Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 38
Ekonometria 24 2009

Konstancja Poradowska
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

PRAWO PROPAGACJI NIEPEWNOŚCI W OCENIE DOPUSZCZALNOŚCI PROGNOZ

Streszczenie: Różne rodzaje i interpretacje stosowanych mierników dopuszczalności prognoz utrudniają ich porównywanie, co może negatywnie wpływać na przebieg procesu prognostycznego. Pojawia się zatem potrzeba znalezienia wspólnego dla różnych metod prognostycznych, „uniwersalnego" miernika dopuszczalności. Fakt ten był inspiracją do podjęcia tematyki prezentowanej w niniejszym artykule. Przedstawiono tu propozycje dotyczące sposobu wyznaczania odchylenia standardowego błędu prognozy z wykorzystaniem statystycznego prawa propagacji niepewności. Pozwoliło to na wskazanie miernika dopuszczalności prognoz nieobciążonych, możliwego do wyznaczenia – dla różnych klas modeli prognostycznych – standardowej niepewności prognozy, stanowiącej pewnego rodzaju uogólnienie znanego błędu *ex ante*.

Słowa kluczowe: prognoza dopuszczalna, błąd *ex ante*.

1. Wstęp

Prognoza jest z definicji sądem niepewnym, wartość bowiem zmiennej prognozowanej, wynikająca z prognozy, może się różnić od jej wartości rzeczywistej. Prognozą dopuszczalną nazywamy prognozę, której stopień niepewności jest akceptowany przez odbiorcę. Stopień niepewności prognozy można określić za pomocą wielu mierników. Możliwość użycia danego miernika jest uzależniona od stosowanej metody prognozowania. Jednak różne rodzaje mierników dopuszczalności pociągają za sobą różnice w ich interpretacji, co stwarza poważny, choć czasem nie dostrzegany problem porównywania ich wartości z określoną przez odbiorcę wartością progową. Dlatego pojawia się potrzeba opracowania jednego, wspólnego dla różnych metod prognostycznych, miernika dopuszczalności prognoz. Fakt ten był inspiracją do podjęcia tematyki prezentowanej w niniejszej publikacji.

Za najpopularniejszy miernik dopuszczalności prognoz (nieobciążonych) można uznać estymator odchylenia standardowego błędu prognozy, które to odchylenie, przy założeniu, że prognoza jest wartością ustaloną, jest równe odchyleniu standardowemu $\sigma(Y_t)$ zmiennej prognozowanej w prognozowanym okresie T. Tak określony miernik można utożsamiać ze znanym błędem prognozy *ex ante* (zob. np. [Dittmann 2004, s. 129]). Jednak jako że określenie „błąd *ex ante*" jest używane tylko w odniesieniu do prognoz wyznaczanych z modeli oszacowanych KMNK i również sposób wyznaczania tego błędu jest zdeterminowany przez założenia KMNK, estymator odchylenia standardowego błędu prognozy będziemy tu bardziej ogólnie nazywać **standardową niepewnością prognozy** i oznaczać $u(y_T)$. Przedstawienie propozycji dotyczących sposobu wyznaczania takiego miernika jest głównym celem artykułu.

2. Prawo propagacji niepewności w ocenie standardowej niepewności prognozy

Często używanymi modelami prognostycznymi w praktyce prognozowania gospodarczego są modele formalne, które można zapisać w ogólnej postaci:

$$Y_t = f(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k; X_{1t}, X_{2t}, ..., X_{kt}; \xi_t), \tag{1}$$

gdzie: Y_t – zmienna prognozowana,
$\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k$, – nieznane prawdziwe wartości parametrów modelu,
$X_{1t}, X_{2t}, ..., X_{kt}$, – zmienne objaśniające modelu,
ξ_t – addytywny (wówczas $E(\xi_t) = 0$) lub multiplikatywny (wówczas $E(\xi_t) = 1$) składnik losowy modelu,
f – zależność funkcyjna wiążąca zmienne objaśniające, parametry modelu i składnik losowy.

Zgodnie z regułą prognozy nieobciążonej, prognozą na okres T jest wówczas wartość oczekiwana zmiennej prognozowanej w okresie T, czyli:

$$y_T^* = E(Y_T) = f(a_0, a_1, ..., a_k; x_{1T}, x_{2T}, ..., x_{kT}), \tag{2}$$

gdzie: α_1, $i = 0, 1, ..., k$ – oceny parametrów modelu, otrzymane metodami statystycznymi lub określone na podstawie sądów eksperta (ekspertów)[1],
x_{iT}, $i = 1, 2, ..., k$ – wartości zmiennych objaśniających modelu w okresie T, przy czym mogą to być wartości rzeczywiste (jeżeli są znane) lub prognozy punktowe, wyznaczone jako wartości oczekiwane $E(X_{iT})$.

Standardową niepewność prognozy $u(y_T)$ można wówczas ocenić, korzystając z tzw. prawa propagacji niepewności (zob. np. [Brandt 1998; *Guide to the Expression*… 1995; Papoulis 1972]). Aby prawo to można było zastosować wprost, wygodnie jest zapisać równanie (2) w następującej formie:

[1] Metoda statystyczna, wykorzystywana do oszacowania wartości α_i (np. klasyczna metoda najmniejszych kwadratów), jest zwykle tak dobrana, aby α_i było nieobciążonym (ewentualnie asymptotycznie nieobciążonym) estymatorem parametru α_i, czyli $E(\alpha_i) = \alpha_i$. Jeżeli α_i jest określane na podstawie opinii eksperta, założenie o nieobciążoności estymatora należy przyjąć *a priori*.

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_K), \tag{3}$$

gdzie: Y – zmienna prognozowana, X_i, $i = 1, 2, ..., K$ – wszystkie wielkości występujące w modelu, które są obarczone niepewnością, tzn. których prawdziwe wartości w okresie prognozowanym nie są znane (zarówno zmienne objaśniające, parametry, jak i składnik losowy, jeżeli jego występowanie zostało uwzględnione w modelu).

Zmienne $(X_1, X_2, ..., X_K)$ nazwijmy **wielkościami wejściowymi**[2]. Prognoza (2) jest wówczas postaci:

$$y_T^* = E(Y) = f(x_1, x_2, ..., x_K), \tag{4}$$

gdzie x_i to ocena i-tej wielkości wejściowej w prognozowanym okresie T.

Natomiast do oceny standardowej niepewności prognozy można wykorzystać następujące formuły[3]:

1) gdy wielkości $X_1, X_2, ..., X_K$ są wzajemnie nieskorelowane lub korelacje pomiędzy nimi można uznać za nieistotne[4]:

2)
$$u(y_T) = \sqrt{\sum_{i=1}^{K}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2}, \tag{5}$$

3) jeżeli niektóre pary wielkości X_i, X_j są wzajemnie skorelowane:

$$u(y_T) = \sqrt{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{K}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j)}, \tag{6}$$

gdzie: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – pochodna cząstkowa funkcji f względem X_i liczona w punkcie $(X_1, X_2, ..., X_K) = (x_1, x_2, ..., x_K)$,

$u(x_i)$ – standardowa niepewność oceny (prognozy) wielkości wejściowej x_i,

$u(x_i, x_j)$ – kowariancja związana z ocenami x_i i x_j.

Zastępując kowariancje w wyrażeniu (6) „wygodniejszymi” w interpretacji współczynnikami korelacji $r(x_i, x_j)$, można zapisać:

---

[2] Zamiennie będziemy używać określeń „zmienne wejściowe” i „wielkości wejściowe”.

[3] Równania (4)-(6) są konsekwencją rozwinięcia funkcji $f(X_1, X_2, ..., X_K)$ w szereg Taylora w punkcie $(X_1, X_2, ..., X_K) = (x_1, x_2, ..., x_K)$, z zachowaniem wyrazów pierwszego rzędu. Ścisła równość zachodzi tu jedynie w przypadku liniowej postaci funkcji f, jednakże można je stosować z dobrym przybliżeniem dla nieliniowych funkcji f, w otoczeniu punktu $(X_1, X_2, ..., X_K) = (x_1, x_2, ..., x_K)$, mającego rozmiar odchylenia standardowego [Brandt 1998, s. 691].

[4] Należy podkreślić, że chodzi tu o wzajemną korelację zmiennych w prognozowanym okresie T.

$$u(y_T)=\sqrt{\sum_{i=1}^{K}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2+2\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}r(x_i,x_j)u(x_i)u(x_j)}. \tag{7}$$

Zauważmy, że prawo propagacji niepewności, opisane przez wzory (5)-(7), zastosowane przy założeniach klasycznej metody najmniejszych kwadratów, a w szczególności przy założeniu o nielosowości zmiennych objaśniających modelu, pozwala na otrzymanie znanej formuły błędu prognozy *ex ante*. Często jednak zmienne objaśniające są generowane przez pewien mechanizm losowy, a ich przyszłe wartości, które należy podstawić do modelu prognostycznego, nie są znane. Problem ten można rozwiązać poprzez ustalenie interesującej przyszłej wartości zmiennej X_{iT}:

- na poziomie wartości oczekiwanej $E(X_{iT})$ rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej X_{iT}, jeżeli rozkład ten jest znany *a priori* lub oszacowany z dobrym rzędem dokładności,
- poprzez ekstrapolację zaobserwowanego trendu zmiennej X_{iT},
- na podstawie sądów ekspertów [Pawłowski 1982, s. 128-129].

W praktyce najczęściej wykorzystuje się dwie ostatnie propozycje, przy czym określone przez ekspertów lub wyznaczone na podstawie trendów wartości zmiennych objaśniających modelu traktuje się jako dokładnie znane. Można wykazać, że takie „zignorowanie” niepewności przyszłych wartości zmiennych objaśniających zaniża ocenę odchylenia standardowego błędu prognozy, a tym samym powoduje niedoszacowanie stopnia niepewności prognozy (zob. [Poradowska 2006]).

Wykorzystując prawo propagacji niepewności, można uwzględnić wpływ nieznajomości dokładnych wartości zmiennych objaśniających modelu prognostycznego (1) na stopień niepewności prognozy y_T^*. Należy w tym celu dla każdej z tych zmiennych oszacować dodatkowo odchylenie standardowe, czyli standardową niepewność $u(x_{iT})$. Dla wybranej losowej zmiennej objaśniającej X_{iT} ocenę jej wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego, w zależności od rodzaju posiadanych informacji o możliwej zmienności[5] tej zmiennej, można przykładowo otrzymać:

- jako wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe, wyznaczone na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej X_{iT}, przy czym postać i parametry tego rozkładu mogą zostać ocenione na podstawie informacji z przeszłości[6] lub przyjęte *a priori* w oparciu o intuicję i wiedzę prognosty lub eksperta,

---

[5] Należy zaznaczyć, że chodzi tu o możliwą zmienność danej zmiennej objaśniającej w pojedynczym prognozowanym okresie T.

[6] Gdy szereg czasowy zmiennej X_i jest stacjonarny, można zestawić obserwacje w postaci szeregu rozdzielczego, który da oceny prawdopodobieństw wystąpienia wartości zmiennej X_{iT}, należących do wyróżnionych przedziałów. Ocenę dystrybuanty rozkładu otrzymamy, utworzywszy na podstawie szeregu rozdzielczego szereg o częstościach skumulowanych. Postępowanie takie można przeprowadzić również dla szeregu niestacjonarnego, jeżeli można sprowadzić go do stacjonarności (np. poprzez eliminację trendu). Należy wówczas otrzymaną dystrybuantę pozaczasowego rozkładu odpowiednio uaktualnić na okres T [Pawłowski 1982, s. 146-152].

- wyznaczając prognozę zmiennej X_i na okres T poprzez ekstrapolację formalnego modelu prognostycznego (np. modelu trendu) i oceniając standardową niepewność tej prognozy (np. jako błąd *ex ante*),
- na podstawie sądów ekspertów o możliwych wartościach zmiennej X_{iT}, np. jako średnią arytmetyczną podanych przez ekspertów przyszłych wartości zmiennej i odchylenie standardowe tej średniej.

3. Problem korelacji zmiennych objaśniających modelu

Dodatkowy problem przy ocenie standardowej niepewności prognozy stanowi ewentualna korelacja pomiędzy wielkościami wejściowymi, w szczególności – pomiędzy zmiennymi objaśniającymi uznawanymi za losowe. W zależności od kierunku skorelowanie wielkości wejściowych może zarówno podwyższać, jak i obniżać standardową niepewność prognozy. Gdy wyznaczenie kowariancji (współczynników korelacji) jest niemożliwe lub prowadzi do skomplikowanych obliczeń, przydatna może okazać się ocena ekstremalnych wartości (minimalnej i maksymalnej), jakie może przyjąć niepewność standardowa $u(y_T)$.

Jeżeli przez $\underline{\underline{u}}(y_T)$ oznaczymy wartość minimalną niepewności standardowej $u(y_T)$, a przez $\overline{\overline{u}}(y_T)$– wartość maksymalną niepewności standardowej $u(y_T)$, wówczas przy stałych wartościach standardowych niepewności wielkości wejściowych $u(x_i)$ spełniona jest nierówność:

$$\underline{\underline{u}}(y_T) \leq u(y_T) \leq \overline{\overline{u}}(y_T). \tag{8}$$

Do oceny ekstremalnych wartości $\overline{\overline{u}}(y_T)$ i $\underline{\underline{u}}(y_T)$ można zaproponować pewien sposób postępowania. Wymaga on określenia dla każdej pary skorelowanych zmiennych (X_i, X_j) – dzięki własnej intuicji, wykorzystaniu doświadczenia oraz ogólnej znajomości zjawisk opisanych przez te zmienne – czy korelacja występująca pomiędzy nimi jest dodatnia, czy ujemna. Jeżeli znane są znaki współczynników korelacji pomiędzy parami zmiennych X_i i X_j w okresie prognozy, wartości $\overline{\overline{u}}(y_T)$ i $\underline{\underline{u}}(y_T)$ wyznacza się ze wzoru (7), przyjmując wówczas dla konkretnej pary uznanych za skorelowane zmiennych X_i i X_j maksymalną lub minimalną wartość współczynnika korelacji o danym znaku[7], w zależności od iloczynu pochodnych cząstkowych względem x_i i x_j – $\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Schemat takiego postępowania przedstawiono poniżej.

[7] Oczywiście dla wszystkich par zmiennych wejściowych, których wzajemne korelacje w okresie prognozy można uznać za nieistotne, odpowiednie współczynniki korelacji we wzorze (7) należy zastąpić zerami.

Ocena niepewności minimalnej i maksymalnej

1. Na podstawie wiedzy dotyczącej prognozowanego zjawiska określamy znaki współczynników korelacji pomiędzy parami zmiennych X_i i X_j (jeżeli brak podstaw do uznania ich za nieskorelowane), występujące we wzorze (7).

2. Po wyznaczeniu pochodnych cząstkowych funkcji f określamy znaki iloczynów $\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

3. Obliczamy $\overline{\overline{u}}(y_T)$ i $\underline{\underline{u}}(y_T)$ według wzoru (7), podstawiając w miejsce kolejnych $r(x_i, x_j)$ wartości odczytane z tab. 1. i tab. 2.

Jeżeli znane są wartości $\underline{\underline{u}}(y_T)$ oraz $\overline{\overline{u}}(y_T)$, a u^* to przyjęta w kryterium dopuszczalności prognozy wartość progowa dla miernika $u(y_T)$, wówczas:

a) jeżeli $u^* \leq \underline{\underline{u}}(y_T)$, oceniana prognoza y_T^* jest niedopuszczalna,

b) jeżeli $u^* \geq \underline{\underline{u}}(y_T)$, oceniana prognoza y_T^* jest dopuszczalna.

Gdy natomiast zajdzie nierówność $\underline{\underline{u}}(y_T) < u^* < \overline{\overline{u}}(y_T)$, prezentowane postępowanie nie rozstrzyga jednoznacznie problemu dopuszczalności prognozy y_T^*. Jeżeli w takiej sytuacji nie jest możliwa bardziej dokładna ocena korelacji pomiędzy zmiennymi wejściowymi, zaklasyfikowanie ocenianej prognozy jako dopuszczalnej bądź niedopuszczalnej może zależeć od celu jej budowy oraz od położenia wartości progowej w przedziale określonym przez nierówność (8).

Tabela 1. Wartości współczynników korelacji dla $\overline{\overline{u}}(y_T)$

Iloczyn $\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ \ Współczynnik korelacji $r(x_i, x_j)$	Dodatni	Ujemny
Dodatni	1	0
Ujemny	0	–1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Wartości współczynników korelacji dla $\underset{=}{u}(y_T)$

Iloczyn $\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ \ Współczynnik korelacji $r(x_i, x_j)$	Dodatni	Ujemny
Dodatni	0	–1
Ujemny	1	0

Źródło: opracowanie własne.

4. Budżet niepewności

Stosowanie prawa propagacji niepewności w ocenie dopuszczalności prognoz częstokroć wiąże się z wykonywaniem długich i skomplikowanych obliczeń. Dlatego też, w celu zapewnienia przejrzystości, można zaproponować przedstawienie danych, istotnych dla całej analizy niepewności, w formie tabeli zwanej **budżetem niepewności** (zob. [*Wyrażanie niepewności*... 2001, s. 13]). W takiej tabeli powinny zostać wymienione wszystkie wielkości wejściowe X_i oraz dla każdej z nich przynajmniej: ocena (prognoza) x_i, związana z nią niepewność standardowa $u(x_i)$, tzw. współczynnik wrażliwości, czyli pochodna $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oraz iloczyn $\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)$, czyli udział w niepewności zmiennej Y. Wszystkie wielkości powinny być podawane z odpowiadającymi im jednostkami. Przykład takiego budżetu niepewności dla nieskorelowanych wielkości wejściowych przedstawiono w tab. 3. Znajdująca się w dolnym rogu tabeli niepewność standardowa $u(y)$ jest sumą geometryczną wszystkich składowych niepewności znajdujących się w prawej, skrajnej kolumnie tabeli. Szare pola pozostają puste.

Analiza zaprezentowanych w ten sposób wyników obliczeń dostarcza cennych wniosków jakościowych:

– porównanie współczynników wrażliwości pozwala określić, na zmiany której z wielkości wejściowych zmienna prognozowana Y reaguje najsilniej (jest najbardziej „wrażliwa”),

Tabela 3. Schemat przykładowego budżetu niepewności

Wielkość wejściowa X_i	Ocena wielkości x_i	Niepewność standardowa $u(x_i)$	Współczynnik wrażliwości $\frac{\partial f}{\partial x_i}$	Udział w $u(y)$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)$
X_1	x_1	$u(x_1)$	$\frac{\partial f}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f}{\partial x_1}u(x_1)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	$\frac{\partial f}{\partial x_2}$	$\frac{\partial f}{\partial x_2}u(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_K	x_K	$u(x_K)$	$\frac{\partial f}{\partial x_K}$	$\frac{\partial f}{\partial x_K}u(x_K)$
Y	y			$u(y)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [*Wyrażanie niepewności*... 2001, s. 14].

– porównanie udziałów wielkości wejściowych w niepewności standardowej zmiennej Y pozwala wskazać, niepewność której ze zmiennych X_i daje największy przyczynek do niepewności zmiennej Y, a tym samym dostarcza informacji, jak najefektywniej zmniejszyć niepewność standardową Y, czyli poprawić dokładność prognozy – najlepiej dokonać tego poprzez zwiększenie dokładności oszacowania (zmniejszenie niepewności) tej wielkości, dla której wartość bezwzględna iloczynu $\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)$ jest największa.

5. Przykład

W tabeli 4 przedstawiono dane z ostatnich 12 miesięcy zebrane w pewnym przedsiębiorstwie, dotyczące: jednostkowego kosztu produkcji Y_t (w zł/szt.), wielkości produkcji X_{1i} (w tys. szt.), wskaźnika przestojów maszyn X_{2i} (w %) obliczonego jako stosunek łącznego czasu przestojów do nominalnego czasu pracy oraz frakcji „braków" X_{3i} (w %), czyli udziału w wielkości produkcji elementów wadliwych.

Tabela 4. Dane liczbowe do przykładu

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	100	100	98,50	98	97	98	97	97,50	96,50	96	96	97
x_{1t}	74,1	82,7	89,1	86,0	99,7	93,5	93,4	90,0	102,8	95,3	97,3	85,6
x_{2t}	4,0	3,2	3,0	2,3	2,5	1,8	2,2	1,7	2,1	1,0	1,8	0,6
x_{3t}	0,06	0,08	0,05	0,08	0,04	0,07	0,05	0,07	0,04	0,02	0,01	0,03

Źródło: dane umowne.

Na podstawie tych danych oszacowano liniowy model ekonometryczny postaci[8]:

$$\hat{y}_t = 102,64 - 0,08x_{1t} + 0,61x_{2t} + 16,77x_{3t}.$$

Odchylenie standardowe reszt modelu s wyniosło 0,44 (zł/szt.), a macierz wariancji i kowariancji parametrów modelu była następująca:

$$D^2(a) = \begin{bmatrix} 4,5026 & -0,0426 & -0,1428 & -6,1362 \\ -0,0426 & 0,0004 & 0,0011 & 0,0504 \\ -0,1428 & 0,0011 & 0,0294 & -0,3732 \\ -6,1362 & 0,0504 & -0,3732 & 47,2938 \end{bmatrix}.$$

Poprzez ekstrapolację zbudowanego modelu wyznaczamy prognozy punktowe jednostkowego kosztu produkcji na dwa kolejne miesiące, tj. dla T = 13, 14. Jako znane wartości zmiennej objaśniającej X_1 w prognozowanych okresach przyjmiemy planowane wielkości produkcji, wynoszące: $x_{1,13}$ = 85 tys. szt., $x_{1,13}$ = 90 tys. szt. Wartości pozostałych zmiennych objaśniających, występujących w modelu prognostycznym, zastąpimy ich prognozami. Prognozy zmiennej $X_2(x^*_{2,13}, x^*_{2,14})$ wyznaczymy na podstawie ekstrapolacji modelu trendu tej zmiennej (oszacowanego KMNK): $\hat{x}_{2t} = 4,08 - 1,14\ln(t)$. Odchylenie standardowe reszt oszacowanego modelu trendu wyniosło 0,38 punktu procentowego, a macierz wariancji i kowariancji ocen parametrów jest następująca:

[8] Podobny przykład modelu regresji liniowej dla jednostkowego kosztu produkcji został zamieszczony w pracy [Zeliaś, Pawełek, Wanat 2003, s. 203].

$$D^2(a) = \begin{bmatrix} 0,0749 & -0,0378 \\ -0,0378 & 0,0227 \end{bmatrix}.$$

Prognozy punktowe zatem wynoszą: $x^*_{2,13} = 1,1\%$, $x^*_{2,14} = 1,0\%$.

Prognozy zmiennej $X_3 (x^*_{3,13}, x^*_{3,14})$ wyznaczymy na podstawie następującej opinii eksperta: Dla każdego z prognozowanych okresów (T = 13,14) odsetek „braków" wyniesie co najwyżej 0,1%. Opinię eksperta, dotyczącą wartości zmiennej X_1 w okresach T = 13, 14, zapiszemy formalnie jako: $x_{3,13}, x_{3,14} \in [0\%; 0,1\%]$. Nie posiadając dodatkowych informacji o możliwym odsetku „braków" w okresach prognozy, przyjmujemy środek przedziału [0; 0,1] za prognozy punktowe zmiennej X_3, czyli: $x^*_{3,13} = 0,05\%$, $x^*_{3,14} = 0,05\%$.

Wobec powyższego prognozy jednostkowego kosztu produkcji na okresy T = 13, 14 to odpowiednio: $y^*_{13} = 97,35$ zł/szt., $y^*_{14} = 96,89$ zł/szt.

Oceńmy standardowe niepewności prognoz jednostkowego kosztu produkcji y^*_{13}, y^*_{14}, uwzględniając losowość zmiennych objaśniających: wskaźnika przestojów maszyn X_2 i frakcji „braków" X_3. Aby tego dokonać, należy znać standardowe niepewności prognoz tych zmiennych.

Standardowe niepewności prognoz zmiennej X_2, czyli $u(x_{2,13})$ i $u(x_{2,14})$, ocenimy na podstawie wzoru (6), który przybiera tu następującą postać:

$$u(x_{2T}) = \sqrt{V(a_0) + [\ln(T)]^2 V(a_1) + 2\ln(T)\operatorname{cov}(a_o, a_1) + s^2}.$$

Podstawiwszy do wzoru odpowiednie elementy macierzy wariancji i kowariancji ocen parametrów oraz odchylenie standardowe reszt modelu, mamy:

$$u(x_{2,13}) = \sqrt{0,0749 + [\ln(13)]^2 \times 0,0227 - 2\ln(13) \times 0,0378 + 0,38^2} = 0,41\%,$$

$$u(x_{2,14}) = \sqrt{0,0749 + [\ln(14)]^2 \times 0,0227 - 2\ln(14) \times 0,0378 + 0,38^2} = 0,42\%.$$

Za standardowe niepewności prognoz zmiennej X_3, czyli $u(x_{3,13})$ i $u(x_{3,14})$, przyjmiemy odchylenia standardowe rozkładu prawdopodobieństwa subiektywnego tej zmiennej w okresie prognozy. Nie posiadając dodatkowych informacji o możliwym kształtowaniu się zmiennych $X_{3,13}$ i $X_{3,14}$ w określonym przez eksperta przedziale [0; 0,1], zakładamy jednostajny rozkład tych zmiennych, którego odchylenie standardowe to:

$$u(x_{3,13}) = u(x_{3,14}) = \sqrt{\frac{0,1^2}{12}} = 0,03\ [\%].$$

Wskaźnik przestojów maszyn i frakcję „braków" w okresach prognozy możemy uznać za nieskorelowane zmienne losowe, więc standardowe niepewności prognoz y^*_{13} i y^*_{14} ocenimy na podstawie wzoru (5). Po podstawieniu odpowiednich wartości mamy:

$$u(y_T) = \{4{,}5026 + 0{,}0004x_{1T}^2 + 0{,}0294(x_{2T}^*)^2 + 47{,}2938(x_{3T}^*)^2 + \\ + 2[-0{,}0426x_{1T} - 0{,}1428x_{2T}^* - 6{,}1362x_{3T}^* + 0{,}0011x_{1T}x_{2T}^* + \\ + 0{,}0504x_{1T}x_{3T}^* - 0{,}3732x_{2T}^*x_{3T}^*] + 0{,}44^2 + [0{,}61u(x_{2T})]^2 + [16{,}77u(x_{3T})]^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Stąd standardowe niepewności prognoz y_{13}^* i y_{14}^* wynoszą: $u(y_{13})$ = 0,76 zł/szt., $u(y_{14})$ = 0,75 zł/szt. Stanowią one odpowiednio 0,78% i 0,77% prognozowanych wartości[9].

6. Podsumowanie

W artykule zdefiniowano standardową niepewność prognozy y_T^*. jako ocenę odchylenia standardowego $\sigma(Y_T)$ zmiennej prognozowanej w okresie prognozy Y_T, otrzymaną zgodnie z prawem propagacji niepewności. Standardową niepewność można traktować jako uogólnienie znanego błędu prognozy *ex ante*, powszechnie stosowanego w ocenie prognoz zbudowanych na podstawie klasycznych modeli regresji liniowej.

Zakres stosowalności standardowej niepewności prognozy nie ogranicza się do omówionych w artykule. Znajomość odchyleń standardowych zmiennych losowych występujących w modelu prognostycznym – formalnym lub myślowym – oraz odpowiednie zastosowanie prawa propagacji niepewności pozwalają ocenić w ten sposób dopuszczalność prognoz nieobciążonych, zbudowanych na podstawie różnych klas modeli prognostycznych:

– modeli formalnych I rodzaju, czyli takich, które opisują prawidłowości zachodzące w prognozowanym zjawisku lub pomiędzy prognozowanym zjawiskiem a innymi zjawiskami w przeszłości i których parametry są szacowane metodami statystycznymi (do modeli takich należą m.in. modele regresji liniowej),
– modeli nieformalnych (myślowych), istniejących jedynie w umyśle eksperta formułującego prognozę i – w przeciwieństwie do modeli formalnych – nie dających się przedstawić w sformalizowanym języku matematyki,
– modeli formalnych II rodzaju, czyli takich, które opisują prawidłowości zachodzące w prognozowanym zjawisku lub pomiędzy prognozowanym zjawiskiem a innymi zjawiskami, zakładane przez prognostę, i których parametry są określane na podstawie ocen ekspertów.

Zarówno standardowa niepewność prognozy $u(y_{14})$, jak i błąd *ex ante* są z definicji estymatorami tego samego odchylenia standardowego. Jednak sposób szacowania standardowej niepewności prognozy, w odróżnieniu od błędu *ex ante*, nie musi

[9] Bezwzględne błędy *ex ante*, szacowane przy założeniach KMNK, w przypadku rozważanych prognoz wynoszą odpowiednio 0,52 zł/szt. i 0,50 zł/szt. i stanowią 0,53% oraz 0,51% prognozowanych wartości. Jeśli zatem potraktować wszystkie wartości zmiennych objaśniających modelu jako dokładnie znane, niepewności wyznaczonych prognoz byłyby niedoszacowane.

być oparty na założeniach KMNK, co pozwala uznać ją za „bardziej uniwersalny” miernik dopuszczalności prognoz.

Literatura

Brandt S., *Analiza danych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.

Dittmann P., *Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Metody i ich zastosowanie*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2004.

Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO, Geneva1995 (tłumaczenie polskie: *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999).

Nowak R., *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

Papoulis A., *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa1972.

Pawłowski Z., *Zasady predykcji ekonometrycznej*, PWN, Warszawa 1982.

Poradowska (Gogolewska) K., *Ocena dopuszczalności prognoz gospodarczych*, praca doktorska, AE, Wrocław 2006.

Wyrażanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu, Główny Urząd Miar, Warszawa 2001 (www.gum.gov.pl).

Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S., *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.

LAW OF PROPAGATION OF UNCERTAINTY IN MEASURING FORECAST ACCURACY

Summary: In this paper on the basis of propagation of uncertainty law I have presented the way of estimation of forecast errors standard deviation. This has finally allowed me to point forecast accuracy measure that is unbiased and therefore can be estimated for different types of forecasting models. This measure named forecast standard uncertainty is in fact a generalization of so called ex ante error – commonly known and used measure of forecast accuracy.