco inaczej, choć sens fizyczny będzie podobny jak homogenizacji przedstawionej powyżej. Aby powstał materiał zhomogenizowany, musi być spełniony warunek równomiernego rozłożenia materiału, rozłożenia dokonanego w ściśle określony, możliwy do określenia pewną

funkcją rozkładu sposób (funkcja $z(x)$). Homogenizację potrzebną do opisu rozpatrywanego zagadnienia można zdefiniować w sposób następujący: mamy do dyspozycji pewną masę o gęstości ρ . Dokonujemy rozrzedzenia materiału w całym obszarze projektowym Ω , które z fizycznego punktu widzenia jest podobne do podanej powyżej homogenizacji znanej z literatury, gdyż w obu wypadkach średnia gęstość (ρ_h) zhomogenizowanego materiału dla całego obszaru projektowego jest taka sama. Różnica polega na tym, że model homogenizacji prezentowany w tej pracy jest modelem o większej jednorodności niż model prezentowany w [3], ponieważ nie zakłada on budowy ośrodka dwufazowego, a jedynie bardzo duże rozrzedzenie materiału w obszarze projektowym. Schematycznie przedstawiono to na rys. 3.4c, gdzie wymiar e jest dużo mniejszy od mniejszego z wymiarów boku prostokąta f . Model ten, ponieważ jest modelem jednorodnym, spełnia w pełni wszystkie założenia dotyczące zarówno samego procesu homogenizacji, jak i własności materiału zhomogenizowanego. Dlatego dla dalszego postępowania ważne będą wszystkie dowody dotyczące ciała zhomogenizowanego (m.in. podane w [52] oraz w [1]).

3.1.5. Opis charakteru procesu optymalizacji

Przeprowadzane rozważania dotyczą zmiennego w trakcie procesu optymalizacji układu fizycznego znajdującego się w ściśle określonym i niezmiennym obszarze projektowym Ω , układu będącego pod działaniem zadanego obciążenia, przy zadanych warunkach brzegowych. Zdefiniujemy zbiór P procesów rozpatrywanego układu fizycznego

$$P = \{ \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \dots, \gamma^N \}, \quad (3.12)$$

gdzie N jest liczbą procesów. Każdy taki proces γ^i jest zbiorem stanów układu fizycznego zwanych dalej topologiami

$$\gamma^i = \{ \gamma_1^i, \gamma_2^i, \gamma_3^i, \dots, \gamma_M^i \}, \quad (3.13)$$

gdzie M jest numerem kroku, dla którego otrzymano optymalną topologię. Tak więc γ^i stanowi pewien zbiór odwzorowań stanu początkowego kontinuum materialnego w pewne stany będące wynikiem obciążenia konstrukcji oraz trwającego procesu optymalizacji. Proces ten jest określony jako proces, w którym optymalizacji dokonuje się w każdym kroku. Analizując następujące po sobie stany dla kolejnych kroków procesu optymalizacji rozpatrujemy historię ewolucji kształtu konstrukcji znajdującej się w obszarze projektowym. Każdy zbiór γ^i opisywany jest przy pomocy pewnych funkcji $\Phi(x)$ powodujących, że proces optymalizacji przebiega w pewien ściśle okre-

ślony sposób $(\Phi(x) \rightarrow \gamma^i(\Phi(x)))$. Wpływ niektórych rozpatrywanych w tej pracy funkcji (dotyczących funkcji progowej, funkcji relaksacyjnej, a także sposobu aktualizacji modułu Younga) na proces optymalizacji jest omawiany w rozdziałach od piątego do siódmego.

Spośród wielu procesów P układu fizycznego, dla celów niniejszych rozważań wybierzmy te procesy optymalizacji, które są parametryzowane pewną funkcją relaksacyjną ε i nazwijmy je P_ε

$$P_\varepsilon = \{\gamma_\varepsilon^1, \gamma_\varepsilon^2, \gamma_\varepsilon^3, \dots, \gamma_\varepsilon^N\}, \quad (3.14)$$

przy $\varepsilon \rightarrow 0$. Wielkość N jest skończoną liczbą podzbiorów γ_ε^i . Każdy podzbiór γ_ε^i zawiera pewien uporządkowany ciąg stanów $\gamma_{\varepsilon j}^i$

$$\gamma_\varepsilon^i = \{\gamma_{\varepsilon 1}^i, \gamma_{\varepsilon 2}^i, \gamma_{\varepsilon 3}^i, \dots, \gamma_{\varepsilon M}^i\}, \quad (3.15)$$

gdzie M , tak jak powyżej, jest numerem kroku, dla którego otrzymano optymalną topologię. Każdy stan $\gamma_{\varepsilon j}^i$ jest topologią dla kroku numer j dla danych parametrów charakteryzujących zadanie. Podobnie można oznaczyć procesy spełniające wymagania dotyczące pozostałych parametrów sterujących zadaniem (określony sposób uaktualniania stałej sprężystości i określona funkcja progowa).

Zbiór zmiennych projektowych możemy zdefiniować jako

$$DV = \{\rho(x), E(x), \alpha(x), \beta(x), \dots\}, \quad (3.16)$$

gdzie $\rho(x)$ jest gęstością względną rozpatrywanego ciała, $E(x)$ jest to moduł sprężystości materiału zastępczego, często zwanego materiałem fikcyjnym, a $\alpha(x), \beta(x)$ są innymi zmiennymi projektowymi dla dowolnego procesu optymalizacji.

W rozważanym procesie optymalizacji topologii występują dwie zmienne projektowe: gęstość oraz stała sprężystości, przy czym stała sprężystości jest funkcją gęstości, co powoduje, że jedyną niezależną zmienną projektową jest gęstość.

W kolejnych j -tych krokach procesu optymalizacyjnego następujących po procesie homogenizacji mamy do czynienia z następstwem zmieniających się topologii o dyskretnych gęstościach zmieniających się w kolejnych krokach i różnych dla poszczególnych punktów materialnych, dla każdej topologii osobno. Można więc wprowadzić funkcję gęstości względnej, która dla kolejnych kroków będzie oznaczana jako $\rho_j(x)$ i stanowi zbiór gęstości względnych dla wszystkich punktów materialnych dla danego kroku j

$$\rho_j(x) = \{\rho_j^1, \rho_j^2, \rho_j^3, \dots, \rho_j^n\}, \quad (3.17)$$

gdzie n jest liczbą punktów materialnych. Funkcja ta określa stopień rozrzedzenia oryginalnej materii w każdym punkcie materialnym i przyjmuje wartości z przedziału $[0,1]$.

Drugą zmienną projektową jest stała sprężystości (moduł Younga). Dla każdego zbioru $\rho_j(x)$ otrzymujemy odpowiednio zbiór uaktualnionego modułu Younga

$$E_j(x) = \{E_j^1, E_j^2, E_j^3, \dots, E_j^n\}. \quad (3.18)$$

Gdy materiał w obszarze projektowym dąży do rozkładu materiał–pustka, to moduł Younga dąży do początkowej wartości E w punktach, gdzie jest materiał oraz do zera w punktach, gdzie nie ma materiału

$$\forall x \in \Omega_m^j : E_j^i(x) \rightarrow E, \quad \forall x \in \Omega_v^j : E_j^i(x) \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

3.2. Sformułowanie homogenizacyjne i podejście relaksacyjne

3.2.1. Wprowadzenie

W fazie początkowej dostępna masa m_0 o gęstości ρ jest skupiona tylko w pewnych podobszarach stanowiących część obszaru projektowego (rys.3.1b). Jeśli rozważamy problem brzegowy dla poszczególnych obszarów Ω_m , to można stwierdzić, że ma on jednoznaczne rozwiązanie. Oznacza to, że można wyznaczyć wektor przemieszczenia o składowych v_i . W każdym obszarze Ω_m spełnione są równania przedstawione w rozdziale drugim ((2.36)–(2.40)). Są to związki geometryczne, związki fizyczne, równania równowagi oraz na brzegu $\partial\Omega_m$, który jest równocześnie brzegiem $\partial\Omega_v$, spełnione są przemieszczeniowe lub naprężeniowe warunki brzegowe. Ponadto w obszarze Ω_v , wobec braku materiału, mogą być tylko sformułowane równania zgodności na brzegu z obszarem Ω_m . Pozostałe równania są tożsamościowo równe zero (gdyż w obszarze Ω_v tensor naprężenia jest równy zero).

Ponieważ interesuje nas optymalne rozłożenie materiału w całym obszarze projektowym Ω , zastosujemy teraz **homogenizację** dostępnej masy w obszarze Ω . Wtedy zadanie brzegowe ma rozwiązanie i w całym obszarze Ω spełnione są równania ((2.36)–(2.40)). Następnie rozpoczyna się proces optymalizacji, w trakcie którego dochodzi do eliminacji materiału z niektórych punktów materialnych, a więc do powstawania otworów w różnych miejscach obszaru projektowego Ω . Otwory mogą powstawać zarówno wewnątrz obszaru, jak i mieć wspólny brzeg z brzegiem obszaru projektowego. Dla każdego z obszarów wypełnionych materiałem z osobna spełnione są równania ((2.36)–(2.40)). Z chwilą powstania otworów zadanie staje się źle uwa-

runkowane, jeśli rozważamy je dla całego obszaru Ω . W związku z tym należy posłużyć się **podjęciem relaksacyjnym**.

Relaksacja problemu polega na wypełnieniu otworów bardzo wiotkim materiałem. Umożliwia to uniknięcie złego uwarunkowania zarówno w sensie matematycznym, jak i numerycznym. Wtedy dla całego obszaru Ω spełnione są równania ((2.36)–(2.40) oraz (2.43) i (2.44)). W końcowym etapie procesu optymalizacji, materiał znajdujący się w otworach staje się relatywnie na tyle słaby, że z punktu widzenia fizycznego można traktować go jako nieistniejący.

Uzasadnienie konieczności stosowania podejścia relaksacyjnego można znaleźć w [13], [18] oraz w [3]. Należy przy tym zauważyć, że w literaturze brakuje szczegółowych danych na temat przyjmowanych funkcji relaksacyjnych opisujących gęstość wiotkiego materiału wypełniającego obszar Ω_v .

3.2.2. Sformułowanie wariacyjne problemu optymalizacji dla obszaru poddanego homogenizacji

Problem optymalizacji dla kontinuum materialnego otrzymanego w wyniku homogenizacji opisujemy w sposób wariacyjny. W związku z podjęciem procesu projektowego, polegającego na przeprowadzeniu procesu optymalizacji, punkty materialne mogą być teraz nazywane punktami projektowymi, gdyż przedmiotem postępowania będzie właśnie projektowanie odpowiednich parametrów dla poszczególnych punktów materialnych.

Celem przedstawionej optymalizacji jest maksymalizacja sztywności, co odpowiada minimalizacji podatności, która jest wyrażona jako praca sił masowych (\mathbf{X}) i obciążenia zewnętrznego (\mathbf{t})

$$\Pi^E(x, v) = \int_{\Omega} X^i v_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} t^i v_i ds. \quad (3.20)$$

gdzie v_i oznacza składowe wektora przemieszczenia. Wektor obciążenia ciężarem własnym można opisać z jawnym uwzględnieniem funkcji gęstości jako $X^i = \rho(x)b^i$. Wtedy

$$\Pi^E(x, v) = \int_{\Omega} \rho(x)b^i v_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} t^i v_i ds, \quad (3.21)$$

gdzie $\rho(x)$ jest pewną uogólnioną funkcją gęstości kontinuum znajdującego się w obszarze projektowym.

Korzystamy z równości podatności konstrukcji (ciała) i energii odkształcenia zgromadzonej w kontinuum materialnym

$$\Pi^E(x, v) = 2\Pi^1(x, v), \quad (3.22)$$

gdzie:

$$2\Pi^1(x, v) = \int_{\Omega} C^{ijkl}(x, v, \rho(x)) e_{ij}(v) e_{kl}(v) d\Omega. \quad (3.23)$$

Minimalnej podatności konstrukcji odpowiada więc minimalna wartość energii odkształcenia jaka zgromadzić się może w rozpatrywanym kontinuum dla danego procesu optymalizacji

$$\Pi^E(\gamma^i) \rightarrow \Pi^E(x, v) = \min_{e_{ij}, e_{kl} \in Z} \int_{\Omega} C^{ijkl} e_{ij} e_{kl} d\Omega, \quad (3.24)$$

gdzie wskaźnik i w wyrażeniu γ^i nie podlega sumowaniu, natomiast Z jest zbiorem pól odkształceń

$$Z = \{Z^1, Z^2, \dots, Z^i, \dots, Z^N\}, \quad (3.25)$$

gdzie N , tak jak poprzednio, jest skończoną liczbą podzbiorów γ^i . Zbiór Z^i przedstawia się następująco:

$$Z^i = \{Z_{1}^i, Z_{2}^i, Z_{3}^i, \dots, Z_{M}^i\}, \quad (3.26)$$

gdzie M jest numerem kroku, dla którego otrzymano optymalną topologię. Każdy podzbiór Z_j^i jest zbiorem

$$Z_j^i = \{Z_{j1}^i, Z_{j2}^i, Z_{j3}^i, \dots, Z_{jn}^i\}, \quad (3.27)$$

gdzie n jest liczbą punktów materialnych ciała. Każde pole odkształceń Z_j^i to zbiór odkształceń dla danej topologii. Ponieważ rozważamy ciało po procesie homogenizacji, więc

$$\forall x \in \Omega : Z_{mk}^l = e_{ij}^k(x) \neq 0, \quad k \in [1, n], \quad (3.28)$$

gdzie n jest liczbą punktów materialnych obszaru Ω , m jest numerem kroku procesu optymalizacji, natomiast l jest numerem procesu.

Warunkiem niezbędnym dla przeprowadzenia procesu minimalizacji podatności jest w tym przypadku nałożenie na zadanie następujących ograniczeń: po pierwsze określamy wielkość dostępnej masy, która po homogenizacji musi spełniać

$$m_0 = \int_{\Omega} \rho_h d\Omega, \quad (3.29)$$

i po drugie dla danej już w tym momencie dostępnej masy zakładamy, że masa ciała podczas procesu optymalizacji (dla j -tego kroku) będzie równa określonej na początku dostępnej masie, co można wyrazić definiując następującą funkcję:

$$H(\rho_j) = \frac{m_j}{m_0} - 1 = 0. \quad (3.30)$$

Na podstawie powyższych zależności można zapisać problem optymalizacji jako

$$F(\rho(x)) = \min \left\{ \int_{\Omega} C^{ijkl}(\rho(x)) e_{ij} e_{kl} d\Omega; \right. \\ \left. \forall x \in \Omega : \rho(x) \in R^+; \int_{\Omega} \rho_h d\Omega = m_0 \right\}, \quad (3.31)$$

przy czym ponieważ obszar projektowy Ω składa się z obszarów Ω_m i Ω_v , w obszarze Ω_m spełnione są przedstawione w rozdziale drugim równania (2.36)–(2.40). Są to związki geometryczne, związki fizyczne, równania równowagi oraz na brzegu $\partial\Omega_m$, który jest równocześnie brzegiem $\partial\Omega_v$, spełnione są przemieszczeniowe lub naprężeniowe warunki brzegowe. Ponadto w Ω_v równania (2.36)–(2.40) są tożsamościowo równe zero. Wprowadzając mnożnik Lagrange'a λ równość (3.31) zapisujemy następująco:

$$F_h(\rho(x), \lambda) = \min \left\{ \int_{\Omega} C^{ijkl}(\rho(x)) e_{ij} e_{kl} d\Omega + \lambda \left(\int_{\Omega} \rho_h d\Omega - m_0 \right) \right\}. \quad (3.32)$$

W skrócie funkcjonal celu zapisujemy w postaci

$$F_h(\rho(x), \lambda) = \min \{F(\rho(x), \lambda)\}, \quad (3.33)$$

gdzie funkcjonal $F(\rho(x), \lambda)$ jest zdefiniowany jako

$$F(\rho(x), \lambda) = \int_{\Omega} C^{ijkl}(\rho(x)) e_{ij} e_{kl} d\Omega + \lambda \left(\int_{\Omega} \rho_h d\Omega - m_0 \right). \quad (3.34)$$

W trakcie procesu, dla każdego kroku zarówno gęstość jak i tensor sprężystości są zmienne i różne dla każdego punktu materialnego. Zauważmy, że dla rozważanego zagadnienia tensor C^{ijkl} jest funkcją modułu Younga, który zależy od gęstości w danym punkcie

$$C^{ijkl} = C^{ijkl}(E(\rho(x))). \quad (3.35)$$

Stosowane w pracy zależności funkcyjne modułu Younga od gęstości z uwzględnieniem tzw. *artificial approach* będą podane w rozdziale siódmym.

Jeśli poszukujemy optymalnego rozkładu materiału startując ze zhomogenizowanego obszaru, to zadanie ma rozwiązanie w sensie istnienia pewnego rozkładu masy w obszarze projektowym. Jednak zbieżność będzie słaba. W otrzymanym rozwiązaniu ustali się pewna proporcja w rozkładzie masy pomiędzy poszczególnymi punktami materialnymi. W całym obszarze projektowym będzie rozłożona masa, choć jej gęstość będzie różna, tym większa im bardziej będzie wyteżony dany punkt materialny. Te obszary, które zupełnie nie będą wyteżone też będą wypełnione materiałem, choć relatywnie bardziej wiotkim.

Ponieważ proces optymalizacji powinien doprowadzić do rozkładu materiał-pustka, więc w niewyteżonych punktach projektowych powinno dojść do całkowitego usunięcia z nich materiału (powinny zacząć powstawać obszary Ω_v). Wtedy jednak wystąpią problemy z uzyskaniem rozwiązania zadania ze względu na nieciągłość pola gęstości w obszarze projektowym.

Formalny zapis funkcjonału $F(\rho(x), \lambda)$ dla kolejnych kroków optymalizacji jest wtedy taki sam jak we wzorze (3.34), choć przyjmuje on teraz wartości

$$F(\rho(x), \lambda) = \begin{cases} \neq 0 & \text{w przypadku gdy } \rho(x) \neq 0 \rightarrow C^{ijkl} \neq 0, \\ = 0 & \text{w przypadku gdy } \rho(x) = 0 \rightarrow C^{ijkl} = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Jeżeli w obszarze Ω_v $\rho(x)$ przyjmuje wartość równą zero, to tensor C^{ijkl} też przyjmuje wartość równą zero, więc tensor naprężenia, a następnie energia odkształcenia w obszarze Ω_v mają także wartość równą zero.

Dla tak postawionego problemu, funkcjonał $F(\rho(x), \lambda)$ jest źle uwarunkowany i nie istnieje optymalna topologia dla obszaru Ω .

Gdybyśmy jednak w trakcie procesu optymalizacji opisanego równaniem (3.32) dopuścili możliwość modyfikacji granic obszaru projektowego, to możliwe byłoby wykorzystanie pomysłu Hadamarda, który w 1907 roku zmieniał granice rozpatrywanego obszaru, o czym wspomniano też w [52]. Oznacza to, że każdorazowo problem byłby opisywany i rozwiązywany w obszarze, gdzie wartość funkcji gęstości jest różna od zera. Jednak w naszym przypadku, ze względu na niezmiennosc obszaru projektowego podczas procesu optymalizacji nie możemy zastosować tego podejścia. Należy wobec tego zastosować podejście relaksacyjne, które zapewni ciągłość odpowiednio zmodyfikowanego funkcjonału w całym obszarze projektowym, co pozwoli na otrzymanie optymalnej topologii ciała.

3.2.3. Sformułowanie wariacyjne homogenizacyjno-relaksacyjne problemu optymalizacji

Celem naszym jest uzyskanie takiego dyskretnego rozkładu materii, dla którego w niektórych punktach materialnych w końcowym etapie procesu optymalizacji gęstość będzie równa gęstości materiału, którego rozkład podlega optymalizacji, a w pozostałych punktach materialnych gęstość będzie równa zero. W związku z tym musimy rozwiązać zadanie nieco inaczej sformułowane niż zadanie (3.32).

Będzie ono zmienione w ten sposób, że wprowadza się funkcję bardzo małej gęstości $\varepsilon(x)$ przypisaną do tych punktów materialnych, które w trakcie procesu optymalizacji należą do obszaru Ω_v . Gęstość $\varepsilon(x)$ jest wielkością relaksacyjną.

Przypomnijmy jeszcze obowiązujący tu warunek (3.30), w którym zakładamy, że masa ciała podczas procesu optymalizacji (dla j -tego kroku) musi być równa określonej na początku dostępnej masie

$$H(\rho_j) = \frac{m_j}{m_0} - 1 = 0. \quad (3.37)$$

Poszukiwane minimum funkcjonału $F(\rho(x), \lambda)$ jest z matematycznego punktu widzenia poszukiwaniem końcowego rozkładu zero-jedynkowego, fizycznie interpretowanego jako istnienie w obszarze projektowym Ω obszarów wypełnionych materiałem Ω_{m_k} i obszarów bez materiału, czyli obszarów Ω_{v_k} . Indeks k oznacza, że są to obszary powstałe na końcu procesu optymalizacyjnego. Wtedy obszar Ω_{m_k} jest wypełniony materiałem o początkowej stałej sprężystości E i gęstość tego materiału równa jest ρ .

Przejdźmy teraz do zastosowania podejścia relaksacyjnego, które będzie polegało z fizycznego punktu widzenia na wypełnieniu nieskończenie małą gęstością $\varepsilon(x)$ tych punktów materialnych, w których wystąpiły pustki, tzn. tam, gdzie pojawiły się obszary Ω_v . Proces relaksacji pozwala na ciągłą zmianę wielkości i położenia obszarów Ω_m oraz Ω_v w trakcie procesu optymalizacji, podczas którego materiał przemieszcza się wewnątrz obszaru projektowego do miejsc, gdzie z punktu widzenia wytrzymałości konstrukcji jest niezbędny.

W wyniku zastosowania relaksacji mamy w obszarze projektowym Ω dwa rodzaje obszarów. Jeden (Ω_m), zawierający materiał podlegający optymalnemu rozłożeniu o gęstości ρ i drugi (Ω_v), w którym materiał charakteryzuje się bardzo małą gęstością, jeśli porównamy ją do gęstości ρ . Wartości tych gęstości należą do zbiorów

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega_m : \rho(x) \in (0, 1], \\ \forall x \in \Omega_v : \varepsilon(x) \in (0, a], \quad a \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Wielkość a może być dowolnie małą i stałą wielkością dla danego procesu optymalizacji, może też być wielkością funkcyjną o wartościach zmniejszających się podczas procesu.

Tensor sprężystości dla danego punktu materialnego jest funkcją gęstości masy w tym punkcie materialnym. W trakcie procesu optymalizacji staje się on początkowym tensorem sprężystości C_0^{ijkl} w obszarze Ω_{m_k} oraz dąży do bliskiej zeru wielkości C_{1v}^{ijkl} w obszarze Ω_{v_k}

$$\begin{aligned} C^{ijkl} &= C^{ijkl}(x, v, \rho(x)) \rightarrow C_0^{ijkl}, \\ C_1^{ijkl} &= C_1^{ijkl}(x, v, \varepsilon(x)) \rightarrow C_{1v}^{ijkl}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

gdzie $C_0^{ijkl} = C^{ijkl}(E)$ i zależy od początkowego modułu Younga E (3.35).

Dla poszczególnych kroków j mamy następujące zbiory $C_j(\rho)$ oraz $C_j(\varepsilon)$, które są elementami zbioru $C_j(x)$:

$$\begin{aligned} C_j(x) &= \{C_j(\rho), C_j(\varepsilon)\} \\ &= \{C_j^1(\rho), C_j^2(\rho), C_j^3(\rho), \dots, C_j^{nm}(\rho)\} \\ &\quad + \{C_j^1(\varepsilon), C_j^2(\varepsilon), C_j^3(\varepsilon), \dots, C_j^{nv}(\varepsilon)\}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

gdzie n jest liczbą punktów materialnych i wynosi

$$n = nm + nv, \quad (3.41)$$

gdzie nm oznacza liczbę punktów materialnych obszaru Ω_m , natomiast nv oznacza liczbę punktów materialnych obszaru Ω_v . W trakcie procesu optymalizacji nm maleje, a nv rośnie.

Zmodyfikujemy odpowiednio funkcjonal $F(\rho(x), \lambda)$, uwzględniając w nim materiał zastępczy o odpowiednio małej gęstości $\varepsilon(x)$. Wobec tego zdefiniujemy nowy funkcjonal $F^\varepsilon(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v)$ jako

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v) &= \int_{\Omega_m} C^{iklm}(\rho(x)) e_{ik} e_{lm} d\Omega_m \\ &\quad + \int_{\Omega_v} C_1^{iklm}(\varepsilon(x)) e_{ik} e_{lm} d\Omega_v + \lambda^m \left(\int_{\Omega_m} \rho(x) d\Omega_m - m_{0_m} \right) \\ &\quad + \lambda^v \left(\int_{\Omega_v} \varepsilon(x) d\Omega_v - m_{0_v} \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

gdzie $m_{0_}\Omega_m$ jest dostępną masą zgromadzoną w obszarze Ω_m , natomiast $m_{0_}\Omega_v$ jest dostępną masą w obszarze Ω_v , wyrażoną przez bardzo małą liczbę, jeśli porównamy ją do liczby wyrażającej dostępną masę $m_{0_}\Omega_m$. Ponadto λ^m oraz λ^v są to odpowiednio mnożniki Lagrange'a dla obszaru Ω_m i dla obszaru Ω_v . Podobnie jak formułując równanie (3.31) również i teraz należy pamiętać, iż w obszarze Ω spełnione są równania przedstawione w rozdziale drugim (2.36)–(2.40) oraz (2.43) i (2.44). Są to związki geometryczne, związki fizyczne, równania równowagi oraz przemieszczeniowe lub naprężeniowe warunki brzegowe, a także przemieszczeniowe lub naprężeniowe warunki brzegowe na granicach podobszarów wypełnionych materiałami o różnych parametrach. Odpowiednio dla przykładu liczbowego rozwiązywanego numerycznie równania (2.36)–(2.40) oraz (2.43) i (2.44) przyjmują postać przedstawioną równaniami (2.45) i (2.51).

Nowo wprowadzone wielkości dotyczące dostępnej masy spełniają warunek

$$m_0 = m_{0_}\Omega_m + m_{0_}\Omega_v. \quad (3.43)$$

Każdy funkcjonal $F^\varepsilon(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v)$ jest zbiorem funkcjonałów dla poszczególnych kroków j

$$F^\varepsilon(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v) = \{F_j^\varepsilon(\rho_j(x), \varepsilon_j(x), \lambda_j^m, \lambda_j^v)\}. \quad (3.44)$$

Z kolei każdy funkcjonal $F_j^\varepsilon(\rho_j(x), \varepsilon_j(x), \lambda_j^m, \lambda_j^v)$ można przedstawić jako

$$\begin{aligned} F_j^\varepsilon(\rho_j(x), \varepsilon_j(x), \lambda_j^m, \lambda_j^v) = & \int_{\Omega_m} C_j^{iklm}(\rho_j(x)) e_{ik} e_{lm} d\Omega_m \\ & + \int_{\Omega_v} C_{1j}^{iklm}(\varepsilon_j(x)) e_{ik} e_{lm} d\Omega_v + \lambda_j^m \left(\int_{\Omega_m} \rho_j(x) d\Omega_m - m_{j_}\Omega_m \right) \\ & + \lambda_j^v \left(\int_{\Omega_v} \varepsilon_j(x) d\Omega_v - m_{j_}\Omega_v \right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

gdzie

$$m_j = m_{j_}\Omega_m + m_{j_}\Omega_v, \quad (3.46)$$

przy czym m_j zawsze spełnia (3.37).

Poszczególne funkcjonały F_j^ε są sformułowane dla rozpatrywanego obszaru projektowego i odpowiadają kolejnym topologiom, czyli stanom $\gamma_{\varepsilon_j}^i$

$$F_j^\varepsilon(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v) \Rightarrow \gamma_{\varepsilon j}^i. \quad (3.47)$$

Rozpatrzmy teraz funkcjonal F^ε , dla którego wyznaczymy F_m^ε (minimalną wielkość energii odkształcenia)

$$F_m^\varepsilon(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v) = \min F^\varepsilon(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v). \quad (3.48)$$

Ciąg topologii dla kolejnych kroków procesu optymalizacji dąży do rozkładu materiał-pustka

$$\gamma_{\varepsilon j}^i(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\Rightarrow} \gamma_{\varepsilon M}^i(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v), \quad (3.49)$$

gdzie $\gamma_{\varepsilon M}^i$ jest optymalną topologią, dla której osiągnięta została minimalna wartość energii odkształcenia.

Dokonajmy wariacji funkcjonału $F^\varepsilon(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v)$ ze względu na zmienne projektowe jakimi są gęstość (ρ , ε) oraz mnożniki Lagrange'a (λ^m , λ^v)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial(C^{iklm}(\rho(x)) e_{ik} e_{lm})}{\partial \rho} + \lambda^m = 0, \\ \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \varepsilon} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial(C_1^{iklm}(\varepsilon(x)) e_{ik} e_{lm})}{\partial \varepsilon} + \lambda^v = 0, \\ \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \lambda^m} = 0 &\Rightarrow \int_{\Omega_m} \rho(x) d\Omega_m = m_{0-\Omega_m}, \\ \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \lambda^v} = 0 &\Rightarrow \int_{\Omega_v} \varepsilon(x) d\Omega_v = m_{0-\Omega_v}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Korzystamy przy tym z założenia, że proces optymalizacji jest prowadzony w całym niezmiennym w trakcie procesu obszarze Ω , oraz że obciążenie przyłożone do granic obszaru nie zależy od zmiennych projektowych DV . Wobec tego dwa pierwsze powyżej przedstawione równania zapisujemy jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial(C^{iklm}(\rho) e_{ik} e_{lm})}{\partial \rho} &= \frac{\partial(C^{iklm}(\rho(x)))}{\partial \rho} e_{ik} e_{lm}, \\ \frac{\partial(C_1^{iklm}(\varepsilon) e_{ik} e_{lm})}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial(C_1^{iklm}(\varepsilon(x)))}{\partial \varepsilon} e_{ik} e_{lm}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Tensor sprężystości zależy od modułu Younga, a ten z kolei od gęstości ciała w danym punkcie (wzór (3.35)). Wobec tego, jeśli przyjmie się funkcję określającą tę zależ-

ność, łatwo można wyznaczyć jawną postać powyższych równań. Dla przykładu, jeśli we wzorze (3.35) założymy dla $j + 1$ kroku jako

$$C_{j+1}^{iklm}(E_{j+1}(\rho_j)) = C^{iklm} \left(E \left[\frac{\rho_j}{\rho_0} \right]^p \right), \quad p \geq 1, \quad (3.52)$$

to dwa pierwsze warunki stacjonarności mają postać

$$\begin{aligned} p \frac{C^{iklm}(\rho(x)) e_{ik} e_{lm}}{\rho_j} + \lambda^m &= 0, \\ p \frac{C_1^{iklm}(\varepsilon(x)) e_{ik} e_{lm}}{\varepsilon_j} + \lambda^v &= 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

W rozdziale siódmym rozważane są również inne funkcje uaktualniające tensor sprężystości. Jedną z nich przyjmuje się w postaci

$$C_{j+1}^{iklm}(E_{j+1}(\rho_j)) = C^{iklm} \left(E \left[1 + \frac{\rho_j}{1!} + \frac{\rho_j^2}{2!} + \dots + \frac{\rho_j^t}{t!} \right] \right), \quad (3.54)$$

wtedy wspomniane dwa pierwsze warunki stacjonarności przedstawiają się zależnością

$$\begin{aligned} C^{iklm}(\rho(x)) e_{ik} e_{lm} + \lambda^m &= 0, \\ C_1^{iklm}(\varepsilon(x)) e_{ik} e_{lm} + \lambda^v &= 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

4. Algorytm metody elementów skończonych wraz z przykładami liczbowymi

4.1. Wstęp

Problem optymalizacji topologii kontinuum materialnego został rozwiązany numerycznie metodą elementów skończonych – najlepszą z punktu widzenia odpowiedniości obiektu rzeczywistego do analizowanego modelu. Traktuje się przy tym pojedyncze punkty materialne jako poszczególne elementy skończone, z których należy usunąć, bądź do których należy przesunąć w danym kroku podczas procesu optymalizacji pewną masę ciała. Wielkość przesuwanej masy wynika z aktualnych analiz parametrów procesu. Podział na elementy skończone dokonuje się jeden raz dla całego obszaru projektowego Ω i nie zmienia się go podczas procesu. Jest to niewątpliwa zaleta, dzięki której ten sam algorytm jest użyteczny od początku do końca procesu optymalizacji. Odpowiednio zagęszczając siatkę podziału można zbadać zbieżność procesu optymalizacji, a także uzyskać bardziej gładki kształt konstrukcji.

W trakcie procesu optymalizacji dla poszczególnych punktów materialnych uaktualniamy dwie zmienne projektowe: gęstość i moduł Younga.

W dalszej części pracy posługiwać się będziemy pojęciem gęstości względnej materiału zastępczego, występującej podczas procesu optymalizacji w jego kolejnych krokach dla poszczególnych punktów materialnych. Jej definicja opiera się na pojęciu gęstości względnej materiału zastępczego ρ_0 dla etapu homogenizacji materiału. Dla uproszczenia wielkość ta dla poszczególnego punktu materialnego nazywana będzie w skrócie gęstością i przypomnijmy z poprzedniego rozdziału, że oznaczana jest jako $\rho_j^i(x)$

$$\rho_j(x) = \{\rho_j^1, \rho_j^2, \rho_j^3, \dots, \rho_j^n\}, \quad (4.1)$$

gdzie j jest numerem kroku optymalizacji, górny wskaźnik i – przebiegający wartości od 1 do n – jest numerem punktu materialnego lub elementu skończonego w analizie

numerycznej metodą elementów skończonych, a $\rho_j(x)$ – zbiorem gęstości dla danego kroku j , dla którego w obszarze projektowym możemy mieć wartości gęstości względnej z zakresu $[0,1]$.

Podobnie można przedstawić moduł Younga w poszczególnych punktach materialnych i dla kroku j

$$E_j(x) = \{E_j^1, E_j^2, E_j^3, \dots, E_j^n\}. \quad (4.2)$$

Należy podkreślić, że proces optymalizacji ma charakter ewolucyjny, ponieważ zagadnienie brzegowe rozwiązujemy wiele razy, a masa ciała przesuwa się do obszarów, gdzie wyężenie konstrukcji jest większe. Algorytm jest niewrażliwy na sposób początkowego, często dowolnego rozłożenia masy, gdyż masa ta jest poddana homogenizacji na całym obszarze projektowym i dopiero wtedy rozpoczyna się proces optymalizacji. Jeśli siatka podziału jest odpowiednio przyjęta i wszystkie parametry procesu są również właściwie dobrane, to zagadnienie jest wystarczająco szybko zbieżne i w efekcie otrzymujemy optymalną topologię ciała, dla którego podatność osiągnęła minimum. Odpowiada to takiemu rozkładowi materiału, dla którego w pewnych obszarach jest materiał o gęstości ρ , a w pozostałych nie ma materiału.

W literaturze znane są rozwiązania zawierające w końcowym etapie procesu obszary z gęstością pośrednią (po osiągnięciu zbieżności problemu optymalizacji – kiedy podatność osiągnęła minimum). Aby uzyskać rozkład typu materiał–pustka, należy zastosować specjalnego rodzaju procedury, zwane procedurami postprocessingu, bądź dalej wykorzystywać algorytm optymalizacji i po przebiegu jeszcze kilku do kilkunastu kroków otrzymać rozkład materiał–pustka. Nie jest to jednak rozkład optymalny, choć analiza takiego rozkładu pozwala uzyskać użyteczne informacje dla wcześniej wspomnianego procesu postprocessingu. Wszystkie omówione tu ścieżki postępowania stanowią bazę umożliwiającą zaprojektowanie konstrukcji w sposób optymalny.

W proponowanym algorytmie, związanym z podejściem zwanym *artificial approach*, stosuje się proces relaksacyjny, używa procedury wykorzystującej funkcje progowe oraz stosuje się „fikcyjny” materiał w czasie trwania procesu. Podejście *artificial approach* jest używane przez wielu autorów, jednak w literaturze jego opis ogranicza się jedynie do zaproponowania pewnych ogólnych zależności dotyczących aktualizacji modułu Younga. Cały algorytm wyznaczania optymalnej topologii jest więc w tej pracy oryginalny. Ponieważ przeprowadzono obszerną analizę wielu parametrów mających wpływ na szybkość i jakość otrzymanej topologii, postanowiono wyniki tych analiz numerycznych pokazać na przykładzie liczbowym, dobrze znanym z literatury, którym jest tarcza wspornikowa obciążona na końcu siłą. Pozwoliło to na dokonanie pewnych porównań z rozwiązaniami znanymi z innych prac. Zastosowany podział na elementy dawał możliwość uzyskania dużej liczby wyników w stosunkowo krótkim czasie, a równocześnie był wystarczający, jeśli chodzi o analizę istoty zagadnienia.

Na wszystkich rysunkach kolor czarny oznacza, że gęstość względna, zwana gęstością, wynosi jeden, a kolor biały – gęstość wynoszącą zero. Wszelkie odcienie szarości odpowiadają gęstościom z przedziału otwartego od zera do jedynki.

4.2. Algorytm metody elementów skończonych

Energia odkształcenia (Π^1) dla całego obszaru projektowego w metodzie elementów skończonych jest sumą energii (Π_i^1) wyznaczonej dla poszczególnych elementów. Wobec tego energia Π^1 wyrażona jest zależnością

$$\Pi^1 = \sum_{i=1}^n \Pi_i^1 = \sum_{i=1}^n \delta_i^T k_i \delta_i, \quad (4.3)$$

gdzie δ_i jest wektorem parametrów węzłowych, a k_i macierzą sztywności elementu.

Względna wartość energii w i -tym elemencie można zdefiniować jako

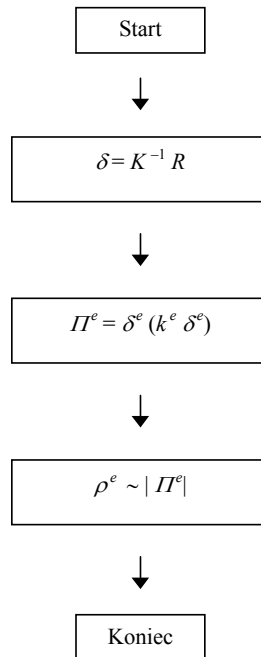
$$\overline{\Pi_i^1} = \frac{\Pi_i^1}{\Pi^1}. \quad (4.4)$$

Z pierwszych dwóch warunków stacjonarności, po wyeliminowaniu mnożnika Lagrange'a, gęstość dla i -tego elementu, w j -tym kroku z uwzględnieniem (3.53) wynosi

$$\begin{aligned} \rho_j^i &= \overline{\Pi_i^1} \rho, \\ \varepsilon_j^i &= \overline{\Pi_i^1} \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.5)$$

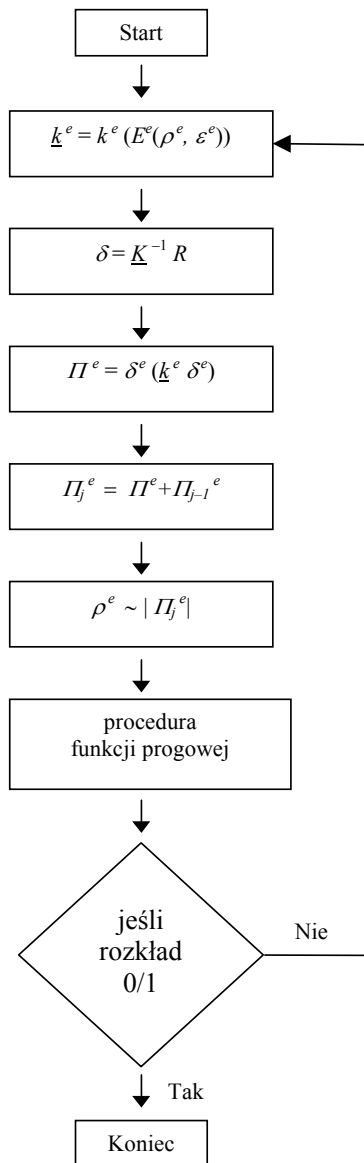
co oznacza, że gęstość w danym punkcie projektowym jest proporcjonalna do energii zgromadzonej w tym punkcie.

Algorytm numeryczny metody elementów skończonych zamieszczono na rysunkach 4.1 i 4.2. Ze względu na dyskretny charakter algorytmu przedstawiono go z uwzględnieniem wielkości dotyczących poszczególnych elementów (co oznaczono literą e). Na pierwszym rysunku pokazano algorytm dla ciała poddanego wcześniej procesowi homogenizacji: na początku należy rozwiązać zagadnienie brzegowe i wyznaczyć globalny wektor parametrów węzłowych δ . Następnie wyznacza się energię odkształcenia osobno dla każdego elementu. Energię się normalizuje, co oznaczono przez $|\Pi^e|$. Ze względu na (4.5) gęstość względna elementu skończonego ρ^e (odpowiadająca gęstości względnej $\rho_j^i(x)$ dla danego punktu materialnego) jest proporcjonalna do energii odkształcenia zgromadzonej w danym elemencie. Tak wyznaczony stan rozkładu gęstości masy stanowi bazę dla rozpoczynającego się procesu optymalizacji przedstawionego na rysunku 4.2. W pierwszym kroku macierz sztywności elementu jest funkcją tylko gęstości



Rys. 4.1. Schemat blokowy pierwszego etapu

względnej przeliczonej według założonej zależności uaktualniającej moduł Younga, o których to funkcjach szczegółowo będzie mowa w rozdziale siódmym. W tym rozdziale, bazując na (3.52), korzystamy z podanej dalej zależności (4.7). W następnych krokach macierz sztywności elementu jest dodatkowo funkcją ε^e , czyli zależy od wartości funkcji relaksacyjnej, będącej z fizycznego punktu widzenia gęstością zastępczą ε_j^i . Po zbudowaniu globalnej zmodyfikowanej macierzy sztywności (\underline{K}) rozwiązywane jest zagadnienie brzegowe i wyznaczany jest globalny wektor parametrów węzłowych δ . Następnie, tak samo jak w pierwszym etapie, należy wyznaczyć energię odkształcenia osobno dla każdego z elementów. Po jej zsumowaniu z energią uzyskaną w kroku poprzednim dokonujemy normalizacji. Gęstość względna elementu skończonego ρ^e jest proporcjonalna do znormalizowanej energii. W kolejnym etapie wprowadzono procedurę funkcji progowej, która pozwala na usunięcie masy z tych elementów, w których energia odkształcenia jest relatywnie mała i przeniesienie tej masy do pozostałych elementów. W literaturze wykorzystywane są wartości progowe arbitralnie ustalone dla danego procesu. W tej pracy zamiast wartości progowej wprowadzono funkcje progowe pozwalające zmieniać wartości progowe w trakcie procesu, co jak się okazało w bardzo istotny sposób przyspieszyło proces optymalizacji oraz pozwoliło na sterowanie zbieżnością procesu i jakością otrzymywanej topologii. Omawiany proces optymalizacji polega w swej istocie na przesuwaniu masy

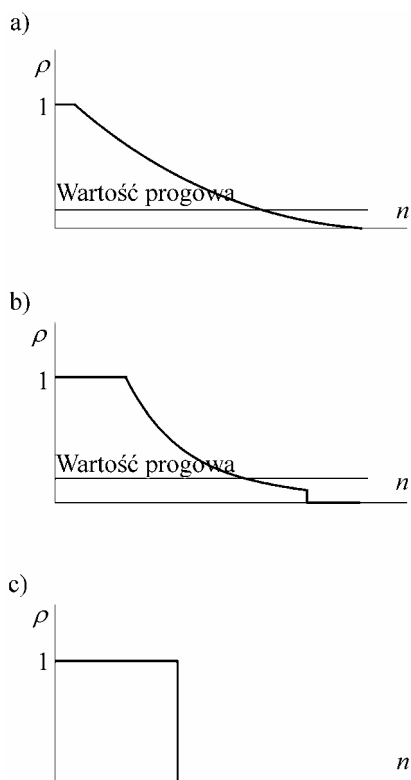


Rys. 4.2. Schemat blokowy drugiego etapu

wewnątrz ściśle określonego obszaru projektowego. Jeśli w wyniku takiego przesuwania otrzymujemy rozkład zero-jedynkowy, to kończymy proces. Jeśli nie, to powtarzamy go od uaktualniania macierzy sztywności. Ten sposób postępowania jest charakterystyczny dla *artificial approach* [61], a także dla *direct approach* [8], dla których w końcowym etapie procesu optymalizacji otrzymujemy rozkład zero-

-jedynkowy z zastrzeżeniem, że dopuszczalne jest istnienie bardzo małej liczby elementów, dla których gęstość wynosi „prawie” jeden. Najczęściej minimum podatności (minimum energii odkształcenia) występuje tuż przed osiągnięciem rozkładu zero-jedynkowego. Niekiedy jednak udaje się otrzymać rozkład zero-jedynkowy, dla którego równocześnie energia odkształcenia jest minimalna [25], co pokazano również na wielu przykładach w tej pracy (np. w rozdziale ósmym). Często otrzymanie rozkładu zero-jedynkowego dla minimalnej energii odkształcenia zależy od przyjęcia odpowiednio gęstej siatki podziału na elementy skończone. W związku z tym „optymalna topologia” w sensie numerycznym będzie rozumiana w dalszej części pracy jako:

- 1) topologia o najmniejszej energii odkształcenia (niezależnie od tego czy osiągnięty zostanie rozkład zero-jedynkowy czy też nie zostanie on osiągnięty) oraz
- 2) topologia o zero-jedynkowym rozkładzie powstała w wyniku
 - a) prowadzenia procesu optymalizacji lub
 - b) otrzymana po przeprowadzeniu procesu postprocessingu dla optymalnego rozkładu materiału, dla którego nie osiągnięto rozkładu zero-jedynkowego.Obszerniej temat postprocessingu omówiony będzie w rozdziale 4.4.



Rys. 4.3. Schemat blokowy optymalizacji topologii

Nie zawsze dla takiej topologii o zero-jedynkowym rozkładzie (wymienionej w punkcie 2) energia odkształcenia ma wartość najmniejszą z całego procesu. Spełnia ona jednak wymagania np. technologiczne, pozwalające ukształtować konstrukcję z danego materiału (bez udziału materiału „fikcyjnego”, znajdującego się w miejscach, gdzie mamy do czynienia z odcieniami szarości).

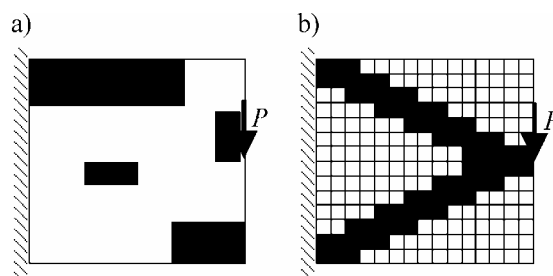
Reasumując, wystarczy przyjąć odpowiednio parametry sterujące procesem optymalizacji oraz przyjąć odpowiednio siatkę podziału metody elementów skończonych, aby uzyskać zero-jedynkowy optymalny rozkład dostępnego materiału wewnątrz założonego obszaru projektowego.

Ideę przesuwania masy pokazano na rysunku 4.3, gdzie po pierwszym kroku optymalizacji mamy rozkład gęstości w przedziale $(0,1]$ (rys. 4.3a), co nie wyklucza pojawienia się niekiedy już w pierwszym kroku elementów z gęstością równą zero. Potem liczba elementów z gęstością równą jeden wzrasta (rys. 4.3b), pojawiają się elementy z gęstością zerową, których liczba rośnie, przy czym równocześnie maleje liczba elementów z gęstością pośrednią. W końcu procesu otrzymujemy tylko rozkład zero-jedynkowy (rys. 4.3c).

Przedstawiony algorytm może być stosowany do rozwiązywania dowolnego zagadnienia optymalizacji topologii kontinuum materialnego. Jednak ze względu na to, że celem pracy jest przeanalizowanie istoty samego procesu optymalizacji oraz dokonanie analizy ilościowej i jakościowej wpływu na proces zmieniających się jego parametrów, takich jak sposób aktualizacji modułu Younga, stosowanie różnych funkcji progowych i funkcji relaksacyjnych, zdecydowano się na przedstawienie zastosowania opracowanego algorytmu na przykładzie zagadnienia płaskiego. Ponadto na takim przykładzie rozwiązano zagadnienia przedstawione w rozdziałach od dziewiątego do dwunastego.

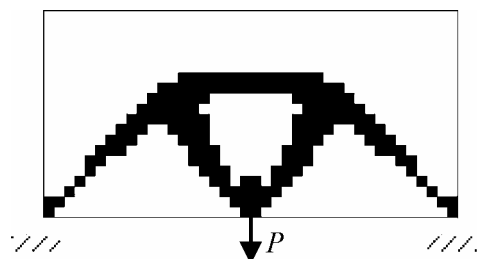
4.3. Przykłady liczbowe

Analizę numeryczną wykonuje się w tej pracy dla zagadnienia płaskiego, dla którego zastosowano typowy czworokątny płaski element skończony. Ponieważ obliczenia optymalnej topologii wymagają dużego czasu obliczeń oraz dużych pamięci, roz-

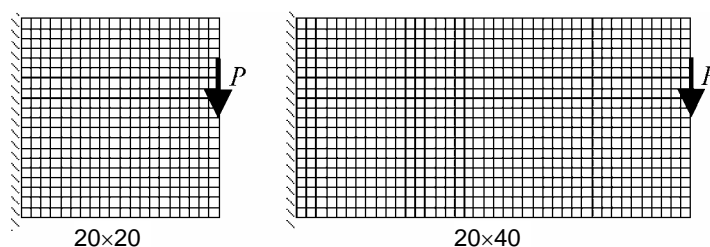


Rys. 4.4. Przykład liczbowy: stan początkowy (a), stan końcowy (b)

wiązania przedstawiono przede wszystkim na omówionych dalej tzw. *benchmarkach* przy podanym niżej podziale na elementy. Podział taki, jak się okaże, jest na tyle wystarczający, aby można było przedstawić istotę rozważanego problemu i równocześnie dokonać wszechstronnej analizy problemu.



Rys. 4.5. Przykład MBB dla $\alpha = 0,2$



Rys. 4.6. Schemat statyczny przykładu liczbowego wraz z podziałem na elementy skończone

Efektywność algorytmu optymalizacji pokazana więc będzie na najbardziej popularnym w literaturze optymalizacji topologii przykładzie liczbowym znanym jako *cantilever beam*, czy *Michell trusses* (rys. 4.4), gdzie z lewej strony przedstawiono obszar projektowy, wewnątrz którego materiał rozmieszczony jest dowolnie. Na obszar projektowy nałożono warunki brzegowe i obciążono go. Końcowy, uproszczony rozkład materiału wewnątrz obszaru projektowego pokazano na rys. 4.4b. Poza omawianym przykładem, czasem problemy optymalizacji topologii ilustruje się przykładem konstrukcji płaskiej belki wolnopodpartej zwanej MBB, czyli Messerschmitt–Bölkow–Blohm (rys. 4.5). Na rysunku 4.6 przedstawiono wspomniane na rys. 4.4 sztywno zamocowane na lewej krawędzi i obciążone siłą skupioną równą 100 kN w środku prawej krawędzi płaskie konstrukcje wspornikowe o wymiarach 20×20 m i 20×40 m wraz z zastosowanym podziałem na elementy skończone. W pierwszym przypadku jest to siatka 20×20 elementów, a w drugim 20×40 elementów. Przede wszystkim na tych przykładach przeprowadzana będzie analiza

wszystkich zagadnień. Ponadto dla celów związanych z analizą zbieżności zagadnienia ze względu na zastosowaną siatkę podziału, stosuje się podział 10×16 oraz 20×32 elementów, a także 5×10 , 10×20 oraz wspomniany wcześniej podział 20×40 elementów. Zastosowany podział pozwalał na bardzo szybkie otrzymywanie wyników (szybsze niż na przykład w [28] dla podziału 20×32). Okazało się też, że niezależnie od podziału topologia jest podobna, różnice polegają na tym, że kształt konstrukcji przy większym podziale jest bardziej gładki. Nie zaobserwowano różnic jakościowych dotyczących otrzymanej topologii przy zmieniającej się siatce podziału.

Moduł Younga przyjęto jako równy 2000000 kN/m^2 , współczynnik Poissona wynosi 0,3. Należy dodać, że wszystkie wielkości w dalszej części pracy będą przyjmowane jako bezwymiarowe.

Podstawowy przykład liczbowy pokazano dla następujących wartości parametrów zadania:

1. Współczynnik redukcji masy α przyjęto jako równy 0,3, wobec czego dla kwadratu 20×20 dostępna masa wynosi 120. Analizując zbieżność zastosowano także $\alpha = 0,5$.

2. Zadanie rozwiązano dla podstawowych dwóch funkcji progowych, gdzie, przypomnijmy, j jest numerem kroku procesu optymalizacji

$$\begin{aligned} TF_1 &= 0,1 j \alpha, \\ TF_2 &= 0,0125 j \alpha. \end{aligned} \quad (4.6)$$

3. Funkcję uaktualniającą moduł Younga przyjęto według (3.52) jako równą

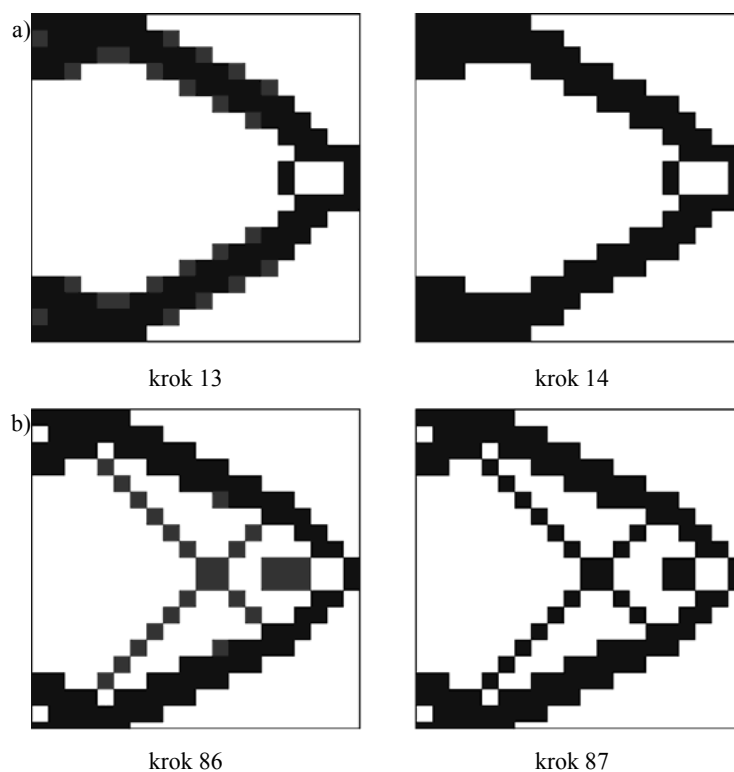
$$E_{j+1}(\rho_j) = E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^3. \quad (4.7)$$

4. Wielkość relaksacyjną przyjęto równą

$$\varepsilon^e = \varepsilon = 10^{-7}. \quad (4.8)$$

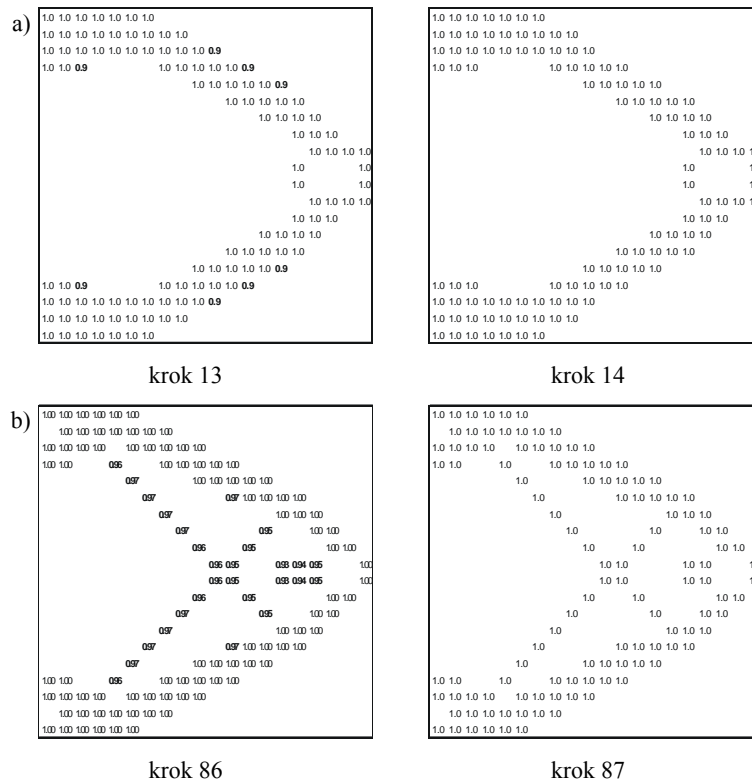
Jeśli w dalszej części pracy nie definiuje się inaczej tych wielkości, to przyjmują one podane wyżej wartości.

Na kolejnych rysunkach przedstawione będą topologie dla przyjętych parametrów zadania. Będą to zbiory topologii, czyli topologie dla kolejnych kroków, bądź najczęściej topologia optymalna dla danych parametrów zadania i topologia ją poprzedzająca. Często będą to topologie o rozkładzie czarno-białym oraz o rozkładzie z odcieniami szarości.

Rys. 4.7. Topologie dla TF_1 (a) i dla TF_2 (b)

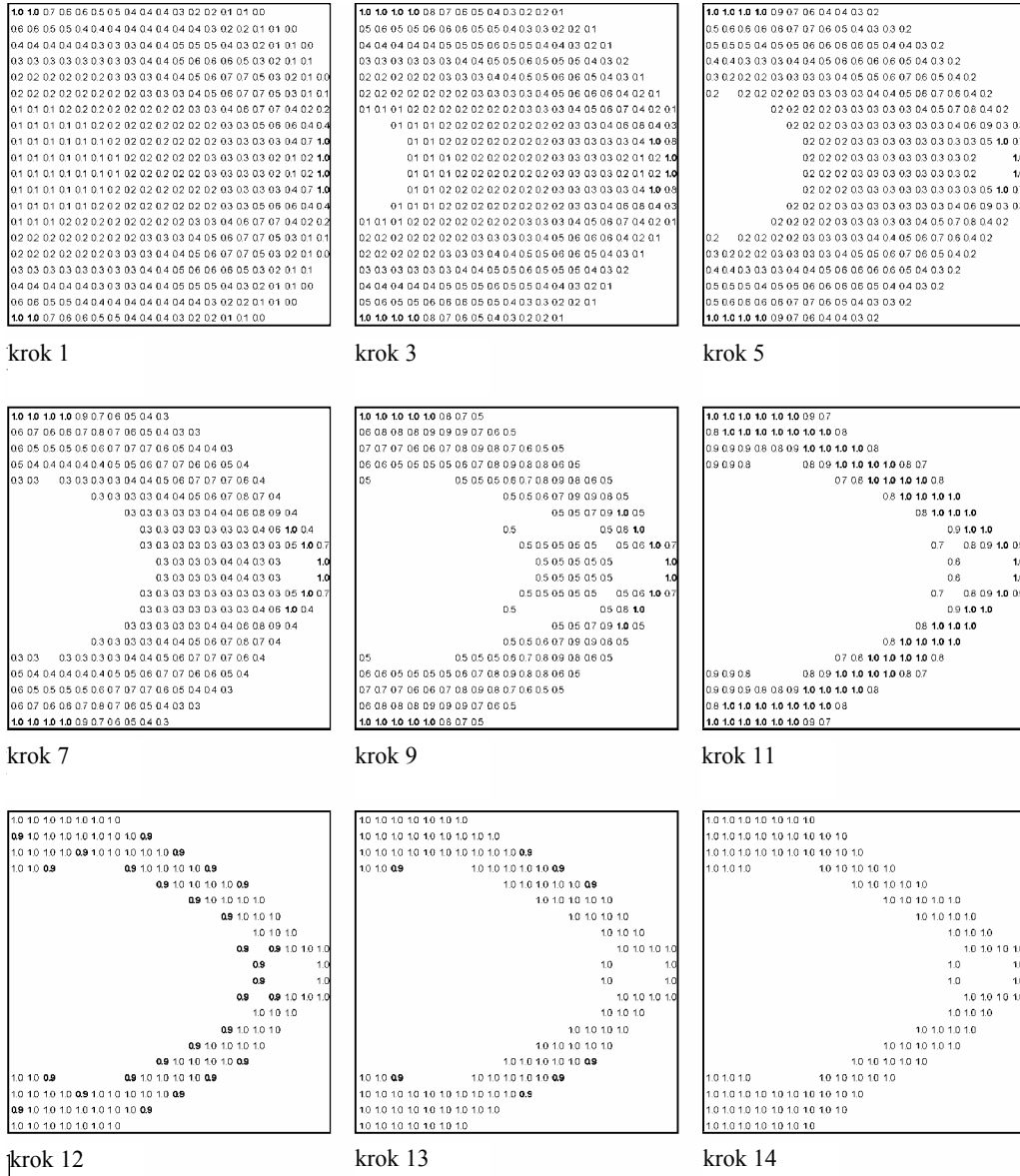
Na rysunku 4.7 przedstawiono topologie otrzymane dla TF_1 dla kroku 13 i 14 (rys. 4.7a) oraz dla TF_2 dla kroku 86 i 87 (rys. 4.7b). Przypomnijmy, że kolor czarny oznacza materiał o gęstości względnej równej jeden, co odpowiada gęstości rzeczywistej zastosowanego materiału. Kolor biały oznacza pustkę, czyli obszar pozbawiony materiału. Odcienie szarości odpowiadają różnym wartościom gęstości względnej z przedziału otwartego $(0,1)$, co jest równoważne zastosowaniu pewnego „sztucznego” materiału o gęstości stanowiącej określony procent gęstości materiału rzeczywistego. Dla notacji odcieni szarości przyjęto, że obniżenie wartości gęstości o 0,1 odpowiada rozjaśnieniu o jeden stopień na palecie barw. Rozkład biało-czarny jest tożsamy z rozkładem zero-jedynkowym. Na rysunku 4.7 pokazano dla obu funkcji progowych ten krok procesu optymalizacji, dla którego mamy rozkład czarno-biały (krok 14 i 87) oraz krok bezpośrednio go poprzedzający z odcieniami szarości (krok 13 i 86). Niektóre z przykładów zamiast w notacji czarno-biało-szarej są prezentowane w notacji liczbowej, co w bardziej precyzyjny sposób oddaje stan dystrybucji materiału. Należy przy tym pamiętać, że w trakcie

procesu liczba elementów z gęstościami pomiędzy zerem a jedyneką systematycznie spada i w końcu mamy tylko rozkład zer i jedynek. Oznacza to, że w pewnych podobszarach obszaru projektowego mamy do czynienia z materiałem, jaki przewidzieliśmy do tej konstrukcji. Wtedy gęstość wynosi jeden. W pozostałych podobszarach mamy pustki, co oznacza, że w tych podobszarach nie ma materiału.



Rys. 4.8. Topologie dla TF_1 (a) i dla TF_2 (b)

Warto podkreślić, że wyznaczenie topologii dla jednego kroku trwa nie dłużej niż 8 sekund dla omawianej siatki 20×20 . Jest to czas bardzo krótki, a otrzymane wyniki pozwalają na przeprowadzenie wszechstronnej analizy zadania. Zauważmy, że dla TF_1 optymalną topologię otrzymujemy w czasie poniżej dwóch minut, a dla TF_2 poniżej dwunastu minut. Na rysunku 4.8 przedstawiono wyniki z rysunku 4.7, ale w notacji liczbowej.



Rys. 4.9. Topologie dla TF_1 od pierwszego do czternastego kroku

Dla każdego kroku w procesie optymalizacji otrzymujemy topologię, którą nazwiemy T_j^i . Jest ona stanem $\gamma_{\varepsilon_j}^i$ pokazanym we wzorze (3.15). Dla danego procesu i zbiór topologii można zdefiniować następująco:

$$T^i = \{T_1^i, T_2^i, T_3^i, \dots, T_M^i\}, \quad (4.9)$$

gdzie $j \in [1, M]$. Wielkość M oznacza numer kroku, dla którego otrzymano optymalną topologię dla danego procesu.

W celu prześledzenia procesu optymalizacji na rysunku 4.9 pokazano niektóre elementy ciągu topologii T_j^i (otrzymanych za pomocą TF_1) od topologii po pierwszym kroku optymalizacji do jedenastego kroku ze skokiem równym dwa oraz topologii dla dwunastego, trzynastego i czternastego kroku. Aż do jedenastego kroku gęstość o wartości jeden jest zaznaczona czcionką wytłuszczoną, co jest bardzo pomocne przy jej identyfikacji na rysunku, szczególnie dla kroków początkowych. Dla kroków dwunastego i trzynastego wyróżniono czcionką wytłuszczoną gęstości mniejsze od jedności, gdyż jest ich relatywnie mniej. Ze względu na potrzebę pokazania na jednym rysunku ciągu topologii, w tym przypadku przedstawiono liczby zaokrąglone do jednego miejsca po przecinku.

Do kroku dwunastego włącznie suma masy wynosi 120,00, a więc jest dokładnie równa dostępnej masie. Oznacza to, że warunek ograniczenia nałożonego na masę ciała (3.37) jest spełniony. Od kroku trzynastego warunek ten nie jest spełniony. Suma masy dla kroku trzynastego wynosi 119,09. Wtedy

$$H(\rho_j) = \frac{m_j}{m_0} - 1 < 0. \quad (4.10)$$

Jeśli dokonamy sumowania brakującej do jedności masy w tych elementach, w których jest ona mniejsza od jedności, to otrzymamy wielkość równą 0,91. Tę brakującą masę nazwiemy masą dopełniającą. Rozważany tu problem wynika oczywiście z istoty stosowanej metody numerycznej, która z natury rzeczy jest metodą przybliżoną. Powtórzmy więc – aby formalizm pokazany w rozdziale trzecim był spełniony, wystarczy zastosować odpowiednio gęstą siatkę podziału na elementy, a problem dla coraz gęściejszej siatki będzie wykazywał tendencję zanikającą. Spełnienie warunku (3.37) można zapewnić poprzez zastosowanie postprocessingu w następującej postaci: dla zadania relaksacyjnego masa na końcu procesu optymalizacji (dla kroku j -tego, dla którego warunek (3.37) nie jest spełniony) będzie teraz wynosić

$$\rho \int_{\Omega} \chi(\rho(x)) d\Omega = m_j, \quad (4.11)$$

gdzie $\chi(\rho(x))$ jest funkcją charakterystyczną określoną na wszystkich punktach projektowych. Nazwijmy ją funkcją charakterystyczną rozkładu materii, taką że

$$\chi(\rho(x)) = \begin{cases} 1 & \text{dla punktów, dla których } \rho(x) \neq 0, \\ 0 & \text{dla punktów, dla których } \rho(x) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Funkcja $\rho(x)$ określająca gęstość względną danego punktu projektowego jest argumentem funkcji charakterystycznej rozkładu materii. Dla j -tego kroku optymalizacji, dla poszczególnych punktów projektowych jej wartość ($\rho_j^i(x)$) zmienia się od punktu do punktu. Wartości funkcji gęstości względnej $\rho_j(x)$ dążą w trakcie procesu do wartości funkcji $\chi(\rho(x))$:

$$\rho_j(x) \rightarrow \chi(\rho(x)). \quad (4.13)$$

Jest to równoważne z tym, że na końcu procesu optymalizacji punkty projektowe, którym przyporządkowano $\chi = 1$ charakteryzują się gęstością równą ρ , natomiast dla pozostałych punktów, dla których $\chi = 0$, gęstość wynosi zero. Wtedy

$$m_j = m_0, \quad (4.14)$$

co oznacza, że warunek (3.37) jest spełniony. Z fizycznego punktu widzenia zastosowanie (4.11) do (4.14) oznacza uzupełnienie do jedności gęstości we wszystkich tych elementach, w których jest ona mniejsza od jedności. Otrzymamy wtedy sumę masy równą dokładnie 120,00, gdyż suma masy dopełniającej (wyliczonej powyżej) wynosi 0,91.

Niekiedy zdarzyć się może, że po dodaniu w procesie postprocessingu (rozdział 4.4) do masy ciała (dla kroku j -tego, dla którego warunek (3.37) nie jest spełniony) masy dopełniającej mamy

$$m_j > m_0, \quad (4.15)$$

co z kolei oznacza, że z punktu widzenia numerycznego zastosowane parametry sterujące procesem optymalizacji nie pozwoliły na efektywne wyznaczenie optymalnej topologii i wobec takiego wyniku procesu optymalizacji należy podjąć próbę ponownego wyznaczenia optymalnej topologii przy zmienionych parametrach, bądź zastosować odpowiedni postprocessing.

Tak więc problem ewentualnego niespełnienia warunku (3.37) ma wymiar numeryczny i w takich kategoriach należy go traktować, jednak gdy się zastosuje (4.11) do (4.14) uzyskuje właściwą interpretację formalną, dzięki której spełnione są wszystkie równania przedstawione w rozdziale trzecim, a w szczególności równanie (3.37).

Wracając do analizy rysunku 4.9 pamiętajmy, że po homogenizacji cały obszar projektowy miał gęstość równą 0,3. Śledząc kolejne topologie widzimy, że dla pierwszego kroku przeważają gęstości nie przekraczające 0,3. Tylko osiem elementów (na ogólną liczbę czterystu) ma gęstość równą jedności. Tylko w szesnastu elementach

gęstość wynosi zero. Dla kolejnych topologii (krok trzeci, piąty i siódmy) powiększa się liczba elementów z zerową gęstością oraz w wielu elementach gęstość wzrasta do 0,7, a najmniejsza zachowana gęstość np. dla kroku siódmego wynosi już 0,3, dla którego to kroku liczba elementów z gęstością równą jedności wzrosła tylko do czternastu. Dla kroku dziewiątego mamy spektrum gęstości od 0,5 do 1,0. Liczba elementów z gęstością równą jedności wzrosła jedynie do osiemnastu. Znacznie powiększyły się obszary z gęstością zerową. Dla kroku jedenastego otrzymano kształt niewiele odbiegający od optymalnego. Kolejne kroki pozwalają na eliminację masy z niektórych elementów i uzupełnianie masy do jedności w innych, tak aby w trzynastym kroku już tylko nieliczne elementy miały gęstość różną od jedności i zera. Dla kroku czternastego mamy rozkład zero-jedynkowy.

Na rysunku 4.10 przedstawiono ciąg topologii (otrzymanych przy wykorzystaniu TF_2) od topologii po pierwszym kroku procesu optymalizacji do osiemdziesiątego siódmego kroku, dla którego mamy rozkład 0/1. Zauważmy, że topologie dla kroków dwudziestego z rys. 4.10 i trzeciego z rys. 4.9 różnią się niewiele. Podobnie topologie dla kroku sześćdziesiątego z rys. 4.10 i siódmego z rys. 4.9 są również niemal identyczne. Następne topologie pokazane na rys. 4.10 są już inne niż topologie z rys. 4.9, gdyż „dwa ramiona” ulegają pewnemu przewężeniu, a masa przesuwana jest do dodatkowo tworzącego się cienkiego krzyżującego się elementu prętowego. Dla kroku osiemdziesiątego szóstego (niektóre elementy mają gęstość mniejszą od jedynki) suma masy wynosi 118,78, a dla osiemdziesiątego siódmego (rozkład zero-jedynkowy) suma masy wynosi 118,00. Jak widać, w końcowym etapie optymalizacji dla TF_2 suma masy jest bliższa dostępnej masie niż dla TF_1 , a topologia jest bardziej „wyrafinowana”.

W celu przeanalizowania zbieżności zadania rozwiązano konstrukcję wspornikową o wysokości pięciu i długości dziesięciu jednostek. Zastosowano podział 5×10 , 10×20 i 20×40 elementów, co oznacza, że początkowo mamy podział na 50 elementów, następnie na 200 i na 800 elementów. Wyniki przedstawiono na kolejnych czterech rysunkach. Zastosowano współczynnik redukcji masy $\alpha = 0,5$, gdyż dla takiej jego wartości rozwiązanie nie wymaga postprocessingu i można pełną uwagę zwrócić na problem zbieżności. Analizę wykonano dla TF_1 . Pierwsze dwa rysunki pokazują topologie dla kroku poprzedzającego rozkład zero-jedynkowy w notacji liczbowej (rys. 4.11) i w notacji odcieni szarości (rys. 4.12). Następne dwa rysunki to w takim samym układzie topologie dla rozkładu zero-jedynkowego. Na wszystkich czterech rysunkach zaznaczono poszczególne jednostkowe elementy dla podziału 5×10 . Przy podziale 10×20 taka jednostka dzieli się na cztery elementy, a dla podziału 20×40 na szesnaście elementów. Analizując rysunek 4.11 i kolejne można dojść do wniosku, że zwiększenie podziału prowadzi jedynie do bardziej dyskretnego rozkładu masy i pozwala na uzyskanie konstrukcji o gładziej kształtach. Okazuje się też, że dla przyjętych parametrów zadania liczba kroków potrzebnych do otrzymania optymalnej topologii nie zależy praktycznie od podziału. W celu możliwie dokładnego przedstawienia rozkładu

Podział 5×10,
krok 8

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.93 | 0.87 | 0.80 | 0.71 | | |
| | | | 0.61 | 0.61 | 0.58 | 0.57 | 0.65 | 0.82 | |
| | | | 0.59 | 0.61 | 0.60 | | | | 0.90 |
| | | | 0.61 | 0.61 | 0.58 | 0.57 | 0.65 | 0.82 | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.93 | 0.87 | 0.80 | 0.71 | | |

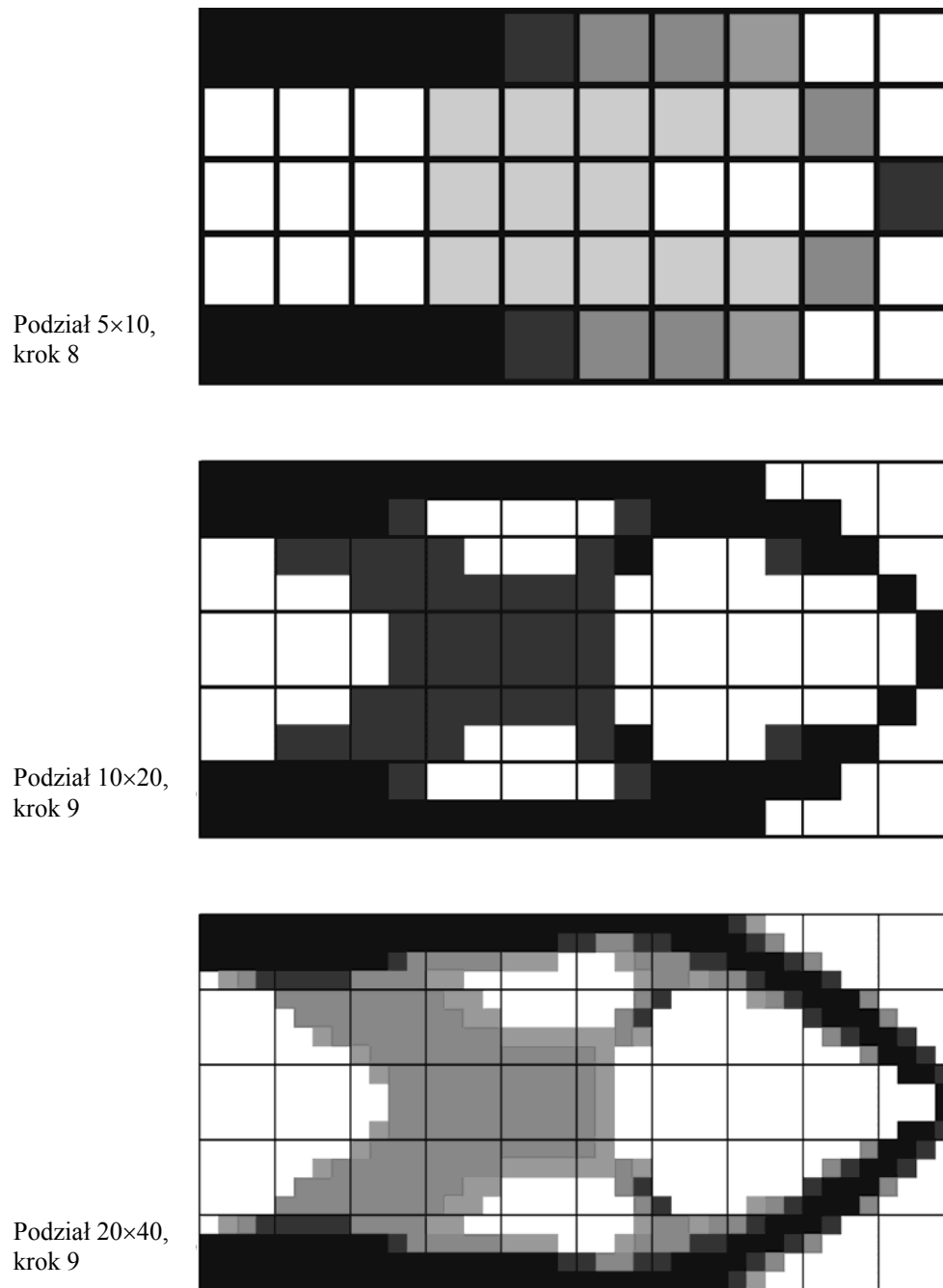
Podział 10×20,
krok 9

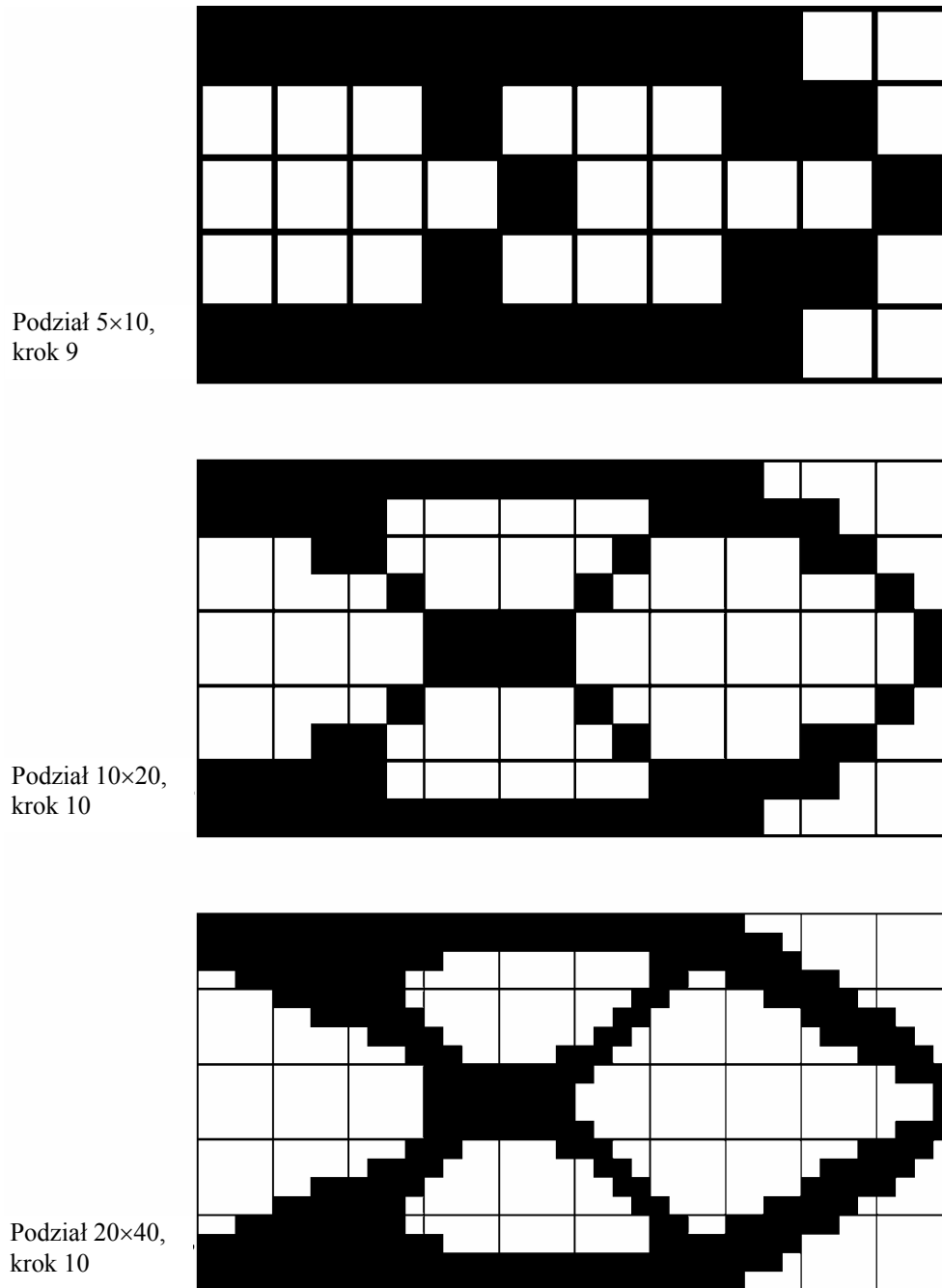
| | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | |
| 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.92 | | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | |
| | 0.89 | 0.95 | 0.94 | 0.91 | 0.88 | | 0.88 | 1.00 | 0.94 | 1.00 | 1.00 |
| | | | 0.89 | 0.91 | 0.91 | 0.90 | 0.89 | 0.89 | 0.90 | | 1.00 |
| | | | 0.90 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.92 | 0.88 | | | 1.00 |
| | | | 0.90 | 0.93 | 0.93 | 0.93 | 0.92 | 0.88 | | | 1.00 |
| | | 0.89 | 0.91 | 0.91 | 0.90 | 0.89 | 0.89 | 0.90 | | | 1.00 |
| | 0.89 | 0.95 | 0.94 | 0.91 | 0.88 | | 0.88 | 1.00 | 0.94 | 1.00 | 1.00 |
| 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.92 | | | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | |

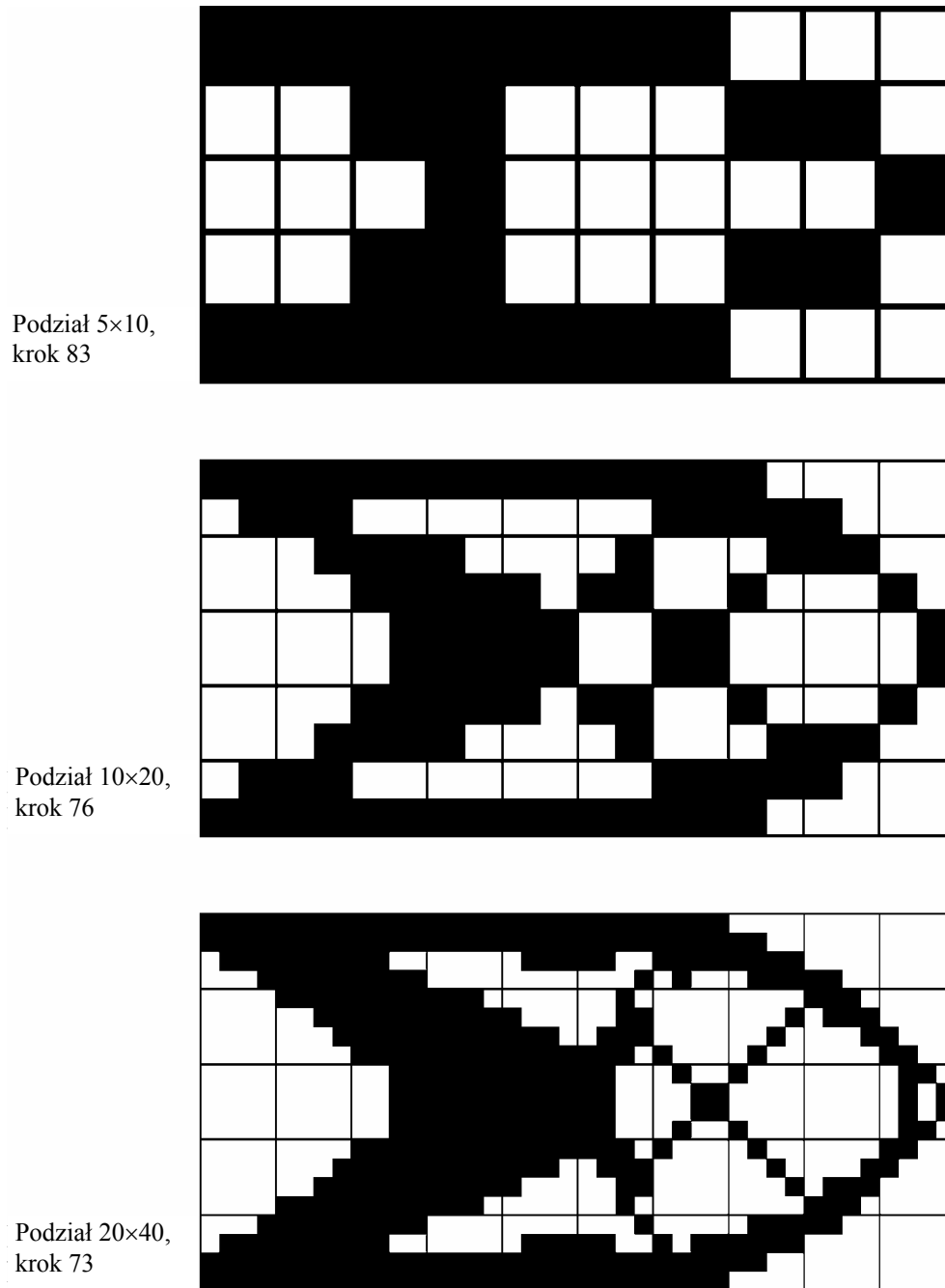
Podział 20×40,
krok 9

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.92 | 0.79 | | | | | | | | | | | | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.94 | 0.91 | 0.89 | 0.89 | 0.91 | 0.94 | 0.99 | 1.00 | 1.00 | 0.98 | 0.87 | | | | | | |
| 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.94 | 0.89 | 0.89 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.99 | 0.88 | | | | | | | |
| | 0.79 | 0.85 | 0.89 | 0.94 | 0.95 | 0.94 | 0.92 | 0.89 | 0.87 | 0.84 | 0.82 | 0.79 | 0.78 | | 0.78 | 0.81 | 0.81 | 0.79 | 0.82 | 0.87 | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.90 |
| | | 0.82 | 0.86 | 0.88 | 0.89 | 0.87 | 0.85 | 0.84 | 0.82 | 0.81 | 0.79 | 0.77 | | | 0.82 | 0.85 | | | 0.78 | 0.86 | 0.97 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.81 | |
| | | 0.80 | 0.83 | 0.85 | 0.85 | 0.84 | 0.84 | 0.83 | 0.82 | 0.81 | 0.79 | 0.78 | | | 0.80 | 0.88 | | | | | 0.92 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.85 | |
| | | 0.78 | 0.80 | 0.82 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.82 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.80 | 0.78 | | | | | 0.84 | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 0.90 | |
| | | | 0.78 | 0.81 | 0.82 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.82 | 0.82 | 0.81 | 0.80 | 0.78 | | | | | | 0.84 | 1.00 | 1.00 | 0.92 | | |
| | | | 0.80 | 0.82 | 0.83 | 0.84 | 0.84 | 0.84 | 0.84 | 0.83 | 0.83 | 0.82 | 0.81 | 0.78 | | | | | | | 0.84 | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 0.90 | |
| | | | 0.80 | 0.82 | 0.83 | 0.84 | 0.84 | 0.84 | 0.84 | 0.83 | 0.83 | 0.82 | 0.81 | 0.78 | | | | | | | 0.84 | 1.00 | 1.00 | 0.90 | | |
| | | | 0.78 | 0.81 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.82 | 0.82 | 0.81 | 0.80 | 0.78 | | | | | | | 0.84 | 1.00 | 1.00 | 0.92 | | |
| | | 0.78 | 0.81 | 0.82 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.82 | 0.82 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.80 | 0.79 | | | | | | 0.84 | 1.00 | 1.00 | 0.92 | | |
| | | 0.80 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.83 | 0.82 | 0.81 | 0.81 | 0.81 | 0.79 | 0.79 | 0.78 | 0.78 | 0.78 | 0.79 | 0.80 | 0.77 | | | 0.84 | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 0.90 | |
| | | 0.80 | 0.83 | 0.85 | 0.85 | 0.84 | 0.84 | 0.83 | 0.82 | 0.81 | 0.79 | 0.78 | | | 0.80 | 0.88 | | | | | 0.84 | 1.00 | 1.00 | 0.95 | | |
| | | 0.82 | 0.86 | 0.88 | 0.89 | 0.87 | 0.85 | 0.84 | 0.82 | 0.81 | 0.79 | 0.77 | | | 0.82 | 0.85 | | | | 0.78 | 0.86 | 0.97 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.81 |
| 0.79 | 0.85 | 0.89 | 0.94 | 0.95 | 0.94 | 0.92 | 0.89 | 0.87 | 0.84 | 0.82 | 0.79 | 0.78 | | | 0.78 | 0.81 | 0.81 | 0.79 | 0.82 | 0.87 | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.90 | |
| 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

Rys. 4.11. Topologie dla TF_1 w notacji liczbowej

Rys. 4.12. Topologie dla TF_1 w notacji odcieni szarości

Rys. 4.14. Topologie dla TF_1 w notacji czarno-białej

Rys. 4.15. Topologie dla TF_2 w notacji czarno-białej

masy dla przypadku występowania gęstości w przedziale $[0,1]$ w notacji liczbowej, posłużono się zapisem z dwoma miejscami po przecinku.

Dla porównania na rys. 4.15 pokazano dla omawianego wyżej przykładu czarno-białe topologie otrzymane przy wykorzystaniu TF_2 . Przykładowo, dla podziału 5×10 topologie stosujące TF_1 i TF_2 różnią się położeniem trzech elementów z gęstością równą jeden. Topologie przy pozostałych podziałach różnią się nieco od siebie i dla TF_2 są bardziej „wyrafinowane”.

Analizując masę konstrukcji podczas ostatnich kroków procesu optymalizacji należy stwierdzić, że dla rozważanego przykładu dla kroku poprzedzającego rozkład czarno-biały suma masy jest zawsze taka sama i równa dokładnie masie dostępnej (tabela 4.1). Dla rozkładu czarno-białego, przy wykorzystaniu TF_2 suma masy jest bliższa masie dostępnej niż przy wykorzystaniu TF_1 .

Tabela 4.1. Wartości sumy masy dla TF_1 i TF_2

| Suma masy dla TF_1 | Podział | | |
|-------------------------------|---------|-------|-------|
| | 5×10 | 10×20 | 20×40 |
| rozkład z odcieniami szarości | 25 | 25 | 25 |
| rozkład czarno-biały | 24 | 19,5 | 20,9 |
| Suma masy dla TF_2 | Podział | | |
| | 5×10 | 10×20 | 20×40 |
| rozkład z odcieniami szarości | 25 | 25 | 25 |
| rozkład czarno-biały | 24 | 24 | 24,5 |

Na kolejnych rysunkach przedstawiono topologie dla podziałów 10×16 i 20×32 . Otrzymane wyniki można porównać z [27] i [28], gdzie zastosowano podział 20×32 elementy. Współczynnik redukcji masy α przyjęto jako równy 0,5. Na rysunku 4.16 przedstawiono topologie dla dwóch podziałów, o rozkładzie gęstości z przedziału $[0,1]$, dla kroku poprzedzającego rozkład zero-jedynkowy. Suma masy jest równa masie dostępnej (dla rozważanej konstrukcji o rozmiarach 10×16 dostępna masa wynosi 80). Na następnym rysunku mamy rozkład zero-jedynkowy. Suma masy jest tu nieco mniejsza i równa 72 dla podziału 10×16 i 75,5 dla podziału 20×32 . Dodatkowo na rysunku 4.18 pokazano czarno-białe topologie dla $\alpha = 0,3, 0,4$ i $0,6$ otrzymane przy podziale 20×32 przy wykorzystaniu TF_1 . Na rysunku zaznaczono w celach porównawczych takie same linie podziału jak na poprzednich rysunkach dla rozważanej konstrukcji o wymiarach 10×16 .

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | |
| 0.96 | 1.00 | 1.00 | 0.97 | 0.89 | | | | 0.98 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | |
| | | 0.98 | 0.98 | 0.92 | | | 0.88 | 1.00 | | | 0.96 | 1.00 | 1.00 | | |
| | | | 0.93 | 0.95 | 0.94 | 0.93 | 0.93 | | | | | | 0.89 | 1.00 | |
| | | | | 0.94 | 1.00 | 0.99 | 0.93 | | | | | | | | 1.00 |
| | | | | 0.94 | 1.00 | 0.99 | 0.93 | | | | | | | | 1.00 |
| | | | 0.93 | 0.95 | 0.94 | 0.93 | 0.93 | | | | | | 0.89 | 1.00 | |
| | | 0.98 | 0.98 | 0.92 | | | 0.88 | 1.00 | | | 0.96 | 1.00 | 1.00 | | |
| 0.96 | 1.00 | 1.00 | 0.97 | 0.89 | | | | 0.98 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | |

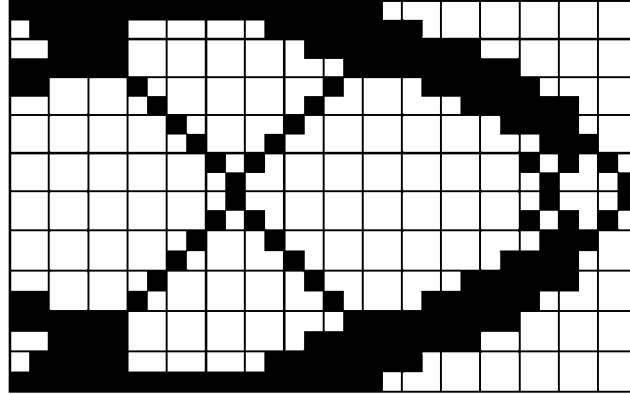
Podział 10×16, krok 9

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.88 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.94 | 0.90 | 0.88 | 0.90 | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.94 | 0.82 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.81 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.94 | 0.87 | 0.82 | 0.79 | 0.77 | 0.76 | 0.75 | 0.75 | 0.77 | 0.77 | 0.79 | 0.81 | 0.84 | 0.88 | 0.93 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.93 | 0.77 | | | | | | | | | | | | |
| | | 0.72 | 0.81 | 0.88 | 0.89 | 0.87 | 0.83 | 0.78 | 0.74 | 0.72 | 0.71 | 0.71 | 0.70 | 0.69 | 0.70 | 0.71 | 0.72 | 0.75 | 0.77 | 0.78 | 0.81 | 0.91 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.86 | | | | | | | | | |
| | | | 0.74 | 0.81 | 0.83 | 0.82 | 0.79 | 0.75 | 0.73 | 0.70 | 0.69 | | | | 0.70 | 0.74 | 0.80 | | 0.71 | 0.79 | 0.91 | 1.00 | 1.00 | 0.97 | 0.73 | | | | | | | | | | |
| | | | 0.71 | 0.77 | 0.79 | 0.78 | 0.76 | 0.74 | 0.73 | 0.71 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.72 | 0.85 | | | | 0.69 | 0.82 | 0.99 | 1.00 | 1.00 | 0.78 | | | | | | | | | | |
| | | | | 0.70 | 0.75 | 0.77 | 0.77 | 0.76 | 0.75 | 0.74 | 0.73 | 0.73 | 0.73 | 0.72 | 0.72 | 0.70 | | | | | | | 0.73 | 0.85 | 1.00 | 1.00 | 0.85 | | | | | | | | |
| | | | | 0.70 | 0.74 | 0.76 | 0.77 | 0.78 | 0.77 | 0.77 | 0.76 | 0.74 | 0.73 | 0.70 | | | | | | | | | 0.73 | 1.00 | 1.00 | 0.89 | | | | | | | | | |
| | | | | 0.71 | 0.74 | 0.77 | 0.79 | 0.80 | 0.79 | 0.78 | 0.76 | 0.73 | 0.69 | | | | | | | | | | | | 0.98 | 1.00 | 0.95 | | | | | | | | |
| | | | | 0.73 | 0.77 | 0.80 | 0.81 | 0.81 | 0.79 | 0.76 | 0.73 | 0.69 | | | | | | | | | | | | | | 1.00 | | | | | | | | | |
| | | | | 0.71 | 0.74 | 0.77 | 0.79 | 0.80 | 0.79 | 0.78 | 0.76 | 0.73 | 0.69 | | | | | | | | | | | | 0.98 | 1.00 | 0.95 | | | | | | | | |
| | | | | 0.70 | 0.74 | 0.76 | 0.77 | 0.78 | 0.77 | 0.76 | 0.74 | 0.73 | 0.70 | | | | | | | | | | | 0.73 | 1.00 | 1.00 | 0.89 | | | | | | | | |
| | | | | 0.70 | 0.75 | 0.77 | 0.77 | 0.76 | 0.75 | 0.74 | 0.73 | 0.73 | 0.73 | 0.72 | 0.72 | 0.70 | | | | | | | 0.73 | 0.85 | 1.00 | 1.00 | 0.85 | | | | | | | | |
| | | | | 0.71 | 0.77 | 0.79 | 0.78 | 0.76 | 0.74 | 0.73 | 0.71 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.72 | 0.85 | | | | 0.69 | 0.82 | 0.99 | 1.00 | 1.00 | 0.78 | | | | | | | | |
| | | | 0.74 | 0.81 | 0.83 | 0.82 | 0.79 | 0.75 | 0.73 | 0.70 | 0.69 | | | | 0.70 | 0.74 | 0.80 | | 0.71 | 0.79 | 0.91 | 1.00 | 1.00 | 0.97 | 0.73 | | | | | | | | | | |
| | | 0.72 | 0.81 | 0.88 | 0.89 | 0.87 | 0.83 | 0.78 | 0.74 | 0.72 | 0.71 | 0.71 | 0.70 | 0.69 | 0.70 | 0.71 | 0.72 | 0.75 | 0.77 | 0.78 | 0.81 | 0.91 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.86 | | | | | | | | | |
| 0.81 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.94 | 0.87 | 0.82 | 0.79 | 0.77 | 0.76 | 0.75 | 0.75 | 0.77 | 0.77 | 0.79 | 0.81 | 0.84 | 0.88 | 0.93 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.93 | 0.77 | | | | | | | | | | | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

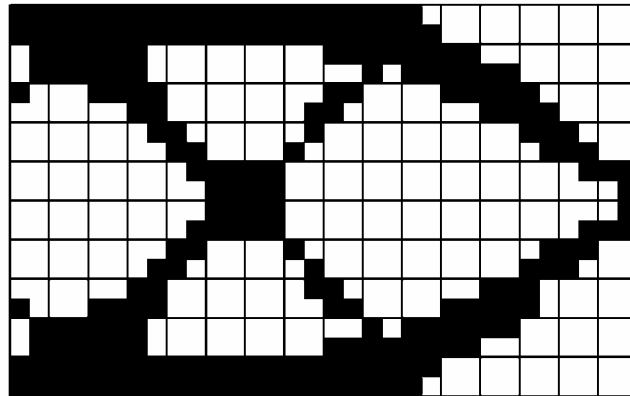
Podział 20×32, krok 9

Rys. 4.16. Topologie dla TF_1 w notacji liczbowej

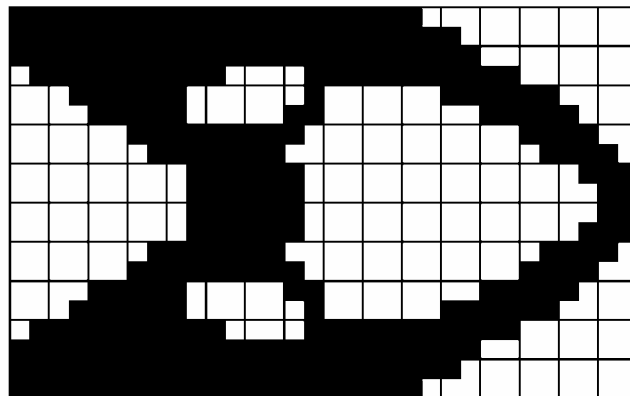
$\alpha = 0,3$,
krok 12



$\alpha = 0,4$,
krok 11



$\alpha = 0,6$,
krok 10



Rys. 4.18. Topologie dla TF_1 dla podziału 20×32

4.4. Postprocessing

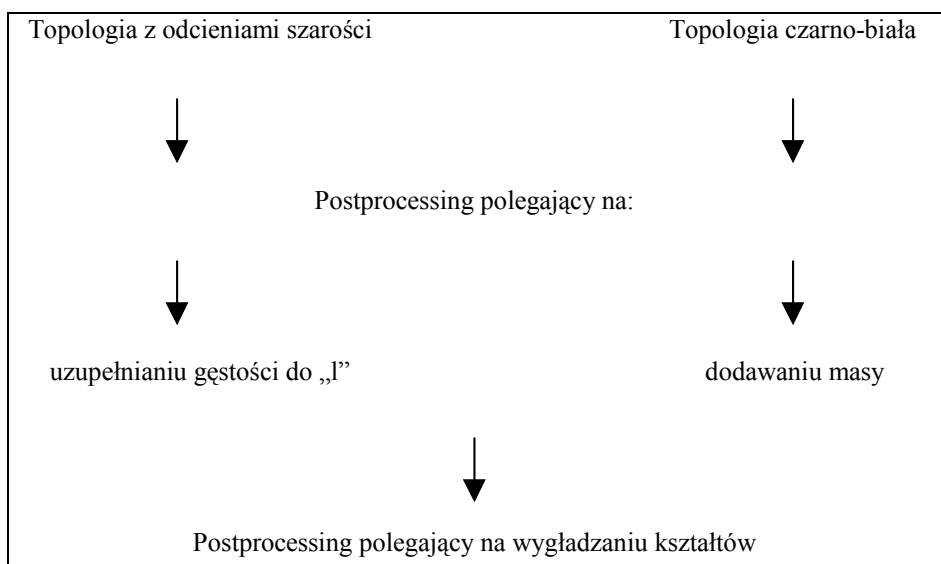
Po zakończeniu procesu optymalizacji konstrukcja zwykle wymaga jeszcze pewnego dostosowania kształtu do wymagań związanych z wieloma uwarunkowaniami, np. eksploatacyjnymi. Jest to tzw. postprocessing, który będzie tu rozumiany jako całokształt niezbędnych działań zmieniających kształt konstrukcji, następujących po procesie optymalizacji. Działania te będą dotyczyły między innymi wygładzenia kształtów, a więc usunięcia masy z pewnych regionów i dodania jej w innych. Może to też być uzupełnienie masy w tych elementach, w których gęstość jest mniejsza od jedności, bądź uzupełnienie jej ze względu na spełnienie w formie nierówności warunku ograniczeń narzuconych na masę ciała.

Przeanalizujmy znów rysunek 4.8. Na prawych rysunkach mamy zero-jedynkowe rozkłady masy. Suma masy jest dla nich mniejsza od dostępnej masy równej 120, co oznacza spełnienie w formie nierówności ograniczeń nałożonych na masę – wzór (4.10). Dla kroku 14 masa wynosi 114,0, a dla kroku 87 wynosi 118,0. Jak widać, przy wolniejszym procesie (dla TF_2) otrzymuje się topologię o masie bardziej zbliżonej do masy dostępnej (różnica masy tylko w dwóch elementach, co daje brak 1,7% masy), niż dla TF_1 (dla kroku 14 – brak 5,0% masy). Dla topologii wykorzystującej TF_2 występuje zauważalny brak masy objawiający się brakiem połączenia pewnych elementów między sobą (dla kroku 87 w sąsiedztwie miejsca przyłożenia siły). Dla kroków 13 i 86 uzupełnienie gęstości do jedynki, w elementach, które mają gęstość mniejszą od jeden, daje dokładnie sumę masy równą 120.

Otrzymaną zero-jedynkową topologię możemy pozostawić jako ostateczne rozwiązanie zadania poszukiwania optymalnej topologii, jeśli nie występują w tej topologii widoczne braki połączeń pomiędzy poszczególnymi elementami konstrukcyjnymi. Jest to uzasadnione również z fizycznego punktu widzenia, gdyż spełnienie ograniczeń na masę w formie nierówności oznacza, że otrzymana optymalna topologia nie wymaga masy ciała wynikającej z założonych ograniczeń (czyli nie wymaga całej dostępnej masy), lecz masy nieco mniejszej.

W sytuacji gdy występują widoczne braki połączeń możemy otrzymaną topologię poddać postprocessingowi, czyli uzupełnić masę. Sposób jej uzupełnienia bywa bardzo łatwy, gdy brakuje połączeń pomiędzy niektórymi elementami. W innym przypadku należy stosować właściwe procedury postprocessingu, które analizują rozkład masy w sposób podobny jak procedury optymalizacji. Korzystniejsze jest zastosowanie postprocessingu do topologii o jeden krok wcześniejszej (tej z odcieniami szarości); wobec równości masy z masą dostępną lub wobec tylko nieznacznie mniejszej masy analiza ostatecznego kształtu jest łatwiejsza, ponieważ wiemy już gdzie masa powinna być pozostawiona i gdzie ewentualnie należy ją uzupełnić. Ponadto wykorzystanie ostatniego (czarno-białego) rozkładu

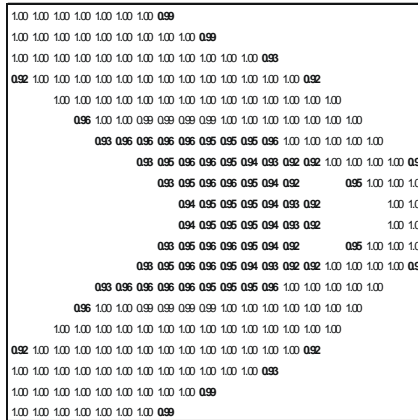
pozwała poznać końcowy rozkład, dzięki czemu możemy w sposób prawidłowy sterować uzupełnianiem masy w kroku poprzednim. Taki właśnie algorytm post-processingu uzupełniającego masę wydaje się być najefektywniejszy.



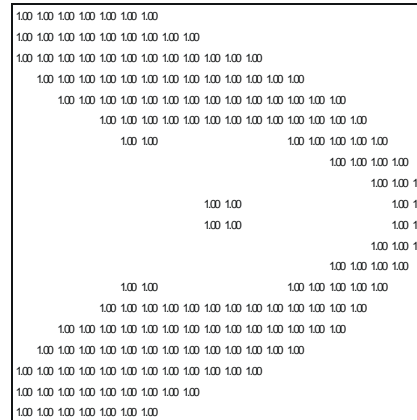
Rys. 4.19. Schemat algorytmu postprocessingu

Ostatecznie więc możemy zdefiniować postprocessing jako działanie dwuetapowe, co przedstawiono na rys. 4.19. W pierwszym etapie dla rozkładu z odcieniami szarości uzupełniana jest gęstość do jedynki w tych elementach, w których jest ona mniejsza od jedności. Dla rozkładu czarno-białego, zgodnie z poprzednimi krokami, uzupełniana jest masa najwyżej do stanu, gdy warunek ograniczeń narzuconych na masę ciała spełniony jest w formie równości. W drugim etapie przeprowadzane jest wygładzanie kształtu konstrukcji (wygładzanie naroży), co powoduje, że niekiedy z części elementu usuwa się masę. Warunek ograniczeń nałożonych na masę jest zazwyczaj wtedy spełniony. Dokonuje się tylko przesunięcia masy wewnątrz obszaru projektowego.

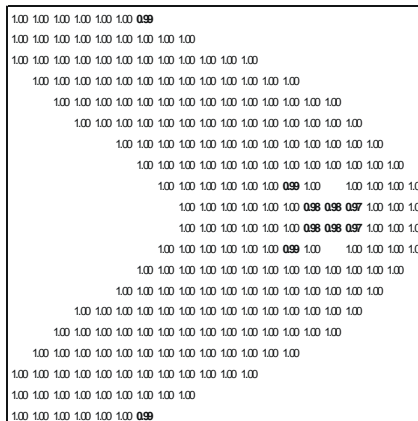
Należy zaznaczyć, że ograniczenia nałożone na masę konstrukcji w formie równości (3.37), wynikające z przyjętego współczynnika redukcji masy, mogą być zachowane, ale dopuszczalna jest pewna tolerancja i to zarówno w dół, jak i w górę, oczywiście w niewielkim zakresie. Szczególnie przekroczenie w górę musi mieć uzasadnienie konstrukcyjne, np. wynikające z konieczności połączenia pewnych elementów konstrukcji. Należy dodać, że tolerancja, o której tu mówimy, dotyczy etapu postprocessingu.



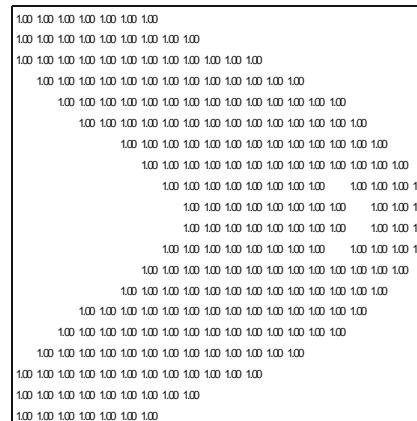
krok 9, masa = 239,4



krok 10, masa = 172,0



krok 69, masa = 237,8



krok 70, masa = 236,0

Rys. 4.20. Topologie w notacji liczbowej dla $\alpha = 0,6$

Przeanalizujemy jeszcze rozważany przykład dla $\alpha = 0,6$ (rys. 4.20). Dostępna masa wynosi 240, natomiast suma masy dla kroku 9 wynosi 239,4. Do 240 brakuje 0,6, a suma masy dopełniającej wynosi 4,3, co oznacza, że albo pozostawiamy zwiększoną masę, albo usuniemy ją z 4 elementów, co byłoby już pierwszym etapem typowego postprocessingu. Funkcja progowa TF_1 zbyt szybko usuwa masę i dla kroku 10 wynosi ona tylko 172, co powoduje brak niezbędnych połączeń w konstrukcji. Krok ten trudno byłoby poddać postprocessingowi bez uwzględnienia rozłożenia masy w krokach poprzednich. Zastosowanie TF_2 pozwala na uniknięcie postprocessingu, jeśli posłużymy się krokiem 70. Masa jest tu na tyle zbliżona do

przypadku jest konieczne, aczkolwiek ze względu na dużą masę dopełniającą mogą być trudności z określeniem elementów, z których należy usunąć materiał konstrukcyjny. Jeśli się stosuje funkcję progową TF_2 dla kroku 74, to brakuje 0,4 masy, a masa dopełniająca wynosi 2,2, co pozwala na całkowite uzupełnienie masy w trakcie post-processingu i wymaga usunięcia masy z dwóch elementów, jeśli warunek ograniczeń ma być spełniony w formie równości. Dla kroku 75 suma masy wynosi 194 i widoczny jest brak dwóch elementów wypełnionych masą w sąsiedztwie miejsca przyłożenia siły. Analiza obu kroków powinna prowadzić do podjęcia właściwej decyzji odnośnie elementów, które należy usunąć, bądź o które należy uzupełnić topologię.

Przedstawione to rozważania na temat postprocessingu mają charakter ogólny i ukazują jedynie złożoność problemów, które stanowią osobne zagadnienie projektowania konstrukcji. Postprocessing jest bowiem elementem uzupełniającym optymalizację topologii, pozwalającym na odpowiednie dostosowanie kształtu konstrukcji do wymogów eksploatacyjnych. Ponieważ, jak już zauważyliśmy (tabela 4.1), odpowiednio dobrana funkcja progowa pozwala łatwiej zachować ograniczenia nałożone na masę konstrukcji w formie równości, więc dobierając ją właściwie, a także wykorzystując krok poprzedzający rozkład zero-jedynkowy, a także rozkład zero-jedynkowy możemy otrzymać topologię, która będzie topologią optymalną.

5. Funkcje progowe

5.1. Wstęp

W niniejszym rozdziale zajmiemy się – w kontekście przedstawionego w poprzednim rozdziale algorytmu numerycznego – właściwym doбором funkcji progowej (oznaczonej jako TF), mającej decydujący wpływ na zbieżność zadania optymalizacji topologii.

Pomysł zastosowania funkcji progowej powstał w wyniku analizy literatury, gdzie od dawna używa się pojęcia penalizacji rozważanych w danym przypadku wielkości, których wartość jest mniejsza od przyjętej wartości progowej. Jednak w pracach dotyczących optymalizacji topologii nie analizowano dotychczas w sposób szczegółowy ani sposobów formułowania definicji wielkości progowych, ani wielkości progów, po przekroczeniu których rozpatrywaną wielkość można, czy też należy, usunąć. Brakuje też analiz otrzymanych topologii w zależności od przyjętej wartości progowej.

W pracy [25] odpowiednie dobranie wielkości progowej pozwoliło na otrzymanie optymalnej topologii w niewielkiej liczbie kroków. Bazując na wielkości progowej z [25], postanowiono w tej pracy wprowadzić do przygotowywanego algorytmu optymalizacji funkcje progowe. W szczególnym przypadku, gdy funkcja będzie wielkością stałą, będziemy mogli mówić o wielkości progowej.

Z kolei w publikacji [73], poza ogólnymi uwagami na temat penalizacji, wspomina się o proponowanym w [3], [5] i w [26] wprowadzeniu zamiast ściśle określonej funkcji gęstości $\rho(x)$ podlegającej odrzucaniu, funkcji zdefiniowanej następująco: $\rho(x) + c \int \rho(1 - \rho) dx$, gdzie c jest parametrem determinującym stopień penalizacji.

Stałą podczas procesu optymalizacji wielkość progową przyjęto w pracy [57]. Jest ona zwana wartością więzów narzuconych na gęstość i równa się 0,01. Stosuje się tu równocześnie (bez podania szczegółów) wzrastającą wartość wykładnika potęgowego we wzorze aktualizującym moduł Younga. Często w literaturze wiąże się zjawisko penalizacji z użyciem większej od jedności potęgi p we wzorze uaktualniającym tensor sprężystości: $C^{ijkl} = C_0^{ijkl} \rho^p$. Pozwala to na różnicowanie gęstości w poszczególnych elementach, co implikuje coraz mniejsze jej wielkości w pewnych obszarach. Jeśli są odpowiednio małe, to się je usuwa. To podejście było przedstawione w [8] oraz w [80].

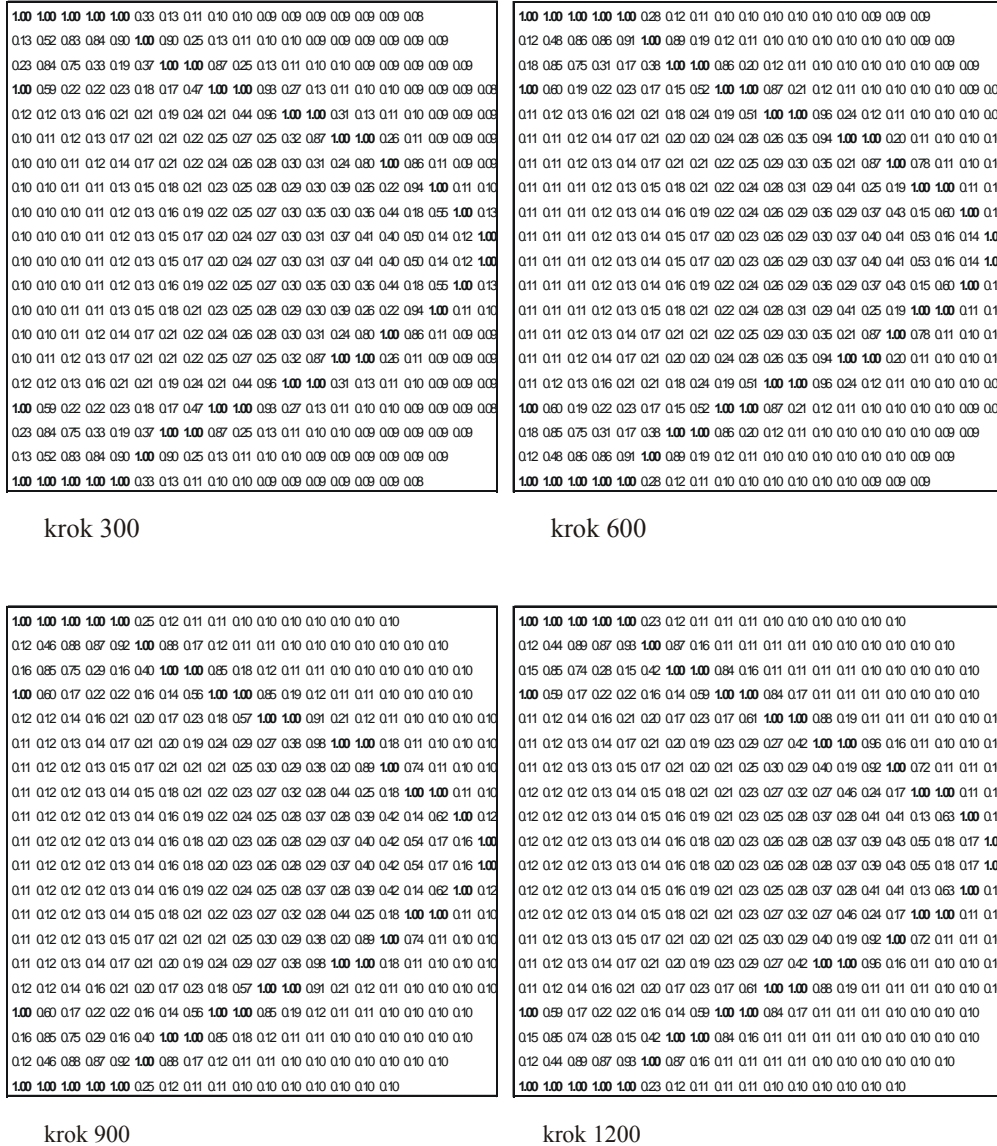
Penalizacja dotyczy gęstości występującej w poszczególnych punktach materialnych (elementach skończonych), gęstości, której wartość jest relatywnie mała. Proces penalizacji małych gęstości jest procesem, dzięki któremu usuwany jest materiał z tych punktów projektowych, w których materiał ten jest zbędny. Decyzja, co do usunięcia materiału z danego elementu jest w tej pracy bezpośrednio związana z kryterium energetycznym (gęstość jest proporcjonalna do energii). Pozbawiane masy są te elementy, w których energia odkształcenia jest pomijalnie mała, gdy porównamy ją z energią występującą w elementach bardziej wyężonych. Jeśli z jakiś przyczyn (np. eksploatacyjnych) materiał byłby potrzebny w niektórych elementach, to w tych elementach można by zastosować inny, bardzo wiotki materiał. Parametry tego materiału powinny zależeć od funkcji, jaką ma spełniać właśnie ten element konstrukcji. W trakcie procesu optymalizacji powiększają się obszary podlegające penalizacji. Analizując gęstości w kolejnych krokach dla danego punktu projektowego możemy stwierdzić, że gęstość dla tego punktu maleje dążąc do zera lub rośnie do jedynki w zależności od tego, czy energia odkształcenia w tym punkcie maleje, czy też rośnie.

Powstaje pytanie o kryterium doboru funkcji progowych. W niniejszej pracy będziemy zajmować się dobranymi w różny sposób stałymi wartościami progowymi, a także funkcjami, w których zmienną niezależną będzie numer kroku optymalizacji lub minimalna wartość gęstości w danym kroku. Zasadniczym celem, który przyświeca analizie funkcji progowych jest otrzymanie optymalnej topologii w możliwie małej liczbie kroków.

Algorytm numeryczny MES w części wykorzystującej funkcje progowe działa w sposób następujący: po pierwsze sumuje masę ciała usuniętą z elementów, w których gęstość była mniejsza od wyznaczonej dla danego kroku optymalizacji wartości progowej. Po drugie, zakładając spełnienie w formie równości ograniczeń nałożonych na masę, dokonuje równomiernego rozkładu tej masy na wszystkie te elementy, których gęstość jest w zakresie od dolnego ograniczenia (ε) do jedności. Skutek tego działania to rzeczywiste zmniejszenie gęstości w tych elementach, które miały gęstość pomiędzy dolnym ograniczeniem (ε) a wartością progową TF . Takie postępowanie zapewnia ciągły i łagodny proces zmniejszania gęstości materiału tam, gdzie materiał nie jest potrzebny ze względu na małe wyężenie konstrukcji w tych punktach projektowych, charakteryzujących się malejącą energią odkształcenia. Rosnąca w trakcie procesu optymalizacji wartość progowa zapewnia odpowiednio szybką zbieżność.

5.2. Przykłady rozwiązań dla zaproponowanych funkcji progowych

Koncepcja rozważenia różnych wartości progowych oraz wprowadzenia funkcji progowych opiera się między innymi na pracy [25], gdzie stwierdzono, że proces

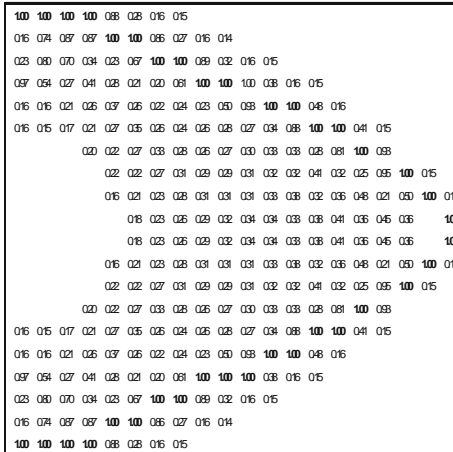


Rys. 5.1. Topologie bez użycia funkcji progowej

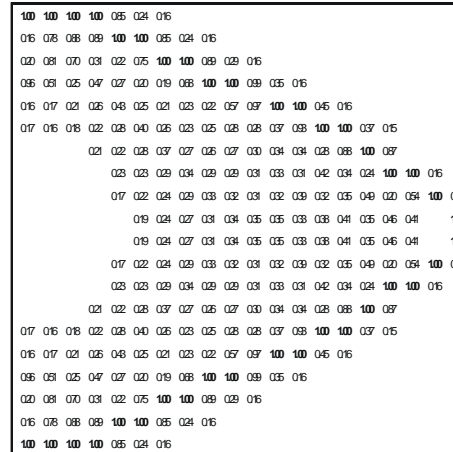
optymalizacji może być prowadzony w formie interaktywnej, a w związku z tym wielkość wartości progowej, a co za tym idzie sposób zmiany topologii w kolejnych krokach zależą od projektanta. Oznacza to, że można sterować parametrami zadania i otrzymywać w związku z tym różne rozwiązania zarówno w sposób interaktywny,

jak i poprzez funkcyjne sformułowanie parametrów sterujących zadaniem. W zależności od sytuacji można proces przyspieszać, jeśli zależy nam na bardzo szybko otrzymanej topologii. Jeśli chcemy otrzymać topologię bardziej „wyrafinowaną”, to należałoby odpowiednio spowolnić proces optymalizacji.

a)

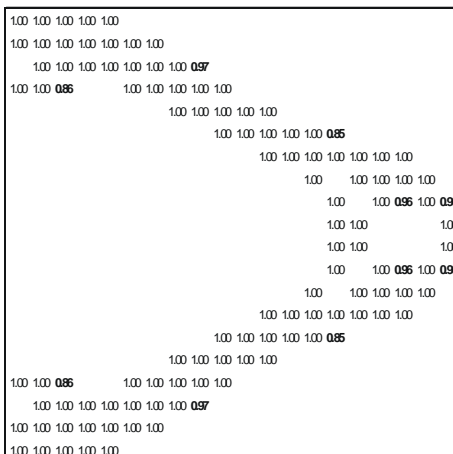


krok 600, $m = 120,00$

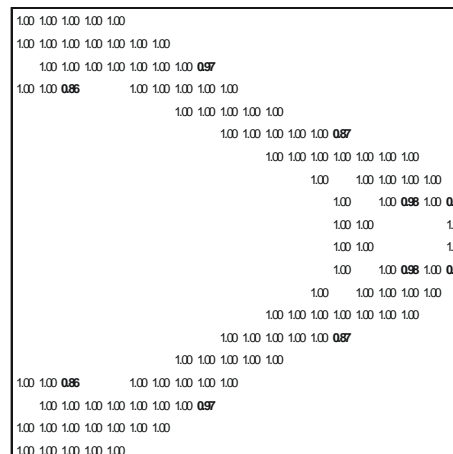


krok 1200, $m = 120,00$

b)



krok 1200, $m = 117,20$



krok 2750, $m = 117,32$

Rys. 5.2. Topologie dla $TF = 0,1$ (a) oraz dla $TF = 0,25$ (b)

Rozważać będziemy następujące funkcje progowe:

$$\begin{aligned}
 & \text{const}, \quad \text{const } j, \quad \text{const min}, \\
 & \text{const min } j, \quad \text{const } \alpha, \quad \text{const } \alpha j, \\
 & \text{const } \alpha j^2, \quad \text{const } \alpha (j + j^2), \\
 & \text{const } j + \text{const } j^2, \quad \text{const } j + \text{const } j^2 + \text{const } j^3,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

gdzie j jest numerem kroku, min. jest minimalną wartością gęstości jaką otrzymaliśmy w danym kroku optymalizacji, a α jest współczynnikiem redukcji masy.

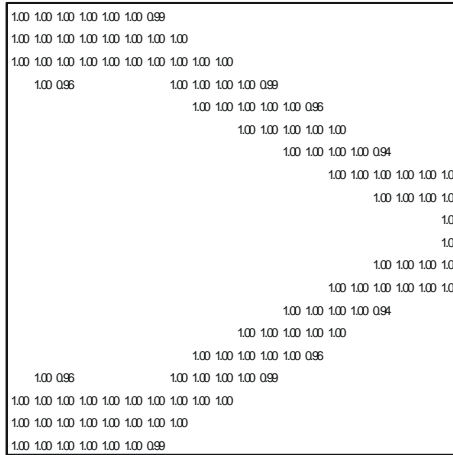
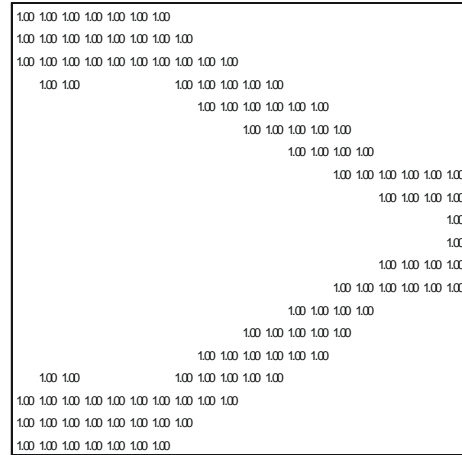
Analizę wpływu przyjętych funkcji progowych będziemy przeprowadzać na przykładach pokazanych na rys. 4.6. Współczynnik redukcji masy $\alpha = 0,3$, funkcję uaktualniającą moduł Younga przyjęto według (4.7): $E_{j+1}(\rho_j) = E(\rho_j/\rho_0)^3$, a wielkość relaksacyjną przyjęto jako $\varepsilon = 10^{-7}$ (obie wielkości są takie same jak w poprzednim rozdziale).

Zacznijmy od przypadku, gdy funkcja progowa jest stała i wynosi zero. Na rysunku 5.1 pokazano rozkład gęstości po 300, 600, 900 i 1200 krokach. Wyłuszczone czcionką zaznaczono wartości gęstości równe jeden. Widać, że „jedynki” układają się w sposób prawidłowy, ich rozkład jest taki jak na rysunkach z rozdziału 4. Nie zaobserwowano jednak zbieżności zadania. W tym przypadku brakuje możliwości odrzucania małych wartości, które znajdują się w obszarach, gdzie materiał nie jest potrzebny.

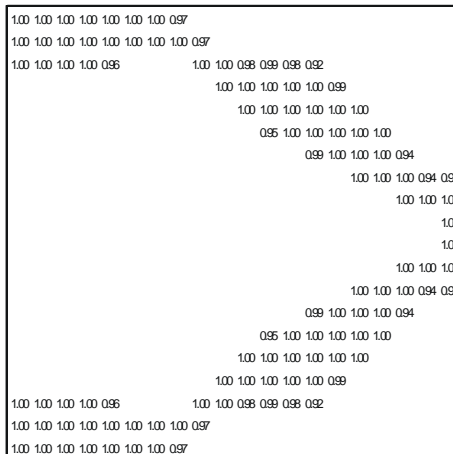
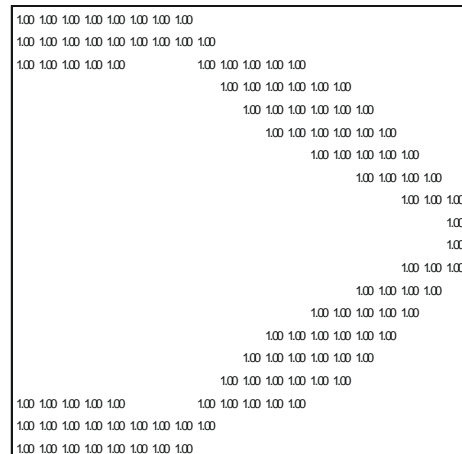
Następnie przyjmijmy wielkość funkcji progowej jako równej stałej 0,1 i 0,25 (rys. 5.2), 0,3 i 0,35 (rys. 5.3), 0,361 i 0,4 (rys. 5.4). Dla $TF = 0,1$ nie ma zbieżności. Na rysunku 5.2b zadanie jest bardzo słabo zbieżne (jak widać, nie uzyskano rozkładu zero-jedynkowego nawet dla kroku 2750). Różnica między krokiem 1200 a 2750 jest jedynie taka, że tylko w kilku elementach występują minimalne różnice gęstości (różnica mas dopełniających wynosi odpowiednio 0,80 i 0,68). Poza tym topologia w obu przypadkach jest identyczna. Krok 1200 dla $TF = 0,25$ został pokazany celowo, aby była możliwość porównania z topologią dla $TF = 0,1$. Jednak już nawet dla kroku 400 jest ona prawie taka sama jak dla kroku 1200, czy dla kroku 2750, a tylko kilka elementów ma gęstość w przedziale otwartym od 0,7 do 1,0. Wykorzystując postprocessing nawet dla 400 kroku, można otrzymać optymalną topologię o rozkładzie zero-jedynkowym. Na rysunku 5.2 i na następnych literą m oznaczono sumę masy dla danej topologii.

Dla $TF = 0,3$ i następnych definicji funkcji progowych na rysunkach mamy przedstawione topologie dla kroku o rozkładzie zero-jedynkowym i dla kroku go poprzedzającego. Na rysunku 5.3 dla $TF = 0,3$ rozkład zero-jedynkowy otrzymujemy dla 33 kroku, a dla $TF = 0,35$ już nawet dla czwartego kroku (przy sumie masy równej 116 dla obu przypadków). Na rysunku 5.4 przedstawiono topologie, dla których już w pierwszym kroku otrzymujemy rozkład zero-jedynkowy. Dla $TF = 0,361$

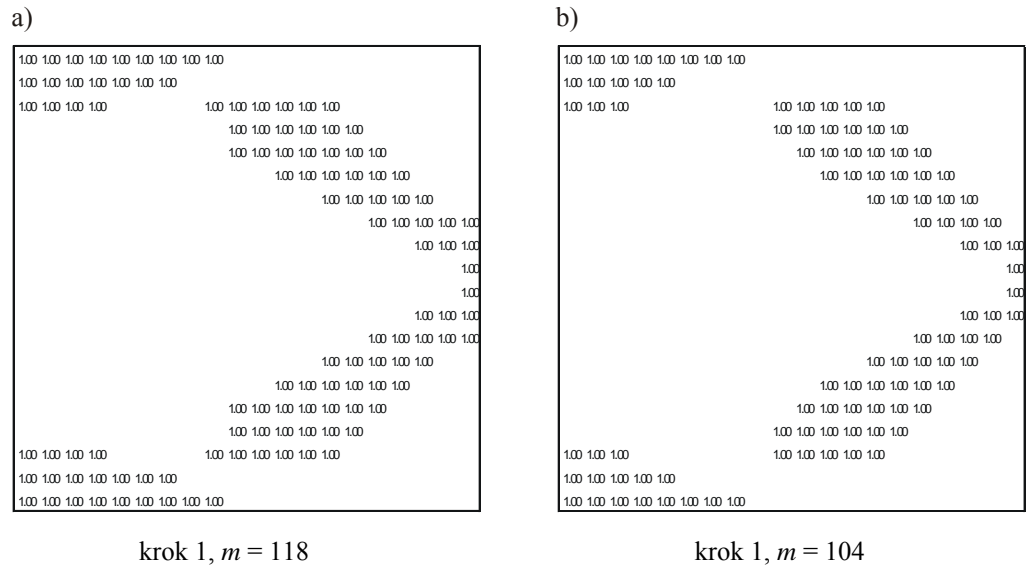
a)

krok 32, $m = 117,68$ krok 33, $m = 116,00$

b)

krok 3, $m = 119,00$ krok 4, $m = 116,00$ Rys. 5.3. Topologie dla $TF = 0,3$ (a) oraz dla $TF = 0,35$ (b)

(suma masy wynosi 118 i brakuje masy w dwóch elementach). Dla $TF = 0,4$ brakuje już znacznie więcej masy (jej suma wynosi 104) i przede wszystkim z tego względu topologia ta nie może być uważana nawet za nadającą się do postprocessingu. Jak widać, zmniejszenie liczby kroków, możliwe przy dobraniu odpowiednio dużej wielkości progowej, nie prowadzi do uzyskania satysfakcjonujących rezultatów.

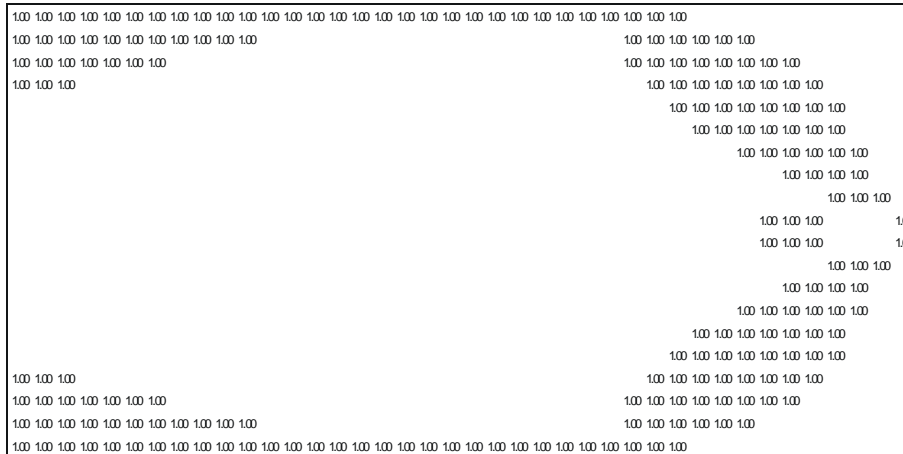
Rys. 5.4. Topologie dla $TF = 0,361$ (a) oraz dla $TF = 0,4$ (b)

Na rysunku 5.5 przedstawiono topologie dla konstrukcji o podziale 20×40 i tych wartości stałej funkcji progowej, które powyżej najszybciej dawały topologie o zero-jedynkowym rozkładzie. Są to $TF = 0,35$ (krok 2 – suma masy 210 przy dostępnej masie równej 240) i $TF = 0,361$ (krok 1 – suma masy 232). Na obu rysunkach widać wyraźnie, że proces optymalizacji był zbyt szybki (pozbawiał masy elementy, w których powinna ona pozostać, co się okazuje, jeśli analizujemy wolniejsze procesy).

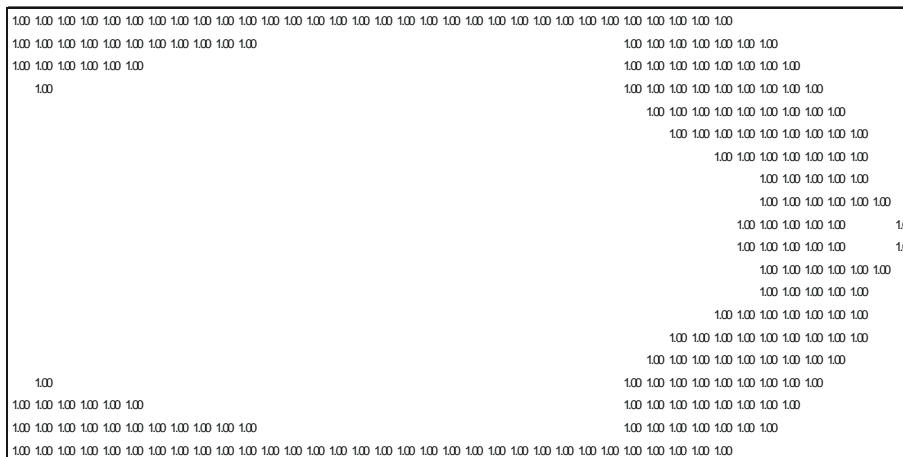
Dla porównania użyjmy stałych wartości progowych, przy których otrzymujemy najszybciej rozkład zero-jedynkowy dla przykładu przedstawionego na rys. 4.13. Współczynnik redukcji masy, tak jak na rys. 4.13, wynosi $\alpha = 0,5$, wobec tego dostępna masa wynosi 400. Na rysunku 5.6 przedstawiono topologie dla $TF = 0,361$ (krok 20 – suma masy 394,3) i $TF = 0,4$ (krok 7 – suma masy 390). Jak widać, dla kroku 20 jeszcze nie ma rozkładu zero-jedynkowego. Przypomnijmy, na rysunku 4.13 zero-jedynkową, o dużo równomierniejszym rozkładzie topologię uzyskano już w 10 krokach. Tak więc, stała wartość wielkości progowej nie daje zadowalających rezultatów. Dla $TF = 0,4$ otrzymujemy tu topologię mniej „wyrafinowaną” niż na rys. 4.13.

Przeanalizujmy teraz następujące funkcje progowe:

$$TF = \text{const } j \quad \text{oraz} \quad TF = \text{const } \alpha j. \quad (5.2)$$



$TF = 0,35$, krok 2

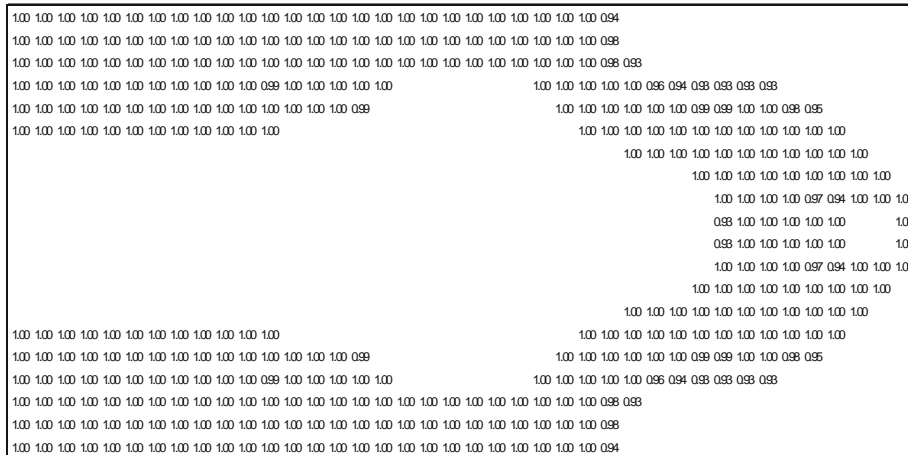


$TF = 0,361$, krok 1

Rys. 5.5. Zero-jedynkowe topologie dla stałego TF

Ponieważ współczynnik redukcji masy jest dla danego przypadku wielkością stałą, więc obie definicje sprowadzają się do stałej mnożonej przez numer kroku optymalizacji. Przeanalizujemy pierwszą funkcję o postaci: $TF = 0,036 j$. Daje ona rozwiązanie w 11 krokach (rys. 5.7b). Można je porównywać z topologią przedstawioną na rys. 4.8a i powtórzoną na rys. 5.7a dla $TF_1 = 0,1 j \alpha$. Ponieważ

poprzednio



$$TF = 0,361, \text{ krok } 20$$



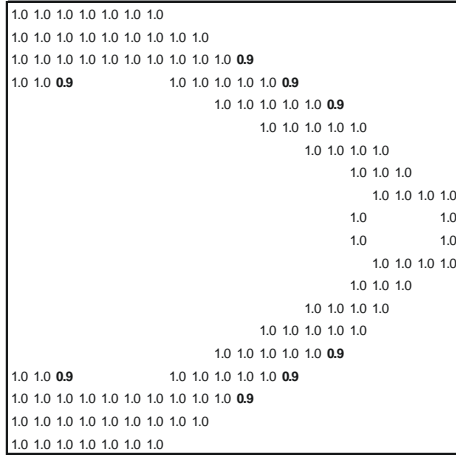
$$TF = 0,4, \text{ krok } 7$$

Rys. 5.6. Topologie dla stałego TF i $\alpha = 0,5$

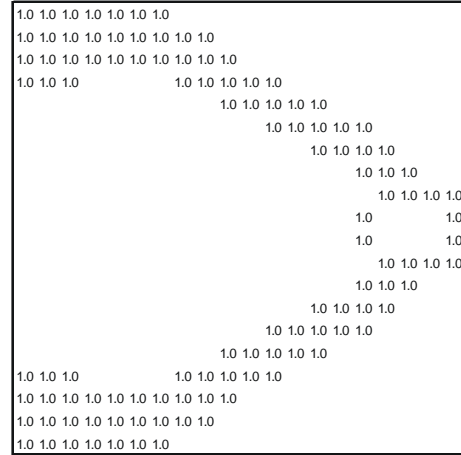
wykazaliśmy, iż stosując stałą 0,036 najszybciej można otrzymać rozkład zero-jedynkowy, więc zastosowaliśmy ją do funkcji zawierającej numer kroku. Choć wynik otrzymaliśmy już w 11 krokach, jednak ta topologia jest mniej skomplikowa-

na niż przedstawiona na rys. 5.7a.

a)

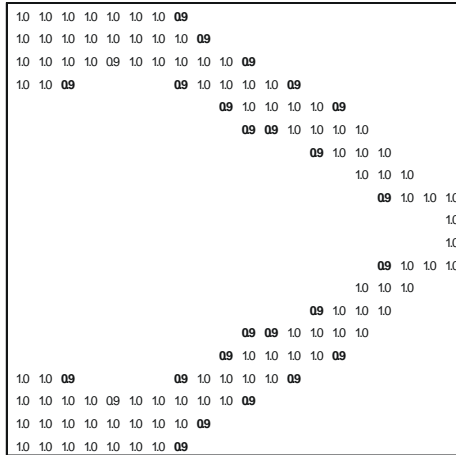


$TF = 0,39$, krok 13, $m = 119,09$

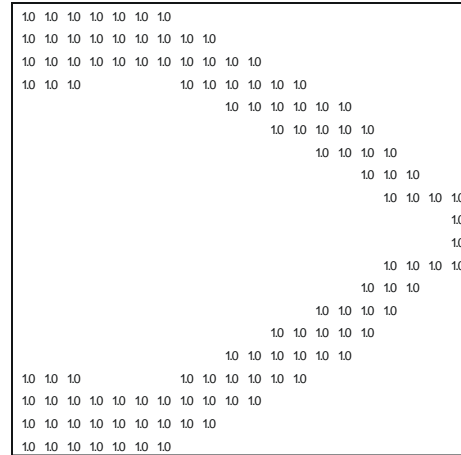


$TF = 0,42$, krok 14, $m = 114,00$

b)



$TF = 0,36$, krok 10, $m = 119,45$

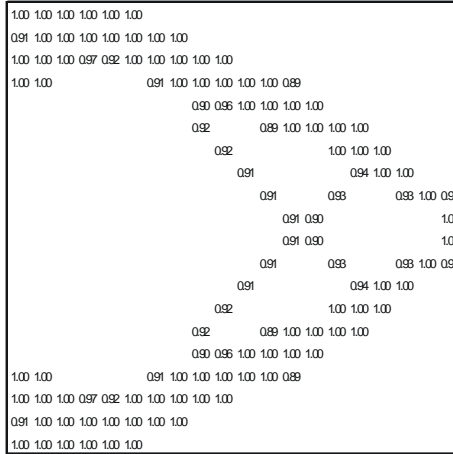


$TF = 0,396$, krok 11, $m = 118,00$

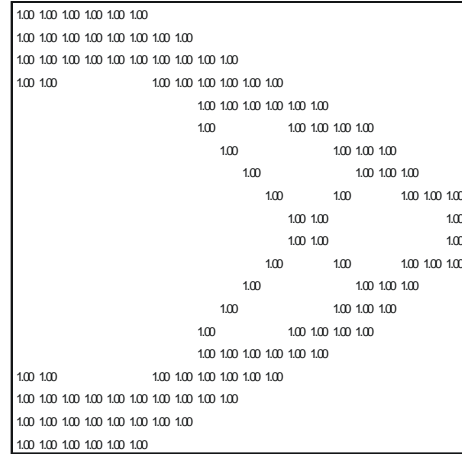
Rys. 5.7. Topologie dla $TF = 0,1j\alpha$ (a) oraz dla $TF = 0,036j$ (b)

W wyniku dalszych poszukiwań otrzymano „wyrafinowaną” topologię dla $TF = 0,05\alpha j$. Przedstawiono ją na rys. 5.8 w dwóch wersjach: liczbowej i w odcieniach szarości.

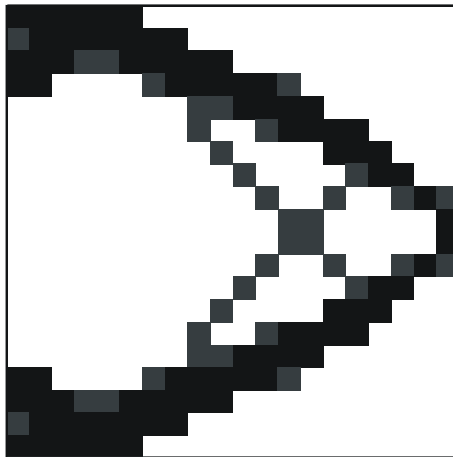
Z kolei na rysunku 5.9 przedstawiono topologię dla $\alpha = 0,5$, dla tej samej funkcji progowej ($TF = 0,05\alpha j$) (rys. 5.9b) i dla wspomnianej wyżej TF_1 (rys. 5.9a), dla której topologia jest niekompletna, co spowodowane jest zbyt dużą wartością funkcji progowej w poszczególnych krokach. Suma masy topologii z rysunku 5.9a wynosi 168, a z rys. 5.9b wynosi 188, co jest bliższe wartości masy dostępnej dla rozważanego zadania, równej 200. Jak widać, odpowiednio dobrana funkcja progowa (rys. 5.9b) daje „wyrafinowaną” topologię, nie wymagającą już postprocessingu.



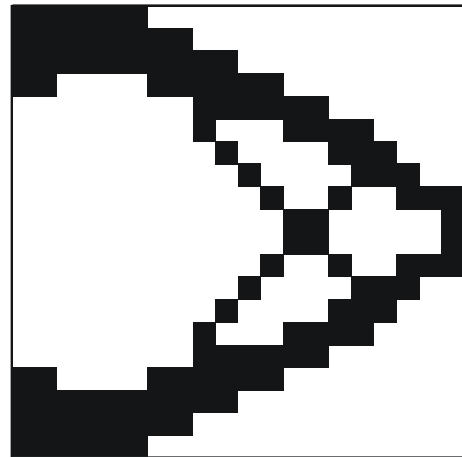
$TF = 0,36$, krok 24, $m = 119,07$



$TF = 0,375$, krok 25, $m = 118,00$

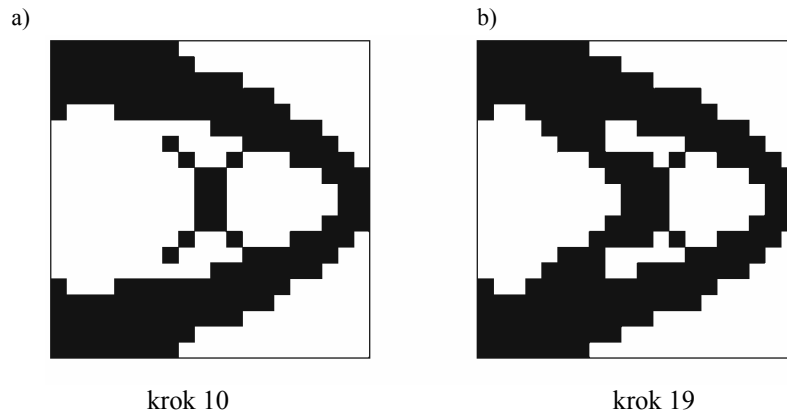
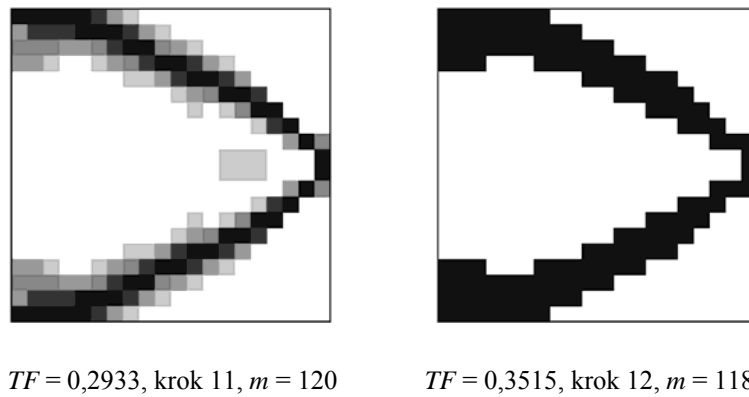


krok 24



krok 25

Rys. 5.8. Topologie dla $TF = 0,05\alpha_j$

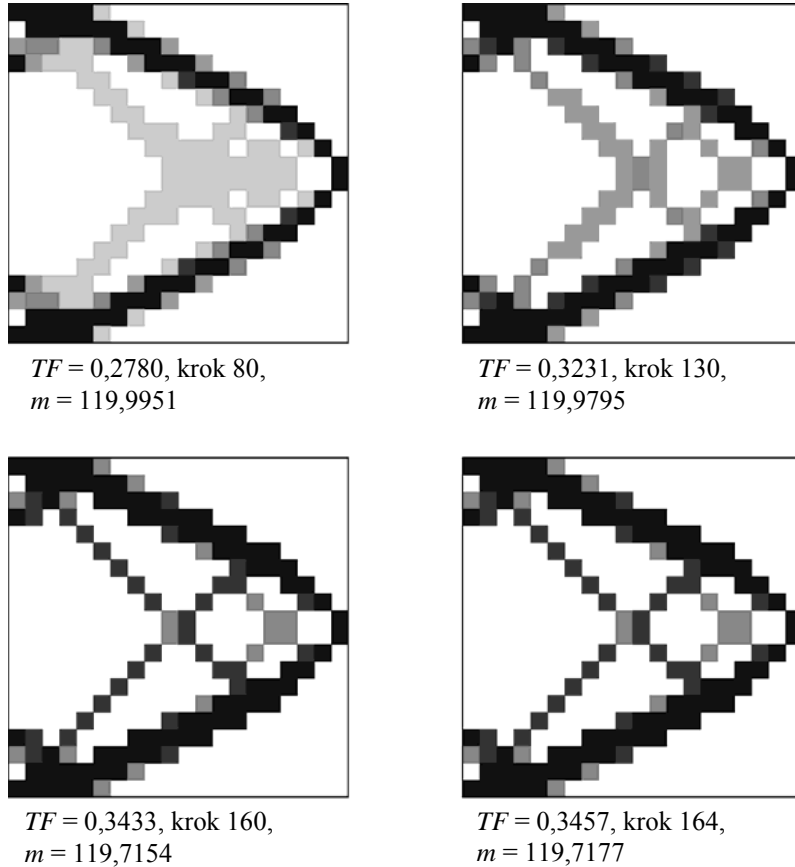
Rys. 5.9. Topologie dla $\alpha = 0,5$, dla $TF = 0,1\alpha j$ (a) i dla $TF = 0,05\alpha j$ (b)Rys. 5.10. Topologie dla $TF = \min j$

Przejdźmy teraz do funkcji progowych, w których definicjach zawarta jest minimalna wartość gęstości dla każdego kroku z osobna. Chodzi tu o minimalną, znormalizowaną wartość gęstości odpowiadającą energii odkształcenia, z jaką mamy do czynienia bezpośrednio przed działaniem funkcji progowych. Na rysunku 5.10 przedstawiono krok z odcieniami szarości oraz rozkład czarno-biały dla

$$TF = \min j. \quad (5.3)$$

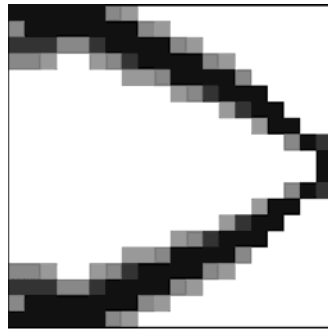
Przy rozkładzie czarno-białym suma masy wynosi 118. Jak widać, między dość szarym krokiem 11 a czarno-białym krokiem 12 należałoby znacznie spowolnić proces, gdyż zbyt dużo elementów zostało pozbawionych masy. W kroku 12 pozostały jedynie dwa „pręty”, bez jakichkolwiek dodatkowych połączeń. Rozpatrzmy teraz

$$TF = \text{const min}. \quad (5.4)$$

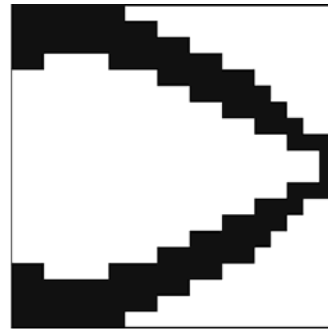
Rys. 5.11. Topologie dla $TF = 5$ min

Rysunek 5.11 zawiera topologie dla $TF = 5$ min. Otrzymana topologia jest „wyrafinowana”. Niestety, w procesie optymalizacji dla tak zdefiniowanej funkcji prokowej nie można otrzymać rozkładu czarno-białego, gdyż problem staje się w pewnym momencie rozbieżny. W tym przypadku dzieje się tak dla kroku 165. Jediną pomocą jest postprocessing wykonany dla kroku 164, dzięki któremu po uzupełnieniu masy w tych elementach, w których gęstość jest mniejsza od jedynki masą dopełniającą można otrzymać rozkład czarno-biały. Jednak suma masy wynosi tu 119,74, a masa dopełniająca wynosi ponad 3,5. Oznacza to, że należałoby usunąć masę z dwóch lub czterech elementów i wtedy odpowiednio masa przekraczałaby wartość 120 lub byłaby nieco mniejsza od wartości równej 120. Na rysunku 5.11 dla kroku 80 pokazano pięć odcieni szarości w interwale co 0,1 począwszy od 0,5. Kolejne trzy topologie narysowane są w tej samej skali. Można zauważyć, że dla kroku 130 w stosunku do 80 kroku zmniejszyła się liczba „szarych” elementów i równo-

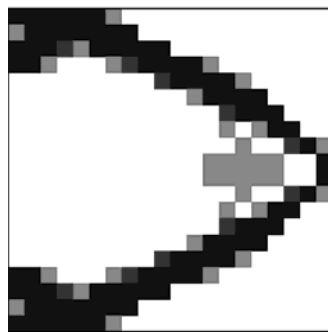
cześniej najniższa wartość gęstości zwiększyła się do 0,7. Kroki 160 i 164 nie różnią się niemal od siebie.



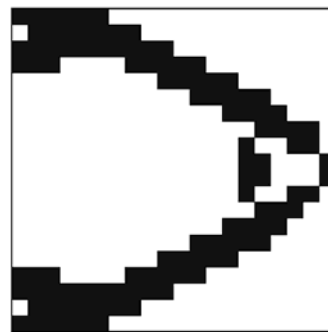
$TF = 0,01\alpha_j^2 = 0,3$
krok 10, $m = 119,98$



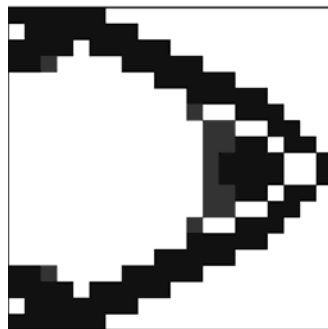
$TF = 0,01\alpha_j^2 = 0,36$
krok 32, $m = 112,00$



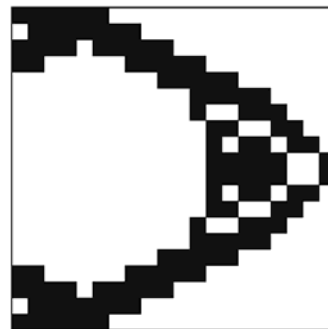
$TF = 0,001\alpha_j^2 = 0,2883$
krok 31, $m = 119,65$



$TF = 0,001\alpha_j^2 = 0,3072$
krok 32, $m = 112,0$



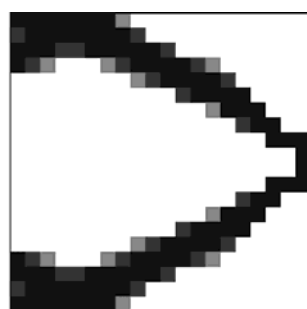
$TF = 0,0001\alpha_j^2 = 0,3$
krok 100, $m = 118,80$



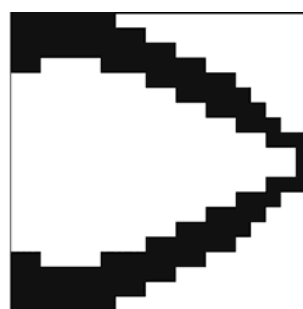
$TF = 0,0001\alpha_j^2 = 0,306$
krok 101, $m = 116,00$

Rys. 5.12. Topologie dla $TF = \text{const } \alpha_j^2$

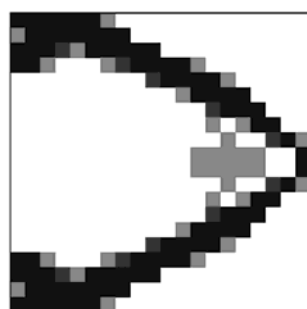
Takie same problemy ze zbieżnością występują dla innych funkcji progowych opartych na definicji $TF = \text{const min}$: na przykład $TF = 10 \text{ min}$, dla którego zagadnienie staje się rozbieżne w 25 kroku, czy też dla $TF = 5,5 \text{ min}$, dla którego zagadnienie staje się rozbieżne w 139 kroku. W każdym z tych przypadków charakter topologii jest podobny.



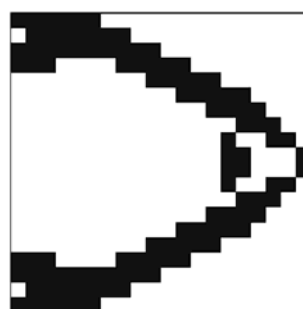
$TF = 0,01 \alpha(j + j^2) = 0,33$
krok 10, $m = 119,45$



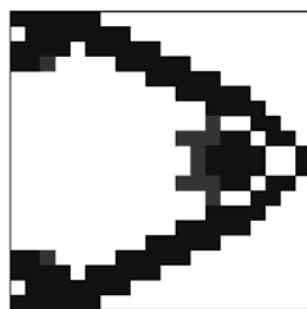
$TF = 0,01 \alpha(j + j^2) = 0,393$
krok 10, $m = 112,00$



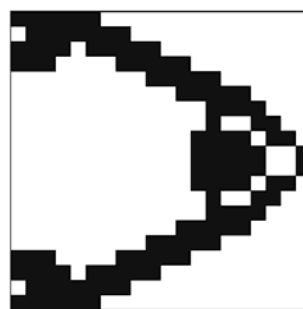
$TF = 0,001 \alpha(j + j^2) = 0,2976$
krok 31, $m = 119,62$



$TF = 0,001 \alpha(j + j^2) = 0,3168$
krok 32, $m = 108,00$

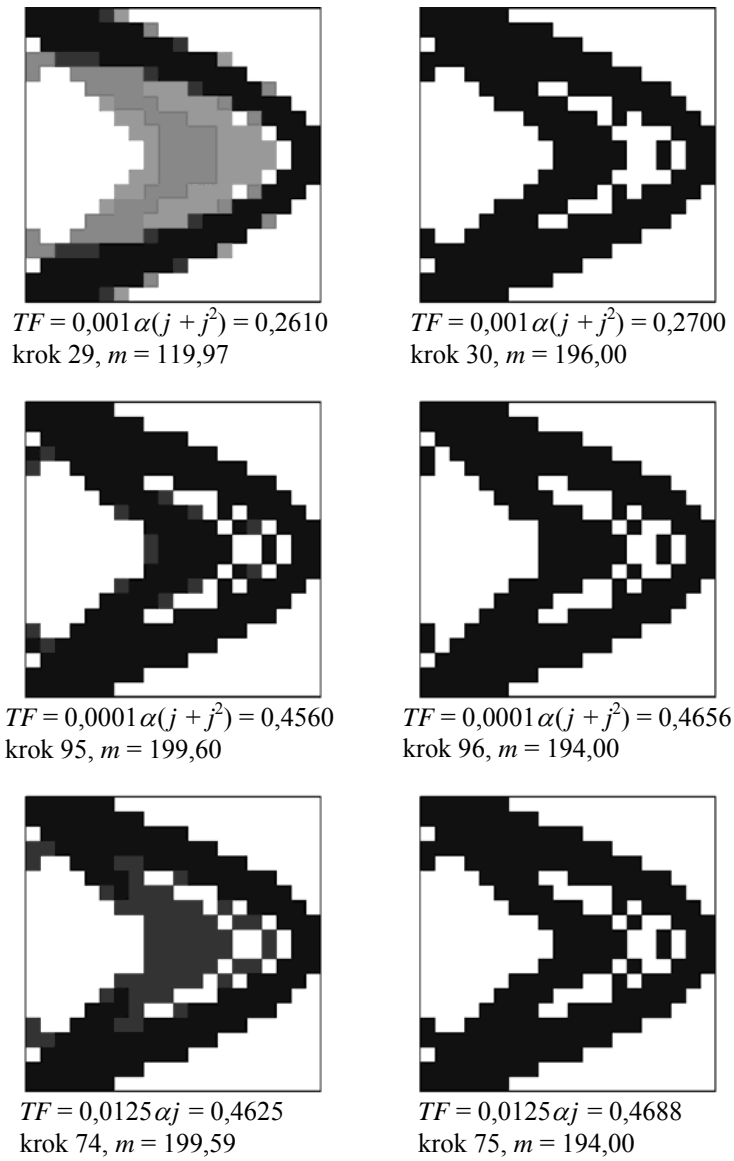


$TF = 0,0001 \alpha(j + j^2) = 0,2911$
krok 98, $m = 118,84$



$TF = 0,0001 \alpha(j + j^2) = 0,2970$
krok 99, $m = 118,00$

Rys. 5.13. Topologie dla $TF = \text{const } \alpha(j + j^2)$

Rys. 5.14. Topologie dla $\alpha = 0,5$ i różnych TF

Następną definicją funkcji progowej jest

$$TF = \text{const } \alpha j^2. \quad (5.5)$$

Topologie z jej wykorzystaniem przedstawiono na rys. 5.12, gdzie można zaobserwować gromadzenie się materiału w pobliżu miejsca przyłożenia siły przy zmniejsz-

szającej się wartości stałej z definicji funkcji progowej. Wtedy też w związku ze zmniejszaniem się wartości progowej dla danego kroku musi wzrosnąć liczba kroków niezbędnych do otrzymania rozkładu czarno-białego. Na omawianym i następnych rysunkach zamieszczono definicję funkcji progowej, jej wartość dla danego kroku, numer kroku i wreszcie sumę masy dla rozpatrywanego kroku.

Kolejną rozpatrywaną definicją jest

$$TF = \text{const } \alpha (j + j^2). \quad (5.6)$$

Topologie dla tej definicji pokazano na rys. 5.13 w takim samym układzie jak na rys. 5.12. Zaobserwowano duże podobieństwo otrzymanych topologii na obu rysunkach. Wynika z tego, że decydującym czynnikiem w obu definicjach jest kwadrat numeru kroku.

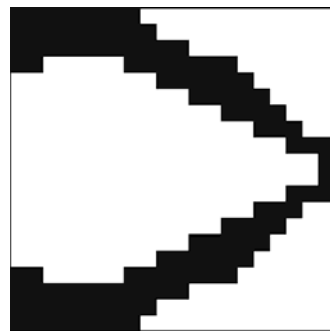
Na rysunku 5.14 przedstawiono topologie dla $\alpha = 0,5$. Cztery z nich to topologie dla tej samej funkcji progowej (5.6). Zauważono tu dużą zgodność topologii dla kroku 96 z rys. 5.14 z topologią z rys. 4.21 dla kroku 75, pokazaną w notacji czarno-białej na rys. 5.14. Dla obu topologii stwierdzono również zgodność sumy masy.

Na rysunku 5.15 przedstawiono czarno-białe topologie dla

$$TF = 0,03j + 0,01j^2 \quad (5.7)$$

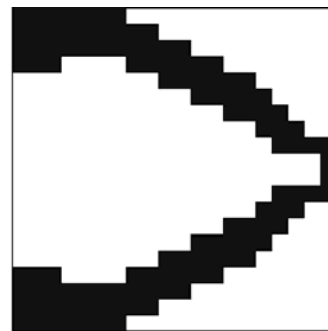
i

$$TF = 0,03j + 0,0001j^2 + 0,00001j^3.$$



$$TF = 0,03j + 0,01j^2 = 0,28$$

krok 5, $m = 118,00$



$$TF = 0,01j + 0,0001j^2 + 0,00001j^3 = 0,39170$$

krok 12, $m = 118,00$

Rys. 5.15. Topologie czarno-białe

Jak łatwo zauważyć, wpływ drugiego i trzeciego czynnika w drugiej definicji dla kroków powyżej 10 jest nieznaczny. Okazuje się, że zwiększanie ich wpływu nie

-jedynekowa nie jest optymalna, wyraźnie brakuje połączeń. Tak więc, funkcja progowa tak użyteczna dla konstrukcji 20×20 nie daje takich samych rezultatów dla konstrukcji dłuższej (20×40).

Podsumowując można stwierdzić, że dobór odpowiedniej funkcji progowej jest bardzo istotny i ma bardzo duży wpływ na otrzymaną topologię, która w zależności od doboru funkcji progowej jest inna, może też być otrzymana w różnej liczbie kroków. Wobec tego dużego znaczenia nabiera użycie właściwej definicji funkcji progowej, tak aby otrzymana topologia była optymalna i uzyskana w możliwie małej liczbie kroków. Zauważmy, że:

1. Właśnie dzięki właściwie zdefiniowanej funkcji progowej otrzymujemy optymalną topologię w bardzo małej liczbie kroków.

2. Wartość funkcji progowej jaka jest stosowana w kroku, w którym otrzymujemy rozkład zero-jedynekowy nie może zbyt przetrzymać pewnych wartości związanych ze współczynnikiem redukcji masy. Na przykład: dla $\alpha = 0,3$ wartość funkcji progowej powinna być mniejsza niż 0,4, dla $\alpha = 0,5$ powinna być mniejsza od 0,5, dla $\alpha = 0,6$ mniejsza od około 0,6, a dla $\alpha = 0,8$ mniejsza od 0,64.

3. W przypadku stałej wartości funkcji progowej stwierdzono, że wartość ta nie może być zbyt duża, gdyż penalizacja zbyt dużych wartości w pojedynczym kroku nie prowadzi do rozwiązań optymalnych. Jednak zbyt mała wartość progowa wymaga bardzo dużej liczby kroków, a niekiedy wręcz trudno uzyskać zbieżność (rys. 5.2b). Przy stałej o bardzo małej wartości możemy otrzymać topologię zbliżoną do optymalnej (rys. 5.2b), przy stałej o nieco większej wartości można otrzymać optymalną topologię (rys. 5.3a), a przy większej wartości możemy otrzymać topologię bardzo odbiegającą od optymalnych (rys. 5.4).

4. Na podstawie punktu 3 można wnioskować, że najlepsze rozwiązania można otrzymać wtedy, kiedy wartość funkcji progowej na początku procesu będzie mała i w trakcie procesu będzie rosła w taki sposób, aby dla rozkładu zero-jedynekowego miała możliwie największą wartość dopuszczalną dla danego współczynnika redukcji masy. Dzięki temu proces będzie przebiegał tak, że na początku eliminowana będzie masa z elementów o energii relatywnie małej. Następnie, gdy pozostaną większe wartości gęstości w poszczególnych elementach, podejmowana będzie decyzja, z których z nich masa powinna być usunięta, a w których pozostawiona i powiększona. W tym przypadku wobec łagodnie przebiegającego procesu wydaje się, że przypadkowe usunięcie masy z dowolnego elementu będzie bardzo mało prawdopodobne, a proces będzie miał charakter łagodnego procesu ewolucyjnego (rys. 4.9 i 4.10).

5. Większa niż liniowa zależność od numeru kroku optymalizacji w definicji funkcji progowej nie prowadzi do zbyt „wyrafinowanych” topologii. Wprowadzenie liniowej zależności od numeru kroku miało najistotniejszy wpływ na szybkość i charakter otrzymanej topologii.

6. Miarą prawidłowości przyjętej funkcji progowej jest jak najlepsza zgodność sumy masy z dostępną masą dla rozkładu zero-jedynekowego oraz jak najmniejsza

liczba elementów o gęstości różnej od zera i jedynki przy zachowaniu równości sumy masy z dostępną masą w kroku poprzedzającym rozkład zero-jedynkowy. Jeśli liczba wspomnianych elementów jest bardzo bliska zeru, a w kroku o rozkładzie zero-jedynkowym również jest prawie zachowana równość sumy masy z dostępną masą, to niepotrzebny jest postprocessing.

7. W zależności od konstrukcji (m.in. jej wymiarów), należy dobrać właściwą funkcję progową. Funkcja progowa odpowiednia dla danej konstrukcji może nie być właściwą funkcją dla innej (rys. 5.8 i 5.16).

8. Funkcję progową należy dobierać dla każdego współczynnika redukcji masy osobno (rys. 4.21 dla TF_2 oraz $\alpha = 0,5$ i rys. 5.8 dla $TF = 0,05j\alpha$ oraz $\alpha = 0,3$), co nie wyklucza sytuacji, w której dana funkcja progowa jest właściwa dla różnych wartości współczynnika redukcji masy (dla TF_2 rys. 4.20 i 4.21).

6. Podejście relaksacyjne

6.1. Wstęp

Przedstawiony w rozdziale 3 formalizm zapisu podejścia relaksacyjnego w optymalizacji topologii, w niniejszym rozdziale będzie poszerzony o przedstawienie algorytmu relaksacyjnego z uwzględnieniem funkcji relaksacyjnych i zastosowania ich w procesie poszukiwania optymalnych topologii metodą elementów skończonych. Aby przybliżyć podejście relaksacyjne stosowane w optymalizacji topologii, przedstawione zostanie ono (w oparciu o studia literaturowe) w zastosowaniu dla struktur prętowych, a następnie dla kontinuum materialnego.

Rozpocznijmy od dyskretnych struktur prętowych, gdzie ostatnio w podejściu relaksacyjnym eliminuje się osobliwe optima ze sformułowania problemu, pozostawiając taki sam rozmiar zagadnienia.

Już w latach 60. stosowano podejście „podstawowej siatki konstrukcji”, która zawierała wszystkie połączenia między punktami siatki złożonej z punktów przyłożenia sił i punktów, w których zadano warunki brzegowe. W procesie optymalizacji usuwano zbędne połączenia pomiędzy węzłami (przyjmowano zerowy przekrój poprzeczny prętów). Prowadziło to często również do eliminacji niektórych węzłów siatki. Zmiennymi projektowymi były przekroje poprzeczne prętów. Więzy zakładano na naprężenia. Rozważania te stanowiły bazę, na której rozwinęły się szeroko badania optymalizacji struktur prętowych, w tym badania związane z wprowadzeniem do rozwiązania zagadnienia podejścia relaksacyjnego.

W 1992 roku Cheng i Jiang w [14] pokazali na przykładzie kratownicy, że nieciągłość więzów nałożonych na naprężenia, gdy pole przekroju poprzecznego wynosi zero, jest zasadniczą przyczyną istnienia osobliwego optimum. Pokazali też, że osobliwe optimum jest końcowym punktem procesu optymalizacji. W związku z tym, rozważali warunki istnienia osobliwego optimum. Rozvany i Birker w [68] analizowali osobliwe optima w świetle rozwiązań dokładnych. Następnie w 1996 roku Rozvany zastosował gładką funkcję stanowiącą obwiednię osobliwego optimum i w ten sposób dokonał obejścia nieciągłości w więzach narzuconych na naprężenia w miejscach, gdzie pole przekroju poprzecznego wynosi zero. Wreszcie w pracy [13]

zaproponowano podejście relaksacyjne w odniesieniu do więzów na naprężenia, co w efekcie prowadzi do nałożenia więzów relaksacyjnych na przekroje poprzeczne prętów. W tym podejściu poprzez osłabianie, czyli relaksację więzów sił wewnętrznych w prętach, modyfikuje się dopuszczalny obszar rozwiązania i eliminuje się osobliwe optima ze sformułowania problemu. Problem postawiony był w sposób następujący: wyznaczyć A_1, A_2, \dots, A_N minimalizując ciężar

$$W = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i L_i \quad (6.1)$$

przy nałożeniu następujących więzów na naprężenia

$$\sigma_i^L \leq \sigma_i \leq \sigma_i^U, \quad 0 \leq A_i, \quad (6.2)$$

gdzie ρ_i, A_i, L_i oznaczają odpowiednio gęstość materiału, przekrój poprzeczny i długość i -tego pręta, σ_i^L, σ_i^U – odpowiednio dolną i górną granicę naprężeń i -tego pręta.

Ostatecznie warunek (6.2) zmieniono na

$$\begin{aligned} (\sigma_i^L - \sigma_i) A_i &\leq \varepsilon, \\ (\sigma_i - \sigma_i^U) A_i &\leq \varepsilon, \\ \varepsilon^2 &\leq A_i, \end{aligned} \quad (6.3)$$

gdzie ε jest małą wielkością. Proponuje się (tak jak w ostatnim wzorze), aby wielkość ε została podniesiona do kwadratu, choć nie jest to konieczne, ale poprawia zbieżność. Dzięki relaksacji nie istnieją zdegenerowane podobszary, nie istnieją wtedy też osobliwe optima, gdyż – jak wspomniano – zmieniony został kształt obszaru dopuszczalnego. Powyższe równania są spełnione dla bardzo małych A_i . Fizycznie oznacza to, że jeśli A_i dosięga dolnej granicy w końcowej fazie iteracji, to pręt jest usunięty z konstrukcji, ale warunki więzów nałożonych na siły są spełnione. W cytowanej pracy [13] podano też dowód matematyczny, w którym pokazano, że aby zagwarantować zbieżność, wymagane jest, aby A było małą wielkością, wyższego rzędu niż ε , gdy ε dąży do zera. Pokazano, że rozwiązanie dąży do globalnego optimum, gdy tylko ε dąży do zera.

6.2. Podejście relaksacyjne dla kontinuum materialnego

W 1998 roku ukazała się praca Duysinx i Bendsøe'a [18], w której zastosowano podejście relaksacyjne do kontinuum materialnego i warstwowych płyt kompozytowych. W tej pracy więzy nałożone są też na naprężenia. Nie powinny one przekraczać pewnych narzuconych wielkości dla poszczególnych punktów materialnych, jeżeli

gęstość jest w nich większa od zera. Zakłada się, że kiedy gęstość takiego punktu materialnego dąży do zera, to naprężenia dążą do skończonej małej wartości. Więzy na naprężenia przyjmują postać:

$$\rho \left(\frac{\|\sigma\|}{\sigma_1} - 1 \right) \leq \varepsilon, \quad (6.4)$$

gdzie w liczniku występują naprężenia w konstrukcji, w mianowniku naprężenia maksymalne jakie mogą być dopuszczone, a wielkość ε jest dana. W tym równaniu wszystkie wielkości mogą mieć charakter dyskretny lub odnosić się do całego obszaru projektowego w sposób ogólny. Sens równania jest taki, że jeżeli naprężenia w danym punkcie materialnym są relatywnie małe, to wyrażenie w nawiasie dąży do minus jedności i wtedy można napisać

$$\rho b \geq \varepsilon, \quad (6.5)$$

gdzie b jest wielkością bliską jedności. W [18] przyjęto

$$\varepsilon^2 = \rho_{\min} \leq \varepsilon. \quad (6.6)$$

Dla $\varepsilon = 0$ wzór (6.6) określa nam początkowo postawiony problem z więzami nałożonymi na naprężenia, natomiast dla dowolnego $\varepsilon > 0$ powyższy problem relaksacyjny jest charakteryzowany przez przestrzeń projektową W_ε , która już nie jest zdegenerowana. W pracy [13] dowiedziono, że dzięki tej relaksacji tworzy się ciągłe i wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie pomiędzy parametrem ε a obszarem projektowym podlegającym relaksacji. Oznacza to, że jeśli $\varepsilon \rightarrow 0$, to ciąg obszarów $\{W_\varepsilon\}$ i odpowiadające im optymalne rozwiązania $\{\rho_\varepsilon\}$ wykazują ciągłą zbieżność z początkowym zdegenerowanym problemem i związanym z nim optymalnym rozwiązaniem. Dzięki temu zadanie dla kontinuum materialnego jest dobrze uwarunkowane. Wobec tego w [18] procedura rozwiązująca zawiera ciąg problemów optymalizacji topologii dla malejącego ε .

W prezentowanej pracy wykorzystamy do sformułowania problemu relaksacyjnego ograniczenia narzucone na masę kontinuum znajdującego się w obszarze Ω (wzór (3.37)). Zapiszmy tę zależność w nieco zmienionej formie

$$m_j \leq m_0, \quad (6.7)$$

co oznacza, że masa ciała podczas procesu optymalizacji (dla j -tego kroku) jest równa lub mniejsza niż określona na początku dostępna masa. Jest oczywiste, że w ogólnym przypadku masa dla j -tego kroku musi być większa lub równa zero, wobec tego do powyższego równania można wpisać dolne ograniczenie

$$0 \leq m_j \leq m_0. \quad (6.8)$$

Ponieważ rozpatrujemy kontinuum w sposób dyskretny dla poszczególnych punktów materialnych z osobna, więc po zsumowaniu masy po poszczególnych punktach warunek (6.8) przybiera postać

$$0 \leq \sum_{i=1}^N \rho_i V_i \leq \sum_{i=1}^N \rho_h V_i, \quad (6.9)$$

gdzie ρ_h jest gęstością danego materiału już po procesie homogenizacji, a ρ_i jest gęstością i -tego elementu podczas procesu. Zapis ten może być wprost użyty w metodzie elementów skończonych, gdzie punkty materialne utożsamia się z elementami skończonymi.

Aby uniknąć osobliwości globalnej macierzy sztywności, powyższe równanie jest modyfikowane założeniem dolnego ograniczenia na ciężar konstrukcji, który zależy od gęstości

$$\rho_i^L V_i \leq \rho_i V_i \leq \rho_h V_i, \quad (6.10)$$

co można przedstawić jako

$$\rho^L V_i \leq \rho_i V_i \leq \rho^U V_i, \quad (6.11)$$

gdyż przewiduje się jedną, taką samą wartość ograniczenia gęstości dla wszystkich elementów. W ostatnim wzorze ρ^L jest dolnym ograniczeniem gęstości, natomiast ρ^U jest górnym ograniczeniem gęstości, równym gęstości ρ_h danego materiału już po procesie homogenizacji, bądź gęstości ρ , jeśli rozważamy kolejne kroki procesu optymalizacji. Dzieląc obustronnie przez objętość elementu sprowadzamy zależność (6.11) do postaci

$$\rho^L \leq \rho_i \leq \rho^U. \quad (6.12)$$

Ponieważ (6.12) stosujemy do każdego z kolejnych kroków procesu, więc dolne ograniczenie może być albo stałe dla całego procesu, albo w szczególnym przypadku zmienne dla każdego kroku, choć w danym kroku ustalone.

Definiuje się wielkość relaksacyjną ε jako wielkość nie większą niż dolne ograniczenie gęstości

$$\varepsilon \leq \rho^L. \quad (6.13)$$

Takie samo rozumowanie, jak przedstawiono powyżej dla gęstości materiału kontinuum, można przeprowadzić dla gęstości względnej stosowanej w algorytmie obliczeniowym.

W naszych rozważaniach ε będzie stałą wielkością, będzie to też funkcja malejąca w trakcie procesu.

Przyjęcie dolnego ograniczenia gęstości i zdefiniowanie wielkości ε jest równoważne wprowadzeniu infinytesymalnie małej gęstości ε do punktów materialnych należących do obszarów Ω_v .

Gęstość ρ_i jest pojęciem ogólnym, dotyczącym zarówno gęstości punktów z gęstością stosunkowo bliską gęstości ρ , jak i tej bliskiej zeru oznaczanej jako gęstość ε . Dzięki zastosowanemu algorytmowi, w procesie optymalizacji, naprężenia, a co za tym idzie energia odkształcenia w niektórych punktach materialnych maleje, bądź przyjmuje wręcz wartości równe zeru (jest to efekt działania funkcji progowych). Nałożenie dodatkowych ograniczeń na masę zgromadzoną w punktach materialnych, ograniczeń sprowadzających się do tego, iż narzucone są one na gęstość (6.13), w efekcie powoduje, że w wielu punktach pojawia się materiał o bardzo małej gęstości, zapewniając możliwość działania algorytmu i powstanie małych naprężeń. Należy podkreślić, że w prezentowanym tu podejściu minimalna wartość gęstości i wielkość progowa działają niezależnie.

Na potrzeby niniejszego rozdziału przyjęto definicję uaktualniania modułu Younga znaną ze wzoru (4.7): $E_{j+1}(\rho_j) = E(\rho_j / \rho_0)^3$. Zastosowano następujące funkcje progowe: $TF_1 = 0,1j\alpha$ oraz $TF_2 = 0,0125j\alpha$.

6.3. Rozważania dotyczące definicji wielkości relaksacyjnej ε

Przystępując do rozważań nad wpływem wielkości ε na rozwiązanie należy wziąć pod uwagę wpływ ε na zbieżność rozwiązania i na jego formalną poprawność obejmującą analizę otrzymanych topologii. Zostanie zbadane, jak dla ustalonego sposobu uaktualniania modułu Younga i ustalonej funkcji progowej będzie się zmieniać rozwiązanie, jeśli wielkość ε będzie przyjmować coraz mniejsze wartości stałe, a następnie ε będzie określana bądź przez funkcję malejącą związaną liniowo, bądź przez odpowiednią funkcję potęgową z numerem kroku procesu optymalizacji.

Jeśli chodzi o definicję ε , to już w [13] stwierdzono, że użyta mała wartość powinna spełniać warunek $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$. W konsekwencji dla struktur prętowych zaproponowano, aby $\varepsilon_k = 1/k$, gdzie k jest numerem kolejnego kroku procesu optymalizacji. Pomimo to, do obliczeń numerycznych stosowano w [13] ε w zakresie od 10^{-3} do 10^{-9} , przy czym dla danego procesu wartość ε była stała. Ponadto w [13] powołano się na [32] i [71], gdzie stosowano tzw. podejście ciągłe, polegające na przyjęciu początkowo relatywnie dużego ε , by następnie zmniejszać je rozwiązując kolejne etapy procesu optymalizacji. W [18] zagadnienia optymalizacji rozważano dla malejącego ε , przy czym w trakcie danego procesu wartość ε była również stała i przyjmowano ją w zakresie od 10^{-1} do 10^{-6} . W tym przypadku dość duża początkowa wielkość ε była

uzasadniona potrzebą znalezienia osobliwego optimum od razu, startując z dowolnego punktu przestrzeni projektowej.

W trakcie działania procesu optymalizacji usuwana jest masa z tych punktów materialnych, w których gęstość jest mniejsza niż wartość funkcji progowej (TF) dla danego kroku. Dla potrzeb prawidłowego funkcjonowania algorytmu należy jednak pozostawić pewną infinitezymalną masę w tych punktach, co sprowadza się do tego, że wartość gęstości dla tych punktów przyjmowana jest jako bardzo mała. Gęstością tą jest wielkość ε . Jest ona ograniczona od góry funkcją progową (TF). Należy pamiętać, że jeśli wartość ε przewyższa wartość funkcji progowej, to algorytm nie funkcjonuje prawidłowo i niemożliwe staje się numeryczne rozwiązanie problemu. Dla rozpatrywanego tu przypadku zawsze wartość ε jest mniejsza od wartości TF , i tak np. dla $\varepsilon = 10^{-4}$ minimalna wartość funkcji progowej TF_1 wynosi 0,03 dla $\alpha = 0,3$ oraz 0,05 dla $\alpha = 0,5$. Ponadto okazuje się, że zbyt mała różnica między wspomnianymi wielkościami też nie zapewnia zbieżności, gdyż w jednym kroku ze zbyt małej liczby elementów usuwana jest masa. Najlepiej, jeśli różnica ta jest kilku rzędów. Z kolei zbyt duża różnica nie ma już wpływu na tempo zbieżności.

Początkowo zakłada się, że ε przyjmuje wartości stałe dla danego procesu optymalizacji

$$\varepsilon = \text{const}, \quad 10^{-7} \leq \varepsilon \leq 10^{-4}. \quad (6.14)$$

Następnie rozważano rodzinę funkcji

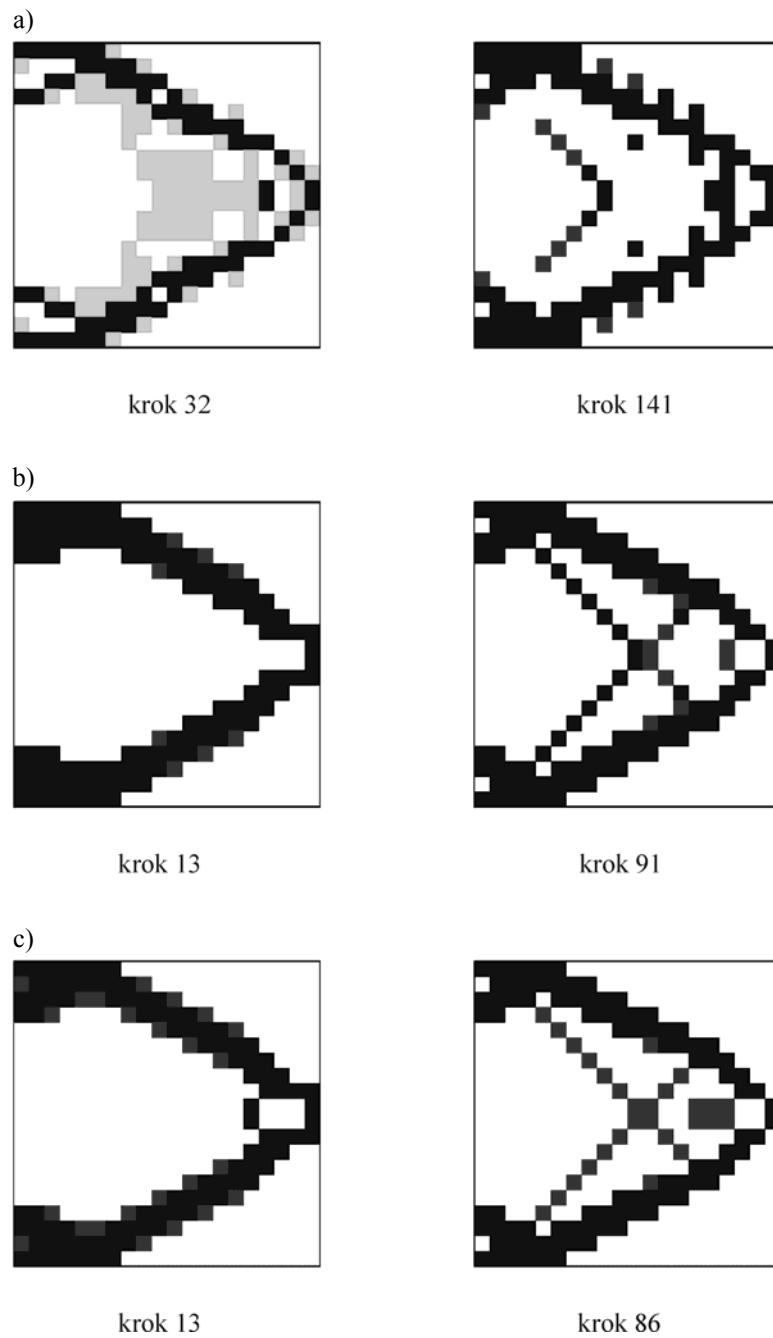
$$\varepsilon = \varepsilon(j, \alpha), \quad (6.15)$$

gdzie j jest numerem kroku, a α współczynnikiem redukcji masy. Poszczególne ε mogą być funkcją każdej z wymienionych wielkości z osobna lub obu razem.

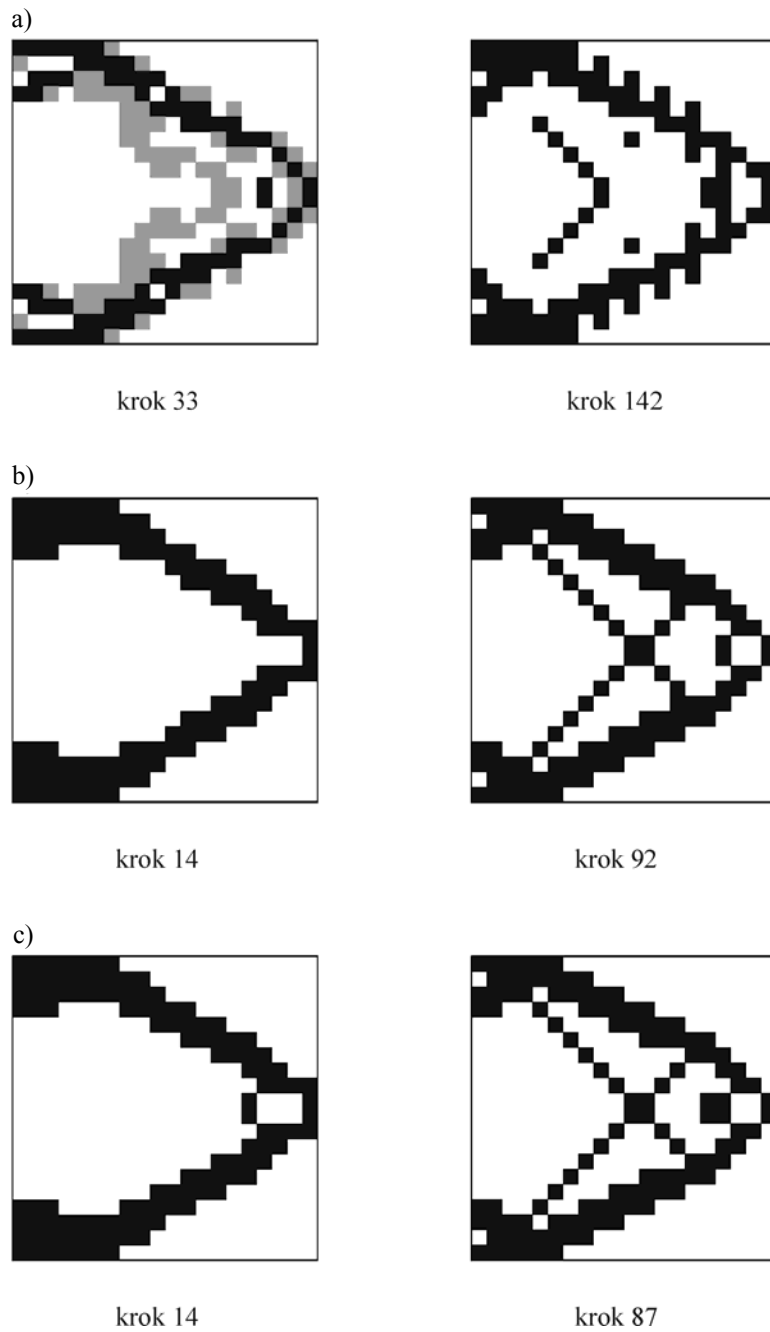
6.4. Analiza wyników

Rozważania rozpoczniemy od ε stałego. Pod uwagę wzięto wartości ε z zakresu 10^{-4} do 10^{-9} i dla niektórych ε przedstawiono rysunki otrzymanych topologii. Na kolejnych rysunkach, tak jak poprzednio, zastosowano następujące odcienie szarości: 80% szarości odpowiada wartościom z przedziału od 0,9 do 1,0, 50% szarości odpowiada wartościom od 0,8 do 0,9, 40% wartościom od 0,7 do 0,8 i 25% wartościom od 0,6 do 0,7.

Na rysunku 6.1 przedstawiono topologie dla $\alpha = 0,3$: dla TF_1 (lewa kolumna) oraz dla TF_2 (prawa kolumna). Poszczególne wiersze (a, b, c) przedstawiają topologie odpowiednio dla $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-5}$ oraz $\varepsilon = 10^{-7}$. Na rysunku tym pokazano topologie



Rys. 6.1. Topologie z odcieniami szarości dla $\alpha = 0,3$, dla $\varepsilon = 10^{-4}$ (a), dla $\varepsilon = 10^{-5}$ (b), dla $\varepsilon = 10^{-7}$ (c)

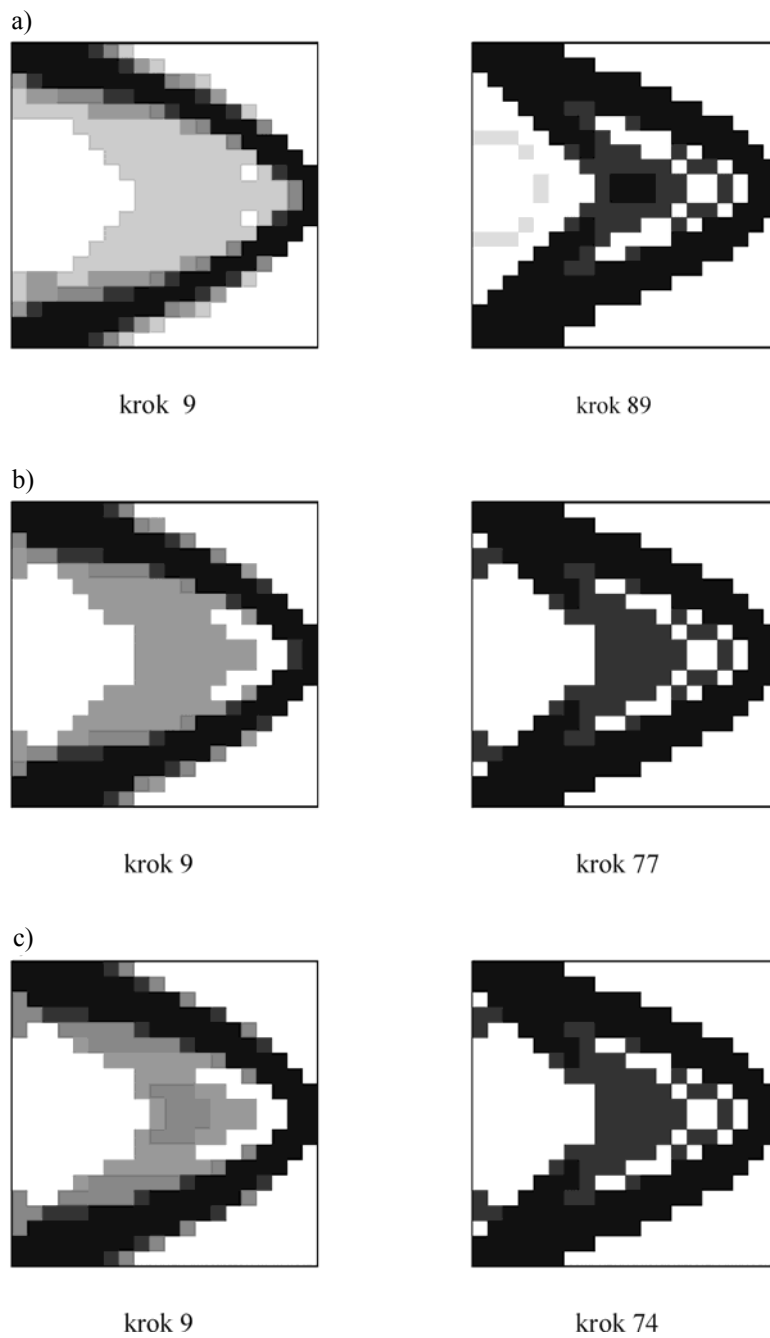


Rys. 6.2. Topologie czarno-białe dla $\alpha = 0,3$,
dla $\varepsilon = 10^{-4}$ (a), dla $\varepsilon = 10^{-5}$ (b), dla $\varepsilon = 10^{-7}$ (c)

w odcieniach szarości dla ostatniego kroku, gdzie gęstości oprócz zera i jedności przyjmują także wartości pośrednie. Są one bliskie jedności dla $\varepsilon = 10^{-5}$ oraz $\varepsilon = 10^{-7}$, natomiast dla $\varepsilon = 10^{-4}$ w wielu elementach gęstość wynosi nieco ponad 0,5 dla kroku numer 32. Topologia ta jest podobna do topologii otrzymywanych dla TF_2 dla kroków o numerach nieco ponad 50. Natomiast dla kroku numer 141, pomimo małej liczby punktów z gęstością poniżej jedności, zauważamy, że zadanie nie jest zbieżne. Dla wartości ε większych niż $\varepsilon = 10^{-4}$ zbieżność rozwiązania szybko słabnie. Z kolei dla ε mniejszych od $\varepsilon = 10^{-7}$ rozwiązania stabilizują się asymptotycznie i praktycznie nie różnią się od rozwiązania dla $\varepsilon = 10^{-7}$, zarówno samą topologią, jak i liczbą kroków, w jakich się te topologie otrzymuje. Dotyczy to topologii o rozkładach z odcieniami szarości.

Na rysunku 6.2 przedstawiono rozkład czarno-biały, pod warunkiem, że dla danego przypadku jest możliwe jego otrzymanie. Zauważmy, że dla $\varepsilon = 10^{-4}$ na lewym rysunku mamy odcienie szarości. W następnym kroku zadanie jest już rozbieżne. Na prawym rysunku suma masy wynosi 114 i widać wyraźnie, że do połączenia elementów środkowych brakuje masy (10 jednostek), a w innych obszarach obserwujemy niespotykane rozłożenie masy (elementy pionowe). Tak więc i ten przypadek nie może być uznany za zbieżny. Ponadto dla TF_1 czarno-białe topologie otrzymujemy w 14 krokach, natomiast dla TF_2 odpowiednia liczba kroków zmienia się następująco: dla $\varepsilon = 10^{-5}$ wynosi 92, dla $\varepsilon = 10^{-7}$ wynosi 87, a dla ε mniejszych stabilizuje się na podobnym jak dla $\varepsilon = 10^{-7}$ poziomie. Od $\varepsilon = 10^{-9}$ obserwuje się brak zbieżności. Oznacza to, że wtedy ε jest zbyt małe, aby zapewnić prawidłowe funkcjonowanie algorytmu optymalizacji. Zauważmy jeszcze, że dla $\varepsilon = 10^{-9}$ w przypadku stosowania TF_2 dla kroku numer 74 otrzymano topologię z wartościami gęstości od 0,6 do 1,0, natomiast dla kroku numer 75 algorytm przestał być zbieżny. Z kolei dla TF_1 uzyskiwano wynik niemal taki sam jak przy $\varepsilon = 10^{-7}$. Podsumowując zagadnienie zastosowania stałych wartości relaksacyjnych warto zauważyć, że najlepsze rezultaty uzyskuje się dla wartości ε z przedziału 10^{-5} do 10^{-7} , a uzyskane tak topologie są niemal takie same.

Rysunek 6.3 wykonano dla $\alpha = 0,5$. Przedstawiony jest on w takim samym układzie jak rysunek 6.1 i dotyczy również topologii w odcieniach szarości dla ostatniego kroku, dla którego oprócz zera i jedności gęstości przyjmują także wartości pośrednie. Rozpatrzmy topologie dla TF_1 (lewa strona). Wszystkie one są wykonane dla kroku numer 9, z tym że wyraźnie lepszą zbieżność uzyskuje się dla mniejszego ε . Na rysunku 6.3a z lewej strony jest wyraźnie więcej elementów z gęstością stosunkowo małą niż na rysunku 6.3c, na którym „szare” gęstości są bardziej zbliżone do jedności. Z kolei dla TF_2 (prawa strona) obserwujemy zmniejszanie się liczby kroków, w których otrzymuje się optymalną topologię przy zmniejszaniu się ε . Warto wspomnieć



Rys. 6.3. Topologie z odcieniami szarości dla $\alpha = 0,5$, dla $\epsilon = 10^{-4}$ (a), dla $\epsilon = 10^{-5}$ (b), dla $\epsilon = 10^{-7}$ (c)

jeszcze o tym, że na rysunku 6.3a dla kroku numer 89, w pobliżu podpory proces iteracyjny nie usunął jeszcze pewnych małych gęstości. Na rysunkach 6.3b i 6.3c materiału w tych miejscach już nie ma.

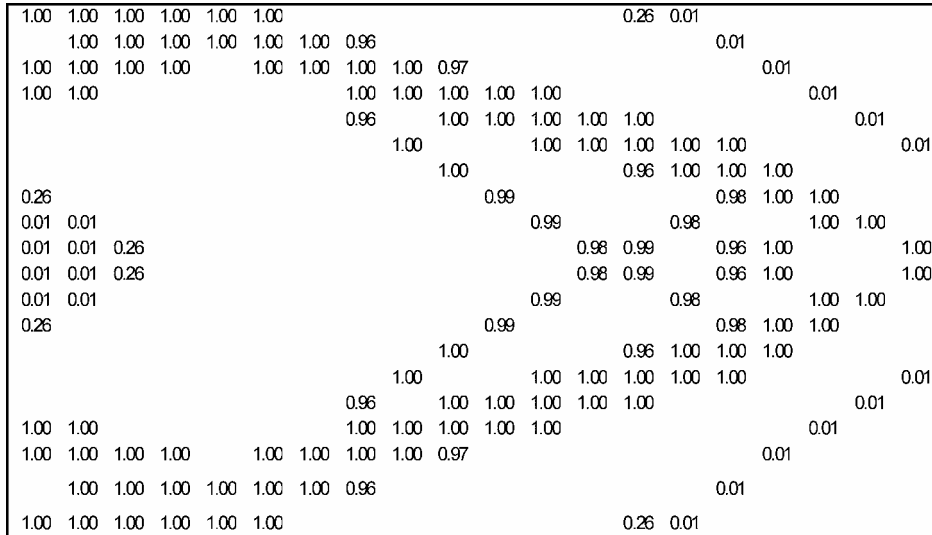
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.95 | | | 0.25 | 0.07 | 0.04 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | | | | |
| 0.94 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.87 | | | | | 0.06 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.87 | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | | 0.07 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | | |
| 1.00 | 1.00 | | | | | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | 0.08 | 0.03 | 0.01 | 0.00 | |
| | | | | | | | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | 0.07 | 0.03 | 0.01 | |
| | | | | | | | | 0.96 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.05 | 0.03 | | |
| 0.06 | 0.06 | 0.07 | 0.24 | | | | | | 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | 0.06 | | |
| 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.25 | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | | | |
| 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.08 | | | | | | 0.89 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | |
| 0.03 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.07 | 0.24 | | | | | | 0.98 | | 0.24 | 0.24 | 1.00 | | | | |
| 0.03 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.07 | 0.24 | | | | | | 0.98 | | 0.24 | 0.24 | 1.00 | | | | |
| 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.08 | | | | | | 0.89 | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | |
| 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.25 | | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | | |
| 0.06 | 0.06 | 0.07 | 0.24 | | | | | | | 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.06 | |
| | | | | | | | | | 0.96 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.05 | 0.03 | |
| | | | | | | | | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | 0.07 | 0.03 | 0.01 |
| 1.00 | 1.00 | | | | | | 0.94 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | 0.08 | 0.03 | 0.01 | 0.00 |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.87 | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | | 0.07 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | |
| 0.94 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.87 | | | | | | | 0.06 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.95 | | | | 0.25 | 0.07 | 0.04 | 0.02 | 0.01 | 0.00 | | | |

krok 13

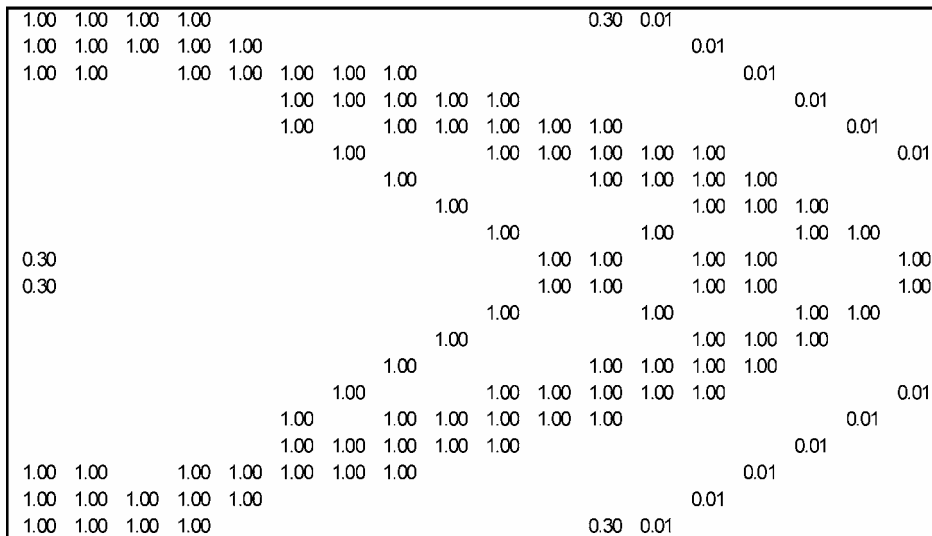
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.06 | 0.04 | 0.02 | 0.01 | | | | | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.06 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | | | | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.07 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | | | |
| 1.00 | 1.00 | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.32 | 0.03 | 0.01 | | | |
| | | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.07 | 0.03 | 0.01 | | |
| | | | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.05 | 0.03 | | |
| 0.06 | 0.06 | 0.07 | 0.33 | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | 0.06 | | |
| 0.04 | 0.04 | 0.05 | 0.07 | | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | | | |
| 0.03 | 0.03 | 0.04 | 0.06 | 0.32 | | | | | | 1.00 | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | |
| 0.03 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.07 | 0.33 | | | | | | 1.00 | | 0.32 | 0.33 | 1.00 | | | | |
| 0.03 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.07 | 0.33 | | | | | | 1.00 | | 0.32 | 0.33 | 1.00 | | | | |
| 0.03 | 0.03 | 0.04 | 0.06 | 0.32 | | | | | | | 1.00 | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | |
| 0.04 | 0.04 | 0.05 | 0.07 | | | | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | |
| 0.06 | 0.06 | 0.07 | 0.33 | | | | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.06 |
| | | | | | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.05 | 0.03 |
| | | | | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.07 | 0.03 | 0.01 |
| 1.00 | 1.00 | | | | | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | 0.32 | 0.03 | 0.01 | | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | | 0.07 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | | | 0.06 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | | | | | | | | 0.06 | 0.04 | 0.02 | 0.01 | |

krok 14

Rys. 6.4. Topologie dla TF_1 , dla $\varepsilon = 10^{-3}/j$



krok 97



krok 98

Rys. 6.5. Topologie dla TF_2 , dla $\varepsilon = 10^{-3}/j$

Ponieważ w przypadku analizowania problemu zbieżności zagadnienia, dla funkcji progowej uwzględniającej numer kroku optymalizacji, uzyskano lepszą zbieżność

rozwiązania, więc postanowiono zbadać funkcję ε uwzględniającą również numer kroku optymalizacji

$$\varepsilon(j) = \frac{\beta}{j^n}, \quad (6.16)$$

gdzie β jest współczynnikiem, a j numerem kolejnego kroku. Jak podano w pracy [13], ε można przyjąć jako równą odwrotności numeru kroku. Wspomniano też, cytując prace doktorskie Joga (USA) [32] i Sigmunda (Dania) [71] z 1994 roku, że proces optymalizacji można rozpoczynać od pewnego dość dużego ε , a następnie obniżyć jego wartość w trakcie procesu o ustaloną stałą wartość, aż ε osiągnie założoną wartość minimalną. Dotychczas nie opublikowano wyników badań prowadzonych w tym kierunku. Przeanalizujmy więc użyteczność niektórych funkcji wielomianowych ze względu na szybkość zbieżności i jakość otrzymanej topologii. Zacznijmy od podanej powyżej propozycji przy założonych β oraz n

$$\varepsilon(j) = \frac{10^{-3}}{j}. \quad (6.17)$$

Na kolejnych czterech rysunkach przedstawiono topologie w skażonej skali, która pozwala w notacji liczbowej pokazać rozkład materiału w sposób bardzo czytelny. Na rysunku 6.4 przedstawiono topologie dla TF_1 , dla kroków o numerach 13 i 14. Dostępna masa wynosi 120,00. Dla kroku numer 13 otrzymujemy sumę masy dla całego obszaru projektowego równą 118,71, a dla kroku numer 14 masa wynosi 116,74 (rozkład zero-jedynkowy z dodatkowo pozostawioną masą o małej gęstości). Rozwiązanie nie jest zbieżne ze względu na tę dodatkową masę znajdującą się w sąsiedztwie zamocowania oraz na końcu wspornika, gdzie jest ona całkowicie zbędna. Wartości gęstości pozostawionej masy są bliskie zero (z wyjątkiem kilku elementów). Rysunek 6.5 zawiera topologie dla TF_2 dla kroków 97 i 98 w układzie jak na rysunku 6.4. Topologie mają podobny charakter, aczkolwiek na tym rysunku zbędna masa pozostawiona jest w mniejszej liczbie elementów. W związku ze zjawiskiem pozostawiania masy proponuje się, aby przyjąć ε jeszcze mniejsze, np. podzielone przez 10

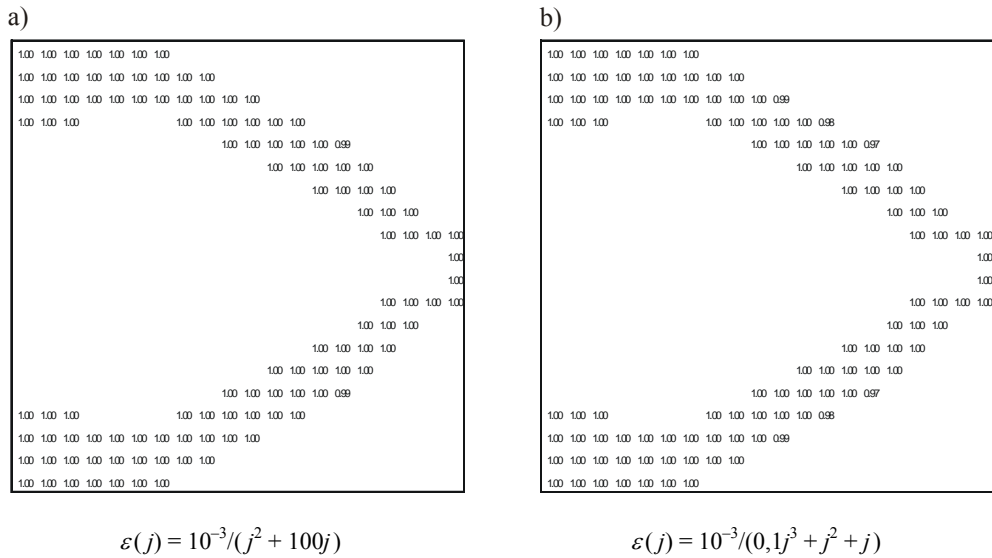
$$\varepsilon(j) = \frac{10^{-4}}{j}. \quad (6.18)$$

Dla tak zdefiniowanej funkcji relaksacyjnej otrzymano zadowalającą zbieżność i nie zaobserwowano zjawiska pozostawiania zbędnej masy. Wyniki przedstawiono na rysunku 6.6 (dla TF_1), gdzie umieszczono topologie dla kroku numer 11 i kroku numer 12, dla którego osiągnięto rozkład niemal zero-jedynkowy. W takiej samej notacji przedstawiono rysunek 6.7 dla TF_2 , dla kroków o numerach 87 i 88, gdzie również nie występuje zbędna masa.

Następnie badano przydatność funkcji wielomianowych umieszczonych w mianowniku wyrażenia $\varepsilon(j)$. Poniżej przedstawiono niektóre z nich:

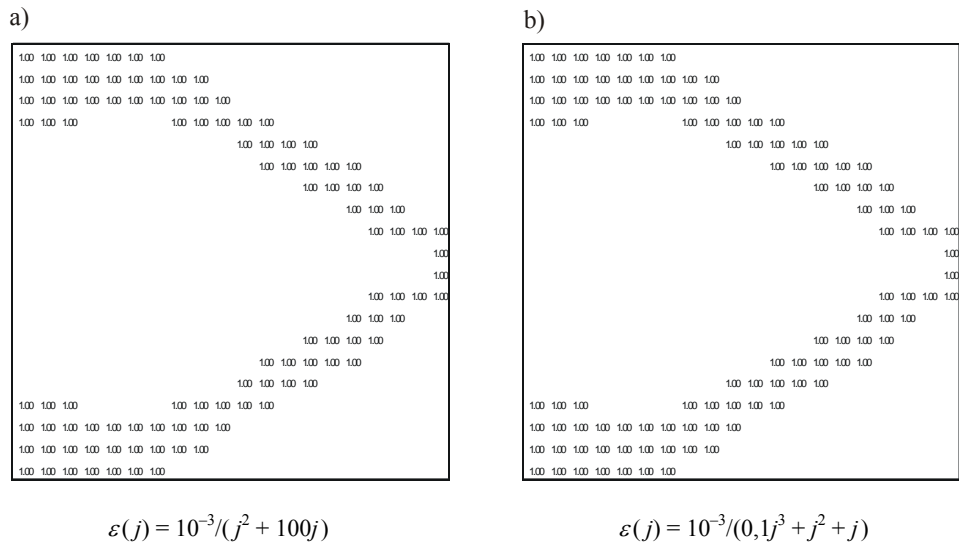
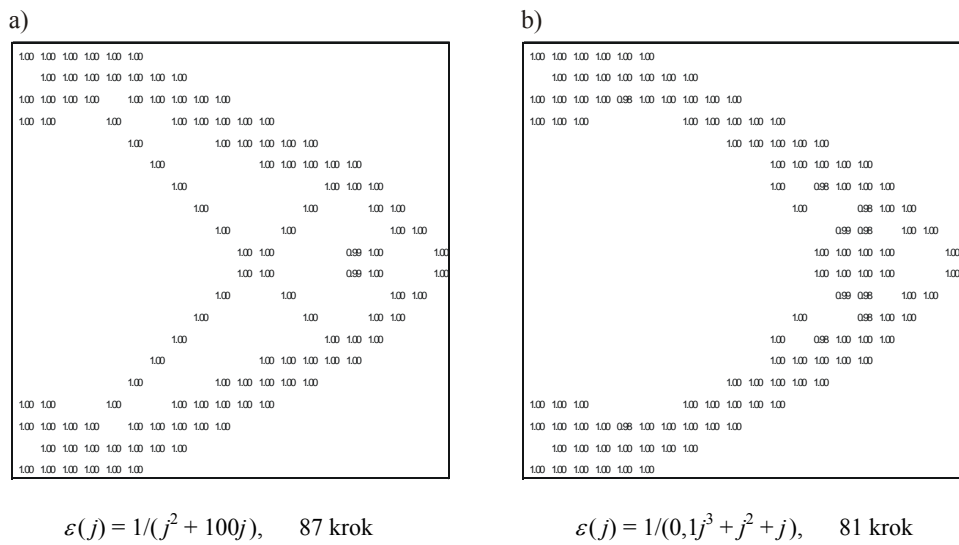
$$\varepsilon(j) = \frac{10^{-3}}{j^2 + 100j}, \quad (6.19)$$

$$\varepsilon(j) = \frac{10^{-3}}{0,1j^3 + j^2 + j}.$$



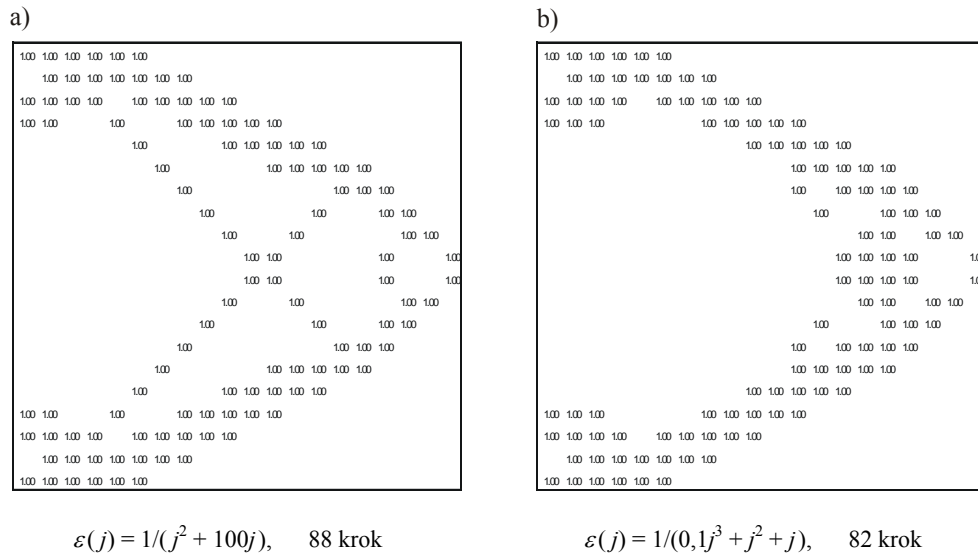
Rys. 6.8. Topologie dla 13 kroku dla TF_1

Na kolejnych dwóch rysunkach przedstawiono topologie dla powyższych funkcji, otrzymane przy użyciu TF_1 . Na rysunku 6.8 zamieszczono topologie dla obu funkcji dla kroku numer 13. Topologie różnią się minimalnie liczbą elementów z gęstością minimalnie mniejszą od jedności. Na rysunku 6.9 znajdują się zero-jedynkowe topologie dla kroku numer 14. Nie różnią się one prawie od siebie (poza dwoma elementami, co wynika z różnicy sumy masy). Na rysunku 6.9a wynosi ona 110, a na rys. 6.9b – 112. Dla funkcji (6.19), stosując TF_2 , zadanie staje się rozbieżne. Okazuje się, że jeśli zmienimy licznik pierwszego wyrażenia (6.19) i zamiast 10^{-3} przyjmiemy wartość 1, to zadanie dla TF_2 staje się zbieżne. Na rysunkach 6.10 i 6.11 przedstawiono topologie w takim samym układzie jak na rysunkach 6.8 i 6.9. Suma masy obu topologii przedstawionych na rysunku 6.11 wynosi 116, a więc jest bliższa masie dostępnej niż przy zastosowaniu TF_1 dla zależności (6.19).

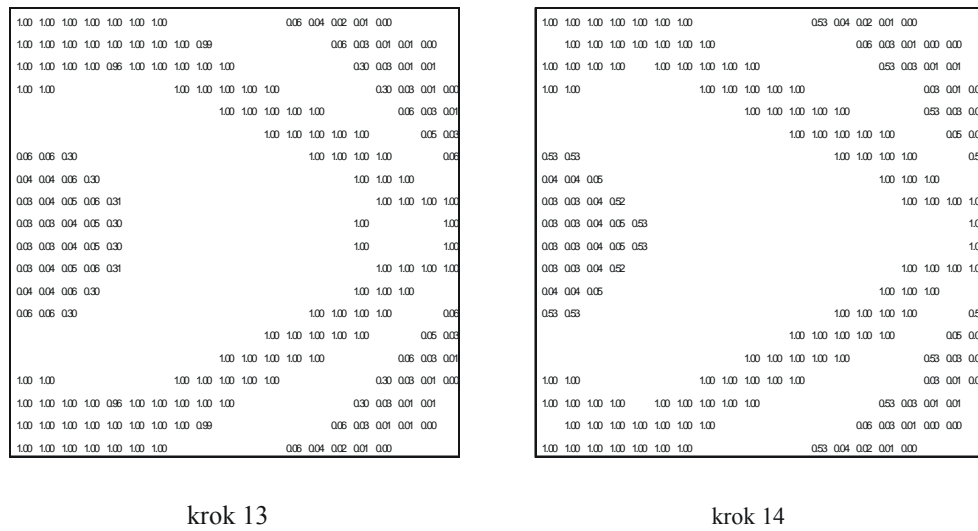
Rys. 6.9. Topologie dla 14 kroku dla TF_1 Rys. 6.10. Topologie dla TF_2

Przeanalizujmy teraz funkcję $\varepsilon(j)$, która zależy również od więzów nałożonych na dostępną masę

$$\varepsilon(j) = \frac{1}{\alpha^2 j^2}. \quad (6.20)$$



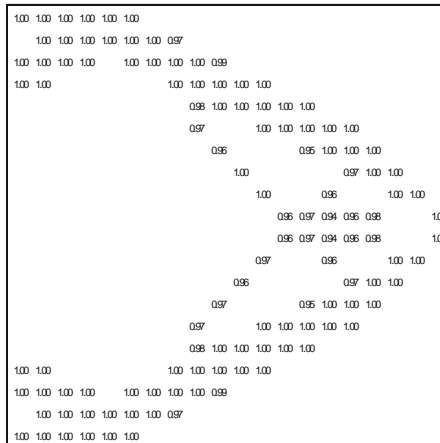
Rys. 6.11. Topologie dla TF_2



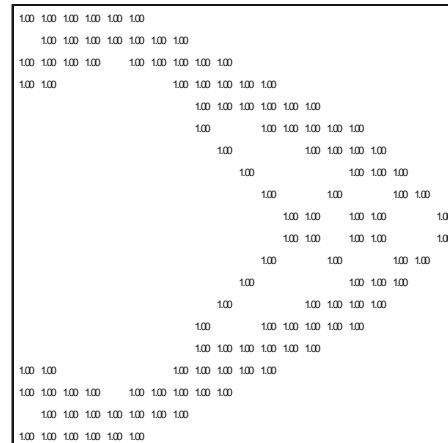
Rys. 6.12. Topologie dla TF_1 , dla $\varepsilon(j) = 1/(\alpha^2 j^2)$

Takie sformułowanie nie daje zbieżności dla TF_1 . Materiał pozostaje wtedy w pewnej liczbie elementów, w których nie powinno go być. Dzieje się tak w sąsiedztwie zamocowania oraz na końcu wspornika powyżej i poniżej miejsca przyłożenia siły (rys. 6.12). Dla TF_2 otrzymujemy prawidłową topologię, z tym że dopiero dla kroków 91 i 92 (rys. 6.13). Ponadto zauważmy, że na przykład podniesienie współ-

czynnika α do potęgi trzeciej (zamiast jak we wzorze do drugiej) powoduje znaczne osłabienie zbieżności zagadnienia, choć rozwiązanie można otrzymać, lecz w znacznie większej liczbie kroków.



krok 91



krok 92

Rys. 6.13. Topologie dla TF_2 , dla $\varepsilon(j) = 1/(\alpha^2 j^2)$

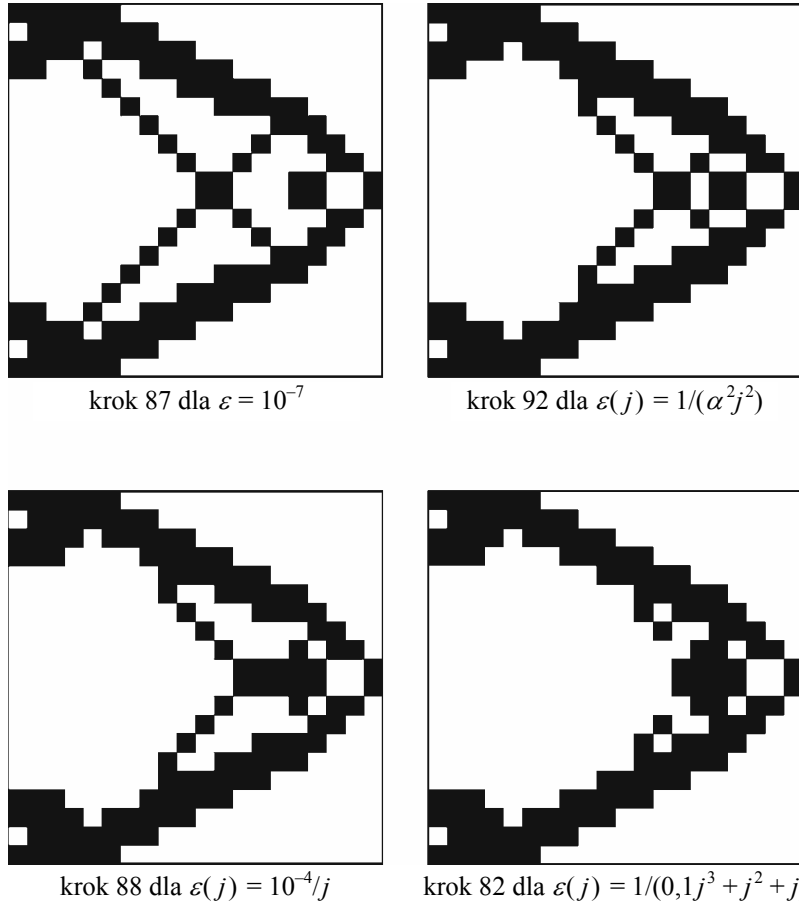
Na rysunku 6.14 pokazano w notacji czarno-białej przedstawione wcześniej w wersji liczbowej czarno-białe topologie dla TF_2 . Zamieszczono tu jedynie niektóre z rozpatrywanych przykładów. Okazuje się, że topologie dla ε równego stałej oraz ε wyznaczonego z drugiego ze wzorów zależności (6.19) wymagają postprocessingu, ze względu na pewne braki w połączeniach. Dla 88 kroku (zależność (6.18)) oraz dla 92 kroku (zależność (6.20)) otrzymano optymalne topologie nie wymagające postprocessingu.

Ponadto analizowano funkcje wielomianowe, podobne do funkcji (6.19). Stwierdzono, że zbyt wysoka wartość wykładnika potęgi funkcji numeru kroku j powoduje kłopoty ze zbieżnością. Jako przykład można podać, że dla funkcji

$$\varepsilon(j) = \frac{10^{-3}}{j^4 + j^2} \quad (6.21)$$

obserwowano dobrą zbieżność dla TF_1 , natomiast brak zbieżności dla TF_2 . Z kolei dla funkcji

$$\varepsilon(j) = \frac{1}{j^6} \quad (6.22)$$

Rys. 6.14. Optymalne topologie dla TF_2

rozwiązanie było rozbieżne dla TF_1 już dla piątego kroku. Szczegółowa analiza wykazała, że przyczyną był zbyt wysoki rząd wykładnika potęgi zmiennej j . Stwierdzono też, że niezależnie od tego, czy zamiast jedynki w mianowniku w powyższym wzorze będzie 10^x , czy też 10^{-x} , to zadanie nie ma rozwiązania.

6.5. Uwagi końcowe

W wyniku przeprowadzonych obliczeń należy stwierdzić, że funkcja relaksacyjna musi być takiej postaci, aby optymalna topologia tworzyła się dla wartości funkcji z przedziału około 10^{-5} do 10^{-7} . Czasami może to być wartość nieco większa (np. dla (6.20)). Jeżeli jest to zbyt mała wartość, to rozwiązanie jest rozbieżne, a jeśli jest zbyt

duża, to albo zadanie jest rozbieżne, albo stabilizuje się w takiej postaci jak rozwiązanie dla ε równego 10^{-7} . Ponadto w formułowaniu funkcji $\varepsilon(j)$ należy zapewnić, aby była to funkcja malejąca, z tym że proces zmniejszania wartości funkcji $\varepsilon(j)$ nie może przebiegać zbyt szybko.

7. Aktualizacja modułu Younga dla materiału fikcyjnego

7.1. Wstęp

W niniejszym rozdziale rozważa się zastosowanie różnie sformułowanych definicji uaktualniania modułu Younga, stosowanego w kolejnych krokach algorytmu optymalizacji dla materiału fikcyjnego. Celem jest zbadanie efektywności przedstawionych definicji modułu Younga w nawiązaniu do formalnego zapisu zaproponowanego w [8] i [9], a podanego wzorem (7.4).

Zgodnie z (3.35) tensor C^{iklm} jest funkcją modułu Younga, który to z kolei zależy od gęstości w każdym punkcie materialnym z osobna. Przypomnijmy tę zależność

$$C^{iklm} = C^{iklm}(E(\rho(x))). \quad (7.1)$$

Ze względu na iteracyjny charakter procesu optymalizacji należy wyznaczyć wartości uaktualnionego modułu Younga dla każdego i -tego punktu materialnego poszczególnego j -tego kroku tego procesu

$$E_j(x) = \{E_j^1, E_j^2, E_j^3, \dots, E_j^n\}, \quad (7.2)$$

gdzie n jest liczbą punktów materialnych danego obszaru Ω oraz $j \in [1, M]$. M jest numerem kroku, w którym otrzymuje się optymalną topologię.

Zbiór uaktualnionych modułów Younga dla M kroków ma postać

$$E_E = \{E_1(x), E_2(x), E_3(x), \dots, E_M(x)\}. \quad (7.3)$$

Stosowane podejście aktualizacji modułu Younga zwane jest „podejściem sztucznym” (*artificial approach*), ponieważ proces aktualizacji prowadzi do tego, że w poszczególnych punktach materialnych mamy do czynienia z materiałem o stałej sprężystości odbiegającej od odpowiedniej stałej dla materiału początkowego. Obszar projektowy wypełniony jest więc pewnym sztucznym materiałem, który w naszym przypadku będzie zmieniał swe parametry podczas procesu optymalizacji, tak aby

dyskretnie rozłożony materiał na końcu procesu (spełniający warunek zero-jedynkowego rozkładu) miał parametry ciała początkowego.

Definicja aktualizacji tensora sprężystości w funkcji stałego tensora materiału kontinuum (\bar{E}_{ijkl}) została podana w [8] w następującej uogólnionej formie

$$E_{ijkl}(x) = [\mu(x)]^p \bar{E}_{ijkl}, \quad (7.4)$$

gdzie

$$0 \leq \mu(x) \leq 1$$

oraz

$$Vol = \int_{\Omega} \mu(x) dx.$$

Występujące we wzorze wyrażenie $\mu(x)$ jest pewną „sztuczną” funkcją gęstości dla $x \in \Omega$. Bardzo istotną rolę gra tu wykładnik potęgi p , który będzie analizowany w dalszej części tego rozdziału. W pracy [8] przyjęty on został jako równy 4, lecz sama funkcja $\mu(x)$ nie została w sposób jawny zdefiniowana. Dopiero w pracy [61] funkcja aktualizacji przyjęta została według wzoru

$$E_i(\rho_i) = E^0 \left(\frac{\rho_i}{\rho^0} \right)^\mu, \quad (7.5)$$

w którym μ zaproponowano w zakresie od 1 do 9, lecz w obliczeniach numerycznych ostatecznie przyjęto jako równe 3. Wielkości z indeksem zero są tu początkowymi wielkościami charakterystycznymi dla danego materiału. Podane wyżej wykładniki potęgi p oraz μ przyjęto arbitralnie bez przedstawienia uzasadnienia. Ponadto w literaturze poza powyższymi zależnościami nie ma innych definicji sposobu aktualizacji modułu Younga. Tym bardziej więc konieczne staje się potwierdzenie jego właściwego wyboru gwarantującego szybką zbieżność dla uzyskania optymalnej topologii.

7.2. Definicje uaktualnionego modułu Younga

Zaproponowana w pracy [8] wielkość $[\mu(x)]^p$ przyjmuje wartości z przedziału $[0,1]$, co pozwala na uzyskanie zbieżności zagadnienia. Dzięki zastosowaniu $[\mu(x)]^p$ można uaktualnić moduł Younga w procesie optymalizacji topologii dla każdego punktu materialnego, a następnie wyznaczyć znormalizowaną wielkość energii odkształcenia i znormalizowaną wielkość gęstości dla rozpatrywanego punktu.

Ponieważ poza propozycją (7.5) w literaturze w zasadzie nie podaje się jawnych definicji $[\mu(x)]^p$, więc w tym rozdziale przeanalizowane będą wybrane definicje pod kątem uzyskanej dzięki nim zbieżności zagadnienia.

Rozważania rozpoczniemy od nieco zmodyfikowanej zależności (7.5) w postaci znanej z poprzednich dwóch rozdziałów

$$E_{j+1}(\rho_j) = E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^p \quad p \geq 1. \quad (7.6)$$

Uaktualniony moduł Younga dla następnego kroku jest funkcją gęstości elementu z bieżącego kroku, ρ_0 oznacza gęstość względną materiału zastępczego w obszarze projektowym Ω dla określonej dostępnej masy m_0 , a E – początkowy, właściwy dla danego materiału moduł Younga. Wartość funkcji (7.6) dla każdego $j + 1$ kroku jest wyznaczana dla każdego punktu materialnego z osobna na podstawie wartości gęstości z kroku j

$$E_{j+1}(\rho_j) = \left\{ \left(E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^p \right)^1, \left(E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^p \right)^2, \right. \\ \left. \left(E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^p \right)^3, \dots, \left(E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^p \right)^n \right\}, \quad (7.7)$$

gdzie n jest liczbą punktów materialnych. Ponieważ dla każdego kroku j wartość gęstości jest w każdym punkcie inna, więc i wartość uaktualnionego modułu Younga też będzie inna. Mamy więc zbiór n wartości modułu Younga dla danego kroku j .

Pierwszą propozycją zmieniającą zależność (7.6) jest wprowadzenie sumowania ilorazu gęstości (dla elementu i -tego w j -tym kroku) w stosunku do gęstości względnej materiału zastępczego

$$E_{j+1}(\rho_j) = E \sum_{p=1}^k \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^p, \quad p \geq 1, \quad k \geq 1. \quad (7.8)$$

Zbieżność rozwiązania zależy od funkcji, przez którą przemnożony jest początkowy moduł Younga E . Wobec tego funkcja ta powinna spełniać określone kryteria, dzięki którym sztywność w kolejnych krokach dla poszczególnych elementów zmienia się w ten sposób, że powoduje odpowiednie wzmocnienie w konstrukcji pewnych stref i osłabianie innych.

Kolejną propozycją aktualizacji modułu Younga jest zależność przedstawiona poniżej, w której gęstość z poprzedniego kroku jest podniesiona do potęgi p i jest przemnożona przez stałą c

$$E_{j+1}(\rho_j) = E c (\rho_j)^p, \quad p \geq 1. \quad (7.9)$$

Pewną odmianą powyższego wzoru jest zależność

$$E_{j+1}(\rho_j) = E (c \rho_j)^p, \quad p \geq 1. \quad (7.10)$$

W kolejnym, poniżej przedstawionym wzorze tylko gęstość ρ_j jest podniesiona do potęgi p . Ponadto pojawia się numer kroku j

$$E_{j+1}(\rho_j) = E c (\rho_j)^p \rho_0 j. \quad (7.11)$$

Rozważmy jeszcze zależność

$$E_{j+1}(\rho_j) = E \left(\frac{\rho_j}{c \rho_0} \right)^p, \quad p \geq 1. \quad (7.12)$$

Różni się ona od zależności (7.6) wprowadzeniem stałej c do mianownika, co pozwala na sterownie wielkością w nawiasie w sposób efektywniejszy.

Oprócz prezentowanych powyżej funkcji rozważano też funkcje uaktualniające moduł Younga w formie ciągów

$$E_{j+1}(\rho_j) = E \left(1 + \frac{\rho_j}{1!} + \frac{\rho_j^2}{2!} + \dots + \frac{\rho_j^t}{t!} \right), \quad (7.13)$$

oraz

$$E_{j+1}(\rho_j) = E \left(\rho_j + \rho_j (1 - \rho_j)^1 + \rho_j (1 - \rho_j)^2 + \dots + \rho_j (1 - \rho_j)^t \right), \quad (7.14)$$

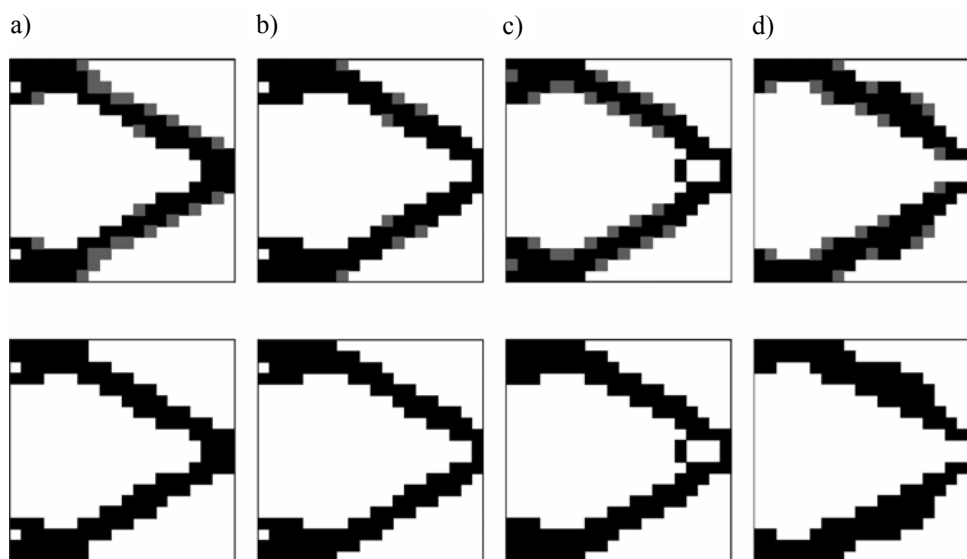
gdzie t przyjęto w zakresie od 5 do 15.

7.3. Analiza numeryczna

W pracy skupiono się na przedstawieniu wyników numerycznych i przeprowadzeniu ich analizy w celu określenia najlepszej definicji modułu Younga ze względu na zbieżność rozwiązania i uzyskanie optymalnej topologii. Założono, iż $\alpha = 0,3$. Wielkość relaksacyjną przyjęto jako $\varepsilon = 10^{-7}$, a funkcje progowe jak w poprzednim rozdziale. Są nimi funkcje $TF_1 = 0,1 j \alpha$ oraz $TF_2 = 0,0125 j \alpha$. Podobnie jak poprzednio, przykłady przedstawione będą w sposób dwojaki. Albo będzie pokazany rozkład czarno-biały, czasami z odcieniami szarości, albo – rzadziej – liczbowy rozkład gęstości. Będzie on stosowany wszędzie tam, gdzie należy podkreślić

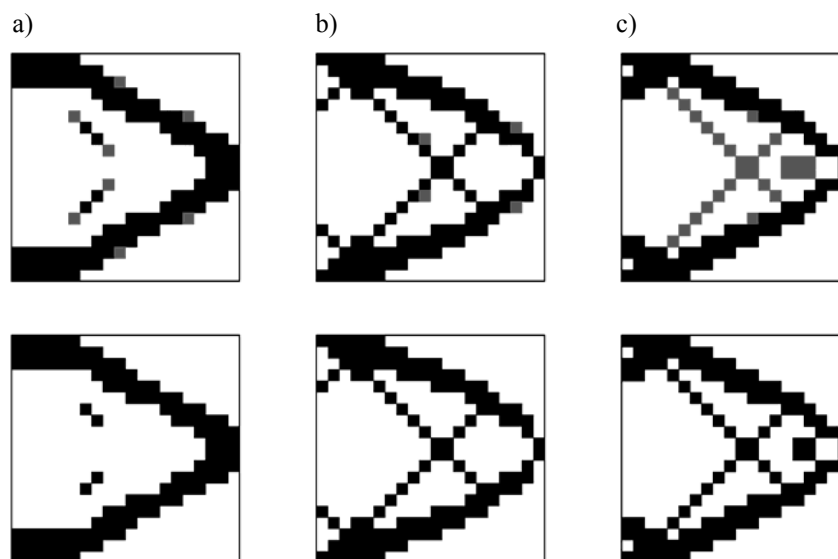
w sposób szczególny rozkład gęstości z dość szerokiego zakresu wartości (np. od 0,5 do 1,0).

Podstawowe rozwiązanie, od którego rozpoczynamy analizę, to rozwiązanie dla zależności (7.6) i wykładnika potęgi p równego 3. Rozwiązanie to zaprezentowano w rozdziale 4 (rys. 4.7 i rys. 4.8).



Rys. 7.1. Topologie dla TF_1 dla wzoru (7.6) dla $p = 1$ (a), $p = 2$ (b), $p = 3$ (c) i $p = 5$ (d)

Na rysunku 7.1 pokazano topologie uzyskane z wykorzystaniem TF_1 dla trzynastego (górny rząd) i czternastego kroku (dolny rząd) otrzymane według zależności (7.6) dla p równego 1, 2, 3 i 5. Jak widać, topologie niewiele różnią się od siebie, choć w miarę wzrostu p materiał wyraźnie przemieszcza się w kierunku prawego górnego i dolnego naroża. Dla $p = 3$ w sąsiedztwie miejsca przyłożenia siły pojawia się dodatkowy pionowy element wzmacniający, a dla $p = 5$ następuje pogrubienie tzw. „prętów”, przy czym zmienia się rozłożenie materiału w miejscu zamocowania. Warto dodać, że dla kroku trzynastego suma masy dla wszystkich wartości p wynosi nieco ponad 119 i po uwzględnieniu masy dopełniającej suma wynosi 120. Dla kroku czternastego suma masy wynosi od 110 (dla $p = 2$) do 118 (dla $p = 5$). Tak więc, aby uzyskać rozkład czarno-biały (jak to wspomniano wyżej), należy uzupełnić do jedynki wszystkie różniące się od jedynki wartości gęstości dla kroku trzynastego. Wydaje się, że kształt topologii dla $p = 3$ jest najwłaściwszy, co zostanie potwierdzone w następnym rozdziale.

Rys. 7.2. Topologie dla TF_2 dla wzoru (7.6) dla $p = 1$ (a), $p = 2$ (b), $p = 3$ (c)

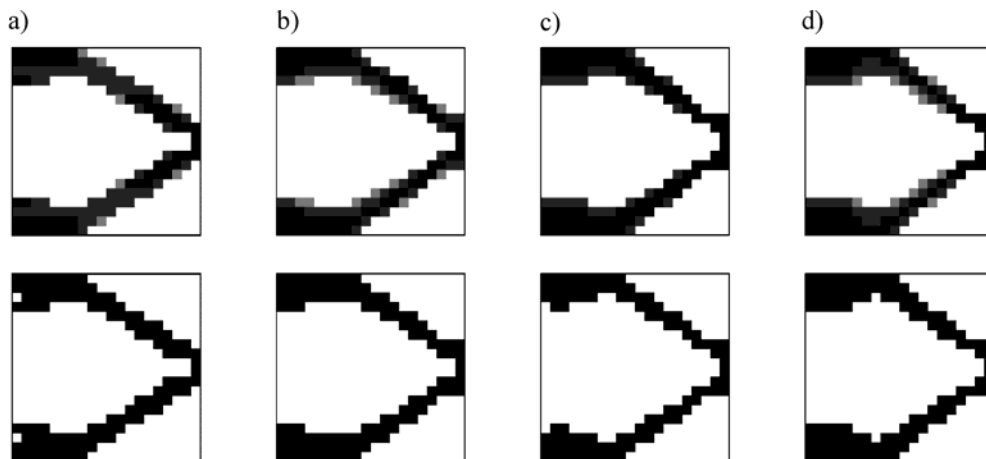
Na rysunku 7.2 przedstawiono topologie dla TF_2 , w układzie takim samym jak na rys. 7.1, z wyjątkiem topologii dla $p = 5$, dla którego zadanie nie jest zbieżne. O ile dla $p = 3$ wystarczy 87 kroków, aby uzyskać rozkład czarno-biały, to dla $p = 2$ konieczne są 93 kroki, a dla $p = 1$ aż 109 kroków. Suma masy zmniejsza się odpowiednio dla wymienionych topologii od 118 poprzez 116 do 112. Topologie dla $p = 3$ i $p = 2$ można uznać za interesujące i zaliczyć je do zbioru topologii, wśród których poszukiwana będzie optymalna topologia dla omawianej konstrukcji.

Tabela 7.1. Wartości sumy masy dla kroków od 10 do 14 według wzoru (7.8)

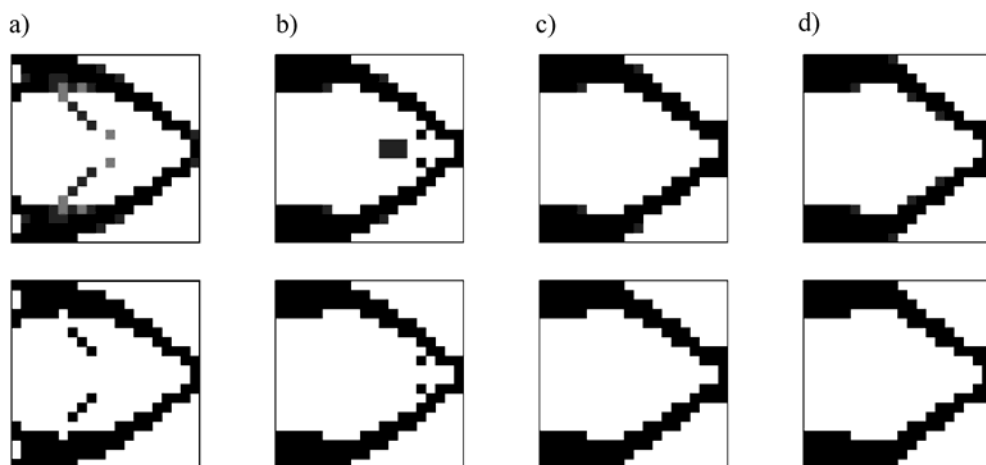
| nr kroku | $k = 1$ | $k = 3$ | $k = 5$ | $k = 7$ | $k = 9$ |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 10 | 120,0000 | 120,0000 | 120,0000 | 119,9954 | 119,9913 |
| 11 | 120,0000 | 120,0000 | 119,9969 | 119,9924 | 119,7080 |
| 12 | 119,9507 | 119,9999 | 119,7629 | 118,9936 | 114,0000 |
| 13 | 119,2869 | 119,8250 | 112,0000 | 100,0000 | 100,0000 |
| 14 | 112,0000 | 112,0000 | 100,0000 | 90,0000 | 86,0000 |

Przeanalizujemy wpływ przyjęcia aktualizacji modułu Younga według zależności (7.8). Przeprowadzono obliczenia dla k nieparzystych zmieniających się od wartości jeden do dziewięciu. W tabeli 7.1 przedstawiono dla TF_1 sumy masy dla kroków od dziesiątego do czternastego. Tłustym drukiem zaznaczono krok, dla którego występuje

już tylko rozkład zero-jedynkowy. Zwiększenie k powoduje nieznaczne zmniejszenie liczby kroków niezbędnych do uzyskania optymalnej topologii z trzynastu dla $k=1$ do jedenastu dla $k=9$. Ponadto wartości sumy mas dla kroku poprzedzającego rozkład zero-jedynkowy są dla k większego bliższe wartości 120.



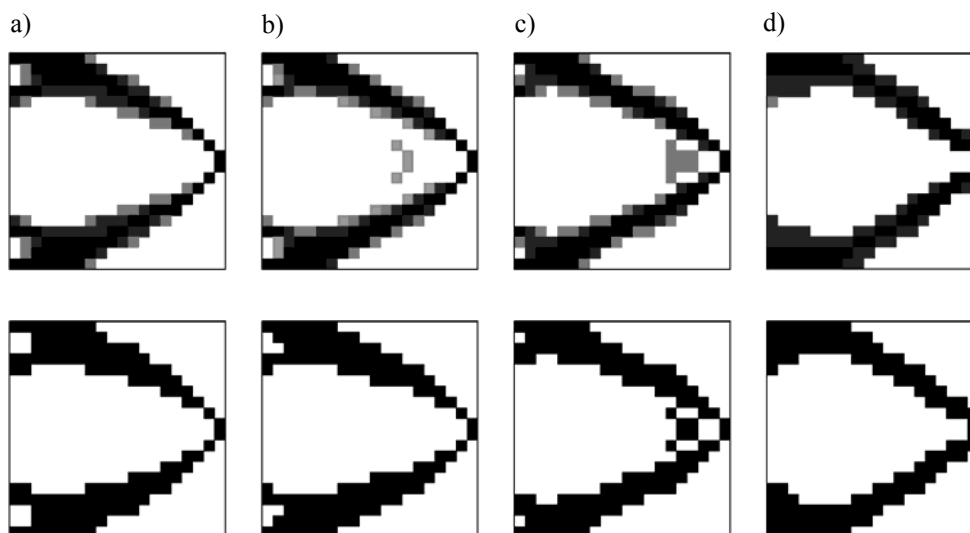
Rys. 7.3. Topologie dla TF_1 dla wzoru (7.8) dla $k=3$ (a), $k=5$ (b), $k=7$ (c) i $k=9$ (d)



Rys. 7.4. Topologie dla TF_2 dla wzoru (7.8) dla $k=3$ (a), $k=5$ (b), $k=7$ (c) i $k=9$ (d)

Porównajmy teraz topologie dla zawartych w tabeli 7.1 przypadków. Na rysunku 7.3 przedstawiono po dwie topologie dla danego k oznaczone kolejno literami od a do d (z wyjątkiem przypadku dla $k=1$). W dolnym wierszu mamy rozkład czarno-biały, natomiast w górnym wierszu mamy oprócz rozkładu czarno-białego również odcienie

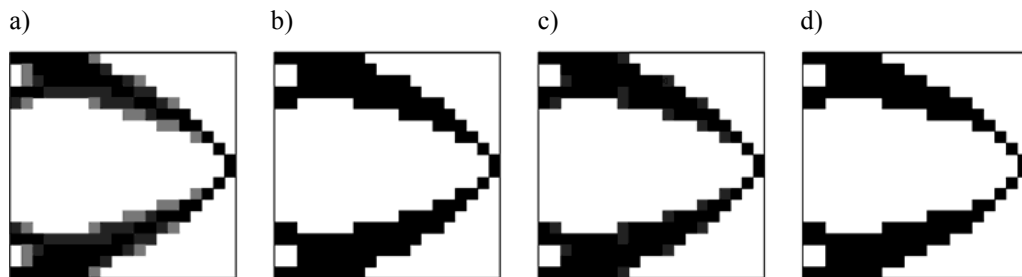
szarości. Na rysunku 7.3a przedstawiono topologie dla kroku trzynastego (górny rysunek) i dla kroku czternastego (dolny rysunek). W takim samym układzie na rysunku 7.3b i 7.3c przedstawiono topologie dla kroków dwunastego i trzynastego, a na rysunku 7.3d dla jedenastego i dwunastego. W miarę wzrostu k obserwujemy nieznaczne przemieszczanie się masy „prętów” w kierunku miejsca zamocowania. Na rysunku 7.4 pokazano topologie w takim samym układzie jak na rys. 7.3, otrzymane przy zastosowaniu TF_2 . Tym razem nie zaobserwowano, aby wzrastające k wpływało na szybkość otrzymanej topologii o rozkładzie czarno-białym, którą otrzymano w 89 kroku dla $k = 3$, w 79 kroku dla $k = 5$, w 83 kroku dla $k = 7$ i w 86 kroku dla $k = 9$. Charakter otrzymanych topologii jest zbliżony do uzyskanych przy użyciu TF_1 . Dla mniejszych k (rys. 7.4a i 7.4b) widać, iż algorytm próbował wytworzyć pręty wewnętrzne (jak na rys. 7.2c), jednak bez skutku.



Rys. 7.5. Topologie dla TF_1 dla wzoru (7.9) dla $c = 0,5$ (a), $c = 1$ (b), $c = 5$ (c) i $c = 10$ (d)

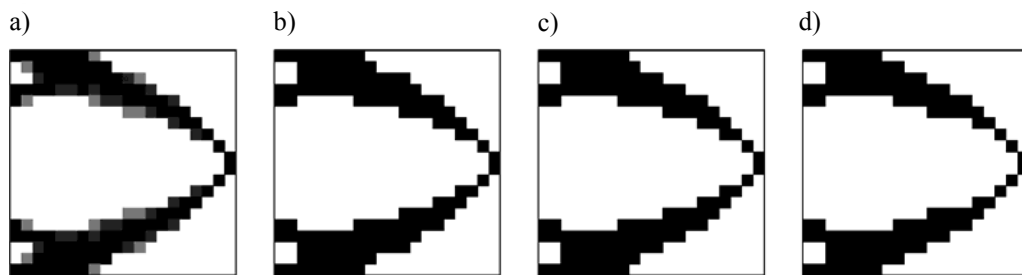
Dla wzoru (7.9) zastosowano $p = 3$, wielkość stałej przyjęto jako równą kolejno 0,5; 1,0; 5,0 oraz 10,0. Wyniki dla TF_1 przedstawiono na rys. 7.5. Przedstawia on krok jedenasty (górny wiersz) i krok dwunasty (dolny wiersz). Tylko na rysunku 7.5d przedstawiono kroki dwunasty i trzynasty. Górny wiersz narysowano w odcieniach szarości. Dolny rysunek 7.5a narysowano stosując postprocessing, tzn. uzupełniając do jedynki gęstość w tych elementach, gdzie była ona mniejsza od jedności. Suma masy wynosiła początkowo 118,88, a po uzupełnieniu 120,00. Dla dolnego rysunku 7.5b suma masy wynosi 118,00 i we wszystkich elementach gęstość jest równa jeden. Dolny rysunek 7.5c wykonano tak jak 7.5a, uzupełniając gęstość do jedności. Początkowa suma masy wynosiła 118,82, a po uzupełnieniu 120,00. Na rysunku 7.5d u góry

suma masy wynosi 120,00, natomiast dla dolnego rysunku wynosi już tylko 116,00. Oznacza to, że szczególnie tu należałoby użyć procedur postprocessingu dla kroku dwunastego. Otrzymane topologie różnią się między sobą, przy czym w miarę wzrastającego c masa przesuwana jest w kierunku miejsca przyłożenia siły (rys. 7.5c). Topologia pokazana na rys. 7.5d przypomina topologię z rys. 4.7 otrzymaną przy użyciu TF_1 (różnica występuje w sąsiedztwie miejsca przyłożenia siły).



Rys. 7.6. Topologie dla TF_1 dla wzoru (7.9) i dla $c = 0,5$ dla kroku 11(a), kroku 12 (b), kroku 13 (c) i dla kroku 14 (d)

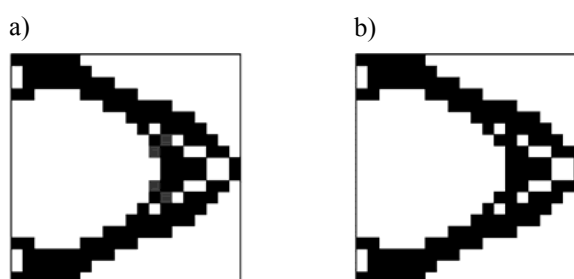
Rysunek 7.6 przedstawia dla zależności (7.9) dla stałej równej 0,5 topologie dla kroków od jedenastego do czternastego, przy czym rysunki 7.6a oraz 7.6b są przeniesione z rysunku 7.5a. Dla rysunku 7.6c suma masy wynosi 118,66. Po uzupełnieniu do gęstości w tych elementach, gdzie była ona mniejsza otrzymujemy sumę masy równą 120,00. Suma masy dla rysunku 7.6d wynosi 112,00 i wszystkie elementy mają gęstość równą jeden. Celowo przedstawiono tu topologie w takim układzie, aby pokazać działanie postprocessingu, którego efektem jest topologia przedstawiona na rys. 7.6b. Gdybyśmy przeprowadzili postprocessing dla kroku 13, otrzymalibyśmy topologię taką samą jak na rys. 7.6b. W obu tych przypadkach warunek więzów narzuconych na masę ciała jest spełniony w formie równości.



Rys. 7.7. Topologie dla TF_1 dla wzoru (7.10) i dla $c = 0,5$ dla kroku 11(a), kroku 12 (b), kroku 13 (c) i dla kroku 14 (d)

Rysunek 7.7 przedstawia w takim samym układzie jak rysunek 7.6 topologie dla wzoru (7.10) i stałej równej 0,5. Dla przykładu z rysunku 7.7a suma masy wynosi 119,75. Rysunki 7.7b i 7.7c powstały jako czarno-białe w wyniku działania postprocessingu. Po uzupełnieniu masy wynosi ona 120,00 dla rysunku 7.7b i 118,00 dla rysunku 7.7c. Suma masy dla rysunku 7.7d wynosi 110,00 i tam otrzymano w procesie optymalizacyjnym rozkład zero-jedynkowy. Topologie dla przykładów z rysunków 7.6 i 7.7 są bardzo podobne.

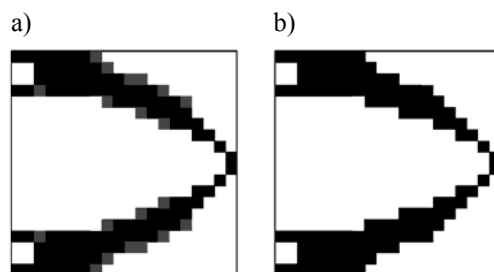
Z analizy rysunków 7.6 i 7.7 widać, że postprocessing wprowadzony w odpowiednim kroku pozwala na otrzymanie rozkładu czarno-białego, którego masa będzie zgodna z masą dostępną (rys. 7.6b, 7.6c oraz 7.7b). Samo uzupełnianie masy w elementach o gęstościach mniejszych od jedności nie zawsze prowadzi do spełnienia warunku równości masy z masą dostępną (rys. 7.7c).



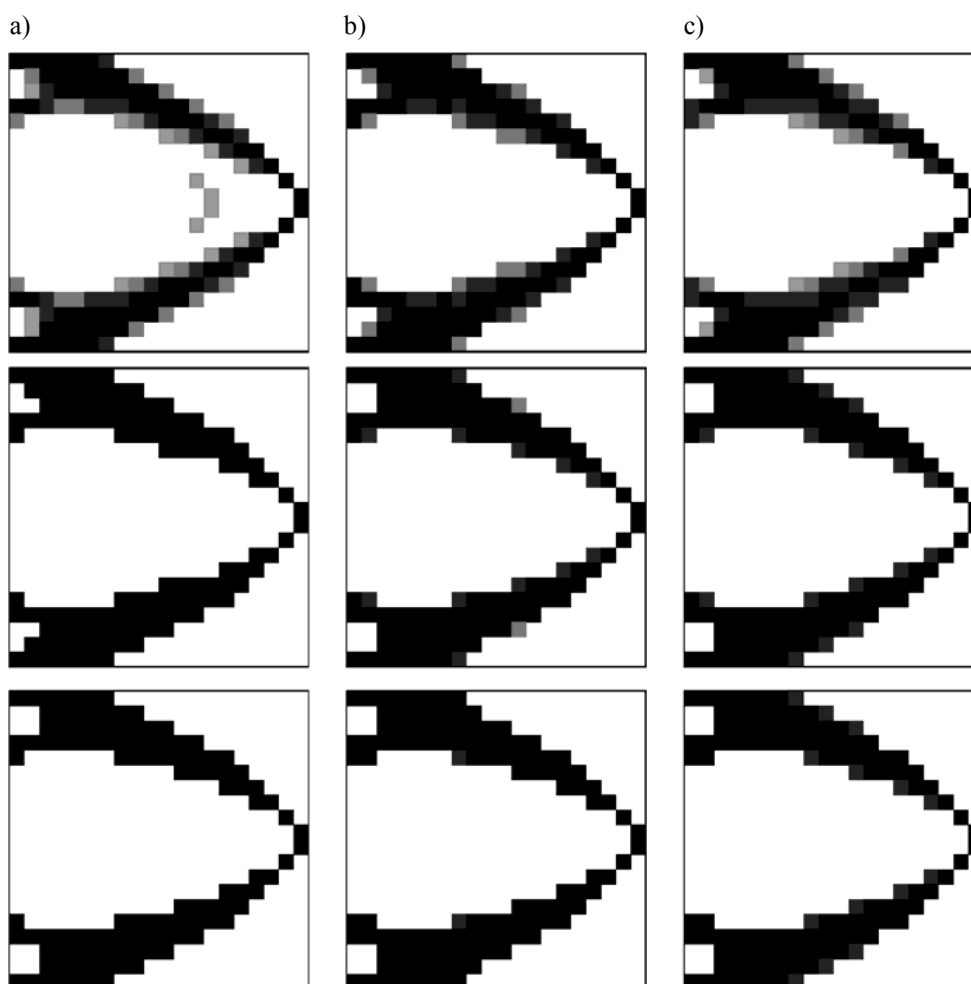
Rys. 7.8. Topologie dla TF_2 dla wzoru (7.9) i dla $c = 0,5$ dla kroku 90 (a) oraz dla kroku 91 (b)

Ze względu na to, że tylko topologia przedstawiona na rys. 7.5c jest nieco bardziej skomplikowana, tylko ten przypadek zdecydowano się przeliczyć stosując TF_2 . Dość „skomplikowane” topologie przedstawiono na rys. 7.8. Można zauważyć, że materiał jest w dużej ilości zgromadzony w sąsiedztwie miejsca przyłożenia siły.

Na rysunku 7.9 przedstawiono topologie dla definicji modułu Younga według zależności (7.11). Topologia dla poszczególnych kroków jest dość podobna do topologii przedstawionych na rysunku 7.7, które powstały w wyniku zastosowania wzoru (7.10). Stałą c ze wzoru (7.11) przyjęto jako równą 0,1. Wprowadzenie numeru kroku j w procesie uaktualniania topologii jako składnika funkcji progowej miało istotny wpływ na przyspieszenie procesu zbieżności w poszukiwaniu optymalnej topologii. Tutaj, przy aktualizacji modułu Younga, ten wpływ nie jest istotnie widoczny. Wielkość p , podobnie jak we wzorach poprzednich, wynosi 3. Zwiększanie lub zmniejszanie c w zakresie od 0,01 do 100 praktycznie nie zmienia topologii. Ponadto warto dodać, że zastosowanie TF_2 nie zmienia otrzymanej topologii, różnią się one rozmieszczeniem tylko sześciu elementów wypełnionych materiałem z zachowaniem charakteru topologii.

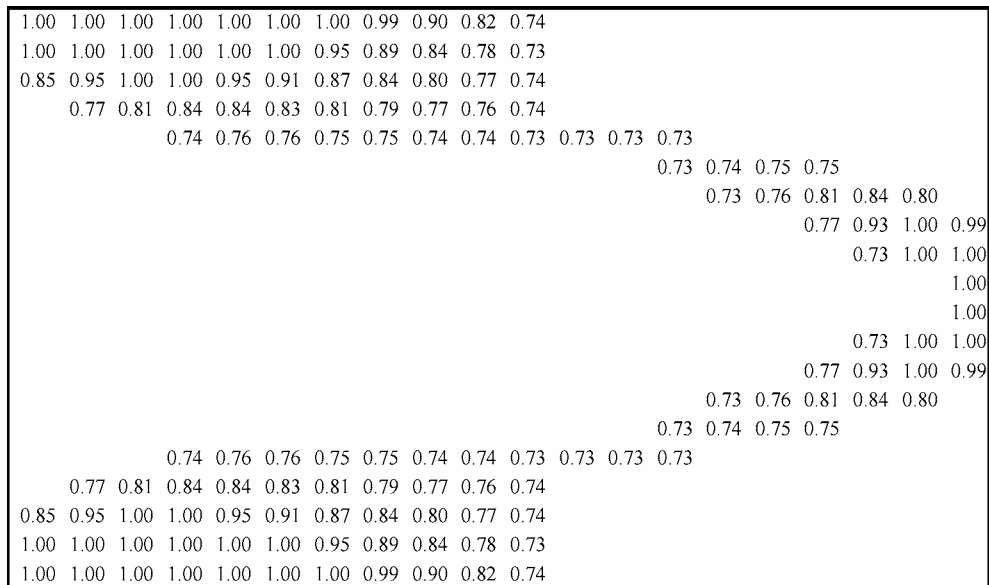


Rys. 7.9. Topologie dla TF_1 dla wzoru (7.11), dla $c = 0,1$ dla kroku 12 (a) i dla kroku 13 (b)



Rys. 7.10. Topologie dla TF_1 dla wzoru (7.12) dla $c = 1$ (a), $c = 10$ (b) i $c = 100$ (c)

Analizę zależności (7.12) przeprowadzono dla TF_1 dla stałej z zakresu od wartości około jedności do nieco ponad sto. Poza tym zakresem proces optymalizacyjny staje się rozbieżny. Na rysunku 7.10 przedstawiono topologie dla kroku jedenastego (wiersz górny), kroku dwunastego (wiersz środkowy) i kroku trzynastego (wiersz dolny). Na rysunku 7.10a stała c wynosi jeden, na rysunku 7.10b wynosi ona 10, a na rys. 7.10c stała c wynosi 100. O ile na rysunku 7.10a topologia, gdzie występują prawie tylko gęstości równe jeden, została osiągnięta już dla dwunastego kroku, to na rysunkach 7.10b i 7.10c przedstawiona jest ona dla kroku czternastego. Jednak analiza sumy masy, która dla kroku dwunastego wynosi kolejno dla rysunków 7.10a, 7.10b i 7.10c odpowiednio 117,73, 118,92 i 118,94 wskazuje, że wzrastająca stała zapewnia topologię o sumie masy najbliższej masie dostępnej równej 120,00. Taka sama sytuacja występuje dla kroku trzynastego, gdzie suma masy wynosi odpowiednio: 114,00, 117,82 i 118,85. Stwierdza się, iż wzrost wartości stałej wpływa na to, że rozkład czarno-biały uzyskuje się dla dłuższego procesu optymalizacji. Ze względu na podobny do poprzednich charakter uzyskanych tu topologii nie przeprowadzono obliczeń przy użyciu TF_2 .



Rys. 7.11. Topologia dla TF_1 dla wzoru (7.13) dla $t = 5$

W przypadku zastosowania pierwszego z zaproponowanych ciągów (7.13) nie otrzymujemy rozwiązania zbieżnego. Na rysunku 7.11 przedstawiono w skażonej skali, w formie liczbowej, topologię dla $t = 5$. Dla następnego kroku zadanie jest rozbieżne. Bardzo podobne topologie otrzymuje się dla innych t , dla których zadanie też

jest rozbieżne. Inna sytuacja jest w przypadku zastosowania zależności (7.14), dla której, stosując TF_1 , na rys. 7.12 zamieszczono topologie dla trzynastego kroku, w którym jest już czarno-biały rozkład gęstości. Wielkość t przyjęto odpowiednio na rysunkach 7.12a, b, c jako równą 5, 9, 15. Suma masy wynosi tu odpowiednio 112, 116 i 112. Na rysunku 7.13 przedstawiono czarno-białe, bardziej skomplikowane topologie dla TF_2 , dla których suma masy wynosi odpowiednio 114, 116 i 116.

Zgodnie z podaną w pracy [8] definicją funkcji uaktualniania modułu Younga, korzystając z (7.9) dla $\alpha = 0,5$, $p = 3$ i TF_1 wyznaczono optymalną topologię dodatkowo dla podziału 20×40 . Wynik przedstawiono na rys. 7.14. Zamieszczona na nim topologia jest niemal taka jak uzyskana przy wykorzystaniu (7.6) i pokazana na rys. 4.13. Występuje tu niewielka różnica sumy masy dla rozkładu zero-jedynkowego na korzyść topologii z rys. 7.14.

7.4. Uwagi końcowe

W niniejszym rozdziale przedstawiono różne sformułowania aktualizacji modułu Younga dla każdego elementu z osobna w kolejnych krokach procesu optymalizacji. Ta aktualizacja jest proporcjonalna do aktualizacji gęstości poszczególnych elementów. Wykazano jak zmienia się zbieżność rozwiązania rozumiana tu jako szybkość otrzymania optymalnej topologii w zależności od definicji aktualizacji modułu Younga. Otrzymane rozwiązania spełniają warunek minimum podatności dla każdego procesu optymalizacji z osobna. O ile dla zależności (7.6) przy wykorzystaniu TF_1 optymalny rozkład zero-jedynkowy uzyskano w czternastym kroku, to dla zależności (7.8) i $k = 9$ rozkład taki otrzymano w dwunastym kroku, tak samo jak dla wzoru (7.9) i stałej $c = 10$. W tym ostatnim przypadku suma masy była o cztery jednostki mniejsza od założonej, co oznacza konieczność uzupełnienia topologii czterema elementami. Dla zależności (7.10) i (7.11) nie obserwuje się przyspieszenia procesu uzyskania optymalnej topologii. Dla zależności (7.12) powtarza się sytuacja, kiedy to topologia jest bardziej gładka niż dla stałej równej jeden, pomimo że liczba kroków rośnie (i wynosi trzynaście dla stałej równej 100). Ciąg określony wzorem (7.14) pozwala na otrzymanie topologii o nieco innym rozkładzie masy niż otrzymujemy korzystając z pozostałych zależności. Wykorzystując TF_2 interesujące topologie otrzymano dla zależności (7.6) oraz dla (7.9).

Ostatecznie należy stwierdzić, że wpływ przedstawionych zależności aktualizujących moduł Younga na szybkość otrzymania optymalnej topologii jest niezbyt duży. Istotniejsze w tym przypadku jest, aby suma masy otrzymanej topologii była jak najbliższa masie dostępnej. Najlepszy kształt otrzymano korzystając ze wzoru (7.6) (dla $p = 3$). Wtedy topologia jest najbardziej zbliżona do typowego układu prętowego.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń dokonano analizy funkcji uaktualniających moduł Younga. Na rysunkach pokazano jedynie niektóre charakterystyczne wyniki, pozwalające na dokonanie odpowiedniego wyboru najwłaściwszej funkcji. Uzupełniono w ten sposób wiedzę na ten temat i podano numeryczne uzasadnienie wyboru, potwierdzające zasadność stosowanej np. w pracy [61] funkcji, dla której wykładnik potęgi wynosi 3.

8. Analiza otrzymanych topologii w aspekcie energetycznym

8.1. Wstęp

W poprzednich rozdziałach rozwiązywany był pewien ściśle zdefiniowany problem brzegowy. W zależności od przyjętych parametrów sterujących procesem optymalizacji otrzymywaliśmy dla każdego zbioru parametrów sterujących z osobną inną optymalną topologię. Procesem sterowały:

- funkcje progowe,
- funkcje relaksacyjne ograniczające dolną wartość gęstości materiału w punkcie materialnym,
- funkcje uaktualniające moduł Younga.

Każdy proces optymalizacji kończący się otrzymaniem optymalnej topologii jest niezależny od innych procesów dla tego samego zagadnienia brzegowego. Dla każdego z procesów z osobną spełnione jest kryterium minimum podatności (minimum energii odkształcenia). Zgodnie z przedstawioną w rozdziale 4.2 interpretacją pojęcia „optymalna topologia” w sensie numerycznym, dla przedstawianych rozwiązań numerycznych proces optymalizacji kończy się zero-jedynkowym rozkładem materiału w obszarze projektowym Ω lub zero-jedynkowym rozkładem z niewielką liczbą elementów o gęstości bliskiej jedności. Suma masy jest równa bądź nieznacznie mniejsza od masy dostępnej na początku procesu. Otrzymane topologie bardzo często różnią się między sobą, niekiedy nawet dość znacznie. Materiał może być różnie rozłożony w obszarze projektowym. Każde rozwiązanie należy więc traktować jako rozwiązanie niezależne, a nie jako rozwiązanie odpowiadające osiągnięciu pewnego minimum lokalnego. Wprawdzie są to rozwiązania tego samego problemu, ale do każdego z nich dochodzi się za każdym razem inną ścieżką. Przypomnijmy, że dla założonych parametrów zadania, czyli dla i -tego procesu, optymalna topologia jest oznaczona T_M^i i jest ostatnim elementem zbioru topologii dla danego procesu

$$T^i = \{T_1^i, T_2^i, T_3^i, \dots, T_j^i, \dots, T_M^i\}, \quad (8.1)$$

gdzie $j \in [1, M]$.

W wyniku rozwiązania danego problemu brzegowego mamy zbiór niezależnych optymalnych topologii, wśród których powinniśmy poszukiwać optymalnej topologii dla danego zagadnienia

$$T = \{T_M^1, T_M^2, T_M^3, \dots, T_M^s\}, \quad (8.2)$$

gdzie wielkość s jest liczbą rozwiązań dla różnych kombinacji parametrów sterujących zadaniem. Jedynym kryterium, jakie powinna spełniać optymalna topologia danego problemu brzegowego, jest minimum energii odkształcenia konstrukcji. Należy więc dla każdej optymalnej topologii wyznaczyć odpowiadającą jej energię odkształcenia

$$EN = \{en_M^1, en_M^2, en_M^3, \dots, en_M^s\} \quad (8.3)$$

i wybrać ze zbioru energii tę o najmniejszej wartości, czyli wyznaczyć minimum ze zbioru opisanego równaniem (8.3)

$$EN_{\text{opt}} = \min \{en_M^1, en_M^2, en_M^3, \dots, en_M^s\}. \quad (8.4)$$

Topologia, dla której energia odkształcenia będzie miała najmniejszą wartość (EN_{opt}) będzie topologią optymalną ($(T_M^i)_{\text{opt}}$) dla rozważanego zagadnienia brzegowego.












Przedstawiona w tym rozdziale różnorodność otrzymanych topologii dla poszczególnych ścieżek bazuje na topologiach przedstawionych w trzech poprzednich rozdziałach. W kolejnych podrozdziałach analizowane będą topologie dla zmiennego jednego parametru przy dwóch ustalonych w porządku, jaki podano na początku tego rozdziału. Wyniki przedstawiono w tabelach, gdzie pokazana jest topologia oraz podana jest definicja odpowiedniej zmiennej wielkości, numer kroku, suma masy dla rozpatrywanego kroku procesu optymalizacji oraz wartość energii odkształcenia. Wszystkie wielkości, podobnie jak w całej pracy, podane są w postaci bezwymiarowej. Przedstawione topologie będą analizowane pod kątem minimalnej wartości energii odkształcenia.

8.2. Analiza rozwiązania wynikająca z przyjęcia różnych funkcji progowych

Analizowane będą topologie uzyskane przy założonej wielkości relaksacyjnej $\varepsilon = 10^{-7}$ oraz funkcji uaktualniającej moduł Younga $E_{j+1}(\rho_j) = E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^3$. Współczynnik redukcji masy α przyjęto jako równy 0,3. Do analizy spośród wielu rozważanych topologii uzyskanych w wyniku zastosowania różnych funkcji progowych wzięto najbardziej reprezentatywne, które przedstawione są w tabeli 8.1, gdzie w kolumnie

zawierającej wartości energii odkształcenia wyłuszczone trzy kolejne minimalne wartości energii. W tabeli umieszczono topologie spełniające warunek minimum energii odkształcenia dla danego procesu optymalizacji, dlatego pod pozycją 3, 5 i 7 znalazły się topologie z odcieniami szarości. Minimalną wartość energii dla przedstawionych funkcji progowych mamy dla pozycji 3, dla rozkładu z odcieniami szarości. Ze względu na brak możliwości uzyskania w tym przypadku rozkładu czarno-białego w trakcie procesu optymalizacji do tego przypadku, jak to opisano w rozdziale piątym, należy zastosować postprocessing. Właśnie dlatego ten przypadek należy traktować

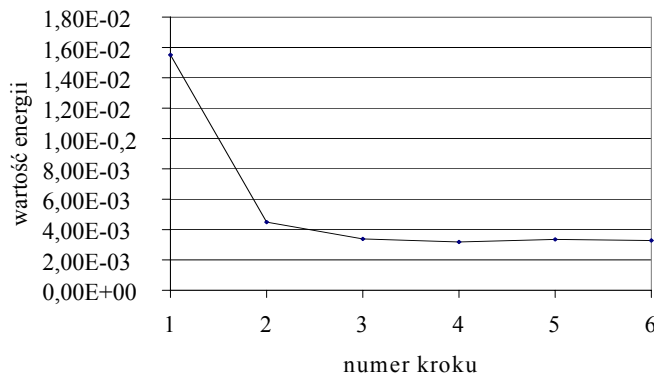
Tabela 8.1. Topologie dla zmiennej funkcji progowej, dla $\alpha = 0,3$

| Lp. | Topologia | Funkcja progowa | Numer kroku | Suma masy | Energia $\cdot 10^{-3}$ |
|-----|---|---|-------------|-----------|-------------------------|
| 1. |  | 0,3 | 33 | 116,00 | 2,608 |
| 2. |  | 0,35 | 4 | 116,00 | 3,180 |
| 3. |  | 5 min. | 164 | 119,72 | 1,795 |
| 4. |  | 0,036 j | 11 | 118,00 | 2,947 |
| 5. |  | 0,1 $j \alpha$ | 13 | 119,09 | 2,550 |
| 6. |  | 0,05 $j \alpha$ | 25 | 118,00 | 2,039 |
| 7. |  | 0,0125 $j \alpha$ | 85 | 119,31 | 1,934 |
| 8. |  | 0,0001 $j^2 \alpha$ | 101 | 116,00 | 2,145 |
| 9. |  | 0,0001 $\alpha(j + j^2)$ | 99 | 118,00 | 2,361 |
| 10. |  | 0,01 $j + 0,0001 j^2 + 0,00001 j^3$ | 12 | 118,00 | 2,984 |
| 11. |  | $\alpha(0,05 j + 0,00001 j^2 + 0,000001 j^3 + 0,0000001 j^4)$ | 23 | 118,00 | 2,494 |

w sposób szczególny: jako „wyrafinowaną” topologię o najmniejszej energii, ale pod warunkiem dokonania postprocessingu. Jeśli chodzi o topologię z pozycji 5, to najmniejszą energię mamy dla rozkładu z odcieniami szarości, poprzedzającego rozkład czarno-biały. Dlatego też (tak jak w przypadku pozycji 3 i 7) suma masy nie jest liczbą całkowitą. W pozycji 7 przedstawiono topologię z odcieniami szarości, dla której mamy minimalną energię dla rozpatrywanego procesu optymalizacji (krok 85). Topologia czarno-biała otrzymywana jest dopiero w 87 kroku. Topologia dla kroku 85, a także dla kroku 87 wymaga postprocessingu, gdyż brakuje pewnych połączeń. Nie brakuje ich w kroku 84, i to ten krok może być podstawą do analiz postprocessingu. Przypadki z pozycji 3 i 7, choć charakteryzują się kolejnymi minimalnymi wartościami energii, nie mogą być uważane za optymalne topologie w sensie zero-jedynkowego rozkładu materiału. Można natomiast przyjąć, że np. topologia z pozycji 3 jest optymalną topologią o rozkładzie z odcieniami szarości, co można interpretować z fizycznego punktu widzenia jako topologię ciała wykonanego z materiału niejednorodnego o zmiennych parametrach fizycznych.

Wobec powyższego, jako najefektywniejszą funkcję progową, dzięki której otrzymujemy optymalną topologię o rozkładzie czarno-białym, należy uznać funkcję $TF = 0,05 j\alpha$, dla której topologia jest zamieszczona pod pozycją 6.

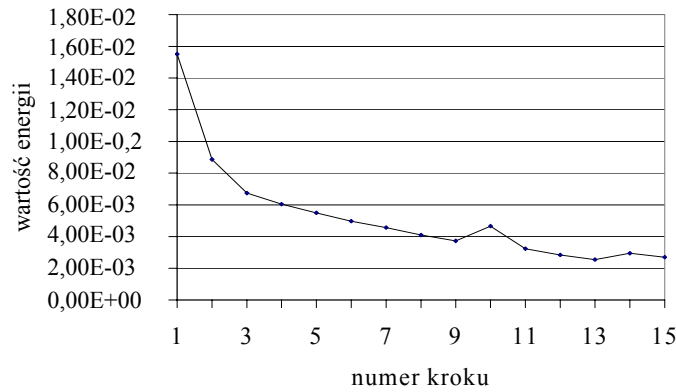
Na kolejnych trzech rysunkach przedstawiono niektóre wykresy wartości energii odkształcenia w funkcji numerów kroków procesu optymalizacji. Jako pierwszy pokazano wykres dla topologii z pozycji 2 tabeli 8.1 (funkcja progowa stała, równa 0,35). W tabeli pokazano topologię dla kroku 4, dla którego energia odkształcenia ma wartość minimalną. Jak widać na rys. 8.1, dla kroku 5 energia jest nieco większa ($3,352 \cdot 10^{-3}$) niż dla kroku numer 4 ($3,180 \cdot 10^{-3}$). Dla kroku numer 6 energia wynosi $3,282 \cdot 10^{-3}$.



Rys. 8.1. Wykres energii odkształcenia dla topologii z pozycji 2, tabeli 8.1

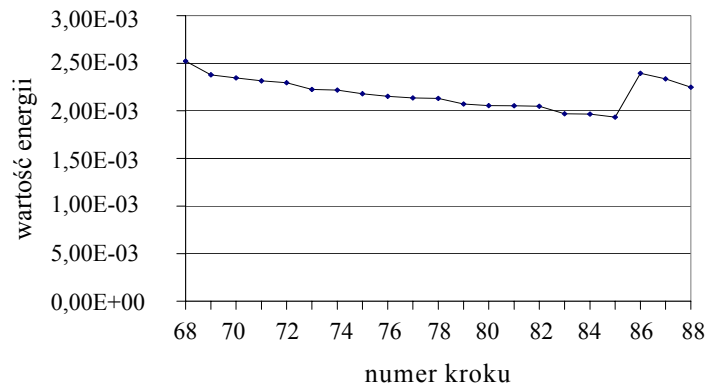
Na kolejnym rysunku przedstawiono wykres dla topologii z pozycji 5 tabeli 8.1 ($TF = 0,1 j\alpha$). Energia odkształcenia ma wartość minimalną dla kroku 13. W tabeli

pokazano topologię dla kroku 13. Dla kroków 14 i 15 energia wynosi odpowiednio $2,953 \cdot 10^{-3}$ oraz $2,700 \cdot 10^{-3}$.














Rys. 8.2. Wykres energii odkształcenia dla topologii z pozycji 5, tabeli 8.1

Na rysunku 8.3 przedstawiono wykres dla topologii z pozycji 7 tabeli 8.1 ($TF = 0,0125 j \alpha$). Energia odkształcenia ma wartość minimalną dla kroku 85. Dla następnych dwóch kroków wynosi odpowiednio $2,394 \cdot 10^{-3}$ oraz $2,335 \cdot 10^{-3}$. Należy pamiętać, że dla topologii z rys. 8.2 minimalną wartość energii odkształcenia obserwujemy dla rozkładu z odcieniami szarości, co sugeruje potrzebę postprocessingu odpowiednio dla kroku 13 i dla kroku 85 w celu otrzymania topologii czarno-białej. Możemy też przyjąć, że jako topologię kończącą proces optymalizacji traktujemy topologie odpowiednio dla kroku 14 i dla kroku 87, spełniające warunek czarno-białego rozkładu z zastrzeżeniem, że nie jest to topologia optymalna dla danego procesu, choć bardzo do niej zbliżona.



Rys. 8.3. Wykres energii odkształcenia dla topologii z pozycji 7, tabeli 8.1

Tabela 8.2. Topologie dla zmiennej funkcji progowej, dla $\alpha = 0,5$

| Lp. | Topologia | Funkcja progowa | Numer kroku | Suma masy | Energia $\cdot 10^{-3}$ |
|-----|---|--|-------------|-----------|-------------------------|
| 1. |  | 0,3 | 1000 | 200,00 | 5,394 |
| 2. |  | 0,35 | 1000 | 199,83 | 4,666 |
| 3. |  | 5 min. | 16 | 188,00 | 4,134 |
| 4. |  | 0,036 j | 13 | 198,00 | 5,298 |
| 5. |  | 0,1 j α | 9 | 199,77 | 5,743 |
| 6. |  | 0,05 j α | 18 | 199,93 | 5,285 |
| 7. |  | 0,0125 j α | 75 | 194,00 | 4,588 |
| 8. |  | 0,0001 j ² α | 97 | 188,00 | 4,687 |
| 9. |  | 0,0001 $\alpha(j + j^2)$ | 96 | 194,00 | 4,593 |
| 10. |  | 0,01 j + 0,0001 j ² + 0,00001 j ³ | 14 | 190,00 | 5,331 |
| 11. |  | $\alpha(0,05 j + 0,00001 j^2$ + 0,000001 j ³ + 0,0000001 j ⁴) | 19 | 178,00 | 5,006 |

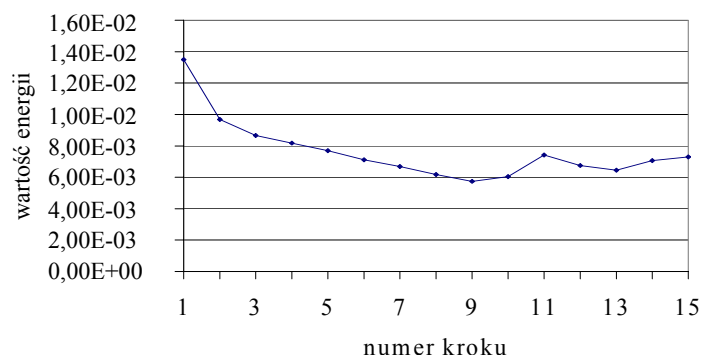
W tabeli 8.2 przedstawiono topologie dla $\alpha = 0,5$ przy wykorzystaniu tych samych co w tabeli 8.1 funkcji progowych. Pozwoliło to na porównania efektywności tych funkcji przy zmienionym współczynniku redukcji masy. Okazało się, że dwie pierwsze topologie o najmniejszej energii odkształcenia są te same, choć poprzednio, jak pamiętamy, wymagały postprocessingu. Dla $\alpha = 0,5$ otrzymano czarno-biały optymalny rozkład o kolejnych minimalnych wartościach energii odkształcenia zaznaczonych w tabeli 8.2 poprzez wytłuszczenie. Wymagają one postprocessingu, przy czym w najmniejszym stopniu wymaga jej topologia z pozycji 7 ze względu na małe

braki w połączeniach i najbardziej zbliżoną masę do masy dostępnej (194 w stosunku do 200). Powinniśmy jednak pamiętać, że najmniejszą energię mamy dla topologii z pozycji 3, która charakteryzuje się jednak masą nieco mniejszą (188) niż topologia z pozycji 7. Jeśli chodzi o topologię z pozycji 9, to zauważmy, że wprowadzenie numeru kroku w kwadracie i nieznaczna zmiana stałej w stosunku do funkcji z pozycji 7 wpłynęły na nieznaczne zmniejszenie liczby kroków niezbędnych do otrzymania optymalnej topologii.

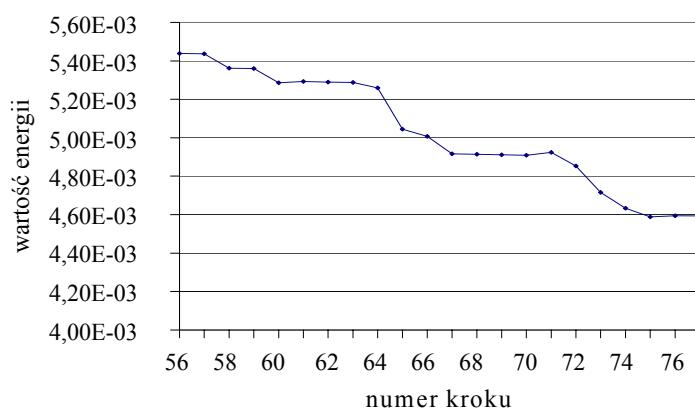
Przypadki z pozycji 1 i 2 nie są zbieżne. Jako przykład pokazano topologie dla kroku 1000, dla którego nie otrzymano jeszcze rozkładu czarno-białego. Dla topologii z pozycji 2 o ciemniejszych odcieniach szarości w porównaniu do topologii z pozycji 1, mamy wiele elementów o gęstości rzędu 0,65. Ponadto prawie nie występują różnice pomiędzy topologiami dla kroku 100, 500 czy 1000.

Funkcja progowa z pozycji 6, w tabeli 8.1 daje „wyrafinowaną” topologię spełniającą kryterium minimum energii dla rozkładu czarno-białego, natomiast w tabeli 8.2 minimalna wartość energii dla tej samej funkcji (dla kroku z odcieniami szarości) jest relatywnie duża. Stosując funkcję progową z pozycji 6 dla współczynnika redukcji masy $\alpha = 0,5$, ale dla konstrukcji o wymiarach 20×40 , otrzymujemy topologię o minimalnej energii dla rozkładu z gęstością z zakresu $[0,67; 1,00]$ (rys. 5.16 – krok 21), a rozkład zero-jedynkowy (krok 22) jest niekompletny, o energii większej aż o jeden rząd w stosunku do topologii dla kroku 21 (zadanie nie jest zbieżne). Okazuje się więc, że najlepsza funkcja progowa dla $\alpha = 0,3$ i konstrukcji o wymiarach 20×20 (tabela 8.1), dająca rozkład czarno-biały, nie pozwala na otrzymanie takiego rozkładu dla $\alpha = 0,5$, niezależnie od rozmiaru konstrukcji. Warto dodać, że powszechne stosowanie w pracy funkcji z pozycji 5 uzasadnia się tym, że choć topologia otrzymana przy jej użyciu nie jest optymalna w sensie energetycznym, to jednak otrzymuje się ją w bardzo małej liczbie kroków, co jest bardzo ważne ze względu na przeprowadzane analizy, a wnioski otrzymane z tych analiz są użyteczne dla innych funkcji progowych (p. dla funkcji z pozycji 7). Ponadto dla funkcji z pozycji 5 zawsze znajdowano rozwiązanie, natomiast użycie funkcji progowej z pozycji 6 czasami prowadzi do zagadnienia rozbieżnego. Aby zauważyć jak działają funkcja z pozycji 5 ($TF = 0,1j\alpha$) i tym razem funkcja z pozycji 7 ($TF = 0,0125j\alpha$), przeanalizujmy rys. 6.2, gdzie topologia poprawia się od góry w dół, tak samo jak energia, która maleje w tym samym kierunku, przy czym dla funkcji z pozycji 5 jest to spadek od wartości $2,709 \cdot 10^{-3}$ do $2,550 \cdot 10^{-3}$, a dla funkcji z pozycji 7 od $5,149 \cdot 10^{-3}$ do $2,336 \cdot 10^{-3}$. Widać, że efektywniejsza jest funkcja z pozycji 7, choć dla funkcji z pozycji 5 początkowa wartość energii jest relatywnie niska, co jest istotne w wielu przypadkach.

Na rysunku 8.4 i 8.5 przedstawiono wykresy energii odkształcenia dla topologii z pozycji odpowiednio 5 i 7 tabeli 8.2.



Rys. 8.4. Wykres energii odkształcenia dla topologii z pozycji 5, tabeli 8.2



Rys. 8.5. Wykres energii odkształcenia dla topologii z pozycji 7, tabeli 8.2










Na rysunku 8.4 widać wyraźne minimum, natomiast na rys. 8.5 energia się stabilizuje i po uzyskaniu minimum wzrost jest minimalny. Oczywiście jest, że mniejsza energia jest dla konstrukcji o bardziej „wyrafinowanej” topologii, czyli uzyskanej dla pozycji 7.

8.3. Analiza rozwiązania wynikająca z przyjęcia różnych funkcji relaksacyjnych

W tym podrozdziale analizowane będą topologie uzyskane przy założonej funkcji uaktualniającej moduł Younga $E_{j+1}(\rho_j) = E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^3$ oraz założonych funkcjach prog-

wych. Dobór funkcji progowych wynika z analizy tabeli 8.1, gdzie funkcja $TF = 5 \text{ min}$. nie może być brana do dalszej analizy ze względu na wspomniany brak zbieżności. W związku z tym, stosowanymi tu funkcjami progowymi są: $TF = 0,0125 j \alpha$ (tabela 8.3) i $TF = 0,05 j \alpha$ (tabela 8.4). Zmienną będzie tu funkcja relaksacyjna. Współczynnik redukcji masy α przyjęto jako równy 0,3. Układ tabel, gdzie przedstawione są wybrane, reprezentatywne topologie, jest taki sam jak tabeli 8.1. Bazą do analizy będzie rozdział 6, gdzie badano różne funkcje relaksacyjne.










Tabela 8.3. Topologie dla zmiennej funkcji relaksacyjnej, dla $TF = 0,0125 j \alpha$

| Lp. | Topologia | Funkcja relaksacyjna | Numer kroku | Suma masy | Energia $\cdot 10^{-3}$ |
|-----|---|---------------------------|-------------|-----------|-------------------------|
| 1. |  | 10^{-4} | 142 | 114,00 | 5,149 |
| 2. |  | 10^{-5} | 92 | 120,00 | 2,831 |
| 3. |  | 10^{-7} | 85 | 119,31 | 1,934 |
| 4. |  | 10^{-8} | 78 | 119,91 | 2,090 |
| 5. |  | 10^{-9} | 74 | 119,78 | 2,157 |
| 6. |  | $10^{-4} / j$ | 88 | 120,00 | 2,216 |
| 7. |  | $1 / (j^2 + 100j)$ | 87 | 118,00 | 2,335 |
| 8. |  | $1 / (0,1 j^3 + j^2 + j)$ | 81 | 117,80 | 2,127 |
| 9. |  | $1 / (\alpha^2 j^2)$ | 92 | 118,00 | 2,089 |

W tabeli 8.3 topologię o najmniejszej energii otrzymano dla stałej funkcji relaksacyjnej równej 10^{-7} (pozycja 3). Ponieważ jednak wymaga ona postprocessingu, więc jako najlepszą w tym przypadku należałoby traktować czarno-białą topologię z pozycji 9 dla funkcji $\varepsilon = 1/\alpha^2 j^2$, dla której energia wynosi $2,089 \cdot 10^{-3}$.

Zauważmy, że zarówno zbyt mała, jak i zbyt duża wartość stałej relaksacyjnej (pozycje 1, 2, 4 i 5) nie pozwalają na uzyskanie topologii optymalnej. Topologia z pozycji 1 jest niekompletna, natomiast rozwiązania z pozycji 4 i 5 są rozbieżne. Na rysunkach przedstawiono kroki, po których zagadnienie staje się rozbieżne. Gęstości dla pozycji 4 znajdują się w przedziale $[0,7; 1,0]$, a dla pozycji 5 w przedziale $[0,6; 1,0]$.

Tabela 8.4. Topologie dla zmiennej funkcji relaksacyjnej, dla $TF = 0,05 j \alpha$

| Lp. | Topologia | Funkcja relaksacyjna | Numer kroku | Suma masy | Energia $\cdot 10^{-3}$ |
|-----|---|--------------------------------|-------------|-----------|-------------------------|
| 1. |  | 10^{-4} | 33 | 113,68 | 3,438 |
| 2. |  | 10^{-5} | 24 | 112,00 | 2,734 |
| 3. |  | 10^{-7} | 25 | 118,00 | 2,039 |
| 4. |  | 10^{-8} | 26 | 116,00 | 1,899 |
| 5. |  | 10^{-9} | 26 | 116,00 | 1,873 |
| 6. |  | $10^{-4} / j$ | 26 | 116,00 | 1,873 |
| 7. |  | $10^{-3} / (j^2 + 100j)$ | 26 | 116,00 | 1,873 |
| 8. |  | $10^{-3} / (0,1j^3 + j^2 + j)$ | 26 | 116,00 | 1,873 |
| 9. |  | $1 / (\alpha^2 j^2)$ | 27 | 113,64 | 2,216 |

Sytuację pokazaną w tabeli 8.3, związaną ze zbyt dużą wartością relaksacyjną, obserwujemy w tabeli 8.4 też pod pozycją 1. Natomiast dla bardzo małych wartości relaksacyjnych otrzymujemy optymalną topologię. Ponadto mamy tutaj ciekawe zjawisko identyczności rozwiązania (w sensie otrzymanej topologii i wielkości energii) dla pozycji 5, 6, 7 i 8. Z kolei dla pozycji 9 zadanie jest rozbieżne w tym sensie, że poza

głównym kształtem konstrukcji pojawiają się elementy z niezerową gęstością (bardzo jasny odcień – gęstość wynosi 0,01, oraz nieco ciemniejszy odcień – gęstość wynosi 0,38). Interesujące jest to, że w tabeli 8.3 funkcja z pozycji 9 dawała topologię o drugiej z kolei, idąc od minimum, energii odkształcenia. Zastosowanie wielkości „ 10^{-3} ” (stosowanej w pozycji 7 i 8) zamiast „1” w liczniku funkcji relaksacyjnej $\varepsilon = 1/\alpha^2 j^2$ (z pozycji 9) powoduje, że dla obu funkcji progowych (tabela 8.3 i tabela 8.4 pozycje 9) zadanie jest rozbieżne. Analizując tabele 8.3 i 8.4 można więc stwierdzić, że potwierdziła się zależność jakości i istnienia rozwiązania zadania od właściwego wyboru funkcji relaksacyjnej.

8.4. Analiza rozwiązania wynikająca z przyjęcia różnych funkcji uaktualniających moduł Younga









Tym razem analizowane będą topologie uzyskane przy założonych funkcjach progowych, którymi będą, tak jak poprzednio, $TF = 0,0125 j \alpha$ (tabela 8.5) i $TF = 0,05 j \alpha$ (tabela 8.6). Dla pierwszej funkcji progowej zastosowana będzie stała relaksacyjna równa 10^{-7} , a dla drugiej 10^{-9} .

Pierwsze trzy pozycje z tabeli 8.5 i 8.6 są to topologie wynikające ze zmian wykładnika potęgi ze wzoru (7.6). Jeśli wykładnik rośnie, to „poprawia” się topologia i zmniejsza się energia odkształcenia. Dla wykładników większych niż trzy dla rozpatrywanej funkcji progowej zadanie jest rozbieżne. Jednak jeśli zastosujemy $TF = 0,1 j \alpha$, to otrzymamy rozwiązanie o topologii nieco mniej „wyrafinowanej” w mniejszej liczbie kroków (nie większej niż 14). W tym przypadku zwiększenie wykładnika potęgi do $p = 5$ powoduje, że kształt otrzymanej topologii zmienia się nieco (rys. 7.1d – przesunięcie masy w kierunku miejsca przyłożenia siły). Ponadto warto zauważyć (czego nie pokazano w tabeli), że choć w tabeli 8.3 funkcja $\varepsilon = 1/\alpha^2 j^2$ dała dobre rezultaty, to topologie uzyskane przy jej pomocy dla różnych funkcji uaktualniania modułu Younga mają większą energię odkształcenia i nie są takie skomplikowane jak topologia z pozycji 9 tabeli 8.3.

Stosowanie wzoru (7.8) – pozycja 4, tabela 8.5 i 8.6 – poza przypadkiem $k = 3$ nie jest efektywne pod względem minimalizacji energii odkształcenia, a nawet w tabeli 8.5 widać, że uzyskana topologia dla $k = 3$ jest niekompletna, jeśli porównamy ją z topologią przedstawioną w tabeli 8.5 w pozycji 3. Kolejne topologie przedstawione w tabeli 8.5 charakteryzują się dużą energią odkształcenia.









W tabeli 8.6 z energetycznego punktu widzenia poza pozycją 3 jeszcze tylko pozycja 4 jest interesująca, choć jest mniej skomplikowana. Warto dodać, że zastosowanie innych funkcji relaksacyjnych (np. $\varepsilon = 10^{-4}/j$) daje identyczne rezultaty jak przedstawione w tabeli 8.6.

Tabela 8.5. Topologie dla zmiennej funkcji uaktualniającej moduł Younga, dla $TF = 0,0125 j \alpha$ i $\varepsilon = 10^{-7}$

| Lp. | Topologia | Funkcja uaktualniająca moduł Younga | Numer kroku | Suma masy | Energia $\cdot 10^{-3}$ |
|-----|---|---|-------------|-----------|-------------------------|
| 1. |  | $\frac{\rho_j}{\rho_0}$ | 109 | 112,00 | 25,91 |
| 2. |  | $\left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^2$ | 93 | 116,00 | 6,185 |
| 3. |  | $\left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^3$ | 85 | 119,31 | 1,934 |
| 4. |  | $\sum_{p=1}^3 \left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^p$ | 89 | 116,00 | 2,819 |
| 5. |  | $5(\rho_j)^3$ | 91 | 116,09 | 13,68 |
| 6. |  | Ciąg ze wzoru (7.14) dla $t = 5$ | 115 | 114,00 | 131,7 |
| 7. |  | Ciąg ze wzoru (7.14) dla $t = 9$ | 116 | 116,00 | 59,22 |
| 8. |  | Ciąg ze wzoru (7.14) dla $t = 15$ | 112 | 116,00 | 108,5 |

Wyniki przedstawione w tabelach 8.5 i 8.6 wymagają dodatkowej interpretacji ze względu na modyfikację modułu Younga, mającego bezpośredni wpływ na wielkość energii odkształcenia konstrukcji. Jeśli ta modyfikacja powoduje jego relatywne zmniejszenie w stosunku do wielkości bazowej zdefiniowanej jako $E_{j+1}(\rho_j) = E(\rho_j/\rho_0)^3$, to energia odkształcenia wzrośnie. Możliwe jest również zwiększenie wartości modułu Younga i wtedy energia odkształcenia zmaleje. Dzieje się tak

Tabela 8.6. Topologie dla zmiennej funkcji uaktualniającej moduł Younga dla $TF = 0,05 j\alpha$ i $\varepsilon = 10^{-9}$

| Lp. | Topologia | Funkcja uaktualniająca moduł Younga | Numer kroku | Suma masy | Energia $\cdot 10^{-3}$ |
|-----|---|---|-------------|-----------|-------------------------|
| 1. |  | $\frac{\rho_j}{\rho_0}$ | 26 | 120,00 | 19,12 |
| 2. |  | $\left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^2$ | 22 | 120,00 | 6,983 |
| 3. |  | $\left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^3$ | 26 | 116,00 | 1,873 |
| 4. |  | $\sum_{p=1}^3 \left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^p$ | 27 | 116,00 | 1,989 |
| 5. |  | $5(\rho_j)^3$ | 25 | 108,00 | 16,22 |
| 6. |  | Ciąg ze wzoru (7.14) dla $t = 5$ | 26 | 112,00 | 76,28 |
| 7. |  | Ciąg ze wzoru (7.14) dla $t = 9$ | 27 | 116,0 | 68,88 |
| 8. |  | Ciąg ze wzoru (7.14) dla $t = 15$ | 33 | 114,00 | 58,05 |

dla pozycji 4, jeśli k we wzorze (7.8) zwiększa się np. od 4 do 9. Zmiana modułu Younga jest zmianą warunków zadania, wobec tego omawiane tabele dostarczają jedynie informacji o tym, jak dana funkcja wpływa na moduł Younga i czy konstrukcja staje się przez to mniej, czy bardziej sztywna. Mamy wtedy do czynienia z ciałem o innych własnościach materiałowych. Oznacza to, że dla różnych sposobów aktualizacji rozwiązujemy wszakże to samo zadanie, i ponieważ operujemy wielkościami względnymi (w tym względną gęstością), więc tylko otrzymane topologie mogą być porównywane. Nie można poszukiwać minimum energii odkształcenia i pod tym kątem tylko poszukiwać optymalnej topologii. Niezależnie od rozważań dotyczących aktualizacji modułu Younga można analizować topologie przedstawione w tabelach 8.5 i 8.6 ze względu na „wyrafinowanie” ich kształtu. Wydaje się więc, że poza pozycją 3 najbardziej „wyrafinowana” topologia została przedstawiona w pozycji 8 za pomocą ciągu opisanego równaniem (7.14).

8.5. Podsumowanie

Przeprowadzone w tym rozdziale rozważania pozwalają stwierdzić, że rozwiązanie danego zagadnienia brzegowego w sensie poszukiwania optymalnej topologii wymaga obszernej analizy. Każde rozwiązanie przy założonych parametrach procesu optymalizacji daje dla danego procesu topologię optymalną. Powstanie w ten sposób zbiór topologii optymalnych. Nie można mówić tu o poszukiwaniu minimum globalnego spośród minimów lokalnych, lecz tylko o poszukiwaniu topologii o minimalnej energii odkształcenia ze zbioru wszystkich optymalnych topologii. Wynika to z faktu, że zbiór topologii optymalnych powstał niezależnie od siebie w wyniku procesów optymalizacji przebiegających po niezależnych od siebie ścieżkach. Dlatego też poszukiwanie optymalnej topologii w sensie topologii o minimalnej energii odkształcenia jest trudne, gdyż wymaga wielu analiz dla wielu zmiennych niezależnych. Zadanie jest tym trudniejsze, że jak wykazano, niektóre parametry właściwe dla danego zadania (tzn. wykorzystując je otrzymujemy optymalną topologię) nie pozwalają w innym zadaniu na otrzymanie optymalnej topologii (np. pozycja 9, tabele 8.3 i 8.4 dla funkcji $\varepsilon = 1/(\alpha^2 j^2)$). W tabeli 8.3 mamy najbardziej „wyrafinowaną” topologię o niemal minimalnej energii, a w tabeli 8.4 mamy topologię o pojawiającej się masie poza głównym konturem, co powoduje, że nie jest to topologia optymalna).

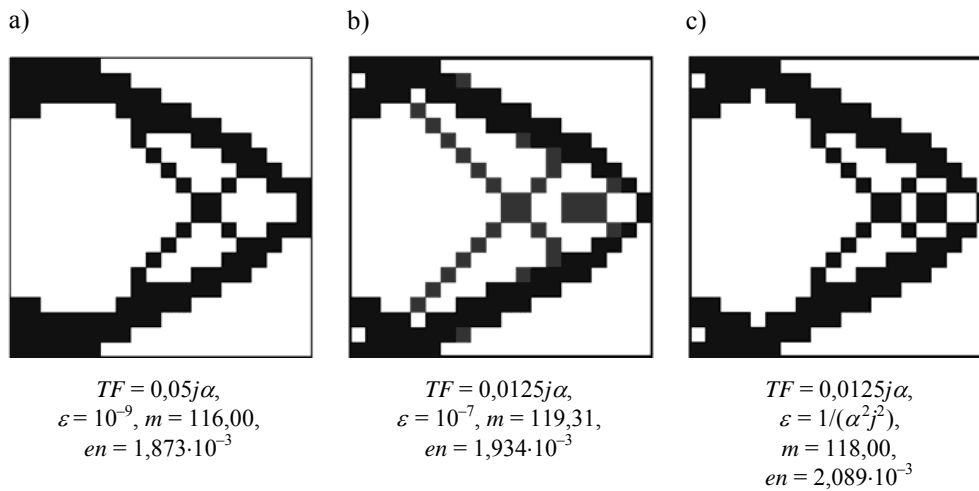
Należy pamiętać, że mając na myśli dane zagadnienie brzegowe oprócz wymiarów geometrycznych zadania, warunków brzegowych i obciążenia również współczynnik redukcji masy musi być ściśle określony dla danego zadania. Parametrami zadania optymalizacji są funkcje progowe i funkcje relaksacyjne, którymi można sterować dla założonego sposobu aktualizacji modułu Younga.

Stwierdza się, że proponowane w pracy [61] przyjęcie funkcji aktualizującej moduł Younga w formie $E_{j+1}(\rho_j) = E(\rho_j/\rho_0)^3$ jest najbardziej efektywne. Oznacza to, że za pomocą takiej funkcji aktualizującej można otrzymać optymalną topologię. Oczywiście jest, że należy też odpowiednio dobrać funkcję progową i funkcję relaksacyjną. Analizując różne topologie, często intuicyjnie wyczuwamy, że niektóre z nich nie mogą być optymalnymi, na co wskazuje sposób rozłożenia materiału (np. wspomniany wyżej przykład zamieszczony na rys. 7.1d, gdzie obserwuje się nienaturalne przesunięcie masy w kierunku miejsca przyłożenia siły). To intuicyjne wyczucie zostaje potwierdzone dzięki analizie dotyczącej energii odkształcenia danej topologii. Stwierdzono także, że tak jak podana wyżej funkcja aktualizująca, również ciąg ze wzoru (7.14) jest efektywny przy założonych funkcjach progowych (tab. 8.5 i 8.6).

Analiza funkcji progowych pozwala na stwierdzenie, że nie można zdefiniować jednej funkcji, która byłaby właściwa dla wszystkich przypadków. W zależności od

współczynnika redukcji masy oraz rozpatrywanego obszaru projektowego należy dobrać odpowiednią funkcję progową.

Co do funkcji relaksacyjnych można stwierdzić, że jeśli przyjmuje się stałą jej wartość, to powinna się ona mieścić między 10^{-7} a 10^{-9} . Funkcja powinna być tak dobrana, aby dla optymalnej topologii jej wartość zawierała się we wspomnianym wyżej zakresie, choć zdarzają się od tego wyjątki (tabela 8.3, pozycja 9, dla której $\varepsilon = 13 \cdot 10^{-4}$).



Rys. 8.6. Topologie o najmniejszej energii odkształcenia

Na zakończenie przedstawimy trzy topologie o kolejnych najmniejszych wartościach energii odkształcenia (rys. 8.6). Topologie a) oraz c) są czarno-białe, przy czym topologia c) jest najbardziej „wyrafinowana”. Topologia b) wymaga postprocessingu. W przypadku zastosowania gęstszej siatki podziału postprocessing nie będzie wymagany, gdyż gęstsza siatka pozwoli na bardziej równomierny rozkład materiału. Potwierdzają to rozważania z rozdziału 4 (rys. 4.11–4.15).

9. Optymalizacja topologii dla ciała z założonymi otworami

9.1. Wprowadzenie oraz sformułowanie problemu

W wielu przypadkach konstrukcja stanowiąca z punktu widzenia teoretycznego pewne kontinuum materialne zawiera otwory, których istnienie wynika głównie ze względów technologicznych. Zachodzi więc potrzeba zbudowania algorytmu, który dawałby możliwość wyznaczania optymalnej topologii ciała, w którym założono otwory. Okazuje się, że ogólne sformułowanie zagadnienia optymalizacji topologii kontinuum materialnego prezentowane w rozdziale trzecim daje możliwość jego rozszerzenia również o ten problem. W ogólnym sformułowaniu mamy obszar projektowy Ω , który dzieli się na obszary Ω_m i Ω_v odpowiednio zajęte przez materiał i pozabawione materiału. Następnie cały obszar podlega homogenizacji. W sytuacji gdy są otwory, należy z homogenizacji wyłączyć obszary stanowiące otwory. Cały obszar projektowy składa się teraz z trzech podobszarów

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_v + \Omega_h, \quad (9.1)$$

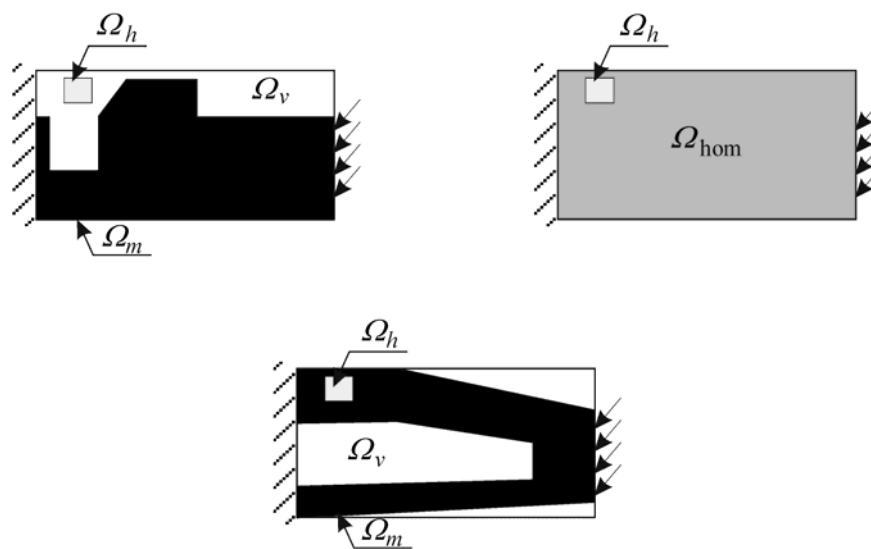
gdzie Ω_h jest podobszarem zajmowanym przez otwory. Na granicy pomiędzy otworem a pozostałym obszarem muszą być zapewnione warunki ciągłości. Mogą tam wystąpić zarówno przemieszczeniowe, jak i naprężeniowe warunki brzegowe. Funkcjonał opisujący zadanie musi być poszerzony o składnik związany z obszarem Ω_h i wtedy ma postać

$$F^{\varepsilon\eta}(\rho(x), \varepsilon(x), \lambda^m, \lambda^v, \lambda^h) = \int_{\Omega_m} C^{iklm}(\rho(x)) e_{ik} e_{lm} d\Omega_m \\ + \int_{\Omega_v} C_1^{iklm}(\varepsilon(x)) e_{ik} e_{lm} d\Omega_v + \lambda^m \left(\int_{\Omega_m} \rho(x) d\Omega_m - m_{0_}\Omega_m \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda^v \left(\int_{\Omega_v} \varepsilon(x) d\Omega_v - m_{0_}\Omega_v \right) \\
& + \int_{\Omega_h} C_2^{ijklm} (\eta_h(x)) e_{ik} e_{lm} d\Omega_h + \lambda^h \left(\int_{\Omega_h} \rho(x) d\Omega_h - m_{0_}\Omega_h \right). \quad (9.2)
\end{aligned}$$

Składnik ten zamieszczony jest w ostatnim wierszu równania. Aby zadanie było dobrze uwarunkowane, traktujemy obszar Ω_h podobnie jak obszar Ω_v . Oznacza to, że w obszarze Ω_h zakładamy istnienie w nim materiału zastępczego o odpowiednio małej gęstości η_h . Jest to formalnie inny materiał niż w obszarze Ω_v , niemniej jednak spełnia w trakcie procesu optymalizacji tę samą rolę. Różnica polega na tym, że materiał ten jest wprowadzony na początku rozważań i o ile obszary Ω_m i Ω_v podlegają homogenizacji, o tyle obszar Ω_h od początku do końca procesu wypełniony jest materiałem o gęstości η_h . Jednak masa wypełniająca podobszar Ω_h nie jest elementem dostępnej masy

$$m_0 = m_{0_}\Omega_m + m_{0_}\Omega_v. \quad (9.3)$$



Rys. 9.1. Schemat procesu optymalizacji dla obszaru z otworem od początkowo dowolnego rozłożenia materiału poprzez zastosowanie homogenizacji do rozkładu optymalnego

Na rysunku 9.1 przedstawiono w sposób schematyczny kolejne etapy postępowania. Początkowo obszar Ω składa się z trzech podobszarów (wzór (9.1)), gdzie oprócz

materiału o gęstości ρ (unormowanej do jedynki) mamy obszary puste Ω_v oraz obszary założonych otworów Ω_h . Po homogenizacji gęstość obszarów Ω_m i Ω_v wynosi ρ_h (obszar Ω_{hom}), natomiast obszar Ω_h ma nadal gęstość η_h . Aż do końca procesu optymalizacji obszar Ω_h nie zmienia swojej gęstości, która jest infinitezymalnie mała i po procesie jest przyjmowana jako równa zero. W pozostałej części obszaru Ω w trakcie procesu optymalizacji mamy do czynienia z obszarami, gdzie materiał bądź zwiększa swą gęstość dążąc do gęstości ρ , bądź też zmniejsza swą gęstość (są to obszary tworzących się pustek). Zadanie jest rozwiązywane dla stosowanego już wcześniej sposobu aktualizacji modułu Younga materiału konstrukcji

$$E_{j+1}(\rho_j) = E\left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^3. \quad (9.4)$$

Poszukując punktu stacjonarności funkcjonału (9.2), opisującego rozpatrywane zagadnienie, otrzymamy poza kompletem równań (3.50), uwzględniając w tym przypadku (9.4), dodatkowe równanie związane z obszarem Ω_h

$$\frac{\partial F^{\varepsilon\eta}}{\partial \eta_h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3C_2^{iklm}(\eta_h) e_{ik} e_{lm}}{\eta_h} + \lambda^h = 0, \quad (9.5)$$

które jest odpowiednikiem równań (3.53), dotyczących obszarów Ω_m i Ω_v .

9.2. Przykłady

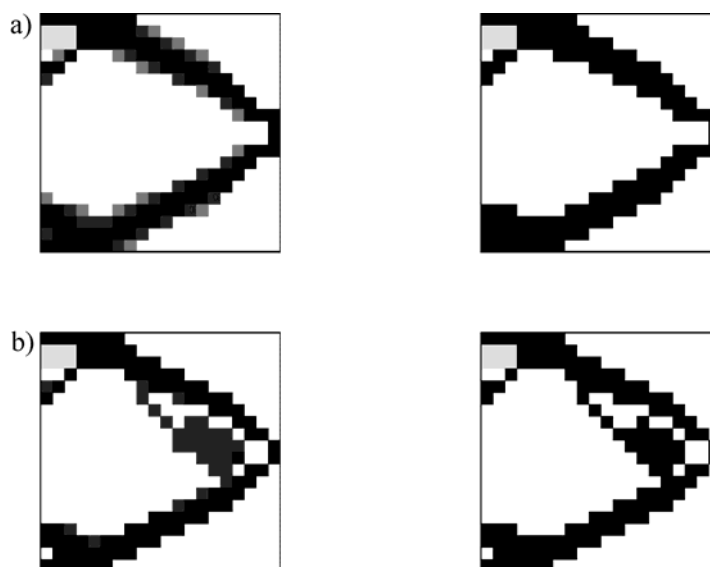
Współczynnik redukcji masy α przyjęto jako równy 0,3, natomiast wielkość relaksacyjną przyjęto jako $\varepsilon = 10^{-7}$. Posłużono się następującymi funkcjami progowymi:

$$TF_1 = 0,1 j \alpha, \quad (9.6)$$

$$TF_2 = 0,0125 j \alpha, \quad (9.7)$$

$$TF_3 = 0,01 j \alpha. \quad (9.8)$$

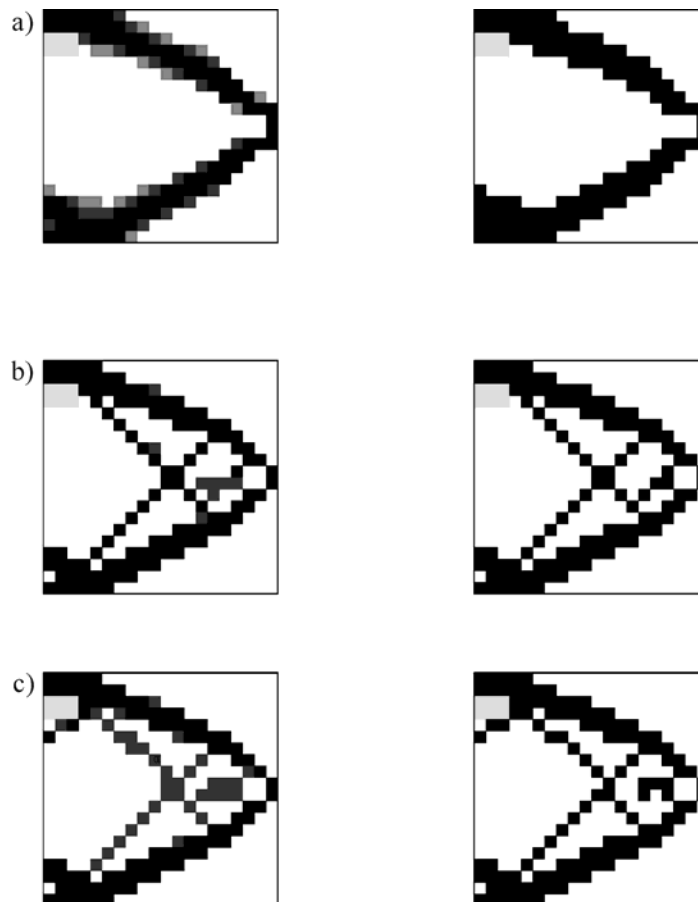
Na dwóch kolejnych rysunkach przedstawione będą topologie dla otworu o wielkości sześciu elementów, a na trzecim z kolei otwór będzie miał wielkość czterech elementów. Obszar zajmowany przez otwór oznaczony jest na rysunku jako obszar kropkowany. Na rysunkach z prawej strony przedstawiono rozkład biało-czarny, a z lewej z odcieniami szarości.

Rys. 9.2. Topologie dla TF_1 (a) oraz dla TF_2 (b)

Na rysunku 9.2 otwór znajduje się niemal w lewym górnym narożu. Na rysunku 9.2a przedstawiono topologie dla TF_1 (krok numer 11 z lewej strony i krok numer 12 z prawej), a na rysunku 9.2b dla TF_2 (kroki numer 79 i 80). Porównajmy teraz rys. 9.2 z rys. 4.7, który przedstawia topologie dla obu funkcji progowych konstrukcji bez otworów. Zauważmy, że topologie na rys. 9.2 zostały otrzymane w nieco mniejszej liczbie kroków niż topologie znajdujące się na rys. 4.7. Topologie na obu rysunkach dla TF_1 różnią się oczywiście w strefie otworu oraz tylko nieznacznie w strefie przyłożenia siły. Z kolei topologie dla TF_2 różnią się dość znacznie. Na rysunku 9.2b nastąpiła znaczna koncentracja masy ciała w sąsiedztwie miejsca przyłożenia siły, przez co nastąpiło wzmocnienie „górnego ramienia” konstrukcji. Poza tym należy zauważyć, że topologie różnią się nieco między sobą dla różnych funkcji progowych, co jest zrozumiałe i co przedyskutowano w rozdziale piątym. Zauważmy, że algorytm optymalizacji spowodował w każdym przypadku otoczenie otworu przez materiał konstrukcji. Kształt otaczania różni się nieco w zależności od zastosowanej funkcji progowej.

Na kolejnym rysunku otwór przesunięty został o jeden rząd elementów w dół, czyli z czterech pionowych elementów mocujących (rys. 4.7a) zostaną dwa górne. Dla tak postawionego zadania otrzymujemy topologie pokazane na rysunku 9.3. Dla TF_1 (kroki numer 11 i 12) otwór pozostał na skraju konstrukcji. Jest tylko lekko zauważalne wzmocnienie „dolnego ramienia” konstrukcji. Podobne przemieszczanie masy obserwuje się przy zastosowaniu TF_2 (kroki numer 88 i 89), gdzie nieznacznie zmie-

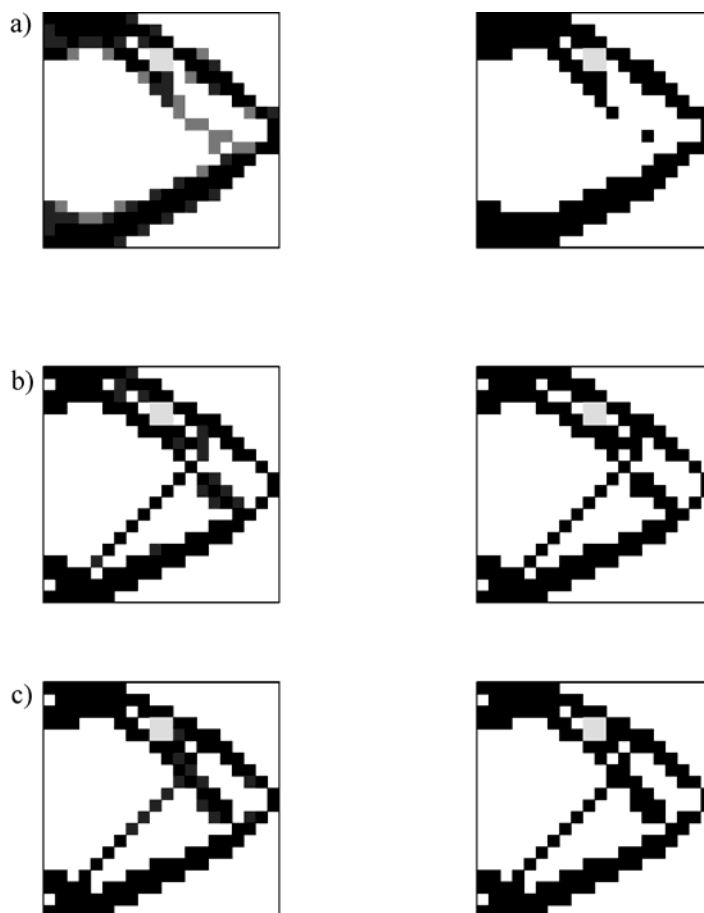
nia się kształt ramion. Nie następuje także otaczanie otworu przez materiał. Dopiero zastosowanie innej funkcji progowej, oznaczonej jako TF_3 (kroki numer 109 i 110), powoduje otaczanie otworu przez materiał.



Rys. 9.3. Topologie dla TF_1 (a), dla TF_2 (b) i dla TF_3 (c) dla otworu przesuniętego w dół

Następnie otwór umieszczono tak, że rozciąga się on od dziesiątego elementu, licząc od lewej strony w prawo, i od czwartego elementu, licząc od góry w dół. Na rysunku 9.4 pokazano topologie dla tak położonego otworu w układzie jak na rys. 9.3. Dla TF_1 (kroki numer 12 i 13) nastąpiła wyraźna modyfikacja topologii, jeśli porównamy ją z topologią przedstawioną na rys. 9.3. „Górne ramię” rozdzieliło się na dwie części otaczając otwór, przy czym dla rozkładu biało-czarnego jedna część „ramienia” ma tylko jednostronne połączenie z pozostałą częścią konstrukcji. Wynika to oczywiście z faktu, iż funkcja progowa jest zbyt silna i zbyt szybko penalizuje niektóre gęstości.

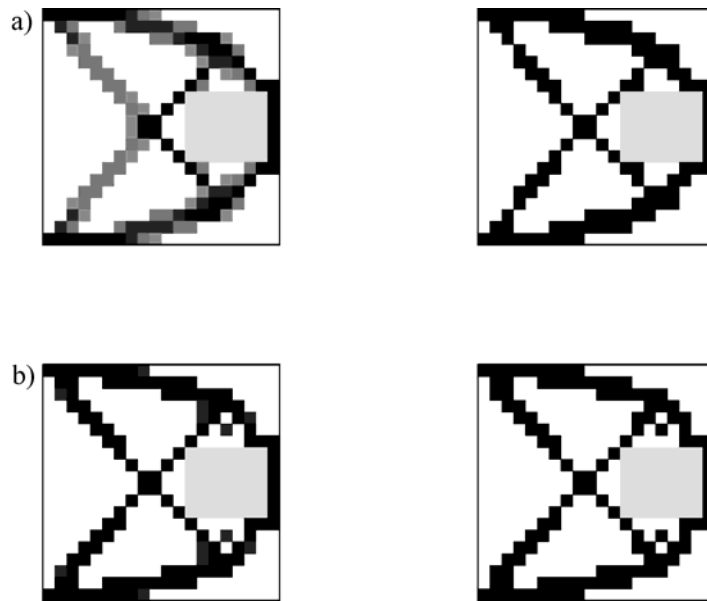
Masa całkowita jest mniejsza o 4 jednostki w stosunku do wielkości masy dostępnej i mogłaby być uzupełniona w wyniku działania postprocessingu. Jednak zastosowanie TF_2 (kroki numer 90 i 91) znakomicie poprawia sytuację. Otrzymujemy, tak jak dla TF_1 , podzielenie „górnego ramienia” i tym razem całkowite otoczenie otworu przez materiał konstrukcji. Dla porównania na rys. 9.4c pokazano topologie otrzymane przy zastosowaniu TF_3 (kroki numer 102 i 103). Topologie są podobne. Różnice występują głównie w części rozdwojonego pręta otaczającego od dołu otwór.



Rys. 9.4. Topologie dla TF_1 (a), dla TF_2 (b) i dla TF_3 (c) dla otworu przesuniętego w prawo

Na rysunku 9.5 przedstawiono topologie dla dużego otworu (siedem na sześć elementów) umieszczonego w sąsiedztwie przyłożonej siły. Podobnie jak w poprzednich przykładach, materiał otoczył otwór. Na rysunku 9.5a przedstawiono odpowiednio

kroki numer 13 i 14 (dla TF_1), a na rysunku 9.5b kroki numer 94 i 95 (dla TF_2). Topologie dla kroków numer 14 i 95 są dość podobne, jeśli chodzi o kształt, natomiast różnią się pewnymi szczegółami. Zauważmy, że kroki poprzedzające rozkład biało-czarny różnią się od siebie liczbą elementów o gęstości mniejszej od jedności, przy czym dla kroku numer 13 wiele elementów ma gęstość w zakresie od 0,70 do 0,99, podczas gdy dla kroku numer 94 tylko kilka elementów ma gęstość z zakresu od 0,93 do 0,99.



Rys. 9.5. Topologie dla TF_1 (a) oraz dla TF_3 (b)

Konkludując należy stwierdzić, że wprowadzenie otworów do kontinuum materialnego spowodowało, że otrzymywane topologie różnią się od topologii bez otworów. W zależności od tego, gdzie wprowadzono otwory, algorytm odpowiednio zmienia topologie, dostosowując się do zmienionych potrzeb. Zazwyczaj w wyniku działania procesu optymalizacji materiał otacza otwór. Dzieje się tak wtedy, gdy otwór wprowadzono w miejscu, gdzie dla topologii optymalnej powinien znajdować się materiał, lub na granicy materiału. Jeśli otwór znajduje się poza tym obszarem, to topologia się nie zmienia.

10. Optymalizacja topologii dla ciała o zmniejszającej się masie oraz zwiększającym się obciążeniu

10.1. Wprowadzenie oraz sformułowanie problemu

Rozdział ten jest poświęcony wyznaczeniu optymalnej topologii dla konstrukcji o zmniejszającej się masie podczas procesu optymalizacji. Dodatkowo rozważano problem zwiększającego się obciążenia w trakcie tego procesu. Nałożono przy tym nieco odmienne niż zwykle ograniczenia na masę konstrukcji, zakładając zmniejszanie się dostępnej masy w kolejnych krokach.

Podjmuje się tu temat odpowiedniego rozmieszczenia materiału w obszarze projektowym w sytuacji, gdy masa konstrukcji podczas jej eksploatacji zmniejsza się, co w sensie fizycznym oznacza, że część konstrukcji ulega degradacji i traci swoje zdolności do przenoszenia obciążeń. Wtedy pozostała część materiału musi przenieść to obciążenie. Aby sprostać wymaganiu przeniesienia tego obciążenia, masa konstrukcji powinna być rozmieszczona w inny sposób i zastąpić ten materiał, który uległ degradacji. Tak zmieniona konstrukcja powinna przenieść istniejące, a nawet czasami zwiększone obciążenie. To zwiększenie obciążenia może wynikać np. ze zmiany schematu statycznego występującego podczas procesu degradacji. Rozumowanie jest przeprowadzone przy założeniu, że mamy do czynienia z tzw. inteligentnymi konstrukcjami, które umieją przesuwać masę w ramach pewnego założonego wcześniej obszaru. Nie będziemy tu rozważać szczegółów technicznych dotyczących sposobu przemieszczania masy w tych konstrukcjach, gdyż nie jest to tematem pracy. Zaznaczmy jednak, że algorytm postępowania jest następujący: w przypadku jakiegokolwiek zmiany stanu konstrukcji odpowiednie czujniki zarejestrują i przekażą informację o tym fakcie. Następnie zaczynają funkcjonować odpowiednie systemy rozpoznawania, interpretacji i wreszcie system decyzyjny zawierający m. in. algorytmy optymalizacji, które podają informację o niezbędnych zmianach w rozłożeniu dostępnej w danym momencie masy, czyli o niezbędnej zmianie kształtu konstrukcji. W ostatnim etapie odpowiednie urządzenia modyfikują, w tym przypadku, rozłożenie materiału w konstrukcji. Przypomnijmy jeszcze, że proces optymalizacji odbywa się w ściśle określonym obszarze projektowym, którego rozmiar nie ulega zmianie podczas

procesu. Jest to istotne ze względu na możliwość uzyskania właściwego rozmieszczenia materiału uwzględniającego zarówno wszystkie początkowe warunki brzegowe i sposób początkowego obciążenia, jak i uwzględniające wszelkie zmiany występujące podczas procesu optymalizacji. Tak więc ten sam algorytm stosowany jest w trakcie całego procesu. Szczególnie w rozważanym przypadku wykorzystuje on swą właściwość eliminacji osobliwości z tych obszarów, w których materiał uległ degradacji.

Podstawowym problemem jest odpowiednie dobranie funkcji zmniejszania się masy, zwanej dalej funkcją degradacji, i dostosowanie algorytmu optymalizacji do szybkości zniszczeń na podstawie rzeczywistych postępujących zniszczeń konstrukcji. Pozwala to na określenie zmieniającej się w kolejnych krokach dostępnej masy, która w tym przypadku jest zdefiniowana jako masa konstrukcji dostępna dla projektanta na danym etapie zniszczenia. Ważnym parametrem algorytmu optymalizacji jest w tym przypadku funkcja progowa. Właściwe jej zdefiniowanie pozwala na otrzymanie optymalnej topologii dla danych parametrów zadania, w tym dla zdefiniowanej odpowiednio na każdym etapie procesu dostępnej masy. Istotne jest również określenie momentu przerwania procesu optymalizacji kiedy dochodzimy do zero-jedynkowego rozkładu. Możemy wtedy wyznaczyć sumę masy całkowitej w projektowanym obszarze w danym kroku optymalizacji. Następnie należy sprawdzić, czy ta masa całkowita jest równa masie dostępnej na danym etapie procesu, czy może jest od niej mniejsza lub większa. Jeśli jest mniejsza oznacza to, że w konstrukcji są jeszcze zapasy bezpieczeństwa i jako ostateczną dla takiego etapu zniszczenia można przyjąć otrzymaną topologię. Jest ona zdolna do przenoszenia nawet większych obciążeń jeszcze do momentu zrównania się wielkości masy dostępnej i masy całkowitej. Jeśli natomiast masa całkowita jest większa od masy dostępnej, to proces optymalizacji należy prowadzić dalej. Często w takim przypadku dalszy proces prowadzi do topologii niewiele różniącej się od topologii omawianej wyżej, lecz suma masy zmniejsza się do wartości przewidywanej funkcją degradacji, równej co do wartości, rzeczywistej wielkości masy podanej przez odpowiednie czujniki. To zmniejszanie się masy całkowitej polega na eliminacji masy z niektórych punktów materialnych, lecz generalnie kształt konstrukcji zazwyczaj zmienia się niewiele.

Przygotowany algorytm może być po odpowiednim przystosowaniu używany do dowolnej konstrukcji. Tu jednak, ze względu na możliwość porównania rozwiązania z wykonanymi wcześniej obliczeniami i ze względu na możliwość przeprowadzenia odpowiedniej analizy, zdecydowano się pokazać rozpatrywane zagadnienia na tym samym co w innych rozdziałach przykładzie.

W tym rozdziale dostępna masa jest opisana zależnością

$$\begin{aligned} m_0 &= \alpha m De, & 0 < \alpha \leq 1, \\ De &= \beta - de, & 0 < \beta \leq 1, \end{aligned} \quad (10.1)$$

w której α jest współczynnikiem redukcji masy, β określa stopień degradacji konstrukcji na początku danego procesu optymalizacji, De jest funkcją degradacji, a de jest funk-

cją określającą degradację materiału. W tym rozdziale przyjęto, że $\alpha = 1$. Jeśli $\beta = 1$, to jest to skrajny przypadek, kiedy na początku konstrukcja nie jest zniszczona. Oznacza to, że jej masa jest równa masie tej samej konstrukcji po wybudowaniu.

Problem jest rozwiązywany dla znanego z wcześniejszych rozdziałów sposobu aktualizacji modułu Younga materiału konstrukcji

$$E_{j+1}(\rho_j) = E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^3. \quad (10.2)$$

Jako funkcje progowe przyjęto

$$\begin{aligned} TF_1 &= 0,1 j \alpha, \\ TF_2 &= 0,0125 j \alpha. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Wielkość relaksacyjną przyjęto jako równą $\varepsilon = 10^{-7}$. Przypomnijmy, że proces optymalizacji rozpoczyna się od masy m_0 . Następnie algorytm przewiduje homogenizację masy po całym obszarze projektowym. Gęstość względna materiału będzie wtedy wynosiła ρ_0 . Podczas procesu optymalizacji masa konstrukcji będzie ulegała dalszemu zmniejszaniu, co określone jest funkcją degradacji i jest odpowiednio uwzględnione w algorytmie. Dodatkowo rozpatrzone będą przykłady ze zwiększającą się siłą obciążającą.

10.2. Przykłady

Obliczenia wykonano dla tego samego co w poprzednich rozdziałach przykładu. Założony podział na elementy daje satysfakcjonujące wyniki, jeśli chodzi o istotę problemu.

Proponowany algorytm pozwala na rozpatrywanie sytuacji, w których na początku konstrukcja nie jest zniszczona ($\beta = 1$), aż do takich, w których współczynnik degradacji może przyjmować wartości bliskie zeru. Wtedy jednak może się zdarzyć, że zbyt mało materiału pozostanie do dyspozycji i proces optymalizacji zakończy się niepowodzeniem. W obu powyższych przypadkach algorytm przewiduje dalszą degradację materiału w trakcie procesu optymalizacji. Szybkość tej degradacji jest określona każdorazowo odpowiednią zależnością. Do potrzeb przedstawianych przykładów będą to zależności ściśle zdeterminowane i przyjęte arbitralnie do algorytmu. Wynika to z konieczności pokazania przykładów. W rzeczywistym obiekcie przewiduje się, że funkcja ta będzie określona przez systemy analityczno-decyzyjne, które na podstawie posiadanych danych dotyczących charakteru mających nastąpić zmian lub aproksymacji już zachodzących zmian w konstrukcji określą właściwą dla danego procesu

funkcję. Będzie ona wprowadzona automatycznie do algorytmu. Pozwoli to na przejście od stanu początkowego konstrukcji, kiedy będzie ona nieuszkodzona lub uszkodzona w ściśle określony sposób do przewidywanego stanu konstrukcji w określonym czasie. Szybkość, z jaką otrzymuje się optymalną topologię, związana jest z szybkością dalszej degradacji. Oznacza to, że jeśli degradacja postępuje dość szybko, to należy odpowiednio dobrać parametry sterujące szybkością otrzymania optymalnej topologii (np. funkcję progową), aby proces nadażył za degradacją konstrukcji. Trzeba też pamiętać, że końcowa masa po procesie określona może być w przybliżeniu z pewną dokładnością zależną od tempa procesu oraz od stanu początkowego przed degradacją i przed procesem optymalizacji.

Jako pierwszy pokazano przypadek, kiedy $\beta = 1$. Funkcję degradacji przyjęto jako równą

$$De_1 = 1 - 0,05 j, \quad De_2 = 1 - 0,006 j. \quad (10.4)$$

Na rysunku 10.1 przedstawiono topologie dla funkcji degradacji De_1 i funkcji progowej TF_1 , a na rys. 10.2 dla De_2 i TF_2 . Dla każdego przypadku pokazano po dwa rysunki dla kroku z rozkładem zero-jedynkowym i dla kroku bezpośrednio go poprzedzającego. Dla rozkładu zero-jedynkowego w obu przypadkach końcowa masa wynosi 52,5% masy początkowej dla rys. 10.1 i 54,5% dla rys. 10.2. Zakładana w algorytmie masa wynikająca ze wzorów na funkcję degradacji wynosi odpowiednio 55,0% i 55,6%. Jak widać, odpowiednio dobrana funkcja progowa (TF_2) pozwala na otrzymanie „wyrafinowanej” topologii, o masie bardziej zbliżonej do masy zakładanej. Dla kroków poprzedzających rozkład zero-jedynkowy mamy pełną zgodność (rys. 10.1 – 60,0%) wielkości masy po procesie optymalizacji z masą wynikającą z funkcji degradacji i prawie pełną (rys. 10.2 – odpowiednio 56,0% i 56,2%).

Na następnym rysunku przedstawiono przykład dla współczynnika degradacji równego $\beta = 0,8$. Oznacza to, że 20% materiału już jest zniszczona, a proces nadal trwa. Na rysunkach 10.3 i kolejnych przedstawiono wyniki w układzie takim jak na rysunkach 10.1 i 10.2 razem, z tym że użyto odcieni szarości (tam, gdzie względna gęstość masy jest mniejsza od jedności, a większa od zera) oraz użyto koloru czarnego (tam, gdzie wspomniana gęstość ma wartość równą 1). Funkcje degradacji przyjęto odpowiednio dla rys. 10.3a oraz 10.3b jako równe odpowiednio

$$De_3 = 0,8 - 0,025 j, \quad De_4 = 0,8 - 0,0025 j. \quad (10.5)$$

We wszystkich poniższych przypadkach masa dostępna, czyli masa konstrukcji, jaka pozostaje po kolejnym etapie destrukcji, jest większa niż masa całkowita otrzymana po procesie optymalizacji. Dla kroku numer 9 mamy prawie pełną zgodność masy ustalonej w wyniku procesu optymalizacji (57,2%) z wynikającą z funkcji degradacji (57,5%). Dla kroku numer 10 różnica pomiędzy wymienionymi wielkościami wynosi około 10%. Wskazuje to na konieczność zastosowania w tym przypadku post-


```

1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.95 0.81 0.66
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.95 0.83 0.77 0.71 0.64
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.93 0.90 0.88 0.86 0.82 0.76 0.66
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.99 0.91 0.89 0.87 0.89 0.90 0.90 0.89 0.85 0.78 0.62
0.88 0.92 0.92 0.90 0.86 0.83 0.81 0.79 0.81 0.82 0.84 0.88 0.90 0.91 0.90 0.84 0.72
0.74 0.75 0.77 0.78 0.77 0.76 0.73 0.74 0.73 0.73 0.74 0.77 0.82 0.89 0.93 0.93 0.88 0.79
    0.65 0.68 0.70 0.70 0.71 0.69 0.69 0.68 0.67 0.67 0.69 0.75 0.86 0.94 0.96 0.99 0.88
        0.65 0.67 0.68 0.68 0.67 0.66 0.65 0.64 0.63 0.64 0.68 0.82 1.00 1.00 1.00 1.00
            0.64 0.66 0.67 0.67 0.66 0.65 0.64 0.63 0.62    0.62 0.75 1.00 1.00 1.00
                0.63 0.66 0.67 0.67 0.66 0.65 0.64 0.63 0.63                0.65 1.00 1.00
                    0.63 0.66 0.67 0.67 0.66 0.65 0.64 0.63 0.63                    0.65 1.00 1.00
                        0.64 0.66 0.67 0.67 0.66 0.65 0.64 0.63 0.62    0.62 0.75 1.00 1.00 1.00
                            0.65 0.67 0.68 0.68 0.67 0.66 0.65 0.64 0.63 0.64 0.68 0.82 1.00 1.00 1.00 1.00
                                0.65 0.68 0.70 0.70 0.71 0.69 0.69 0.68 0.67 0.67 0.69 0.75 0.86 0.94 0.96 0.99 0.88
3.00 0.74 0.75 0.77 0.78 0.77 0.76 0.73 0.74 0.73 0.73 0.74 0.77 0.82 0.89 0.93 0.93 0.88 0.79
0.88 0.92 0.92 0.90 0.86 0.83 0.81 0.79 0.81 0.82 0.84 0.88 0.90 0.91 0.90 0.84 0.72
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.99 0.91 0.89 0.87 0.89 0.90 0.90 0.89 0.85 0.78 0.62
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.93 0.90 0.88 0.86 0.82 0.76 0.66
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.95 0.83 0.77 0.71 0.64
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.95 0.81 0.66

```

krok 8

```

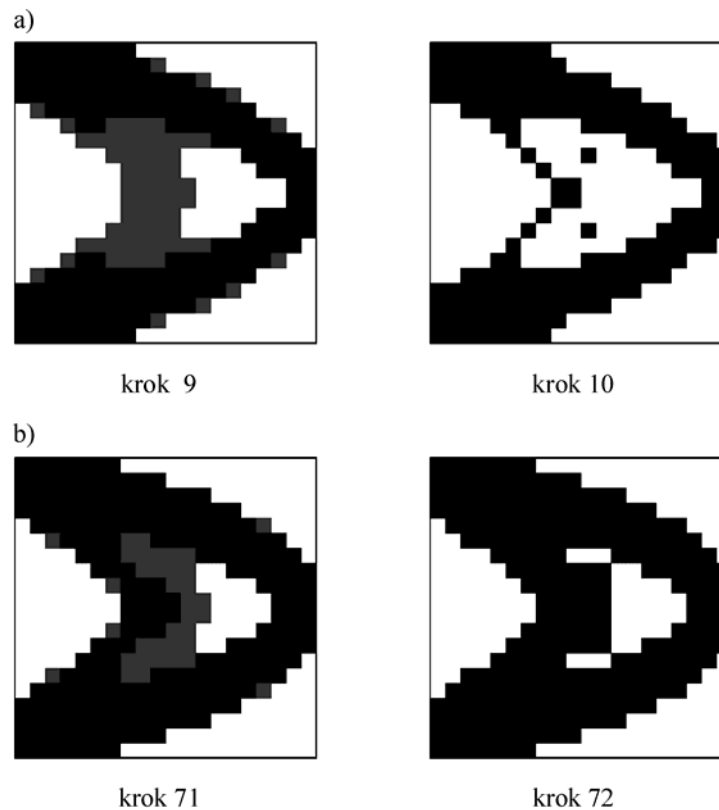
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
    1.00 1.00 1.00                1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
        1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
            1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                    1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                        1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                            1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                                1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
3.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
    1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
        1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
            1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                    1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                        1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                            1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
                                1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00

```

krok 9

Rys. 10.1. Topologie dla De_1 i TF_1

processingu do kroku numer 9. Widać to zresztą na rysunku: dla kroku numer 10 zbyt dużo materiału zostało usunięte z konstrukcji w trakcie procesu. Dla TF_2 sytuacja jest odmienna: dla kroku numer 71 różnica między masą ustaloną w wyniku procesu optymalizacji a wynikającą z funkcji degradacji wynosi 0,5%, a dla kroku numer 72 wynosi 2,0%. Różnice te są zazwyczaj niewielkie i są podobne do różnic dyskutowanych w rozdziale 4.3 dla omawianych tam przykładów numerycznych (gdzie czasami w końcowym etapie procesu masa dla kroku j bywa mniejsza niż dostępna masa).

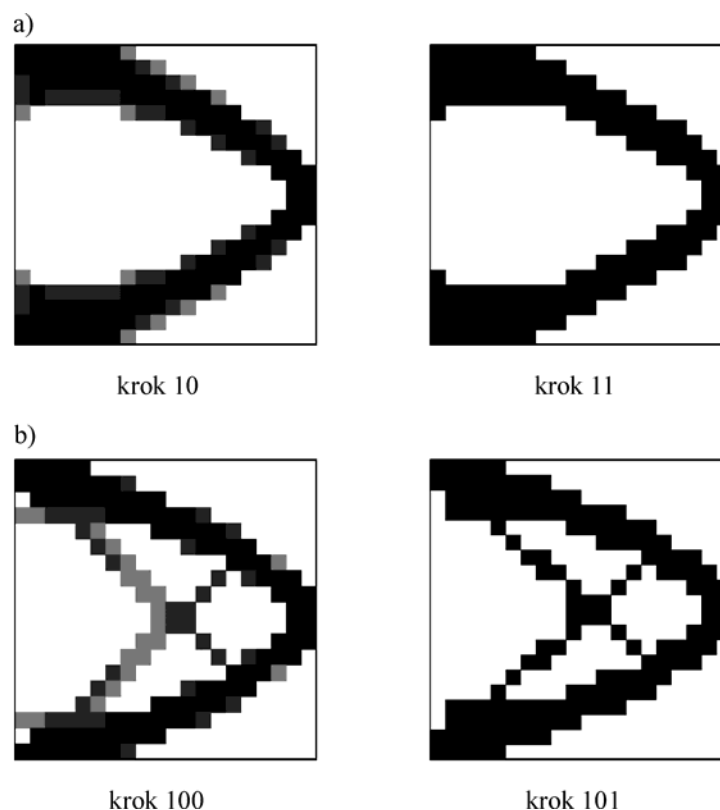


Rys. 10.3. Topologie dla De_3 i TF_1 (a) i dla De_4 i TF_2 (b)

Na rysunku 10.4 przedstawiono wyniki dla przypadku, gdy połowa materiału uległa już degradacji. Zastosowano następujące funkcje degradacji

$$De_5 = 0,5 - \frac{0,2j}{14}, \quad De_6 = 0,5 - \frac{0,02j}{14}. \quad (10.6)$$

Masa zmniejsza się tu od 50% do około 35%. W tym przypadku obserwuje się większą zgodność masy w konstrukcji po procesie z masą wyznaczoną z funkcji degradacji

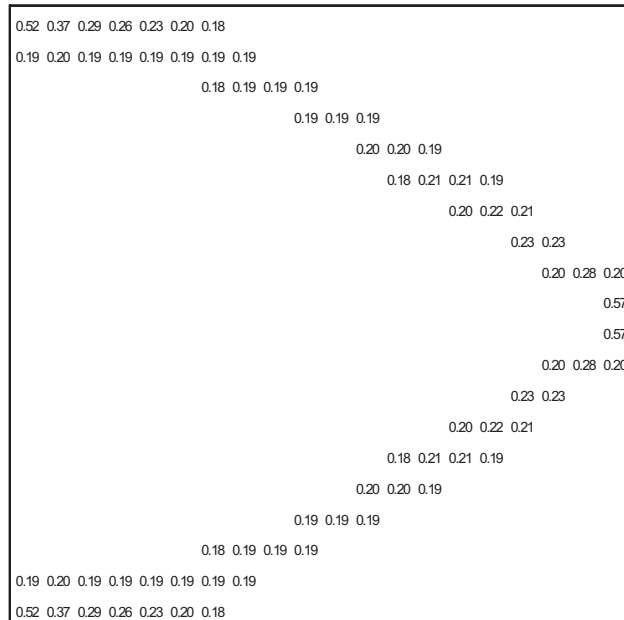
Rys. 10.4. Topologie dla De_5 i TF_1 (a) i dla De_6 i TF_2 (b)

(rys. 10.4a – odpowiednio dla lewego i prawego rysunku różnice masy wynoszą 0,15% i 0,78%, a dla rys. 10.4b – 0,1% i 0,5%). Jest niezmiernie ważne, aby dobrze dobrać funkcję degradacji, która powinna właściwie opisywać rzeczywisty proces zmniejszania się masy. Okazuje się przy tym, że zbyt szybki ubytek masy uniemożliwia wytworzenie optymalnej konstrukcji, co w sensie numerycznym oznacza brak zbieżności zadania.

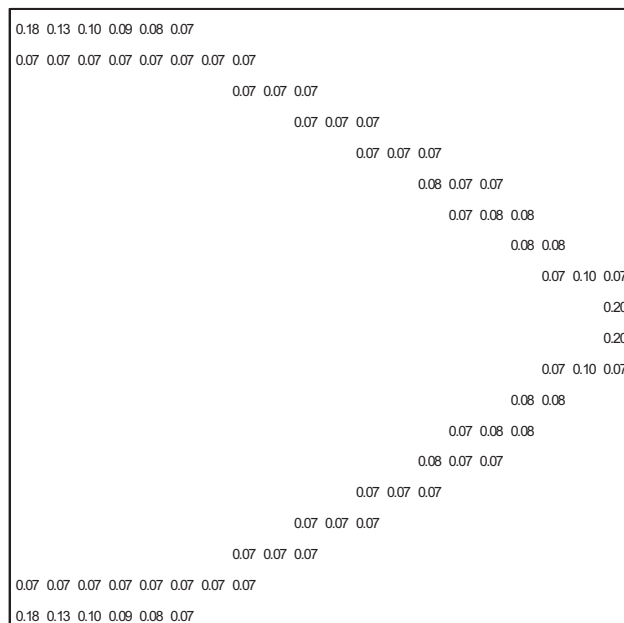
Na rysunkach 10.5 i 10.6 przedstawiono wyniki dla funkcji degradacji

$$De_7 = 0,5 - \frac{0,4j}{14}, \quad De_8 = 0,5 - \frac{0,04j}{14} \quad (10.7)$$

powstałych z (10.6) poprzez zmianę odpowiednio współczynnika z 0,2 na 0,4 i z 0,02 na 0,04. Na rysunkach 10.5 i 10.6 pokazano po dwie ostatnie topologie przed krokiem, gdy algorytm przestaje być zbieżny. Jak widać, wyraźnie brakuje masy, choć wartość sumy masy jest zgodna z wielkością uzyskaną z funkcji degradacji. Nie wystarcza to jednak na „zbudowanie” żądanej konstrukcji. Wartości gęstości względnych, poza

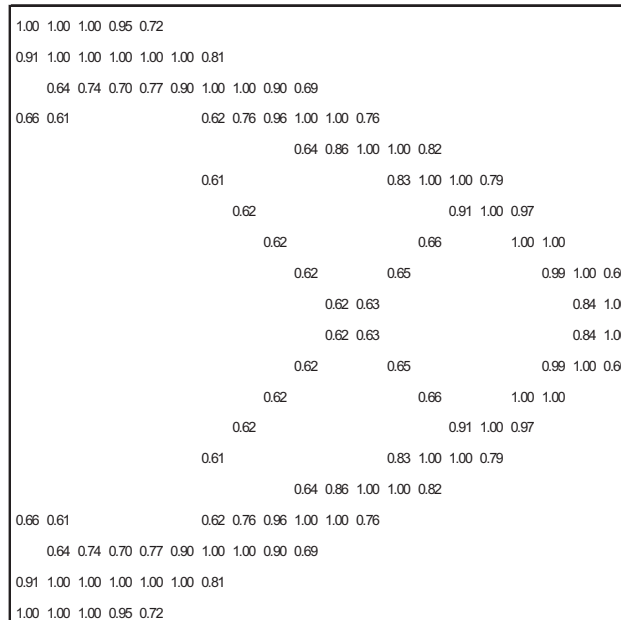


krok 16

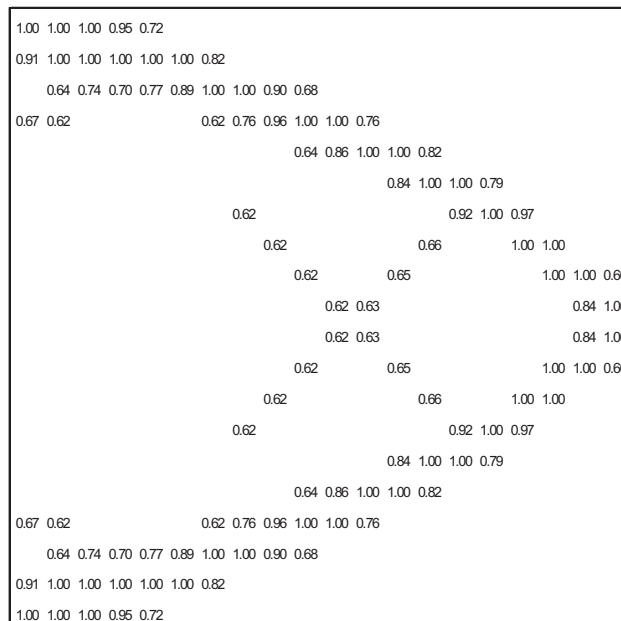


krok 17

Rys. 10.5. Topologie dla De_7 i TF_1



krok 92



krok 93

Rys. 10.6. Topologie dla De_3 i TF_2

nielicznymi wyjątkami, praktycznie nie przekraczają zbyt dużo wartości 0,2 (rys. 10.5). Przy zastosowaniu TF_2 (rys. 10.6) wartości gęstości względnych są relatywnie dość duże, jednak zbyt szybka degradacja powoduje rozbieżność zadania w następnych krokach. Należy dodać, że w tym przypadku (rys. 10.6) rozbieżność następuje już dla wartości funkcji degradacji równej około 0,2, podczas gdy dla rys. 10.5 wartość ta jest znacznie mniejsza i wynosi 0,01429 dla kroku numer 17, dla którego suma masy wynosi 5,71 (jest zgodna idealnie z wartością wynikającą z funkcji degradacji). Degradacja doszła już do takiego stanu, że masy jest zbyt mało, aby można było otrzymać rozkład zero-jedynkowy. Dla rysunku 10.6 suma masy wynosi 93,65 i jest prawie zgodna z wartością wynikającą z funkcji degradacji (93,71). Również i w tym przypadku, choć masa wynikająca z funkcji degradacji jest większa niż masa całkowita wynikająca z procesu optymalizacji, tej masy jest zbyt mało, aby uzyskać optymalną topologię o rozkładzie zero-jedynkowym.

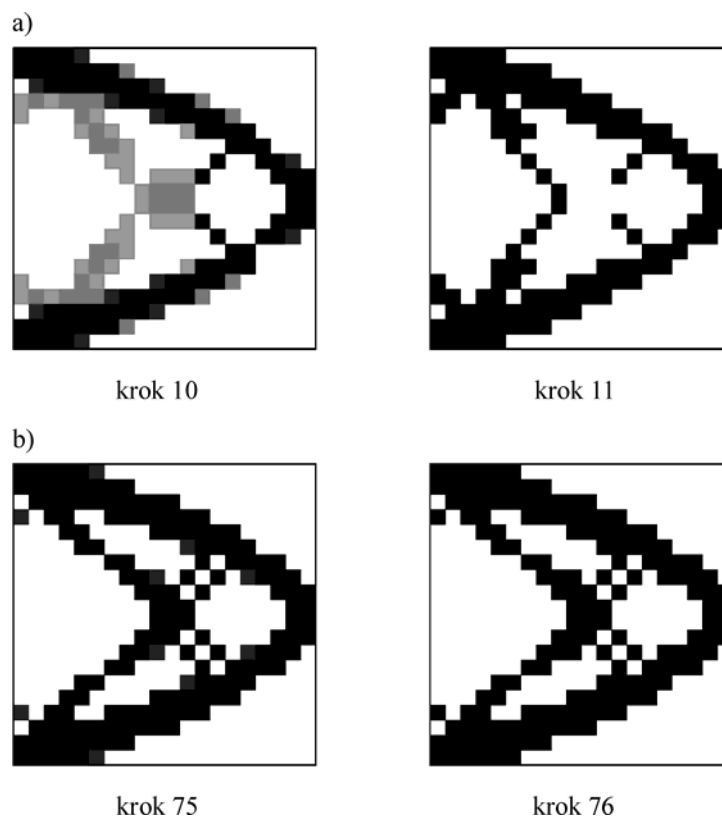
Uzyskane wyniki wskazują na to, że w pewnych przypadkach niemożliwe może być uzyskanie optymalnej topologii dla zbyt szybkiego procesu degradacji. Oznacza to, że po otrzymaniu przez system decyzyjny odpowiednich informacji o aktualnym lub spodziewanym tempie degradacji będzie on poszukiwał właściwych funkcji degradacji, i jeśli proces degradacji jest zbyt szybki, to system decyzyjny może podać informację o niemożności dalszej eksploatacji konstrukcji. Będzie to oznaczać konieczność podjęcia decyzji o wyłączeniu z eksploatacji właśnie tych elementów konstrukcji, które nie mogą już spełniać swoich zadań.

W dalszej części prowadzone rozważania będą uzupełnione o algorytm uwzględniający oprócz zmniejszającej się masy także zwiększające się obciążenie konstrukcji. W pokazanym poniżej przykładzie wykorzystano funkcje degradacji wyrażone wzorem (10.6). Zwiększanie się siły zrealizowano poprzez przyjęcie następujących funkcji zwiększających obciążenie w kolejnych krokach procesu:

$$P_1 = P_j, \quad P_2 = 0,1P_j, \quad (10.8)$$

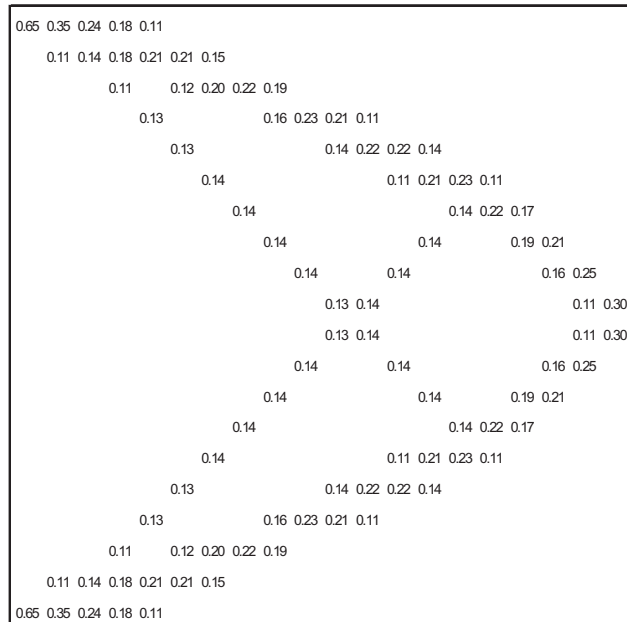
gdzie P_1 zastosowano dla TF_1 , a P_2 dla TF_2 . Dość słabą zbieżność wykazano na rys. 10.7a, gdzie dla kroku numer 10 należałoby użyć postprocessingu. Na początku procesu optymalizacji masa wynosiła 50,0% (De_5). Proces optymalizacji rozkładu zmniejszającej się masy doprowadził do zmniejszenia się całkowitej masy do 35,7% (krok 10) i 32,5% (krok 11). Dla kroku numer 11 masa wynikająca z funkcji degradacji wynosi 34,29%. Tak więc, pomimo że mamy do dyspozycji 1,4% masy więcej, proces optymalizacji nie potrafił tej masy wykorzystać. Gdybyśmy w procesie postprocessingu uzupełnili masę właśnie o nieco ponad 1,4%, to zapewnilibyśmy połączenie pomiędzy pewnymi elementami konstrukcji, którego brak jest widoczny na rys. 10.7a (krok 11). W dalszych rozważaniach posłużono się TF_2 i wyniki przedstawiono na rys. 10.7b, gdzie z kolei masa wynikająca z procesu degradacji wynosi (dla kroku numer 76) 39,14%. Masa całkowita po procesie optymalizacji wynosi około 38,4%.

Tak więc, zarówno warunek zgodności masy jest prawie spełniony, jak i topologia spełnia warunek ciągłości konstrukcji. Tym razem odpowiednia funkcja progowa i funkcja degradacji zapewniają otrzymanie optymalnej topologii. Rysunki 10.4 i 10.7 sporządzono dla takich samych funkcji progowych i funkcji degradacji. Różnica polega na tym, że dla topologii z rys. 10.7 siła ulegała zwiększaniu w trakcie procesu optymalizacji. Można zauważyć istotne różnice w rozłożeniu materiału dla kroków numer 10 i numer 11 na obu rysunkach. Na rysunku 10.7a topologia jest bardziej „wyrafinowana” w porównaniu do rys. 10.4a. Jeśli porównamy rysunki 10.4b i 10.7b, to zauważymy, że optymalną topologię dla rys. 10.7b otrzymujemy w mniejszej liczbie kroków, i choć topologie są podobne, topologia z rys. 10.7b ma nieco ponad 3% materiału więcej.

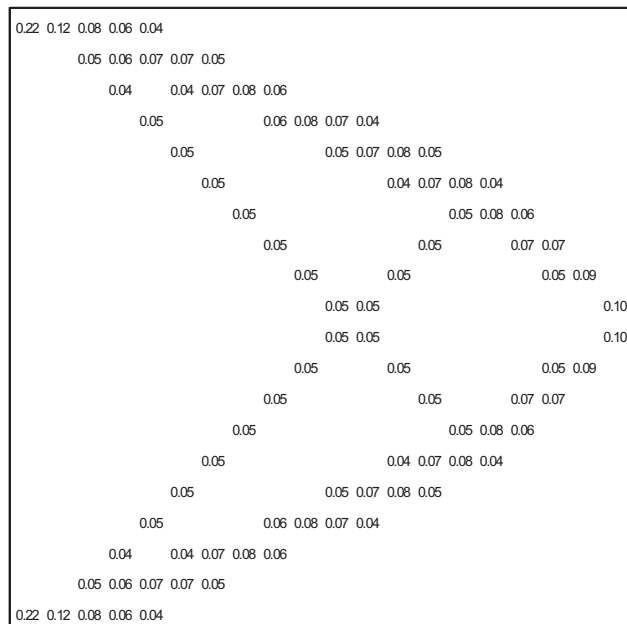


Rys. 10.7. Topologie dla przykładu z rys. 10.4 dla rosnącej siły P

Na rysunku 10.8 przedstawiono dla porównania topologie dla takiego samego przypadku jak na rys. 10.5, ale ze zwiększającą się siłą. Stwierdzono, że również i w tym przypadku topologie dla zwiększającej się siły są bardziej „wyrafinowane”.



krok 16



krok 17

Rys. 10.8. Topologie dla przykładu z rys. 10.5 dla rosnącej siły P

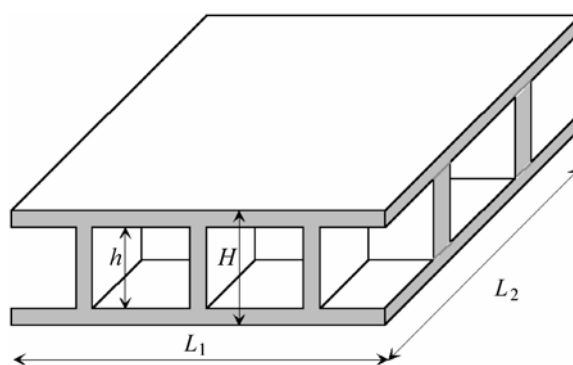
Można twierdzić, że jest to odpowiedź konstrukcji na coraz większą siłę. Ponadto mamy tutaj pełną zgodność wielkości masy (5,7). Zauważmy, że algorytm dysponuje na końcu procesu bardzo małą masą (gęstość większości elementów nie przekracza 0,25), jednak jej rozłożenie jest jak najbardziej prawidłowe. Fizycznie oznacza to, że materiał znajduje się w miejscach, gdzie powinien być, ma on jednak znacznie słabsze charakterystyki, co implikuje jego małą wytrzymałość. Gdyby uzupełnić materiał konstrukcji i pozostawić jego rozłożenie jak na rys. 10.8, otrzymalibyśmy optymalną topologię rozważanej konstrukcji podobną do takiej, jaką znamy choćby z rys. 10.4b.

Podsumowując należy stwierdzić, że zbudowany algorytm pozwala na otrzymanie optymalnej topologii dla konstrukcji o zmniejszającej się w trakcie procesu optymalizacji masie. Ponadto rozpatrzono przypadek równoczesnego zmniejszania się masy i zwiększania się obciążenia konstrukcji. Stwierdzono, że podstawowe znaczenie ma tu szybkość procesu degradacji konstrukcji. Okazało się, że w pewnych przypadkach zbyt szybko postępującej degradacji problem staje się rozbieżny. Potwierdzono, że duży wpływ na kształt i szybkość otrzymanej optymalnej topologii ma odpowiednio dobrana funkcja progowa. Przedstawiony algorytm może mieć zastosowanie do tzw. inteligentnych konstrukcji, w których istnieje możliwość dostosowywania jej kształtu do aktualnych wymagań związanych zarówno z kształtem konstrukcji, jak i z jej obciążeniem.

11. Optymalizacja topologii przekroju poprzecznego wewnętrznie uźebrowanej tarczy

11.1. Wprowadzenie oraz sformułowanie problemu

Problem rozważany będzie dla przekroju poprzecznego dźwigara powierzchniowego przykładowo pokazanego na rys. 11.1. Przedmiotem analizy przeprowadzonej w tym rozdziale będzie przekrój poprzeczny, dla którego sprawdzone będzie, czy na etapie projektowania w sposób optymalny została założona liczba źebier oraz czy źebra te zostały rozmieszczone optymalnie, a także analizowany będzie kształt tych źebier. Rozważany dźwigar powierzchniowy wewnętrznie uźebrowany składa się z dwóch cienkich zewnętrznych okładzin połączonych źebiami (rys. 11.1). Projektowanie przekroju poprzecznego takiego dźwigara wymaga określenia kształtu oraz przede wszystkim sposobu rozmieszczenia źebier. Podany algorytm został opracowany dla dźwigara uźebrowanego w jednym kierunku, w ogólnym zaś przypadku dźwigar może mieć źebra ortogonalne. Wtedy algorytm może być stosowany w każdym kie-



Rys. 11.1. Wewnętrznie uźebrowany dźwigar powierzchniowy

runku oddzielnie. Należy zaznaczyć, że zwykle rozłożenie żeber wynika z warunków wytrzymałościowych. Zadaniem naszym jest tylko potwierdzić lub zaprzeczyć, że rozłożone są one w sposób optymalny. Mając założone rozmieszczenie i zadaną dostępną masę sprawdzamy, czy dostępna masa nie jest mniejsza niż masa otrzymana dla optymalnego rozłożenia materiału. Jeżeli warunek jest spełniony, to uznajemy, że proces optymalizacji został zakończony. Jeśli jednak różnica między dostępną masą a masą z jaką mamy do czynienia na końcu procesu jest znacząca, to należy zmienić warunki brzegowe zadania. Zwykle odpowiednio dobrane parametry procesu, a przede wszystkim odpowiednia funkcja progowa, zapewniają, że na końcu procesu, zgodnie z założeniem, wspomniana różnica zanika.

Czasami jednak okazuje się, że otrzymujemy „niekompletną topologię”, co znaczy, że dostępna masa jest zbyt mała dla zaproponowanego rozkładu żeber, czyli ograniczenia nałożone na masę związane ze współczynnikiem redukcji masy α są zbyt silne. Wtedy trzeba albo dla danej niezmienniczej dostępnej masy zwiększyć proponowany rozstaw żeber, albo, jeśli ze względu na zbyt małą nośność konstrukcji przy zwiększeniu rozstawu żeber jest to niemożliwe, to należy zwiększyć odpowiednio dostępną masę. Wtedy rozpoczynamy ponownie proces optymalizacji. Tak samo jak w poprzednich rozdziałach, dążymy do biało-czarnego rozkładu gęstości w obszarze projektowym, a wyniki będą przedstawiane zarówno w formie liczbowej, jak i w kolorach białym, czarnym oraz czasami w odcieniach szarości.

Przyjęto następujący sposób aktualizacji modułu Younga materiału konstrukcji, który w tym przypadku pozwalał relatywnie szybko uzyskać zbieżność zadania:

$$E_{j+1}(\rho_j) = E \sum_{p=1}^3 \left(\left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^p \right). \quad (11.1)$$

Jako podstawową funkcję progową zastosowano

$$TF_1 = 0,1 j \alpha, \quad (11.2)$$

co nie wyklucza stosowania w dalszej części rozdziału innych, efektywniejszych dla danego przypadku funkcji progowych. W proponowanym algorytmie w pewnych małych obszarach (w pewnej liczbie elementów) zakłada się istnienie materiału o gęstości równej jedności. Zazwyczaj jest to kilka elementów stanowiących rdzeń, wokół którego w trakcie procesu gromadzi się materiał tworząc żebro. Wobec tego dostępna masa dla obszaru Ω (przy założeniu jednostkowej grubości i jednostkowych wymiarów elementu skończonego) jest w tym przypadku określona wzorem

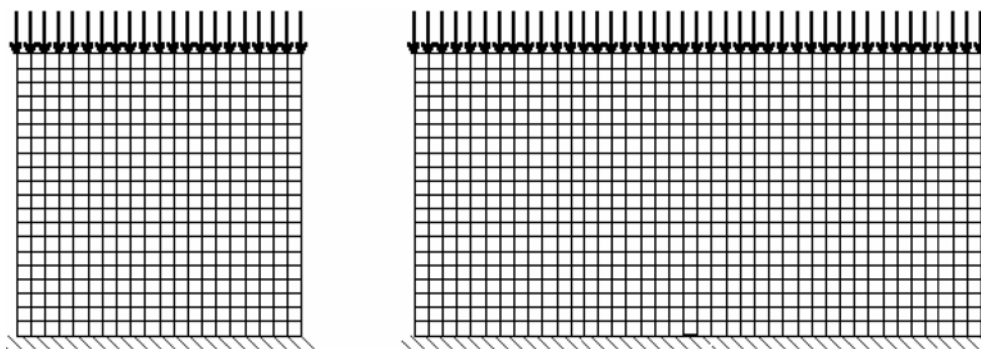
$$m_0 = \alpha \rho (TE - AE) + AE, \quad (11.3)$$

w którym TE jest całkowitą liczbą elementów skończonych w obszarze projektowym, a AE liczbą elementów, w których założono wstępnie gęstość równą jeden. Pozostałe

ograniczenia narzucone na masę konstrukcji określone w rozdziale trzecim są ważne również dla niniejszego postępowania.

11.2. Przykłady

Na rysunku 11.2 przedstawiono siatkę podziału metody elementów skończonych dla przekroju poprzecznego dźwigara. W wyniku działania procesu optymalizacji w tym przekroju poprzecznym wykształcą się żebra. Analizowano przekrój o siatce 20×20 , a następnie 20×40 elementów. Założono obciążenie równomiernie rozłożone na górnej powierzchni. Skupiono się na analizie rozkładu żeber i ich kształtu, i w związku z tym dolną powierzchnię (okładzinę) utwierdzono. Przedmiotem rozważań jest dystrybucja materiału wewnątrz obszaru projektowego. Współczynnik redukcji masy α przyjęto jako równy 0,3 i tylko na rysunku 11.5 przyjęto $\alpha = 0,5$, a na rysunkach 11.15 i 11.16 $\alpha = 0,15$ oraz $\alpha = 0,2$.



Rys. 11.2. Siatka podziału MES

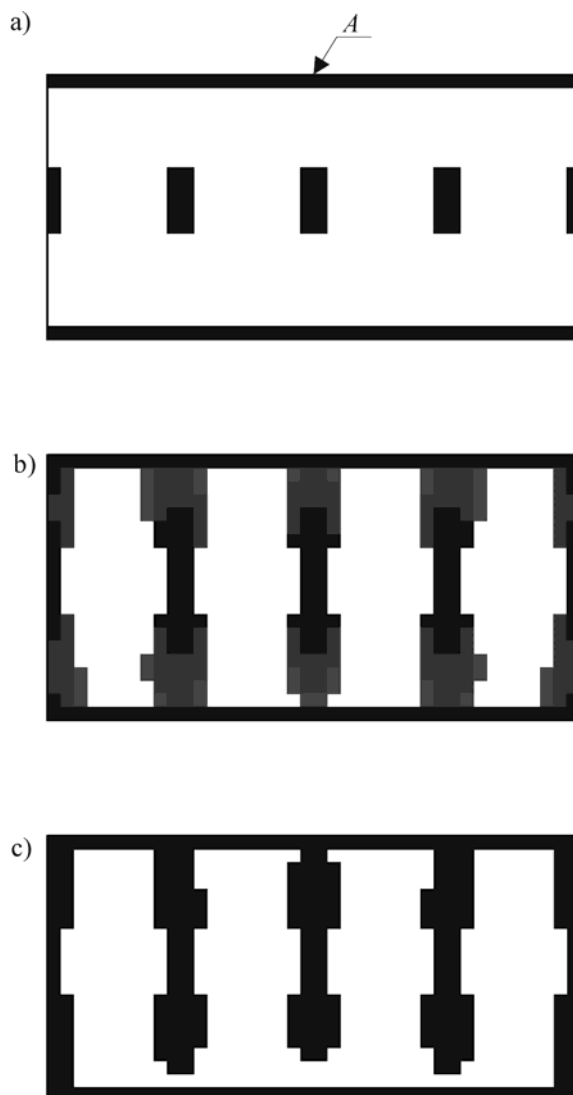
Zacznijmy od podziału 20×20 . Na rysunku 11.3a przedstawiono topologię początkową. Jak wspomniano, algorytm rozkłada materiał wykorzystując założone położenie żeber. W rozważanych zadaniach zakładamy zawsze pewną początkową topologię. Składają się na nią założone zewnętrzne okładziny, a także tzw. rdzenie kilku żeber, w tym rdzenie założone na lewym i prawym końcu obszaru projektowego oraz w tym przypadku dwa rdzenie żeber rozłożone w sposób niesymetryczny wewnątrz obszaru. Okładziny mają grubość jednego rzędu elementów skończonych, a więc odległość pomiędzy zewnętrznymi okładzinami to osiemnaście elementów, natomiast rdzeń składa się tylko z czterech elementów. Okazuje się, że taki rdzeń wystarcza do powstania żeber, jeśli spełniony jest warunek wystarczającej ilości dostępnej masy. Poza wymienionymi elementami skończonymi, w których założono gęstość równą jeden, w pozostałych gęstość po homogenizacji wynosi 0,3 (rys. 11.3a), co zaznaczono kolo-

nym kroku do takiego rozkładu, w którym występuje tylko gęstość równa jedności). Analizując rysunek 11.4a należy pamiętać, że dostępna masa wynikająca z początkowej, założonej topologii wynosi 159,2, a masa dla topologii przedstawionej na rysunku 11.4a wynosi 148,0. Oznacza to, że proces optymalizacji usunął pewną ilość materiału z konstrukcji. Postanowiono więc zmienić funkcję progową. Analiza funkcji różniących się współczynnikiem liczbowym doprowadziła do wniosku, że najlepsze rezultaty otrzymuje się zamieniając w równaniu (11.2) współczynnik 0,1 na 0,005. Wtedy

$$TF_{1_1} = 0,005 j \alpha. \quad (11.4)$$

Wyniki dla kroku numer 200 przedstawiono na rysunku 11.4b, a dla kroku numer 217 na rysunku 11.4c. Krok numer 200 jest ostatnim, dla którego mamy pełne połączenia żeber z warstwami zewnętrznymi, choć jak widać dość dużo elementów ma gęstość dużo mniejszą od jedności. Topologia ta jest niemal identyczna z topologią dla kroku numer 10 i TF_1 (rys. 11.3b). W kolejnych krokach (od kroku 200 w górę) coraz bardziej zbliżamy się do rozkładu zero-jedynkowego przedstawionego na rysunku 11.4c. Funkcja progowa nie spowodowała istotnej poprawy otrzymywanej topologii. Tak więc i tym razem, aby otrzymać optymalną topologię należałoby wykorzystać postprocessing, choć będzie to z pewnością łatwiejsze w sytuacji, gdy dysponujemy topologiami z rysunków 11.4b i 11.4c i możemy analizować wszystkie kroki między krokiem numer 200 i 217. Zauważmy, że dla TF_{1_1} zero-jedynkowy rozkład otrzymujemy dopiero w 217 krokach, a wykorzystując TF_1 w 11 krokach. Zawsze należy przeanalizować, czy wielokrotnie zwiększony czas obliczeń przy stosowaniu zmienionych funkcji progowych daje opłacalne zwiększenie ilości informacji niezbędnych do otrzymania optymalnej topologii. Różnice między topologiami z rysunków 11.4a i 11.4c są nieduże, a czas obliczeń jest prawie dwudziestokrotnie większy. Ponadto, co jest w tym przypadku bardzo ważne, wyraźnie widać, że uzupełnienie brakujących elementów w celu połączenia żeber z warstwami zewnętrznymi powoduje przekroczenie dostępnej masy, czyli dla proponowanej liczby żeber mamy zbyt mało materiału (dostępna masa jest zbyt mała). Jeśli więc założona liczba żeber jest konieczna ze względów wytrzymałościowych, to należy dodać materiału (zwiększyć dostępną masę) i ponownie przeprowadzić proces optymalizacji.

Wynik takiego działania przedstawiono na rysunku 11.5, gdzie zamieszczono topologie wyznaczone dla TF_1 odpowiednio w dziewięciu i dziesięciu krokach. Współczynnik redukcji masy α zwiększono z 0,3 do 0,5. Dla kroku numer 9 suma masy wynosi 228, czyli jest równa dostępnej masie, natomiast dla kroku numer 10, dla którego mamy rozkład zero-jedynkowy, suma masy wynosi 225. Brakuje tu tylko połączenia jednego żebra wewnętrznego z warstwami zewnętrznymi. W tym przypadku postprocessing uzupełni masę do 228, zapewniając brakujące połączenia. Dodatkowo może on usunąć materiał z tych elementów, w których wydaje się on zbędny. Warto zauważyć, że topologię, którą można uznać za optymalną dla danych parametrów wyjściowych uzyskano tylko w dziesięciu krokach optymalizacji.

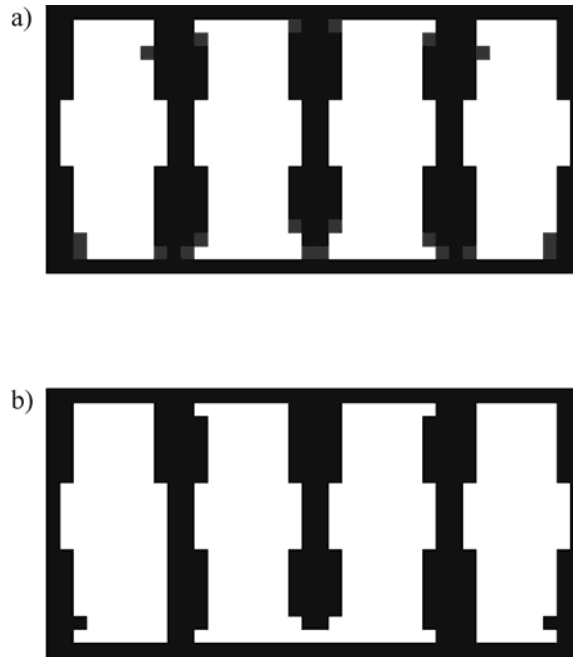


Rys. 11.7. Topologia początkowa (a), topologia dla kroku 11 (b) i kroku 12 (c)

Przeanalizujemy teraz przykłady dla podziału 20×40 . Przedstawione zostaną one przede wszystkim w notacji czarno-białej. Założono pięć żeber (rys. 11.7a). Suma dostępnej masy wynosi 324. Dla kroku numer 11 otrzymano topologię przedstawioną na rysunku 11.7b. Dwa odcienie szarości odpowiadają gęstościom z zakresu od 0,8 do 0,9 oraz od 0,9 do 1,0. Suma masy wynosi tutaj 323,87. Następny krok daje topologię, w której nie ma połączeń żeber z dolną warstwą zewnętrzną (rys. 11.7c), a suma masy wynosi 296. Do dostępnej masy brakuje 28 jednostek. Z analizy rysunku 11.7c wyni-

ka, że w ramach postprocessingu wystarczy dodać 8 jednostek, aby zapewnić połączenie żeber z warstwą dolną. Zdecydowano się jednak na zmianę funkcji progowej. Najlepszy wynik otrzymano dla

$$TF_2 = 0,0125 j \alpha. \quad (11.5)$$



Rys. 11.8. Topologie dla kroku 90 (a) i dla kroku 91 (b)

Dla kroku numer 90 otrzymano topologię pokazaną na rysunku 11.8a. Suma masy wynosi 324 i jest równa dostępnej masie. W dwudziestu elementach gęstość jest mniejsza od jedności (w zakresie od 0,9 do 1,0). Po uzupełnieniu do jedynki mamy przekroczoną dostępną masę o dwie jednostki. Oznacza to, że dwa elementy powinny być pozbawione masy. Następny rysunek wykonano dla kroku numer 91. Suma masy wynosi 320 i widać brak połączenia żebra środkowego z dolną warstwą zewnętrzną. Należy więc uzupełnić tę brakującą masę do wielkości dostępnej masy. Korzystamy przy tym z rysunku 11.8a. Widoczna jest pełna symetria przekroju poprzecznego. Omawiany przykład pokazuje (co często potwierdzone jest w literaturze), jak wielkie znaczenie w optymalizacji topologii ma doświadczenie projektanta w dobieraniu parametrów optymalizacji. Jak podkreśla wielu badaczy, pewne intuicje wynikają z doświadczenia opierającego się często na metodzie prób i błędów. W analizowanym przykładzie zmieniano jedynie funkcję progową, choć – jak to pokazano w poprzednich rozdziałach – pewne znaczenie ma sposób uaktualniania modułu Younga, a także

duże znaczenie ma odpowiednio dobrana funkcja relaksacyjna. Należy pamiętać, że pewien wpływ na rozwiązanie ma też wielkość dostępnej masy i liczba żeber. Każdy przypadek należy więc analizować niezależnie.

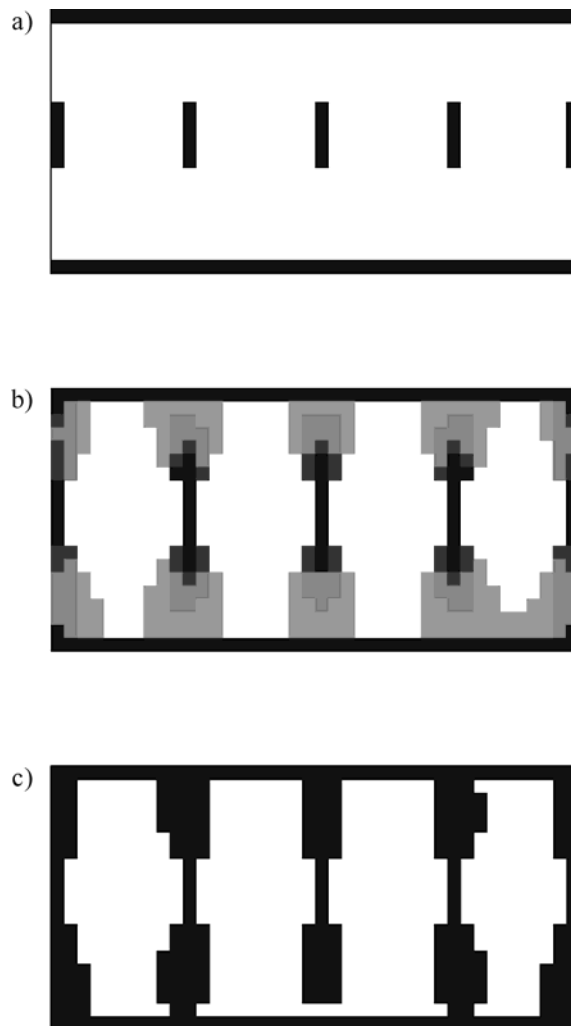
Tabela 11.1

| TF_1 | | TF_2 | |
|-----------|--------------------------|-----------|--------------------------|
| krok | ugięcie·10 ⁻⁶ | krok | ugięcie·10 ⁻⁶ |
| 8 | 8,81 | 87 | 3,35 |
| 9 | 7,71 | 88 | 3,31 |
| 10 | 5,37 | 89 | 3,25 |
| 11 | 3,97 | 90 | 3,02 |
| 12 | 3,26 | 91 | 3,23 |
| 13 | 2380 | 92 | 153 |

Zatrzymajmy się jeszcze na chwilę przy topologiach pokazanych na rysunkach 11.7 i 11.8. Okazuje się, że topologia z rysunku 11.7c spełnia warunek minimum podatności (minimum energii). Można to stwierdzić analizując ugięcia, które właśnie dla dwunastego kroku są najmniejsze (tabela 11.1). W tabeli 11.1 przedstawiono ugięcia punktu *A* zaznaczonego na rysunku 11.7a (leżącego w środku długości przekroju poprzecznego) dla kroków od numeru 8 do numeru 13 dla TF_1 i dla kroków od numeru 87 do numeru 92 dla TF_2 . Choć energia odkształcenia jest dla TF_1 dla kroku numer 12 najmniejsza, trudno uznać topologię dla kroku numer 12 za optymalną (brak połączeń żeber z warstwą dolną). Dlatego też poszukiwano takiej funkcji progowej, która by pozwoliła na otrzymanie topologii, w której nie występują braki w połączeniach. Użytkano to dla topologii z rysunku 11.8b i kroku numer 91, dla której to topologii przemieszczenie punktu *A* jest nieco mniejsze niż dla topologii z rysunku 11.7c i kroku numer 12.

Tabela 11.2

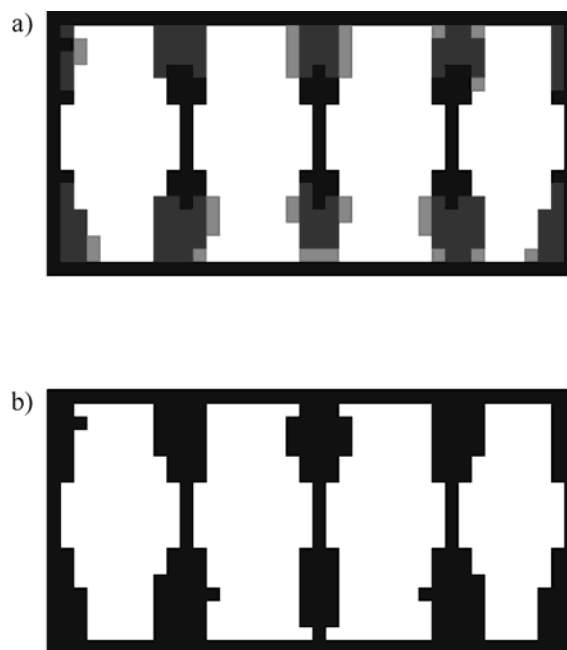
| TF_1 | | TF_2 | |
|-----------|--------------------------|-----------|--------------------------|
| krok | ugięcie·10 ⁻⁶ | krok | ugięcie·10 ⁻⁶ |
| 7 | 10,6 | 83 | 4,66 |
| 8 | 10,3 | 84 | 4,55 |
| 9 | 9,96 | 85 | 4,65 |
| 10 | 7,52 | 86 | 4,48 |
| 11 | 6,00 | 87 | 4,72 |
| 12 | 188 | 88 | 4,56 |
| 13 | 2120 | 89 | 156 |



Rys. 11.9. Topologia początkowa (a), topologia dla kroku 10 (b) i dla kroku 11 (c)

Kolejny rysunek (rys. 11.9) wykonano dla cieńszego niż na rysunku 11.7a rdzenia żeber wewnętrznych, które tym razem na szerokości składają się tylko z jednego elementu. Ostatnią topologią przedstawioną z udziałem odcieni szarości jest topologia dla kroku numer 10 (rys. 11.9b), która spełnia warunek równości masy dla rozpatrywanego kroku numer 10 z masą dostępną, wynoszącą 313,5. Topologia ta zawiera gęstości z zakresu 0,7 do 1,0, a więc pojawiły się tu gęstości mniejsze niż na rysunku 11.7b. W następnym kroku (rys. 11.9c) mamy już tylko biało-czarny rozkład, jednak o topologii nie spełniającej warunku ciągłości konstrukcji (żebro środkowe nie jest połączone z warstwą dolną). Ponieważ początkowa topologia (rys. 11.9a) nie jest sy-

metryczna, więc topologie przedstawione na rysunkach 11.9b i 11.9c też są niesymetryczne. Stosując tak jak poprzednio TF_2 , otrzymano rozkład biało-czarny w 86 krokach (rys. 11.10b). Suma masy wynosi tu 307,0, a więc jest o ponad sześć jednostek mniejsza od masy dostępnej. Dla rozkładu z odcieniami szarości dla kroku numer 85 (rys. 11.10a) mamy sumę masy równą 313,0. W tabeli 11.2 przedstawiono ugięcia punktu A dla TF_1 i TF_2 . Warunek minimum ugięcia wyraźnie wskazuje na topologię uzyskaną w kroku numer 86 jako na optymalną z punktu widzenia energetycznego. Podobnie jak na rysunku 11.5 i tu też udało się uzyskać optymalną topologię bez udziału postprocessingu.

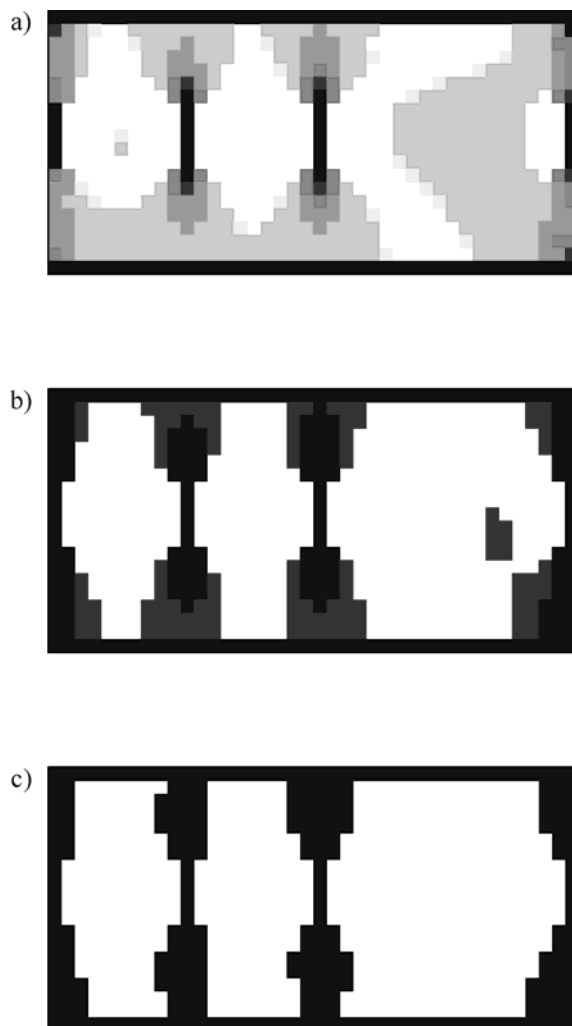


Rys. 11.10. Topologie dla TF_2 , dla kroku 85 (a) i kroku 86 (b)

Wykorzystywanie więcej niż jednej funkcji progowej podczas poszukiwania topologii optymalnej ma głęboki sens. Dzięki zastosowaniu TF_1 w małej liczbie kroków otrzymujemy topologię, którą można nazwać „prawie optymalną”. Ponadto mamy dokładne rozeznanie w rozłożeniu materiału dla rozkładu z udziałem odcieni szarości, co może być pomocne w sprawdzeniu topologii otrzymanej za pomocą innej funkcji progowej. Wszystkie posiadane informacje są zawsze także pomocne dla postprocessingu, jeśli jego użycie jest konieczne.

Ponieważ topologię początkową z rysunku 11.9a otrzymano usuwając z topologii z rysunku 11.7a materiał z żeber środkowych (lewą część każdego żebra), więc różnice między topologiami z rysunków 11.7c i 11.9c wynikają właśnie z różnic topologii

początkowych. Na rysunku 11.9c widać niesymetryczne przesunięcie żeber w prawą stronę.

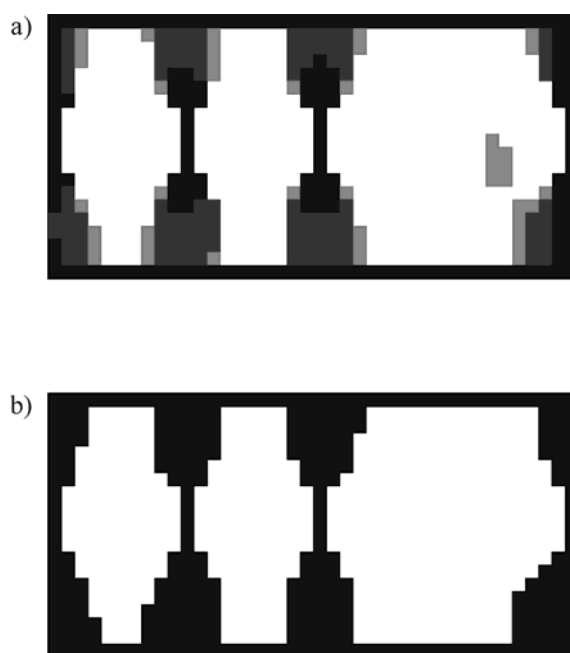


Rys. 11.11. Topologie dla kroku 9 (a), dla kroku 10 (b) i dla kroku 11 (c)

Na kolejnych rysunkach przedstawiono otrzymane topologie, gdy z topologii początkowej przedstawionej na rysunku 11.9a usunięto jedno żebro wewnętrzne z prawej strony (rys. 11.11 i 11.12) i dwa żebra z prawej strony (rys. 11.13 i 11.14).

Ponieważ usunięto jedno żebro, procedura optymalizacyjna używająca TF_1 umieszcza materiał w trakcie procesu w tej strefie, gdzie nie ma żebra (krok numer 9 – rysunek 11.11a). Jest to oczywiście w pewnym sensie uzasadnione z punktu widzenia

konstrukcyjnego. Na tym rysunku wartości gęstości są w zakresie od 0,4 do 1,0. Ponieważ jednak tego żebra w rzeczywistości nie ma, materiał jest następnie przemieszczony w kierunku pozostałych żeber w celu ich odpowiedniego wzmocnienia (krok numer 10 – rysunek 11.11b). Dodatkowo niewielka ilość materiału jest pozostawiona z prawej strony bez jakiegokolwiek połączenia z konstrukcją. W obu tych krokach suma masy jest równa masie dostępnej, wynoszącej 310. W biało-czarnym rozkładzie (krok 11, rys. 11.11c) następuje obniżenie sumy masy, która wynosi teraz 264 (zmniejszenie o około 8,4%). Otrzymana czarno-biała topologia spełnia warunek ciągłości połączeń. Ponadto prawe zewnętrzne żebro zbudowane jest z nieco większej ilości materiału niż to samo żebro na rys. 11.9c lub 11.10b.

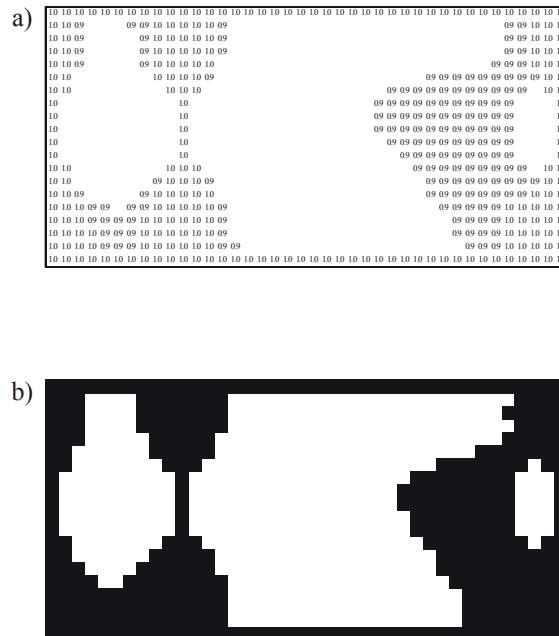


Rys. 11.12. Topologie dla kroku 80 (a) i dla kroku 81 (b)

Kolejny rysunek (rys.11.12) wykonano dla topologii uzyskanych za pomocą TF_2 . W kroku numer 80 masa wynosi 309,5. W kroku numer 81 (rozkład biało-czarny) otrzymujemy topologię pokazaną na rysunku 11.12b, dla której masa jest mniejsza o 4 jednostki, tzn. tylko o 1,3% od masy dostępnej, a prawe zewnętrzne żebro jest zbudowane z jeszcze większej ilości materiału niż ma to miejsce na rys. 11.11c.

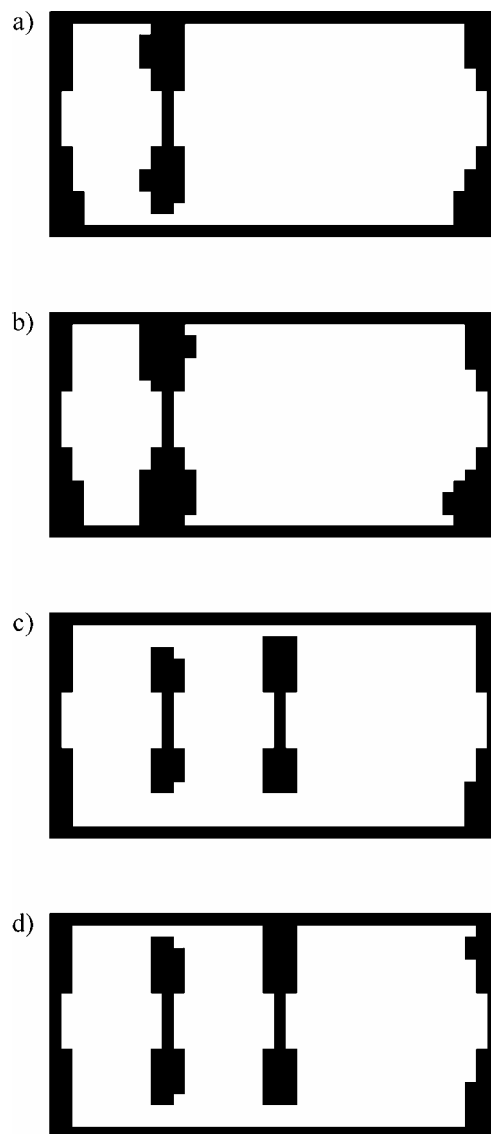
Pozostawiając tylko jedno żebro wewnętrzne otrzymujemy topologie jak na rysunku 11.13, gdzie dla kroku numer 9 topologia zawiera gęstości od 0,4 do 1,0 (rys. 11.13a). Jest ona podobna do topologii z rysunku 11.11a (budowa dodatkowego żebra z prawej strony). Tym razem dla rozkładu biało-czarnego (rys. 11.13b) przy prawym

jest jeszcze wykształcone. Następny krok to rozkład identyczny jak na rysunku 11.13b, czyli taki sam jak dla TF_1 o kroku numer 10. Omawiane żebro występujące do kroku numer 78 ma gęstości mieszczące się w zakresie od 0,83 do 1,00. Wydaje się, że brakuje materiału do utworzenia tego dodatkowego żebra. Wobec tego zwiększono współczynnik redukcji masy α do 0,4. Wykonano odpowiednie obliczenia i okazało się, że dla TF_1 otrzymano prawie takie same rezultaty jak na rysunku 11.13b. Następnie wykorzystano dla $\alpha = 0,4$ funkcję progową TF_2 . Pozwoliło to otrzymać dodatkowe żebro. Wyniki przedstawiono na rysunku 11.14. Dostępna masa wynosi teraz 377. Dla kroku numer 76 suma masy wynosi 376,84 (rys. 11.14a), a dla kroku numer 77 wynosi 359, czyli 4,5% mniej (rys.11.14b). W tym przypadku algorytm zbudował sam dodatkowe żebro z prawej strony przekroju, doprowadzając do jego quasi-symetrii. Jak widać, żebro to ma pewien specyficzny kształt i jest wydłużone w kierunku środka przekroju.



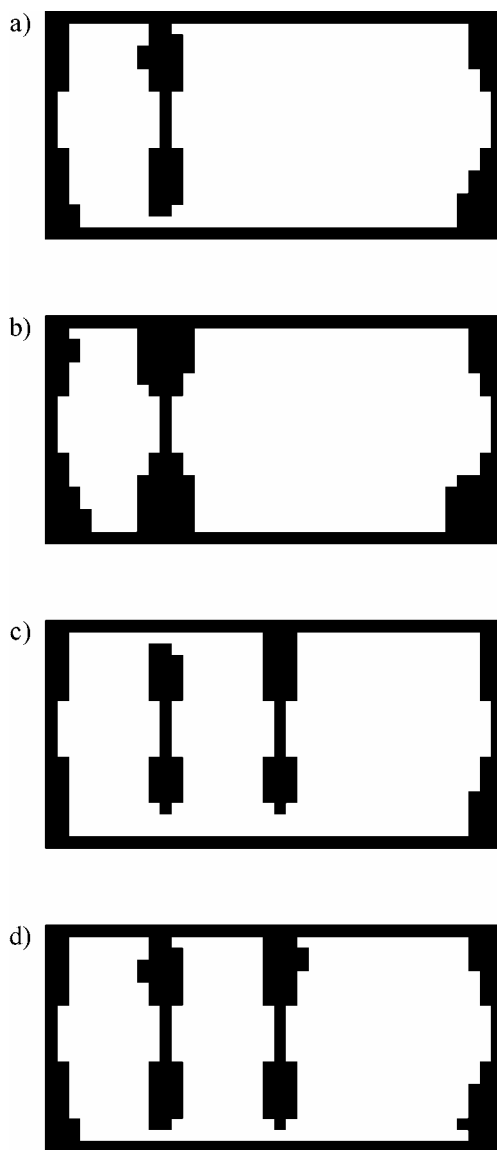
Rys. 11.14. Topologie dla $\alpha = 0,4$ i TF_2 , dla kroku 78 (a) i dla kroku 79 (b)

Wspomniano wcześniej, że jeśli współczynnik redukcji masy α jest zbyt mały, to otrzymanie optymalnej topologii może być utrudnione lub wręcz niemożliwe. Przykład dla biało-czarnego rozkładu z użyciem TF_1 zamieszczono na rysunku 11.15 i z użyciem TF_2 na rysunku 11.16. Na obu rysunkach zamieszczono rozwiązania dla jednego i dwóch żeber wewnętrznych, gdy $\alpha = 0,15$ oraz $\alpha = 0,2$. Na rysunkach 11.15a (krok numer 12) oraz 11.15c (krok numer 13) $\alpha = 0,15$ oraz dostępna masa jest



Rys. 11.15. Topologie dla TF_1 dla jednego żebra wewnętrznego i $\alpha = 0,15$ (a) oraz dla $\alpha = 0,2$ (b), dla dwóch żeber wewnętrznzych i $\alpha = 0,15$ (c) oraz dla $\alpha = 0,2$ (d)

równa masie całkowitej. Niestety, ograniczenie wynikające z wielkości współczynnika α jest zbyt duże i nie można otrzymać optymalnego rozkładu masy. Brakuje materiału niezbędnego do połączenia warstw zewnętrznych z żebrami. Na rysunku 11.15b otrzymano optymalną topologię dla $\alpha = 0,2$ (krok numer 11). Całkowita masa wynosi tu 221 (dostępna masa wynosi 236). Dla dwóch żeber wewnętrznzych (krok numer 12)



Rys. 11.16. Topologie dla TF_2 dla jednego żebra wewnętrznego i $\alpha = 0,15$ (a) oraz dla $\alpha = 0,2$ (b), dla dwóch żeber wewnętrznych i $\alpha = 0,15$ (c) oraz dla $\alpha = 0,2$ (d)

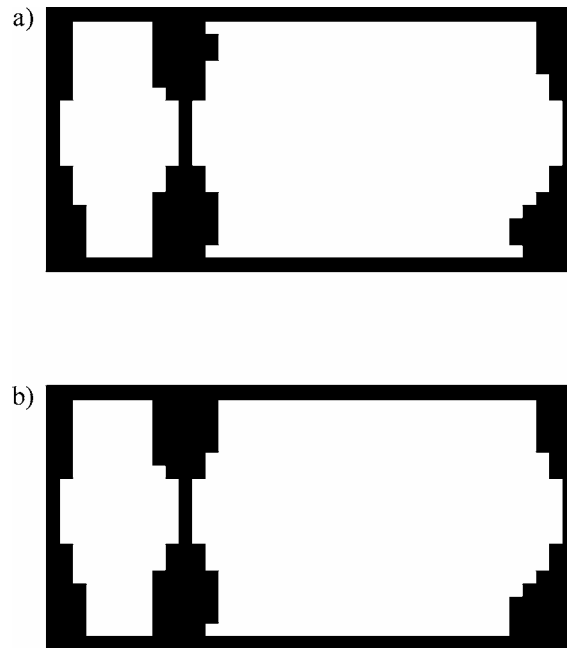
i $\alpha = 0,2$ (rys. 11.15d) nie można otrzymać topologii o żebrach połączonych z warstwami zewnętrznymi. Stosując funkcję progową TF_2 otrzymujemy w zasadzie bardzo podobne wyniki: dla jednego żebra wewnętrznego i $\alpha = 0,15$ – krok numer 98 (rys. 11.16a) – nie mamy połączenia żebra z warstwą dolną, choć brakuje do niego

mniej elementów niż na rysunku 11.15a. Już dla kroku numer 95 nie ma tego połączenia. Masa całkowita dla kroku numer 98 wynosi 197 i jest mniejsza o ponad 4 jednostki od masy dostępnej. Dla $\alpha = 0,2$ – krok numer 86 – (rys. 11.16b), podobnie jak na rysunku 11.15b, mamy pełne połączenia żeber przy masie całkowitej równej 231. Masa ta jest o 5 jednostek mniejsza od masy dostępnej. Dla dwóch żeber wewnętrznych i $\alpha = 0,15$ – krok numer 104 – (rys. 11.16.c) oraz dla $\alpha = 0,2$ – krok numer 93 (rys. 11.16d) – nadal nie otrzymano pełnych połączeń żeber, choć w porównaniu do topologii z rysunków 11.15.c i 11.15d widać już znaczący postęp. Okazuje się, że połączeń żeber nie ma już dla $\alpha = 0,15$ w kroku numer 90, kiedy mamy do czynienia z gęstościami z zakresu od 0,66 do 1,00 oraz dla $\alpha = 0,2$, gdzie w kroku numer 91 występują gęstości z zakresu od 0,86 do 1,00. W obu przypadkach suma masy jest mniejsza jedynie o 5 jednostek od dostępnej masy. Jak widać, nawet gdyby uzupełnić masę o te 5 jednostek, niemożliwe jest nadal wykonanie z nich uzupełnień połączeń. Tak więc, istotnie współczynnik redukcji masy jest zbyt mały i dostępna masa nie pozwala na powstanie dwóch żeber wewnętrznych. Zmiana funkcji progowej pozwoliła nieco poprawić otrzymane topologie, ale nie zmieniła ich w sposób zasadniczy.

Tabela 11.3

| TF_1 | | TF_2 | |
|--------|-------------------------|-----------|-------------------------|
| krok | ugięcie $\cdot 10^{-4}$ | krok | ugięcie $\cdot 10^{-4}$ |
| 11 | 1,03 | 86 | 9,63 |
| 12 | 1,27 | 87 | 9,59 |
| 13 | 5,28 | 88 | 11,7 |

Zajmijmy się teraz topologiami przedstawionymi na rysunkach 11.15b i 11.16b dla $\alpha = 0,2$. Są to jedyne topologie na tych rysunkach, dla których uzyskano pełne połączenia żeber z warstwami zewnętrznymi. Dostępna masa wynosiła w obu przypadkach 236, a suma masy dla topologii z rysunku 11.15b była równa 221, a dla topologii z rysunku 11.16b wynosiła 231. Ponieważ w obu przypadkach jest to ta sama konstrukcja, więc należałoby odpowiedzieć na pytanie, która z topologii jest optymalna. W tabeli 11.3 przedstawiono ugięcia punktu A dla kolejnych kroków, począwszy od kroków, dla których topologie omawiamy. Okazuje się, że minimalną wartość ugięcia otrzymujemy dla kroku numer 87, dla którego masa całkowita wynosi 224 (na rys. 11.16b przedstawiono krok numer 86). Tak więc masa dla kroku numer 87 jest tylko nieco większa niż dla kroku 11, gdzie wynosi 221. Jednak wartość ugięcia jest wyraźnie mniejsza, dzięki czemu energia odkształcenia będzie mniejsza, a więc topologia dla kroku numer 87 będzie topologią optymalną dla rozpatrywanego problemu. Przedstawiono ją na rysunku 11.17b. Dla porównania na rysunku 11.17a pokazano topologię dla kroku numer 11.



Rys. 11.17. Topologie dla $\alpha = 0,2$ i TF_1 , dla kroku 11 (a) i TF_2 dla kroku 87 (b)

Konkludując należy stwierdzić, że otrzymane topologie zależą od topologii początkowej, a więc od tego, jakie są wymagania konstrukcyjne dla danego przekroju, a także od wielkości współczynnika redukcji masy α . Optymalną topologię dla danego zadania można otrzymać na podstawie odpowiednio dobranych parametrów optymalizacji, w tym przede wszystkim przedstawionych tu funkcji progowych. Ostateczną odpowiedź na pytanie, która topologia jest najbardziej zbliżona do optymalnej można uzyskać analizując wielkości energii odkształcenia.

12. Optymalizacja topologii ciała o rosnącej masie i powiększającym się obszarze zajmowanym przez to ciało

12.1. Wprowadzenie oraz sformułowanie problemu

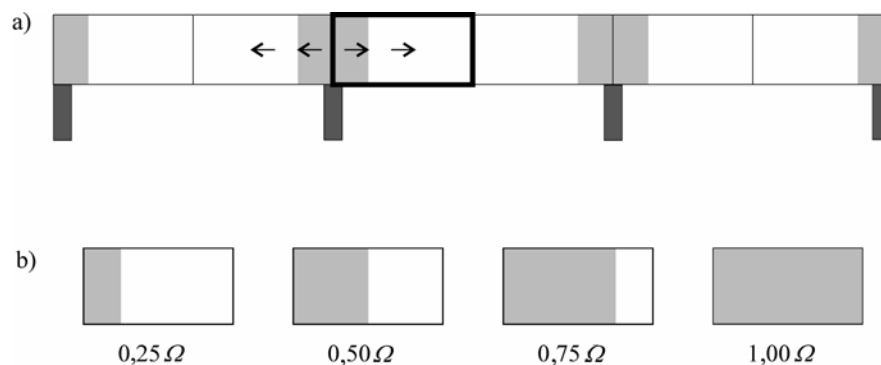
Rozpatrywany temat dotyczy dwóch rozłącznych zagadnień:

1. Rozważa się cały obszar projektowy. Po dokonaniu homogenizacji masa jest równomiernie rozłożona **w całym obszarze**. Poszukuje się topologii dla początkowo małej dostępnej masy, następnie masa ta rośnie, by na końcu osiągnąć swą docelową wartość. (np. rozpatrujemy przypadek, gdy współczynnik redukcji masy wynosi od 0,15 do 0,60). Przykładem może być konstrukcja pneumatyczna, która jest pompowana w trakcie użytkowania i zwiększające się ciśnienie może być odpowiednikiem wzrastającej masy. Wypełnianie powietrzem poszczególnych elementów jest kontrolowane na bieżąco. System decyzyjny podejmuje działania w celu ich napełnienia lub opróżnienia. Przypadek ten może być przykładem tzw. inteligentnych konstrukcji.

2. Rozważa się cały obszar projektowy. Po dokonaniu homogenizacji masa jest równomiernie rozłożona **tylko w pewnej części tego obszaru** zwanej podobszarem projektowym. Optymalizuje się topologię w tej części obszaru projektowego, w której zgromadzona była masa. Rozwiązuje się takie zadanie dla coraz bardziej zwiększającego się obszaru zajmowanego przez masę, przy czym współczynnik redukcji masy jest zawsze ten sam. Ciągłe jest to obszar zajmujący część obszaru projektowego. W granicy jest on równy obszarowi projektowemu. Powstaje w ten sposób zbiór topologii dla kolejnych rosnących podobszarów projektowych. Ponieważ celem naszym jest wyznaczenie optymalnej topologii ciała, które zajmuje coraz większy podobszar w ramach obszaru projektowego, więc następnym etapem jest poszukiwanie wspólnych elementów tych topologii, tak aby końcowa topologia uwzględniała topologie pośrednie.

Drugi z wymienionych problemów jest obszerniejszy, dlatego poświęcimy mu nieco więcej uwagi. Konstrukcja w kolejnych etapach montażu zajmuje coraz większy obszar oraz, w związku z tym, zwiększa całkowitą swą masę. Jako typowy przykład rozważanego zagadnienia można podać fazę montażu mostów wykonywanych z każdego filara jako dwuwspornikowe. Przesła budowane z sąsiednich podpór w końcowej

fazie montażu łączą się w węzłowie. Faza montażu jest z punktu widzenia statyki zupełnie innym zagadnieniem niż późniejsza faza eksploatacji. Dlatego też zwykle etap montażu wymaga osobnych analiz statycznych. Z punktu widzenia optymalizacji topologii przęsła wydaje się, że najlepszym rozwiązaniem byłoby, gdyby dobudowywane w kolejnych etapach montażu elementy były takie, że zawsze na każdym etapie taki układ byłby optymalny. Temu właśnie ma służyć przedstawiany algorytm, który ze względu na swój dyskretny, w pewnym sensie „prętowy”, charakter najlepiej nadaje się do konstrukcji mostów stalowych. Na rysunku 12.1a przedstawiono w sposób schematyczny most trójprzęsłowy. Z drugiego przęsła rozpoczęto montaż w dwóch kierunkach, przy czym na początku założono, że masa rozłożona jest tylko w szarej części przęsła. W dalszej części rozpatrywać będziemy (ze względu na symetrię) obszar projektowy połowy przęsła zaznaczony grubą linią. Strzałki pokazują równoczesny kierunek montażu od drugiej podpory na prawo i na lewo. Na rysunku 12.1b pokazano założone cztery etapy montażu. Dla każdego z etapów osobno zostaną wyznaczone optymalne topologie. Jeżeli elementy montażowe znajdujące się we wspólnych, kolejnych obszarach będą takie same, to uzyskamy oczekiwany efekt możliwości konstruowania kolejnych optymalnych etapów w procesie montażu. Równocześnie pamiętajmy, że algorytm dotyczy całego obszaru projektowego, choć obszar po homogenizacji jest w kolejnych etapach wypełniony masą w 25% swej objętości, idąc od lewej podpory. Następnie, w drugim etapie wypełnienie to wynosi 50%, w trzecim 75% i wreszcie w czwartym masą wypełniony jest cały obszar projektowy. Na każdym etapie gęstość materiału wypełniającego jest taka sama i równa się ρ_h .



Rys. 12.1. Schemat montażu mostu (a) i cztery fazy montażu (b)

Działanie zaproponowanego algorytmu pokazano na przykładach typowych. Po odpowiedniej modyfikacji może on być zastosowany do rozwiązania bardziej skomplikowanych problemów.

Poniżej przedstawione wielkości przyjmuje się takie same jak w poprzednich rozdziałach:

a) sposób aktualizacji modułu Younga materiału konstrukcji

$$E_{j+1}(\rho_j) = E \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^3, \quad (12.1)$$

b) funkcje progowe

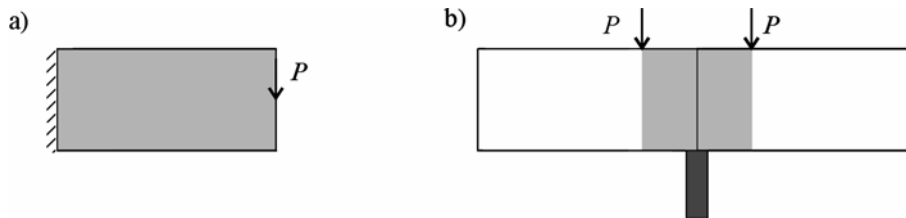
$$\begin{aligned} TF_1 &= 0,1 j \alpha, \\ TF_2 &= 0,0125 j \alpha, \end{aligned} \quad (12.2)$$

c) wielkość relaksacyjną przyjęto jako równą

$$\varepsilon = 10^{-7}. \quad (12.3)$$

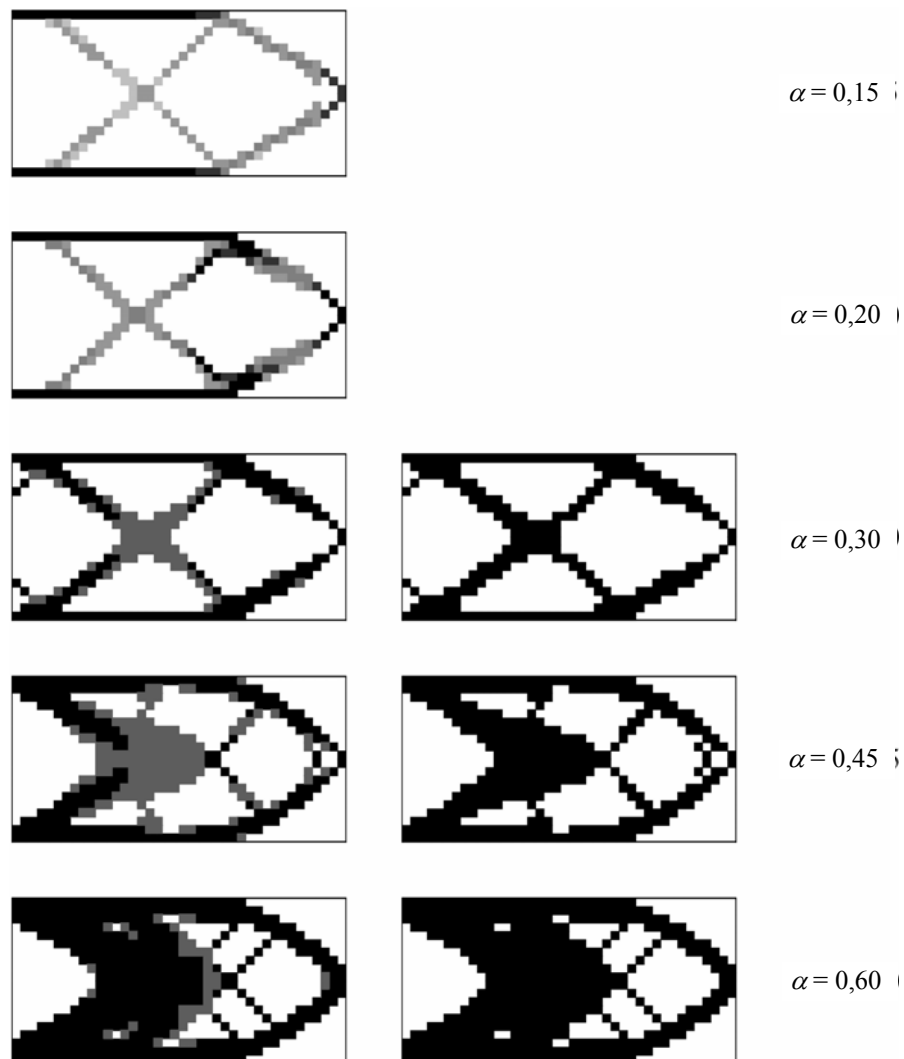
12.2. Przykłady

Ze względu na to, że rozważany problem wymaga gęstszej siatki podziału, wyniki będą przedstawione dla podziału 40×20 . Na rysunku 12.2a znajduje się schemat konstrukcji z obciążeniem dla zagadnienia pierwszego, a na rysunku 12.2b dla zagadnienia drugiego, przy czym obciążenie będzie przyłożone tak jak na rysunku u góry wspornika oraz w niektórych przypadkach w środku jego wysokości.



Rys. 12.2. Schemat dla zagadnienie pierwszego (a) i dla zagadnienia drugiego (b)

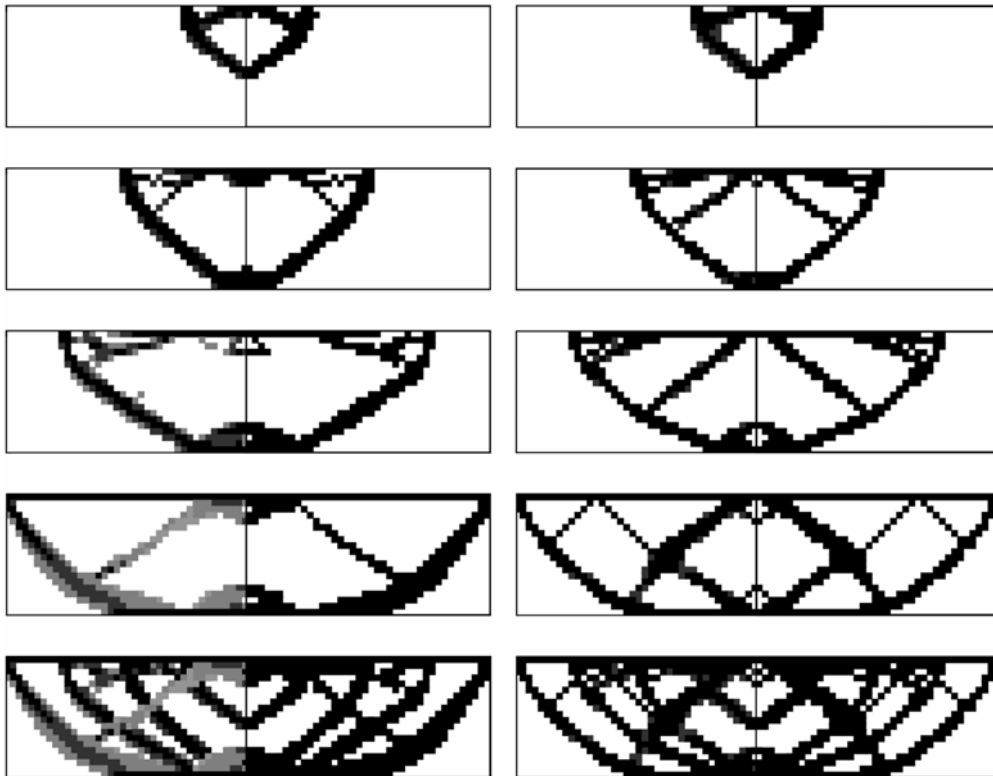
Topologie dla problemu pierwszego, gdy zadanie rozwiązywane jest dla ustalonego obszaru, w którym dostępna masa może się zmieniać w różnych fazach eksploatacji, przedstawiono na rysunku 12.3. Z prawej strony znajdują się topologie biało-czarne, a z lewej topologie z odcieniami szarości. Te ostatnie dotyczą ostatniego kroku, w którym nie ma jeszcze czarno-białego rozkładu. Dostępna masa rośnie dla przedstawionych topologii od góry w dół rysunku (współczynnik α w zakresie od 0,15 do 0,60). Rysunki sporządzono dla funkcji progowej TF_2 . Zauważmy, że dla $\alpha = 0,15$ oraz $\alpha = 0,2$ nie istnieją topologie dla rozkładu biało-czarnego. Oznacza to, że w tych przypadkach dysponujemy zbyt małą masą, która nie pozwala na otrzymanie optymalnej topologii. Z kolei topologie z odcieniami szarości dla danych wyżej α charak-



Rys. 12.3. Topologie dla rosnącej masy

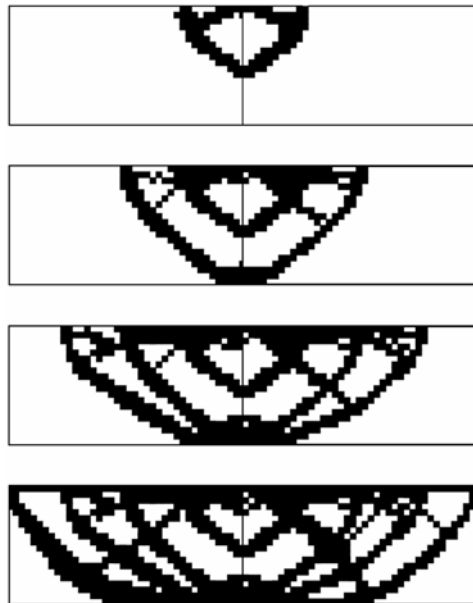
teryzują się bardzo jasnymi odcieniami, co potwierdza, iż brakuje materiału. Następne topologie są już bardziej skomplikowane. Jeśli dostępna masa rośnie, to dla rozkładów z odcieniami szarości zmniejsza się liczba elementów o gęstości między zerem a jedynką. Ponadto gęstości te są coraz bliższe liczbie jeden. Ponieważ, jak wspomniano, rozważany problem może być zastosowany do konstrukcji pneumatycznych, więc otrzymane topologie opisują rozkład ciśnienia względnego w poszczególnych punktach projektowych, które to punkty są utożsamiane z poszczególnymi elementami skończonymi. Otrzymujemy więc informację o rozkładzie ciśnienia przy jego wzro-

ście w kolejnych etapach. Oprócz wzrostu liczby elementów, w których ciśnienie rośnie, mamy pewną liczbę elementów, z których usuwa się gaz i przemieszcza się go do innych elementów. Konstrukcja powinna być tak zbudowana, aby było możliwe dostarczanie gazu do pojedynczego elementu i aby istniała pełna kontrola wypełnienia gazem całej konstrukcji. Wymaga to zastosowania odpowiedniego systemu analizującego sytuację i systemu decyzyjnego, w skład którego wchodzi przedstawiane procedury optymalizacji.

Rys. 12.4. Topologie dla TF_1 Rys. 12.5. Topologie dla TF_2

Obecnie przechodzimy do omówienia problemu drugiego. Początkowo zajmiemy się przypadkiem obciążenia pokazanego na rysunku 12.2b dla kolejnych czterech etapów z rysunku 12.1b. Zakładamy więc, że montaż przeszła odbędzie się w czterech etapach. Dla każdego z nich należy wyznaczyć optymalną topologię. Po jej wyznaczeniu będziemy analizowali wszystkie cztery topologie, w celu poszukiwania elementów wspólnych, i wreszcie pokażemy optymalną, końcową topologię składającą się z topologii dla poszczególnych etapów. Na potrzeby dalszych rozważań przyjęto, że współczynnik redukcji masy α wynosi 0,3. W końcowej fazie montażu współczynnik ten będzie prze-

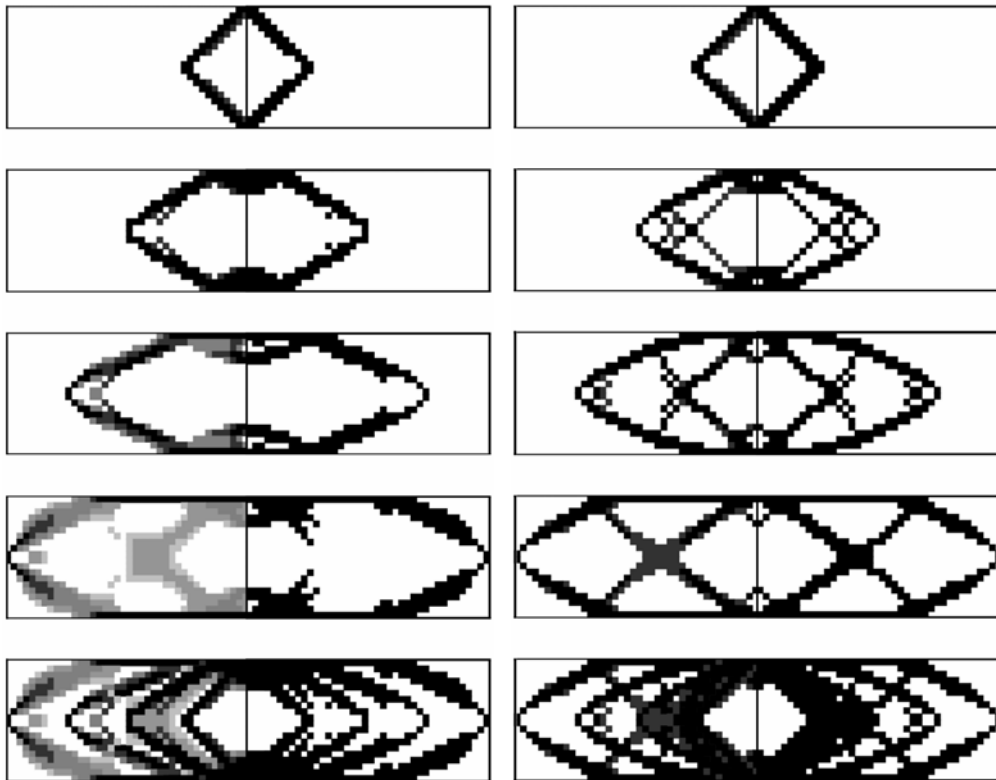
kroczone (ze względu na nałożenie się optymalnych topologii dla poszczególnych etapów). Projektowanie powinno odbywać się według następującego algorytmu. Najpierw przyjmuje się rzeczywisty współczynnik redukcji masy, np. $\alpha_{rz} = 0,4$, któremu odpowiada rzeczywista dostępna masa. Następnie na potrzeby wyznaczenia optymalnej topologii obniżamy go do poziomu np. $\alpha = 0,3$. Po wyznaczeniu optymalnej topologii dla wszystkich faz montażu razem wziętych (rys. 12.7 – dolny rysunek) sprawdzamy, czy całkowita masa nie przekracza rzeczywistej dostępnej masy. Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to albo eliminujemy masę przez zastosowanie postprocessingu, albo rozpoczynamy obliczenia od początku, przyjmując zamiast $\alpha = 0,3$ np. $\alpha = 0,25$.



Rys. 12.6. Sumy topologii dla TF_1 (z lewej) i dla TF_2 (z prawej)

Kolejne dwa rysunki przedstawione będą w następującej formie: rysunek 12.4 sporządzono z zastosowaniem funkcji progowej TF_1 , a rysunek 12.5 – funkcji progowej TF_2 . Na obu rysunkach z prawej strony mamy biało-czarne topologie, a z lewej topologie dla kroku poprzedzającego krok pokazany z prawej strony, krok z odcieniami szarości. Idąc od góry, na rysunkach pokazano kolejno topologie dla czterech rozpatrywanych faz montażu, gdy masa po homogenizacji zajmuje obszar odpowiednio $0,25\Omega$, $0,50\Omega$, $0,75\Omega$ i $1,00\Omega$. Najniżej narysowane topologie na obu rysunkach są w każdym przypadku sumami powyżej przedstawionych czterech topologii. Można więc powiedzieć, że prawa najniższa topologia na każdym z rozpatrywanych dwóch rysunków jest końcową optymalną topologią. Topologie dla rozkładu biało-czarnego przedstawione na rysunku 12.4 otrzymano w 48 krokach dla materiału zgromadzone-

go w $0,25\Omega$. Dla zwiększającego się obszaru liczba kroków malała i dla $1,00\Omega$ wynosiła już tylko 12. Odpowiadające liczby kroków dla rysunku 12.5 wynosiły 326 oraz 91. Zauważmy, że generalnie kształt topologii na obu rysunkach jest podobny. Różni się jedynie jednym ukośnym elementem położonym blisko prawego górnego narożnika (dla TF_2). Ponadto dla TF_1 „pręty” idące od podpory w kierunku miejsca przyłożenia siły są grubsze niż dla TF_2 , a „pręty” poprzeczne cieńsze niż otrzymane za pomocą TF_2 . Wykazane różnice mogą ulec zmniejszeniu lub likwidacji po zastosowaniu post-processingu. W tym przypadku topologie różnią się więc przede wszystkim liczbą kroków, w jakich otrzymuje się optymalną topologię. Ponieważ, jak wykazano, różnice kształtu są niezbyt istotne, można więc bez straty dokładności obliczeń stosować funkcję progową TF_1 i otrzymać optymalną topologię w małej liczbie kroków, a następnie zastosować postprocessing.

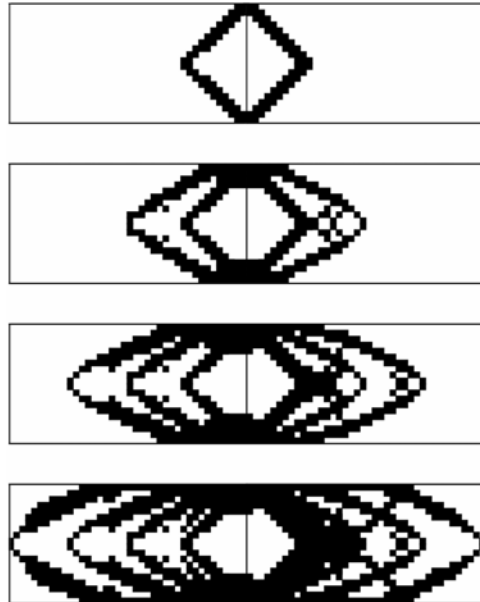
Rys. 12.7. Topologie dla TF_1 Rys. 12.8. Topologie dla TF_2

Rysunek 12.6 przedstawia z lewej strony topologie dla TF_1 , a z prawej dla TF_2 dla biało-czarnego rozkładu. Celem wykonania tego rysunku jest pokazanie kolejnych etapów montażu. Najwyższy rysunek przedstawia topologie dla materiału zgromadzo-

nego w $0,25\Omega$, tak samo jak to pokazano po prawej stronie rys. 12.4 i rys. 12.5. Na drugim rysunku, idąc od góry, mamy razem nałożone na siebie topologie dla materiału zgromadzonego w $0,25\Omega$ i w $0,50\Omega$. Na trzecim rysunku są pokazane razem trzy kolejne topologie dla $0,25\Omega$, $0,50\Omega$ i $0,75\Omega$. Wreszcie na czwartym wszystkie cztery. Można więc prześledzić kolejne fazy montażu i wyodrębnić kolejno dostawiane elementy prętowe w każdej z czterech faz montażu.

Następne trzy rysunki wykonano w takim samym układzie jak trzy poprzednie, z tą różnicą, że tym razem siła przyłożona jest do środka wysokości wspornika. Rysunek 12.7 odpowiada rysunkowi 12.4, a rysunek 12.8 odpowiada rysunkowi 12.5. Zauważmy, że dla funkcji progowej TF_1 topologia biało-czarna, szczególnie dla całego obszaru, nie jest optymalna. Odpowiadająca jej topologia z odcieniami szarości znajdująca się po lewej stronie jest bliższa optymalnej (masa w formie krzyża umieszczona w środkowej części o gęstościach zbliżonych do jedynki). Topologie dla rozkładu biało-czarnego przedstawione na rysunku 12.7 otrzymano w 51 krokach dla materiału zgromadzonego w $0,25\Omega$ i w 10 krokach dla $1,00\Omega$. Otrzymane topologie nie są zbyt rozbudowane i nie wiadomo, jakie powinny być powiązania pomiędzy poszczególnymi elementami konstrukcji. W tym przypadku istotną rolę gra postprocessing. Dla rysunku 12.8 odpowiadające liczby kroków, w jakich otrzymano biało-czarny rozkład, wynosiły 301 oraz 94. Na rysunku 12.9, który odpowiada rysunkowi 12.6 wyraźnie widać, że należy zastosować postprocessing i to z dwóch powodów: po pierwsze, ponieważ brakuje ukośnych połączeń pomiędzy elementami (szczególnie dla TF_1 , a dla TF_2 tylko jednego połączenia w okolicy miejsca przyłożenia siły) oraz, po drugie, ponieważ dla TF_2 należałoby usunąć pewną masę z obszaru położonego w okolicy jednej czwartej długości obszaru projektowego. Dużą pomocą mógłby być rysunek 12.10 wykonany dla TF_1 , gdzie pod sumę trzech biało-czarnych topologii podłożono topologię dla ostatniego kroku, w którym występują jeszcze odcienie szarości, wykonaną dla $1,00\Omega$. W ten sposób uzyskujemy informację o tym, gdzie powinny znaleźć się połączenia pomiędzy poszczególnymi elementami. Niestety, wynikiem tych działań nie będzie optymalna topologia. W tym przypadku otrzymamy ją korzystając z wyników obliczeń dla TF_2 umieszczonych na rysunku 12.9. Topologię uzyskaną w wyniku działania pewnego rodzaju postprocessingu przedstawiono na rys. 12.11. Zbudowano ją w sposób następujący: do trzeciego od góry prawego rysunku obejmującego sumę topologii dla trzech czwartych obszaru projektowego dodamy zmodyfikowaną topologię dla etapu czwartego (rys. 12.8). Ze względu na to, że w etapie czwartym w obszarze od $0,25\Omega$ do $0,5\Omega$ idąc od podpory, jest materiał w tych miejscach, w których w etapach pierwszym, drugim i trzecim materiał nie występuje, postanowiono usunąć materiał z tego obszaru (od kolumny 5 do 18 w strefie środkowej). Ponadto dodano materiał w kształcie dwóch ukośnych prętów prawie przy końcu wspornika. Otrzymano w ten sposób optymalną topologię dla obciążenia przyłożonego w środku wysokości wspornika. Rozumiana jest ona następująco: otrzymano topologię budowaną w czterech etapach i w każdym z nich jest ona optymalna, choć w tym przypadku dla pierwszego obszaru została nieco zmodyfikowana. Kon-

struowanie kolejnych etapów polega na dokładaniu elementów powodujących zajmowanie przez konstrukcję coraz większego procentu obszaru projektowego.



Rys. 12.9. Sumy topologii dla TF_1 (z lewej) i dla TF_2 (z prawej)



Rys. 12.10. Sumy topologii dla TF_1



Rys. 12.11. Topologia optymalna

Z przeprowadzonej analizy wynika, że w przypadku przyłożenia siły do górnej krawędzi (rys. 12.2b) otrzymujemy optymalną topologię w wyniku bezpośrednich obliczeń, natomiast dla siły przyłożonej w środku wysokości wspornika – w wyniku pewnych działań, będących elementami postprocessingu.

Stwierdzono, że dzięki zastosowanemu algorytmowi możliwe jest budowanie konstrukcji, która na każdym etapie montażu jest konstrukcją optymalną.

13. Podsumowanie

Niniejsza praca zawiera rozważania dotyczące optymalizacji topologii kontinuum materialnego. Stosuje się tu opis materiałowy, dzięki któremu rozwiązanie zadania optymalizacji topologii sprowadza się do udzielenia odpowiedzi na pytanie o sposób rozmieszczenia materiału w ściśle określonym obszarze projektowym, przeznaczonym do wykonania danej konstrukcji, tak aby przy zadanych warunkach brzegowych i dla danego obciążenia kształt konstrukcji był optymalny.

W pracy wykorzystano podejście wariacyjne, dzięki któremu sformułowano:

1. Problem brzegowy dla trójwymiarowego kontinuum materialnego. Otrzymano komplet równań określających rozpatrywane zagadnienie (związki geometryczne, fizyczne, równania równowagi, przemieszczeniowe lub naprężeniowe warunki brzegowe oraz kinematyczne lub statyczne warunki na granicach podobszarów znajdujących się wewnątrz obszaru projektowego).
2. Problem optymalizacji topologii kontinuum materialnego. Minimalizowano funkcjonal celu, jakim była podatność konstrukcji przy ograniczeniach nałożonych na masę ciała. Zastosowano homogenizację dla początkowego, dowolnego rozmieszczenia materiału w obszarze projektowym. Następnie posłużono się podejściem relaksacyjnym, dzięki czemu funkcjonal celu został odpowiednio uzupełniony i w ten sposób sformułowano w jednolitym zapisie wariacyjnie postawiony problem optymalizacji topologii kontinuum materialnego.

Zastosowany model homogenizacji, stosujący jednorodny materiał o rozrzedzonej strukturze, pozwala otrzymywać w trakcie procesu optymalizacji materiał o gęstościach pośrednich (w zakresie $(0,1]$).

W zastosowanym tu opisie materiałowym posługujemy się pojęciem punktu materialnego, którego własności ulegają zmianom w trakcie procesu optymalizacji. Wobec tego, najbardziej naturalną metodą rozwiązania numerycznego zadania staje się metoda elementów skończonych. Odpowiednio dobrana, w sensie gęstości, siatka podziału na elementy skończone pozwala rozpatrywać poszczególne elementy jako wzajemnie odpowiednie z punktami materialnymi.

Aby osiągnąć założony cel, którym było uzyskanie optymalnej topologii ciała, opracowano odpowiedni algorytm optymalizacji i na jego podstawie zbudowano wła-

sny program komputerowy. Pozwala on na otrzymanie optymalnej topologii w stosunkowo małej liczbie kroków procesu optymalizacji, mniejszej niż w literaturze. Przeprowadzono wiele testów pozwalających potwierdzić dużą efektywność opracowanego algorytmu. Stwierdzono zgodność otrzymanych topologii z topologiami otrzymanymi przez innych autorów w porównywalnym zakresie dotyczącym charakteru topologii. Z powodu braku szczegółowych danych dotyczących parametrów optymalizacji dla przykładów literaturowych, porównania wykonywane przy tych samych gęstościach siatek podziału MES dotyczą charakteru topologii. Przeprowadzono również rozpoznanie parametrów ścieżki optymalizacji mających wpływ na szybkość i jakość otrzymanej topologii. Rozważano wpływ:

- a) zastosowanych funkcji progowych,
- b) zastosowanych funkcji relaksacyjnych,
- c) przyjętego modelu aktualizacji modułu Younga dla poszczególnych punktów materialnych podczas procesu optymalizacji.

Przeprowadzona analiza pozwoliła na dokonanie oceny wpływu wymienionych parametrów na otrzymaną topologię. Szczegółowe wnioski zamieszczone są w rozdziałach piątym, szóstym i siódmym. Warto tu podkreślić, że dzięki właściwie zdefiniowanej funkcji progowej mamy możliwość otrzymania optymalnej topologii w bardzo małej liczbie kroków procesu optymalizacji. Wpływ mają tu zarówno numer kroku procesu optymalizacji (w odpowiedniej potędze), jak i współczynnik redukcji masy. W przypadku analizowania funkcji relaksacji stwierdzono, że powinna być ona takiej postaci, aby optymalna topologia tworzyła się wtedy, gdy wartość funkcji jest w pewnym ustalonym zakresie. Dzięki analizie uzyskano potwierdzenie pewnych literaturowych propozycji co do wartości wielkości relaksacyjnej. W przypadku badania wpływu na otrzymaną topologię różnych funkcji uaktualniających moduł Younga stwierdzono, że wpływ ten jest bardzo mały, jeśli bierzemy pod uwagę szybkość, z jaką otrzymujemy rozwiązanie zadania. Istotne jest jednak, że wpływ ten jest duży, jeśli chodzi o charakter otrzymanych topologii. Potwierdzają się tutaj również pewne literaturowe propozycje co do wyboru funkcji uaktualniającej. Należy dodać, że w literaturze przedstawione powyżej analizy otrzymanych rozwiązań w zależności od przyjętych parametrów nie występują, a parametry ścieżki optymalizacji są przyjmowane różnie i arbitralnie.

Następnie zanalizowano otrzymane topologie w poszukiwaniu optymalnej topologii ciała. Poszukiwano minimum zastosowanego funkcjonału z uwzględnieniem różnych parametrów ścieżki optymalizacji. Dzięki temu ostatecznie otrzymano optymalną topologię rozpatrywanego ciała. Do tej analizy wykorzystano materiał z rozdziałów piątego, szóstego i siódmego. W jej wyniku otrzymano wskazówki dotyczące właściwego doboru parametrów ścieżki optymalizacji.

Mając odpowiedni aparat obliczeniowy rozwiązano pewne wybrane problemy optymalizacji konstrukcji stosowanych w budownictwie i sprowadzające się do wyznaczenia optymalnej topologii:

- 1) ciała z założonymi otworami,
- 2) ciała, którego masa się zmniejsza, a dodatkowo może nastąpić równocześnie zwiększenie się obciążenia,
- 3) przekroju poprzecznego wewnątrznie uźebrowanej tarczy,
- 4) ciała, którego masa i zajmowany przez to ciało obszar powiększa się.

Wymienione w punkcie drugim i czwartym topologie znajdują zastosowanie również przy projektowaniu tzw. inteligentnych konstrukcji, a przedstawiony algorytm stanowi element części analityczno-decyzyjnej systemu kontrolującego pracę takich konstrukcji. Poza tym, dzięki wyznaczeniu topologii z punktu czwartego, można projektować optymalnie konstrukcję w każdej fazie montażu, a także projektować konstrukcję o rosnącej dostępnej masie. Rozwiązanie problemu wymienionego w punkcie trzecim pozwoliło na weryfikację projektowania ze względu na optymalne rozmieszczenie żeber w przekroju poprzecznym.

Literatura

Gwiazdką oznaczono pozycje znane z cytowań w innych pracach.

- [1] Allaire G., *Shape optimization by the homogenized method*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [2] Allaire G., Belhachmi Z., Jouve F., *The homogenization method for topology and shape optimization. Single and multiple load case*, Revue Européenne des Éléments Finis, Vol. 5, No. 5–6/1996, s. 649–672, 1996.
- [3] Allaire G., Bonnetier E., Francfort G., Jouve F., *Shape optimization by the homogenization method*, Numerische Mathematik, Vol. 76, s. 27–68, 1997.
- [4] Allaire G., Henrot A., *On some recent advances in shape optimization*, Comptes Rendus de L'Académie des Sciences – Mécanique, Série IIb, Tome 329, No. 5, Mai 2001, s. 383–396, 2001.
- [5] Allaire G., Kohn R.V., *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures*, Eur. J. mech., A/Solids, Vol. 12, No. 6, s. 839–878, 1993.
- [6] Beekers M., *Topology optimization using a dual method with discrete variables*, Struct. Optim., Vol. 17, s. 12–24, 1999, oraz Rapport OF-44 *Optimisation topologique de structures tridimensionnelles en variables discretés*, Université de Liège, Institut de Mécanique, LTAS, grudzień 1996 i Rapport OF-45 *Méthodes du périmètre et des filtres pour l'optimisation topologique en variables discretés*, Université de Liège, Institut de Mécanique, LTAS, styczeń 1997.
- [7] Beekers M., Fleury C., *Topology optimization involving discrete variables*, w: Gutkowski W., Mróz Z., Proceedings of WCSMO-2 (World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization), Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Warszawa–Zakopane, 26–30 maja 1997, s. 533–538, 1997, oraz Rapport OF-38 *Optimisation topologique de structures continues en variables discretés*, Université de Liège, Institut de Mécanique, LTAS, styczeń 1996.
- [8] Bendsøe M. P., *Optimal shape design as a material distribution problem*, Struct. Optim., Vol. 1, s. 193–202, 1989.
- [9] Bendsøe M. P., *Optimization of structural topology, shape and material*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
- [10] Bendsøe M. P., Kikuchi N., *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, s. 197–224, 1988.
- [11] Bletzinger K.-U., Ramm E., *Structural optimization and form finding of light weight structures*, Computers & Structures, Vol. 79, s. 2053–2062, 2001.
- [12] Burczyński T., Kokot G., *The evolutionary optimization using genetic algorithms and boundary elements*, WCSMO-3 (World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization), Buffalo, New York, USA, 17–22 maja 1999, s. 87–89, 1999.
- [13] Cheng G., Guo X., *ε -relaxed approach in structural topology optimization*, Struct. Optim., Vol. 13,

- s. 258–266, 1997.
- [14] Cheng G., Jiang Z., *Study on topology optimization with stress constraints*, Eng. Opt., Vol. 20, s. 129–148, 1992.
- [15] Cheng K., Olhoff N., *An investigation concerning optimal design of solid elastic plates*, Int. J. Solids & Structures, Vol. 17, s. 305–323, 1981.
- [16] Chongbin Zhao, Hornby P., Steven G.P., Xie Y.M., *A generalized evolutionary method for numerical topology optimization of structures under static loading conditions*, Struct. Optim., Vol. 15, s. 251–260, 1998.
- [17] Dal Maso G., *An introduction to Γ -convergence*, Progress in Nonlinear differential equations and their applications, 8, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [18] Duysinx P., Bendsoe M.P., *Topology optimization of continuum structures with local stress constraints*, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 43, No. 8, s. 1453–1478, 1998.
- [19] Eschenauer H.A., Schumacher A., Vietor T., *Decision makings for initial designs made for advanced materials*, w: Bendsoe M.P., Mota Soares C. A. Topology design of structures, s. 469–480. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [20] Eschenauer H.A., Kobelev V.V., Schumacher A., *Bubble method for topology and shape optimization of structures*. Struct. Optim., Vol. 8, s. 42–51, 1994.
- [21] Eschenauer H.A., Schumacher A., *Simultaneous shape and topology optimization of structures*, w: Rozvany G.I.N., Olhoff N. Proceedings of WCSMO-1 (World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization), Pergamon, Kongres odbył się w Goslar, RFN, 28 maja–2 czerwca 1995, s. 177–184, 1995.
- [22] Francfort G.A., Murat F., *Homogenization and optimal bounds in linear elasticity*, Arch. Rot. Mech. Study, Vol. 94, s. 307–334, 1986.
- [23] Fujii D., Kikuchi N., *Improvement of numerical instabilities in topology optimization using the SLP method*, Struct. and Mult. Optim., Vol. 19, s. 113–121, 2000.
- [24] Gea H.C., *Topology optimization: a new microstructure based design domain method*, Comput. Struct., Vol. 61, s. 781–788, 1996.
- [25] Guedes J. M., Taylor J.E., *On the prediction of material properties and topology for optimal continuum structures*, Struct. Optim., Vol. 14, s. 193–199, 1997.
- [26] Haber R. B., Bendsoe M. P., Jog. C., *A new approach to variable-topology shape design using a constraint on the perimeter*, Struct. Optim., Vol. 11, s. 1–12, 1996.
- [27] Harasaki H., Arora J. S., *A new class of evolutionary methods based on the concept of transferred force for structural design*, Struct. and Mult. Optim., Vol. 22, s. 35–56, 2001.
- [28] Harasaki H., Arora J. S., *Topology design based on transferred and potential transferred forces*, Struct. and Mult. Optim., Vol. 23, s. 372–381, 2002.
- [29] Haslinger J., Neittaanmäki P., *Finite element approximation for optimal shape, material and topology design*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1997.
- [30] Hornung U. (ed), *Homogenization and porous media*. Berlin, Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 6, Springer Verlag, 1997.
- [31] Jacobsen J. B., Olhoff N., Ronholt E., *Generalized shape optimization of three-dimensional structures using materials with optimum microstructures*, Report of Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Dania, 1997.
- [32] * Jog C., *Variable topology shape optimization of linear elastic structures*, Ph.D. Thesis, Dept. of Theoretical and Applied Mech., Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, 1994.
- [33] Khot N. S., *Algorithms based on optimality criteria to design minimum weight structures*, Engineering Optimization, Vol. 5, s. 73–90, 1981.
- [34] Kita E., Tanie H., *Topology and shape optimization of continuum structures using GA and BEM*,

- Struct. and Mult. Optim., Vol. 17, s. 130–139, 1999.
- [35] Kemmler G., Schwarz S. Ramm E., *Topology optimization including geometrically nonlinear response*, WCSMO-3 (World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization), Buffalo, New York, USA, 17–22 maja 1999, s. 587–589, 1999.
- [36] Kutyłowski R., *Topology optimization – convergence problem*, Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. XXII, No 1–2, s. 45–55, 2000.
- [37] Kutyłowski R., *On an effective topology procedure*, Struct. and Mult. Optim., Vol. 20, s. 49–56, 2000.
- [38] Kutyłowski R., *About the artificial approach in topology optimization in meaning of the convergence problem*, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 80, Suppl. 2, s. S535–S536, 2000.
- [39] Kutyłowski R., *The ε -relaxed approach in topology optimization for various ε functions*, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 81, Suppl. 3, s. S681–S682, 2001.
- [40] Kutyłowski R., *The force tracing topology optimization*. Referat opublikowany na płycie CD stanowiącej wydawnictwo Kongresu: WCSMO-4 (World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization), Dalian, Chiny, 4–8 czerwca 2001. Ponadto streszczenie ukazało się w książce streszczeń, s. 352–353, 2001.
- [41] Kutyłowski R., *On nonunique solutions in topology optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 23, s. 398–403, 2002.
- [42] Lewiński T., Zhou M., Rozvany G.I.N., *Extended exact solutions for least-weight truss layouts – part I: cantilever with a horizontal axis of symmetry*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 36, s. 375–398, 1994.
- [43] Lewiński T., Zhou M., Rozvany G.I.N., *Extended exact solutions for least-weight truss layouts – part I: unsymmetric cantilevers*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 36, s. 399–419, 1994.
- [44] Lin C.-Y., Chao L.-S., *Automated image interpretation for integrated topology and shape optimization*, Struct. and Mult. Optim., Vol. 20, s. 125–137, 2000.
- [45] Majid K.I., *Optymalne projektowanie konstrukcji*, PWN, Warszawa, 1981.
- [46] Maute K., Ramm E., *Adaptive topology optimization*. Advances in Structural Optimization, Struct. Optim., Vol. 10, s. 100–112, 1995.
- [47] * Michell A.G.M., *The limits of economy of material in frame structures*, Philosophical Magazine, Series 6, 8, No. 47, s. 589–597, 1904.
- [48] Mistakidis E.S., Stavroulakis G.E., *Nonconvex optimization in mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1998.
- [49] Mlejnek H.P., *Some aspects of the genesis of structures*, Struct. Optim., Vol. 5, s. 64–69, 1992.
- [50] Mlejnek H.P., Schirrmacher R., *An engineer's approach to optimal distribution and shape finding*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 106, s. 1–26, 1993.
- [51] Murat F., Tartar R., *H-convergence*, Topics in the mathematical modelling of composite materials, w: Cherkaev A., Kohn R., seria Progress in nonlinear differential equations and their applications, Vol. 31, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, s. 21–43, 1997.
- [52] Murat F., Tartar R., *Calculus of variations and homogenization*, Topics in the mathematical modelling of composite materials, w: Cherkaev A., Kohn R., seria Progress in nonlinear differential equations and their applications, Vol. 31, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, s. 139–173, 1997.
- [53] Naghdi P. M., *Foundations of elastic shell theory*, Progress in solid Mechanics, Vol. IV. North Holland Publ. Company, Amsterdam 1963.
- [54] Naghdi P. M., *The theory of shells and plates*. Handbuch der Physik, Vol. VIa/2, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972.
- [55] Olhoff N., Ronholt E., Scheel J., *Topology optimization of three dimensional structures using optimum microstructures*, Struct. Optim., Vol. 16, s. 1–18, 1998, oraz Report No. 87, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Dania, 1997.
- [56] Payten W.M., Law M., *Optimising multiple load case structures using a self-organising density*

- approach*, Proceedings of WCSMO-2 (World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization), Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Warszawa–Zakopane, 26–30 maja 1997, s. 133–138, 1997.
- [57] Petersson J., Sigmund O., *Slope Constrained Topology Optimization*. Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 41, s. 1417–1434, 1998.
- [58] Plaxton S., Taylor J.E., *Applications of a generalized complementary energy principle for the equilibrium analysis of softening structure*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 117, s. 91–103, 1994.
- [59] Prager W., Taylor J.E., *Problems of optimal structural design*, J. Applied Mechs., Vol. 35, s. 102–106, 1968.
- [60] Querin O. M., Steven G.P., Xie Y.M., *Advances in evolutionary optimisation: 1992–2000*, w: Rozvany G.I.N., Olhoff N., *Topology Optimization of structures and composite continua*. Proc. NATO/ISSMO Advanced Research Workshop, 8–12 maja 2000, Budapeszt, Węgry, NATO Science Series, II. Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 7, Kluwer Academic Publishers, s. 227–236, 2000.
- [61] Ramm E., Bletzinger K.-U., Reitering R., Maute K., *The challenge of structural optimization*. Advances in Structural Optimization, w: Topping B.H.V., Papadrakakis M., *Advanced in Structural Optimization*. Proc. Int. Conf. on Computational Structures Technology, Ateny, s. 27–52, 1994.
- [62] Rietz A., *Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods*, Struct. and Mult. Optim., Vol. 21, s. 159–163, 2001.
- [63] Rossow M.P., Taylor J.E., *A finite element method for the optimal design of variable thickness sheet*, AIAA Journal, Vol. 11, s. 1566–1569, 1973.
- [64] Rozin L.A., *Variacannyje postanowki zadac dla uprugich sistem*. Izd. Leningradskovo Universiteta, Leningrad, 1978.
- [65] Rozvany G.I.N. W: Herskovits, *What is meaningful in topology design? An engineer's viewpoint*, Advances in Structural Optimization, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, s. 149–188, 1995.
- [66] Rozvany G.I.N., *Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics*, Struct. and Mult. Optim., Vol. 21, s. 90–108, 2001.
- [67] Rozvany G.I.N., *Stress ratio and compliance based methods in topology optimization – a critical review*, Struct. and Mult. Optim., Vol. 21, s. 109–119, 2001.
- [68] Rozvany G.I.N., Birker T., *On singular topologies in exact layout optimization*, Struct. Optim., Vol. 8, s. 228–235, 1994.
- [69] Rozvany G.I.N., Querin O. M., *Present limitations and possible improvements of SERA (Sequential Element Rejections and Admissions) methods in topology optimization*. Referat opublikowany na płycie CD stanowiącej wydawnictwo Kongresu: WCSMO-4 (World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization), Dalian, Chiny, 4–8 czerwca 2001. Ponadto streszczenie ukazało się w książce streszczeń, s. 48–49, 2001.
- [70] Rozvany G.I.N., Zhou M., Birker T., *Generalized shape optimization without homogenization*, Struct. Optim., Vol. 4, s. 250–252, 1992.
- [71] * Sigmund O., *Design of material structures using topology optimization*, Ph.D. Thesis, Dept. of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, 1994.
- [72] Sigmund O., Buhl T., Pedersen C.B.W., *On the influence of geometrical non-linearities in topology optimization*, w: Rozvany G.I.N., Olhoff N. *Topology Optimization of structures and composite continua*. Proc. NATO/ISSMO Advanced Research Workshop, 8–12 maja 2000, Budapeszt, Węgry, NATO Science Series, II Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 7, Kluwer Academic Publishers, s. 61–73, 2000.
- [73] Sigmund O., Petersson J., *Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures*

- dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima.* Struct. Optim., Vol. 16, s. 68–75, 1998.
- [74] Stolpe M., Svanberg K., *On the trajectories of penalization methods in topology optimization.* Struct. and Mult. Optim., Vol. 21, s. 128–139, 2001.
- [75] Taylor J.E., *Perspectives on layout and topology design,* Struct. and Mult. Optim., Vol. 24, s. 253–256, 2002.
- [76] Woźniak Cz., *Więzy w mechanice ciał odkształcalnych,* Ossolineum, 1988.
- [77] Xie Y.M., Steven G.P., *Evolutionary Structural Optimization,* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [78] Young V., Querin O. M., Steven G.P., Xie Y.M., *3D and multiple load case bi-directional evolutionary structural optimization,* Struct. and Mult. Optim., Vol. 18, s. 183–192, 1999.
- [79] Yang R.J., Chuang C.H., *Optimal topology using linear programming,* Comput. Struct., Vol. 52, s. 265–275, 1994.
- [80] Zhou M., Rozvany G.I.N., *The COC algorithm, part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization,* Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 89, s. 309–336, 1991.
- [81] Zhou M., Rozvany G.I.N., *An improvement approximation method for the DCOC method of sizing optimization,* Comput. Struct., Vol. 60, s. 763–769, 1996.