Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 38
Ekonometria 24 2009

Włodzimierz Szkutnik, Maciej Pichura
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

ANALIZA WEWNĄTRZSESYJNEJ ZMIENNOŚCI WARTOŚCI KONTRAKTÓW TERMINOWYCH Z ZASTOSOWANIEM MODELI KLASY ARCH/GARCH

Streszczenie: Pierwsza część artykułu przedstawia założenia teoretyczne wybranych modeli o warunkowej heteroskedastyczności (ARCH oraz GARCH), znajdujących w ostatnim czasie coraz szersze zastosowanie w analizie szeregów czasowych opisujących rynek finansowy. Modele te u swoich podstaw mają coraz częściej przyjmowane założenie, że zmienność zjawisk ekonomicznych zależy m.in. od czasu. W następnej kolejności modele zostały zastosowane do przeprowadzenia analizy wewnątrzsesyjnej zmienności wartości kontraktów terminowych na USD oraz WIG20 z datą wykonania 19.09.2008 dla sesji z okresu od 15.10.2007 do 19.09.2008. Ilustracja empiryczna zaprezentowanych modeli pozwoliła na wysunięcie wniosku, że mogą one być przydatnym narzędziem w badaniu zmienności na rynkach finansowych, w szczególności zjawisk charakteryzujących się dużą częstotliwością zmian.

Słowa kluczowe: kontrakty terminowe, zmienność wewnątrzsesyjna, modele ARCH/GARCH.

1. Wstęp

W artykule przeprowadzono analizę przede wszystkim stóp zwrotu z instrumentów finansowych, przyjmując za ich miarę zmienności wariancję lub odchylenie standardowe z badanej próby empirycznej. W wypadku zmienności instrumentów rynku kapitałowego miary te można uznać za jeden ze składników ryzyka rynkowego, istotnie wpływającego z kolei na szeroko rozumiane ryzyko ekonomiczne. Modele uwzględniające miary zmienności zjawiska w zależności od czasu są najczęściej stosowane w sferze ekonomii i finansów do analizy dyspersji badanych zjawisk.

Duża część modeli wyceny czy analizy cen i stóp zwrotu z instrumentów finansowych zakłada, że charakter ich zmian jest stały. Takie założenie bardzo często nie jest jednak zgodne z rzeczywistością, dlatego coraz częściej zakłada się, że zmienność cen instrumentów finansowych charakteryzuje się kilkoma cechami. Po pierwsze, istnieją skupienia zmienności – w pewnych okresach zmienność jest wyższa, a w innych – niższa. Po drugie, zmienność ewoluuje w czasie w sposób ciągły, a co jest z tym związane – znaczne skoki wartości są rzadkie. Ponadto w badaniu miar zmienności nie zauważa się dążenia do nieskończoności – waha się ona w mniejszych lub większych przedziałach – co często, lecz nie zawsze, oznacza stacjonarność w ujęciu statystycznym. Wreszcie zachowanie się miar zmienności w wypadku dużych wzrostów cen jest inne niż podczas dużych ich spadków, szczególnie jeśli brać pod uwagę rynek kapitałowy. Ostatnie anomalie na rynkach finansowych są typowym przykładem tej sytuacji.

Niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie założeń teoretycznych wybranych modeli o warunkowej heteroskedastyczności. W następnej kolejności modele te zostaną zastosowane do przeprowadzenia analizy wewnątrzsesyjnej (*intraday*) zmienności wartości kontraktów terminowych notowanych na GPW w Warszawie. Dotyczą one kontraktów na USD i WIG20. Ostatni etap – ilustracja empiryczna zaprezentowanych modeli – polega na porównaniu ich skuteczności w zakresie analizy wariancji składnika resztowego oraz błędu prognoz. Wszystkie prezentowane w artykule przykłady otrzymano poprzez zastosowanie pakietu obliczeniowego GRETL.

2. Modele ARCH i GARCH jako szczególne modele z warunkową eteroskedastycznością

W odróżnieniu od modeli homoskedastycznych, w których wariancja elementu losowego jest stała w czasie, wariancja w modelach heteroskedastycznych zależy od momentu czasu. W modelu heteroskedastycznym – oprócz podstawowego modelu szeregu czasowego – są istotne modele średniej i wariancji warunkowych, jako parametrów realizacji procesu stochastycznego w momencie *t*, przy założeniu, że w momentach wcześniejszych realizacje te były znane. Zatem model taki [Tsay 2002] ma postać:

$$Y_t = f(X_t, \varepsilon_t),$$

gdzie: $f(X_t, \varepsilon_t) = g(X_{t-1}) + \sqrt{h(X_{t-1}} \cdot \varepsilon_t,$

$g(X_{t-1}) = \mu_t = E(Y_t / Y_{t-1}, ...)$ – średnia warunkowa,

$H(X_{t-1}) = Var(Y_t / Y_{t-1}, ...)$ – wariancja warunkowa,

ε_t – element losowy.

W dalszych rozważaniach wyjaśnienia dotyczące tych modeli ograniczymy do ceny p_t danego instrumentu finansowego w chwili *t*. W badaniu zmienności jako podstawowe założenie przyjęto, że szereg $\{p_t\}$ jest albo parami nieskorelowany, albo występuje w nim zależna korelacja seryjna. Najczęściej występuje sytuacja, gdy korelacja jest zależna – modele zmienności mają wtedy jak najlepiej uchwycić tę zależność. Stąd stosuje się średnią warunkową i wariancję warunkową, które mają następującą postać:

$$\pi_t = E(p_t | F_{t-1}) \text{ oraz } \sigma_t^2 = Var(\pi_t | F_{t-1}) = E[(\pi_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}], \quad (1)$$

gdzie: μ_t – średnia warunkowa,

σ_t^2 – wariancja warunkowa,

F_{t-1} – dane dostępne w chwili t – 1, najczęściej jest to funkcja lub funkcje opisujące przeszłe stopy zwrotu.

Jeśli zatem przyjąć, że r_t można przybliżyć stacjonarnym modelem klasy ARMA (model autoregresji i prostej średniej ruchomej) o nieujemnych, całkowitych parametrach p i q, to π_t i μ_t można wyrazić jako:

$$\pi_t = \mu_t + a_t, \ \mu_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \pi_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \vartheta_i a_{t-i}, \tag{2}$$

gdzie: π_t – cena instrumentu w chwili t,

μ_t – średnia logarytmiczna stopa zwrotu wynikająca z modelu ARMA,

a_t – efekt białego szumu – reszty modelu,

Φ_i, ϑ_i – parametry modelu.

Zachowując powyższe założenia, ze wzorów (1) i (2) otrzymujemy:

$$\sigma_t^2 = Var(\pi_t | F_{t-1}) = Var(a_t | F_{t-1}). \tag{3}$$

Model o warunkowej heteroskedastyczności sprowadza się zatem do opisania zmienności w czasie wariancji (odchylenia standardowego) reszt z modelu klasy ARMA, utożsamianych z efektem białego szumu.

Model ARCH

Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model – model autoregresji o warunkowej heteroskedastyczności – został przedstawiony przez Engle'a w 1982 roku. Opiera się na założeniach, że reszty z modelu (a_t) opisującego stopę zwrotu są warunkowo parami nieskorelowane. Ponadto zależność, która pozwala na stwierdzenie warunkowego braku korelacji seryjnej a_t, może zostać opisana funkcją kwadratową ich przeszłych wartości (tzw. wartości opóźnionych). Model ARCH(m) ogólnie można opisać następująco:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{t-i}^2, \tag{4}$$

gdzie: σ_t^2 – warunkowa wariancja korekt średniej stopy zwrotu,

ε_t – zmienna losowa o rozkładzie o średniej 0 i wariancji 1,

a_t – reszty z modelu ARMA,

α_0 – parametr wolny modelu, $\alpha_0 > 0$,
α_i – parametry modelu, $\alpha_i \geq 0$.

W praktyce przyjmuje się, że szereg $\{\varepsilon_t\}$ to szereg zmiennych o zestandaryzowanym rozkładzie normalnym lub zestandaryzowanym rozkładzie t-Studenta, ponieważ parametry α_i muszą mieć pewne ograniczenia w przedziale wartości (wariancja musi być nieujemna, czyli macierz współczynników α_i musi być nieujemnie określona oraz czwarty moment centralny dla a_t musi być skończony, aby można było zbadać ogon rozkładu). Rząd modelu, czyli wartość opóźnienia *m*, wyznaczany jest w oparciu o funkcję autokorelacji lub funkcję autokorelacji cząstkowej.

Bezwarunkowa wartość oczekiwana reszt z tego modelu wynosi zero, natomiast wariancję bezwarunkową można opisać wzorem:

$$Var(a_t) = E(a_t^2) = E[E(a_t^2 \middle| F_{t-1})] = E(\sum_{i=1}^{m} \alpha_0 + \alpha_i a_{t-i}^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i E(a_{t-i}^2). \quad (5)$$

Estymacji parametrów modelu ARCH dokonuje się najczęściej metodą największej wiarygodności lub warunkową metodą największej wiarygodności. W zależności od przyjętego założenia co do rozkładu badanej zmiennej maksymalizuje się funkcję postaci:

$$L(a_{m+1}, \ldots, a_T \middle| \alpha, a_1, \ldots, a_m) = -\sum_{t=m+1}^{T} [\frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2) + \frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}], \quad (6)$$

zakładając normalny rozkład reszt, natomiast dla rozkładu t-Studenta:

$$L(a_{m+1}, \ldots, a_T \middle| \alpha, a_1, \ldots, a_m) = -\sum_{t=m+1}^{T} [\frac{v+1}{2}\ln(1 + \frac{a_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}) + \frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2)], \quad (7)$$

gdzie: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_m^2 a_{t-m}^2$ – wyznaczana rekurencyjnie,
L – funkcja wiarygodności.

Pozostałe oznaczenia jak we wzorze (4).

Model GARCH

W 1986 Bollerslev (uczeń Engle'a) zaproponował rozszerzenie modelu ARCH – uogólniony model autoregresji o warunkowej heteroskedastyczności GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model). Zakładając, że badane stopy zwrotu opisujemy, tak jak w wypadku modelu ARCH, modelem ARMA, model GARCH(*m, s*) dla reszt (a_t) można opisać następująco:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t,\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{t-i} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{8}$$

gdzie: ε_t – zmienna losowa o rozkładzie o średniej 0 i wariancji 1,

$\alpha_0 > 0,\ \alpha_i \geq 0,\ \beta_j \geq 0,$

$(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j) < 1.$

Pozostałe oznaczenia jak w wzorze (4).

Oznaczając $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$, mamy $\sigma_t^2 = a_t^2 - \eta_t$ oraz $\sigma_{t-i}^2 = a_{t-i}^2 - \eta_{t-i}$ dla i = 0, 1, ..., s. Przy czym η_t jest martyngałem ze średnią i kowariancją równą zeru. Zatem model GARCH można również zapisać jako:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \eta_{t-j}. \tag{9}$$

Taki zapis odzwierciedla aplikację idei modelu ARMA dla a_t^2. Dla tego modelu bezwarunkowa średnia wynosi:

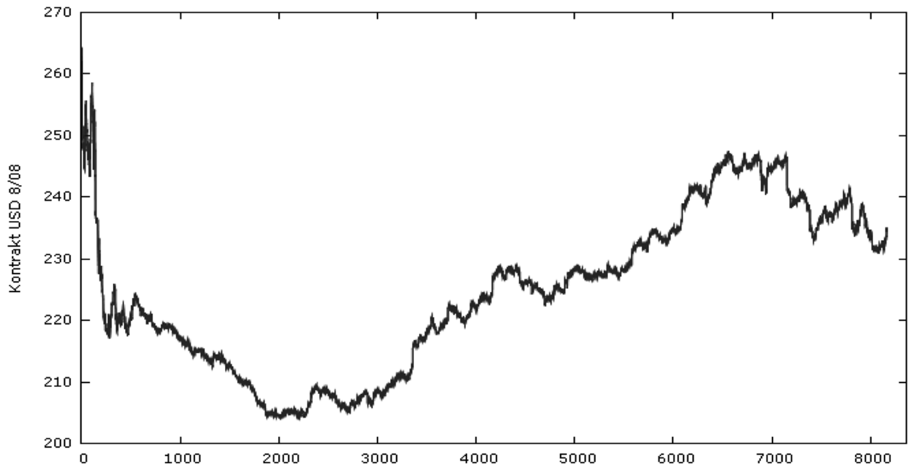
$$E(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i)}. \tag{10}$$

Ustalenia wartości parametrów m i s modelu dokonuje się najczęściej, stosując rozszerzoną funkcję autokorelacji zaproponowaną przez Tsaya i Tsiao w 1984 r. (nie będzie tutaj omawiana). Estymacja parametrów α i β modelu, podobnie jak dla modelu ARCH, dokonywana jest przy zastosowaniu metody największej wiarygodności dla funkcji takiej samej postaci, jaką użyto przy estymacji modelu ARCH.

Modele klasy GARCH były rozwijane przez ostatnich kilkanaście lat na różne sposoby i istnieje obecnie kilkanaście ich rozszerzeń, np. IGARCH, GARCH-M, EGARCH, które są z powodzeniem stosowane do modelowania wariancji reszt różnego rodzaju modeli ekonometrycznych. Ze względu na wysoki stopień skomplikowania teoretycznych założeń rozwinięć modelu GARCH – w niniejszym artykule nie zostaną one przedstawione.

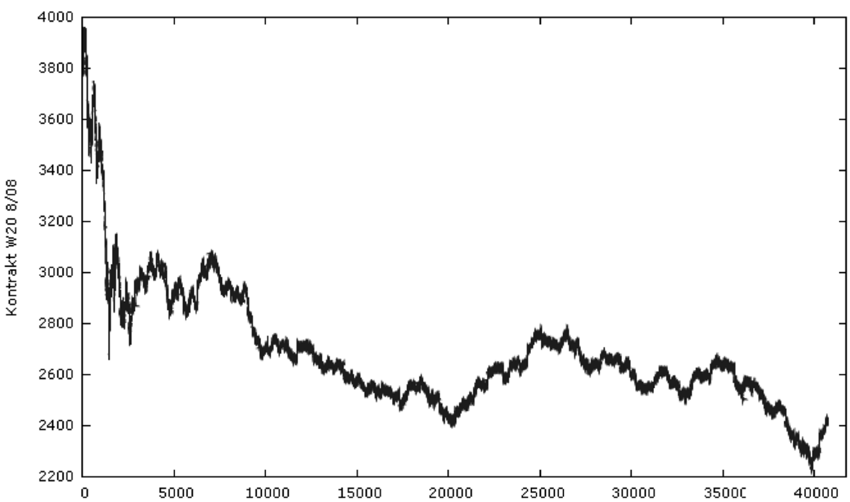
3. Przykłady empiryczne

Jak już wspomniano, możliwości wykorzystania opisanych powyżej modeli zostaną zaprezentowane w oparciu o wewnątrzsesyjne (czyli zaobserwowane dla każdej zmiany wartości w trakcie trwania sesji giełdowej) rzeczywiste wartości kontraktów terminowych. Analizie poddano szeregi czasowe dla kontraktów terminowych na USD (8167 obserwacji) oraz na WIG20 (40 769 obserwacji). Wykresy wartości tych kontraktów w czasie zostały przedstawione na rysunkach 1 i 2.



Rys. 1. Wykres wartości kontraktu terminowego na USD z datą wykonania 19.09.2008 r. – za okres od 15.10.2007 r. do 19.09.2008 r.

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wykres wartości kontraktu terminowego na WIG20 z datą wykonania 19.09.2008 r. – za okres od 15.10.2007 r. do 19.09.2008 r.

Źródło: opracowanie własne.

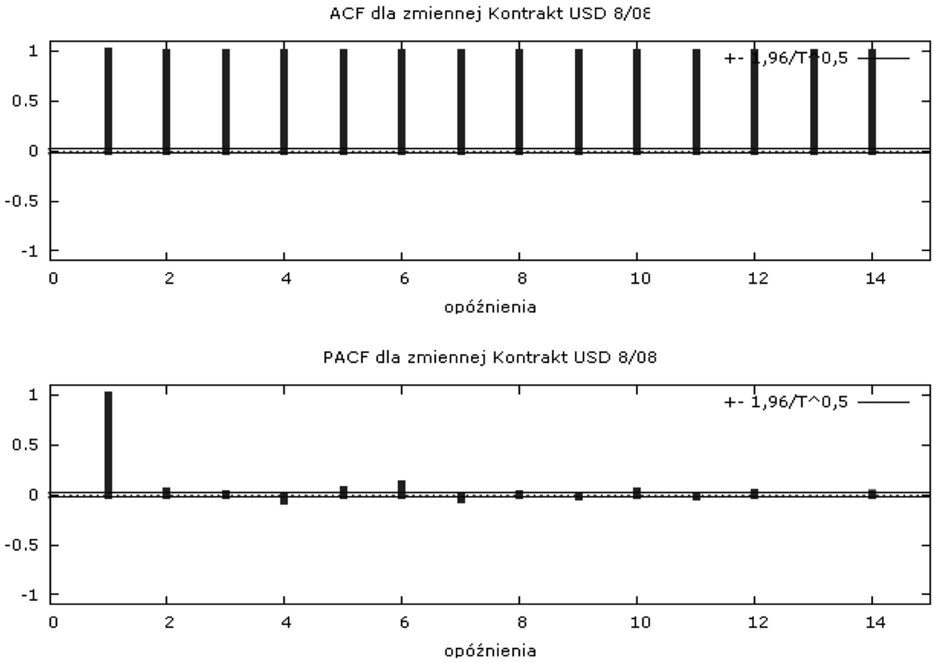
Do analizy zmienności kontraktu terminowego na USD zostały zastosowane reszty z modelu ARMA(1,0). Model dał w wyniku następujące szacunki parametrów:

$$FUSD_t = 0{,}0472998 + 0{,}999793 FUSD_{t-1}.$$

Do modelowania zmienności kontraktu terminowego na WIG20 zastosowano również model ARMA(1,0), którego postać jest następująca:

$$FW20_t = 0{,}665616 + 0{,}999742 FW20_{t-1}.$$

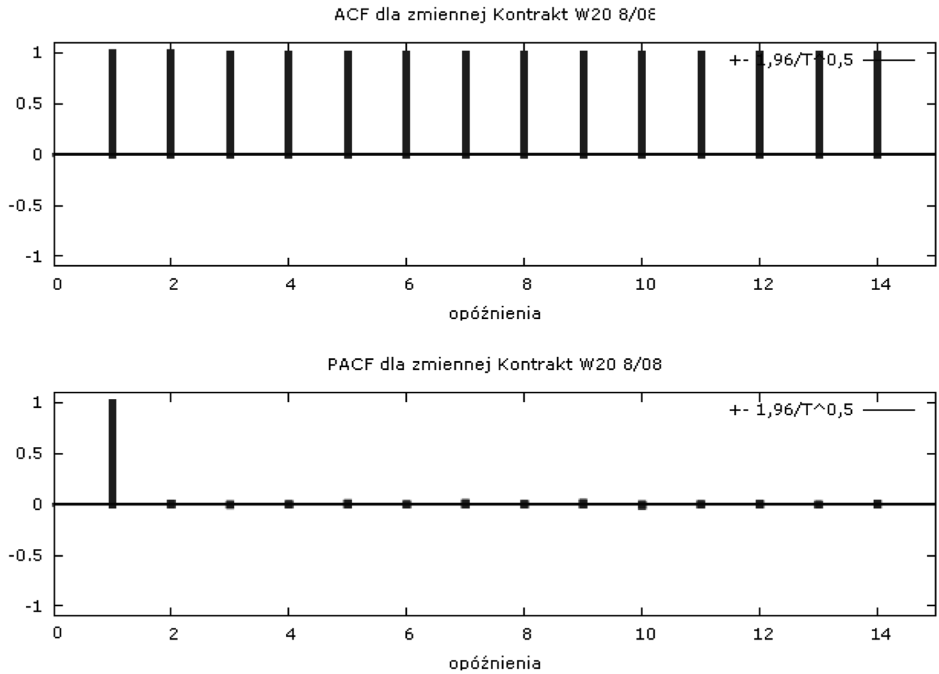
Szeregi czasowe wartości kontraktów terminowych z zaproponowanego okresu charakteryzują się występowaniem zjawiska autokorelacji składników losowych, co można zauważyć na korelogramach przedstawionych na rys. 3 i 4.



Rys. 3. Korelogram składników losowych dla kontraktu na USD w analizowanym okresie. ACF – funkcja autokorelacji, PACF – funkcja cząstkowej autokorelacji

Źródło: opracowanie własne.

Wartości funkcji ACF (autokorelacji) PACF (cząstkowej autokorelacji) dla kontraktu na USD wyraźnie wskazują, że rząd opóźnień dla rozważanych tutaj modeli badania zmienności powinien być znacznie większy niż 1. Dla kontraktu naWIG20 można wysunąć podobny wniosek, lecz nie jest on już tak ewidentny. Ponieważ



Rys. 4. Korelogram składników losowych dla kontraktu na WIG20 w analizowanym okresie. ACF – funkcja autokorelacji, PACF – funkcja cząstkowej autokorelacji

Źródło: opracowanie własne.

możliwości obliczeniowe pakietu GRETL dla modelu ARCH ograniczają się do zastosowania opóźnienia nie większego niż 2, tylko dla modelu GARCH zostały zastosowane wyższe rzędy opóźnień (jednak dla modelu GARCH zwiększenie opóźnień często skutkuje modelem o dużej współliniowości, co z kolei skutkuje odrzuceniem takiego modelu).

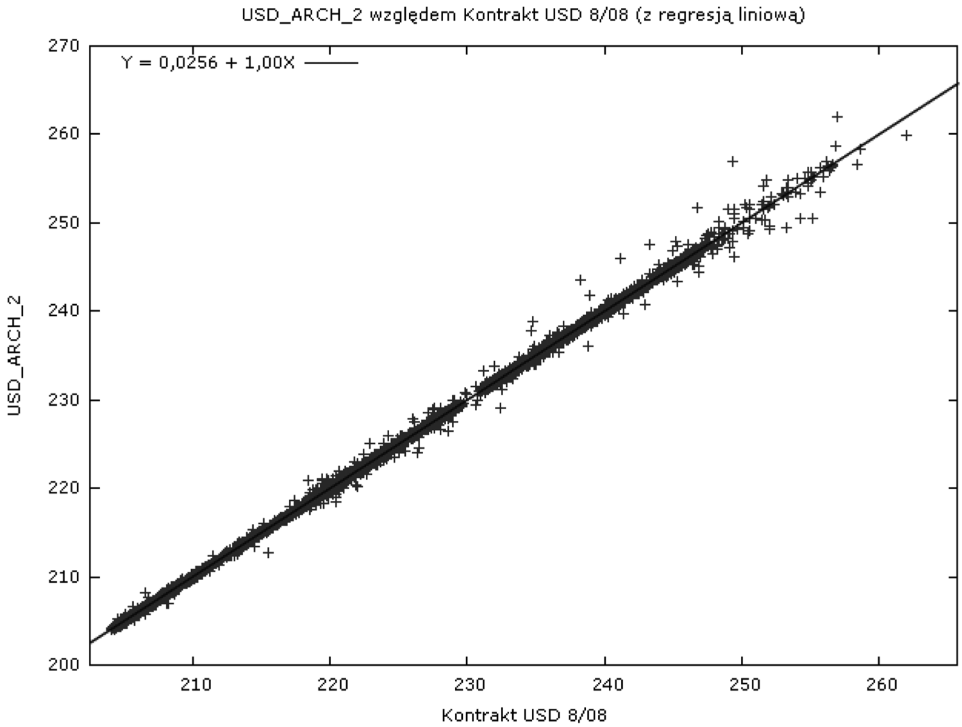
Wyniki estymacji modeli ARCH i GARCH dla kontraktu terminowego na USD nie pozwalają na jednoznaczne określenie, jakie wartości opóźnień dają najlepsze dopasowanie do danych rzeczywistych. Dla większości sprawdzanych modeli współczynniki R^2 wynosiły ponad 0,999, jednak zastosowanie kryterium Akaike (AIC) lub kryterium Bayesa, daje możliwość stwierdzenia, że do analizy zmienności kontraktu na USD należy zastosować modele ARCH(2) oraz GARCH(1,2). Model ARCH(2) zmienności kontraktu na USD po oszacowaniu parametrów ma postać:

$$\sigma_t^2 = 0{,}0661160 + 0{,}239576 a_{t-1}^2 + 0{,}116980 a_{t-2}^2.$$

Estymacja modelu GARCH(1,1) dla zmienności kontraktu na WIG20 dała w efekcie następujące wartości:

$$\sigma_t^2 = 0{,}00348166 + 0{,}299940 a_{t-1} + 0{,}000000000105 a_{t-1} + 0{,}700000 \sigma_{t-1}^2.$$

Wartości kontraktu terminowego na USD uzyskane z powyższych modeli względem wartości rzeczywistych w badanym okresie zostały przedstawione na rys. 5 i 6. W obydwu przypadkach można zaobserwować niewielkie odchylenia wyestymowanych wartości od wartości rzeczywistych. Oczywiście występują estymacje, które w znaczny sposób odbiegają od danych pochodzących z autentycznych notowań, jednak są one stosunkowo rzadkie.



Rys. 5. Wartości kontraktu na USD otrzymane z zastosowaniem modelu ARCH(2) do prognozowania wariancji względem rzeczywistych wartości kontraktu

Źródło: opracowanie własne.

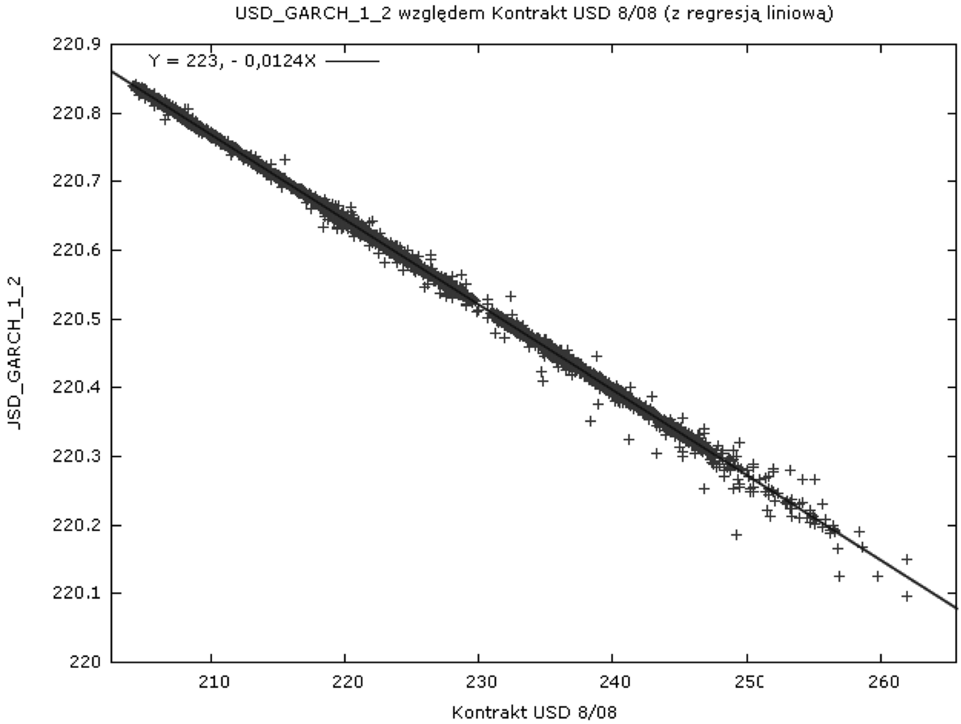
Analiza zmienności kontraktu na WIG20 przy zastosowaniu zaproponowanych modeli wykazała, że zarówno dla modelu ARCH, jak i GARCH użycie opóźnień o wartościach większych niż 1 pozwala na estymację parametrów przy wysokim poziomie istotności. Podobnie jak w wypadku badania zmienności kontraktu na USD, obydwa modele dla kontraktu na WIG20 wykazują bardzo wysokie wartości współczynnika R^2 (ponad 0,999). Jednakże najlepsze dopasowanie do danych obserwowanych w rzeczywistości, po zastosowaniu ponownie kryterium AIC oraz kryterium Bayesa, zostało osiągnięte dla modelu ARCH(2) oraz GARCH(1,1).

Model ARCH(2) zmienności kontraktu na WIG20 po oszacowaniu parametrów ma następującą postać:

$$\sigma_t^2 = 12{,}6062 + 0{,}0940014 a_{t-1}^2 + 0{,}134801\ a_{t-2}^2.$$

Estymacja modelu GARCH(1,1) dla zmienności kontraktu na WIG20 dała w efekcie model o parametrach:

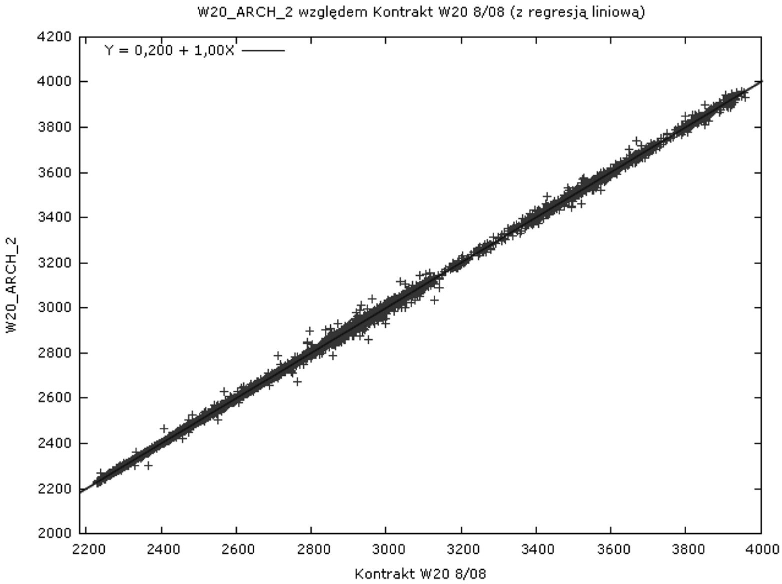
$$\sigma_t^2 = 0{,}0482125 + 0{,}0484425 a_{t-1} + 0{,}951558 \sigma_{t-1}^2.$$



Rys. 6. Wartości kontraktu na USD otrzymane z zastosowaniem modelu GARCH(1,2) do prognozowania wariancji względem rzeczywistych wartości kontraktu

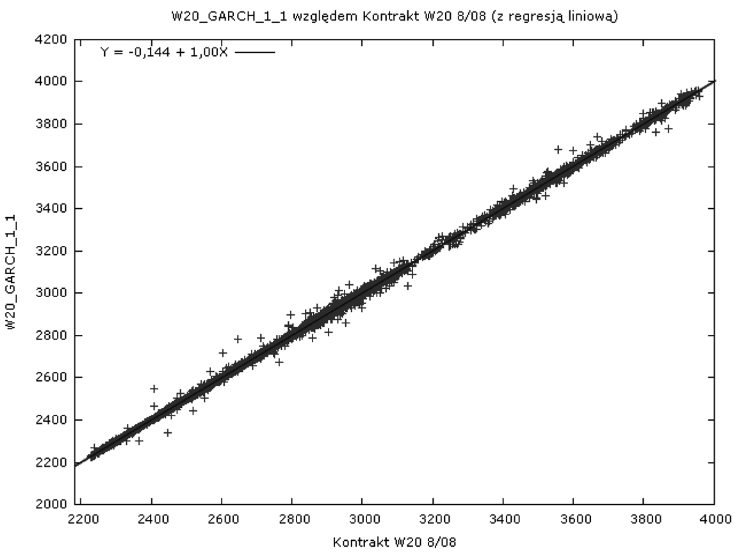
Źródło: opracowanie własne.

Wykresy wartości kontraktu terminowego na WIG20 uzyskane na podstawie obydwu badanych modeli w stosunku do wartości rzeczywistych zaobserwowanych w analizowanym okresie zostały przedstawione na rysunkach 7 i 8. Można na ich podstawie zauważyć, iż wartości otrzymane z zastosowaniem modelu ARCH(2)



Rys. 7. Wartości kontraktu na WIG20 otrzymane z zastosowaniem modelu ARCH(2) do prognozowania wariancji względem rzeczywistych wartości kontraktu

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 8. Wartości kontraktu na WIG20 otrzymane z zastosowaniem modelu GARCH(1,1) do prognozowania wariancji względem rzeczywistych wartości kontraktu

Źródło: opracowanie własne.

mają nieznacznie mniejsze odchylenia od rzeczywistych w porównaniu z modelem GARCH(1,1). Jednakże w obydwu przypadkach warto zaobserwować dobre dopasowanie wartości prognozowanych do zaobserwowanych w badanym okresie.

Prognozowanie zmienności obydwu kontraktów terminowych zaprezentowane w artykule przy zastosowaniu zaproponowanych modeli dało obiecujące wyniki. W obydwu przypadkach użyte modele dały bardzo dobre dopasowanie do danych rzeczywistych. Ponadto warto zauważyć, że dla obydwu kontraktów lepsze dopasowanie zostało uzyskane dla modeli klasy ARCH (z zastosowaniem kryterium Akaike i kryterium Bayesa).

4. Podsumowanie

Empiryczna analiza przeprowadzona w artykule wskazuje, że zastosowanie modeli zarówno klasy ARCH, jak i GARCH jest uzasadnione. W szczególności dotyczy to rozważanej tu zmienności cen instrumentów finansowych o dużej częstotliwości zmian. Uwzględniając wewnątrzsesyjne notowania kontraktów terminowych, uzyskano obiecujące wyniki. Wskazuje na to wręcz wzorcowe dopasowanie wartości modelowych do rzeczywistych wartości notowań. W analizowanym okresie dało się zauważyć niewielkie odchylenie od obserwowanych wartości. Dla danych empirycznych, będących podstawą estymacji zmienności, okazało się, że lepsze dopasowanie uzyskano na podstawie modelu ARCH. Nie jest to oczywiście ogólna prawidłowość. Analizując zjawiska ekonomiczne, szczególnie z rynku finansowego, należy testować modele na większej liczbie instrumentów kapitałowych, w szerszym i bardziej zróżnicowanym horyzoncie czasowym. Należy też zwrócić uwagę, że przeprowadzona w artykule analiza dotycząca zmienności umożliwia prognozowanie wariancji, co daje podstawy do predykcji i oceny przyszłego kształtowania kontraktów terminowych.

Literatura

Chow G.C., *Ekonometria*, PWN, Warszawa 1995.

Pollock D.S.G., *A Handbook of Time-Series Analysis, Signal Processing and Dynamics*, Academic Press, London 1999.

Tsay R.S., *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons Inc., New York 2002.

Welfe A., *Ekonometria. Metody i zastosowanie*, PWE, Warszawa 1998.

INTRADAY VOLATILITY ANALYSIS OF FUTURES CONTRACTS USING ARCH/GARCH MODELS

Summary: The first part of the paper depicts theoretical bases of chosen conditional-heteroscedascity models (ARCH and GARCH), which, recently, have been widely used in time-

series analysis on financial markets. These models base on an assumption that volatility of economic-like variables is dependent on time. Next models have been used to analyze intra-day volatility of future contracts on USD and WIG20 with expiration date on 19.09.2008 for sessions from 15.10.2007 to 19.09.2008. Empirical example presented here concluded an assumption that these models can be a very useful tool in volatility analysis of financial markets, especially variables that have high frequency of change.