

PAŃSTWOWA WYŻSZA SZKOŁA ZAWODOWA W NYSIE
SKRYPT NR 8

Marcin Zdanowicz

Mechanika budowli

Przewodnik do ćwiczeń dla studentów architektury

CZĘŚĆ I

OFICyna WYDAWNICZA PWSZ W NYSIE
NYSa 2005

SEKRETARZ OFICYNY:

Tomasz Drewniak

RECENZENT:

Jerzy Wyrwał

SKŁAD I ŁAMANIE:

Marcin Zdanowicz

KOREKTA I ADJUSTACJA:

Ewa Bernat

PROJEKT GRAFICZNY OKŁADKI:

Ryszard Szymończyk

AUTOR ZDJĘCIA:

Marcin Zdanowicz

© Copyright by
Oficina Wydawnicza PWSZ w Nysie
Nysa 2005

ISBN 83-60081-03-4

OFICyna WYDAWNICZA PWSZ W NYSIE

48-300 Nysa, ul. Grodzka 19

tel.: (077) 4090855

e-mail: oficyna@pwsz.nysa.pl

<http://www.pwsz.nysa.pl/oficyna>

Wydanie I

Druk i oprawa:

ZPP „Klucz-Druk” sp. z o. o. Kluczbork, ul. Zamkowa 8

tel.: (077) 418 76 73

2

Spis treści

Wprowadzenie	5
1. Statyka elementarna	7
1.1. Wypadkowa płaskich układów sił	8
1.2. Warunki równowagi płaskich układów sił	15
2. Ogólne wiadomości o płaskich ustrojach prętowych	17
2.1. Geometryczna niezmiennosc i statyczna wyznaczalność	17
2.2. Reakcje podporowe	19
2.3. Siły przekrojowe	19
3. Belki proste	22
3.1. Wiadomości ogólne	22
3.2. Przykłady liczbowe	22
3.3. Przykłady do rozwiązania	38
4. Ramy statycznie wyznaczalne	39
4.1. Wiadomości ogólne	39
4.2. Przykłady liczbowe	39
4.3. Przykłady do rozwiązania	52
5. Łuki trójprzegubowe	53
5.1. Wiadomości ogólne	53
5.2. Przykłady liczbowe	54
5.3. Przykłady do rozwiązania	62
6. Kratownice statycznie wyznaczalne	63
6.1. Wiadomości ogólne	63
6.2. Metody wyznaczania sił wewnętrznych	64
6.3. Przykłady liczbowe	65
6.4. Przykłady do rozwiązania	81
7. Charakterystyki geometryczne	83
7.1. Wiadomości ogólne	83
7.2. Środek ciężkości przekroju	83
7.3. Momenty i promienie bezwładności przekroju	84
7.4. Wskaźnik zginania przekroju	85
7.5. Przykłady liczbowe	86
8. Tablice pomocnicze	93
Bibliografia	104

Wprowadzenie

Niniejszy skrypt powstał jako pomoc dydaktyczna do ćwiczeń tablicowych z przedmiotu **MECHANIKA BUDOWLI** i jest przeznaczony dla studentów pierwszego roku kierunku Architektury i Urbanistyki przy Państwowej Wyższej Szkole Zawodowej w Nysie. Zakres materiału opracowano zgodnie z tematyką ćwiczeń tablicowych, aby pomóc studentom w zrozumieniu nowych dla nich zagadnień oraz jako pomoc w samodzielnym wykonaniu ćwiczeń domowych.

Mechanika budowli jest dziedziną mającą na celu określenie warunków, jakie powinny spełniać elementy konstrukcyjne projektowanego obiektu, aby odpowiadały swemu przeznaczeniu pod względem *wytrzymałości*, *sztwności* oraz *stateczności*. *Wytrzymałość* określa wymaganą nośność analizowanego elementu, pozwalającą przejść działające na niego obciążenia. *Sztwność* określa wartości dopuszczalnych odkształceń, które mogłyby utrudnić lub wręcz uniemożliwić prawidłową eksploatację. Wreszcie *stateczność* ma zapobiec krytycznym zmianom kształtu lub położenia elementu konstrukcyjnego (np. wyboczenie pręta ściskanego, zwichrzenie elementu zginanego). Przedstawione zagadnienia możemy podzielić na dwie zasadnicze dyscypliny: *mechanikę ciała sztywnego* (statyka) oraz *mechanikę ciała odkształcalnego* (wytrzymałość materiałów), dla omówienia których opracowano dwuczęściowy skrypt.

Część pierwsza, zawarta w niniejszej pracy, prezentuje fundamentalne zagadnienia **STATYKI**, w zakresie niezbędnym dla architekta. Poszczególne rozdziały mają na celu przybliżyć podstawową wiedzę teoretyczną oraz jej wykorzystanie w rozwiązywaniu zadań praktycznych (przykłady liczbowe). Przedstawiona w tej części tematyka porusza zagadnienia z zakresu *statyki elementarnej* – składanie i rozkładanie sił, wypadkowe płaskich układów sił, oraz *statyki budowli* – rozwiązywanie płaskich ustrojów prętowych. Rozwiązania metodami analitycznymi wszystkich przykładów liczbowych przedstawianych w tej części, poparte są metodami wykreślnymi ze względu na ich wartości poznawcze oraz dydaktyczne.

Część druga skryptu przedstawiać będzie wiedzę z zakresu **WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW** niezbędną do umiejętnego kształtowania oraz wymiarowania przekrojów i elementów konstrukcyjnych. Podstawę tej wiedzy stanowi umiejętność wyznaczania charakterystyk geometrycznych przekrojów (omawianych w części pierwszej) oraz znajomość zasadniczych przypadków wytrzymałościowych (ściskanie, rozciąganie, zginanie, itd.). Prezentowane w tej części przykłady liczbowe mają na celu przybliżenie metod wymiarowania przekrojów ściskanych, rozciąganych, zginanych, czy ścinanych, w elementach konstrukcyjnych rozwiązywanych w części pierwszej skryptu.

Układ taki ma na celu ukazanie kolejnych etapów projektowania konstrukcji inżynierskich, począwszy od przyjęcia schematu statycznego, przez wyznaczenie obciążeń zewnętrznych i wynikających z ich oddziaływania sił wewnętrznych, aż po wymiarowanie przekroju stosownie do występujących w nim sił wewnętrznych.

1. Statyka elementarna

Statyka jest jednym z działów mechaniki ciała sztywnego, zajmującym się opisem równowagi ciał (układów konstrukcyjnych) oraz sił na niego działających – zewnętrznych (czynnych i biernych) oraz wewnętrznych.

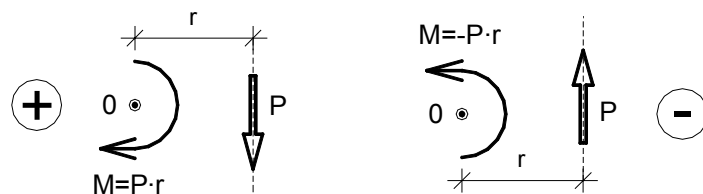
W mechanice rozróżniamy dwa rodzaje wielkości: *skalary*, do których określenia potrzebna jest wartość liczbową oraz *wektory*, które są wielkościami określonymi wartością liczbową, kierunkiem i zwrotem. Wyróżniamy trzy rodzaje wektorów: swobodne, liniowe (związane z prostą) i nieswobodne (związane z punktem).

Wśród podstawowych pojęć występujących w mechanice możemy wymienić:

- **siła** należy do grupy wektorów liniowych, co oznacza, iż możemy ją dowolnie przemieszczać wzdłuż prostej wyznaczającej jej kierunek działania. Siła, definiowana zgodnie z II zasadą dynamiki, jest miarą przyspieszenia nadawanego swobodnemu ciału. Przykładem sił, jakie możemy spotkać rozważając ustroje konstrukcyjne, są np.: ciężar własny elementów konstrukcyjnych, obciążenia zmienne technologiczne (np. obciążenie stropu zależne od przeznaczenia obiektu oraz sposobu użytkowania pomieszczeń, obciążenie pojazdami) czy też obciążenia zmienne środowiskowe (np. śnieg, wiatr). Miarą siły w układzie SI jest niuton [N], ze względów praktycznych stosujemy często kiloniutony (1kN=1000 N).
- **moment statyczny siły P** względem punktu O (zwanego biegunem) jest iloczynem tej siły i jej odległości r od punktu O (r – ramię siły). Możemy więc zapisać:

$$M_0 = P \cdot r \quad (1-1)$$

Jednostką momentu statycznego jest zwykle niutonometr [N·m] lub kiloniutonometr [kN·m]. Moment powodujący obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara (prawoskrętny) umownie uważamy jako dodatni (rys. 1-1a), natomiast moment lewoskrętny za ujemny (rys. 1-1b).

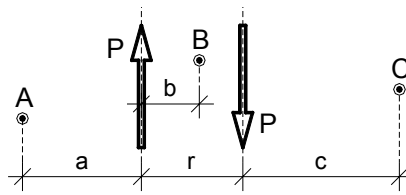


Rys. 1-1. Moment statyczny siły P i zasady jego znakowania

- **para sił** nazywamy dwie siły równe co do wartości, działające na kierunkach wzajemnie równoległych lecz z przeciwnym zwrotem. Jak możemy zauważyć, suma rzutów tych sił na oś równoległą do kierunku ich działania jest równa zeru, a co za tym idzie, nie powodują one przesunięcia ciała, do którego są przyłożone. Jednak oddziaływanie pary sił nie pozostaje bez skutku, powoduje bowiem obrót ciała zgodnie z momentem statycznym określonym:

$$M = P \cdot r, \quad (1-2)$$

gdzie r jest odległością pomiędzy siłami o wartości P (rys. 1-2).



Rys. 1-2. Para sił

Określając moment statyczny pary sił względem dowolnie przyjętych punktów A, B oraz C (rys. 1-2) uzyskamy następujące wyniki:

$$M_A = -P \cdot a + P \cdot (a+r) = -P \cdot a + P \cdot a + P \cdot r = P \cdot r,$$

$$M_B = P \cdot b + P \cdot (r-b) = P \cdot b + P \cdot r - P \cdot b = P \cdot r,$$

$$M_C = P \cdot (r+c) - P \cdot c = P \cdot r + P \cdot c - P \cdot c = P \cdot r,$$

z których wynika jasno, że moment statyczny pary sił nie zależy od położenia punktu (bieguna), względem którego jest wyznaczany.

1.1. Wypadkowa płaskich układów sił

Układem płaskim sił nazywamy zbiór sił działających w jednej płaszczyźnie. Ze względu na ich wzajemne ukierunkowanie rozróżniamy dwa podstawowe układy:

- *zbieżnym układem sił* nazywamy taki układ, w którym wszystkie linie działania sił przecinają się w jednym punkcie, nazywanym punktem zbieżności,
- *dowolnym układem sił* jest zbiór sił o rozbieżnych kierunkach działania (brak wspólnego punktu zbieżności wszystkich sił układu).

Układ złożony z wielu sił możemy zastąpić układem prostszym, składającym się z mniejszej liczby sił, działającym z takim samym skutkiem jak układ pierwotny. Jeśli układ złożony można zastąpić jedną siłą, to siłą taką nazywamy *wypadkową*, a działania związane z jej wyznaczeniem - *składaniem sił*. Wypadkową zbieżnego lub dowolnego układu sił możemy znaleźć na drodze analitycznej lub graficznej.

Metoda analityczna polega na określeniu rzutów wypadkowej na osie przyjętego układu współrzędnych jako sumy rzutów wszystkich sił składowych:

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix}; \quad W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy}, \quad (1-3)$$

gdzie: P_{ix}, P_{iy} - rzuty siły składowej i odpowiednio na oś x oraz y ,
 n - liczba sił składowych.

Wartość bezwzględna wypadkowej wyznaczyć można zatem ze wzoru:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}, \quad (1-4)$$

natomiast nachylenie jej prostej działania do osi x wyraża zależność:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|W_y|}{|W_x|}. \quad (1-5)$$

Zwrot wektora wypadkowej określają znaki sum wektorowych W_x oraz W_y . Położenie linii działania wypadkowej dowolnego układu sił określić można wyznaczając współrzędne punktu przyłożenia wypadkowej W :

$$x_w = \frac{-M_{Py}}{W_y}, \quad y_w = \frac{M_{Px}}{W_x}, \quad (1-6)$$

gdzie: M_{Px} - suma momentów statycznych rzutów sił składowych P_i na oś x względem początku układu współrzędnych O (znakowanie wg rys.1-1),

M_{Py} - suma momentów statycznych rzutów sił składowych P_i na oś y względem początku układu współrzędnych O (znakowanie wg rys.1-1).

Położenie wypadkowej rozbieżnego układu sił można wyznaczyć także obliczając *moment główny* względem punktu O (początek układu współrzędnych). Moment główny układu sił definiowany jest jako suma algebraiczna momentów statycznych poszczególnych sił składowych układu względem tegoż punktu O . Jeśli układ sił można zastąpić wypadkową W , to moment główny jest równy momentowi wypadkowej. Tak więc można zapisać dwa równorzędne równania:

$$M_0 = M_{Px} + M_{Py}, \quad (1-7)$$

$$M_0 = W \cdot r, \quad (1-8)$$

gdzie: M_{Px}, M_{Py} - jak we wzorze 1-6,

r - odległość wypadkowej W od początku układu współrzędnych O .

Zatem położenie wypadkowej (z 1-7 i 1-8) określa zależność:

$$r = \frac{M_0}{W} = \frac{M_{Px} + M_{Py}}{W}. \quad (1-9)$$

Metoda graficzna bazuje na konstrukcji składającej się z dwu części: *planu sił* oraz *wieloboku sił*. Plan sił przedstawia proste działania wszystkich sił układu zgodnie z przyjętą skalą długości, natomiast na wieloboku sił składamy te siły (traktując je jako wektory swobodne) zgodnie z przyjętą skalą sił. Wyznaczenie wypadkowej dowolnego układu sił wymaga dodatkowo zastosowania konstrukcji nazywanej *wielobokiem sznurowym*. Szczegółowy opis podano w przykładach 1-1 ÷ 1-3.

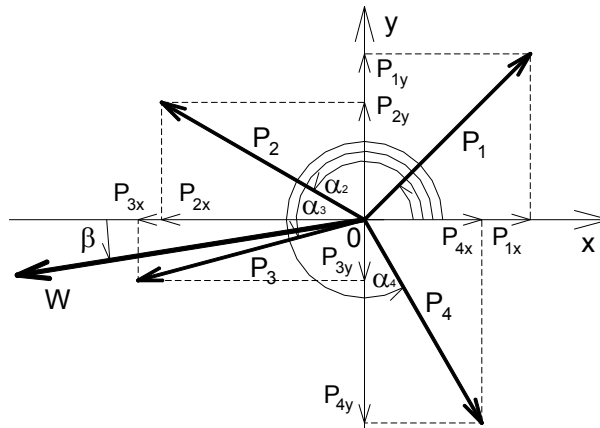
Przykład 1-1. Wyznaczyć wykreślnie i analitycznie wypadkową zbieżnego układu sił, przy danych jak w tabeli poniżej.

	Siła P_1	Siła P_2	Siła P_3	Siła P_4
Wartość [kN]	12	28	40	22
Kąt [$^\circ$]	45	150	195	300

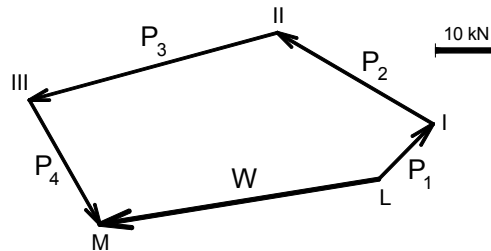
ROZWIĄZANIE GRAFICZNE

Zadany układ sił przedstawiamy według przyjętej skali długości na *planie sił* (rys. 1-3). Wyznaczenie wypadkowej metodą *wieloboku sił* (rys. 1-4) polega na geometrycznym dodawaniu wektorów, przy czym otrzymany wynik nie jest zależny od kolejności ich składania. Do dowolnego punktu L przenosimy równolegle

siłę P_1 z uwzględnieniem jej wartości (wg przyjętej skali sił) i zwrotu. Następnie z końca I tej siły wykreślamy siłę P_2 i tak kolejno dodajemy wszystkie siły układu dochodząc do punktu M będącego końcem ostatniej siły P_4 układu. Tak otrzymaną krzywą nazywamy wielobokiem sił. Wektor W łączący początek pierwszej siły i koniec siły ostatniej jest geometryczną sumą sił układu. Na koniec przenosimy tę sumę do punktu zbieżności O z zachowaniem wartości, kierunku i zwrotu.



Rys. 1-3. Plan sił.



Rys. 1-4. Wielobok sił [kN] – odczytano: $W=44$ kN; $\beta=9^\circ$

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Rzuty sił składowych na osie x,y:

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos \alpha_1 = 12 \cdot \cos 45^\circ = 8,49 \text{ kN}$$

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 28 \cdot \cos 150^\circ = -24,25 \text{ kN}$$

$$P_{3x} = P_3 \cdot \cos \alpha_3 = 40 \cdot \cos 195^\circ = -38,64 \text{ kN}$$

$$P_{4x} = P_4 \cdot \cos \alpha_4 = 22 \cdot \cos 300^\circ = 11 \text{ kN}$$

$$P_{1y} = P_1 \cdot \sin \alpha_1 = 12 \cdot \sin 45^\circ = 8,49 \text{ kN}$$

$$P_{2y} = P_2 \cdot \sin \alpha_2 = 28 \cdot \sin 150^\circ = 14 \text{ kN}$$

$$P_{3y} = P_3 \cdot \sin \alpha_3 = 40 \cdot \sin 195^\circ = -10,35 \text{ kN}$$

$$P_{4y} = P_4 \cdot \sin \alpha_4 = 22 \cdot \sin 300^\circ = -19,05 \text{ kN}$$

Rzuty wypadkowej na osie x,y:

$$W_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} = 8,49 - 24,25 - 38,64 + 11 = -43,40 \text{ kN}$$

$$W_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + P_{4y} = 8,49 + 14 - 10,35 - 19,05 = -6,91 \text{ kN}$$

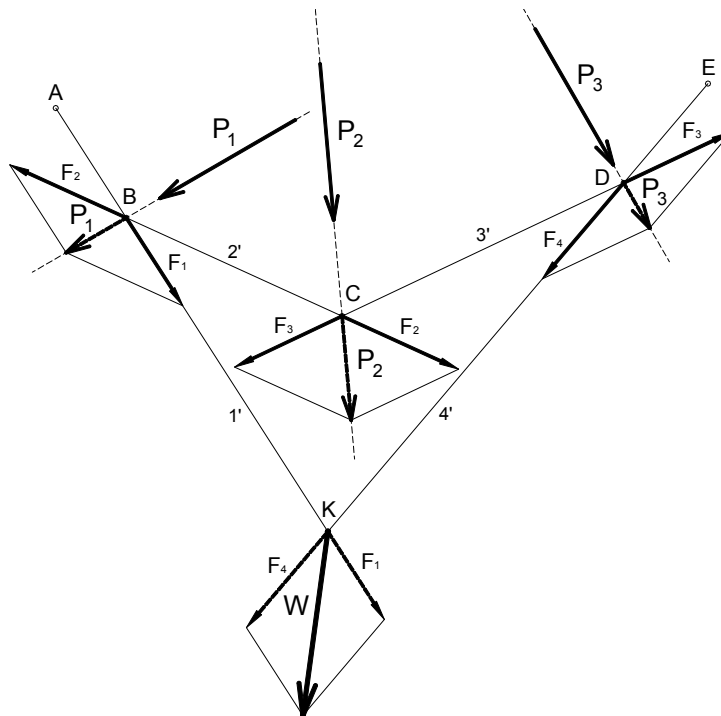
Wartość oraz kąt nachylenia wypadkowej W:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{(-43,40)^2 + (-6,91)^2} = 43,95 \text{ kN}$$

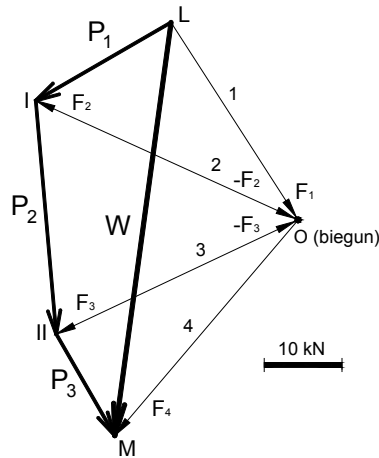
$$\text{tg } \beta = \frac{|W_y|}{|W_x|} = \frac{|-6,91|}{|-43,40|} = 0,159 \quad ; \beta = 9^{\circ} 03'$$

Przykład 1-2. Wyznaczyć graficznie wypadkową dowolnego układu sił danego rysunkiem 1-5, przy danych: $P_1=20 \text{ kN}$, $P_2=30 \text{ kN}$, $P_3=15 \text{ kN}$.

Wyznaczenie wypadkowej dowolnego układu sił rozpoczynamy od sporządzenia planu sił według przyjętej skali długości oraz wieloboku sił $M-I-II-L$ zgodnie z zasadami podanymi w przykładzie 1-1. Wypadkową układu jest wektor $LM=W$. W celu wyznaczenia prostej działania wektora wypadkowej, obieramy dowolny punkt O zwany biegunem. Łącząc go z początkiem i końcem każdej siły wieloboku otrzymujemy odcinki 1, 2, 3, 4 zwane *promieniami wektorowymi*. Liczba promieni jest o jeden większa od liczby sił układu. Na planie sił obieramy na kierunku działania siły P_1 dowolny punkt B i prowadzimy przez niego prostą l' równoległą do



Rys. 1-5. Plan sił



Rys. 1-6. Wielobok sił [kN] – odczytano: $W=53,4$ kN

promienia l oraz prostą $2'$ równoległą do promienia 2 . Przecięcie prostej $2'$ z linią działania siły P_2 wyznacza punkt C , przez który prowadzimy prostą $3'$ równoległą do promienia 3 . Na przecięciu tej prostej z prostą działania siły P_3 otrzymujemy punkt D . Z tego punktu równoległe do promienia 4 kreślimy wreszcie prostą $4'$. Przecięcie prostych l' i $4'$ wyznacza punkt K , przez który musi przechodzić linia działania wypadkowej W danego układu.

Linie łamaną $ABCDE$ zwiemy *wielobokiem sznurowym*, co uzasadniamy tym, że kształt takiej linii łamanej przyjąłby sznur zamocowany w punktach A i E obciążony siłami P_1, P_2, P_3 przyłożonymi w punktach B, C, D .

Zasadność takiej konstrukcji potwierdzimy następującym rozważaniem:

1. Siła P_1 przedstawiona na wieloboku sił jest sumą wektorową sił F_1 i F_2 (odpowiadającym promieniom l i 2), które przeniesione do dowolnego punktu B na linii działania siły P_1 zastępują całkowicie jej działanie.
2. Siła P_2 jest sumą wektorową sił $-F_2$ i F_3 , zastępujących jej działanie.
3. Siła P_3 jest sumą wektorową sił $-F_3$ i F_4 , zastępujących jej działanie.

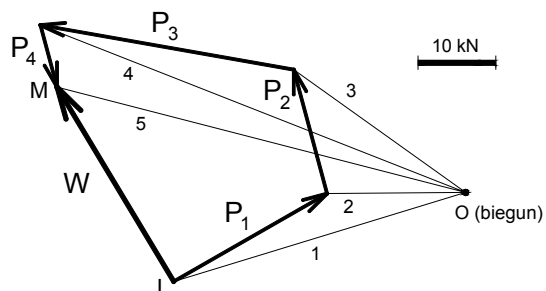
Jak można zauważyć siły $F_2, -F_2$ oraz $F_3, -F_3$ działające na prostych $2', 3'$ będących bokami wieloboku sznurowego równoważą się wzajemnie. Układ sił sprowadza się wobec tego do dwóch sił F_1, F_4 działających wzdłuż boków $l', 4'$ i zbiegających się w punkcie K . Wypadkowa tych sił jest poszukiwaną wypadkową układu.

Przykład 1-3. Wyznaczyć wykreślnie i analitycznie wypadkową rozbieżnego (dowolnego) układu sił, przy danych jak w tabeli poniżej:

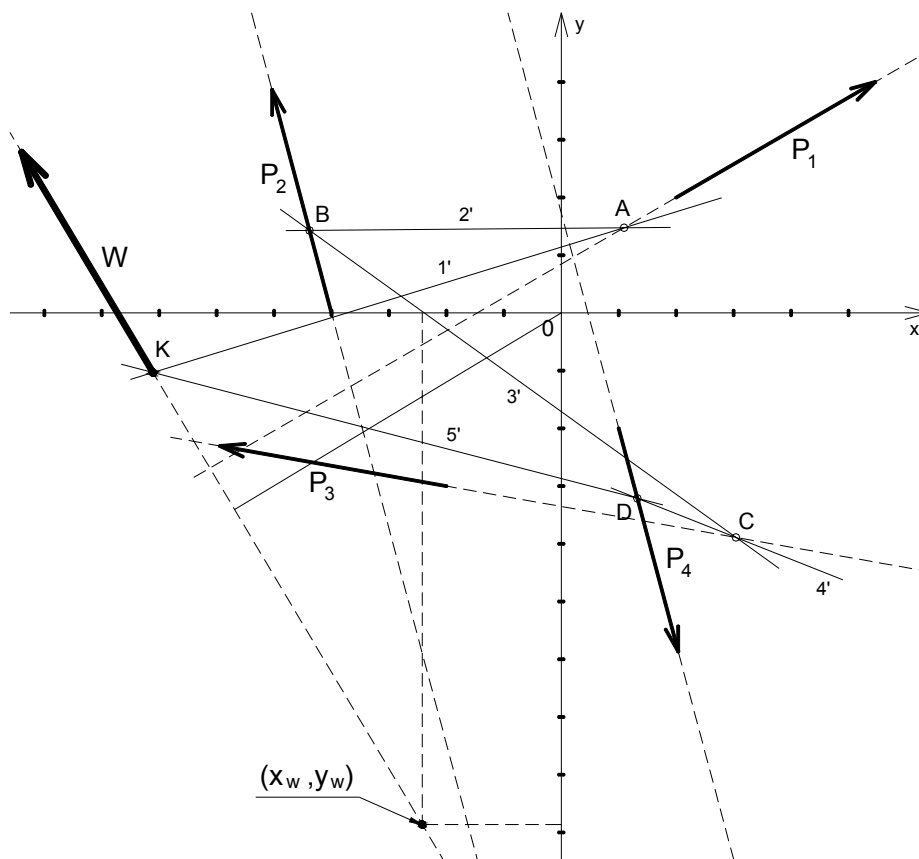
		Siła P_1	Siła P_2	Siła P_3	Siła P_4
Wartość [kN]		22	16	32	8
Kąt [$^\circ$]		30	105	170	285
Współrzędne	x [m]	2	-4	-2	1
	y [m]	2	0	-3	-2

ROZWIĄZANIE GRAFICZNE

Zadanie rozwiązujemy zgodnie z zasadami przedstawionymi w przykładzie 1-2. Według sporządzonego wieloboku sił określamy wartość, kierunek oraz zwrot wypadkowej W , natomiast jej położenie ustalimy korzystając z konstrukcji wieloboku sznurowego $ABCDK$ (gdzie K jest punktem przyłożenia wypadkowej).



Rys. 1-7. Wielobok sił [kN] – odczytano: $W=28,2$ kN; $\beta=59^\circ$



Rys. 1-8. Plan sił

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Rzuty sił składowych na osie x,y:

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos \alpha_1 = 22 \cdot \cos 30^\circ = 19,05 \text{ kN}$$

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 16 \cdot \cos 105^\circ = -4,14 \text{ kN}$$

$$P_{3x} = P_3 \cdot \cos \alpha_3 = 32 \cdot \cos 170^\circ = -31,51 \text{ kN}$$

$$P_{4x} = P_4 \cdot \cos \alpha_4 = 8 \cdot \cos 285^\circ = 2,07 \text{ kN}$$

$$P_{1y} = P_1 \cdot \sin \alpha_1 = 22 \cdot \sin 30^\circ = 11 \text{ kN}$$

$$P_{2y} = P_2 \cdot \sin \alpha_2 = 16 \cdot \sin 105^\circ = 15,45 \text{ kN}$$

$$P_{3y} = P_3 \cdot \sin \alpha_3 = 32 \cdot \sin 170^\circ = 5,56 \text{ kN}$$

$$P_{4y} = P_4 \cdot \sin \alpha_4 = 8 \cdot \sin 285^\circ = -7,73 \text{ kN}$$

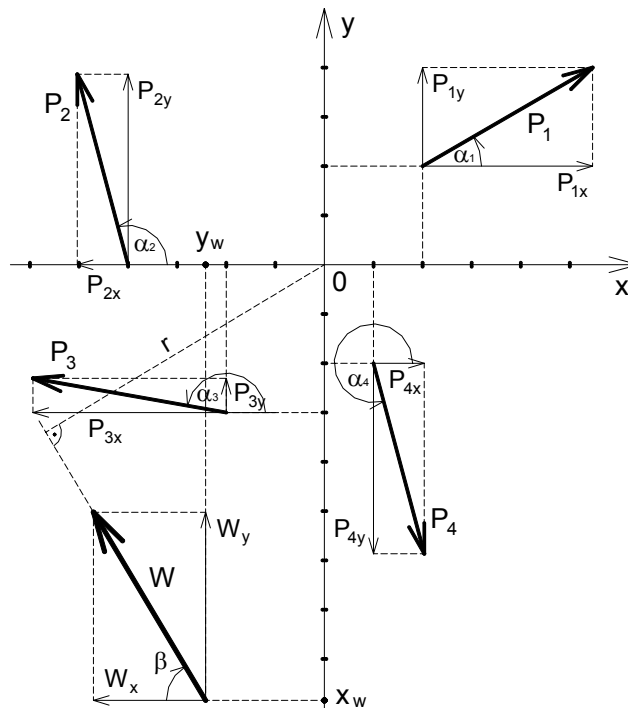
Rzuty wypadkowej na osie x,y:

$$W_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} = 19,05 - 4,14 - 31,51 + 2,07 = -14,53 \text{ kN}$$

$$W_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + P_{4y} = 11 + 15,45 + 5,56 - 7,73 = 24,28 \text{ kN}$$

Wartość wypadkowej:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{(-14,53)^2 + (24,28)^2} = 28,30 \text{ kN}$$



Rys. 1-9. Plan sił wg metody analitycznej

Kąt nachylenia wektora wypadkowej W do osi x :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|W_y|}{|W_x|} = \frac{|24,28|}{|-14,53|} = 1,671 \quad ; \beta = 59^{\circ} 06'$$

Momenty statyczne sił względem początku układu współrzędnych:

Znakowanie momentów zgodnie z zasadami przedstawionymi na rysunku 1-1 (moment prawoskrętny – dodatni, lewoskrętny – ujemny).

$$M_{P_{1x}} = P_{1x} \cdot y_1 = 19,05 \cdot 2 = 38,10 \text{ kNm}$$

$$M_{P_{2x}} = P_{2x} \cdot y_2 = -4,14 \cdot 0 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{P_{3x}} = P_{3x} \cdot y_3 = -31,51 \cdot (-3) = 94,53 \text{ kNm}$$

$$M_{P_{4x}} = P_{4x} \cdot y_4 = 2,07 \cdot (-2) = -4,14 \text{ kNm}$$

$$M_{P_{1y}} = P_{1y} \cdot x_1 = -11 \cdot 2 = -22 \text{ kNm}$$

$$M_{P_{2y}} = P_{2y} \cdot x_2 = 15,45 \cdot 4 = 61,80 \text{ kNm}$$

$$M_{P_{3y}} = P_{3y} \cdot x_3 = 5,56 \cdot 2 = 11,12 \text{ kNm}$$

$$M_{P_{4y}} = P_{4y} \cdot x_4 = 7,73 \cdot 1 = 7,73 \text{ kNm}$$

Sumując odpowiednie momenty otrzymamy:

$$M_{P_x} = M_{P_{1x}} + M_{P_{2x}} + M_{P_{3x}} + M_{P_{4x}} = 38,10 + 0 + 94,53 - 4,14 = 128,49 \text{ kNm}$$

$$M_{P_y} = M_{P_{1y}} + M_{P_{2y}} + M_{P_{3y}} + M_{P_{4y}} = -22 + 61,80 + 11,12 + 7,73 = 58,65 \text{ kNm}$$

Współrzędne przyłożenia wypadkowej:

$$x_w = \frac{-M_{P_y}}{W_y} = \frac{-58,65}{24,28} = -2,42 \text{ m}$$

$$y_w = \frac{M_{P_x}}{W_x} = \frac{128,49}{-14,53} = -8,84 \text{ m}$$

Odległość wypadkowej od początku układu współrzędnych:

$$r = \frac{M_0}{W} = \frac{M_{P_x} + M_{P_y}}{W} = \frac{128,49 + 58,65}{28,30} = 6,61 \text{ m}$$

1.2. Warunki równowagi płaskich układów sił

O stanie równowagi punktu materialnego można powiedzieć, gdy układ sił przyłożony do tego punktu nie spowoduje jego ruchu. Inaczej, jeśli na ciało pozostające w spoczynku zacznie oddziaływać układ sił będących w równowadze, to ciało owo nadal pozostanie w spoczynku.

Układ sił pozostaje w równowadze, jeśli spełnione są wykreślne lub analityczne warunki równowagi. Warunki te możemy zapisać jak niżej:

- *płaski zbieżny układ sił* jest w równowadze, jeśli siły tego układu tworzą wielobok zamknięty (wypadkowa układu jest równa zero). Możemy też zapisać

analityczne warunki równowagi – układ pozostaje w równowadze, gdy rzuty wypadkowej na osie x, y przyjętego układu współrzędnych są równe zero:

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad (1-10)$$

- *dowolny płaski układ sił* jest w równowadze, jeśli wielobok sił i wielobok sznurowy jest zamknięty. Wielobokiem sznurowym zamkniętym nazywamy taki, w którym skrajne promienie (pierwszy i ostatni) leżą na jednej prostej. Są to wykreślne warunki równowagi. Natomiast wedle warunków analitycznych układ jest w równowadze, gdy sumy algebraiczne rzutów wszystkich sił układu na osie x, y układu współrzędnych są równe zero oraz gdy suma algebraiczna momentów statycznych wszystkich sił (moment główny) względem dowolnego punktu jest równy zero:

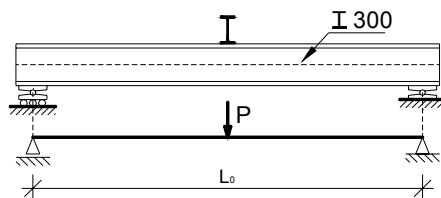
$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad (1-11)$$

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot r_i = \sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (1-12)$$

2. Ogólne wiadomości o płaskich ustrojach prętowych

Wśród spotykanych w budownictwie układów konstrukcyjnych do najprostszych i najpowszechniej stosowanych możemy zaliczyć płaskie ustroje prętowe. Nazwa ta odnosi się do konstrukcji złożonych z prętów prostych lub krzywoliniowych, leżących na jednej płaszczyźnie i połączonych ze sobą oraz z podłożem w sposób sztywny lub przegubowy. Prętami zaś nazywamy elementy, których jeden wymiar – długość, znacznie przekracza pozostałe (szerokość i wysokość). W rozważaniach teoretycznych zakłada się, że pręt jest elementem jednowymiarowym.

Analiza statyczna ustroju prętowego polega na określeniu schematu statycznego, obliczeniu reakcji podporowych oraz wartości sił przekrojowych: momentów zginających (M), sił tnących (T) oraz sił osiowych (N). Schemat statyczny jest wyidealizowanym przedstawieniem konstrukcji na płaszczyźnie, gdzie pręt wyznaczamy zgodnie z jego osią (miejsce geometryczne punktów będących środkami ciężkości przekrojów pręta). Zakładamy, że siły czynne oraz podpory przyłożone są do osi pręta (rys. 2-1).



Rys. 2-1. Przykład przyjęcia schematu statycznego

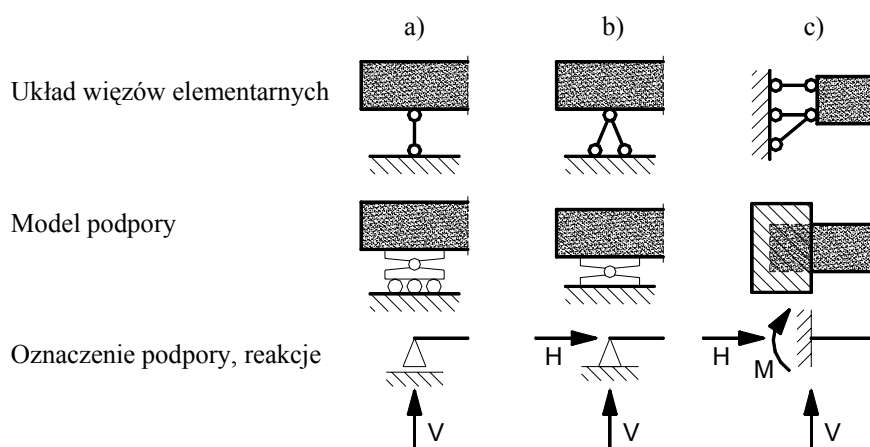
Rozwiązanie ustroju prętowego (wyznaczenie reakcji podporowych oraz sił wewnętrznych) można przeprowadzić na drodze:

- **analitycznej:**
 - *metoda przepisów funkcyjnych* (pełne rozwiązanie analityczne) polega na rozbiciu układu na przedziały, w których siły przekrojowe można wyrazić w postaci funkcji zmiennej x ,
 - *metoda rzędnych charakterystycznych* (skrócone rozwiązanie analityczne) polega na wyznaczeniu wartości sił przekrojowych tylko w rzędnych charakterystycznych, których położenie określa się na podstawie przewidywanego kształtu wykresu (np. punkty przyłożenia sił),
- **graficznej** - wykorzystującej konstrukcję wieloboku sił oraz wieloboku sznurowego według zasad omówionych szczegółowo w rozdziale 1.

2.1. Geometryczna niezmienność i statyczna wyznaczalność

Każdy ustrój prętowy, rozpatrywany jako układ konstrukcyjny, musi być ciałem nieswobodnym, inaczej - geometrycznie niezmiennym. Aby taką geometryczną niezmienność ustroju płaskiego zapewnić, należy odebrać jego wszystkie trzy stopnie swobody (przesunięcie poziome i pionowe oraz obrót). W praktyce oznacza to połączenie tarczy (pręta) z podłożem lub inną tarczą (prętem) za pośrednictwem specjalnych podpór o różnej liczbie i układzie więzów elementarnych:

- *podpora przegubowo-przesuwna* – jest zbudowana z pojedynczej więzi elementarnej. Odbiera jeden stopień swobody, eliminując przesunięcie w jednym kierunku, a zezwalając na przesunięcie w drugim oraz swobodny obrót. Występuje tu jedna reakcja o kierunku prostopadłym do płaszczyzny przesunięcia (rys. 2-2a),
- *podpora przegubowa* – składa się z dwóch nierównoległych więzów elementarnych. Odbiera dwa stopnie swobody, ponieważ eliminuje przesunięcie w dwóch kierunkach, a zezwala na obrót wokół punktu podparcia. Mamy tu do czynienia z jedną reakcją o nieznanym kierunku – składowa pozioma i pionowa (rys. 2-2b),
- *szttywne utwierdzenie* – jest to podpora zbudowana z trzech więzów nierównoległych i nie przecinających się w jednym punkcie. Odbiera trzy stopnie swobody eliminując przesunięcie w dwóch kierunkach i obrót. Występuje tu jedna reakcja podporowa o nieznanym kierunku oraz moment podporowy (rys. 2-2c).



Rys. 2-2. Rodzaje podpór: a) przegubowo-przesuwna, b) przegubowa, c) sztywna

Analiza kinematyczna układu prętowego polega na sprawdzeniu warunków geometrycznej niezmienności (GN), które możemy zapisać:

1. Jeżeli przez t oznaczymy liczbę tarcz (prętów), a przez e liczbę więzów elementarnych (w tej liczbie uwzględniamy również dodatkowe dwie więzi na każde połączenie przegubowe pomiędzy tarczami), to *warunek konieczny geometrycznej niezmienności* możemy zapisać następującą zależnością:

$$e = 3 \cdot t \text{ -układ GN i statycznie wyznaczalny (izostaticzny),}$$

jeśli natomiast: $e > 3 \cdot t$ -układ GN i statycznie niewyznaczalny (hiperstatyczny),

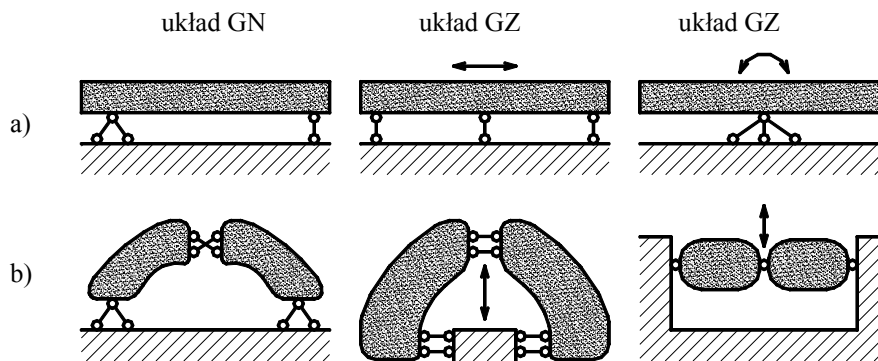
$$e < 3 \cdot t \text{ -układ geometrycznie zmienny (GZ).}$$

Statycznie wyznaczalnym nazywamy ustrój, w którym liczba reakcji podporowych (więzi elementarnych) jest równa liczbie niezależnych równań równowagi. Możemy zatem jednoznacznie wyznaczyć wartości reakcji podporowych.

Ustrojem statycznie niewyznaczalnym będziemy natomiast nazywać taki, w którym liczba więzi elementarnych jest większa niż potrzeba do jego unieruchomienia. W takim przypadku, rozwiązując niezależne równania równowagi, otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań na siły reakcji podporowych.

2. *Warunek konieczny i wystarczajacy geometrycznej niezmiennosci polaczenia:*

- dwóch tarcz (prętów) – definiujemy jako połączenie trzema więzami nierównoległymi oraz nie przecinającymi się w jednym punkcie (rys. 2-3a),
- trzech tarcz (prętów) – określamy jako połączenie każdych dwóch tarcz ze sobą co najmniej dwoma więzami w taki sposób, aby wszystkie więzy jednocześnie nie były do siebie równoległe ani też punkty przecięcia się kierunków więzów łączących każde dwie tarcze nie leżały na jednej linii prostej (rys. 2-3b).



Rys. 2-3. Interpretacja twierdzeń o geometrycznie niezmiennym połączeniu:
a) dwóch tarcz, b) trzech tarcz

2.2. Reakcje podporowe

Ustrój konstrukcyjny, określony jako geometrycznie niezmienny według zasad omówionych w punkcie 2.1.1, pozostaje w równowadze nawet wówczas, gdy działający na niego układ sił zewnętrznych czynnych nie jest układem sił równoważących się. W miejscach podparcia ustroju obciążonego takim układem sił powstają bowiem reakcje podporowe (siły biernie). Ich wyznaczenie polega na określeniu i rozwiązaniu analitycznych (równania 1-11, 1-12) lub wykreślnych warunków równowagi zgodnie z zasadami podanymi rozdziale 1. Siły zewnętrzne (czynne i biernie) działające na ustrój prętowy tworzą płaski, zbieżny lub dowolny układ sił.

2.3. Siły przekrojowe

Omówione wcześniej zasady ustalania wartości reakcji podporowych pozwalają na szczegółowe określenie wszystkich sił zewnętrznych działających na układ konstrukcyjny. Jednak ich znajomość nie mówi wszystkiego o ustroju, w którym występują też *siły przekrojowe* wyrażające oddziaływanie sił zewnętrznych w poszczególnych punktach (przekrojach) ustroju prętowego.

Weźmy belkę swobodnie podpartą, obciążoną jak na rysunku 2-4. Siły czynne P_1, P_2 działające na belkę powodują powstanie reakcji podporowych (sił biernych) w więziach A i B wyznaczonych na podstawie warunków równowagi. Jeżeli rozdzielimy myślowo pręt AB dowolnym przekrojem α - α odległym o x_α od podpory A , to wzajemne oddziaływania tak powstałych części zastępujemy siłami

przyłożonymi w tym przekroju. Siły te zapewniają równowagę obu części, a nazywamy je siłami przekrojowymi, wśród których możemy wyróżnić: siły osiowe N_α (podłużne), siły tnące T_α (poprzeczne) oraz momenty zginające M_α .

Moment zginający w danym przekroju α - α jest sumą momentów statycznych sił działających z jednej strony tego przekroju względem jego środka ciężkości. Stosując warunek równowagi $\Sigma M=0$ dla przykładowego elementu (belki) widzimy, że:

$$M_L - M_P = 0, \quad (2-1)$$

gdzie: M_L ; M_P - odpowiednio moment zginający dla lewej i prawej strony pręta.

Siła tnąca (poprzeczna) w danym przekroju α - α jest sumą rzutów sił działających po jednej stronie pręta na kierunek prostopadły do jego osi. Stosując warunek równowagi $\Sigma Y=0$ dla elementu przykładowego widzimy, że:

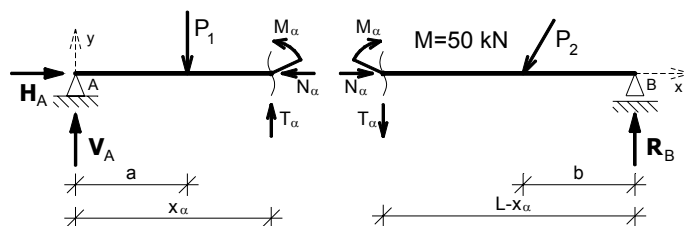
$$T_L - T_P = 0, \quad (2-2)$$

gdzie: T_L ; T_P - odpowiednio siła poprzeczna dla lewej i prawej strony pręta.

Siła osiowa (podłużna) w danym przekroju α - α jest sumą rzutów sił działających po jednej stronie pręta na kierunek styczny do jego osi. Stosując warunek równowagi $\Sigma X=0$ dla elementu przykładowego widzimy, że:

$$N_L - N_P = 0, \quad (2-3)$$

gdzie: N_L ; N_P - odpowiednio siła podłużna dla lewej i prawej strony pręta.



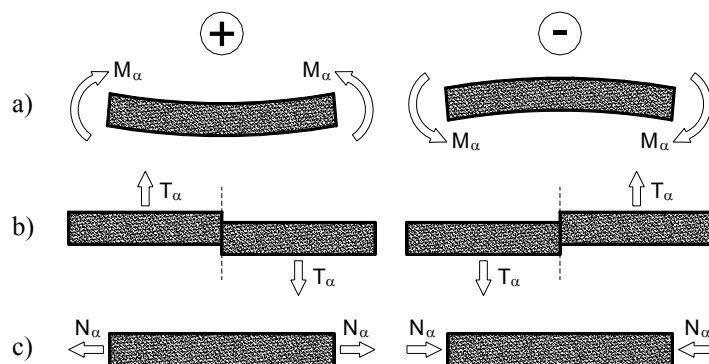
Rys. 2-4. Wyznaczenie sił wewnętrznych w dowolnym przekroju α - α

Pomiędzy siłą tnącą a momentem zginającym zachodzi zależność, według której możemy powiedzieć, że siła tnąca T_α w dowolnym przekroju α - α jest pierwszą pochodną momentu zginającego M_α względem zmiennej x będącej współrzędną przekroju α - α . Na podstawie tej zależności możemy określić następujące wnioski:

- jeżeli na pewnej długości pręta $T_\alpha=0$, to moment zginający M_α jest stały,
- jeżeli w pewnym przekroju α - α siła tnąca T_α zmienia znak, to moment zginający M_α osiąga ekstremum (przy zmianie znaku z plusa na minus M_α osiąga maksimum, przy zmianie z minusa na plus – minimum).

Ponadto przy sporządzaniu wykresów sił wewnętrznych należy pamiętać, że w punkcie przyłożenia siły skupionej P występuje nieciągłość funkcji T_α (skok o wartość P), natomiast w punkcie przyłożenia momentu skupionego M – nieciągłość funkcji M_α (skok o wartość M).

- Znakowanie sił wewnętrznych jest umowne. Najczęściej przyjmujemy zasadę, że:
- moment zginający określamy znakiem dodatnim, jeśli jego działanie powoduje obrót lewej części pręta względem prawej, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Inaczej mówiąc, moment taki wygina pręt ku dołowi (rys. 2-5a). Dolne włókna tak zginanego przekroju są rozciągane, a górne ściskane.
- W zadaniach praktycznych należy pamiętać, że wykresy momentów zginających odkładamy zawsze po stronie włókien rozciąganych!***
- siła poprzeczna przyjmuje znak dodatni, jeśli powoduje przemieszczenie lewej strony rozpatrywanego pręta ku górze, prawej natomiast ku dołowi (rys. 2-5b),
 - siły podłużne określamy jako dodatnie, gdy ich działanie powoduje rozciąganie pręta – dwa sąsiednie przekroje oddalają się od siebie (rys. 2-5c).



Rys. 2-5. Zasady znakowania sił wewnętrznych: a) momentów zginających, b) sił tnących, c) sił osiowych

3. Belki proste

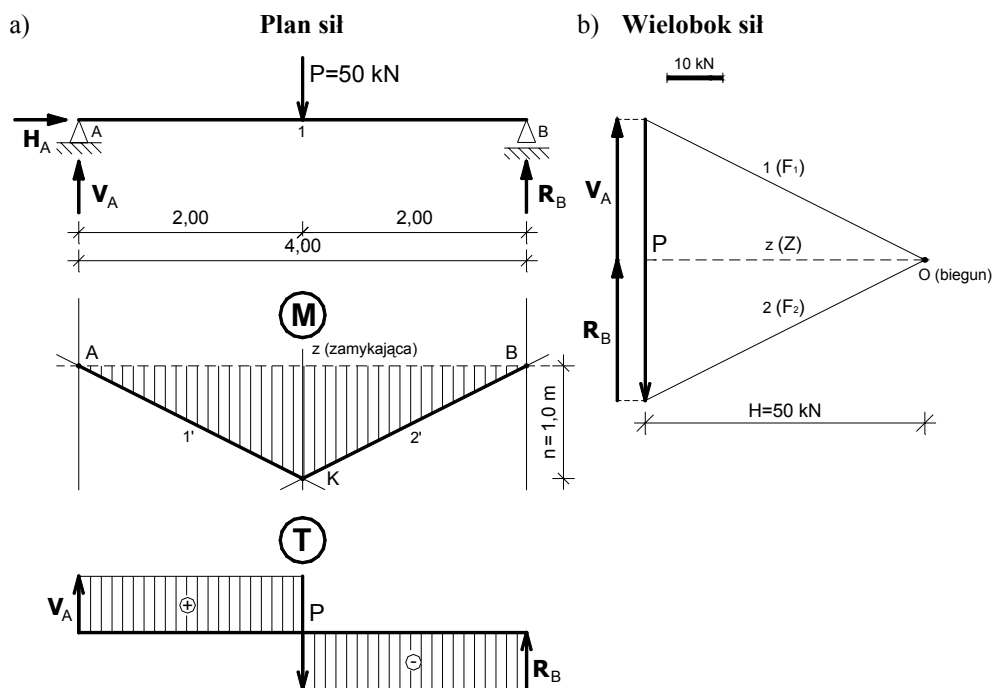
3.1. Wiadomości ogólne

Belką nazywamy pręt prosty podparty w sposób zapewniający jego geometryczną niezmiennosc i obciążony siłami prostopadłymi bądź ukośnymi do jego osi. Na skutek tak działających obciążeń belka jest głównie zginana i ścinana.

3.2. Przykłady liczbowe

Przykład 3-1. Rozwiązać wykreślnie belkę swobodnie podpartą (rys. 3-1).

Rozwiązanie rozpoczynamy od narysowania w skali długości belki oraz działającego na nią obciążenia zewnętrznego (rys. 3-1a), które tworzy dowolny układ sił. Następnie sporządzamy w przyjętej skali wielobok sił (rys. 3-1b) oraz przyjmujemy położenie bieguna O , z którego prowadzimy promienie 1 i 2 . Siła P jest sumą wektorową sił F_1 , F_2 , odpowiadającym promieniom 1 , 2 . Z dowolnego punktu K , przyjętego na prostej działania siły P , wykreślamy na planie siły proste $1'$, $2'$ równoległe do promieni 1 , 2 . Prosta $1'$ przecina się z kierunkiem działania reakcji V_A w punkcie A , natomiast prosta $2'$ z kierunkiem reakcji R_B w punkcie B . Szukana zamykająca znajduje się na kierunku AB . Reakcje podporowe są sumami wektorowymi sił F_1 i Z (reakcja V_A) oraz F_2 i Z (reakcja R_B). Zamykającą przenosimy równoległe do bieguna O na wieloboku sił, określając wielkości reakcji podporowych.

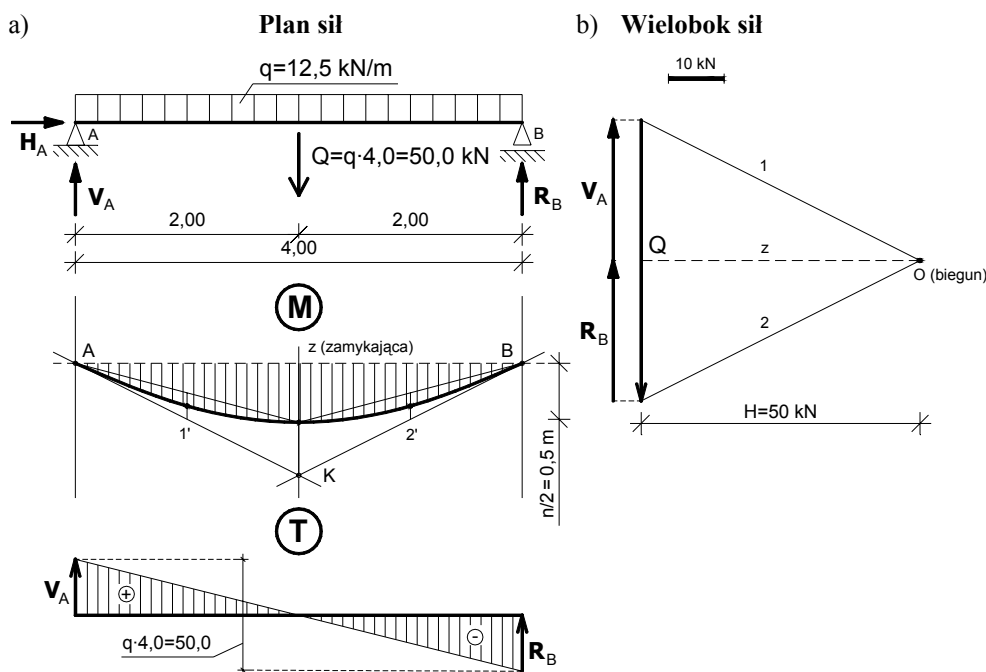


Rys. 3-1. Odczytano: $V_A=25$ kN; $R_B=25$ kN; $M_I=n \cdot H=1,0 \cdot 50=50$ kNm

Pole wyznaczone pomiędzy prostymi l' i l'' , a zamykającą z określa wykres momentów zginających. Wartość liczbową momentu zginającego w przekroju l belki jest iloczynem długości odcinków n [m] i H [kN] – $M_l = n \cdot H$.

Przykład 3-2. Rozwiązać wykreslnie belkę swobodnie podpartą (rys. 3-2).

Obciążenie równomiernie rozłożone zastępujemy wypadkową $Q=q \cdot l$ przyłożoną w środku ciężkości tego obciążenia, następnie wyznaczamy reakcje podporowe dla takiego schematu zastępczego, jak w przykładzie 3-1. Wykres momentów zginających wykreślimy uwzględniając różnicę między wartościami wyznaczonymi dla obciążenia siłą skupioną $Q=q \cdot l$ ($M_{\max.} = 0,25 \cdot Q \cdot l = 0,25 \cdot q \cdot l^2$), a wartościami odpowiadającymi obciążeniu równomiernie rozłożonemu q ($M_{\max.} = 0,125 \cdot q \cdot l^2$). Różnicę tę uwzględnimy wyznaczając środek odcinka n będący wierzchołkiem paraboli określającej rozkład momentów zginających (n - odległość zamykającej od punktu K).

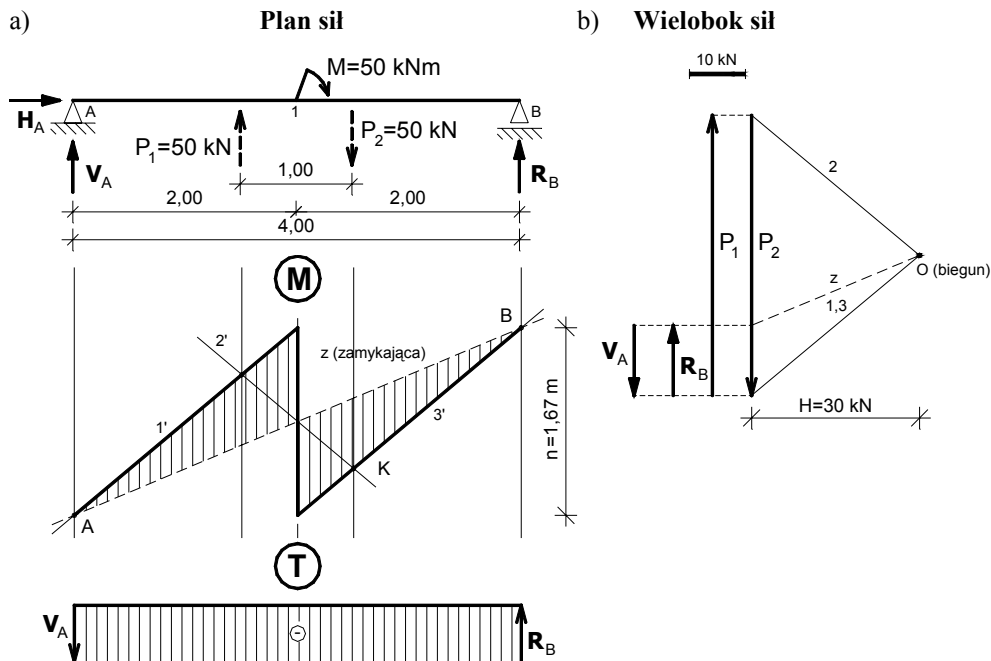


Rys. 3-2. Odczytano: $V_A = 25 \text{ kN}$; $R_B = 25 \text{ kN}$; $M_l = n \cdot H = 0,5 \cdot 50 = 25 \text{ kNm}$

Przykład 3-3. Rozwiązać wykreslnie belkę swobodnie podpartą (rys. 3-3).

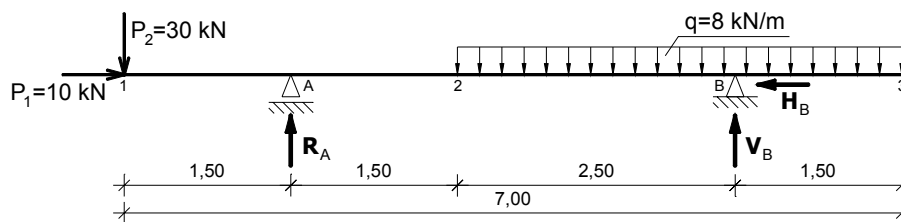
Dla potrzeb rozwiązania graficznego zadane obciążenie momentem skupionym zastępujemy parą sił, których działanie powinno odpowiadać działaniu tegoż momentu. Przyjmijmy więc, siły $P_1 = P_2 = M$ przyłożone symetrycznie względem punktu przyłożenia momentu skupionego. Odległość r między prostymi działania sił P_1 , P_2 ustalimy równą 1,0 m. Para sił oddziałuje momentem statycznym o wartości $M = P_1 \cdot r$ (gdzie $P_1 = M$, $r = 1,0$), zatem układ taki zastępuje działanie momentu skupionego danego w zadaniu.

Przeprowadzając rozwiązanie według omówionych już zasad (przykład 3-1), wprowadzamy korektę wykresu momentów zginających. Rzeczywisty jego przebieg wyznaczamy zgodnie z prostymi 1' oraz 3', pomiędzy którymi uzyskujemy skok w miejscu przyłożenia momentu skupionego. Wartość tego skoku odpowiada wartości zadanego momentu skupionego M .



Rys. 3-3. Odczytano: $V_A=12,5$ kN; $R_B=12,5$ kN; $M_I=n \cdot H=1,67 \cdot 30 \approx 50$ kNm

Przykład 3-4. Rozwiązać belkę wspornikową obciążoną jak na rysunku 3-4.

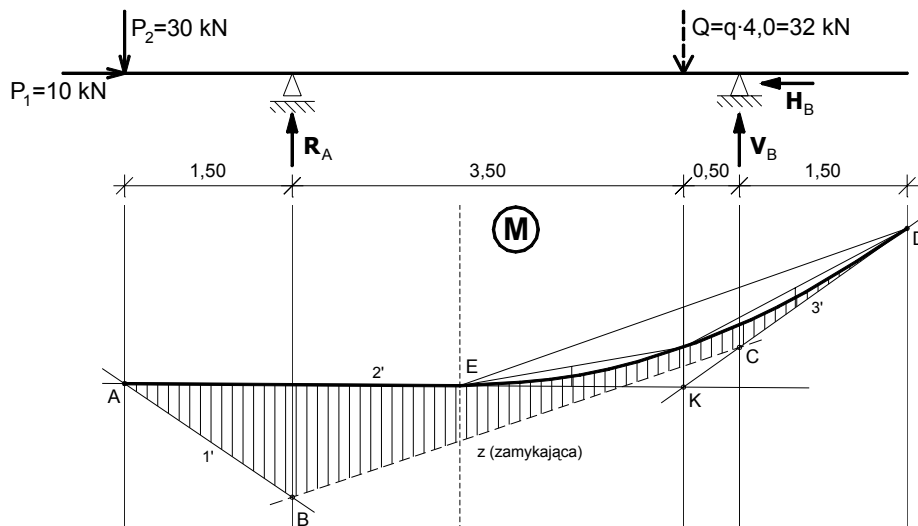


Rys. 3-4. Schemat statyczny

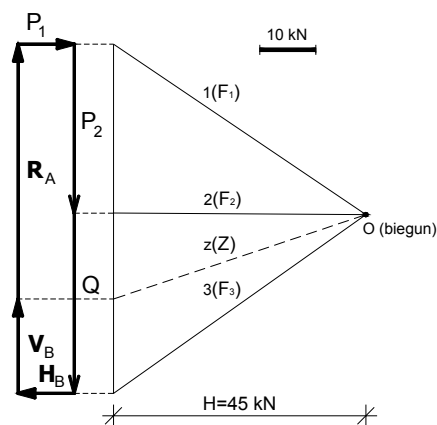
ROZWIĄZANIE GRAFICZNE

W rozwiązaniu wykreślnym obciążenie równomiernie rozłożone zastępujemy wypadkową $Q=q \cdot l$, przyłożoną w środku ciężkości tego obciążenia (analogicznie jak w przykładzie 3-2). Dla takiego schematu sporządzamy plan sił (rys. 3-5) oraz wielobok sił (rys. 3-6). Z dowolnie określonego bieguna θ prowadzimy promienie 1, 2, 3 odpowiadające siłom F_1, F_2, F_3 , (każda siła czynna jest sumą wektorową sił

odpowiadających promieniom, np. siła Q jest sumą wektorową sił F_2 i F_3). Z dowolnie obranego punktu K na kierunku działa wypadkowej Q prowadzimy proste $2'$ oraz $3'$ równoległe do promieni 2 i 3 . Prosta $2'$ przecina się z kierunkiem działania siły P_2 w punkcie A , przez który prowadzimy prostą $1'$, przecinającą się z kierunkiem działania reakcji R_B w punkcie B . Prosta $3'$ przecina się z kierunkiem działania reakcji V_B w punkcie C . Kierunek BC jest kierunkiem poszukiwanej zamykającej z . Prowadząc na wieloboku sił prostą równoległą do zamykającej z określamy wartości reakcji podporowych, wiedząc, że reakcja R_A jest sumą wektorową sił F_1 i Z , natomiast reakcja V_B – sił F_2 i Z . Na wykresie momentów zginających należy uwzględnić korektę w obszarze oddziaływania obciążenia równomiernie rozłożonego q (zastąpionego wypadkową $Q=q \cdot l$). W tym celu prowadzimy pomocniczą prostą na kierunku DE . Dzieląc odcinek między prostą DE a punktem K na połowę, określimy wierzchołek paraboli, wyznaczającej wykres momentów zginających.



Rys. 3-5. Plan sił [m]



Rys. 3-6. Wielobok sił [kN] – odczytano: $R_A=45,3$ kN; $V_B=16,7$ kN

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Reakcje podporowe:

$$(1) \quad \sum M_A = -P_2 \cdot 1,5 + q \cdot 4 \cdot 3,5 - V_B \cdot 4 = 0$$

$$(2) \quad \sum M_B = -q \cdot 4 \cdot 0,5 + R_A \cdot 4 - P \cdot 5,5 = 0$$

$$(3) \quad \sum X = P_1 - H_B = 0$$

$$z(1) \quad V_B = (-30 \cdot 1,5 + 8 \cdot 4 \cdot 3,5) / 4 = 16,75 \text{ kN}$$

$$z(2) \quad R_A = (8 \cdot 4 \cdot 0,5 + 30 \cdot 5,5) / 4 = 42,25 \text{ kN}$$

$$z(3) \quad H_B = 10 \text{ kN}$$

$$\textbf{Kontrola:} \quad \sum Y = R_A + V_B - P_2 - q \cdot 4 = 16,75 + 42,25 - 30 - 8 \cdot 4 = 0$$

Sily przekrojowe M,T,N:

W strefie działania obciążenia równomiernie rozłożonego wartości sił przekrojowych wyznaczamy metodą przepisów funkcyjnych, polegającą na wyznaczeniu wartości tych sił w dowolnym punkcie 0 przedziału jako funkcji zmiennej x . W pozostałych przedziałach zastosujemy metodę rzędnych charakterystycznych.

Przedział 1A

$$T_{1A} = -P_2 = -30 \text{ kN}$$

$$M_1 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_A^L = -P_2 \cdot 1,5 = -30 \cdot 1,5 = -45 \text{ kNm}$$

$$N_{1A} = -P_1 = -10 \text{ kN}$$

Przedział A2

$$T_{A2} = -P_2 + R_A = -30 + 42,25 = 12,25 \text{ kN}$$

$$M_A^P = M_A^L = -45 \text{ kNm}$$

$$M_2^L = -P_2 \cdot 3 + R_A \cdot 1,5 = -30 \cdot 3 + 42,25 \cdot 1,5 = -22,13 \text{ kNm}$$

$$N_{A2} = -P_1 = -10 \text{ kN}$$

Przedział 2B $x \in \langle 3 ; 5,5 \rangle$

$$T_{2B} = -P_2 + R_A - q \cdot (x - 3)$$

$$T_2^P(x=3) = -30 + 42,25 - 8 \cdot (3 - 3) = 12,25 \text{ kN}$$

$$T_B^L(x=5,5) = -30 + 42,25 - 8 \cdot (5,5 - 3) = -4,75 \text{ kN}$$

$$-30 + 42,25 - 8 \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow x = 4,91 \text{ m (lokalne ekstremum M)}$$

$$M_{2B} = -P_2 \cdot x + R_A \cdot (x - 1,5) - 0,5 \cdot q \cdot (x - 3)^2$$

$$M_2^P(x=3) = -30 \cdot 3 + 42,25 \cdot (3 - 1,5) - 0,5 \cdot 8 \cdot (3 - 3)^2 = -22,13 \text{ kNm}$$

$$M_{\text{ext.}}(x=4,91) = -30 \cdot 4,91 + 42,25 \cdot (4,91 - 1,5) - 0,5 \cdot 8 \cdot (4,91 - 3)^2 = -7,59 \text{ kNm}$$

$$M_B^L(x=5,5) = -30 \cdot 5,5 + 42,25 \cdot (5,5 - 1,5) - 0,5 \cdot 8 \cdot (5,5 - 3)^2 = -9 \text{ kNm}$$

$$N_{2B} = -P_1 = -10 \text{ kN}$$

Przedział B3 $x \in \langle 5,5 ; 7 \rangle$

$$T_{B3} = -P_2 + R_A - q \cdot (x-3) + V_B$$

$$T_B^P(x=5,5) = -30 + 45,25 - 8 \cdot (5,5-3) + 16,75 = 12 \text{ kN}$$

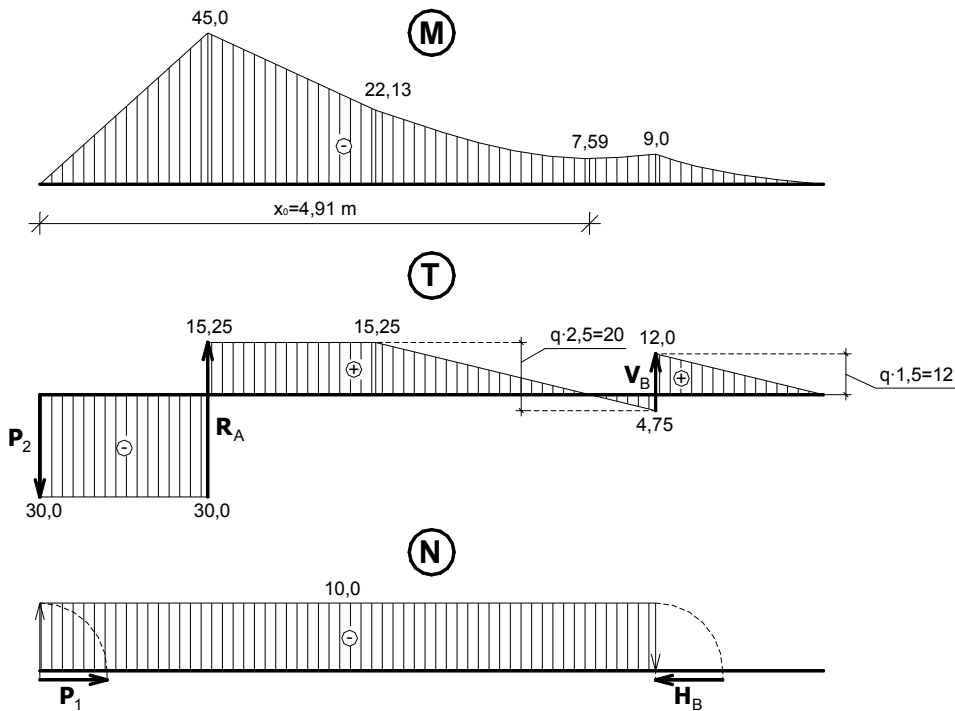
$$T_3^L(x=7) = -30 + 45,25 - 8 \cdot (7-3) + 16,75 = 0 \text{ kN}$$

$$M_{B3} = -P_2 \cdot x + R_A \cdot (x-1,5) - 0,5 \cdot q \cdot (x-3)^2 + V_B \cdot (x-5,5)$$

$$M_B^P(x=5,5) = -30 \cdot 5,5 + 45,25 \cdot (5,5-1,5) - 0,5 \cdot 8 \cdot (5,5-3)^2 + 16,75 \cdot (5,5-5,5) = -9 \text{ kNm}$$

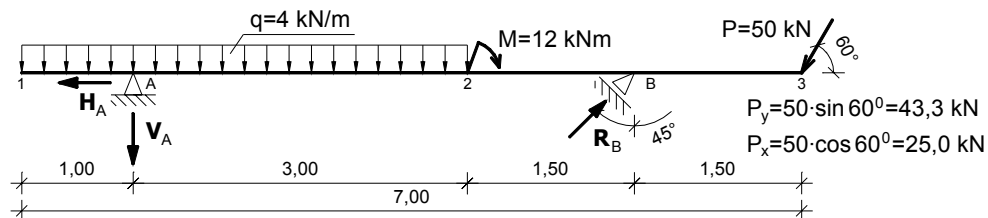
$$M_3^L(x=7) = -30 \cdot 7 + 45,25 \cdot (7-1,5) - 0,5 \cdot 8 \cdot (7-3)^2 + 16,75 \cdot (7-5,5) = 0 \text{ kNm}$$

$$N_{B3} = -P_1 + H_B = -10 + 10 = 0 \text{ kN}$$



Rys. 3-7. Wykresy sił przekrojowych M, T, N

Przykład 3-5. Rozwiązać belkę wspornikową obciążoną jak na rysunku 3-8.

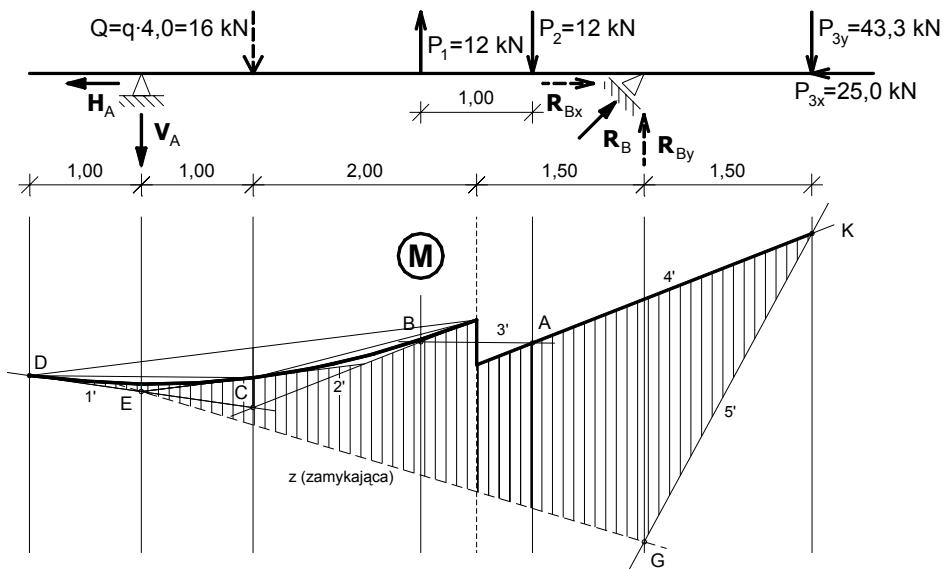


Rys. 3-8. Schemat statyczny

ROZWIĄZANIE GRAFICZNE

Obciążenie równomiernie rozłożone q zastępujemy siłą skupioną $Q=q \cdot l$, natomiast moment skupiony M - parą sił $P_1=P_2=M$. Obciążenie zastępcze Q, P_1, P_2 oraz pozostałe siły zewnętrzne przedstawiamy na planie sił (rys. 3-9). Na wieloboku sił (rys. 3-10) zaznaczamy wszystkie siły czynne, dające rzut na oś pionową (Q, P_1, P_2 i P_{3y}) oraz obieramy biegun θ , z którego prowadzimy promienie $1, 2, 3, 4$ i 5 (odpowiadające siłom F_1, F_2, F_3, F_4 i F_5). Przyjmujemy dowolny punkt K na prostej działania siły P_3 i rysujemy proste $4', 5'$ równoległe do promieni $4, 5$ (siła P_3 jest sumą wektorową sił F_4 i F_5). Przez punkt przecięcia promienia $4'$ z kierunkiem działania siły P_2 (punkt A) prowadzimy prostą $3'$, która, przecinając się z kierunkiem działania siły P_1 , wyznacza kolejny wierzchołek wieloboku sznurowego (punkt B). Prosta $2'$, poprowadzona przez punkt B , przecina się z kierunkiem działania wypadkowej obciążenia równomiernie rozłożonego Q w punkcie C , przez który prowadzimy prostą $1'$. Prosta $1'$ przecina się z kierunkiem działania reakcji V_A w punkcie E , natomiast prosta $5'$ z kierunkiem reakcji R_B w punkcie G . Szukana zamykająca znajduje się na kierunku EG . Reakcje podporowe są sumami wektorowymi sił F_1 i Z (reakcja V_A) oraz F_5 i Z (reakcja R_B). Przenosząc zamykającą z do bieguna θ na wieloboku sił określimy wartość reakcji podporowych.

Wykres momentów zginających należy skorygować stosownie do wprowadzonych obciążeń zastępczych. W punkcie przyłożenia momentu M wykres będzie przesunięty między prostymi $2'$ i $4'$ (skok o wartość M). Natomiast w strefie działania obciążenia q prowadzimy prostą, łączącą wyznaczony już punkt określający wartość momentu zginającego w miejscu przyłożenia momentu skupionego z punktem D . Środek odcinka między tak poprowadzoną prostą, a punktem C określa wierzchołek paraboli, wyznaczającej rozkład momentów zginających.



Rys. 3-9. Plan sił [m]

$$M_{A2} = -0,5 \cdot q \cdot x^2 - V_A \cdot (x-1)$$

$$M_A^P(x=1) = M_A^L = -2 \text{ kNm}$$

$$M_2^L(x=4) = -0,5 \cdot 4 \cdot 4^2 - 4,66 \cdot 3 = -45,98 \text{ kNm}$$

$$N_{A2} = H_A = 38,96 \text{ kN} \quad (\text{rozciąganie})$$

Przedział 2B

$$T_{2B} = -q \cdot 4 - V_A = -4 \cdot 4 - 4,66 = -20,66 \text{ kN}$$

$$M_B^P = -0,5 \cdot q \cdot (4,0)^2 - V_A \cdot 3,0 + M = -0,5 \cdot 4 \cdot (4,0)^2 - 4,66 \cdot 3,0 + 12 = -33,98 \text{ kNm}$$

$$M_B^L = -q \cdot 4,0 \cdot 3,5 - V_A \cdot 4,5 + M = -4 \cdot 4,0 \cdot 3,5 - 4,66 \cdot 4,5 + 12 = -64,97 \text{ kNm}$$

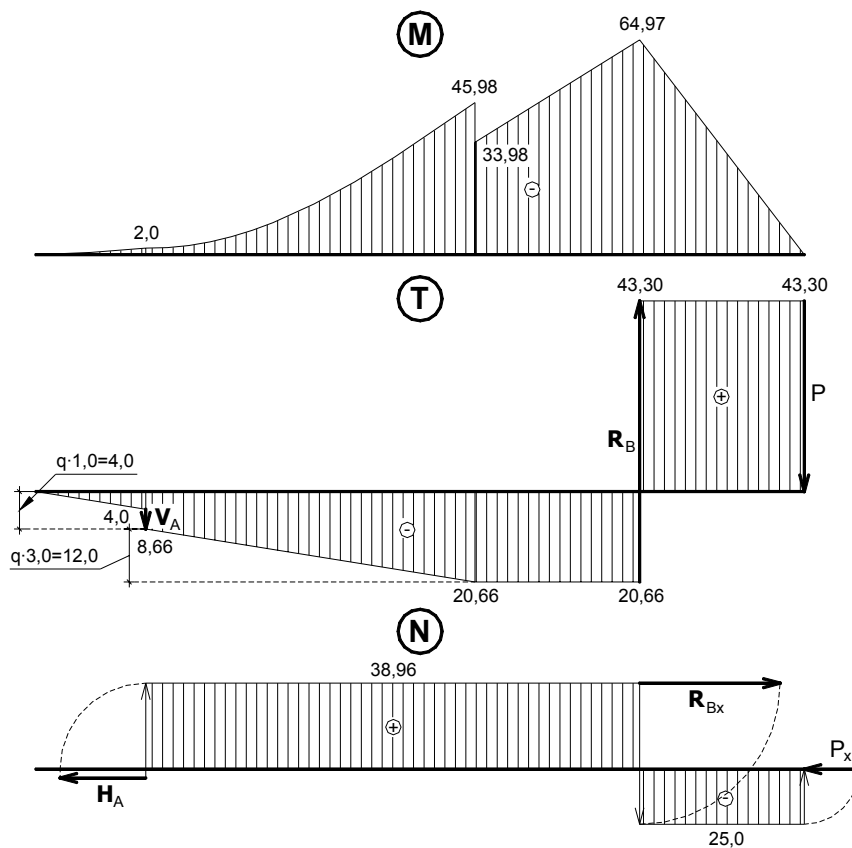
$$N_{2B} = H_A = 38,96 \text{ kN} \quad (\text{rozciąganie})$$

Przedział B3

$$T_{B3} = -q \cdot 4 - V_A + R_{By} = -4 \cdot 4 - 4,66 + 63,96 = 43,30 \text{ kN}$$

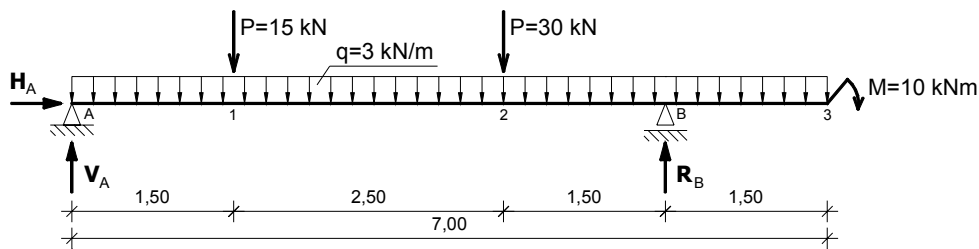
$$M_B^P = P_y \cdot 1,5 = 43,3 \cdot 1,5 = 64,95 \text{ kNm} \cong M_B^L \quad (\text{kontrola})$$

$$N_{B3} = H_A - R_{Bx} = 38,96 - 63,96 = -25 \text{ kN} \quad (\text{ściskanie})$$



Rys. 3-13. Wykresy sił przekrojowych M, T, N

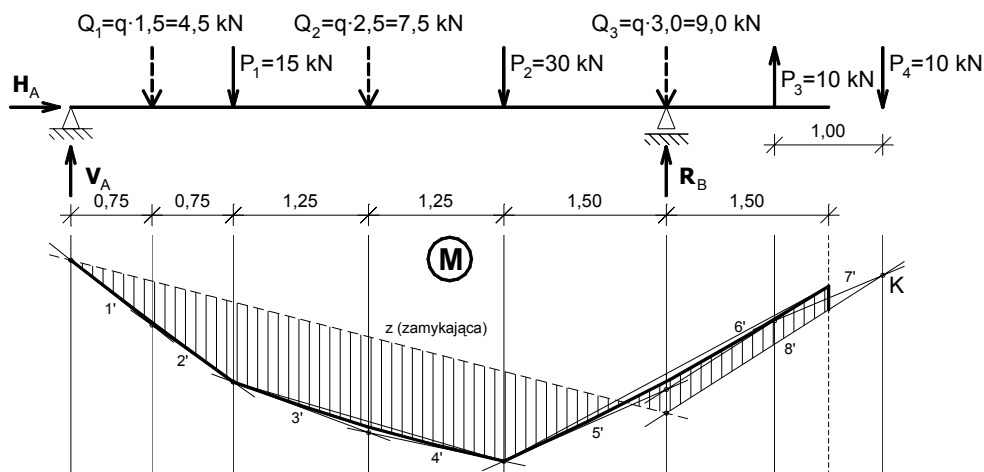
Przykład 3-6. Rozwiązać belkę wspornikową obciążoną jak rysunku 3-14.



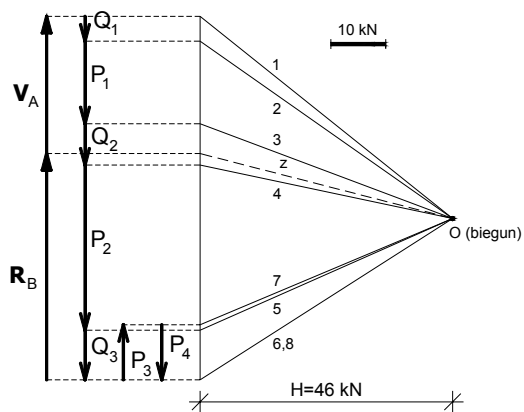
Rys. 3-14. Schemat statyczny

ROZWIĄZANIE GRAFICZNE

Obciążenie q podzielimy na trzy przedziały ($A1$, 12 , 23), zastępując każdy wypadkową Q . Moment skupiony M zastąpimy parą sił $P_3=P_4=M$.



Rys. 3-15. Plan sił [m]



Rys. 3-16. Wielobok sił [kN] – odczytano: $V_A=24,9$ kN; $R_B=41,1$ kN

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Reakcje podporowe:

$$(1) \quad \sum M_A = q \cdot 7 \cdot 3,5 + P_1 \cdot 1,5 + P_2 \cdot 4 + M - R_B \cdot 5,5 = 0$$

$$(2) \quad \sum M_B = -q \cdot 7 \cdot 2 - P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 1,5 + V_A \cdot 5,5 + M = 0$$

$$(3) \quad \sum X = H_A = 0$$

$$z(1) \quad R_B = (3 \cdot 7 \cdot 3,5 + 15 \cdot 1,5 + 30 \cdot 4 + 10) / 5,5 = 41,09 \text{ kN}$$

$$z(2) \quad V_A = (3 \cdot 7 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 30 \cdot 1,5 - 10) / 5,5 = 24,91 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrola: } \sum Y = V_A + R_B - q \cdot 7 - P_1 - P_2 = 24,91 + 41,09 - 3 \cdot 7 - 15 - 30 = 0$$

Sily przekrojowe M,T,N:

Sily wewnętrzne będziemy wyznaczać metodą przepisów funkcyjnych tylko w przedziałach działania obciążenia równomiernie rozłożonego.

Przedział A1 $x \in \langle 0 ; 1,5 \rangle$

$$T_{A1} = V_A - q \cdot x$$

$$T_A(x=0) = 24,91 - 3 \cdot 0 = 24,91 \text{ kN}$$

$$T_1^L(x=1,5) = 24,91 - 3 \cdot 1,5 = 20,41 \text{ kN}$$

$$M_{A1} = V_A \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2$$

$$M_A(x=0) = 24,91 \cdot 0 - 0,5 \cdot 3 \cdot 0^2 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_1^L(x=1,5) = 24,91 \cdot 1,5 - 0,5 \cdot 3 \cdot (1,5)^2 = 33,99 \text{ kNm}$$

Przedział 12 $x \in \langle 1,5 ; 4 \rangle$

$$T_{12} = V_A - q \cdot x - P_1$$

$$T_1^P(x=1,5) = 24,91 - 3 \cdot 1,5 - 15 = 5,41 \text{ kN}$$

$$T_2^L(x=4) = 24,91 - 3 \cdot 4 - 15 = -2,09 \text{ kN}$$

$$24,91 - 3 \cdot x - 15 = 0 \rightarrow x = 3,30 \text{ m (lokalne ekstremum momentu gnącego)}$$

$$M_{12} = V_A \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2 - P_1 \cdot (x - 1,5)$$

$$M_1^P(x=1,5) = 24,91 \cdot 1,5 - 0,5 \cdot 3 \cdot (1,5)^2 - 15 \cdot (1,5 - 1,5) = 33,99 \text{ kNm}$$

$$M_{\text{ext.}}(x=3,3) = 24,91 \cdot 3,3 - 0,5 \cdot 3 \cdot (3,3)^2 - 15 \cdot (3,3 - 1,5) = 38,87 \text{ kNm}$$

$$M_2^L(x=4) = 24,91 \cdot 4 - 0,5 \cdot 3 \cdot 4^2 - 15 \cdot (4 - 1,5) = 38,14 \text{ kNm}$$

Przedział 2B $x \in \langle 4 ; 5,5 \rangle$

$$T_{2B} = V_A - q \cdot x - P_1 - P_2$$

$$T_2^P(x=4) = 24,91 - 3 \cdot 4 - 15 - 30 = -32,09 \text{ kN}$$

$$T_2^L(x=5,5) = 24,91 - 3 \cdot 5,5 - 15 - 30 = -36,59 \text{ kN}$$

$$M_{2B} = V_A \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2 - P_1 \cdot (x - 1,5) - P_2 \cdot (x - 4)$$

$$M_2^P(x=4) = 24,91 \cdot 4 - 0,5 \cdot 3 \cdot 4^2 - 15 \cdot (4 - 1,5) - 30 \cdot (4 - 4) = 38,14 \text{ kNm}$$

$$M_B^L(x=5,5) = 24,91 \cdot 5,5 - 0,5 \cdot 3 \cdot (5,5)^2 - 15 \cdot (5,5 - 1,5) - 30 \cdot (5,5 - 4) = -13,37 \text{ kNm}$$

Przedział B3 $x \in \langle 5,5 ; 7 \rangle$

$$T_{B3} = V_A - q \cdot x - P_1 - P_2 + R_B$$

$$T_B^P(x=5,5) = 24,91 - 3 \cdot 5,5 - 15 - 30 + 41,09 = 4,50 \text{ kN}$$

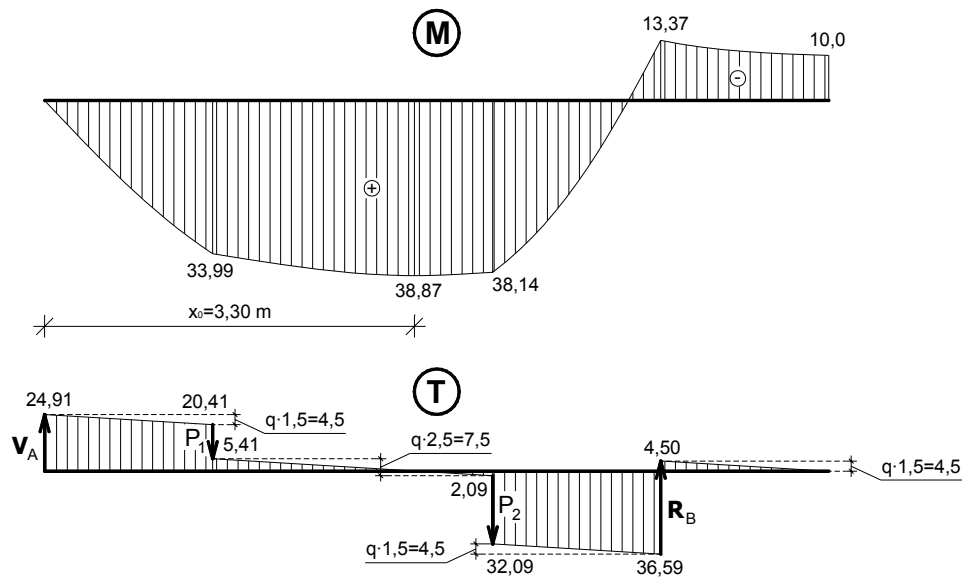
$$T_3(x=7) = 24,91 - 3 \cdot 7 - 15 - 30 + 41,09 = 0 \text{ kN}$$

$$M_{3B} = M + 0,5 \cdot q \cdot x^2$$

$$M_B^P(x=0) = 10 + 3 \cdot 0 = 10 \text{ kNm}$$

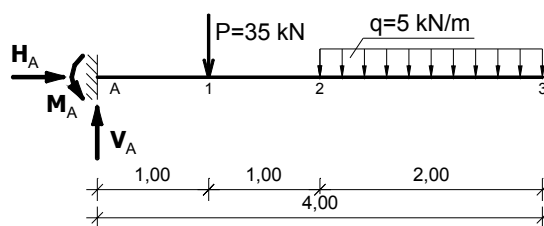
$$M_3(x=1,5) = 10 + 0,5 \cdot 3 \cdot (1,5)^2 = 13,37 \text{ kNm}$$

Siły osiowe na całej długości belki są równe zero ($N=0$).



Rys. 3-17. Wykresy sił przekrojowych M, T

Przykład 3-7 Rozwiązać belkę utwierdzoną obciążoną jak na rysunku 3-18.

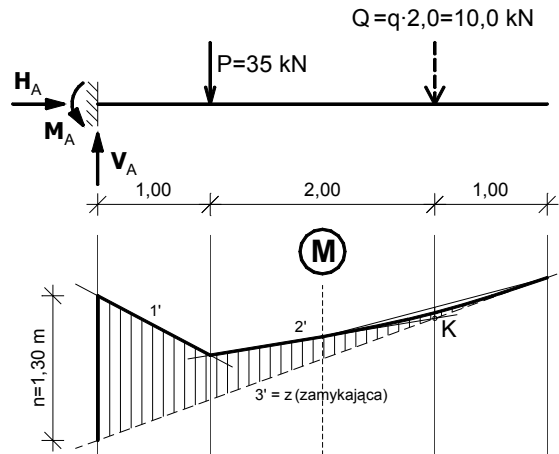


Rys. 3-18. Schemat statyczny

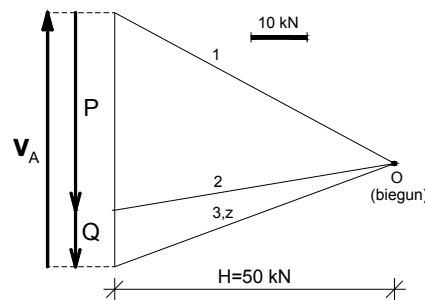
ROZWIĄZANIE GRAFICZNE

Dla belki utwierdzonej, wszystkie obciążenia, dające rzut na oś pionową, muszą być zrównoważone przez reakcję V_A , więc kierunek zamykającej jest nam znany

(pokrywa się z kierunkiem promienia 4). Wartość momentu podporowego wyznaczmy mnożąc odcinek n [m] i odcinek H [kN], gdzie n jest odległością pomiędzy promieniami $1'$, a zamykającą z kierunku działania reakcji podporowej V_A .



Rys. 3-19. Plan sił [m] - odczytano: $M_A = n \cdot H = 1,30 \cdot 50 = 65$ kNm



Rys. 3-20. Wielobok sił [kN] - odczytano: $V_A = 45$ kN

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Reakcje podporowe:

$$(1) \quad \sum M_A = -M_A + P \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 3 = 0$$

$$(2) \quad \sum Y = V_A - P - q \cdot 2 = 0$$

$$(3) \quad \sum X = H_A = 0$$

$$z (1) \quad M_A = 35 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 3 = 65 \text{ kNm}$$

$$z (2) \quad V_A = 35 + 5 \cdot 2 = 45 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrola: } \sum M_3 = V_A \cdot 4 - M_A - P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 = 45 \cdot 4 - 65 - 35 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

Siły przekrojowe M, T, N:

Przedział A1

$$T_{A1} = V_A = 45 \text{ kN}$$

$$M_A = -65 \text{ kNm}$$

$$M_1^L = M_A + V_A \cdot 1 = -65 + 45 \cdot 1 = -20 \text{ kNm}$$

Przedział 12

$$T_{12} = V_A - P = 45 - 35 = 10 \text{ kN}$$

$$M_1^P = M_1^L = -20 \text{ kNm}$$

$$M_2^L = M_A + V_A \cdot 2 - P \cdot 1 = -65 + 45 \cdot 2 - 35 \cdot 1 = -10 \text{ kNm}$$

Przedział A1 $x \in \langle 2; 4 \rangle$

$$T_{23} = V_A - P - q \cdot (x - 2)$$

$$T_2^P(x=2) = 45 - 35 - 5 \cdot (2 - 2) = 10 \text{ kN}$$

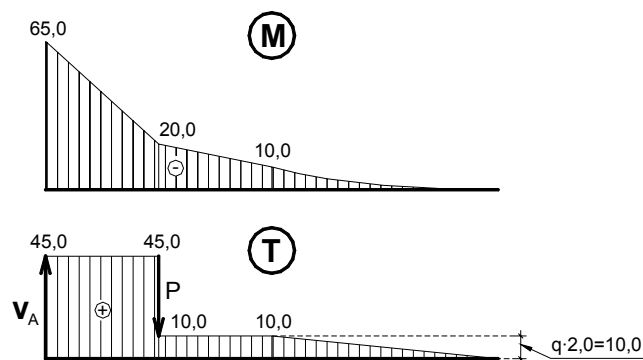
$$T_3(x=4) = 45 - 35 - 5 \cdot (4 - 2) = 0 \text{ kN}$$

$$M_{23} = M_A + V_A \cdot x - P \cdot (x - 1) - 0,5 \cdot q \cdot (x - 2)^2$$

$$M_2^P(x=2) = -65 + 45 \cdot 2 - 35 \cdot (2 - 1) - 0,5 \cdot 5 \cdot (2 - 2)^2 = -10 \text{ kNm}$$

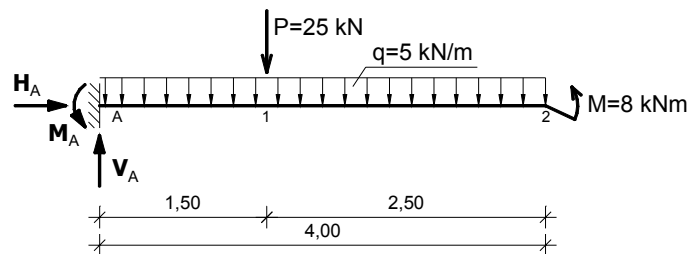
$$M_3(x=4) = -65 + 45 \cdot 4 - 35 \cdot (4 - 1) - 0,5 \cdot 5 \cdot (4 - 2)^2 = 0 \text{ kNm}$$

Siły osiowe na całej długości belki są równe zero ($N=0$), ponieważ żadna z sił obciążenia zewnętrznego nie daje rzutu na oś poziomą x .



Rys. 3-21. Wykresy sił przekrojowych M, T

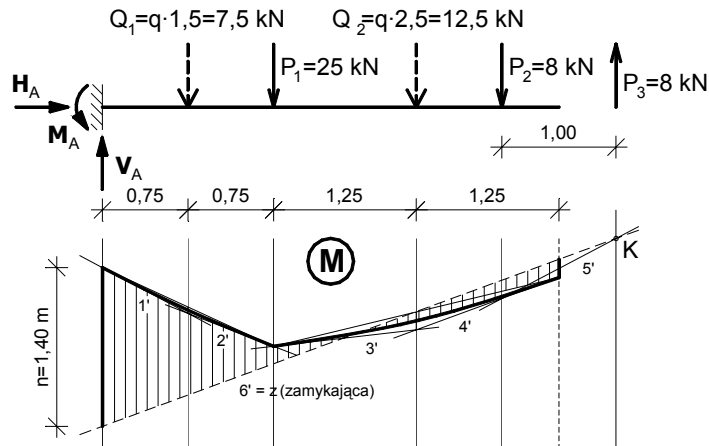
Przykład 3-8. Rozwiązać belkę utwierdzoną obciążoną jak na rysunku 3-22.



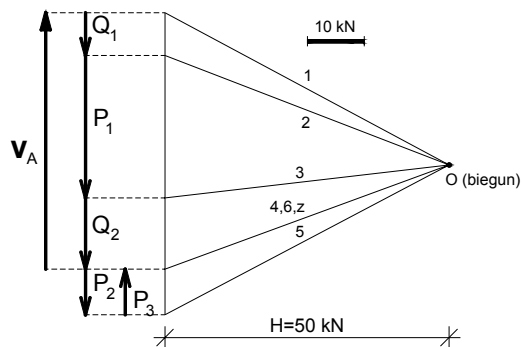
Rys. 3-22. Schemat statyczny

ROZWIĄZANIE GRAFICZNE

Dla dokładnego wyznaczenia wykresu momentów zginających obciążenie równomiernie rozłożone, należy podzielić na dwa przedziały (A1, 12) i każdy z nich zastąpić wypadkową przyłożoną w środku ciężkości przedziału obciążenia.



Rys. 3-23. Plan sił [m] - odczytano: $M_A = n \cdot H = 1,40 \cdot 50 \approx 70$ kNm



Rys. 3-24. Wielobok sił [kN] - odczytano: $V_A = 45$ kN

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Reakcje podporowe:

$$(1) \quad \sum M_A = -M_A + q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 1,5 - M = 0$$

$$(2) \quad \sum Y = V_A - q \cdot 4 - P = 0$$

$$(3) \quad \sum X = H_A = 0$$

$$z (1) \quad M_A = 5 \cdot 4 \cdot 2 + 25 \cdot 1,5 - 8 = 69,50 \text{ kNm}$$

$$z (2) \quad V_A = 5 \cdot 4 + 25 = 45 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrola: } \sum M_3 = V_A \cdot 4 - M_A - q \cdot 4 \cdot 2 - P \cdot 2,5 - M = 45 \cdot 4 - 69,5 - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 25 \cdot 2,5 - 8 = 0$$

Sily przekrojowe M,T,N:

Przedział A1 $x \in \langle 0 ; 1,5 \rangle$

$$T_{A1} = V_A - q \cdot x$$

$$T_A(x=0) = 45 - 5 \cdot 0 = 45 \text{ kN}$$

$$T_1^L(x=1,5) = 45 - 5 \cdot 1,5 = 37,50 \text{ kN}$$

$$M_{A1} = -M_A + V_A \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2$$

$$M_A(x=0) = -69,50 + 45 \cdot 0 - 0,5 \cdot 5 \cdot 0^2 = -69,50 \text{ kNm}$$

$$M_1^L(x=1,5) = -69,50 + 45 \cdot 1,5 - 0,5 \cdot 5 \cdot (1,5)^2 = -7,63 \text{ kNm}$$

$$N_{A1} = 0 \text{ kN}$$

Przedział 12 $x \in \langle 1,5 ; 4 \rangle$

$$T_{12} = V_A - q \cdot x - P$$

$$T_1^P(x=1,5) = 45 - 5 \cdot 1,5 - 25 = 12,50 \text{ kN}$$

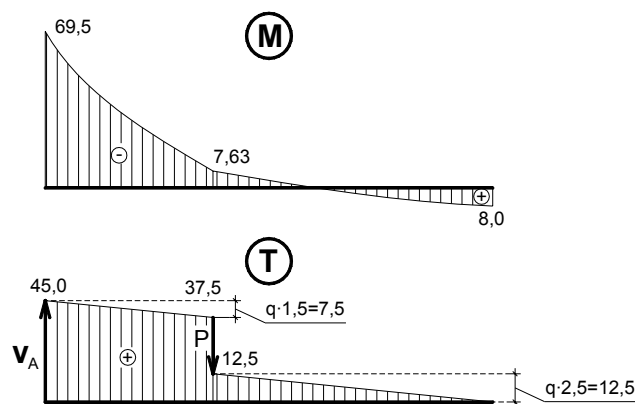
$$T_2(x=4) = 45 - 5 \cdot 4 - 25 = 0 \text{ kN}$$

$$M_{12} = -M_A + V_A \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2 - P \cdot (x - 1,5)$$

$$M_1^P(x=1,5) = -69,50 + 45 \cdot 1,5 - 0,5 \cdot 5 \cdot (1,5)^2 - 25 \cdot (1,5 - 1,5) = -7,63 \text{ kNm}$$

$$M_2(x=4) = -69,50 + 45 \cdot 4 - 0,5 \cdot 5 \cdot 4^2 - 25 \cdot (4 - 1,5) = 8 \text{ kNm}$$

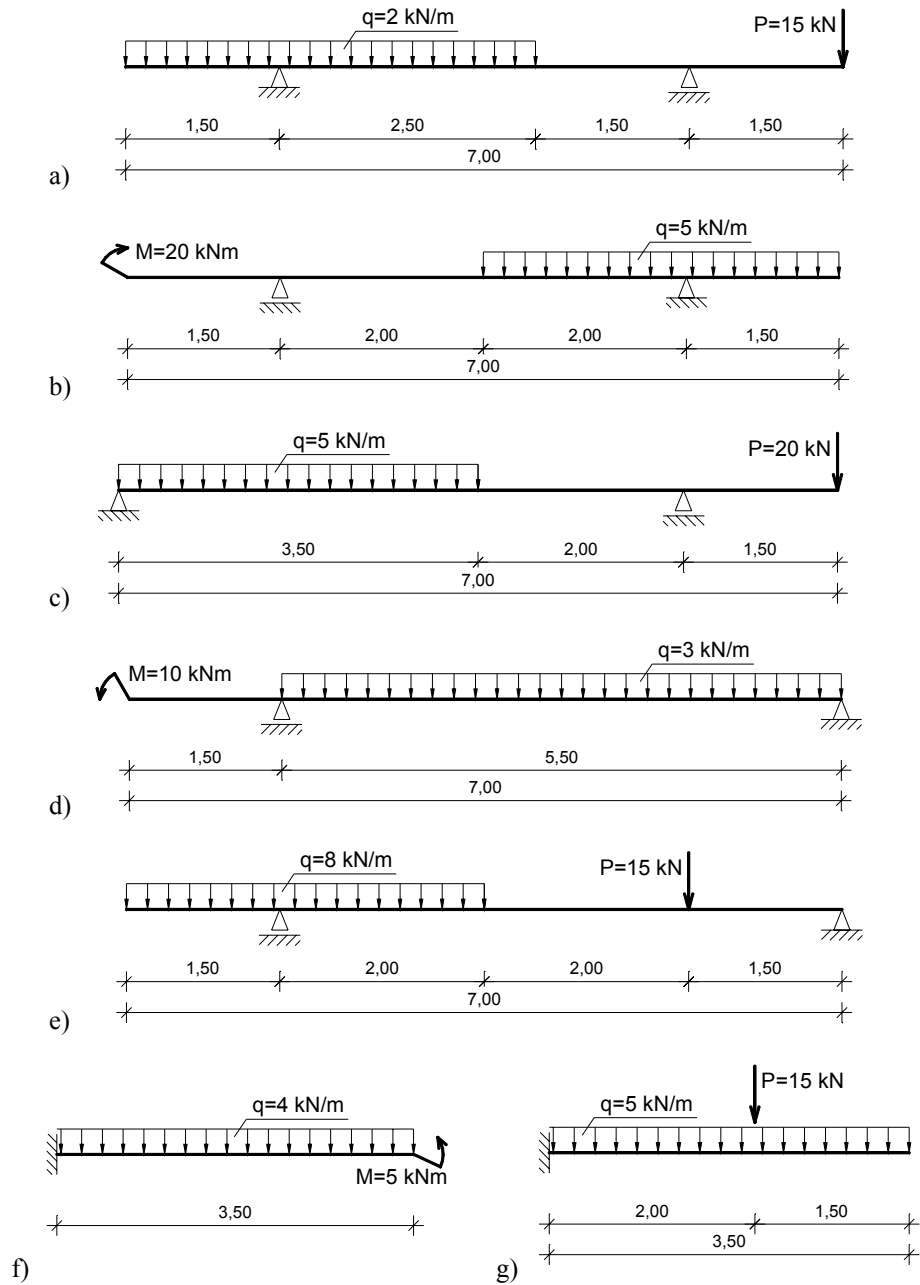
$$N_{12} = 0 \text{ kN}$$



Rys. 3-25. Wykresy sił przekrojowych M, T

3.3. Przykłady do rozwiązania

Przykład 3-9. Dla belek pokazanych na rysunku 3-26, wyznaczyć reakcje podporowe oraz sporządzić wykresy sił przekrojowych M , T , N .



Rys. 3-26. Schematy statyczne belek do samodzielnego rozwiązania

4. Ramy statycznie wyznaczalne

4.1. Wiadomości ogólne

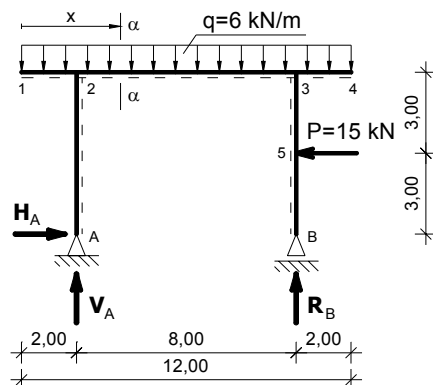
Ramami nazywamy ustroje prętowe, zbudowane z prętów prostych lub krzywoliniowych, charakteryzujące się budową komorową. Geometryczna niezmiennosc układu ramowego jest zapewniana na ogół przez sztywne połączenie prętów oraz przez odpowiednie połączenie z fundamentem (odebranie wszystkich stopni swobody). Sztywne połączenie dwóch prętów oznacza, że odkształcenie pręta poddanego oddziaływaniu obciążenia zewnętrznego powoduje także odkształcenie się pręta drugiego, przy czym sam węzeł odkształceniu nie ulegnie. Jeśli pręty w węzle tworzą dowolny kąt, to po odkształceniu ramy kąt ten nie zmieni się.

Ramy rozwiązujemy zwykle analitycznie według ogólnych zasad: ustalenie schematu statycznego i obciążenia czynnego, obliczenie wartości reakcji podporowych, obliczenie sił wewnętrznych oraz sporządzenie wykresów tych sił. Proste ramy statycznie wyznaczalne można rozwiązywać metodą wykreślną.

W wyniku oddziaływania dowolnie przyłożonego obciążenia zewnętrznego w prętach układów ramowych powstają siły wewnętrzne: momenty zginające (M), siły tnące (T) oraz siły osiowe (N).

4.2. Przykłady liczbowe

Przykład 4-1. Rozwiązać analitycznie ramę przedstawioną na rysunku 4-1.



Rys. 4-1. Schemat statyczny

Reakcje podporowe:

$$(1) \quad \sum M_A = q \cdot 12 \cdot 4 - P \cdot 3 - R_B \cdot 8 = 0$$

$$(2) \quad \sum M_B = V_A \cdot 8 - q \cdot 12 \cdot 4 - P \cdot 3 = 0$$

$$(3) \quad \sum X = H_A - P = 0$$

$$z(1) \quad R_B = (6 \cdot 12 \cdot 4 - 15 \cdot 3) / 8 = 30,375 \text{ kN}$$

$$z(2) \quad V_A = (6 \cdot 12 \cdot 4 + 15 \cdot 3) / 8 = 41,625 \text{ kN}$$

$$z(3) \quad H_A = 15 \text{ kN}$$

Kontrola: $\sum Y = V_A + R_B - q \cdot 12 = 41,625 + 30,375 - 6 \cdot 12 = 0$

Sily przekrojowe M,T,N:

Wartości sił wewnętrznych w przedziałach 12 i 23 (strefa oddziaływania obciążenia q) obliczymy korzystając z metody przepisów funkcyjnych (dla zmiennej x).

Przedział 12 $x \in \langle 0 ; 2 \rangle$

$$T_{12} = -q \cdot x$$

$$T_1(x=0) = -6 \cdot 0 = 0 \text{ kN}$$

$$T_2^L(x=2) = -6 \cdot 2 = -12 \text{ kN}$$

$$M_{12} = -0,5 \cdot q \cdot x^2$$

$$M_1(x=0) = -0,5 \cdot 6 \cdot 0^2 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_2^L(x=2) = -0,5 \cdot 6 \cdot 2^2 = -12 \text{ kNm}$$

$$N_{12} = 0 \text{ kN}$$

Przedział 23 $x \in \langle 2 ; 10 \rangle$

$$T_{23} = -q \cdot x + V_A$$

$$T_2^P(x=2) = -6 \cdot 2 + 41,625 = 29,63 \text{ kN}$$

$$T_3^L(x=10) = -6 \cdot 10 + 41,625 = -18,39 \text{ kN}$$

$$-6 \cdot x - 41,62 = 0 \rightarrow x = 6,94 \text{ m (lokalne ekstremum momentu gnącego)}$$

$$M_{23} = -0,5 \cdot q \cdot x^2 + V_A \cdot (x-2) - H_A \cdot 6$$

$$M_2^P(x=2) = -0,5 \cdot 6 \cdot 2^2 + 41,625 \cdot (2-2) - 15 \cdot 6 = -102 \text{ kNm}$$

$$M_{\text{ext.}}(x=6,94) = -0,5 \cdot 6 \cdot (6,94)^2 + 41,625 \cdot (6,94-2) - 15 \cdot 6 = -28,86 \text{ kNm}$$

$$M_3^L(x=10) = -0,5 \cdot 6 \cdot 10^2 + 41,625 \cdot (10-2) - 15 \cdot 6 = -57 \text{ kNm}$$

$$N_{23} = -H_A = -15 \text{ kN}$$

Przedział 43

Siły wewnętrzne wyznaczmy metodą rzędnych charakterystycznych, biorąc pod uwagę obciążenia znajdujące się po prawej stronie przekroju (zmiana znaku).

$$T_4 = 0 \text{ kN}$$

$$T_3^P = q \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ kN}$$

$$M_4 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_3^P = -0,5 \cdot 6 \cdot 2^2 = -12 \text{ kNm}$$

$$N_{34} = 0 \text{ kN}$$

Przedział A2

$$T_{A2} = -H_A = -15 \text{ kN}$$

$$M_A = 0 \text{ kNm}$$

$$M_2^D = -H_A \cdot 6 = -15 \cdot 6 = -90 \text{ kNm}$$

$$N_{A2} = -V_A = -41,63 \text{ kN (ściskanie)}$$

Przedział B5

$$T_{B5} = 0 \text{ kN}$$

$$M_B = M_5 = 0 \text{ kNm}$$

$$N_{B5} = -R_B = -30,38 \text{ kN (ściskanie)}$$

Przedział 53

$$T_{53} = P = 15 \text{ kN}$$

$$M_3^D = -P \cdot 3 = -15 \cdot 3 = -45 \text{ kNm}$$

$$N_{53} = -R_B = -30,38 \text{ kN (ściskanie)}$$

Kontrola równowagi węzłów:

Równowaga węzła 2 (rys. 4-2a):

$$\sum M_2 = M_2^L + M_2^P + M_2^D = -12 + 102 - 90 = 0$$

$$\sum Y = T_2^L + T_2^P + N_2^D = -12 - 29,63 + 41,63 = 0$$

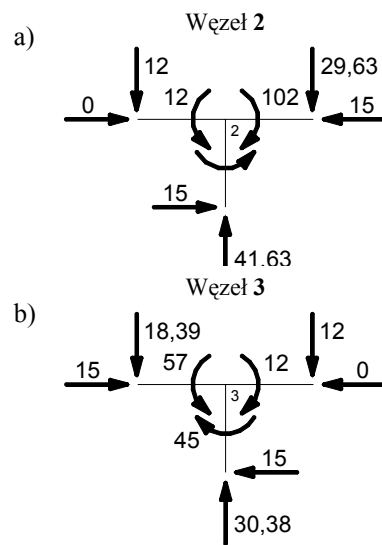
$$\sum X = N_2^L + N_2^P + T_2^D = 0 - 15 + 15 = 0$$

Równowaga węzła 3 (rys. 4-2b):

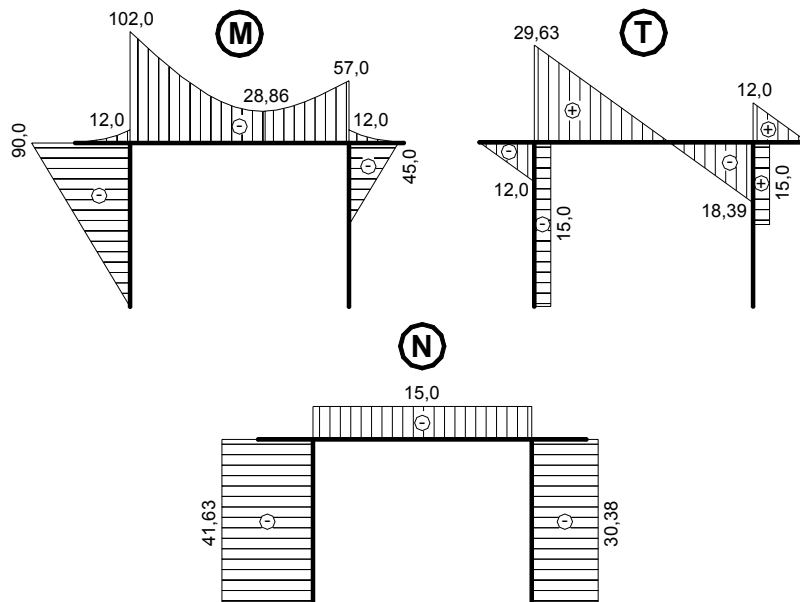
$$\sum M_3 = M_3^L + M_3^P + M_3^D = -57 + 12 + 45 = 0$$

$$\sum Y = T_3^L + T_3^P + N_3^D = -18,39 - 12 + 30,38 = 0$$

$$\sum X = N_3^L + N_3^P + T_3^D = 15 + 0 - 15 = 0$$

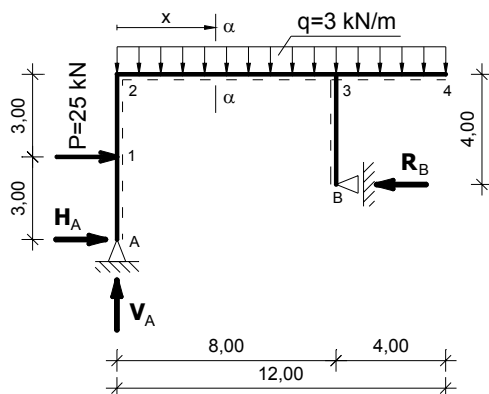


Rys. 4-2. Równowaga węzłów



Rys. 4-3. Wykresy sił przekrojowych M, T, N

Przykład 4-2. Rozwiązać analitycznie ramę przedstawioną na rysunku 4-4.



Rys. 4-4. Schemat statyczny

Reakcje podporowe:

- (1) $\sum M_A = P \cdot 3 + q \cdot 12 \cdot 6 - R_B \cdot 2 = 0$
 - (2) $\sum X = H_A + P - R_B = 0$
 - (3) $\sum M_B = V_A \cdot 8 - H_A \cdot 2 + P \cdot 1 - q \cdot 12 \cdot 2 = 0$
- z (1) $R_B = (25 \cdot 3 + 3 \cdot 12 \cdot 6) / 2 = 145,50 \text{ kN}$
z (2) $H_A = 145,50 - 25 = 120,50 \text{ kN}$
z (3) $V_A = (120,50 \cdot 2 - 25 \cdot 1 + 3 \cdot 12 \cdot 2) / 8 = 36 \text{ kN}$

Kontrola: $\sum Y = V_A - q \cdot 12 = 36 - 3 \cdot 12 = 0$

Sily przekrojowe M,T,N:

Przedział A1

$T_{A1} = -H_A = -120,50 \text{ kN}$
 $M_A = 0 \text{ kNm}$
 $M_1^D = -H_A \cdot 3 = -120,50 \cdot 3 = -361,50 \text{ kNm}$
 $N_{A1} = -V_A = -36 \text{ kN}$ (ściskanie)

Przedział 12

$T_{12} = -H_A - P = -120,50 - 25 = -145,50 \text{ kN}$
 $M_1^G = M_1^D = -361,50 \text{ kNm}$
 $M_2^D = -H_A \cdot 6 - P \cdot 3 = -120,50 \cdot 6 - 25 \cdot 3 = -798 \text{ kNm}$
 $N_{12} = -V_A = -36 \text{ kN}$ (ściskanie)

Przedział 23 $x \in \langle 0 ; 8 \rangle$

$T_{23} = V_A - q \cdot x$
 $T_2^P(x=0) = 36 - 3 \cdot 0 = 36 \text{ kN}$

$$T_3^L(x=8) = 36 - 3 \cdot 8 = 12 \text{ kN}$$

$$M_{23} = -H_A \cdot 6 - P \cdot 3 + V_A \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2$$

$$M_2^P(x=0) = -120,50 \cdot 6 - 25 \cdot 3 + 36 \cdot 0 - 0,5 \cdot 3 \cdot 0^2 = -798 \text{ kNm}$$

$$M_3^L(x=8) = -120,50 \cdot 6 - 25 \cdot 3 + 36 \cdot 8 - 0,5 \cdot 3 \cdot 8^2 = -606 \text{ kNm}$$

$$N_{23} = -H_A - P = -120,5 - 25 = -145,50 \text{ kN (ściskanie)}$$

Przedział 43

Siły wewnętrzne obliczymy względem prawej strony przekroju (zmiana znaku).

$$T_4 = 0 \text{ kN}$$

$$T_3^P = q \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ kN}$$

$$M_4 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_3^P = -q \cdot 4 \cdot 2 = -3 \cdot 4 \cdot 2 = -24 \text{ kNm}$$

$$N_{34} = 0 \text{ kN}$$

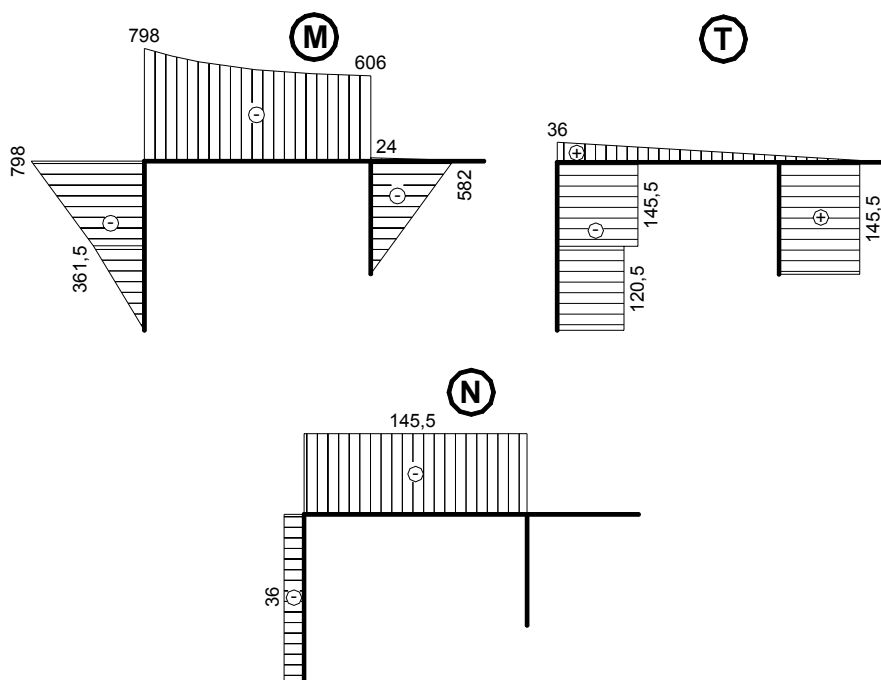
Przedział B3

$$T_{B3} = R_B = 145,50 \text{ kN}$$

$$M_B = 0 \text{ kNm}$$

$$M_3^D = R_B \cdot 4 = 145,50 \cdot 4 = 582 \text{ kNm}$$

$$N_{B3} = 0 \text{ kN}$$



Rys. 4-5. Wykresy sił przekrojowych M, T, N

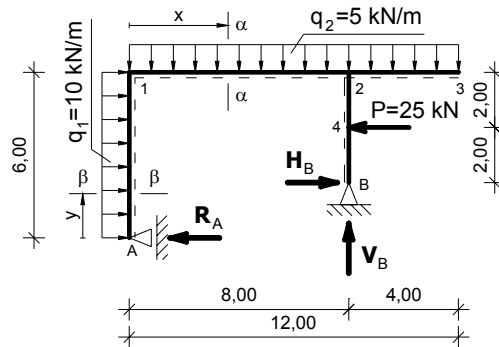
Kontrola równowagi węzła 3:

$$\sum M_3 = M_3^L + M_3^P + M_3^D = -606 + 24 + 582 = 0$$

$$\sum Y = T_3^L + T_3^P + N_3^D = 12 - 12 + 0 = 0$$

$$\sum X = N_3^L + N_3^P + T_3^D = 145,5 + 0 - 145,5 = 0$$

Przykład 4-3. Rozwiązać analitycznie ramę przedstawioną na rysunku 4-6.



Rys. 4-6. Schemat statyczny

Reakcje podporowe:

$$(1) \quad \sum M_B = R_A \cdot 2 + q_1 \cdot 6 \cdot 1 - q_2 \cdot 12 \cdot 2 - P \cdot 2 = 0$$

$$(2) \quad \sum X = q_1 \cdot 6 - R_A + H_B - P = 0$$

$$(3) \quad \sum M_A = q_1 \cdot 6 \cdot 3 + q_2 \cdot 12 \cdot 6 - P \cdot 4 - V_B \cdot 8 + H_B \cdot 2 = 0$$

$$z(1) \quad R_A = (-10 \cdot 6 \cdot 1 + 5 \cdot 12 \cdot 2 + 25 \cdot 2) / 2 = 55 \text{ kN}$$

$$z(2) \quad H_B = -10 \cdot 6 + 55 + 25 = 20 \text{ kN}$$

$$z(3) \quad V_B = (10 \cdot 6 \cdot 3 + 5 \cdot 12 \cdot 6 - 25 \cdot 4 + 20 \cdot 2) / 8 = 60 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrola: } \sum Y = V_B - q_1 \cdot 12 = 60 - 5 \cdot 12 = 0$$

Sily przekrojowe M, T, N:

W przedziale działania obciążenia q_1 siły wewnętrzne liczymy dla przekroju $\beta-\beta$ jako funkcję zmiennej y , natomiast w przedziale 12 (obciążenie q_2) jako funkcję zmiennej x . W innych przedziałach stosujemy metodę rzędnych charakterystycznych.

Przedział A1 $y \in \langle 0 ; 6 \rangle$

$$T_{A1} = R_A - q_1 \cdot y$$

$$T_A(y=0) = 55 - 10 \cdot 0 = 55 \text{ kN}$$

$$T_1^D(x=6) = 55 - 10 \cdot 6 = -5 \text{ kN}$$

$$55 - 10 \cdot y = 0 \rightarrow y = 5,50 \text{ m (lokalne ekstremum momentu gnącego)}$$

$$M_{A1} = R_A \cdot y - 0,5 \cdot q_1 \cdot y^2$$

$$M_A(x=0) = 55 \cdot 0 - 0,5 \cdot 10 \cdot 0^2 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{\text{ext.}}(x=5,5)=55 \cdot 5,5 - 0,5 \cdot 10 \cdot (5,5)^2 = 151,25 \text{ kNm}$$

$$M_1^P(x=6)=55 \cdot 6 - 0,5 \cdot 10 \cdot 6^2 = 150 \text{ kNm}$$

$$N_{A1} = 0 \text{ kN}$$

Przedział 12 $x \in \langle 0 ; 8 \rangle$

$$T_{12} = -q_2 \cdot x$$

$$T_1^P(x=0) = -5 \cdot 0 = 0 \text{ kN}$$

$$T_2^L(x=8) = -5 \cdot 8 = -40 \text{ kN}$$

$$M_{12} = R_A \cdot 6 - q_1 \cdot 6 \cdot 3 - 0,5 \cdot q_2 \cdot x^2$$

$$M_1^P(x=0) = 55 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 - 0,5 \cdot 5 \cdot 0^2 = 150 \text{ kNm}$$

$$M_2^L(x=8) = 55 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 - 0,5 \cdot 5 \cdot 8^2 = -10 \text{ kNm}$$

$$N_{12} = R_A - q_1 \cdot 6 = 55 - 10 \cdot 6 = -5 \text{ kN (ściskanie)}$$

Przedział 23

Siły wewnętrzne obliczymy względem prawej strony przekroju (zmiana znaku).

$$T_3 = 0 \text{ kN}$$

$$T_2^P = q_2 \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ kN}$$

$$M_3 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_2^P = -q_2 \cdot 4 \cdot 2 = -5 \cdot 4 \cdot 2 = -40 \text{ kNm}$$

$$N_{23} = 0 \text{ kN}$$

Przedział B4

$$T_{B4} = -H_B = -20 \text{ kN}$$

$$M_B = 0 \text{ kNm}$$

$$M_4^D = -H_B \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ kNm}$$

$$N_{B4} = -V_B = -60 \text{ kN (ściskanie)}$$

Przedział 42

$$T_{42} = -H_B + P = -20 + 25 = 5 \text{ kN}$$

$$M_4^G = M_4^D = -40 \text{ kNm}$$

$$M_2^D = -H_B \cdot 4 + P \cdot 2 = -20 \cdot 4 + 25 \cdot 2 = -30 \text{ kNm}$$

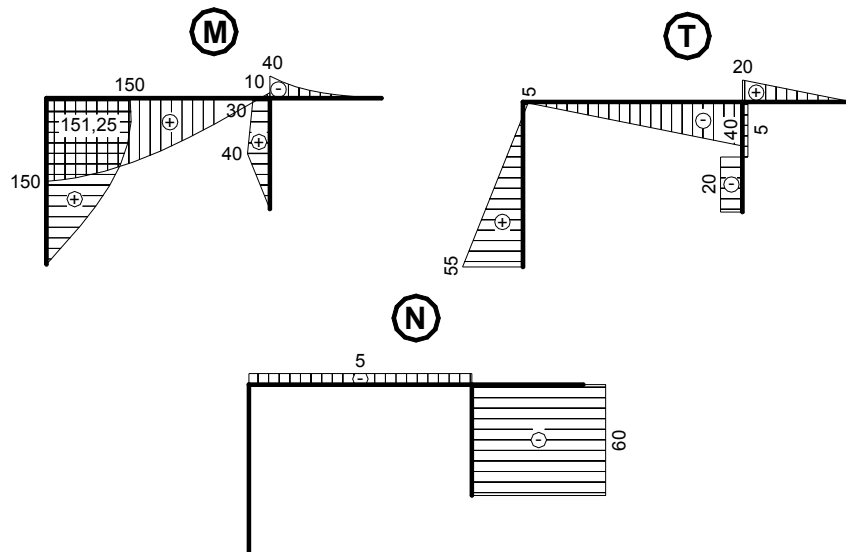
$$N_{42} = -V_B = -60 \text{ kN (ściskanie)}$$

Kontrola równowagi węzła 2:

$$\sum M_2 = M_2^L + M_2^P + M_2^D = -10 + 40 - 30 = 0$$

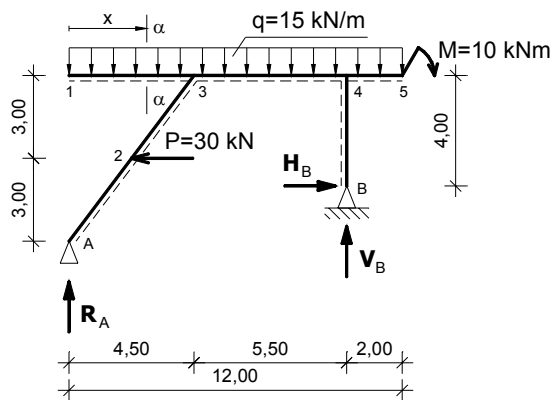
$$\sum Y = T_2^L + T_2^P + N_2^D = -40 - 20 + 60 = 0$$

$$\sum X = N_2^L + N_2^P + T_2^D = 5 + 0 - 5 = 0$$



Rys. 4-7. Wykresy sił przekrojowych M, T, N

Przykład 4-4. Rozwiązać analitycznie ramę przedstawioną na rysunku 4-8.



Rys. 4-8. Schemat statyczny

Reakcje podporowe:

- (1) $\sum M_B = R_A \cdot 10 - P \cdot 1 - q \cdot 12 \cdot 4 + M = 0$
 - (2) $\sum X = H_B - P = 0$
 - (3) $\sum M_A = -P \cdot 3 + q \cdot 12 \cdot 6 + H_B \cdot 2 - V_B \cdot 10 + M = 0$
- z (1) $R_A = (30 \cdot 1 + 15 \cdot 12 \cdot 4 - 10) / 10 = 74 \text{ kN}$
- z (2) $H_B = 30 \text{ kN}$
- z (3) $V_B = (-30 \cdot 3 + 15 \cdot 12 \cdot 6 + 30 \cdot 2 + 10) / 10 = 106 \text{ kN}$
- Kontrola:** $\sum Y = R_A - q \cdot 12 + V_B = 74 - 15 \cdot 12 + 106 = 0$

Sily przekrojowe M,T,N:

Przedział 13 $x \in \langle 0 ; 4,5 \rangle$

$$T_{13} = -q \cdot x$$

$$T_1(x=0) = -15 \cdot 0 = 0 \text{ kN}$$

$$T_3^L(x=4,5) = -15 \cdot 4,5 = -67,50 \text{ kN}$$

$$M_{13} = -0,5 \cdot q \cdot x^2$$

$$M_1(x=0) = -0,5 \cdot 15 \cdot 0^2 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_3^L(x=4,5) = -0,5 \cdot 15 \cdot (4,5)^2 = -151,88 \text{ kNm}$$

$$N_{13} = 0 \text{ kN}$$

Przedział 34 $x \in \langle 4,5 ; 10 \rangle$

$$T_{34} = R_A - q \cdot x$$

$$T_3^P(x=4,5) = 74 - 15 \cdot 4,5 = 6,50 \text{ kN}$$

$$T_4^L(x=10) = 74 - 15 \cdot 10 = -76 \text{ kN}$$

$$74 - 15 \cdot x = 0 \rightarrow x = 4,93 \text{ m (lokálne ekstremum momentu gnącego)}$$

$$M_{34} = R_A \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2 + P \cdot 3$$

$$M_3^P(x=4,5) = 74 \cdot 4,5 - 0,5 \cdot 15 \cdot (4,5)^2 + 30 \cdot 3 = 271,13 \text{ kNm}$$

$$M_{\text{ext}}(x=4,93) = 74 \cdot 4,93 - 0,5 \cdot 15 \cdot (4,93)^2 + 30 \cdot 3 = 272,53 \text{ kNm}$$

$$M_4^L(x=10) = 74 \cdot 10 - 0,5 \cdot 15 \cdot 10^2 + 30 \cdot 3 = 80 \text{ kNm}$$

$$N_{34} = P = 30 \text{ kN (rozciąganie)}$$

Przedział 45 $x \in \langle 10 ; 12 \rangle$

$$T_{45} = R_A - q \cdot x + V_B$$

$$T_4^P(x=10) = 74 - 15 \cdot 10 + 106 = 30 \text{ kN}$$

$$T_5(x=12) = 74 - 15 \cdot 12 + 106 = 0 \text{ kN}$$

$$M_{45} = R_A \cdot x - 0,5 \cdot q \cdot x^2 + P \cdot 3 + V_B \cdot (x - 10) - H_B \cdot 4$$

$$M_4^P(x=10) = 74 \cdot 10 - 0,5 \cdot 15 \cdot 10^2 + 30 \cdot 3 + 106 \cdot (10 - 10) - 30 \cdot 4 = -40 \text{ kNm}$$

$$M_5(x=12) = 74 \cdot 12 - 0,5 \cdot 15 \cdot 12^2 + 30 \cdot 3 + 106 \cdot (12 - 10) - 30 \cdot 4 = -10 \text{ kNm}$$

$$N_{23} = 0 \text{ kN}$$

Przedział A2

Aby wyznaczyć wartości sił tnących T oraz osiowych N , musimy rozłożyć reakcję podporową R_A na składowe prostopadłą i równoległą do osi pręta $A2$ (rys. 4-9):

$$R_A^\perp = R_A \cdot 4,5/7,5 = 74 \cdot 4,5/7,5 = 44,40 \text{ kN}; \text{ składowa prostopadła,}$$

$$R_A^{\parallel} = R_A \cdot 6,0/7,5 = 74 \cdot 6,0/7,5 = 59,20 \text{ kN}; \text{ składowa równoległa.}$$

$$T_{A2} = R_A^\perp = 44,40 \text{ kN}$$

$$M_A = 0 \text{ kNm}$$

$$M_2^D = R_A \cdot 2,25 = 74 \cdot 2,25 = 166,50 \text{ kNm}$$

$$N_{A2} = -R_A^{\text{II}} = -59,20 \text{ kN}$$

Przedział 23

$$P^{\perp} = P \cdot 6,0 / 7,5 = 30 \cdot 6,0 / 7,5 = 24 \text{ kN}$$

$$P^{\text{II}} = P \cdot 4,5 / 7,5 = 30 \cdot 4,5 / 7,5 = 18 \text{ kN}$$

$$T_{23} = R_A^{\perp} + P^{\perp} = 44,40 + 24 = 68,40 \text{ kN}$$

$$M_2^G = M_2^D = 166,50 \text{ kNm}$$

$$M_3^D = R_A \cdot 4,5 + P \cdot 3 = 74 \cdot 4,5 + 30 \cdot 3 = 423 \text{ kNm}$$

$$N_{23} = -R_A^{\text{II}} + P^{\text{II}} = -59,20 + 18 = -41,20 \text{ kN}$$

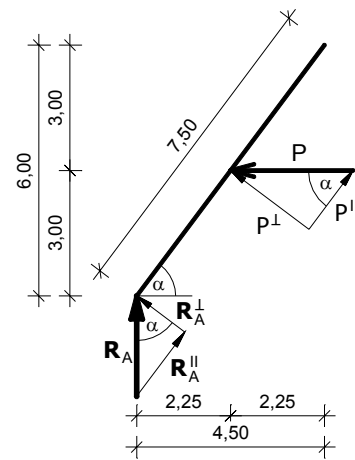
Przedział B4

$$T_{B4} = -H_B = -30 \text{ kN}$$

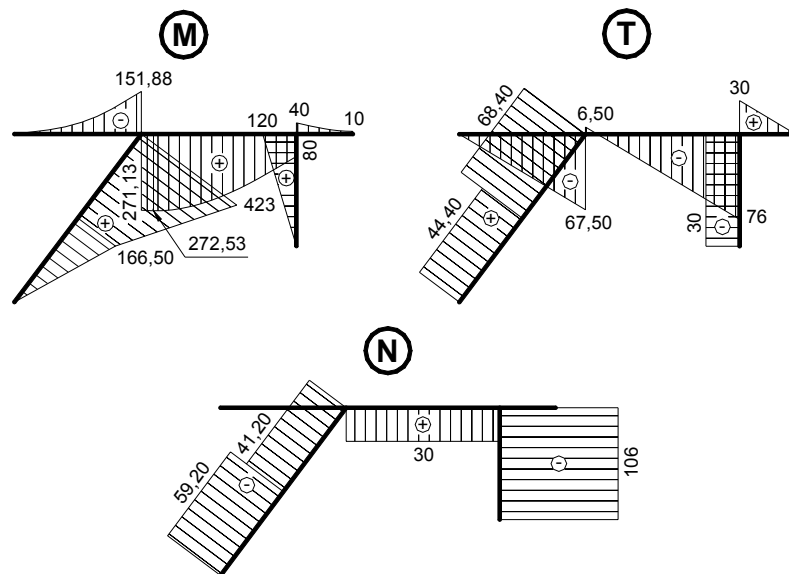
$$M_B = 0 \text{ kNm}$$

$$M_4^D = -H_B \cdot 4 = -30 \cdot 4 = -120 \text{ kNm}$$

$$N_{B4} = -V_B = -106 \text{ kN}$$



Rys. 4-9. Rozłożenie sił P i R_A



Rys. 4-10. Wykresy sił przekrojowych M, T, N

Kontrola równowagi węzłów 3 i 4:

Równowaga węzła 3

Określając sumę rzutów sił na oś x i y , należy pamiętać, że w przedziale 23. rzutują na tę oś zarówno siły tnące i osiowe działające w tym przedziale (rys. 4-9).

$$\sum M_3 = M_3^L + M_3^P + M_3^D = -151,88 - 271,13 + 423 \approx 0$$

$$\sum Y = T_3^L + T_3^P + T_3^D \cdot 4,5/7,5 + N_3^D \cdot 6/7,5 = -67,5 - 6,5 + 68,4 \cdot 4,5/7,5 + 41,2 \cdot 6/7,5 = 0$$

$$\sum X = N_3^L + N_3^P + N_3^D \cdot 4,5/7,5 + T_3^D \cdot 6/7,5 = 0 + 30 + 41,2 \cdot 4,5/7,5 - 68,4 \cdot 6/7,5 = 0$$

Równowaga węzła 4

$$\sum M_4 = M_4^L + M_4^P + M_4^D = 80 + 40 - 120 = 0$$

$$\sum Y = T_4^L + T_4^P + N_4^D = -76 - 30 + 106 = 0$$

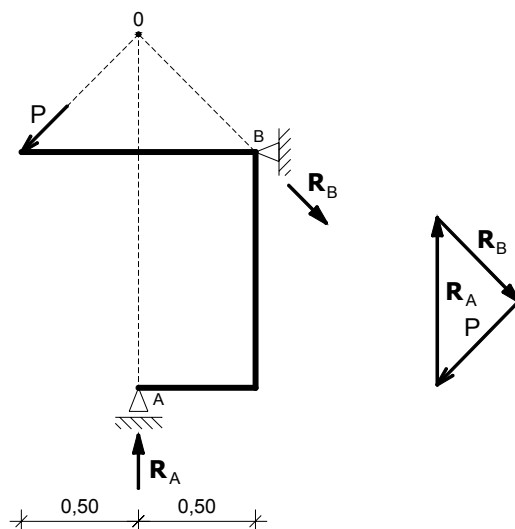
$$\sum X = N_4^L + N_4^P + T_4^D = -30 + 0 + 30 = 0$$

Przykład 4-5. Przedstawione poniżej ramy rozwiązać metodą graficzną (wyznaczyć reakcje podporowe oraz sporządzić wykresy M, T, N).

Reakcje podporowe statycznie wyznaczalnego układu prętowego (w przedstawionych zadaniach występować będzie podparcie podporą przegubową oraz przegubowo-przesuwną) obciążonego siłą skupioną wyznaczymy korzystając z jednego z podstawowych twierdzeń statyki wykreślnej, które mówi, że **trzy nierównoległe siły są w równowadze wtedy, gdy proste działania tych sił przecinają się w jednym punkcie**. Punkt zbieżności O układu określimy na przecięciu prostej działania danej siły P z prostą działania reakcji o znanym kierunku (występującej w podporze przegubowo-przesuwnej). Prosta działania drugiej reakcji określa prosta przechodząca przez wyznaczony punkt podparcia oraz przez wyznaczony już punkt zbieżności. Wartości oraz zwroty reakcji podporowych określimy sporządzając wielobok sił.

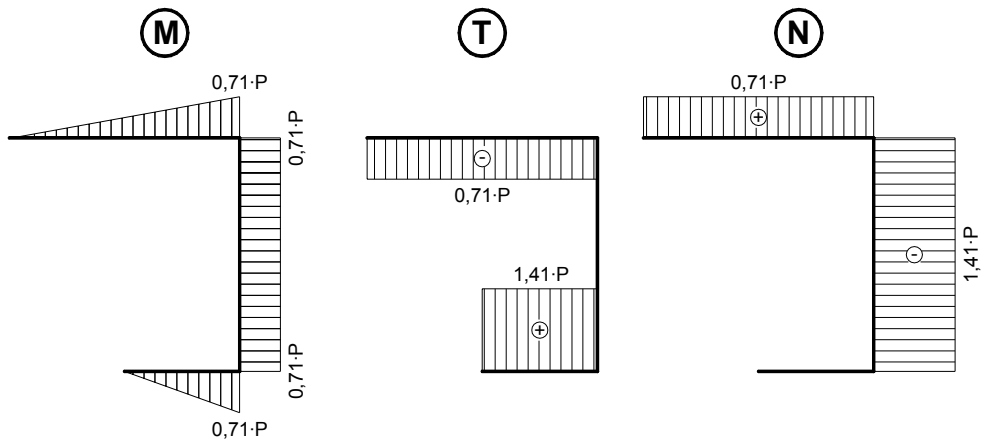
Znajomość podstawowych zasad statyki pozwala na szybkie wyznaczenie „w pamięci” sił wewnętrznych, wynikających z oddziaływania zadanego obciążenia.

1. SCHEMAT NR I (siła P nachylona pod kątem 45°)



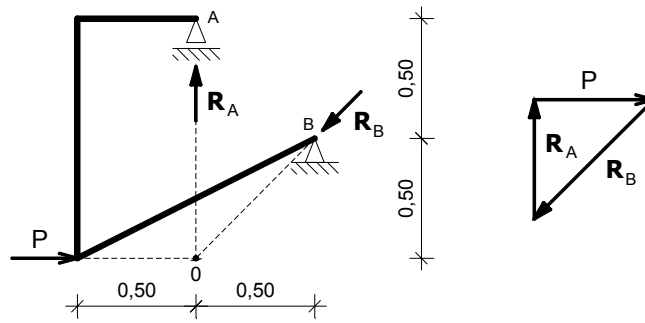
Rys. 4-11. Plan sił oraz wielobok sił dla zadanego obciążenia siłą P .

Odczytano: $R_A = 1,41 \cdot P$; $R_B = P$

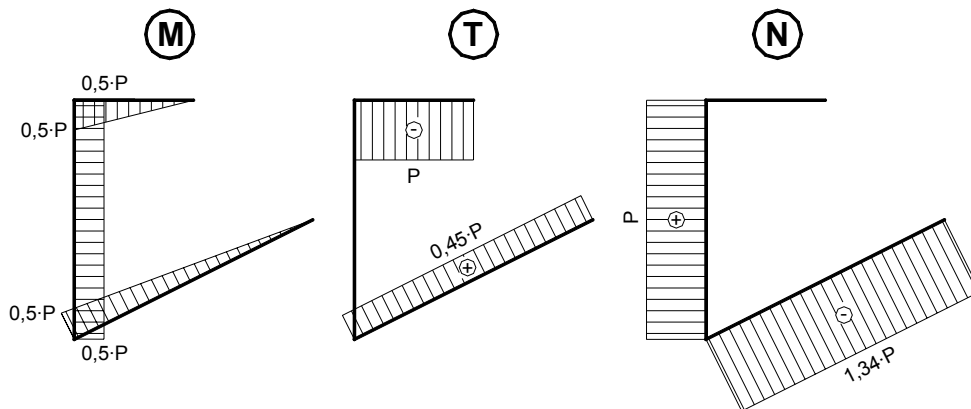


Rys. 4-12. Wykresy sił przekrojowych M, T, N

2. SCHEMAT NR II (siła P o kierunku poziomym)

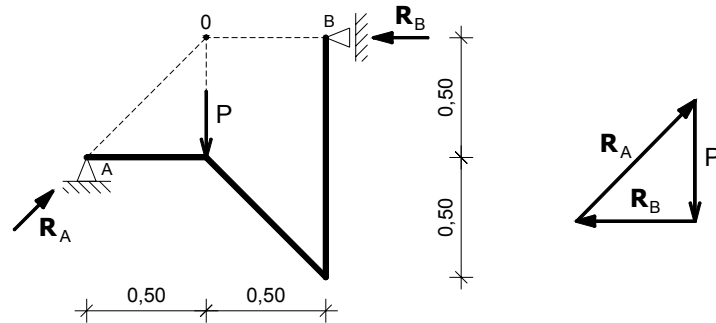


Rys. 4-13. Plan sił oraz wielobok sił dla zadanego obciążenia siłą P .
Odczytano: $R_A = P$; $R_B = 1,41 \cdot P$

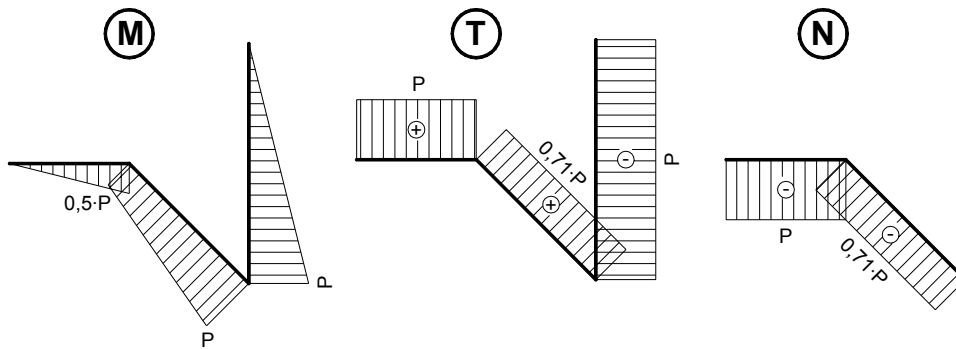


Rys. 4-14. Wykresy sił przekrojowych M, T, N

3. SCHEMAT NR III (siła P o kierunku pionowym)

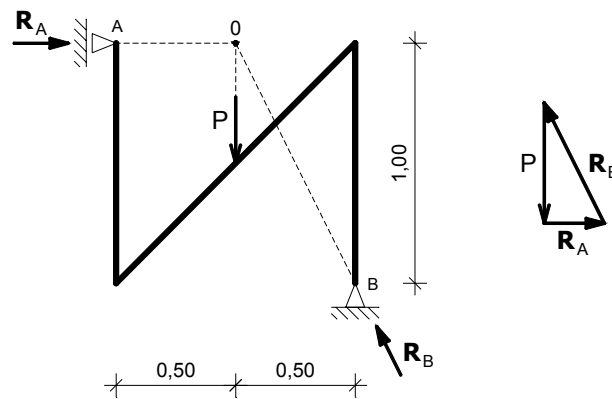


Rys. 4-15. Plan sił oraz wielobok sił dla zadanego obciążenia siłą P .
Odczytano: $R_A=1,41 \cdot P$; $R_B=P$

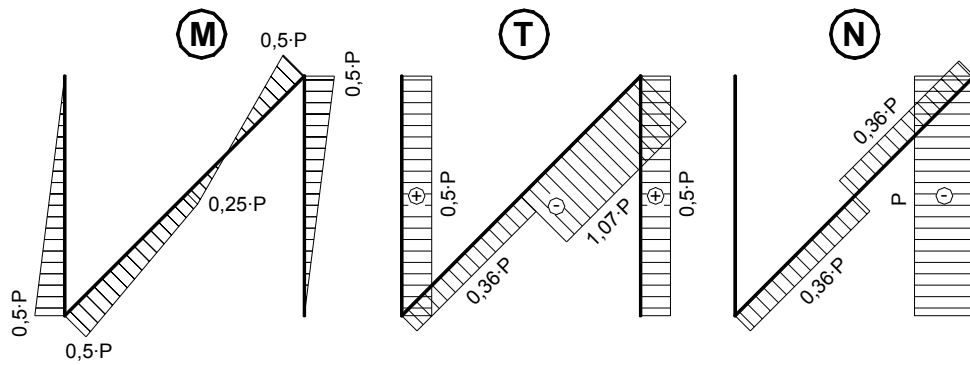


Rys. 4-16. Wykresy sił przekrojowych M , T , N

4. SCHEMAT NR IV (siła P o kierunku pionowym)



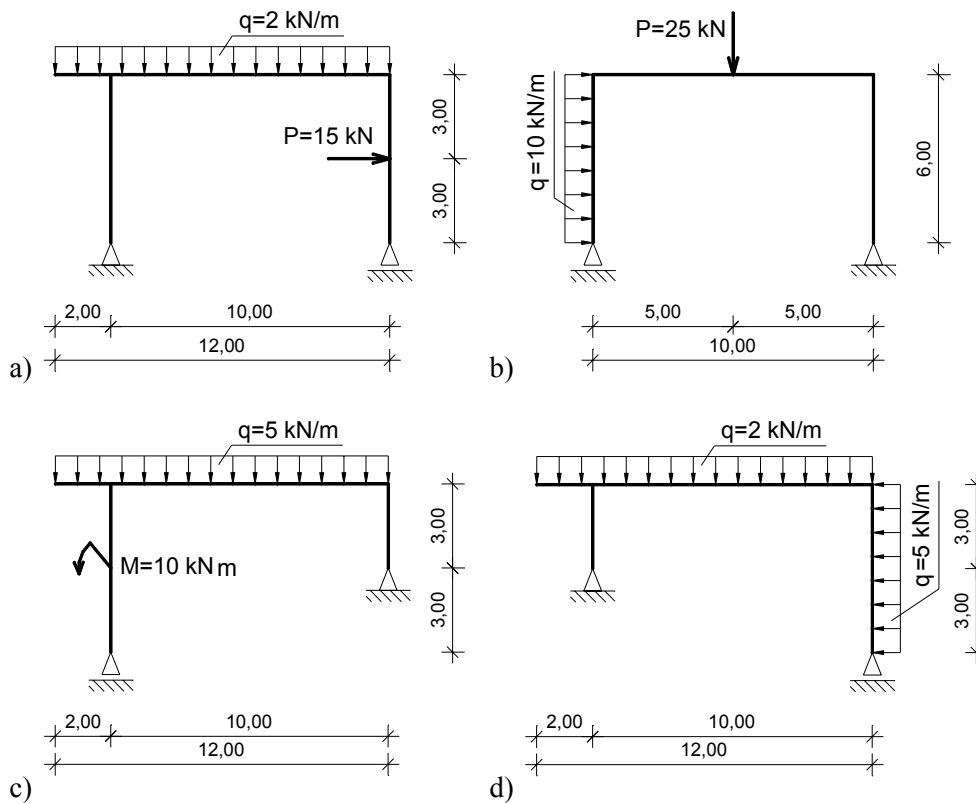
Rys. 4-17. Plan sił oraz wielobok sił dla zadanego obciążenia siłą P .
Odczytano: $R_A=0,5 \cdot P$; $R_B=1,12 \cdot P$



Rys. 4-18. Wykresy sił przekrojowych M, T, N

4.3. Przykłady do rozwiązania

Przykład 4-6. Dla ram pokazanych na rysunku 4-19 wyznaczyć reakcje podporowe oraz sporządzić wykresy sił przekrojowych M, T, N.



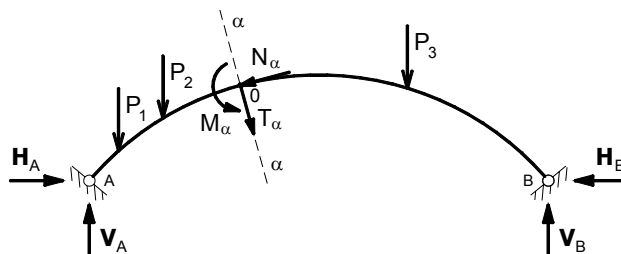
Rys. 4-19. Schematy statyczne ram do samodzielnego rozwiązania

5. Łuki trójprzegubowe

5.1. Wiadomości ogólne

Łukiem nazywamy pręt zakrzywiony w płaszczyźnie działania sił i podparty na końcach w sposób zapewniający jego geometryczną niezmiennność. Działanie sił czynnych powoduje powstanie reakcji podporowych o dowolnym kierunku. Składowa pozioma reakcji zwana siłą rozporu może być przeniesiona przez odpowiednio ukształtowane fundamenty lub podpory bądź też przez zastosowanie ściągu.

Pojęcie sił wewnętrznych zdefiniowane w rozdziale 2.3 możemy rozszerzyć w stosunku do łuków, określając siłę osiową N_α jako rzut wszystkich sił działających po jednej stronie przekroju $\alpha-\alpha$ na kierunek styczny do osi łuku w punkcie θ , będącym środkiem ciężkości tego przekroju (rys. 5-1). Siłę tnącą T_α definiujemy natomiast jako rzut sił opisanych wyżej na kierunek normalny do stycznej w punkcie θ .

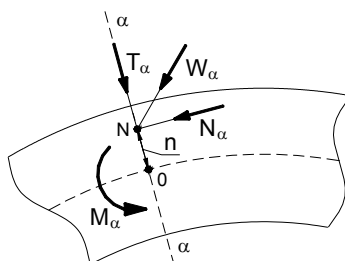


Rys. 5-1. Wyznaczenie sił wewnętrznych w łuku dla dowolnego przekroju $\alpha-\alpha$

Obciążając wiotkie ciągną dowolnym układem sił, uzyskamy odkształcenie tegoż ciągną, na skutek którego będzie ono wyłącznie rozciągane. Analogicznie, odpowiednie ukształtowanie łuku pozwala na całkowite wyeliminowanie momentu zginającego i siły tnącej. Pręty łuku będą zatem ściskane osiowo (co wymaga ich określonej sztywności). Możemy to uzasadnić korzystając z zależności momentu zginającego M_α od siły osiowej N_α , którą wyraża równanie:

$$M_\alpha = N_\alpha \cdot n, \quad (5-1)$$

gdzie n jest mimośrodem siły N_α , określającym punkt N zaczepienia wypadkowej W_α (rys. 5-2). Krzywą, będącą zbiorem punktów N , nazywamy linią ciśnień.

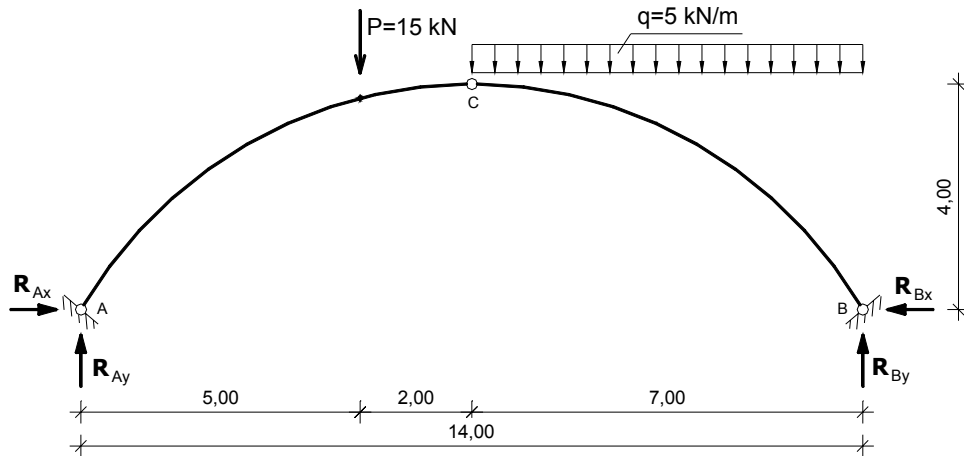


Rys. 5-2. Określenie punktu N przynależnego linii ciśnień

Łuk jest ściskany osiowo tylko wtedy, gdy jego oś pokrywa się z linią ciśnień!

5.2. Przykłady liczbowe

Przykład 5-1. Rozwiązać metodą analityczną kolisty łuk trójprzegubowy przedstawiony na rysunku 5-3.



Rys. 5-3. Schemat statyczny

Reakcje podporowe:

Reakcje podporowe wyznaczymy, rozpisując trzy warunki równowagi, dotyczące całego układu ($\sum M=0$, $\sum X=0$, $\sum Y=0$). Czwarte, brakujące równanie, określimy wykorzystując fakt, że w przegubie C moment zginający jest równy zero.

$$(1) \quad \sum M_A = P \cdot 5 + q \cdot 7 \cdot 10,5 - R_{By} \cdot 14 = 0$$

$$(2) \quad \sum M_B = R_{Ay} \cdot 14 - P \cdot 9 - q \cdot 7 \cdot 3,5 = 0$$

$$(3) \quad \sum M_C^p = q \cdot 7 \cdot 3,5 - R_{By} \cdot 7 + R_{Bx} \cdot 4 = 0$$

$$(4) \quad \sum X = R_{Ax} - R_{Bx} = 0$$

$$z (1) \quad R_{By} = (15 \cdot 5 + 5 \cdot 7 \cdot 10,5) / 14 = 31,61 \text{ kN}$$

$$z (2) \quad R_{Ay} = (15 \cdot 9 + 5 \cdot 7 \cdot 3,5) / 14 = 18,39 \text{ kN}$$

$$z (3) \quad R_{Bx} = (-5 \cdot 7 \cdot 3,5 + 31,61 \cdot 7) / 4 = 24,69 \text{ kN}$$

$$z (4) \quad R_{Ax} = 24,69 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrola: } \sum Y = R_{Ay} + R_{By} - P - q \cdot 7 = 18,39 + 31,61 - 15 - 5 \cdot 7 = 0$$

Siły przekrojowe M,T,N:

Obliczenie promienia łuku oraz kąta początkowego:

$$r = L^2 / (8 \cdot f) + 0,5 \cdot f = 14^2 / (8 \cdot 4) + 0,5 \cdot 4 = 8,125 \text{ m}$$

$$\sin \alpha_0 = 0,5 \cdot L / r = 0,5 \cdot 14 / 8,125 = 0,862 \rightarrow \alpha_0 = 59,49^\circ$$

Siły przekrojowe wyznaczymy w punktach charakterystycznych łuku (rys. 5-6), na podstawie określonych niżej funkcji zmiennej α w trzech przedziałach obciążeń:

A4, 4C i CB (gdzie α jest kątem nachylenia przekroju α - α do osi pionowej, od którego uzależnione są również odcięte i rzędne punktu θ danego przekrojem α - α).

Przedział A4 (rys. 5-5a)

$$\alpha \in \langle 13,83^0 ; 59,49^0 \rangle$$

$$T_\alpha = R_{Ay} \cdot \cos\alpha - R_{Ax} \cdot \sin\alpha$$

$$M_\alpha = R_{Ay} \cdot x_1 - R_{Ax} \cdot y_1,$$

gdzie x_1, y_1 są odciętymi i rzędnymi punktu θ , danego przekrojem α - α (rys. 5-4):

$$x_1 = 7 - r \cdot \sin\alpha$$

$$y_1 = 4 - (r - r \cdot \cos\alpha) = 4 - r \cdot (1 - \cos\alpha)$$

$$N_\alpha = -R_{Ay} \cdot \sin\alpha - R_{Ax} \cdot \cos\alpha$$

Przedział 4C (rys. 5-5b)

$$\alpha \in \langle 0^0 ; 13,83^0 \rangle$$

$$T_\alpha = R_{Ay} \cdot \cos\alpha - R_{Ax} \cdot \sin\alpha - P \cdot \cos\alpha$$

$$M_\alpha = R_{Ay} \cdot x_1 - R_{Ax} \cdot y_1 - P \cdot (x_1 - 5)$$

gdzie x_1, y_1 jak w przedziale A4

$$N_\alpha = -R_{Ay} \cdot \sin\alpha - R_{Ax} \cdot \cos\alpha + P \cdot \sin\alpha$$

Przedział BC (rys. 5-5c)

$$\alpha \in \langle 0^0 ; 59,49^0 \rangle ; \text{zmiana znaku!}$$

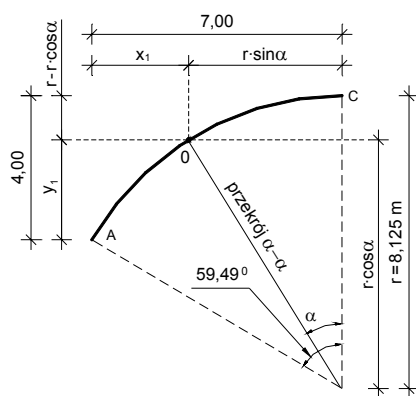
$$T_\alpha = -R_{By} \cdot \cos\alpha + R_{Bx} \cdot \sin\alpha + q \cdot x_2 \cdot \cos\alpha$$

$$M_\alpha = R_{By} \cdot x_2 - R_{Bx} \cdot y_2 - 0,5 \cdot q \cdot x_2^2$$

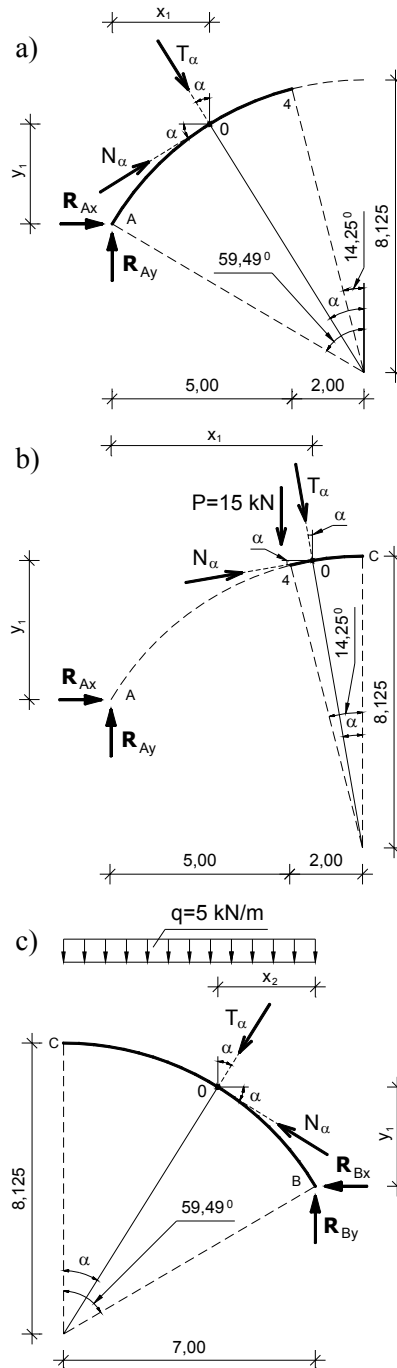
$$x_2 = 7 - r \cdot \sin\alpha$$

$$y_2 = 4 - r \cdot (1 - \cos\alpha)$$

$$N_\alpha = -R_{By} \cdot \sin\alpha - R_{Bx} \cdot \cos\alpha + q \cdot x_2 \cdot \sin\alpha$$



Rys. 5-4. Odcięte i rzędne przekroju α - α



Rys. 5-5. Przedziały obciążeń zewnętrznych

Odcięte i rzędne punktów określonych przez podział prętów AC i CB na cztery odcinki (kąąt początkowy α_0 dzielimy przez cztery) oraz punktów charakterystycznych (podpory A i B , przegub C oraz punkt 4 przyłożenia siły P) wyznaczono według określonych powyżej wzorów i przedstawiono w tabelicy 5-1. Położenie wyszczególnionych punktów pokazano na rysunku 5-6.

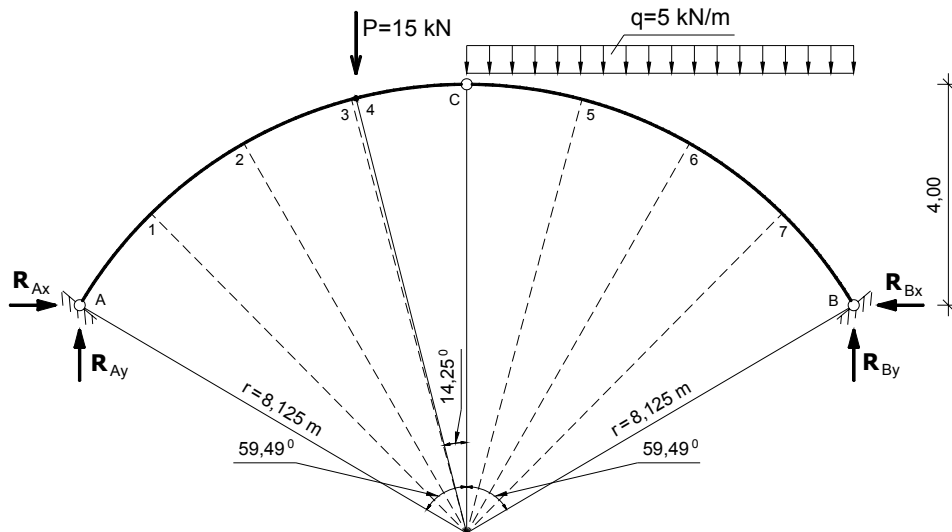
Pręt	Nr przekroju	α	$\sin\alpha$	$r\cdot\sin\alpha$	$x=7-r\cdot\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$1-\cos\alpha$	$y=4-r\cdot(1-\cos\alpha)$
AC	A	59,49	0,862	7,00	0,00	0,508	0,492	0,00
	1	44,62	0,702	5,71	1,29	0,712	0,288	1,66
	2	29,75	0,496	4,03	2,97	0,868	0,132	2,93
	3	14,87	0,257	2,09	4,91	0,967	0,033	3,73
	4	14,25	0,246	2,00	5,00	0,969	0,031	3,75
	C	0	0,000	0,00	7,00	1,000	0,000	4,00
BC	C	0	0,000	0,00	7,00	1,000	0,000	4,00
	5	14,87	0,257	2,09	4,91	0,967	0,033	3,73
	6	29,75	0,496	4,03	2,97	0,868	0,132	2,93
	7	44,62	0,702	5,71	1,29	0,712	0,288	1,66
	B	59,49	0,862	7,00	0,00	0,508	0,492	0,00

Tab. 5-1. Wartości odciętych i rzędnych poszczególnych punktów

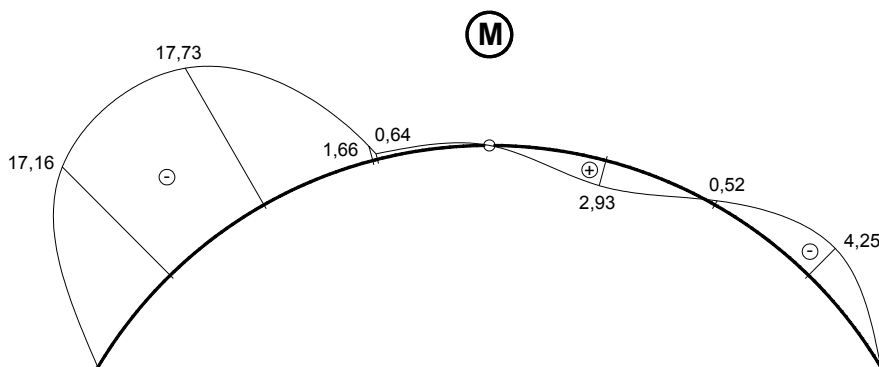
Wartości sił przekrojowych, w punktach o tak wyznaczonych odciętych i rzędnych, obliczamy na podstawie zapisanych wyżej funkcji zmiennej α (kąąt nachylenia przekroju α - α) w wyszczególnionych przedziałach obciążenia łuku. Wyniki przeprowadzonych obliczeń zestawiono w tabeli 5-2, natomiast wykresy sił wewnętrznych M , T , N przedstawiono na rysunku 5-7.

Pręt	Nr przekroju	α	x	y	T_α	M_α	N_α
			m	m	kN	kNm	kN
			wg tab. 5-1		wg wzorów zapisanych dla przedziałów obciążenia		
AC	A	59,49	0,00	0,00	-11,94	0,00	-28,38
	1	44,62	1,29	1,66	-4,25	-17,16	-30,49
	2	29,75	2,97	2,93	3,71	-17,73	-30,56
	3	14,87	4,91	3,73	11,44	-1,66	-28,58
	4	14,25	5,00	3,75	11,95	-0,64	-28,37
	4	14,25	5,00	3,75	-2,61	-0,64	-24,78
	C	0	7,00	4,00	3,39	~0,00	-24,69
BC	C	0	7,00	4,00	3,39	~0,00	-24,69
	5	14,87	4,91	3,73	-0,46	2,93	-25,67
	6	29,75	2,97	2,93	-2,31	-0,52	-29,76
	7	44,62	1,29	1,66	-0,56	-4,25	-35,24
	B	59,49	0,00	0,00	5,22	0,00	-39,77

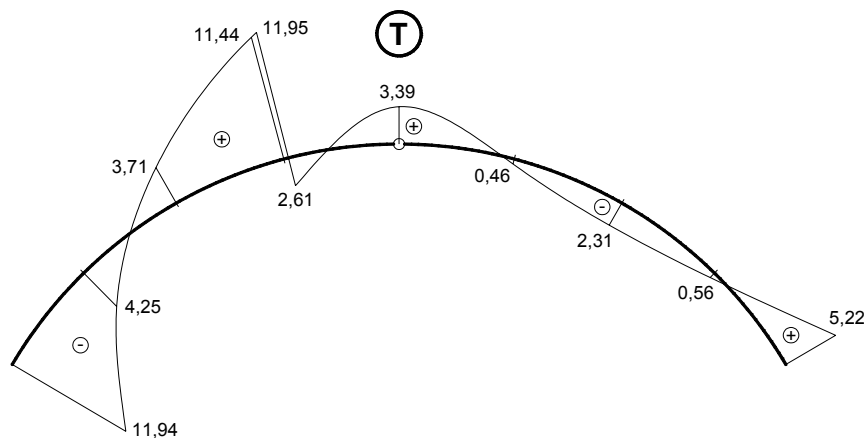
Tab. 5-2. Wartości sił wewnętrznych



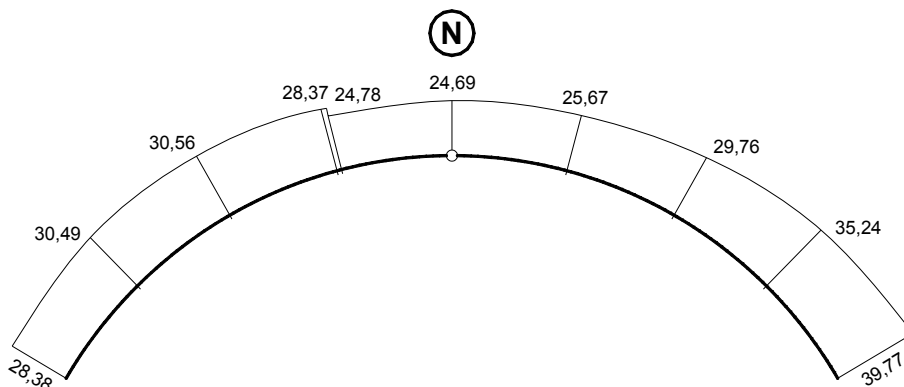
Rys. 5-6. Określenie punktów charakterystycznych dla wyznaczenia sił wewnętrznych



Rys. 5-7. Wykres momentów zginających M

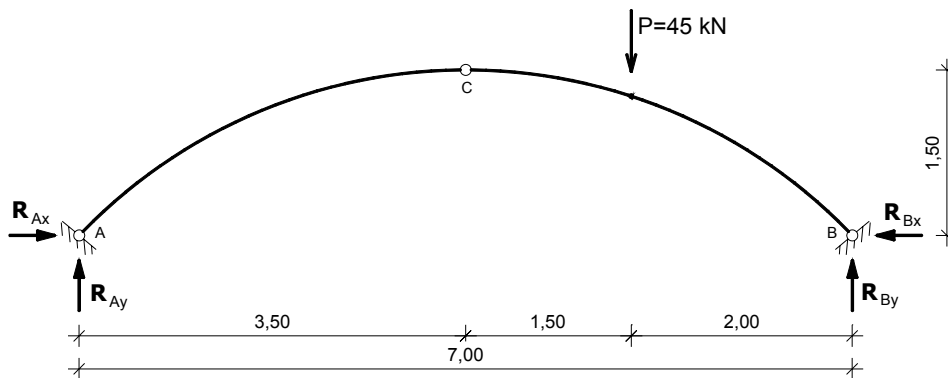


Rys. 5-8. Wykres sił tnących T



Rys. 5-9. Wykres sił osiowych N

Przykład 5-2. Wyznaczyć graficznie linię ciśnień dla łuku trójprzegubowego obciążonego jak na rysunku 5-10.



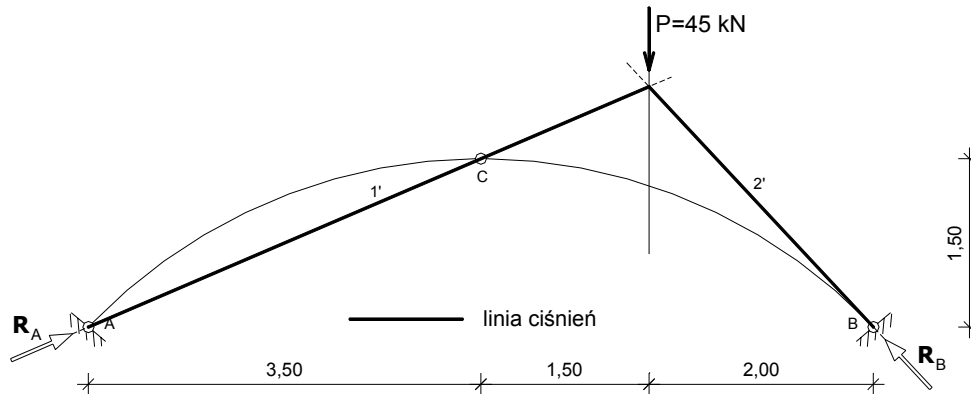
Rys. 5-10. Schemat statyczny

Linia ciśnień dla sił obciążających jest wielobokiem sznurowym, którego boki muszą przechodzić przez wszystkie połączenia przegubowe łuku (moment zginający w przegubie jest równy zero). Reakcje podporowe odpowiadają skrajnym promieniom wieloboku sznurowego, przechodzącym przez przeguby podporowe.

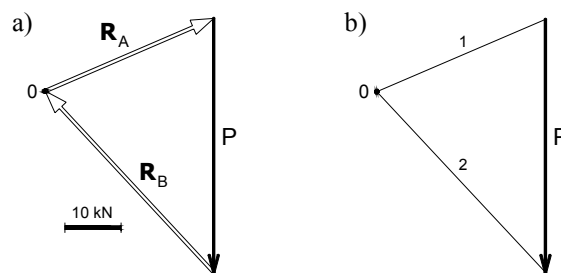
Zadane obciążenie siłą P jest równoważone reakcjami R_A i R_B , które wyznaczymy wykorzystując twierdzenie o trzech siłach. Wynika z niego, że **trzy nierównoległe siły są w równowadze wtedy, gdy ich proste działania przecinają się w jednym punkcie**. Kierunek reakcji R_A znajdujemy prowadząc prostą przechodzącą przez punkt A (punkt przyłożenia reakcji) oraz przez przegub C (moment zginający w przegubie C musi być równy zero). Przecięcie prostych działania siły P oraz reakcji podporowej R_A wyznacza punkt zbieżności układu (rys. 5-11). Prosta działania reakcji R_B określa punkt B oraz punkt zbieżności. Wartości liczbowe i zwroty szukanych reakcji podporowych wyznaczymy, na podstawie znanych już kierunków, budując wielobok sił (rys. 5-12a).

Przecięcie prostych działania reakcji R_A i R_B na wieloboku sił określa położenie bieguna θ (rys. 5-12a), zatem promienie l i 2 , poprowadzone do początku i końca

siły P , pokrywają się z kierunkami reakcji podporowych (rys. 5-12b). Wielobok sznurowy takiego układu, zbudowany jest więc z dwóch skrajnych boków: 1' i 2' odpowiadających linii ciśnień dla zadanego obciążenia.

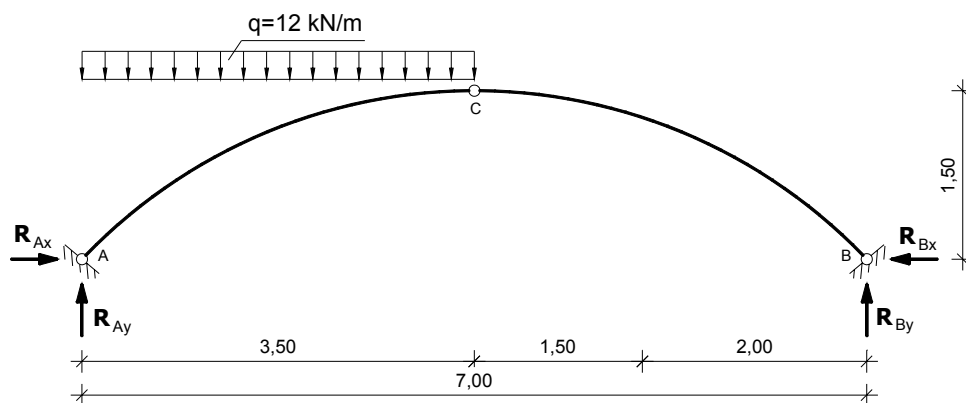


Rys. 5-11. Plan sił



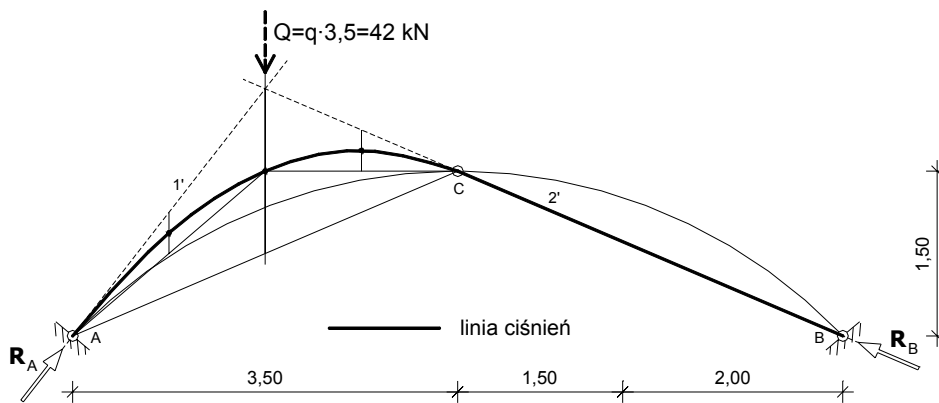
Rys. 5-12. Wielobok sił – odczytano: $R_A=32,7 \text{ kN}$; $R_B=44 \text{ kN}$

Przykład 5-3. Wyznaczyć graficznie linię ciśnień dla łuku trójprzegubowego obciążonego jak na rysunku 5-13.

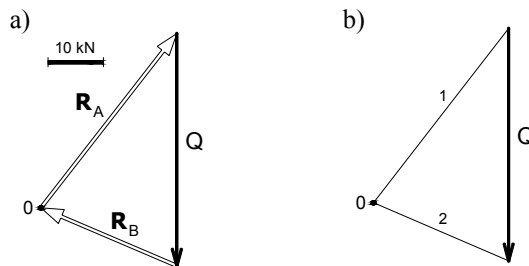


Rys. 5-13. Schemat statyczny

Zadane obciążenie równomiernie rozłożone zastąpimy wypadkową $Q=q \cdot l$ przyłożoną w środku ciężkości tego obciążenia. Reakcje podporowe dla takiego schematu zastępczego wyznaczmy według zasad omówionych w przykładzie 5-2. Sporządzamy plan sił (rys. 5-14) oraz wielobok sił (rys. 5-15), z którego odczytujemy wartości reakcji podporowych R_A i R_B . Linie ciśnię wyznaczamy, korygując wielobok sznurowy w strefie oddziaływania obciążenia równomiernie rozłożonego q . W tym celu prowadzimy pomocniczą prostą AC oraz pionowy odcinek, łączący tę prostą z punktem zbieżności układu sił. Środek tak wyznaczonego odcinka określa wierzchołek paraboli, zawierającej punkty A i C . Odcinek AC paraboli oraz odcinek CB prostej $2'$ stanowi linię ciśnię dla zadanego obciążenia.



Rys. 5-14. Plan sił



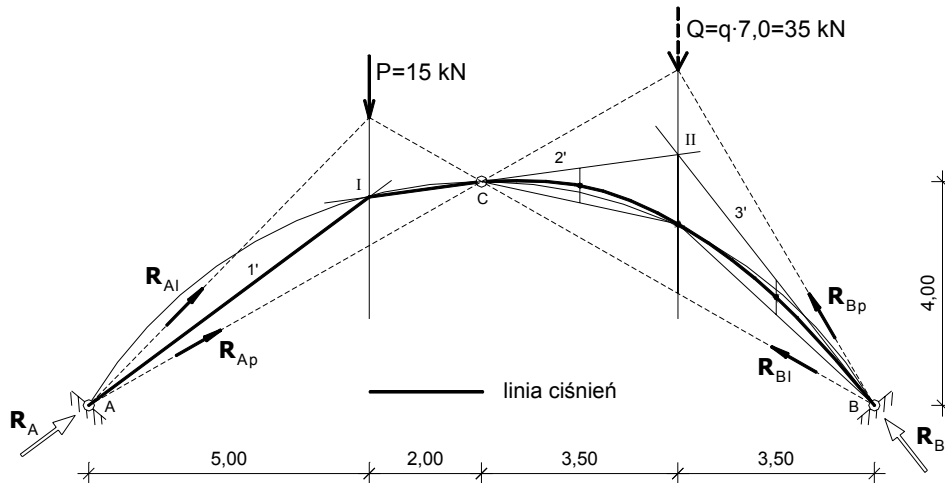
Rys. 5-15. Wielobok sił – odczytano: $R_A=39,9$ kN; $R_B=26,7$ kN

Przykład 5-4. Wyznaczyć graficznie linię ciśnię łuku trójprzegubowego z przykładu 5-1 (obciążonego jak na rysunku 5-3).

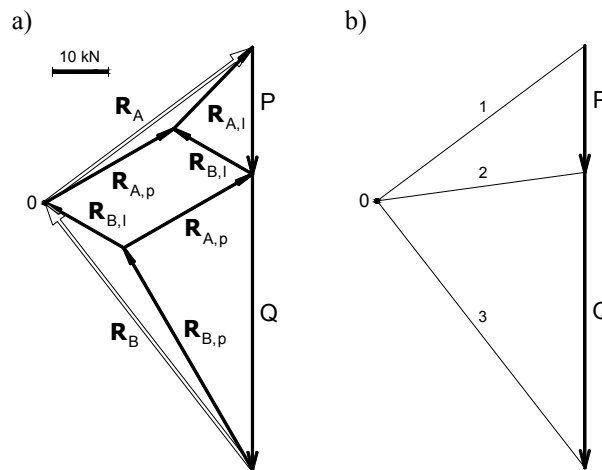
Jeśli mamy do czynienia z obciążeniem występującym po obu stronach przegubu, wyznaczenie reakcji podporowych przebiega w dwóch etapach. W pierwszym, określamy reakcje podporowe R_{A1} i R_{B1} , wynikające z oddziaływania obciążenia po lewej stronie przegubu C siłą P (odrzucając myślowo obciążenie działające na prawo od przegubu). Podobnie jak w przykładzie 5-2 zachodzi tu przypadek równowagi trzech sił, zatem muszą one stanowić układ zbieżny z punktem zbieżności, wyznaczonym przez przecięcie prostej działania siły P oraz prostej działania

reakcji R_{B1} zawierającej punkty C i B (rys. 5-16). Następnie, w ten sam sposób, wyznaczamy reakcje R_{Ap} i R_{Bp} dla łuku obciążonego tylko obciążeniem równomiernie rozłożonym q . Wartości liczbowe oraz zwroty tak określonych reakcji odczytujemy z wieloboku sił (rys. 5-17a), na którym następnie składamy reakcje R_{A1} i R_{Ap} oraz R_{B1} i R_{Bp} , otrzymując w ten sposób reakcje podporowe R_A i R_B .

Linie ciśnień dla zadanego obciążenia wyznaczają kolejno: odcinek AI prostej $1'$, odcinek IC prostej $2'$ oraz odcinek CB paraboli o wierzchołku określonym wg zasad omówionych w przykładzie 5-3.



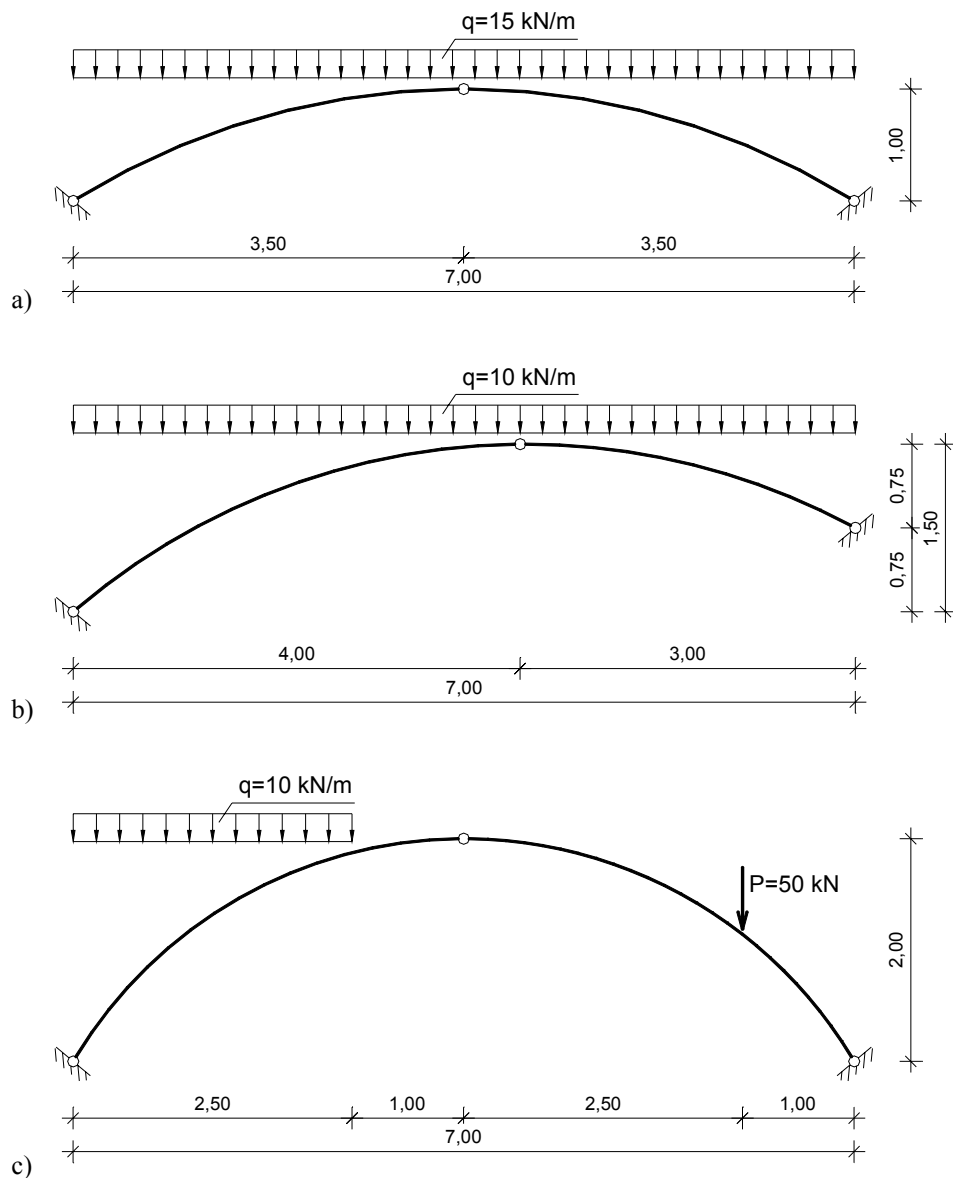
Rys. 5-16. Plan sił



Rys. 5-17. Wielobok sił – odczytano: $R_A=46,2$ kN; $R_B=60,2$ kN

5.3. Przykłady do rozwiązania

Przykład 5-5. Dla łuków trójprzegubowych pokazanych na rysunku 5-18 wyznaczyć graficznie linię ciśnień.



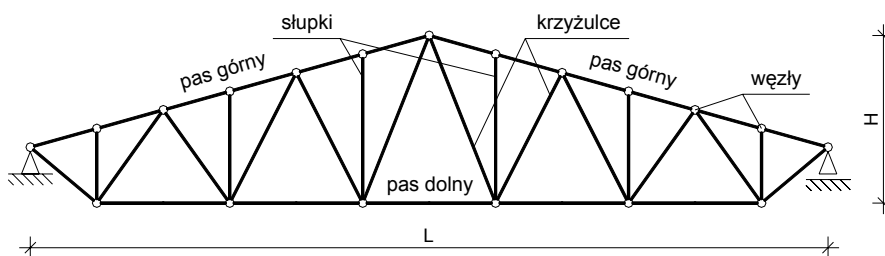
Rys. 5-18. Schematy statyczne łuków trójprzegubowych do samodzielnego rozwiązania

6. Kratownice statycznie wyznaczalne

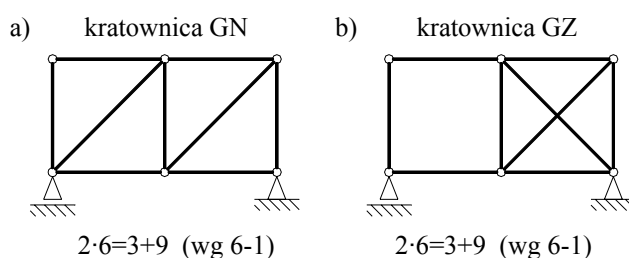
6.1. Wiadomości ogólne

Kratownicą nazywamy geometrycznie niezmienny układ prętów prostoliniowych połączonych ze sobą węzłami przegubowymi. Swoistą cechą kratownic jest przenoszenie obciążeń w postaci sił skupionych przyłożonych w węzłach. Taki układ obciążeń oraz połączenie prętów pozwalające na ich wzajemny obrót (przegub) powoduje, że pręty kratownicy są wyłącznie rozciągane lub ściskane osiowo. Oczywiście uzyskanie idealnego przegubu w praktyce często napotyka spore trudności, wobec czego w rzeczywistości węzły kratownicy charakteryzuje pewna sztywność, co powoduje wystąpienie w prętach momentu zginającego. Jednak wpływ zginania na stan naprężeń w przekroju pręta jest nieznaczny, wobec czego w rozważaniach teoretycznych zwykle jest pomijany (poza wyjątkowymi przypadkami).

Modelem kratownicy może być układ tarcz (prętów) o strukturze kratowej, połączonych ze sobą oraz z podłożem (tarczą podstawową) w sposób zapewniający geometryczną niezmienną (patrz rozdział 2.1.). Najprostszym przypadkiem tarczy o strukturze kratowej jest trójkąt zbudowany z trzech prętów połączonych przegubowo. Możemy zatem powiedzieć, że kratownica zbudowana z prętów tworzących trójkąty jest jedną tarczą. Przykład takiej kratownicy oraz ogólnie przyjęte nazewnictwo podstawowych elementów przedstawiono na rys. 6-1.



Rys. 6-1. Budowa dźwigara kratowego (kratownicy)



Rys. 6-2. Geometryczna niezmienną kratownicy

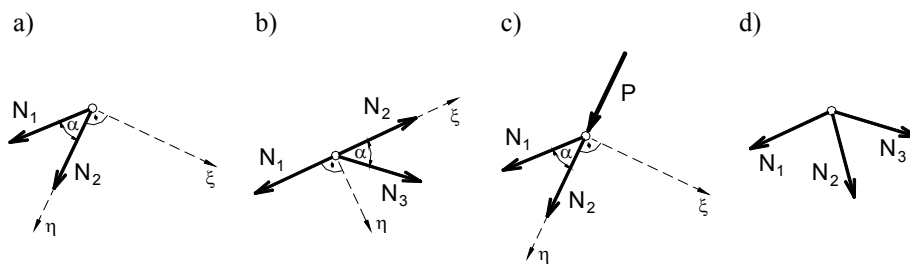
Ilościowy warunek geometrycznej niezmienną oraz zewnętrznej i wewnętrznej statycznej wyznaczalności przedstawia poniższa zależność:

$$2 \cdot w = r + p, \quad (6-1)$$

gdzie $2 \cdot w$ jest liczbą niezależnych równań równowagi dla kratownicy o w węzłach. Z równań tych, wyznaczmy r składowych reakcji podporowych oraz niewiadome siły wewnętrzne w p prętach kratownicy. Równanie 6-1 jest warunkiem koniecznym, lecz niewystarczającym geometrycznej niezmienności (rys. 6-2).

Przy określonym obciążeniu, w niektórych prętach kratownicy siły osiowe są równe zero, co nie oznacza wcale, że pręty te są zbędne. Pręty takie nazywać będziemy **prętami zerowymi**. W niektórych przypadkach możemy zidentyfikować pręty zerowe przed przystąpieniem do rozwiązywania kratownicy:

- jeżeli w węźle nieobciążonym zbiegają się dwa pręty o różnych kierunkach, to siły osiowe w obu są równe zero (rys. 6-3a),
- jeżeli w węźle nieobciążonym zbiegają się trzy pręty, z których dwa leżą na jednej prostej, to trzeci z nich jest zerowy (rys. 6-3b),
- jeżeli w węźle obciążonym siłą P zbiegają się dwa pręty, z których jeden leży na kierunku działania siły P , to drugi pręt jest zerowy (rys. 6-3c),
- jeżeli w węźle nieobciążonym zbiegają się trzy pręty o różnych kierunkach, to albo wszystkie trzy są zerowe, albo wszystkie trzy są różne od zera (rys. 6-3d).



Rys. 6-3. Przykłady określenia prętów zerowych w kratownicy

6.2. Metody wyznaczania sił wewnętrznych

Siły wewnętrzne w prętach kratownicy możemy wyznaczyć na drodze analitycznej lub graficznej. Każdą z opisanych metod poprzedza obliczenie reakcji podporowych w oparciu o omówione już zasady (patrz przykłady liczbowe 3-1 ÷ 3-8).

1. Analityczne wyznaczenie sił w prętach kratownicy:

- **metoda równoważenia węzłów** - każdy myślowo wycięty węzeł kratownicy jest punktem zbieżności pewnej liczby sił zewnętrznych i wewnętrznych. Dla tak określonego układu sił, zapisać możemy dwa warunki równowagi: $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$. Dla kratownicy o w węzłach możemy zapisać $2 \cdot w$ równań równowagi. Jeżeli składowe r reakcji podporowych obliczymy z równań $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma M=0$ zastosowanych do całej kratownicy jak dla ciała sztywnego, to równania te zastępują r spośród $2 \cdot w$ równań równowagi węzłów. Zatem do wyznaczenia sił w prętach kratownicy dysponujemy liczbą $2 \cdot w - r$ niezależnych równań równowagi. Pozostałe r równań spełnione są tożsamościowo i mogą służyć do kontroli obliczeń.
- **metoda przecięć Rittera** - pozwala na bezpośrednie wyznaczenie siły w wybranym przecięciu kratownicy, bez potrzeby obliczania sił w pozostałych prętach.

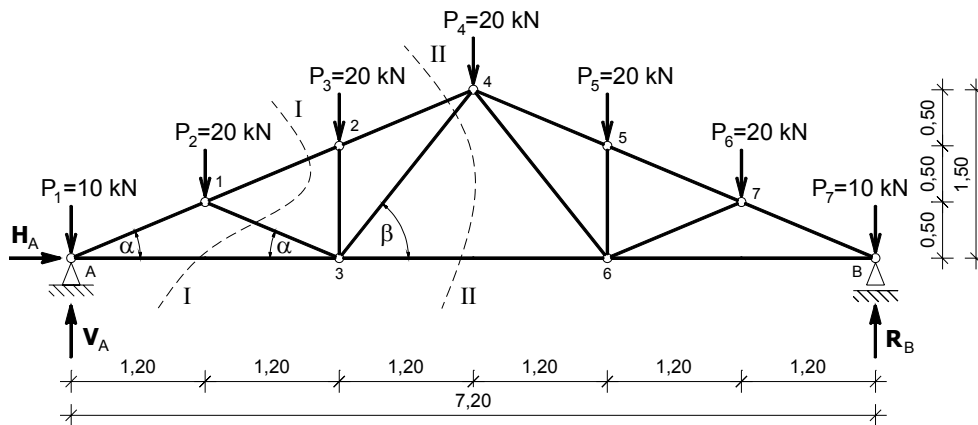
Rozwiązanie polega na przeprowadzeniu przekroju $\alpha\text{-}\alpha$ przez trzy pręty, niezbiegające się w jednym punkcie, pośród których znajduje się pręt (pręty), w którym siłę należy obliczyć. Obie, tak powstałe części kratownicy są w równowadze pod działaniem zaczepionych do nich sił zewnętrznych oraz wewnętrznych (w przekrojonych prętach). Rozpatrując warunki równowagi dla jednej z tych części, możemy wyznaczyć poszukiwane siły w prętach kratownicy. Jeśli przekrojone trzy pręty mają kierunki wzajemnie nierównoległe, to wartość siły w każdym z tych prętów określimy rozpisując równanie sumy momentów wszystkich sił działających na rozpatrywaną część kratownicy, względem punktu zbieżności kierunków wyznaczonych przez dwa pozostałe pręty. Punkt taki nazywać będziemy *punktem Rittera*. Jeśli natomiast dwa spośród trzech prętów są wzajemnie równoległe, to siły w prętach obliczymy rozpisując dwa równania sumy momentów w punktach przecięcia trzeciego pręta z prętami równoległymi oraz równanie sumy rzutów na kierunek prostopadły do prętów wzajemnie równoległych.

2. Wykreślne wyznaczenie sił w prętach kratownicy:

- **metoda Cremony** – jest wykreślnym odpowiednikiem metody równoważenia węzłów. Polega na zamykaniu wieloboków sił zbiegających się w każdym węźle kratownicy. Z tak określonego warunku równowagi wyznaczymy wyłącznie dwie niewiadome, zatem rozpatrujemy kolejno węzły, w których zbiegają się tylko dwa pręty o nieznanach siłach. Połączenie wykreślonych kolejno wieloboków sił dla poszczególnych węzłów w jeden wykres daje plan *Cremony*, z którego można odczytać wartości oraz znaki sił wewnętrznych w prętach.

6.3. Przykłady liczbowe

Przykład 6-1. Wyznaczyć analitycznie oraz graficznie siły w prętach kratownicy przedstawionej na rysunku 6-4.



Rys. 6-4. Schemat statyczny

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= 0,50/1,20 = 0,417 \quad \rightarrow \alpha = 22,62^\circ; \quad \sin\alpha = 0,385; \quad \cos\alpha = 0,923 \\ \operatorname{tg}\beta &= 1,50/1,20 = 1,250 \quad \rightarrow \beta = 51,34^\circ; \quad \sin\beta = 0,781; \quad \cos\beta = 0,625 \end{aligned}$$

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Reakcje podporowe:

Obliczenie reakcji podporowych dowolnie skonstruowanej kratownicy statycznie wyznaczalnej odbywa się zgodnie z zasadami określonymi w rozdziale 2.2. Układamy trzy niezależne równania równowagi, traktując kratownicę jak ciało sztywne (np. belkę), z których obliczamy nieznanne wartości reakcji podporowych. Rozwiązanie możemy uzyskać również na drodze wykreślnej, sporządzając wielobok sił oraz wyznaczając zamykającą wieloboku sznurowego.

$$(1) \quad \sum M_A = P_2 \cdot 1,2 + P_3 \cdot 2,4 + P_4 \cdot 3,6 + P_5 \cdot 4,8 + P_6 \cdot 6,0 + P_7 \cdot 7,2 - R_B \cdot 7,2 = 0$$

$$(2) \quad \sum M_B = V_A \cdot 7,2 - P_1 \cdot 7,2 - P_2 \cdot 6,0 - P_3 \cdot 4,8 - P_4 \cdot 3,6 - P_5 \cdot 2,4 - P_6 \cdot 1,2 = 0$$

$$(3) \quad \sum X = H_A = 0$$

$$z (1) \quad R_B = (20 \cdot 1,2 + 20 \cdot 2,4 + 20 \cdot 3,6 + 20 \cdot 4,8 + 20 \cdot 6,0 + 10 \cdot 7,2) / 7,2 = 60 \text{ kN}$$

$$z (2) \quad V_A = (10 \cdot 7,2 + 20 \cdot 6,0 + 20 \cdot 4,8 + 20 \cdot 3,6 + 20 \cdot 2,4 + 20 \cdot 1,2) / 7,2 = 60 \text{ kN}$$

Wyznaczenie sił w prętach metodą równoważenia węzłów:

Rozwiązanie zadania rozpoczynamy od węzła, w którym zbiegają się tylko dwa pręty o nieznanach siłach wewnętrznych. Następnie, kolejno rozpatrujemy węzły spełniające ten warunek. Przed przystąpieniem do obliczeń, jeśli to jest możliwe, należy określić pręty zerowe zgodnie z zasadami omówionymi w rozdziale 6-1, co znacznie może uprościć rozwiązanie.

Zakładamy, że zwroty sił w prętach są skierowane od węzła (rozciąganie). Zapewnia to zgodność wyników z przyjętymi zasadami znakowania sił (patrz rys. 2-5).

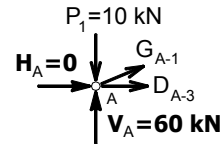
Węzeł A (rys. 6-5)

$$\sum Y = V_A - P_1 + G_{A-1} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$G_{A-1} = (-60 + 10) / 0,385 = -129,87 \text{ kN}$$

$$\sum X = H_A + D_{A-3} + G_{A-1} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$D_{A-3} = 0 + 129,87 \cdot 0,923 = 119,87 \text{ kN}$$



Rys. 6-5. Węzeł A

Węzeł 1 (rys. 6-6)

$$\sum X = -G_{A-1} \cdot \cos \alpha + G_{1-2} \cdot \cos \alpha + K_{1-3} \cdot \cos \alpha = 0$$

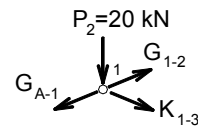
$$G_{1-2} = G_{A-1} - K_{1-3} = -129,87 - K_{1-3}$$

$$\sum Y = -G_{A-1} \cdot \sin \alpha - P_2 + G_{1-2} \cdot \sin \alpha - K_{1-3} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$129,87 \cdot 0,385 - 20 + (-129,87 - K_{1-3}) \cdot 0,385 - K_{1-3} \cdot 0,385 = 0$$

$$K_{1-3} = -20 / (2 \cdot 0,385) = -25,97 \text{ kN}$$

$$G_{1-2} = -129,87 + 25,97 = -103,90 \text{ kN}$$

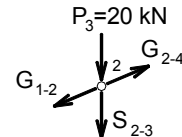


Rys. 6-6. Węzeł 1

Węzeł 2 (rys. 6-7)

$$\sum X = -G_{1-2} \cdot \cos \alpha + G_{2-4} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$G_{2-4} = -103,90 \text{ kN}$$



Rys. 6-7. Węzeł 2

$$\sum Y = -G_{1-2} \cdot \sin \alpha - P_3 - S_{2-3} + G_{2-4} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$S_{2-3} = 103,90 \cdot 0,385 - 20 - 103,90 \cdot 0,385 = -20 \text{ kN}$$

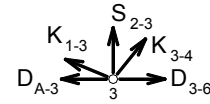
Węzeł 3 (rys. 6-8)

$$\sum Y = K_{1-3} \cdot \sin \alpha + S_{2-3} + K_{3-4} \cdot \sin \beta = 0$$

$$K_{3-4} = (25,97 \cdot 0,385 + 20) / 0,781 = 38,41 \text{ kN}$$

$$\sum X = -D_{A-3} - K_{1-3} \cdot \cos \alpha + K_{3-4} \cdot \cos \beta + D_{3-6} = 0$$

$$D_{3-6} = 119,87 - 25,97 \cdot 0,923 - 38,41 \cdot 0,625 = 71,89 \text{ kN}$$



Rys. 6-8. Węzeł 3

Uwzględniając symetryczną budowę kratownicy oraz symetrię obciążenia możemy stwierdzić, że siły w pozostałych prętach wynoszą odpowiednio:

$$G_{4-5} = G_{2-4} = -103,90 \text{ kN}$$

$$K_{4-6} = K_{3-4} = 38,41 \text{ kN}$$

$$G_{5-7} = G_{1-2} = -103,90 \text{ kN}$$

$$S_{5-6} = S_{2-3} = -20 \text{ kN}$$

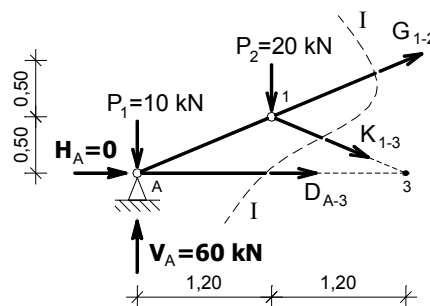
$$K_{6-7} = K_{1-3} = -25,97 \text{ kN}$$

$$D_{6-B} = D_{A-3} = 119,87 \text{ kN}$$

$$G_{7-B} = G_{A-1} = 129,87 \text{ kN}$$

Wyznaczenie sił w prętach metodą przecięć Rittera:

Aby obliczyć siły w prętach kratownicy, poprowadzimy przekroje *I-I* oraz *II-II* tak, by każdy z nich przecinał trzy pręty (rys. 6-4). Dla odciętej części kratownicy rozpisujemy odpowiednie warunki równowagi.



Rys. 6-9. Schemat obciążenia dla przekroju *I-I*

Siłę G_{1-2} wyznaczmy zapisując równanie sumy momentów względem punktu 3. Równanie to formułujemy dla odciętej przekrojem *I-I* lewej części kratownicy, obciążonej siłami zewnętrznymi oraz siłami w przeciętych prętach (rys. 6-9).

Określenie ramienia poszukiwanej siły G_{1-2} względem punktu 3 (punkt *Rittera*) jest stosunkowo kłopotliwe. Wyznaczając rzuty siły G_{1-2} na osie *x* i *y* oraz przyjmując punkt 2 za punkt ich przyłożenia zauważymy, że moment składowej pionowej względem punktu 3 jest równy zero (jej kierunek przechodzi przez ten punkt). Zatem pozostaje nam tylko określenie momentu składowej poziomej siły G_{1-2} :

$$\sum M_3 = V_A \cdot 2,4 - P_1 \cdot 2,4 - P_2 \cdot 1,2 + G_{1-2} \cdot \cos \alpha \cdot 1,0 = 0$$

$$G_{1-2} = (-60 \cdot 2,4 + 10 \cdot 2,4 + 20 \cdot 1,2) / (0,923 \cdot 1,0) = -104,01 \text{ kN}$$

Siłę K_{1-3} wyznaczmy z sumy momentów względem punktu A :

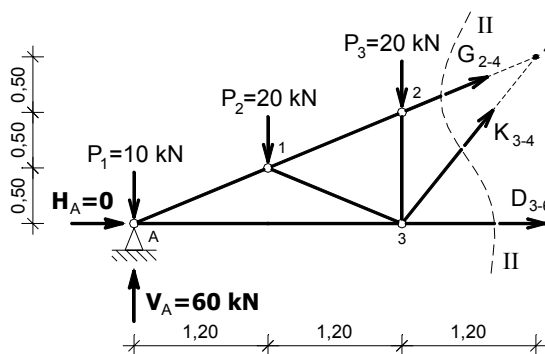
$$\sum M_A = P_2 \cdot 1,2 + K_{1-3} \cdot \sin \alpha \cdot 2,4 = 0$$

$$K_{1-3} = (-20 \cdot 1,2) / (0,385 \cdot 2,4) = -25,97 \text{ kN}$$

Siłę D_{A-3} wyznaczmy z sumy momentów względem punktu I :

$$\sum M_I = V_A \cdot 1,2 - P_1 \cdot 1,2 - D_{A-3} \cdot 0,5 = 0$$

$$D_{A-3} = (60 \cdot 1,2 - 10 \cdot 1,2) / 0,5 = 120,00 \text{ kN}$$



Rys. 6-10. Schemat obciążenia dla przekroju II-II

Siłę G_{2-4} obliczymy zapisując równanie sumy momentów względem punktu 3 dla odciętej myślowo przekrojem II-II lewej części kratownicy (rys. 6-10):

$$\sum M_3 = V_A \cdot 2,4 - P_1 \cdot 2,4 - P_2 \cdot 1,2 + G_{2-4} \cdot \cos \alpha \cdot 1,0 = 0$$

$$G_{2-4} = (-60 \cdot 2,4 + 10 \cdot 2,4 + 20 \cdot 1,2) / (0,923 \cdot 1,0) = -104,01 \text{ kN}$$

Siłę K_{3-4} wyznaczmy z sumy momentów względem punktu A :

$$\sum M_A = P_2 \cdot 1,2 + P_3 \cdot 2,4 - K_{3-4} \cdot \sin \beta \cdot 2,4 = 0$$

$$K_{3-4} = (20 \cdot 1,2 + 20 \cdot 2,4) / (0,781 \cdot 2,4) = 38,41 \text{ kN}$$

Siłę D_{3-6} wyznaczmy z sumy momentów względem punktu 4:

$$\sum M_4 = V_A \cdot 3,6 - P_1 \cdot 3,6 - P_2 \cdot 2,4 - P_3 \cdot 1,2 - D_{3-6} \cdot 1,5 = 0$$

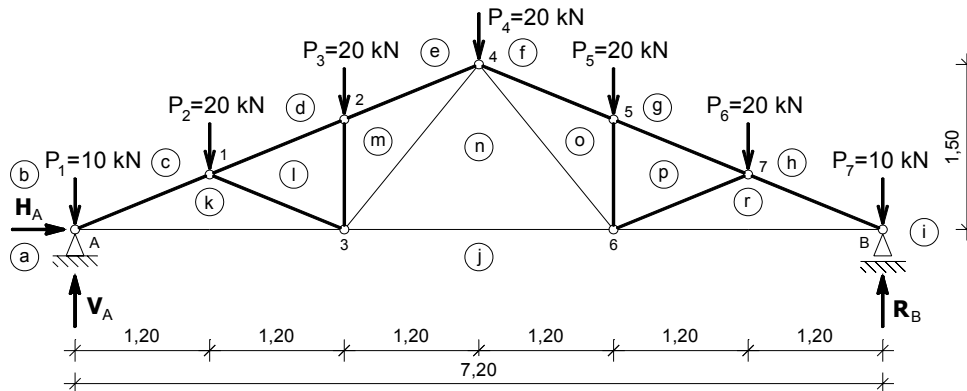
$$D_{3-6} = (60 \cdot 3,6 - 10 \cdot 3,6 - 20 \cdot 2,4 - 20 \cdot 1,2) / 1,5 = 72,00 \text{ kN}$$

Otrzymane wartości sił są zgodne z wynikami uzyskanymi w metodzie równowagi węzłów. Różnice nieprzekraczające 0,2% wynikają z błędów powstałego przez zaokrąglenie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów α i β .

ROZWIĄZANIE GRAFICZNE (METODA CREMONY)

Siły zewnętrzne działające na kratownicę dzielą otaczający ją obszar na części zwane *polami zewnętrznymi*, które oznaczamy kolejno literami alfabetu: $a \div j$ (rys. 6-11). Podobnie oznaczamy pola $k \div r$, ograniczone przez pręty kratownicy, które

nazywamy *polami wewnętrznymi*. Oznaczenie takie pozwala traktować każdą siłę zewnętrzną oraz wewnętrzną jako granicę dwóch sąsiadujących ze sobą pól.



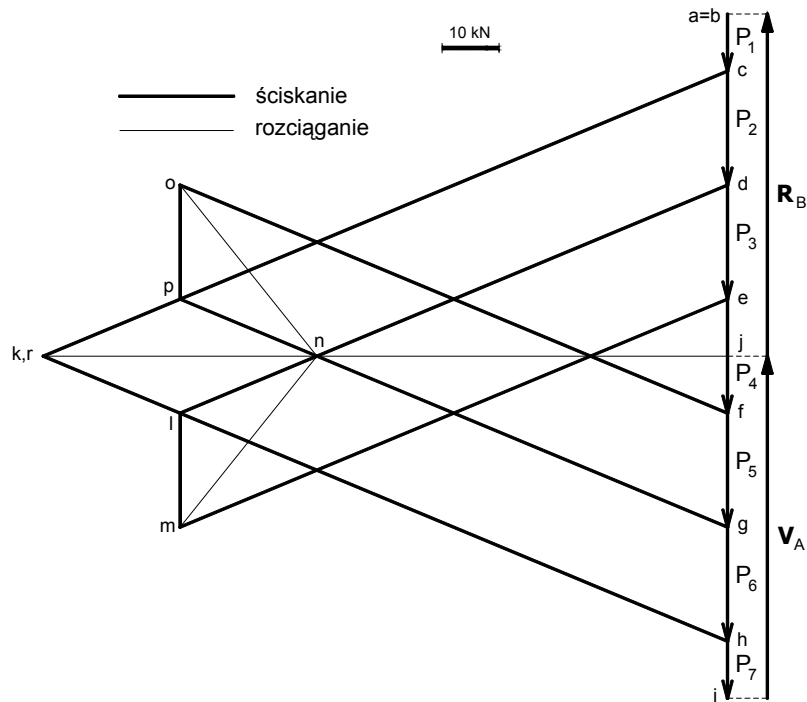
Rys. 6-11. Schemat statyczny – podział obszaru kratownicy na pola

W przyjętej skali sił (np. 1cm = 1kN) kreślimy wielobok sił zewnętrznych (rys. 6-12) wykreślając je zgodnie z kolejnością, w jakiej przyłożone są do węzłów kratownicy, przyjmując najczęściej prawoskrętne okrążanie jej obwodu. Na tak sporządzonym wieloboku każdemu polu zewnętrznemu odpowiada punkt (a, b, c, \dots, j).

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie sił wewnętrznych w prętach kratownicy, kolejno określając warunki równowagi wszystkich węzłów. Rozpoczynamy od węzła A , w którym zbiegają się tylko dwa pręty o nieznanymi siłami. Węzeł A jest w równowadze pod działaniem sił, \vec{ab} , \vec{bc} , \vec{ck} i \vec{kj} , których zapis wynika z prawoskrętnego okrążenia węzła. Siły \vec{ab} i \vec{bc} są znane, zaś pozostałe dwie siły wyznaczymy, prowadząc z punktu c prostą równoległą do kierunku siły \vec{ck} , natomiast z punktu j prostą równoległą do kierunku siły \vec{kj} . Na przecięciu tych dwóch prostych leży punkt k . Z czworoboku $a-c-k-j-b$ ($a=b$) odczytamy wartości liczbowe oraz znaki poszukiwanych sił. Siły \vec{ck} odpowiada długość odcinka ck w przyjętej skali sił, zaś jej zwrot jest zgodny z obiegiem prawoskrętnym wokół węzła (od c do k). Tak więc siła \vec{ck} jest skierowana do węzła (pręt jest ściskany), natomiast siła \vec{kj} ma zwrot od węzła (pręt jest rozciągany).

W podobny sposób wykreślamy wieloboki sił dla pozostałych węzłów, określając wartości liczbowe i zwroty sił wewnętrznych w pozostałych prętach kratownicy. Odpowiednio więc, dla kolejnych węzłów, budujemy następujące wieloboki sił: dla węzła 1 czworobok $c-d-l-k-c$, dla węzła 2 czworobok $d-e-m-l-d$, dla węzła 3 pięciobok $j-k-l-m-n-j$, dla węzła 4 pięciobok $e-f-o-n-m-e$, dla węzła 5 czworobok $f-g-p-o-f$ i wreszcie dla węzła 6 pięciobok $j-n-o-p-r-j$.

W węźle 7, w którym pozostaje do wyznaczenia jedynie siła \vec{hr} , budując czworobok $g-h-r-p-g$, wyznaczamy jedynie prostą hr , która musi być równoległa do pręta hr . W ten sposób otrzymujemy potwierdzenie poprawności wykreślenia planu sił Cremony.

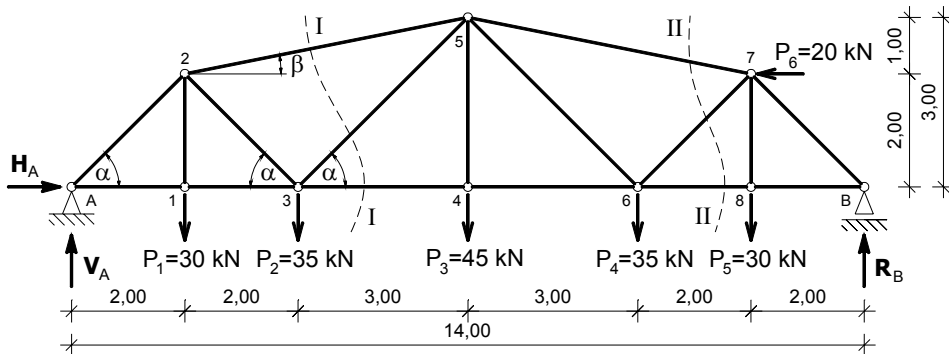


Rys. 6-12. Plan sił Cremony (opis w tekście)

Pręt	c-k	k-j	d-l	l-k	e-m	m-l	m-n	n-j	f-o	o-n	g-p	p-o	p-r	r-j	h-r
Sila [kN]	-130	120	-104	-26	-104	-20	38,5	72	-104	38,5	-104	-20	-26	120	-130

Tab. 6-1. Wartości sił wewnętrznych w prętach kratownicy (wg planu Cremony)

Przykład 6-2. Wyznaczyć analitycznie oraz graficznie siły w prętach kratownicy przedstawionej na rysunku 6-13.



Rys. 6-13. Schemat statyczny

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= 2,0/2,0 = 1,00 \rightarrow \alpha = 45,00^\circ; \quad \sin \alpha = 0,707; \quad \cos \alpha = 0,707 \\ \operatorname{tg} \beta &= 1,0/5,0 = 0,20 \rightarrow \beta = 11,31^\circ; \quad \sin \beta = 0,196; \quad \cos \beta = 0,981 \end{aligned}$$

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Reakcje podporowe:

$$(1) \quad \sum M_A = P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 4 + P_3 \cdot 7 + P_4 \cdot 10 + P_5 \cdot 12 - P_6 \cdot 2 - R_B \cdot 14 = 0$$

$$(2) \quad \sum M_B = V_A \cdot 14 - P_1 \cdot 12 - P_2 \cdot 10 - P_3 \cdot 7 - P_4 \cdot 4 - P_5 \cdot 2 - P_6 \cdot 2 = 0$$

$$(3) \quad \sum X = H_A - P_6 = 0$$

$$z(1) \quad R_B = (30 \cdot 2 + 35 \cdot 4 + 45 \cdot 7 + 35 \cdot 10 + 30 \cdot 12 - 20 \cdot 2) / 14 = 84,64 \text{ kN}$$

$$z(2) \quad V_A = (30 \cdot 12 + 35 \cdot 10 + 45 \cdot 7 + 35 \cdot 4 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2) / 14 = 90,36 \text{ kN}$$

$$z(3) \quad H_A = 20 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrola: } \sum Y = V_A + R_B - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 = 90,36 + 84,64 - 30 - 35 - 45 - 35 - 30 = 0$$

Wyznaczenie sił wewnętrznych w prętach:

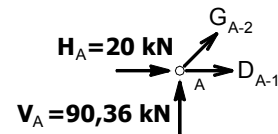
Równowaga węzła A (rys. 6-14)

$$\sum Y = V_A + G_{A-2} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$G_{A-2} = -90,36 / 0,707 = -127,81 \text{ kN}$$

$$\sum X = H_A + D_{A-1} + G_{A-2} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$D_{A-1} = -20 + 127,81 \cdot 0,707 = 70,36 \text{ kN}$$



Rys. 6-14. Węzeł A

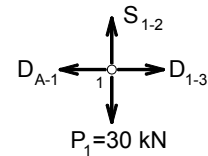
Równowaga węzła 1 (rys. 6-15)

$$\sum X = -D_{A-1} + D_{1-3} = 0$$

$$D_{1-3} = 70,36 \text{ kN}$$

$$\sum Y = S_{1-2} - P_1 = 0$$

$$S_{1-2} = 30 \text{ kN}$$

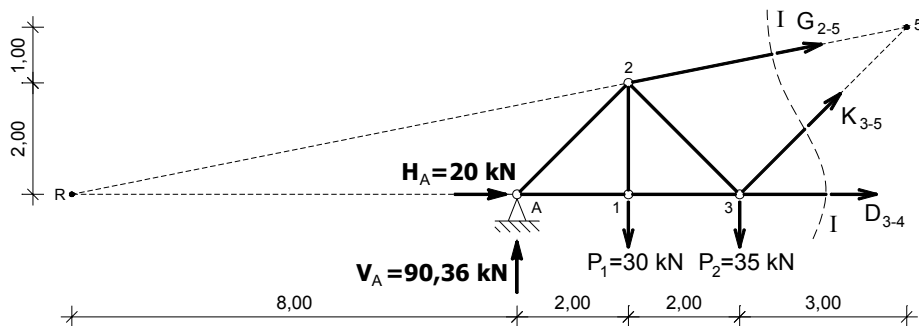


Rys. 6-15. Węzeł 1

Przecięcie Rittera (przekrój I-I) (rys. 6-16)

$$\sum M_5 = V_A \cdot 7 - H_A \cdot 3 - P_1 \cdot 5 - P_2 \cdot 3 - D_{3-4} \cdot 3 = 0$$

$$D_{3-4} = (90,36 \cdot 7 - 20 \cdot 3 - 30 \cdot 5 - 35 \cdot 3) / 3 = 105,84 \text{ kN}$$



Rys. 6-16. Schemat obciążenia dla przekroju I-I

$$\sum M_R = -K_{3-5} \cdot \sin \alpha \cdot 12 + P_2 \cdot 12 + P_1 \cdot 10 - V_A \cdot 8 = 0$$

$$K_{3-5} = (35 \cdot 12 + 30 \cdot 10 - 90,36 \cdot 8) / (0,707 \cdot 12) = -0,34 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = G_{2-5} \cdot \sin\beta \cdot 12 + V_A \cdot 4 - P_1 \cdot 2 = 0$$

$$G_{2-5} = (-90,36 \cdot 4 + 30 \cdot 2) / (0,196 \cdot 12) = -128,16 \text{ kN}$$

Równowaga węzła 3 (rys. 6-17)

$$\sum Y = K_{2-3} \cdot \sin\alpha + K_{3-5} \cdot \sin\alpha - P_2 = 0$$

$$K_{2-3} = (0,34 \cdot 0,707 + 35) / 0,707 = 49,84 \text{ kN}$$

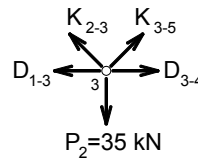
Równowaga węzła 4 (rys. 6-18)

$$\sum X = -D_{3-4} + D_{4-6} = 0$$

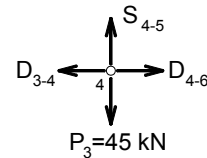
$$D_{4-6} = 105,84 \text{ kN}$$

$$\sum Y = S_{4-5} - P_3 = 0$$

$$S_{4-5} = 45 \text{ kN}$$



Rys. 6-17. Węzeł 3



Rys. 6-18. Węzeł 4

Przecięcie Rittera (przekrój II-II) (rys. 6-19)

$$\sum M_7 = -R_B \cdot 2 + D_{6-8} \cdot 2 = 0$$

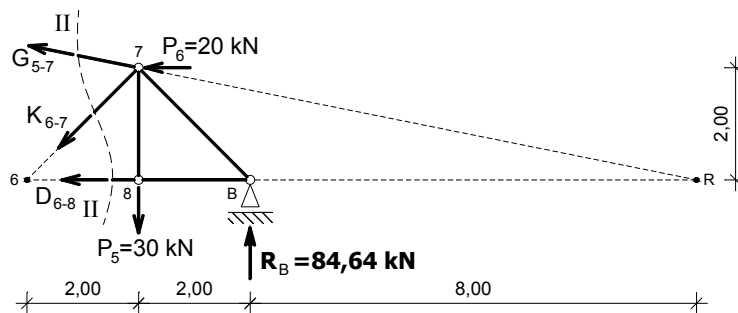
$$D_{6-8} = 84,64 \text{ kN}$$

$$\sum M_R = -K_{6-7} \cdot \sin\alpha \cdot 12 - P_6 \cdot 2 - P_5 \cdot 10 + R_B \cdot 8 = 0$$

$$K_{6-7} = (-20 \cdot 2 - 30 \cdot 10 + 84,64 \cdot 8) / (0,707 \cdot 12) = 39,74 \text{ kN}$$

$$\sum M_6 = -R_B \cdot 4 + P_5 \cdot 2 - P_6 \cdot 2 - G_{5-7} \cdot \sin\beta \cdot 12 = 0$$

$$G_{5-7} = (-84,64 \cdot 4 + 30 \cdot 2 - 20 \cdot 2) / (0,196 \cdot 12) = -135,44 \text{ kN}$$



Rys. 6-19. Schemat obciążenia dla przekroju II-II

Równowaga węzła 6 (rys. 6-20)

$$\sum Y = K_{5-6} \cdot \sin\alpha + K_{6-7} \cdot \sin\alpha - P_4 = 0$$

$$K_{5-6} = (-39,74 \cdot 0,707 + 35) / 0,707 = 9,76 \text{ kN}$$

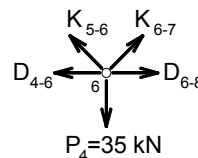
Równowaga węzła 8 (rys. 6-21)

$$\sum X = -D_{6-8} + D_{8-B} = 0$$

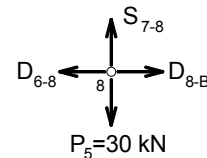
$$D_{8-B} = 84,64 \text{ kN}$$

$$\sum Y = S_{7-8} - P_5 = 0$$

$$S_{7-8} = 30 \text{ kN}$$



Rys. 6-20. Węzeł 6



Rys. 6-21. Węzeł 8

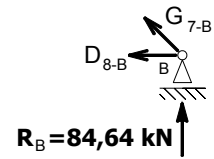
Równowaga węzła B (rys. 6-22)

$$\sum Y = R_B + G_{7-B} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$G_{7-B} = -84,64 / 0,707 = -119,72 \text{ kN}$$

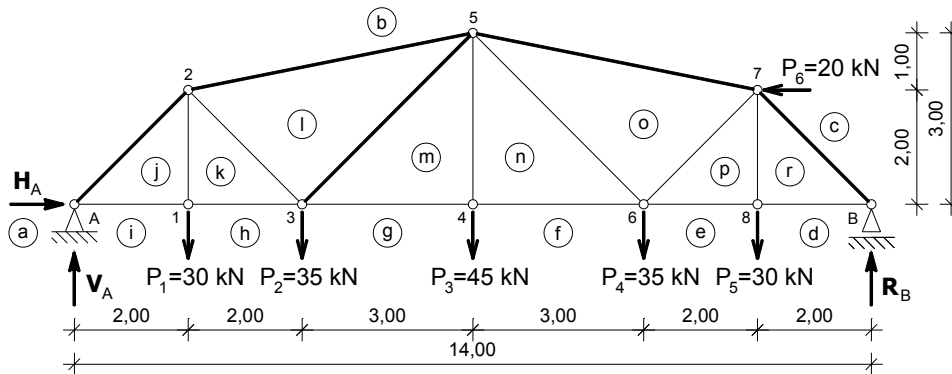
$$\sum X = -D_{8-B} - G_{7-B} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$-84,64 + 119,72 \cdot 0,707 = 0 \text{ (sprawdzenie)}$$

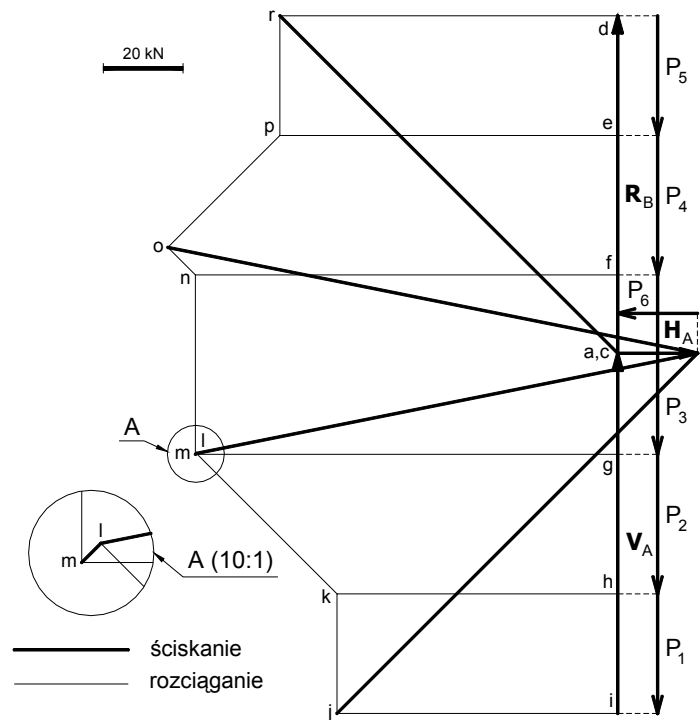


Rys. 6-22. Węzeł B

ROZWIĄZANIE GRAFICZNE (METODA CREMONY)



Rys. 6-23. Schemat statyczny – podział obszaru kratownicy na pola



Rys. 6-24. Plan sił Cremony (opis w tekście)

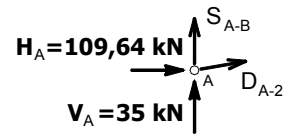
Równowaga węzła A (rys. 6-26)

$$\sum X = H_A + D_{A-2} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$D_{A-2} = -109,64 / 0,985 = -111,31 \text{ kN}$$

$$\sum Y = V_A + D_{A-2} \cdot \sin \alpha + S_{A-B} = 0$$

$$S_{A-B} = -35 + 111,31 \cdot 0,172 = -15,85 \text{ kN}$$



Rys. 6-26. Węzeł A

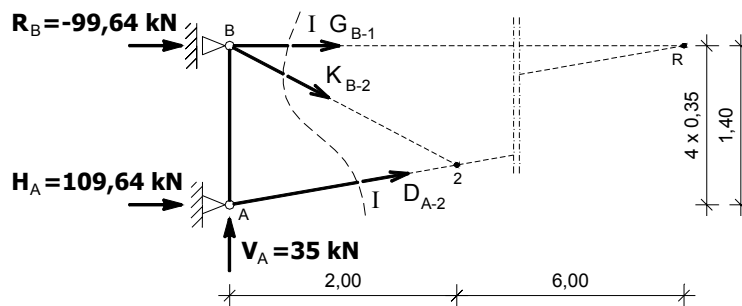
Przecięcie Rittera (przekrój I-I) (rys. 6-27)

$$\sum M_2 = V_A \cdot 2 - H_A \cdot 0,35 + R_B \cdot 1,05 + G_{B-1} \cdot 1,05 = 0$$

$$G_{B-1} = (-35 \cdot 2 + 109,64 \cdot 0,35 + 99,64 \cdot 1,05) / 1,05 = 69,52 \text{ kN}$$

$$\sum M_R = V_A \cdot 8 - H_A \cdot 1,4 - K_{B-2} \cdot \sin \beta \cdot 8 = 0$$

$$K_{B-2} = (35 \cdot 8 - 109,64 \cdot 1,4) / (0,465 \cdot 8) = 34,01 \text{ kN}$$



Rys. 6-27. Schemat obciążenia dla przekroju I-I

Przecięcie Rittera (przekrój II-II) (rys. 6-28)

$$\sum M_2 = V_A \cdot 2 - H_A \cdot 0,35 + R_B \cdot 1,05 + G_{1-4} \cdot 1,05 = 0$$

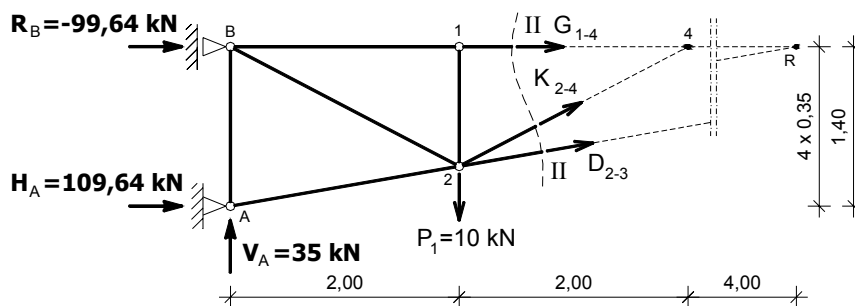
$$G_{1-4} = (-35 \cdot 2 + 109,64 \cdot 0,35 + 99,64 \cdot 1,05) / 1,05 = 69,52 \text{ kN}$$

$$\sum M_R = V_A \cdot 8 - H_A \cdot 1,4 - P_1 \cdot 6 + K_{2-4} \cdot \sin \beta \cdot 4 = 0$$

$$K_{2-4} = (-35 \cdot 8 + 109,64 \cdot 1,4 + 10 \cdot 6) / (0,465 \cdot 4) = -35,75 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = V_A \cdot 4 - H_A \cdot 1,4 - P_1 \cdot 2 - D_{2-3} \cdot \cos \alpha \cdot 0,7 = 0$$

$$D_{2-3} = (35 \cdot 4 - 109,64 \cdot 1,4 - 10 \cdot 2) / (0,985 \cdot 0,7) = -48,58 \text{ kN}$$



Rys. 6-28. Schemat obciążenia dla przekroju II-II

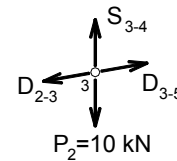
Równowaga węzła 3 (rys. 6-29)

$$\sum X = -D_{2-3} \cdot \cos \alpha + D_{3-5} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$D_{3-5} = -48,58 \text{ kN}$$

$$\sum Y = -P_2 - D_{2-3} \cdot \sin \alpha + S_{3-4} + D_{3-5} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$S_{3-4} = 10 \text{ kN}; \text{ bo } D_{2-3} = D_{3-5}$$



Rys. 6-29. Węzeł 3

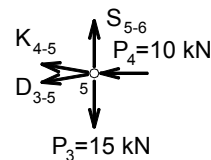
Równowaga węzła 5 (rys. 6-30)

$$\sum X = -D_{3-5} \cdot \cos \alpha - K_{4-5} \cdot \cos \alpha - P_4 = 0$$

$$K_{4-5} = (48,58 \cdot 0,985 - 10) / 0,985 = 38,43 \text{ kN}$$

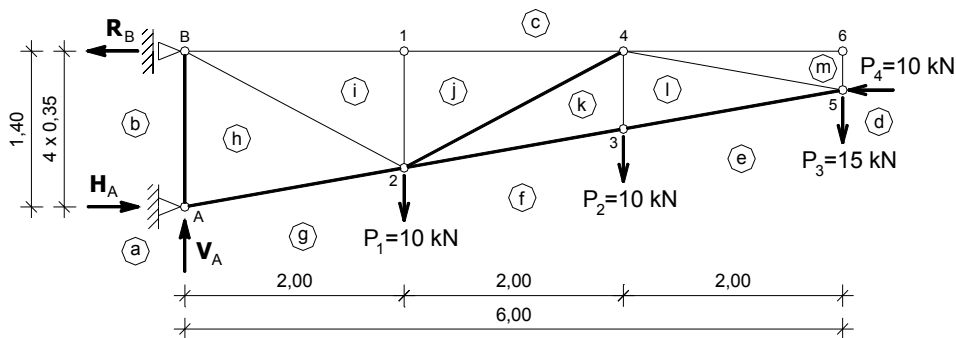
$$\sum Y = -D_{3-5} \cdot \sin \alpha + K_{4-5} \cdot \sin \alpha - P_3 + S_{5-6} = 0$$

$$S_{5-6} = -48,58 \cdot 0,172 - 38,43 \cdot 0,172 + 15 \approx 0 \text{ (sprawdzenie)}$$



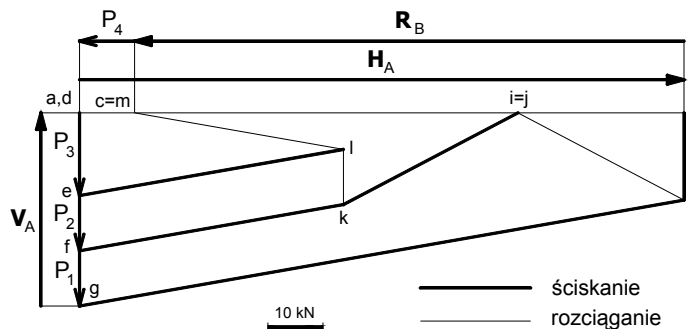
Rys. 6-30. Węzeł 5

ROZWIĄZANIE GRAFICZNE (METODA CREMONY)



Rys. 6-31. Schemat statyczny – podział obszaru kratownicy na pola

Wielobok sił zewnętrznych sporządzamy na podstawie wartości reakcji podporowych wyznaczonych metodą analityczną. Plan sił *Cremony* wykreślamy rozpoczynając od węzła *A*, gdzie zbiegają się dwa pręty o nieznanymi siłach. Wiedząc, że pręt 5-6 jest zerowy, rozwiązanie możemy także rozpocząć od węzła 5. W takim wypadku nie ma potrzeby wcześniejszego wyznaczania reakcji podporowych, których wartości odczytamy z planu sił *Cremony*. Wyniki przedstawiono w tabeli 6-3.

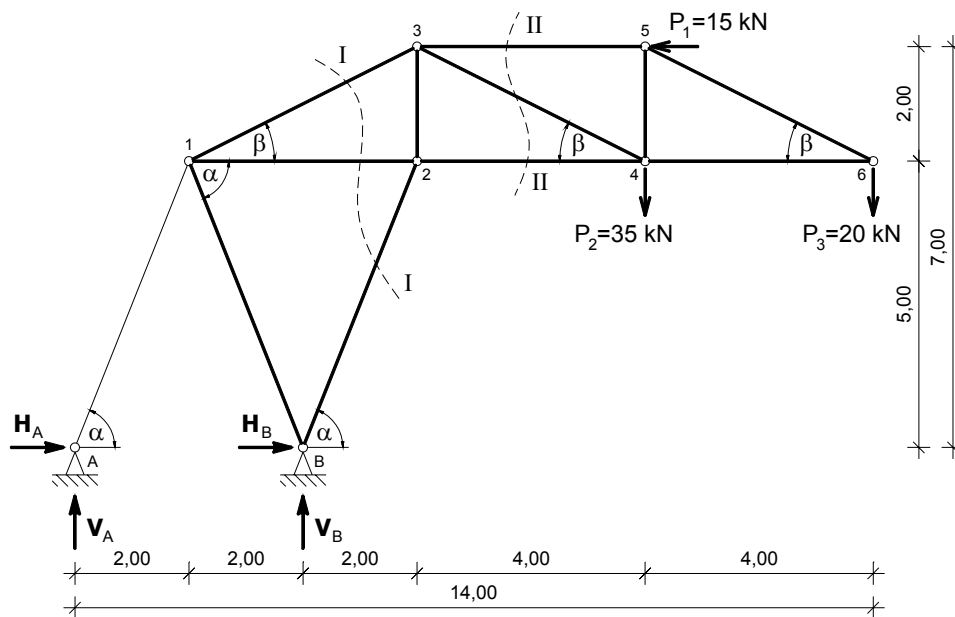


Rys. 6-32. Plan sił *Cremony* (opis w tekście)

Pręt	b-h	h-g	c-i	i-h	c-j	j-i	j-k	k-f	k-l	l-e	c-m	m-l
Siła [kN]	-16	-111,5	69,5	34	69,5	0	-36	-48,5	10	-48,5	0	38,5

Tab. 6-3. Wartości sił wewnętrznych w prętach kratownicy (wg planu Cremony)

Przykład 6-4. Wyznaczyć analitycznie oraz graficznie siły w prętach kratownicy przedstawionej na rysunku 6-33.



Rys. 6-33. Schemat statyczny

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= 5,0/2,0 = 2,50 & \rightarrow \alpha &= 68,20^\circ; \quad \sin \alpha = 0,928; \quad \cos \alpha = 0,371 \\ \operatorname{tg} \beta &= 2,0/4,0 = 0,50 & \rightarrow \beta &= 26,57^\circ; \quad \sin \beta = 0,447; \quad \cos \beta = 0,894 \end{aligned}$$

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Reakcje podporowe:

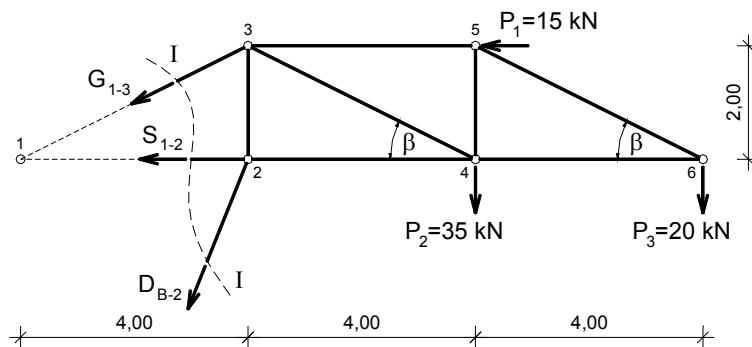
- (1) $\sum M_A = -P_1 \cdot 7 + P_2 \cdot 10 + P_3 \cdot 14 - V_B \cdot 4 = 0$
 - (2) $\sum M_B = -P_1 \cdot 7 + P_2 \cdot 6 + P_3 \cdot 10 + V_A \cdot 4 = 0$
 - (3) $\sum X = H_A - V_A \cdot 1/\operatorname{tg} \alpha = 0$; wg równowagi węzła A
 - (4) $\sum X = H_A + H_B - P_1 = 0$
- z (1) $V_B = (-15 \cdot 7 + 35 \cdot 10 + 20 \cdot 14)/4 = 131,25 \text{ kN}$
z (2) $V_A = (15 \cdot 7 - 35 \cdot 6 - 20 \cdot 10)/4 = -76,25 \text{ kN}$
z (3) $H_A = -76,25 \cdot 1/2,5 = -30,50 \text{ kN}$
z (4) $H_B = 30,50 + 15 = 45,50 \text{ kN}$

Kontrola: $\sum Y = V_A + V_B - P_2 - P_3 = -76,25 + 131,25 - 35 - 20 = 0$

Wyznaczenie sił wewnętrznych w pretach:

Przecięcie Rittera (przekrój I-I) (rys. 6-34)

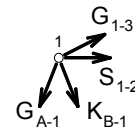
$$\begin{aligned} \sum M_1 &= D_{B-2} \cdot \sin \alpha \cdot 4 + P_2 \cdot 8 + P_3 \cdot 12 - P_1 \cdot 2 = 0 \\ D_{B-2} &= (-35 \cdot 8 - 20 \cdot 12 + 15 \cdot 2) / (0,928 \cdot 4) = -132 \text{ kN} \\ \sum M_2 &= -G_{1-3} \cdot \cos \beta \cdot 2 + P_2 \cdot 4 + P_3 \cdot 8 - P_1 \cdot 2 = 0 \\ G_{1-3} &= (35 \cdot 4 + 20 \cdot 8 - 15 \cdot 2) / (0,894 \cdot 2) = 151,01 \text{ kN} \\ \sum X &= -G_{1-3} \cdot \cos \beta - D_{A-2} \cdot \cos \alpha - S_{1-2} - P_1 = 0 \\ S_{1-2} &= -151,01 \cdot 0,894 + 132 \cdot 0,371 - 15 = -101,03 \text{ kN} \end{aligned}$$



Rys. 6-34. Schemat obciążenia dla przekroju I-I

Równowaga węzła 1 (rys. 6-35)

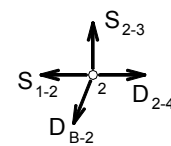
$$\begin{aligned} \sum X &= -G_{A-1} \cdot \cos \alpha + K_{B-1} \cdot \cos \alpha + S_{1-2} + G_{1-3} \cdot \cos \beta = 0 \\ G_{A-1} &= K_{B-1} - 101,03 / 0,371 + 151,01 \cdot 0,894 / 0,371 \\ G_{A-1} &= K_{B-1} + 91,57 \\ \sum Y &= -G_{A-1} \cdot \sin \alpha - K_{B-1} \cdot \sin \alpha + G_{1-3} \cdot \sin \beta = 0 \\ -(K_{B-1} + 91,57) \cdot \sin \alpha - K_{B-1} \cdot \sin \alpha + G_{1-3} \cdot \sin \beta &= 0 \\ K_{B-1} &= (-91,57 \cdot 0,928 + 151,01 \cdot 0,447) / (2 \cdot 0,928) = -9,42 \text{ kN} \\ G_{A-1} &= -9,42 + 91,57 = 82,15 \text{ kN} \end{aligned}$$



Rys. 6-35. Węzeł 1

Równowaga węzła 2 (rys. 6-36)

$$\begin{aligned} \sum Y &= -D_{B-2} \cdot \sin \alpha + S_{2-3} = 0 \\ S_{2-3} &= -132 \cdot 0,928 = -122,50 \text{ kN} \end{aligned}$$

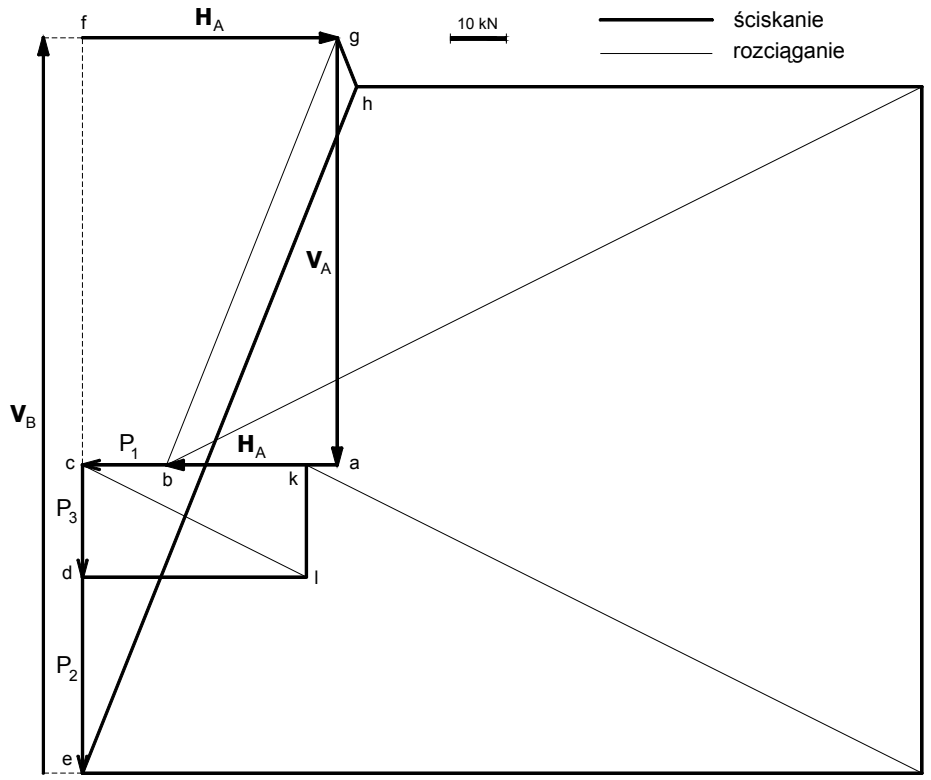


Rys. 6-36. Węzeł 2

Przecięcie Rittera (przekrój II-II) (rys. 6-37)

$$\begin{aligned} \sum M_3 &= D_{2-4} \cdot 2 + P_2 \cdot 4 + P_3 \cdot 8 = 0 \\ D_{2-4} &= (-35 \cdot 4 - 20 \cdot 8) / 2 = -150 \text{ kN} \\ \sum M_4 &= -G_{3-5} \cdot 2 - P_1 \cdot 2 + P_3 \cdot 4 = 0 \\ G_{3-5} &= (-15 \cdot 2 + 20 \cdot 4) / 2 = 25 \text{ kN} \end{aligned}$$

Wielobok sił zewnętrznych sporządzamy na podstawie wartości reakcji podporowych wyznaczonych metodą analityczną. Plan sił *Cremony* (rys.6-41) wykreślamy rozpoczynając od węzła *B* lub *6*, w których zbiegają się po dwa pręty o nieznanymi siłach. Wartości oraz zwroty wyznaczonych sił przedstawiono w tabeli 6-4.



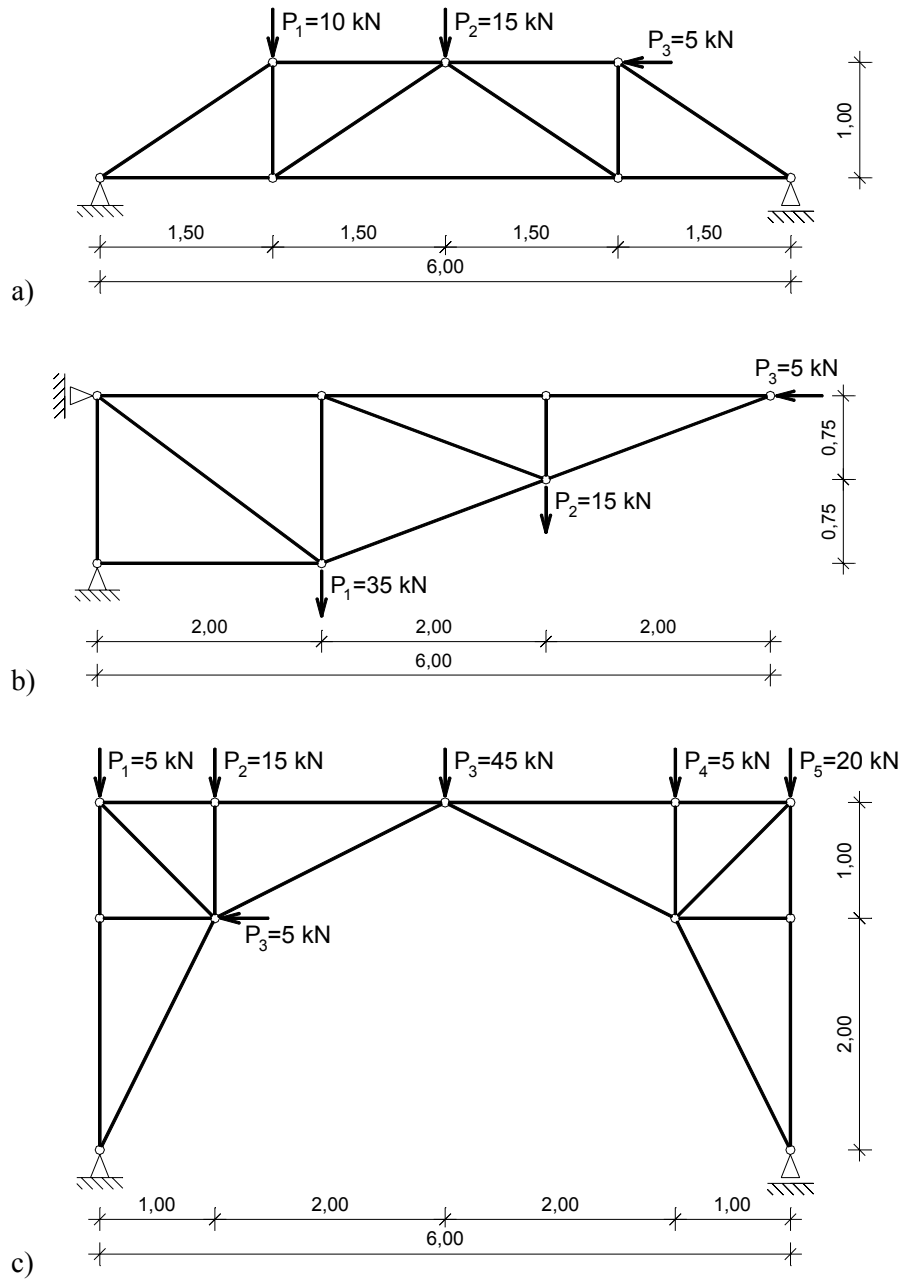
Rys. 6-41. Plan sił *Cremony* (opis w tekście)

Pręt	g-h	h-e	b-i	i-h	g-b	i-j	j-e	b-k	k-j	k-l	l-d	c-l
Siła [kN]	-9,4	-131,9	150,9	-101	-82,1	-122,5	-150	25	123	-20	-40	44,7

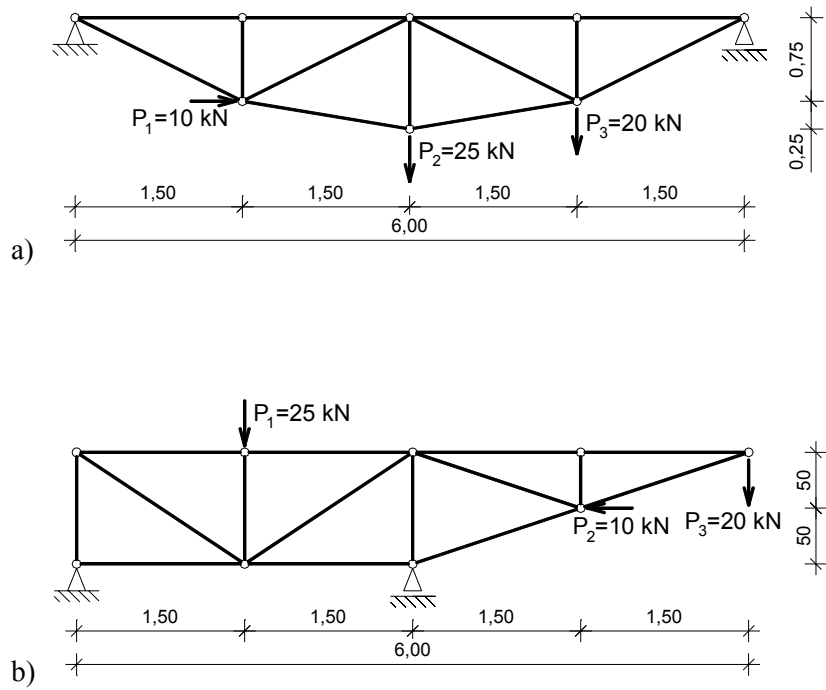
Tab. 6-4. Wartości sił wewnętrznych w prętach kratownicy (wg planu *Cremony*)

6.4. Przykłady do rozwiązania

Przykład 6-5. Dla kratownic pokazanych na rysunkach 6-42 i 6-43 wyznaczyć reakcje podporowe oraz siły wewnętrzne w prętach.



Rys. 6-42. Schematy statyczne kratownic do samodzielnego rozwiązania



Rys. 6-43. Schematy statyczne kratownic

7. Charakterystyki geometryczne

7.1. Wiadomości ogólne

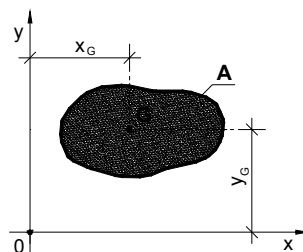
Obciążenie przyłożone do elementu konstrukcyjnego powoduje powstanie w nim pewnych sił, które nazwalibyśmy siłami wewnętrznymi. Zasady ich wyznaczania zostały szeroko omówione w pierwszej części pracy. Siły te wywołują w materiale stan naprężenia. Można w dużym uproszczeniu powiedzieć, że projektowanie polega na doborze materiału i kształtu przekroju w taki sposób, aby przy danym obciążeniu i schemacie statycznym, element konstrukcyjny nie uległ zniszczeniu i nadmiernemu odkształceniu zakłócającemu prawidłową eksploatację.

Dobór kształtu polega na analizie charakterystyk geometrycznych (pole przekroju, momenty bezwładności, wskaźniki wytrzymałości oraz promienie bezwładności), której celem jest wyłonienie kształtu przekroju o jak najlepszych parametrach przy jak najmniejszym zużyciu materiału (mniejszy ciężar konstrukcji).

W praktyce inżynierskiej zwykle mamy do czynienia z przekrojami, które można sprowadzić do układu kilku figur prostych (suma lub różnica) o charakterystykach ogólnie znanych (tab. 8-1) i takie zadania będą przedmiotem niniejszego rozdziału.

7.2. Środek ciężkości przekroju

Środek ciężkości jest punktem skupiającym ciężar ciała. Jego położenie zależy tylko od kształtu geometrycznego przekroju (figury płaskiej), przy założeniu, że grubość tej figury jest stała i znikomo mała w stosunku do pozostałych wymiarów oraz że jej ciężar jednostkowy jest stały.



Rys. 7-1. Współrzędne środka ciężkości G

Wyznaczenie położenia środka ciężkości G polega na określeniu jego współrzędnych x_G, y_G w przyjętym układzie osi x i y (rys. 7-1) według poniższych równań:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (7-1)$$

gdzie: S_x, S_y - momenty statyczne pola przekroju, odpowiednio względem osi x i y ,
 A - pole powierzchni przekroju,
 A_i - pole powierzchni figury prostej i ($A = \sum A_i$) o znanym środku ciężkości,
 x_i, y_i - współrzędne środka ciężkości figury prostej i ,
 n - liczba figur prostych, na które podzielono przekrój.

Osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju nazywać będziemy **osiami środkowymi**. Moment statyczny wyznaczony względem tych osi jest równy zeru,

względem inaczej usytuowanych osi przyjmuje natomiast wartości dodatnie lub ujemne. Jeśli przekrój ma oś symetrii, to jego środek ciężkości leży na tej osi. Jeśli zaś przekrój ma dwie osie symetrii, to jego środek ciężkości jest punktem przecięcia się tych osi.

7.3. Momenty i promienie bezwładności przekroju

Moment bezwładności przekroju względem osi układu odniesienia (prostej) jest równy sumie iloczynów pól częściowych, na jakie podzielono przekrój, i kwadratów ich odległości od tej osi (rys. 7-2). Możemy zatem zapisać:

$$I_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i^2 ; \quad I_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i^2 , \quad (7-2)$$

gdzie: A_i - powierzchnia pola częściowego i ($A = \sum A_i$),
 x_i, y_i - współrzędne środka ciężkości pola częściowego i ,
 n - liczba pól częściowych, na które podzielono przekrój.

Biegunowy moment bezwładności przekroju jest równy sumie iloczynów pól częściowych i kwadratów ich odległości od bieguna O (rys. 7-2). Zapiszemy więc:

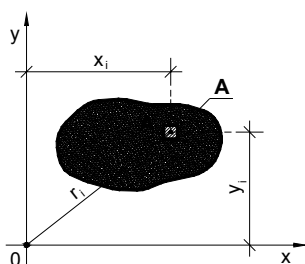
$$I_0 = \sum_{i=1}^n A_i \cdot r_i^2 = \sum_{i=1}^n A_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = I_x + I_y , \quad (7-3)$$

gdzie r_i - odległość środka ciężkości pola częściowego i od bieguna O .
 A_i, n - jak w równaniu 7-2,

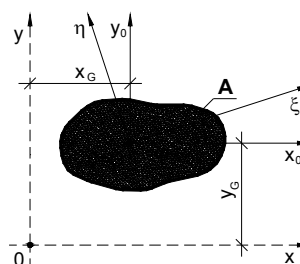
Moment dewiacji (odśrodkowy moment bezwładności) jest równy sumie iloczynów pól częściowych i ich odległości od osi x, y przyjętego układu odniesienia (rys. 7-2). Równanie ma zatem postać:

$$D_{xy} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i \cdot y_i , \quad (7-4)$$

gdzie: A_i, x_i, y_i - jak w równaniu 7-2.



Rys. 7-2. Środek ciężkości pola częściowego A_i



Rys. 7-3. Osie główne centralne ξ, η

Wartości momentów bezwładności I_x, I_y oraz I_0 przyjmują zawsze wartości dodatnie, natomiast moment dewiacji D_{xy} może być dodatni, ujemny lub równy zero.

Jak zauważyliśmy wartości momentów bezwładności zależą od przyjętego układu odniesienia, co ma duże znaczenie przy projektowaniu konstrukcji. Przez

środek ciężkości przekroju możemy poprowadzić nieskończenie wiele osi układu prostokątnego. Jednak najważniejszy jest taki układ osi, względem którego momenty bezwładności przyjmować będą wartości ekstremalne (np. I_x osiągnie maksimum, a I_y minimum). Osie takie nazywać będziemy **osiami głównymi centralnymi**, a momenty wyznaczone względem tych osi **głównymi centralnymi momentami bezwładności**. Położenie osi głównych centralnych ξ, η określimy wyznaczając kąt, o jaki należy obrócić dowolnie przyjęte osie centralne x_0, y_0 (rys. 7-3):

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2 \cdot D_{x_0 y_0}}{I_{y_0} - I_{x_0}}, \quad (7-5)$$

gdzie I_{x_0}, I_{y_0} oraz $D_{x_0 y_0}$ są momentami bezwładności wyznaczonymi względem osi centralnych x_0, y_0 . Przy dodatniej wartości kąta φ_0 należy dokonać obrotu osi centralnych przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (w lewo).

Znając momenty bezwładności I_{x_0}, I_{y_0} oraz $D_{x_0 y_0}$ wyznaczone względem osi centralnych x_0, y_0 możemy także wyznaczyć wartości tych momentów względem dowolnego układu osi x, y równoległych do x_0, y_0 . Wykorzystamy w tym celu twierdzenie **Steinera**, które pozwala na sformułowanie następujących zależności:

$$I_x = I_{x_0} + A \cdot y_G^2, \quad (7-6)$$

$$I_y = I_{y_0} + A \cdot x_G^2, \quad (7-7)$$

$$D_{xy} = D_{x_0 y_0} + A \cdot x_G \cdot y_G. \quad (7-8)$$

Wartości momentów bezwładności względem osi głównych centralnych ξ, η (głównych momentów bezwładności) obliczymy według wzorów:

$$I_\xi = I_{x_0} \cdot \cos^2 \varphi_0 + I_{y_0} \cdot \sin^2 \varphi_0 - D_{x_0 y_0} \cdot \sin 2 \cdot \varphi_0, \quad (7-9)$$

$$I_\eta = I_{x_0} \cdot \sin^2 \varphi_0 + I_{y_0} \cdot \cos^2 \varphi_0 + D_{x_0 y_0} \cdot \sin 2 \cdot \varphi_0, \quad (7-10)$$

gdzie φ_0 jest kątem obliczonym według równania 7-5. Moment dewiacji przekroju względem osi głównych jest równy zeru.

Promień bezwładności przekroju jest równy pierwiastkowi kwadratowemu ilorazu momentu bezwładności względem osi i pola powierzchni przekroju:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (7-11)$$

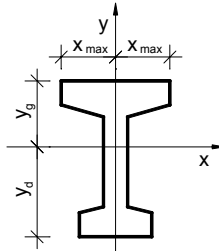
Główne centralne promienie bezwładności przekroju obliczymy podstawiając we wzorach 7-11 główne centralne momenty bezwładności.

7.4. Wskaźnik zginania przekroju

Wskaźnik zginania przekroju (wskaźnik wytrzymałości na zginanie) wyznaczamy jako iloraz głównych centralnych momentów bezwładności i odległości skrajnych włókien przekroju od osi głównych centralnych. Dla przekroju przedstawionego na rysunku 7-4 zapiszemy zatem:

$$W_x^g = \frac{I_x}{y_g}, \quad W_x^d = \frac{I_x}{y_d}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}, \quad (7-12)$$

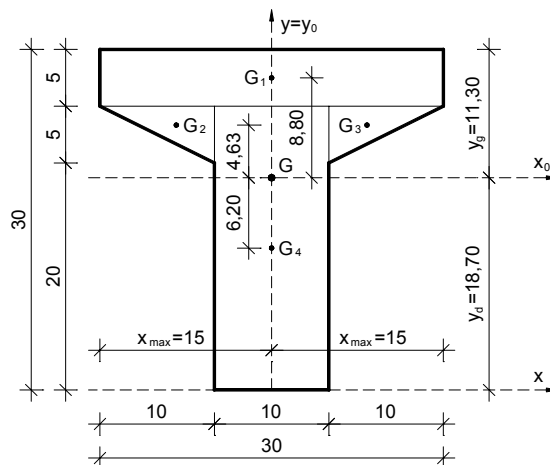
gdzie: x_{\max} , y_g , y_d - odległości skrajnych włókien przekroju odpowiednio od osi głównych centralnych x i y .



Rys. 7-4. Skrajne włókna przekroju

7.5 Przykłady liczbowe

Przykład 7-1. Określić charakterystyki geometryczne przekroju przedstawionego na rysunku 7-5.



Rys. 7-5. Schemat przekroju

Charakterystyki geometryczne przekroju obliczymy dzieląc go na cztery figury proste o znanych parametrach. Rozpatrywany przekrój ma oś symetrii, na której znajduje się jego środek ciężkości. W przyjętym układzie współrzędnych oś x przechodzi przez dolną podstawę prostokąta 4, a oś y pokrywa się z osią symetrii przekroju. Środki ciężkości figur prostych w układzie osi x , y mają współrzędne:

- prostokąt 1, wymiary 30×5 cm, G_1 (0; 27,50),
- trójkąt prostokątny 2, wymiary 10×5 cm, G_2 (-8,33; 23,33),
- trójkąt prostokątny 3, wymiary 10×5 cm, G_3 (8,33; 23,33),
- prostokąt 4, wymiary 10×25 cm, G_4 (0; 12,50).

Pole powierzchni przekroju:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 30 \cdot 5 + 2 \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot 5 + 10 \cdot 25 = 150 + 2 \cdot 25 + 250 = 450 \text{ cm}^2$$

Moment statyczny przekroju względem osi x:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + A_4 \cdot y_4$$

$$S_x = 150 \cdot 27,50 + 25 \cdot 23,33 + 25 \cdot 23,33 + 250 \cdot 12,50 = 8417 \text{ cm}^3$$

Współrzędna środka ciężkości przekroju:

$$y_G = S_x / A = 8417 / 450 = 18,70 \text{ cm}$$

Momenty bezwładności przekroju względem osi centralnych x_0, y_0 :

$$I_{x_0} = I_{x_{01}} + A_1 \cdot y_1^2 + I_{x_{02}} + A_2 \cdot y_2^2 + I_{x_{03}} + A_3 \cdot y_3^2 + I_{x_{04}} + A_4 \cdot y_4^2$$

$$I_{x_0} = \frac{30 \cdot 5^3}{12} + 150 \cdot (8,80)^2 + 2 \cdot \frac{10 \cdot 5^3}{36} + 2 \cdot 25 \cdot (4,63)^2 + \frac{10 \cdot 25^3}{12} + 250 \cdot (-6,20)^2 = 35700 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0} = I_{y_{01}} + A_1 \cdot x_1^2 + I_{y_{02}} + A_2 \cdot x_2^2 + I_{y_{03}} + A_3 \cdot x_3^2 + I_{y_{04}} + A_4 \cdot x_4^2$$

$$I_{y_0} = \frac{5 \cdot 30^3}{12} + \frac{5 \cdot 10^3}{36} + 25 \cdot (-8,33)^2 + \frac{5 \cdot 10^3}{36} + 25 \cdot (8,33)^2 + \frac{25 \cdot 10^3}{12} = 17080 \text{ cm}^4$$

$$I_G = I_x + I_y = 35700 + 17080 = 52780 \text{ cm}^4$$

Jako że oś y_0 jest osią symetrii przekroju, moment dewiacji wyznaczony względem osi centralnych x_0, y_0 jest równy zeru. Osie te są zatem osiami głównymi.

Główne centralne promienie bezwładności:

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{I_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{35700,62}{450}} = 8,91 \text{ cm}$$

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{17080,56}{450}} = 6,16 \text{ cm}$$

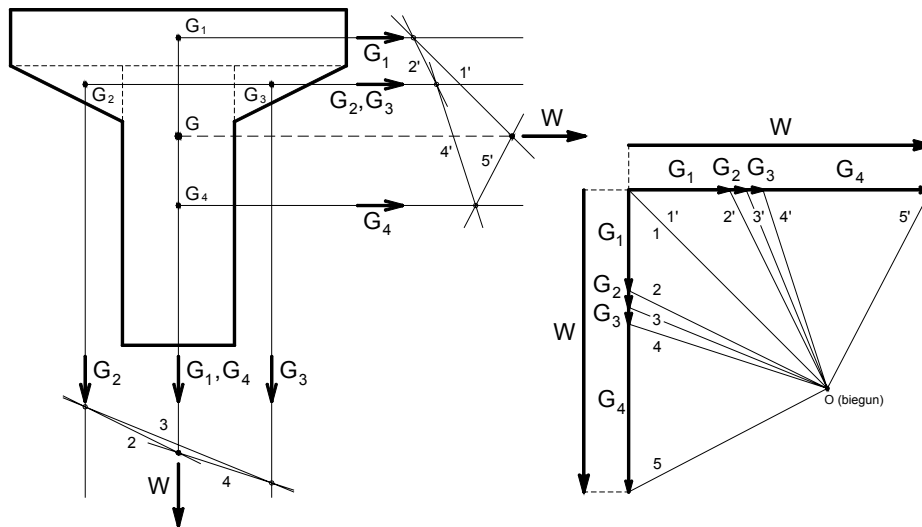
Wskaźniki zginania przekroju:

$$W_{x_0}^g = \frac{I_{x_0}}{y_g} = \frac{35700,62}{11,30} = 3159 \text{ cm}^3$$

$$W_{x_0}^d = \frac{I_{x_0}}{y_d} = \frac{35700,62}{18,70} = 1909 \text{ cm}^3$$

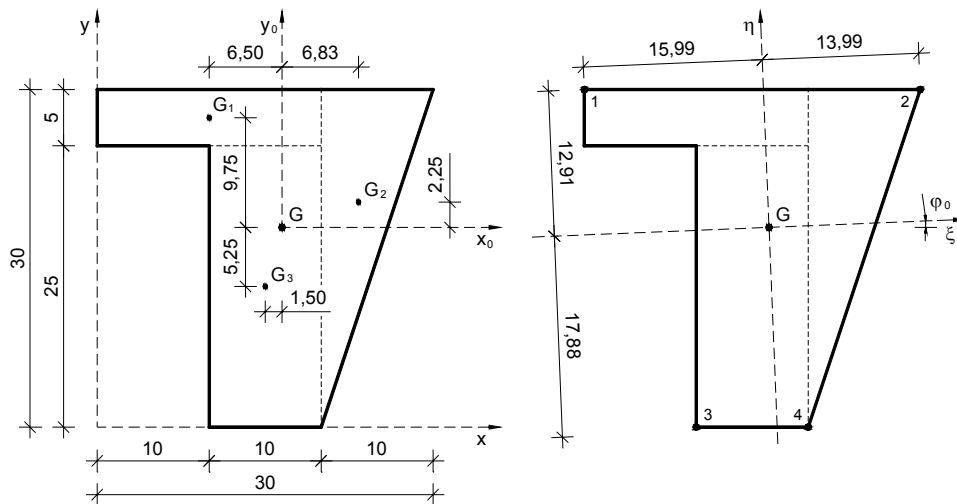
$$W_{y_0} = \frac{I_{y_0}}{x_{\max}} = \frac{17080,56}{15} = 1139 \text{ cm}^3$$

Środek ciężkości przekroju możemy też wyznaczyć wykreślnie, dzieląc go na figury proste, podobnie jak to miało miejsce przy rozwiązaniu analitycznym. W środku ciężkości każdej figury zaczepiamy po dwa wektory o kierunkach wzajemnie prostopadłych. Wyrażają one jej „masę”, zatem muszą być proporcjonalne do pola powierzchni takiej figury. Tak określone wektory dodajemy metodą wieloboku. Punkt przecięcia się wypadkowych wyznacza środek ciężkości przekroju.



Rys. 7-6. Wykreślne wyznaczenie środka ciężkości

Przykład 7-2. Określić charakterystyki geometryczne przekroju przedstawionego na rysunku 7-7.

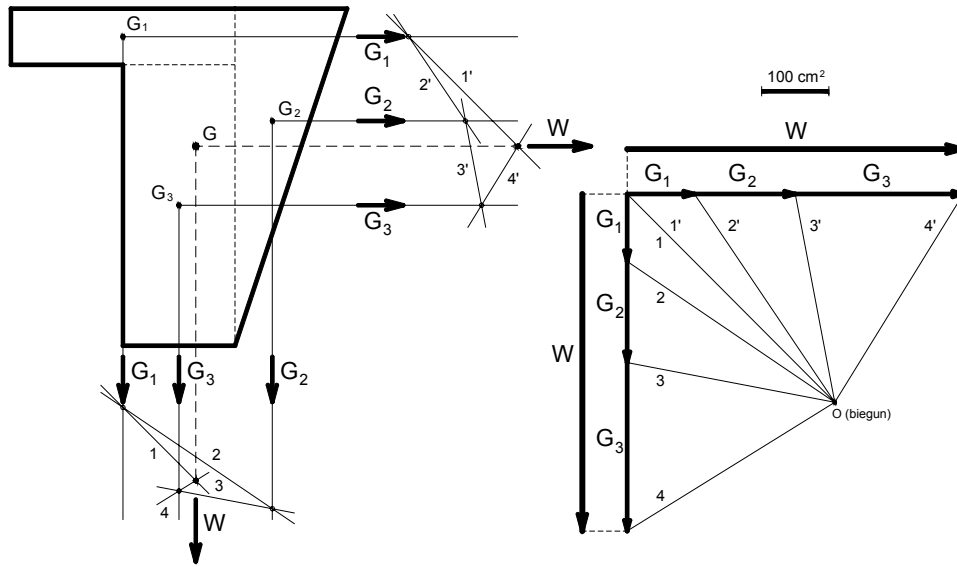


Rys. 7-7. Schemat przekroju

Charakterystyki geometryczne przekroju wyznaczmy dzieląc go na trzy figury proste o znanych parametrach. Środki ciężkości tych figur w przyjętym układzie współrzędnych x, y wyrażają współrzędne:

- prostokąt 1, wymiary 20×5 cm, $G_1 (10; 27,50)$,
- trójkąt prostokątny 2, wymiary 10×30 cm, $G_2 (23,33; 20)$,
- prostokąt 3, wymiary 10×25 cm, $G_4 (15; 12,50)$.

Wykreślne określenie środka ciężkości przekroju przedstawiono na rysunku 7-8.



Rys. 7-8. Wykreślne wyznaczenie środka ciężkości

Pole powierzchni przekroju:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 20 \cdot 5 + 0,5 \cdot 10 \cdot 30 + 10 \cdot 25 = 100 + 150 + 250 = 500 \text{ cm}^2$$

Moment statyczny przekroju względem osi x, y:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 100 \cdot 27,50 + 150 \cdot 20 + 250 \cdot 12,50 = 8875 \text{ cm}^3$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 = 100 \cdot 10 + 150 \cdot 23,33 + 250 \cdot 15 = 8250 \text{ cm}^3$$

Współrzędna środka ciężkości przekroju:

$$x_G = S_y / A = 8250 / 500 = 16,50 \text{ cm}$$

$$y_G = S_x / A = 8875 / 500 = 17,75 \text{ cm}$$

Momenty bezwładności przekroju względem osi centralnych x_0, y_0 :

$$I_{x_0} = I_{x_{01}} + A_1 \cdot y_1^2 + I_{x_{02}} + A_2 \cdot y_2^2 + I_{x_{03}} + A_3 \cdot y_3^2$$

$$I_{x_0} = \frac{20 \cdot 5^3}{12} + 100 \cdot (9,75)^2 + \frac{10 \cdot 30^3}{36} + 150 \cdot (2,25)^2 + \frac{10 \cdot 25^3}{12} + 250 \cdot (-5,25)^2 = 37885 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0} = I_{y_{01}} + A_1 \cdot x_1^2 + I_{y_{02}} + A_2 \cdot x_2^2 + I_{y_{03}} + A_3 \cdot x_3^2$$

$$I_{y_0} = \frac{5 \cdot 20^3}{12} + 100 \cdot (-6,50)^2 + \frac{30 \cdot 10^3}{36} + 150 \cdot (6,83)^2 + \frac{25 \cdot 10^3}{12} + 250 \cdot (-1,50)^2 = 18035 \text{ cm}^4$$

$$I_G = I_{x_0} + I_{y_0} = 37885 + 18035 = 55920 \text{ cm}^4$$

Momenty dewiacji przekroju względem osi centralnych x_0, y_0 :

$$D_{x_0 y_0} = D_{x_{y_01}} + A_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + D_{x_{y_02}} + A_2 \cdot x_2 \cdot y_2 + D_{x_{y_03}} + A_3 \cdot x_3 \cdot y_3$$

$$D_{x_0y_0} = 0 + 100 \cdot 9,75 \cdot (-6,50) + \frac{10^2 \cdot 30^2}{72} + 150 \cdot 2,25 \cdot 6,83 + 0 + 250 \cdot (-5,25) \cdot (-1,50)$$

$$D_{x_0y_0} = -814 \text{ cm}^4$$

Położenie osi głównych centralnych:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2 \cdot D_{x_0y_0}}{I_{y_0} - I_{x_0}} = \frac{2 \cdot (-814)}{18035 - 37885} = 0,082; \quad 2\varphi_0 = 4,69^0; \quad \varphi_0 = 2,34^0$$

$$\sin\varphi_0 = 0,041; \quad \cos\varphi_0 = 0,999; \quad \sin 2\varphi_0 = 0,082$$

Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_\xi = I_{x_0} \cdot \cos^2 \varphi_0 + I_{y_0} \cdot \sin^2 \varphi_0 - D_{x_0y_0} \cdot \sin 2 \cdot \varphi_0$$

$$I_\xi = 37885 \cdot 0,999^2 + 18035 \cdot 0,041^2 + 814 \cdot 0,082 = 37906 \text{ cm}^4$$

$$I_\eta = I_{x_0} \cdot \sin^2 \varphi_0 + I_{y_0} \cdot \cos^2 \varphi_0 + D_{x_0y_0} \cdot \sin 2 \cdot \varphi_0$$

$$I_\eta = 37885 \cdot 0,041^2 + 18035 \cdot 0,999^2 - 814 \cdot 0,082 = 17996 \text{ cm}^4$$

Główne centralne promienie bezwładności:

$$i_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} = \sqrt{\frac{37906}{500}} = 8,71 \text{ cm}$$

$$i_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} = \sqrt{\frac{17996}{500}} = 6 \text{ cm}$$

Wskaźniki zginania przekroju:

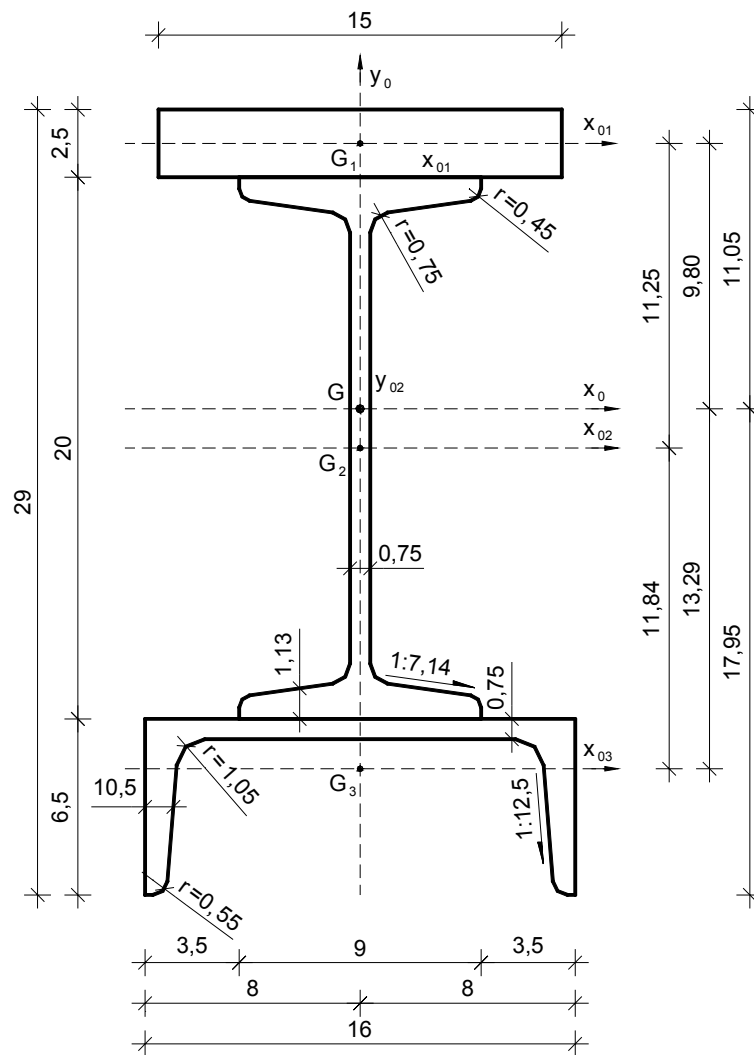
$$W_\xi^1 = \frac{I_\xi}{\eta_1} = \frac{37906}{12,91} = 2936 \text{ cm}^3; \quad W_\xi^4 = \frac{I_\xi}{\eta_4} = \frac{37906}{17,88} = 2120 \text{ cm}^3$$

$$W_\eta^1 = \frac{I_\eta}{\xi_1} = \frac{17996}{15,99} = 1125 \text{ cm}^3; \quad W_\eta^2 = \frac{I_\eta}{\xi_2} = \frac{17996}{13,99} = 1286 \text{ cm}^3$$

Przykład 7-3. Określić charakterystyki geometryczne przekroju przedstawionego na rysunku 7-9.

Element	Przekrój	Odległość środka ciężkości	Charakterystyki geometryczne dla osi zginania x, y					
			x-x			y-y		
			I_x	W_x	i_x	I_y	W_y	i_y
cm ²	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	
I 200	33,5	-	2140	214	8,00	117	26,0	1,87
C 160	24,0	1,84	85,3	18,3	1,89	925	116	6,21

Tab. 7-1. Charakterystyki geometryczne dla zadanych profili stalowych (dane wg tablic 8-3 i 8-5)



Rys. 7-9. Schemat przekroju

Rozpatrywany przekrój ma oś symetrii, na której znajduje się jego środek ciężkości. Przyjęto układ współrzędnych zgodny z osiami centralnymi dwuteownika, gdzie oś y_0 jest zarazem osią symetrii całego przekroju.

Pole powierzchni przekroju:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 15 \cdot 2,50 + 33,50 + 24 = 95 \text{ cm}^2$$

Moment statyczny przekroju względem osi x_{02} :

$$S_{x_{02}} = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 15 \cdot 2,50 \cdot 11,25 + 33,50 \cdot 0 + 24 \cdot (-11,84) = 137,72 \text{ cm}^3$$

Współrzędna środka ciężkości przekroju:

$$y_G = S_{x_{02}} / A = 137,72 / 95 = 1,45 \text{ cm} \quad y_G = S_x / A = 8416,50 / 450 = 18,70 \text{ cm}$$

Momenty bezwładności przekroju względem osi centralnych x_0, y_0 :

$$I_{x_0} = I_{x_{01}} + A_1 \cdot y_1^2 + I_{x_{02}} + A_2 \cdot y_2^2 + I_{x_{03}} + A_3 \cdot y_3^2$$

$$I_{x_{02}} = \frac{15 \cdot (2,5)^3}{12} + 37,5 \cdot (9,80)^2 + 2140 + 33,5 \cdot (1,45)^2 + 85,3 + 24,0 \cdot (13,29)^2 = 10155,70 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0} = I_{y_{01}} + I_{y_{02}} + I_{y_{03}} = \frac{2,5 \cdot 15^3}{12} + 117 + 925 = 1745,10 \text{ cm}^4$$

$$I_G = I_x + I_y = 10155,70 + 1745,10 = 11900,80 \text{ cm}^4$$

Jako że, oś y_0 jest osią symetrii przekroju, moment dewiacji wyznaczony względem osi centralnych x_0, y_0 jest równy zero. Osie te są zatem osiami głównymi.

Główne centralne promienie bezwładności:

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{I_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{10155,70}{95}} = 10,34 \text{ cm}$$

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{1745,10}{95}} = 4,29 \text{ cm}$$

Wskaźniki zginania przekroju:

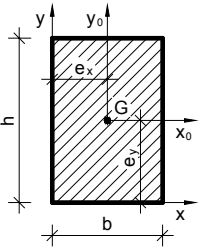
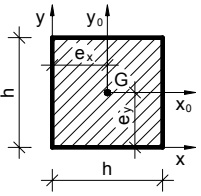
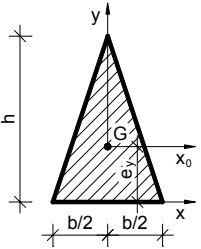
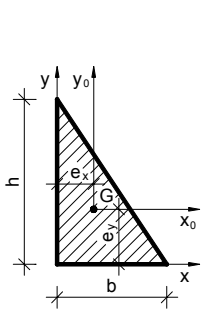
$$W_{x_0}^g = \frac{I_{x_0}}{y_g} = \frac{10155,70}{11,05} = 919,10 \text{ cm}^3$$

$$W_{x_0}^d = \frac{I_{x_0}}{y_d} = \frac{10155,70}{17,95} = 565,80 \text{ cm}^3$$

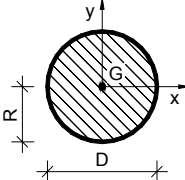
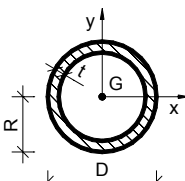
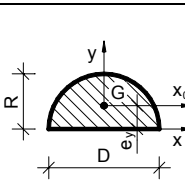
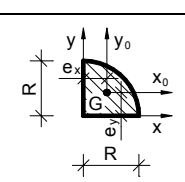
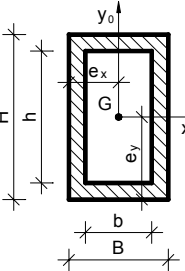
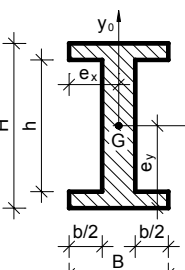
$$W_{y_0} = \frac{I_{y_0}}{x_{\max}} = \frac{1745,10}{8} = 218,10 \text{ cm}^3$$

8. Tablice pomocnicze

Tab. 8-1. Charakterystyki geometryczne figur płaskich (opracowano na podstawie [5, 8])

Przekrój	Pole powierzchni przekroju	Położenie środka ciężkości	Moment bezwładności	Wskaźnik zginania
	A cm ²	e cm	I cm ⁴	W cm ³
1	2	3	4	5
	$A = b \cdot h$	$e_x = b/2$ $e_y = h/2$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{3}$ $I_{x0} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_{y0} = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_{x0} = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $W_{y0} = \frac{h \cdot b^2}{6}$
	$A = h^2$	$e_x = h/2$ $e_y = h/2$	$I_x = I_y = \frac{h^4}{3}$ $I_{x0} = I_{y0} = \frac{h^4}{12}$	$W_{x0} = W_{y0} = \frac{h^3}{6}$
	$A = 0,5 \cdot b \cdot h$	$e_y = h/3$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$ $I_{x0} = \frac{b \cdot h^3}{36}$	$W_{x0}^g = \frac{b \cdot h^2}{24}$ $W_{x0}^d = \frac{b \cdot h^2}{12}$ $W_y = \frac{h \cdot b^2}{24}$
	$A = 0,5 \cdot b \cdot h$	$e_x = b/3$ $e_y = h/3$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$ $I_{x0} = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_{y0} = \frac{h \cdot b^3}{36}$ $I_{x0y0} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}$	$W_{x0}^g = \frac{b \cdot h^2}{24}$ $W_{x0}^d = \frac{b \cdot h^2}{12}$ $W_{y0}^p = \frac{h \cdot b^2}{24}$ $W_{y0}^l = \frac{h \cdot b^2}{12}$

Tab. 8-1. Cd.

1	2	3	4	5
	$A = \pi \cdot R^2$ $A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$	-	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$ $I_x = I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{4}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{32}$ $W_x = W_y = \frac{\pi \cdot R^3}{4}$
	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$ $A = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}$	-	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot t}{8}$ $I_x = I_y = \pi \cdot R^3 \cdot t$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot t}{4}$ $W_x = W_y = \pi \cdot R^2 \cdot t$
	$A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$ $A = \frac{\pi \cdot D^2}{8}$	$e_y = 0,42 \cdot R$	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{128}$ $I_x = I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{8}$ $I_{x_0} = 0,1098 \cdot R^4$	$W_{x_0}^g = 0,191 \cdot R^3$ $W_{x_0}^d = 0,259 \cdot R^3$ $W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{64} = \frac{\pi \cdot R^3}{8}$
	$A = \frac{\pi \cdot R^2}{4}$ $A = \frac{\pi \cdot D^2}{16}$	$e_x = 0,42 \cdot R$ $e_y = 0,42 \cdot R$	$I_x = I_y = 0,196 \cdot R^4$ $I_{x_0} = I_{y_0} = 0,055 \cdot R^4$ $I_{x_0 y_0} = -0,0165 \cdot R^4$	$W_{x_0}^g = W_{y_0}^g = 0,10 \cdot R^3$ $W_{x_0}^d = W_{y_0}^d = 0,13 \cdot R^3$
	$A = B \cdot H - b \cdot h$	-	$I_{x_0} = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$ $I_{y_0} = \frac{H \cdot B^3 - h \cdot b^3}{12}$	$W_{x_0} = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H}$ $W_{y_0} = \frac{H \cdot B^3 - h \cdot b^3}{6 \cdot B}$
	$A = B \cdot H - b \cdot h$	-	$I_{x_0} = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$ $I_{y_0} = \frac{(H-h) \cdot B^3}{12} + \frac{h \cdot (B-b)^3}{12}$	$W_{x_0} = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H}$ $W_{y_0} = \frac{(H-h) \cdot B^3}{6 \cdot B} + \frac{h \cdot (B-b)^3}{6 \cdot B}$

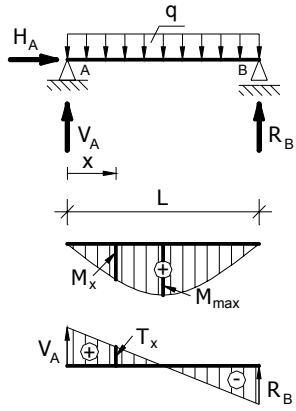
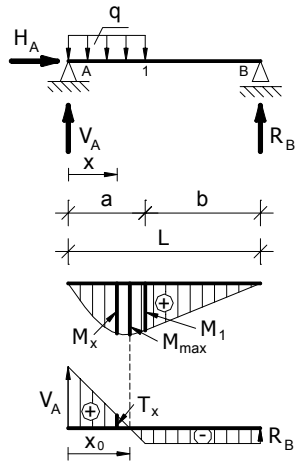
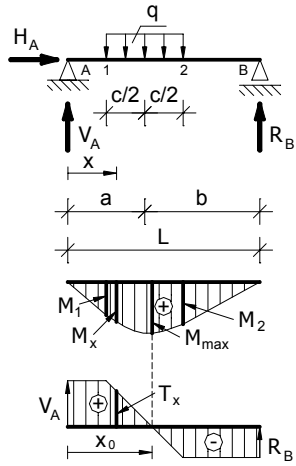
Tab. 8-2. Wartości reakcji podporowych, sił wewnętrznych i maksymalnego ugięcia belek jednoprzęsłowych (opracowano na podstawie [5, 8])

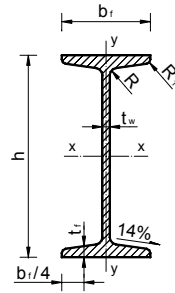
L p.	Schemat belki	Wartości reakcji podporowych oraz sił wewnętrznych
1		$V_A = P ; M_A = M_{\max} = P \cdot L$ $M_X = -P \cdot x$ $T_X = P$ $f_{\max} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$
2		$V_A = q \cdot L ; M_A = M_{\max} = (q \cdot L)^2 / 2$ $M_X = -0,5 \cdot q \cdot x^2$ $T_X = q \cdot x$ $f_{\max} = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I}$
3		$V_A = R_B = 0,5 \cdot P$ $x \leq 0,5 \cdot L : M_x = 0,5 \cdot P \cdot x ; T_x = 0,5 \cdot P$ $x \geq 0,5 \cdot L : M_x = 0,5 \cdot P \cdot (L - x) ; T_x = -0,5 \cdot P$ $M_{\max} = \frac{P \cdot L}{4}$ $f_{\max} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$

Tab. 8-2. Cd.

1	2	3																								
4		$V_A = P \cdot \frac{b}{L}; \quad R_B = P \cdot \frac{a}{L}$ $x_1 \leq a: \quad M_{x1} = V_A \cdot x_1; \quad T_{x1} = V_A$ $x_2 \geq a: \quad M_{x2} = R_B \cdot (L - x_2); \quad T_{x2} = -R_B$ $M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{L}$ $f_{\max} = \frac{P \cdot b}{27 \cdot L \cdot E \cdot I} \cdot \sqrt{3 \cdot (L^2 - b^2)^3}; \quad (\text{dla } a \geq b)$ $f_{\max} = \frac{P \cdot a}{27 \cdot L \cdot E \cdot I} \cdot \sqrt{3 \cdot (L^2 - b^2)^3}; \quad (\text{dla } a \leq b)$																								
5		$V_A = R_B = 0,5 \cdot P \cdot (n-1)$ $M_1 = \frac{P \cdot L}{2} \cdot 1 \cdot \frac{n-1}{n}; \quad T_1 = V_A$ $M_2 = \frac{P \cdot L}{2} \cdot 2 \cdot \frac{n-2}{n}; \quad T_2 = V_A - P$ $M_3 = \frac{P \cdot L}{2} \cdot 3 \cdot \frac{n-3}{n}; \quad T_2 = V_A - 2 \cdot P$ $M_{\max} = \frac{P \cdot L}{\eta_M}; \quad f_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{\eta_f \cdot E \cdot I}$ <table border="1"> <tr> <td>n</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>η_M</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1,66</td> <td>1,33</td> <td>1,16</td> </tr> <tr> <td>η_f</td> <td>12</td> <td>9,39</td> <td>10,11</td> <td>9,52</td> <td>9,81</td> <td>9,56</td> </tr> </table>	n	2	3	4	5	6	7	η_M	4	3	2	1,66	1,33	1,16	η_f	12	9,39	10,11	9,52	9,81	9,56			
n	2	3	4	5	6	7																				
η_M	4	3	2	1,66	1,33	1,16																				
η_f	12	9,39	10,11	9,52	9,81	9,56																				
6		$V_A = R_B = 0,5 \cdot P \cdot n$ $M_1 = \frac{P \cdot L}{4}; \quad T_1 = V_A$ $M_2 = \frac{P \cdot L}{4} \cdot \frac{3 \cdot n - 4 \cdot 1}{n}; \quad T_2 = V_A - P$ $M_3 = \frac{P \cdot L}{4} \cdot \frac{5 \cdot n - 4 \cdot (1+2)}{n}; \quad T_2 = V_A - 2 \cdot P$ $M_{\max} = \frac{P \cdot L}{\eta_M}; \quad f_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot L^2}{\eta_f \cdot E \cdot I}$ <table border="1"> <tr> <td>n</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>η_M</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>2,4</td> <td>2</td> <td>1,54</td> <td>1,33</td> <td>1,12</td> </tr> <tr> <td>η_f</td> <td>12</td> <td>8,72</td> <td>10,19</td> <td>9,37</td> <td>9,82</td> <td>9,49</td> <td>9,72</td> </tr> </table>	n	1	2	3	4	5	6	7	η_M	4	4	2,4	2	1,54	1,33	1,12	η_f	12	8,72	10,19	9,37	9,82	9,49	9,72
n	1	2	3	4	5	6	7																			
η_M	4	4	2,4	2	1,54	1,33	1,12																			
η_f	12	8,72	10,19	9,37	9,82	9,49	9,72																			

Tab. 8-2. Cd.

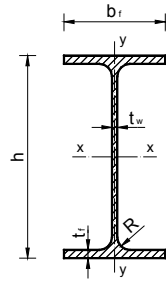
1	2	3
7		$V_A = R_B = 0,5 \cdot q \cdot L$ $M_x = 0,5 \cdot q \cdot x \cdot (L - x)$ $T_x = V_A - q \cdot x$ $M_{\max} = \frac{q \cdot L^2}{8}$ $f_{\max} = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$
8		$V_A = \frac{q \cdot a \cdot (2 \cdot b + a)}{2 \cdot L}; \quad R_B = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot L}$ $x \leq a: \quad M_x = M_1 \cdot \frac{x}{a} + \frac{q \cdot x \cdot (a - x)}{2}; \quad T_x = V_A - q \cdot x$ $x \geq a: \quad M_x = R_B \cdot (L - x); \quad T_x = -R_B$ $M_{\max} = \frac{V_A^2}{2 \cdot q}; \quad M_1 = \frac{q \cdot a^2 \cdot b}{2 \cdot L}$ $a = b: \quad V_A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L; \quad R_B = \frac{1}{8} \cdot q \cdot L$ $M_{\max} = \frac{9}{128} \cdot q \cdot L^2; \quad M_1 = \frac{1}{16} \cdot q \cdot L^2$
9		$V_A = \frac{q \cdot c \cdot b}{L}; \quad R_B = \frac{q \cdot c \cdot a}{L}$ $x \leq (a - c/2): \quad M_x = V_A \cdot x; \quad T_x = V_A$ $(a - c/2) \leq x \leq (a + c/2): \quad T_x = V_A - q \cdot (x - a + c/2)$ $x \geq (a + c/2): \quad M_x = R_B \cdot (L - x); \quad T_x = -R_B$ $M_{\max} = M_1 + \frac{R_A^2}{2 \cdot q}$ $M_1 = V_A \cdot (a - c/2); \quad M_2 = R_B \cdot (b - c/2)$ $a = b: \quad M_{\max} = \frac{q \cdot c}{4} \cdot (L - c/2)$



Tab. 8-3. Dwuteowniki normalne wg PN-91/H-93407 [3]

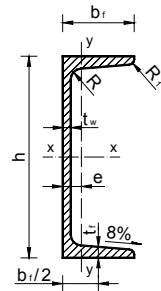
Wyróżnik oznaczenia I	Wymiary						Pole przekroju	Masa	Moment bezwładności		Wskaźnik wytrzymałości		Promień bezwładności	
	h	b _f	t _w	t _f	R	R ₁	A	m	I _x	I _y	W _x	W _y	i _x	i _y
	mm						cm ²	kg/m	cm ⁴		cm ³		cm	
80	80	42	3,9	5,9	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	6,29	19,5	3,00	3,20	0,91
100	100	50	4,5	6,8	4,5	2,7	10,6	8,32	171	12,2	34,2	4,88	4,01	1,07
120	120	58	5,1	7,7	5,1	3,1	14,2	11,2	328	21,5	54,7	7,41	4,81	1,23
140	140	66	5,7	8,6	5,7	3,4	18,3	14,4	573	35,2	81,9	10,7	5,61	1,40
160	160	74	6,3	9,5	6,3	3,8	22,8	17,9	935	54,7	117	14,8	6,40	1,55
180	180	82	6,9	10,4	6,9	4,1	27,9	21,9	1450	81,3	161	19,8	7,20	1,71
200	200	90	7,5	11,3	7,5	4,5	33,5	26,3	2140	117	214	26,0	8,00	1,87
220	220	98	8,1	12,2	8,1	4,9	39,6	31,1	3060	162	278	33,1	8,80	2,02
240	240	106	8,7	13,1	8,7	5,2	46,1	36,2	4250	221	354	41,7	9,59	2,20
260	260	113	9,4	14,1	9,4	5,6	53,4	41,9	5740	288	442	51,0	10,4	2,32
300	300	125	10,8	16,2	10,8	6,5	69,1	54,2	9800	451	653	72,2	11,9	2,56
340	340	137	12,2	18,3	12,2	7,3	86,8	68,1	15700	674	923	98,4	13,5	2,80
360	360	143	13,0	19,5	13,0	7,8	97,1	76,2	19610	818	1090	114	14,2	2,90
400	400	155	14,4	21,6	14,4	8,6	118	92,6	29210	1160	1460	149	15,7	3,13
450	450	170	16,2	24,3	16,2	9,7	147	115	45850	1730	2040	203	17,7	3,43
500	500	185	18,0	27,0	18,0	10,8	180	141	68740	2480	2750	268	19,6	3,72
550	550	200	19,0	30,0	19,0	11,9	213	167	99180	3490	3610	349	21,6	4,02
600	600	215	21,6	32,4	21,6	13,0	254	199	139000	4670	4630	434	23,4	4,30

Tab. 8-4. Dwuteowniki równoległocienne wg PN-91/H-93419 [3]



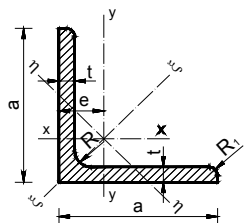
Wyróżnik oznaczenia I PE	Wymiary					Pole przekroju	Masa	Moment bezwładności		Wskaźnik wytrzymałości		Promień bezwładności	
	h	b _f	t _w	t _f	R	A	m	I _x	I _y	W _x	W _y	i _x	i _y
	mm					cm ²	kg/m	cm ⁴		cm ³		cm	
80PE	80	46	3,8	5,2	5	7,64	6,0	80,1	8,49	20,0	3,69	3,24	1,06
100PE	100	55	4,1	5,7	7	10,3	8,1	171	15,9	34,2	5,79	4,07	1,24
120PE	120	64	4,4	6,3	7	13,2	10,4	318	27,7	53,0	8,65	4,90	1,45
140PE	140	73	4,7	6,9	7	16,4	12,9	541	44,9	77,3	12,3	5,74	1,65
160PE	160	82	5,0	7,4	9	20,1	15,8	869	68,3	109	16,7	6,58	1,84
180PE	180	91	5,3	8,0	9	23,9	18,8	1320	101	146	22,2	7,42	2,05
200PE	200	100	5,6	8,5	12	28,5	22,4	1940	142	194	28,5	8,26	2,24
220PE	220	110	5,9	9,2	12	33,4	26,2	2770	205	252	37,3	9,11	2,42
240PE	240	120	6,2	9,8	15	39,1	30,7	3890	284	324	47,3	9,97	2,69
270PE	270	135	6,6	10,2	15	45,9	36,1	5790	420	429	62,2	11,2	3,02
300PE	300	150	7,1	10,7	15	53,8	42,2	8360	604	557	80,5	12,5	3,35
330PE	330	160	7,5	11,5	18	62,6	49,1	11770	788	713	98,5	13,7	3,55
360PE	360	170	8,0	12,7	18	72,7	57,1	16270	1040	904	123	15,0	3,79
400PE	400	180	8,6	13,5	21	84,5	66,3	23130	1320	1160	146	16,5	3,95
450PE	450	190	9,4	14,6	21	98,8	77,6	33740	1680	1500	176	18,5	4,12
500PE	500	200	10,2	16,0	21	116	91,1	48200	2140	1930	214	20,4	4,31

Tab. 8-5. Ceowniki normalne wg PN-86/H-93403 [3]



Wyróżnik oznaczenia	Wymiary							Pole przekroju	Masa	Moment bezwładności		Wskaźnik wytrzymałości		Promień bezwładności	
	h	b _f	t _w	t _f	R	R ₁	e	A	m	I _x	I _y	W _x	W _y	i _x	i _y
	mm							cm	cm ²	kg/m	cm ⁴		cm ³		cm
35	35	35	5,0	6,0	6,0	3,0	1,31	5,33	4,18	9,32	5,75	5,33	2,63	1,32	1,04
40	40	20	5,0	5,0	5,0	2,5	0,65	3,51	2,75	1,26	1,06	3,63	0,78	1,47	0,55
45	45	38	5,0	6,0	6,0	3,0	1,34	6,17	4,84	18,7	7,81	8,31	3,18	1,74	1,13
50	50	38	5,0	7,0	7,0	3,5	1,37	7,12	5,59	26,4	9,12	10,6	3,75	1,92	1,13
65	65	42	5,5	7,5	7,5	4,0	1,42	9,03	7,09	57,5	14,1	17,7	5,07	2,52	1,25
80	80	45	6,0	8,0	8,0	4,0	1,45	11,0	8,64	106	19,4	26,5	9,36	3,10	1,33
100	100	50	6,0	8,5	8,5	4,5	1,55	13,5	10,6	206	29,3	41,2	8,49	3,91	1,47
120	120	55	7,0	9,0	9,0	4,5	1,60	17,0	13,4	364	43,2	60,7	11,1	4,62	1,59
140	140	60	7,0	10,0	10,0	5,0	1,75	20,4	16,0	605	62,7	86,4	14,8	5,45	1,75
160	160	65	7,5	10,5	10,5	5,5	1,84	24,0	18,8	925	85,3	116	18,3	6,21	1,89
180	180	70	8,0	11,0	11,0	5,5	1,92	28,0	22,0	1350	114	150	22,4	6,95	2,02
200	200	75	8,8	11,5	11,5	6,0	2,01	32,2	25,3	1910	148	191	27,0	7,70	2,14
220	220	80	9,0	12,5	12,5	6,5	2,14	37,4	29,4	2690	197	245	33,6	8,48	2,30
240	240	85	9,5	13,0	13,0	6,5	2,23	42,3	33,2	3600	248	300	39,6	9,22	2,42
260	260	90	10,0	14,0	14,0	7,0	2,36	48,3	37,9	4820	317	371	47,7	9,99	2,56
280	280	95	10,0	15,0	15,0	7,5	2,53	53,3	41,8	6280	399	448	57,2	10,9	2,74
300	300	100	10,0	16,0	16,0	8,0	2,70	58,8	46,2	8030	495	535	67,8	11,7	2,90

Tab. 8-6. Kątowniki równoramienne wg PN-84/H-93401 [3]

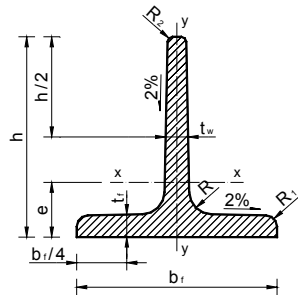


Wyróżnik oznaczenia L	Wymiary					Pole przekroju	Masa	Moment bezwładności			Promień bezwładności		
	a	t	R	R ₁	e	A	m	I _x = I _y	I _ξ	I _η	i _x = i _y	i _ξ	i _η
	mm				cm	cm ²	kg/m	cm ⁴			cm		
20×20× 3	20	3	3,5	2,0	0,60	1,12	0,88	0,39	0,62	0,15	0,59	0,74	0,37
25×25× 3	25	3	3,5	2,0	0,73	1,42	1,12	0,79	1,27	0,31	0,75	0,95	0,47
30×30× 3	30	3	5,0	2,5	0,84	1,74	1,36	1,41	2,24	0,57	0,90	1,14	0,57
5		0,92			2,78	2,18	2,16	3,41	0,91	0,88	1,11	0,57	
35×35× 3	35	3	5,0	2,5	0,96	2,04	1,60	2,29	3,63	0,95	1,06	1,34	0,68
5		1,04			3,28	2,57	3,56	5,63	1,49	1,04	1,31	0,67	
40×40× 4	40	4	6,0	3,0	1,12	3,08	2,42	4,48	7,09	1,86	1,21	1,52	0,78
6		1,20			4,48	3,52	6,33	9,98	2,67	1,19	1,49	0,77	
45×45× 4	45	4	7,0	3,5	1,23	3,49	2,74	6,43	10,2	2,68	1,36	1,71	0,88
6		1,32			5,09	4,00	9,16	14,5	3,83	1,34	1,69	0,87	
50×50× 4	50	4	7,0	3,5	1,36	3,89	3,06	8,97	14,2	3,72	1,52	1,91	0,98
6		1,45			5,69	4,47	12,8	20,4	5,33	1,50	1,89	0,96	
60×60× 6	60	6	8,0	4,0	1,69	6,91	5,42	22,8	36,1	9,43	1,82	2,28	1,17
8		1,77			9,03	7,09	29,1	46,1	12,1	1,80	2,26	1,16	
65×65× 6	65	6	9,0	4,5	1,80	7,53	5,91	29,2	46,3	12,1	1,97	2,48	1,27
9		1,93			11,0	8,62	41,3	65,4	17,2	1,94	2,44	1,25	

Tab. 8-6. Kątowniki równoramienne cd.

Wyróżnik oznaczenia L	Wymiary					Pole przekroju	Masa	Moment bezwładności			Promień bezwładności		
	a	t	R	R ₁	e	A	m	I _x = I _y	I _z	I _η	i _x = i _y	i _z	i _η
	mm				cm	cm ²	kg/m	cm ⁴			cm		
5		5			2,01	7,34	5,76	38,8	61,5	16,1	2,30	2,89	1,47
75×75×	75	7	9,0	4,5	2,09	10,1	7,93	52,4	83,6	21,1	2,29	2,88	1,48
9		2,17			12,8	10,0	65,4	104	27,2	2,27	2,85	1,46	
12		2,29			16,6	13,1	82,4	130	34,7	2,22	2,79	1,44	
80×80×	80	8	10,0	5,0	2,26	12,3	9,66	72,3	115	29,6	2,42	3,06	1,55
10		2,34			15,1	11,9	87,5	139	35,9	2,41	3,03	1,54	
6		2,40			10,6	8,32	80,3	127	33,3	2,75	3,46	1,78	
90×90×	90	8	11,0	5,5	2,50	13,9	10,9	104	166	43,1	2,74	3,45	1,76
8		2,58			17,1	13,5	127	201	52,8	2,72	3,43	1,75	
10		2,82			19,2	15,1	177	280	73,3	3,04	3,82	1,95	
100×100×	100	10	12,0	6,0	2,90	22,7	17,8	207	328	86,2	3,02	3,80	1,95
12		3,31			23,2	18,2	313	497	129	3,67	4,63	2,36	
10		3,40			27,5	21,6	368	584	152	3,65	4,60	2,35	
120×120×	120	10	13,0	6,5	3,63	29,9	23,5	470	745	195	3,96	4,99	2,55
12		4,12			34,8	27,3	737	1170	303	4,60	5,80	2,95	
12		4,25			43,0	33,8	898	1430	370	4,57	5,76	2,93	
130×130×	130	12	13,0	8,0	4,49	46,1	36,2	1100	1750	453	4,89	6,15	3,14
12		5,02			55,4	43,5	1680	2690	679	5,51	6,96	3,50	
15		5,10			61,9	48,6	1870	2970	757	5,49	6,93	3,49	
150×150×	150	15	15,0	8,0	5,68	76,4	59,9	2850	4540	1160	6,11	7,72	3,89
15		4,49			46,1	36,2	1100	1750	453	4,89	6,15	3,14	
12		5,02			55,4	43,5	1680	2690	679	5,51	6,96	3,50	
160×160×	160	16	16,0	8,0	5,10	61,9	48,6	1870	2970	757	5,49	6,93	3,49
15		4,49			46,1	36,2	1100	1750	453	4,89	6,15	3,14	
12		5,02			55,4	43,5	1680	2690	679	5,51	6,96	3,50	
180×180×	180	18	18,0	9,0	5,10	61,9	48,6	1870	2970	757	5,49	6,93	3,49
18		5,10			61,9	48,6	1870	2970	757	5,49	6,93	3,49	
12		5,02			55,4	43,5	1680	2690	679	5,51	6,96	3,50	
200×200×	200	20	18,0	9,0	5,68	76,4	59,9	2850	4540	1160	6,11	7,72	3,89
20		5,68			76,4	59,9	2850	4540	1160	6,11	7,72	3,89	
12		5,02			55,4	43,5	1680	2690	679	5,51	6,96	3,50	

Tab. 8-7. Teowniki wysokie wg PN-91/H-93406 [3]



Wyróżnik oznaczenia	Wymiary						Pole przekroju	Masa	Moment bezwładności		Wskaźnik wytrzymałości		Promień bezwładności	
	h=b _r	t _w =t _r	R	R ₁	R ₂	e	A	m	I _x	I _y	W _x	W _y	i _x	i _y
	mm						cm ²	kg/m	cm ⁴		cm ³		cm	
30x30x4	30	4	4	2,0	1,0	8,5	2,26	1,77	1,72	0,87	0,80	0,58	0,87	0,62
40x40x5	40	5	5	2,5	1,0	11,2	3,77	2,96	5,28	2,58	1,84	1,29	1,18	0,83
50x50x6	50	6	6	3,0	1,5	13,9	5,66	4,44	12,1	6,06	3,36	2,42	1,46	1,03
60x60x7	60	7	7	3,5	2,0	16,6	7,94	6,23	23,8	12,2	5,48	4,07	1,73	1,24
80x80x9	80	9	9	4,5	2,0	22,2	13,6	10,7	73,7	37,0	12,8	9,25	2,33	1,65
100x100x11	100	11	11	5,5	3,0	27,4	20,9	16,4	179,0	88,3	24,6	17,7	2,92	2,05
120x120x13	120	13	13	6,5	3,0	32,8	29,6	23,2	366	178	42,0	29,7	3,51	2,45

Bibliografia

- [1] Banasiak M., Grossman K., Trombski M.; *Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [2] Biały W.: *Mechanika techniczna. Wybrane zagadnienia ze statyki i wytrzymałości materiałów*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.
- [3] Bogucki W., Żybertowicz M.: *Tablice do projektowania konstrukcji stalowych*, Arkady, Warszawa 1996.
- [4] Chrobok R.: *Zbiór zadań z podstaw statyki*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 1999.
- [5] Dąbrowski O., Kolendowicz T.: *Poradnik inżyniera i technika budowlanego*, tom III, Arkady, Warszawa 1998.
- [6] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*, tom I, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa 1996.
- [7] Kolendowicz T.: *Mechanika budowli dla architektów*, Arkady, Warszawa 1996.
- [8] Pyrak S., Szulborski K.: *Mechanika konstrukcji*, Arkady, Warszawa 2001.
- [9] Siuta W.: *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa 1997.
- [10] Wierzbicki W.: *Mechanika budowli*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1955.