

## Spis treści

Wstęp .....	7
<b>Ireneusz Kuropka:</b> Przydatność wybranych modeli umieralności do prognozowania natężenia zgonów w Polsce .....	9
<b>Joanna Krupowicz:</b> Wykorzystanie zmiennych wyprzedzających do prognozowania procesu urodzeń .....	21
<b>Wioletta Wolańska:</b> Perspektywy starzenia się ludności Polski do roku 2035 .....	36
<b>Marcin Błażejowski:</b> Prognozowanie miesięcznej stopy bezrobocia dla Polski oraz województw za pomocą algorytmów X-12-ARIMA oraz TRAMO/SEATS .....	49
<b>Jacek Szandula:</b> Diagnostowanie i prognozowanie długości cykli nieregularnych .....	60
<b>Włodzimierz Szkutnik, Maciej Pichura:</b> Analiza wewnątrzsesyjnej zmienności wartości kontraktów terminowych z zastosowaniem modeli klasy ARCH/GARCH .....	72
<b>Maria Szmuksta-Zawadzka, Jan Zawadzki:</b> O prognozowaniu na podstawie modeli Holta-Wintersa dla pełnych i niepełnych danych .....	85
<b>Konstancja Poradowska:</b> Prawo propagacji niepewności w ocenie dopuszczalności prognoz .....	100
<b>Dorota Appenzeller:</b> Wartość kapitału intelektualnego firmy a prognozowanie upadłości .....	112

## Summaries

<b>Ireneusz Kuropka:</b> Selected mortality models utility in death density forecasting in Poland .....	20
<b>Joanna Krupowicz:</b> The leading indicators used to forecasting the number of birth in Poland .....	35
<b>Wioletta Wolańska:</b> Ageing of the Polish population till the year 2035 .....	48
<b>Marcin Błażejowski:</b> Forecasting monthly unemployment rate in Poland and Poland's voivodeships with the use of X-12-ARIMA and TRAMO/SEATS algorithms .....	59
<b>Jacek Szandula:</b> Diagnosing and forecasting a length of irregular cycles .....	71
<b>Włodzimierz Szkutnik, Maciej Pichura:</b> Intraday volatility analysis of futures contracts using ARCH/GARCH models .....	83

---

<b>Maria Szmuksta-Zawadzka, Jan Zawadzki:</b> Forecasting on the basis of holt-winter's models for complete and incomplete data .....	99
<b>Konstancja Poradowska:</b> Law of propagation of uncertainty in measuring forecast accuracy .....	111
<b>Dorota Appenzeller:</b> Value of companies' intellectual capital in business failure forecasting .....	120

**Ireneusz Kuropka**

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

---

## PRZYDATNOŚĆ WYBRANYCH MODELI UMIERALNOŚCI DO PROGNOZOWANIA NATEŻENIA ZGONÓW W POLSCE

---

**Streszczenie:** Stosunkowo regularne zmiany umieralności widoczne w Polsce od 1991 r. sugerują, że przyszły przebieg zjawiska można przewidywać na podstawie opisujących je modeli. W artykule przedstawiono dwa modele umieralności, Heligmana-Pollarda oraz Andriejewa, których parametry oszacowano na podstawie współczynników zgonów lub prawdopodobieństw zgonów dla Polski, osobno dla mężczyzn i kobiet w latach 1991-2004. Zbadano także możliwość wykorzystania tych modeli do prognozowania umieralności poprzez sporządzenie prognoz wygasłych dla lat 2004-2007 i ocenę ich jakości. Przeprowadzone postępowanie pokazało jednak, że prognozy prawdopodobieństw czy współczynników zgonów, które zostały wyznaczone były obciążone stosunkowo dużymi błędami. Mierniki jakości tych prognoz jednoznacznie wskazują na małą przydatność tych modeli do prognozowania.

**Słowa kluczowe:** modelowanie, prognozowanie, umieralność.

### 1. Wstęp

Do badania zmian zjawisk ludnościowych demografia dysponuje licznymi narzędziami właściwymi tej dyscyplinie nauki oraz narzędziami wykorzystującymi dorobek innych dyscyplin. Jednym z tych pochodzących z innych dyscyplin są metody matematyczne, umożliwiające przedstawienie danych demograficznych w postaci formalnych zależności oraz pozwalające na analizę tych zależności. Analiza demograficzna prowadzona metodami matematycznymi prawie zawsze ma na celu dostarczenie dodatkowych informacji, których nie można uzyskać przez bezpośredni pomiar. Może to być np. mierzenie ukrytego wskaźnika, wykrycie wewnętrznej struktury danych (rozłożenie ich na składowe), poszukiwanie i ekstrapolacja tendencji zmian współczynników demograficznych, odkrycie związków między zjawiskami ludnościowymi.

Za pomocą metod matematycznych dane empiryczne łączy się z uogólnieniami teoretycznymi lub z intuicją demograficzną, tworząc modele matematyczne. Na przykład kiedy dysponujemy wektorem współczynników zgonów według wieku, interesuje nas także określenie przeciętnego dalszego trwania życia i prawdopodobieństw przeżycia niezbędnych do prognozowania demograficznego. Wiedza taka

jest szczególnie interesująca m.in. dla funduszy ubezpieczeniowych. Informacje o przyszłym kształtowaniu się długości życia mają wpływ na ustalenie wysokości pobieranych składek czy określenie wielkości przyszłych wypłat.

W artykule przedstawiono dwa modele umieralności, model Heligmana-Pollarda oraz model Andriejewa, które można nazwać klasycznymi. Wybrano je z trzech powodów:

- 1) są mocno związane z praktycznymi zadaniami demografii,
- 2) stanowią podstawę innych modeli,
- 3) w przedstawionych modelach ważne są nie tylko ich cechy, ale ich idea, ogólne podejście, które znajduje zastosowanie w innych podobnych zadaniach badania zjawisk ludnościowych.

Dla tych modeli oszacowano parametry na podstawie współczynników zgonów lub prawdopodobieństw zgonów dla Polski, osobno dla mężczyzn i kobiet w latach 1991-2004. Zbadano także możliwość wykorzystania tych modeli do prognozowania umieralności poprzez sporządzenie prognoz wygasłych dla lat 2004-2007 i ocenę ich jakości.

## 2. Modele umieralności

Umieralność jest procesem demograficznym, nad którym badania zapoczątkowały rozwój nauk demograficznych. Próby wyjaśnienia procesu starzenia się i śmierci człowieka mają bardzo długą historię. Ich intensyfikacja nastąpiła w XIX w. w związku z rozwojem instytucji ubezpieczeniowych. Badania aktuarialne wyznaczyły politykę finansową instytucji ubezpieczeniowych i zasady określania funduszy emerytalnych, stwarzały także możliwość rozwoju teorii tłumaczących zmiany umieralności według wieku.

Podstawowymi narzędziami stosowanymi w analizie umieralności są współczynniki demograficzne, które wyrażają natężenie badanego zjawiska. Ogólny współczynnik zgonów  $W_z$  informuje, ile zgonów zaistniałych w okresie  $t$  przypada średnio na 100, 1000, 10 000 lub 100 000 osób żyjących w tym okresie:

$$W_z^{(t)} = \frac{Z^{(t)}}{L^{(t)}} C, \quad (1)$$

gdzie:  $Z^{(t)}$  – liczba zgonów w okresie  $t$ ,

$L^{(t)}$  – liczba ludności w połowie badanego okresu  $t$ ,

$C$  – wielkość stała (100, 1000, 10 000, 100 000).

Według wzoru (1) oblicza się także cząstkowe współczynniki w grupach wieku lub według innych wyróżnionych w badaniu cech.

Innym ważnym miernikiem wyrażającym natężenie zgonów jest prawdopodobieństwo zgonu, określające zmniejszanie się liczebności populacji w danym wieku

w określonym przedziale wieku. Przy założeniu równomiernego rozkładu zgonów w przedziale wieku  $[x, x+1]$  prawdopodobieństwo to wyznacza się ze wzoru:

$$q_x = \frac{d_x}{L_x + 0,5d_x} = \frac{2W_{zx}}{2 + W_{zx}}, \quad (2)$$

gdzie:  $W_{zx} = \frac{d_x}{L_x}$  oznacza współczynnik zgonów w wieku od  $x$  do  $x+1$  lat.

Założenie o równomiernym rozkładzie zgonów w przedziale wieku zwykle nie jest uzasadnione i prawdopodobieństwa zgonów wyznacza się z innych wzorów (zob. np. [Namboodiri, Suchindran1987]). W tym miejscu sposoby wyznaczania tych wielkości zostały pominięte, gdyż przy szacowaniu parametrów modeli wykorzystane zostaną wielkości szacowane przez Główny Urząd Statystyczny.

Modele demograficzne wykorzystywane w badaniach nad umieralnością czy też trwaniem życia można podzielić na dwie grupy:

- 1) modele matematyczne,
- 2) modele przyczynowo-skutkowe (zob. [Pułaska-Turyna 1990]).

Modele pierwszej grupy za pomocą formuł matematycznych przedstawiają uniwersalne prawa rządzące procesem w zależności od jednej zmiennej, mianowicie od wieku. Natomiast modele drugiej grupy odwołują się do szeroko pojętych społeczno-ekonomicznych determinant umieralności.

Celem prezentowanych badań było oszacowanie parametrów modeli oraz budowa prognoz natężenia zgonów na ich podstawie. Dlatego rozważania zostały ograniczone do modeli matematycznych<sup>1</sup>.

Matematyczne modele umieralności można podzielić na dwie grupy:

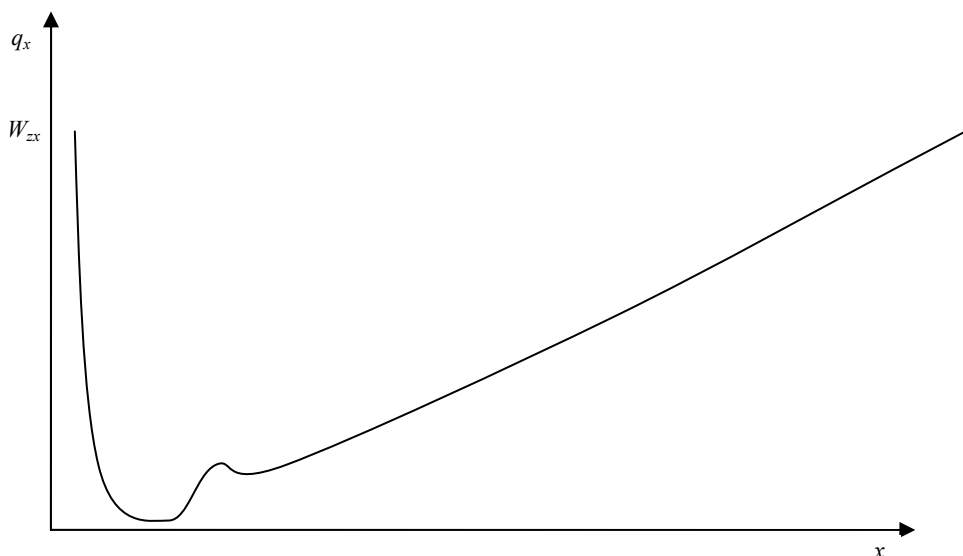
- 1) matematyczne krzywe umieralności,
- 2) modele relacyjne.

Modele pierwszej grupy przedstawiają zależności charakterystyk umieralności od wieku, wyrażone w postaci funkcji analitycznej, której parametry wyznacza się dla badanej populacji w rozważanym przedziale czasu. Jeżeli jako charakterystykę natężenia zgonów przyjmiemy prawdopodobieństwo zgonu lub współczynniki zgonów według wieku, to zmiany tych parametrów w zależności od wieku przebiegają jak na rys. 1.

Dla roczników dziecięcych wielkości te szybko maleją, osiągając minimum w wieku ok. 10 lat, następnie szybko wzrastają, osiągając stosunkowo wysoką wartość wśród roczników wczesnego wieku produkcyjnego. Dla kolejnych roczników charakterystyki natężenia zgonów stabilizują się, aby następnie monotonicznie wzrastać.

Modele należące do pierwszej grupy stawiają sobie za cel opis zmian miar umieralności dla kolejnych roczników wieku w postaci „uniwersalnych praw”. Druga

<sup>1</sup> Modele matematycznych jest wiele, zob. np. [Hartmann 1983; Heligman, Pollard 1980; Pułaska-Turyna 1990; Tabeau, Van den Berg Jeths, Heathcote 2001].



Rys. 1. Rozkład miar natężenia zgonów według wieku

grupa modeli opisuje relacje między charakterystykami zgonów w dwóch populacjach, z których jedna, a dokładnie umieralność w tej populacji, została przyjęta jako standardowa.

Niżej przedstawione zostaną dwa modele umieralności. Z grupy pierwszej model Heligmana-Pollarda i z grupy drugiej model Andriejewa.

## 2.1. Model Heligmana-Pollarda

Jednym z najnowszych modeli opisujących zmiany prawdopodobieństwa zgonu w zależności od wieku<sup>2</sup> jest zaproponowany przez Heligmana i Pollarda [1980] model dekompozycji tego miernika:

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + GH^x}, \quad (3)$$

o dodatkich parametrach, które – zdaniem jego autorów – mają interpretację demograficzną. Model zawiera trzy składowe, opisujące zmiany umieralności w trzech przedziałach wieku: 0-10, 10-40 oraz 40 i więcej lat. Pierwszy człon modelu, malejący wykładniczo, odzwierciedla zmiany umieralności we wczesnym dzieciństwie, kiedy dziecko adaptuje się do otoczenia. Występujące tu parametry autorzy interpre-

<sup>2</sup> Według niektórych badaczy jest to również jeden z najlepszych modeli (zob. [Kędelski, Paradyś 2006, s. 114]).

tują następująco:  $A$ , przeciętna umieralność w wieku dziecięcym, jest w przybliżeniu równa prawdopodobieństwu zgonu w wieku 1 roku, parametr  $B$  jest miarą różnicy  $q_0 - q_1$ , a  $C$  mierzy szybkość przystosowywania się dzieci do otoczenia.

Drugi człon modelu Heligmana-Pollarda wyraża zwiększenie rzeczywistej umieralności ponad poziom wynikający ze starzenia się organizmu ludzkiego. Ta „nadwyżka”, występująca przede wszystkim wśród młodzieży i osób w młodszym wieku produkcyjnym, jest wywołana głównie przyczynami egzogenicznymi (w zbiorowości kobiet także przyczynami związanymi z macierzyństwem). Jak podkreślają autorzy, nadwyżka ta, występująca we wszystkich populacjach, dotyczy roczników z przedziału 10-40 lat. Parametr  $D$  mierzy średnie natężenie zgonu osób w średnim wieku, natomiast parametry  $E$  i  $F$  wyrażają odpowiednio rozproszenie i położenie tej nadwyżki na osi wieku.

Trzecią składową modelu stanowi prawo umieralności Gompertza, wyrażające wzrost natężenia zgonów w wieku dorosłym, determinowany przede wszystkim starzeniem się organizmu, czyli przyczynami endogenicznymi. Parametr  $G$  mierzy wyjściowy poziom tej umieralności, natomiast  $H$  wyraża tempo jej wzrostu.

## 2.2. Model Andriejewa

Kształt krzywej umieralności, przedstawiającej zmiany współczynników zgonów według wieku, i jego zmiany można badać w sposób zaproponowany przez Andriejewa [Andreev, Dobrovolskaâ 1979]. Badacz ten wysunął hipotezę, że zmiany natężenia zgonów według wieku można opisać relacją:

$$W_{zx}^t = k_x^t \times W_{zx}^s, \quad (4)$$

gdzie:  $W_{zx}^t$  – współczynnik zgonów osób w wieku  $x$  w roku  $t$ ,

$W_{zx}^s$  – standardowy współczynnik zgonów osób w wieku  $x$ ,

$k_x^t$  – współczynnik korygujący zależny od wieku.

Dysponując dwoma szeregami czasowymi współczynników zgonów osób w wieku  $x$  – badanym i standardowym – oszacować można wartości współczynników korygujących  $k$  dla poszczególnych grup wieku. Ciąg tych wskaźników można przedstawić jako funkcję wieku. Badania przeprowadzone dla kilkunastu krajów świata pokazały, że funkcję tę można dobrze aproksymować funkcją liniową:

$$k_x^t = a^t + b^t \times x, \quad (5)$$

przy czym jakość tej aproksymacji zależy od wyboru standardowego współczynnika zgonów.

### 3. Szacowanie parametrów modeli

Oceny parametrów wybranych modeli przeprowadzono na podstawie wyznaczonych przez GUS współczynników zgonów oraz prawdopodobieństw zgonów dla najczęściej wyróżnianych grup wieku, tj. grupy 0 lat, 1-4, 5-9, ..., 80-84 lub 85 i więcej lat<sup>3</sup>. Badaniem objęto lata 1991-2004, kiedy w Polsce umieralność systematycznie się zmniejszała.

Oszacowanie parametrów modeli przeprowadzono z wykorzystaniem programu komputerowego MORTPAK, a wyniki uzyskane dla mężczyzn przedstawiono w tab.1. Analiza uzyskanych wielkości pokazuje, że zmiany parametrów były różnokierunkowe. Oceny parametrów A, B, C i E zmieniały się w stosunkowo niewielkim zakresie, ale w każdym przypadku występowały wartości znacznie odbiegające od pozostałych, czyli tzw. punkty odstające. Tak było zwłaszcza w początkowych latach rozważanego przedziału czasowego. Tendencję do wzrostu wykazywały oceny parametrów F i H, a do spadku – oceny parametrów D i G.

**Tabela 1.** Wartości ocen parametrów modelu Heligmana-Pollarda dla mężczyzn w latach 1991-2004

Lata	A	B	C	D	E	F	G	H
1991	0,01510	0,87243	0,72995	0,00066	9,375650	22,29356	0,00018	1,08691
1992	0,01261	0,83321	0,75787	0,00056	24,21344	21,45438	0,00020	1,08422
1993	0,00124	0,13490	0,25340	0,00065	21,21093	20,71641	0,00012	1,09233
1994	0,00161	0,22448	0,29818	0,00077	27,67260	20,28790	0,00013	1,09115
1995	0,00124	0,19281	0,27744	0,00061	22,09745	20,87933	0,00013	1,09060
1996	0,00102	0,13053	0,22935	0,00064	23,95380	20,80827	0,00012	1,09223
1997	0,00121	0,24834	0,28415	0,00070	19,64022	21,14111	0,00012	1,09214
1998	0,00104	0,24229	0,28581	0,00073	26,89296	20,42519	0,00011	1,09191
1999	0,00114	0,23186	0,25752	0,00070	21,79313	20,95000	0,00011	1,09242
2000	0,00101	0,25043	0,27058	0,00064	23,52718	20,92591	0,00010	1,09367
2001	0,00950	0,23995	0,26002	0,00056	22,90576	21,05199	0,00010	1,09313
2002	0,00100	0,26880	0,27332	0,00058	20,49823	20,99396	0,00010	1,09202
2003	0,00072	0,18618	0,23333	0,00055	23,29866	21,31772	0,00009	1,09366
2004	0,00083	0,27060	0,28085	0,00052	19,11377	21,95828	0,00009	1,09357

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych GUS.

Uzyskane dla kobiet oceny parametrów w większości przypadków wykazywały tendencję do spadku (tab. 2). Tak było z parametrami: A, C, G, D, E, F, ale w trzech ostatnich przypadkach widoczne są znaczne wahania ocen parametrów. Tylko oceny parametru H wykazywały tendencję do wzrostu, a w przypadku parametru B występowały bardzo duże wahania.

<sup>3</sup> Źródłem danych o współczynnikach zgonów były Roczniki Demograficzne GUS, a prawdopodobieństwa zgonów pochodziły z strony internetowej GUS: [www.stat.gov.pl](http://www.stat.gov.pl).



**Tabela 2.** Wartości ocen parametrów modelu Heligmana-Pollarda dla kobiet w latach 1991-2004

Lata	A	B	C	D	E	F	G	H
1991	0,00073	0,00305	0,09597	0,00021	62,53524	18,51664	0,00003	1,10182
1992	0,00081	0,0104	0,11699	0,00024	61,8754	18,82337	0,00003	1,10209
1993	0,00063	0,00264	0,09338	0,00032	86,23656	18,80165	0,00003	1,10404
1994	0,00078	0,01069	0,11376	0,00032	80,97358	18,71585	0,00003	1,10236
1995	0,00064	0,01162	0,11510	0,00015	14,39009	17,59699	0,00003	1,10244
1996	0,00060	0,00476	0,09263	0,00022	69,13313	18,65744	0,00003	1,10482
1997	0,00060	0,00426	0,08938	0,00034	68,24375	18,84874	0,00003	1,10393
1998	0,00046	0,00334	0,08406	0,00023	67,40405	18,98866	0,00002	1,10449
1999	0,00056	0,01827	0,10905	0,00019	27,88533	18,66733	0,00003	1,10382
2000	0,00043	0,01036	0,09933	0,00015	20,4788	17,88701	0,00002	1,10420
2001	0,00044	0,00793	0,09085	0,00012	17,58062	17,24081	0,00002	1,10497
2002	0,00039	0,00294	0,07769	0,00014	21,30428	17,49449	0,00002	1,10527
2003	0,00029	0,00075	0,0664	0,00013	19,08616	18,24749	0,00002	1,10582
2004	0,00034	0,00555	0,08681	0,00013	15,95588	17,45129	0,00002	1,10463

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych GUS.

**Tabela 3.** Wartości współczynnika  $k$  według wieku i płci dla modelu Andriejewa w wybranych latach okresu 1991-2004

Grupa wieku	Mężczyźni			Kobiety		
	1991	2000	2004	1991	2000	2004
0	5,548926	3,512331	2,955449	5,216316	3,024310	2,529872
1-4	2,826087	1,521739	1,260870	2,253521	1,267606	1,032864
5-9	2,132353	1,544118	1,397059	1,941748	1,262136	1,165049
10-14	3,196721	1,885246	1,721311	1,764706	1,372549	1,372549
15-19	3,126761	2,084507	1,746479	1,302682	1,111111	0,996169
20-24	2,695783	1,852410	1,671687	0,806794	0,658174	0,594480
25-29	2,732240	1,871585	1,748634	0,945674	0,784708	0,643863
30-34	4,599359	2,996795	2,724359	1,486762	1,099796	0,957230
35-39	4,934911	3,502959	3,183432	1,754636	1,340942	1,126961
40-44	4,909877	3,540014	3,129056	2,038391	1,581353	1,371115
45-49	4,590747	3,403025	3,260676	1,837069	1,585566	1,454347
50-54	4,111442	3,121450	3,034893	1,570431	1,411802	1,335660
55-59	3,604632	2,810587	2,661704	1,476022	1,299135	1,185142
60-64	3,225975	2,662080	2,476548	1,555108	1,244338	1,132360
65-69	2,628455	2,235746	2,040290	1,503494	1,225487	1,041401
70-74	2,158469	1,970667	1,780719	1,537788	1,275115	1,102765
75-79	1,926283	1,687178	1,497714	1,611773	1,313177	1,140602
80-84	1,622524	1,384500	1,293528	1,505904	1,263295	1,142577

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych GUS.

Jak podano wcześniej, parametry modelu Heligmana-Pollarda mają interpretację demograficzną, ale celem badania była ocena przydatności wybranych modeli do prognozowania, więc z takiej analizy zrezygnowano.

Przy szacowaniu parametrów modelu Andriejewa jako standardowy wybrano szereg współczynników zgonów według wieku w Szwecji z 2005 r. Jak powszechnie wiadomo, mieszkańcy tego kraju żyją znacznie dłużej niż Polacy, co oznacza, że wartości współczynników  $k_x$  powinny w miarę upływu czasu się zmniejszać. Potwierdzają te przypuszczenia wielkości zamieszczone w tab. 3.

**Tabela 4.** Wartości ocen parametrów  $a$  i  $b$  dla modelu Andriejewa w latach 1991-2004 według płci

Lata	Mężczyźni		Kobiety	
	$a$	$b$	$a$	$b$
1991	3,955881	-0,01470	2,318734	-0,01259
1992	3,776598	-0,01442	2,337712	-0,01378
1993	3,597316	-0,01415	2,356691	-0,01498
1994	3,569564	-0,01437	2,348628	-0,01540
1995	3,391134	-0,01109	2,147994	-0,01229
1996	3,110521	-0,00824	2,036465	-0,01080
1997	2,918324	-0,00513	1,864952	-0,00837
1998	2,784810	-0,00413	1,731095	-0,00670
1999	2,76896	-0,00371	1,641639	-0,00540
2000	2,453365	-0,00079	1,494451	-0,00384
2001	2,330019	-0,00074	1,503645	-0,00498
2002	2,388789	-0,00216	1,488707	-0,00546
2003	2,205093	0,00040	1,400702	-0,00365
2004	2,148138	0,00127	1,306048	-0,00302

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych GUS.

Postępując zgodnie z sugestiami Andriejewa, wyznaczono funkcje liniowe przedstawiające zależność współczynników korygujących  $k$  od wieku  $x$ . Uzyskane wartości parametrów tych funkcji dla lat 1991-2004 zawiera tab. 4. Widać z zamieszczonych wielkości, że zarówno dla mężczyzn, jak i dla kobiet tendencje zmian parametru  $a$  (czyli wyrazu wolnego) oraz parametru  $b$  (współczynnika przy zmiennej  $x$ ) były takie same. Z upływem lat zmniejszały się oceny parametrów  $a$  i rosły oceny parametru  $b$ . Zmiany te podlegały jednak zakłóceniom, zwłaszcza w przypadku ocen parametru  $b$ .

#### 4. Prognozy umieralności i ocena ich dokładności

Przedstawione modele zostały wykorzystane do wyznaczenia prognoz umieralności w Polsce. Były to prognozy wygasłe na lata 2005-2007. Na podstawie modelu Heligmana-Pollarda wyznaczone zostały prognozy prawdopodobieństw zgonów według wieku, a na podstawie modelu Andriejewa prognozy współczynników zgonu.

Do budowy prognozy prawdopodobieństw zgonów niezbędne były przyszłe wartości ocen parametrów modelu Heligmana-Pollarda. Zostały one wyznaczone na podstawie obliczonych wcześniej wartości zawartych w tab. 1 i 2. Dość nieregularne zmiany ocen parametrów w latach 1991-2004, mimo eliminacji punktów odstających, nie pozwoliły wyznaczyć funkcji trendu zadowalająco dopasowanych do tych wielkości. Dlatego do wyznaczenia prognostycznych ocen parametrów modelu zastosowano model Holta. Parametry wygładzania w tym modelu dobrano, minimalizując błędy dopasowania wartości teoretycznych do rzeczywistych wartości. Uzyskane w ten sposób prognostyczne wartości dla lat 2005-2007 (tab. 5) posłużyły do prognozowania prawdopodobieństw zgonów w tym przedziale czasowym na podstawie modelu (3).

**Tabela 5.** Prognostyczne wartości ocen parametrów modelu Heligmana-Pollarda według płci w latach 2005-2007

Lata	A	B	C	D	E	F	G	H
Mężczyźni								
2005	0,000714589	0,241056	0,26189	0,00050	19,89150	22,20517	0,00008	1,09384
2006	0,000651036	0,243343	0,263298	0,00048	19,29609	22,51011	0,00008	1,09411
2007	0,000587483	0,245631	0,264707	0,00045	18,70067	22,81505	0,00008	1,09438
Kobiety								
2005	0,00028	0,01360	0,077229	0,00012	13,76147	16,70647	0,00002	1,10619
2006	0,00024	0,02008	0,076486	0,00012	11,55732	15,94622	0,00002	1,10648
2007	0,00021	0,02657	0,075743	0,00011	9,35317	15,18596	0,00002	1,10678

Źródło: obliczenia własne.

Jakość uzyskanych prognostycznych wartości współczynników zgonów oceniono za pomocą średniego względnego błędu prognoz. Zamieszczone w tab. 6 wartości wskazują, że uzyskane wyniki nie są zadowalające. Zarówno dla mężczyzn, jak i dla kobiet średnie błędy dla przedziału wieku 0-100 lat wynosiły kilkanaście procent. Dla mężczyzn najdokładniejsze przeciętnie były prognozy dla roczników z przedziału 60-79 lat. W tym przypadku średni błąd prognoz był jednocyfrowy w każdym roku. Błędy dla prognoz dotyczących kobiet były natomiast najmniejsze dla przedziału wieku 20-59 lat i osób w wieku 80 i więcej lat. Ogólnie jednak przy tak krótkim horyzoncie prognozy uzyskane wyniki należy ocenić negatywnie.

**Tabela 6.** Średnie błędy prognoz prawdopodobieństw zgonu według wieku i płci w latach 2005-2007

Przedział wieku	Mężczyźni			Kobiety		
	2005	2006	2007	2005	2006	2007
Ogółem	12,8	12,6	14,2	12,9	12,2	13,3
0-14	21,1	13,4	15,7	24,8	19,7	21,9
15-19	18,4	22,8	31,9	16,3	7,2	14,0
20-44	8,7	10,4	13,5	6,7	8,7	10,3
45-59	18,3	21,4	23,9	7,6	7,2	6,3
60-79	7,2	7,7	7,1	18,2	21,8	24,3
80-100	11,8	10,8	9,7	9,6	6,5	5,2

Źródło: obliczenia własne.

Pierwszy krok przy wyznaczaniu prognostycznych wartości współczynników zgonów z modelu Andriejewa polegał na oszacowaniu parametrów  $a$  i  $b$ , niezbędnych do wyznaczenia prognostycznych wartości współczynników korygujących z równania (5). Wartości ocen tych parametrów dla lat 2005, 2006 i 2007 wyznaczono z równań trendu:

$$\begin{aligned} \hat{a}^M &= 4,0138 \times \exp(-0,05 \times t) & \hat{b}^M &= -0,0184 + 0,0072 \times \ln t, \\ \hat{a}^K &= 2,5922 \times \exp(-0,0535 \times t) & \hat{b}^K &= -0,0177 + 0,0054 \times \ln t. \end{aligned}$$

Wszystkie równania w zadowalającym stopniu odzwierciedlały zmiany rzeczywistych wielkości. Współczynniki determinacji w żadnym przypadku nie były mniejsze niż 0,8. Wyznaczone prognostyczne wartości współczynników korygujących zawiera tab. 7.

**Tabela 7.** Prognostyczne wartości współczynników korygujących według płci w latach 2005-2007

Lata	Mężczyźni			Kobiety		
	2005	2006	2007	2005	2006	2007
1	2	3	4	5	6	7
0	1,993495	1,896534	1,804298	1,223969	1,160304	1,099953
1-4	1,994998	1,899279	1,808205	1,219620	1,152613	1,093133
5-9	1,997703	1,904220	1,815236	1,210510	1,138768	1,080857
10-14	2,000709	1,909709	1,823050	1,200387	1,123386	1,067217
15-19	2,003715	1,915199	1,830863	1,190264	1,108003	1,053577
20-24	2,006721	1,920689	1,838676	1,180141	1,092620	1,039937
25-29	2,009727	1,926179	1,846489	1,170019	1,077238	1,026297
30-34	2,012734	1,931669	1,854302	1,159896	1,061855	1,012657
35-39	2,015740	1,937158	1,862116	1,149773	1,046472	0,999016

1	2	3	4	5	6	7
40-44	2,018746	1,942648	1,869929	1,139650	1,031090	0,985376
45-49	2,021752	1,948138	1,877742	1,129528	1,015707	0,971736
50-54	2,024758	1,953628	1,885555	1,119405	1,000325	0,958096
55-59	2,027764	1,959118	1,893368	1,109282	0,984942	0,944456
60-64	2,030770	1,964607	1,901182	1,099160	0,969559	0,930816
65-69	2,033776	1,970097	1,908995	1,089037	0,954177	0,917176
70-74	2,036782	1,975587	1,916808	1,078914	0,938794	0,903536
75-79	2,039788	1,981077	1,924621	1,068791	0,923411	0,889896
80-84	2,042794	1,986567	1,932434	1,058669	0,908029	0,876255

Źródło: obliczenia własne.

**Tabela 8.** Średnie błędy prognoz prawdopodobieństw zgonu według wieku i płci w latach 2005-2007

Przedział wieku	Mężczyźni			Kobiety		
	2005	2006	2007	2005	2006	2007
Ogółem	30,0	27,8	29,3	23,0	25,3	23,2
0-14	43,3	30,4	34,8	20,3	19,1	22,2
15-19	3,4	2,3	10,0	27,2	15,7	6,4
20-44	26,7	27,7	27,8	48,1	46,5	33,9
45-59	31,9	35,1	37,3	15,1	24,1	27,4
60-79	17,9	18,3	17,7	3,2	10,6	12,9
80-84	62,7	60,7	57,0	5,9	16,6	18,8

Źródło: obliczenia własne.

Jakość prognostycznych wartości współczynników zgonów uzyskanych według wzoru (4) oceniono za pomocą średniego względnego błędu prognoz. Zamieszczone w tab. 8 wartości wskazują, że uzyskane wyniki nie są zadowalające. Zarówno dla mężczyzn, jak i dla kobiet średnie błędy przekraczały kilkanaście bądź kilkadziesiąt procent. Dla mężczyzn najdokładniejsze przeciętnie były prognozy dla przedziału wieku 15-19 lat, a w przypadku kobiet najmniejszym błędem obarczone były prognostyczne współczynniki zgonów dla osób w wieku 60 lat i więcej.

## 5. Uwagi końcowe

Obserwowane w Polsce w ostatnich latach zmiany umieralności wydają się stosunkowo regularne. Mimo pewnych wahań kierunek zmian długości życia jest taki, jakiego wszyscy oczekują. Polacy żyją coraz dłużej. Wydawało się więc, że w takiej sytuacji narzędziem pozwalającym na wyznaczenie dobrych prognoz umieralności będą modele matematyczne opisujące zmiany tego zjawiska.

Przeprowadzone postępowanie pokazało jednak, że prognozy prawdopodobieństw czy współczynników zgonów, wyznaczone z wykorzystaniem modeli Heligmana-Pollarda oraz Andriejewa, były obarczone stosunkowo dużymi błędami. Mierniki jakości tych prognoz jednoznacznie wskazują na małą przydatność tych modeli

do prognozowania. Przyczyny takiego stanu rzeczy mogą być różne. W przypadku modelu Heligmana-Pollarda może to być spowodowane znacznymi wahaniami parametrów tego modelu. Dla mężczyzn współczynniki zmienności aż 5 na 8 parametrów modelu przekraczały lub było bardzo bliskie 20%. Tak było z parametrami: A, B, C, E i G. Zmienność parametrów modelu dla kobiet również była znaczna i, podobnie jak u mężczyzn, dotyczyło to 5 parametrów, przy czym ocenę parametru C zastąpiła ocena parametru D. W takim przypadku nawet zastosowanie adaptacyjnych metod prognozowania nie doprowadziło do zadawalających rezultatów.

W przypadku modelu Andriejewa błędy prognoz były jeszcze większe. Może, jak wspomniano wcześniej, przyczynił się do tego dobór standardowego szeregu współczynników zgonów według wieku?

## Literatura

- Andreev E.M., Dobrovol'skaâ V.M., *Ob odnom metode izučeniâ krivych dożytiâ*, [w:] *Prodolžite 'Inost' žizni; Analiz i modelirovanie*, Statistika, Moskwa 1979.
- Hartmann M., *Past and recent experiments in modeling mortality at all ages*, „Stockholm Research Reports in Demography” 1983, no. 13.
- Heligman L., Pollard J.H., *The age pattern of mortality*, „Journal of the Institute of Actuaries” 1980, no. 107.
- Kędelski M., Paradysz J., *Demografia*, AE, Poznań 2006.
- Kuropka I., *Potencjal życiowy mieszkańców Dolnego Śląska. Diagnoza i perspektywy*, AE, Wrocław 2002.
- Namboodiri K., Suchindran C.M., *Life Table Techniques and their Applications*, Academic Press, Orlando 1987.
- Pułaska-Turyńska B., *Teorie uwarunkowań umieralności*, [w:] M. Okólski (red.), *Teoria przejścia demograficznego*, PWE, Warszawa 1990.
- Tabeau E., Van den Berg Jeths A., Heathcote Ch., *Forecasting Mortality in Developed Countries*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2001.

## SELECTED MORTALITY MODELS UTILITY IN DEATH DENSITY FORECASTING IN POLAND

**Summary:** Relatively regular changes in mortality noticeable in Poland since 1991 suggest that future course of phenomenon can be predicted basing on models describing these changes. In this article two models of mortality, Heligman–Pollard’s Model and Andriejew’s Model, are presented. Parameters of these models are estimated basing on death rates or probability of death for Poland, separately for males and females in 1991-2004. Also the opportunity to use these models in mortality forecasting by making forecasts for 2004-2007 period and the assessment of their quality are researched. However, the research shows that forecasts which have been determined are wrong. The quality measures of these forecasts unambiguously indicate that the utility of presented models in forecasting is not significant.