EKONOMETRIA ECONOMETRICS 2(36) • 2012

ISSN 1507-3866

Roman Szostek

Politechnika Rzeszowska

UOGÓLNIONY MODEL HOLTA NA PRZYKŁADZIE PROGNOZOWANIA LICZBY PASAŻERÓW W TRANSPORCIE LOTNICZYM W POLSCE

Streszczenie: W pracy zostały przedstawione zaproponowane przez autora modyfikacje metody Holta. Po pierwsze, przyjęto, że wartości parametrów występujących w modelu Holta nie muszą być ograniczone, tak jak to się powszechnie przyjmuje, do przedziału [0, 1]. Po drugie, został zaproponowany precyzyjniejszy sposób prognozowania wartości szeregu dla bardziej odległych chwil czasu. Celem opracowania jest zaproponowanie modyfikacji modelu Holta, która pozwoli na uzyskiwanie lepszych prognoz. Artykuł prezentuje ideę oraz efekty proponowanej modyfikacji na przykładzie danych dotyczących liczby pasażerów w transporcie lotniczym w Polsce.

Słowa kluczowe: metoda Holta, optymalizacja, prognozowanie.

1. Wstęp

Metoda Holta jest jedną z metod wygładzania wykładniczego. Polega na wygładzaniu analizowanego szeregu czasowego za pomocą średniej ruchomej i służy do wygładzania szeregów czasowych, w których występuje tendencja rozwojowa z wahaniami przypadkowymi. Dzięki wygładzeniu szeregu uzyskiwana jest informacja o jego własnościach wykorzystywana do wyznaczenia prognozy.

Wygładzanie wykładnicze może być oparte na różnych modelach, odpowiednio dobieranych do przebiegu badanego szeregu. Oprócz modelu Holta stosowany jest prosty model wygładzania wykładniczego oraz model Wintersa.

2. Model Holta

Model Holta pozwala na wygładzanie szeregu czasowego, w którym występuje tendencja rozwojowa oraz wahania przypadkowe. Wartości prognozowanego szeregu zostały oznaczone symbolami x_0, x_1, ..., x_{n-1}. Model ten ma dwa parametry α oraz β i następującą postać:

$$F_1 = x_1, \tag{1}$$

$$S_1 = x_1 - x_0, \tag{2}$$

$$F_t = \alpha x_t + (1-\alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}), \tag{3}$$

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1-\beta) S_{t-1}, \tag{4}$$

gdzie: $t = 2, \dots, n-1$,
F_t – wygładzona wartość szeregu czasowego,
S_t – wygładzona wartość przyrostu trendu na moment t,
α, β – parametry modelu.

Wartości F_t oraz S_t wyliczane są w sposób rekurencyjny. Prognozy przyszłych wartości szeregu wyznaczane są w następujący sposób:

$$x^*_{n+k-1} = F_{n-1} + k \cdot S_{n-1}, \tag{5}$$

gdzie: $k = 1, 2, 3, \dots$

Parametry modelu Holta α oraz β są dobierane tak, aby zminimalizować błędy prognoz wygasłych. W tym celu przyjmuje się jakieś konkretne wartości tych parametrów i wyznacza, zgodnie z (5), gdy $n = t$ oraz $k = 1$, prognozy wygasłe

$$x^*_t = F_{t-1} + S_{t-1} \tag{6}$$

dla chwil czasu t ($t = 2, 3, \dots, n-1$) na podstawie wartości szeregu z okresu wcześniejszego (x_0, x_1, ..., x_{t-1}). Prognozy te można porównać z faktycznymi wartościami szeregu x_t. Otrzymane różnice są błędami prognoz wygasłych, jakie daje model dla przyjętych parametrów α oraz β. Jako miarę jakości metody należy przyjąć średnią z błędów prognoz wygasłych. Może to być średnia liniowa

$$J_1 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=2}^{n-1} \left| F_{t-1} + S_{t-1} - x_t \right| \tag{7}$$

lub średnia kwadratowa

$$J_2 = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{t=2}^{n-1} (F_{t-1} + S_{t-1} - x_t)^2}\ . \tag{8}$$

Ostatecznie należy spośród wszystkich możliwych wartości parametrów α oraz β wybrać takie, które dają najmniejszą wartość błędu J_1 lub J_2. W ten sposób zostają wyznaczone optymalne wartości parametrów modelu, czyli przeprowadzona jest jego optymalizacja. Wartość J_* jest miarą błędu prognozy wyznaczonej za pomocą tego modelu.

Powszechnie przyjmuje się, że $\alpha \in [0, 1]$ oraz $\beta \in [0, 1]$. Wydaje się jednak, że to ograniczenie jest niepotrzebne, dlatego w przeprowadzonych obliczeniach zrezygnowano z niego. Tak więc zostało przyjęte, że najlepszymi parametrami modelu są takie, dla których model najlepiej wyznacza prognozy wygasłe niezależnie od tego, czy parametry te będą większe, czy mniejsze od jedności.

Wyznaczanie optymalnych wartości parametrów α oraz β przeprowadza się metodami numerycznymi.

3. Analiza danych

Analizowany szereg czasowy został przedstawiony w tab. 1. Zawiera on informację o liczbie pasażerów w transporcie lotniczym w Polsce w okresach rocznych.

Tabela 1. Przewozy pasażerów transportem lotniczym w Polsce

Rok	Liczba pasażerów (tys. osób)	Rok	Liczba pasażerów (tys. osób)
1990	1715	2001	3436
1991	1208	2002	3667
1992	1254	2003	3978
1993	1405	2004	4044
1994	1596	2005	4637
1995	1847	2006	5329
1996	2043	2007	6194
1997	2287	2008	5463
1998	2632	2009	4350
1999	2621	2010	4990
2000	2880		

Źródło: Główny Urząd Statystyczny (www.stat.gov.pl).

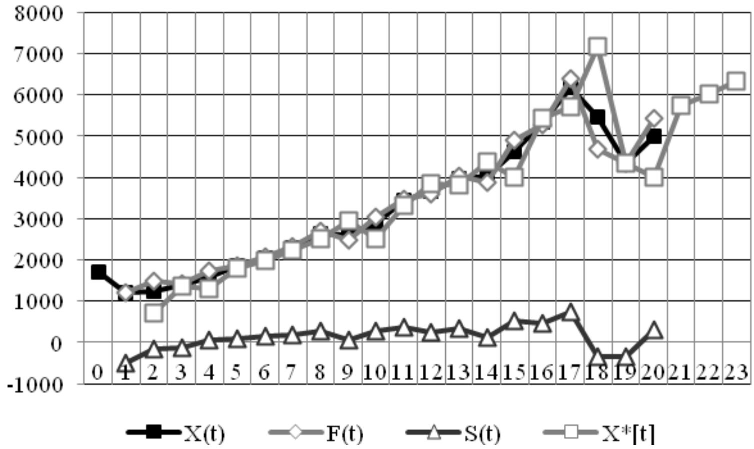
Wartości optymalnych parametrów modelu Holta są różne w zależności od przyjętej miary jakości. Siatkę parametrów przeglądano z dokładnością do 0.0001. Prognozy zostały wyznaczone na trzy przyszłe okresy. Dla miary liniowej (7) optymalne są parametry

$$\alpha = 1.4483 \text{ oraz } \beta = 0.4514. \tag{9}$$

Dla miary kwadratowej (8) optymalne są parametry

$$\alpha = 1.5676 \text{ oraz } \beta = 0.1720. \tag{10}$$

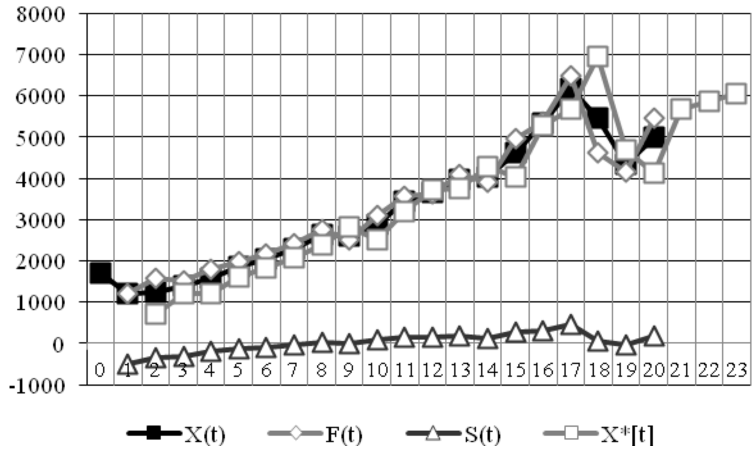
Szereg czasowy wraz z prognozą dla miary (7) został przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Prognozy, gdy w modelu $\alpha = 1.4483$ oraz $\beta = 0.4514$

Źródło: opracowanie własne.

Szereg czasowy wraz z prognozą dla miary (8) został przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Prognozy, gdy w modelu $\alpha = 1.5676$ oraz $\beta = 0.1720$

Źródło: opracowanie własne.

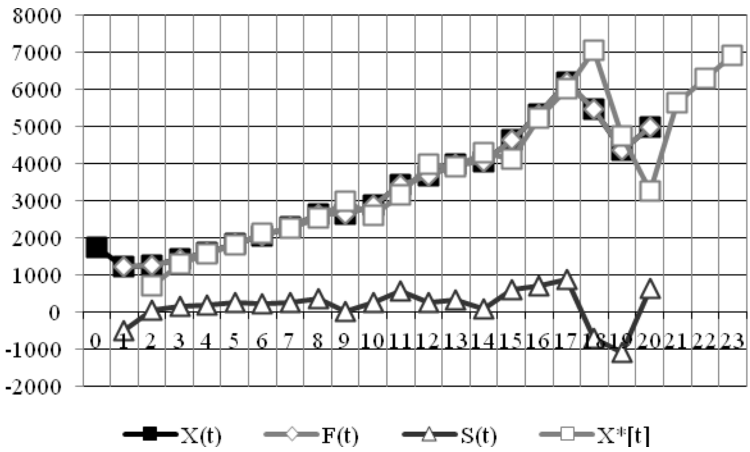
Dla porównania, gdy wartości parametrów modelu α oraz β są ograniczone do przedziału [0, 1], wtedy optymalne wartości tych parametrów dla miary liniowej (7) wynoszą

$$\alpha = 1.0000 \text{ oraz } \beta = 1.0000, \quad (11)$$

natomiast dla miary kwadratowej (8) wynoszą

$$\alpha = 1.0000 \text{ oraz } \beta = 0.3057. \quad (12)$$

Szereg czasowy wraz z prognozą dla przypadku gdy α = 1.0 oraz β = 1.0 został przedstawiony na rys. 3.



Rys. 3. Prognozy, gdy w modelu α =1.0 oraz β =1.0

Źródło: opracowanie własne.

W tab. 2 zostały przedstawione wyniki obliczeń dla trzech powyższych przypadków. Optymalne wartości miary jakości zostały w tabeli wytłuszczone.

Tabela 2. Wyniki obliczeń. Porównanie trzech rozwiązań

t	X(t)	a = 1,4483 b = 0,4514			a = 1,5676 b = 0,1720			a = 1,000 b = 1,000		
		F(t)	S(t)	X*[t]	F(t)	S(t)	X*[t]	F(t)	S(t)	X*[t]
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1715									
1	1208	1208,00	-507,00		1208,00	-507,00		1208,00	-507,00	
2	1254	1501,91	-145,47	701,00	1567,88	-357,90	701,00	1254,00	46,00	701,00
3	1405	1426,77	-113,72	1356,44	1515,69	-305,32	1209,99	1405,00	151,00	1300,00
4	1596	1722,85	71,26	1313,05	1814,88	-201,34	1210,37	1596,00	191,00	1556,00
5	1847	1870,71	105,84	1794,11	1979,51	-138,39	1613,54	1847,00	251,00	1787,00
6	2043	2072,79	149,28	1976,55	2157,59	-83,96	1841,12	2043,00	196,00	2098,00
7	2287	2316,11	191,73	2222,07	2408,11	-26,43	2073,63	2287,00	244,00	2239,00
8	2632	2687,66	272,90	2507,84	2774,08	41,06	2381,68	2632,00	345,00	2531,00
9	2621	2468,77	50,91	2960,56	2510,80	-11,28	2815,14	2621,00	-11,00	2977,00
10	2880	3041,53	286,47	2519,68	3095,96	91,30	2499,52	2880,00	259,00	2610,00

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	3436	3484,42	357,08	3328,00	3577,18	158,37	3187,26	3436,00	556,00	3139,00
12	3667	3588,78	243,00	3841,49	3628,09	139,89	3735,55	3667,00	231,00	3992,00
13	3978	4043,55	338,60	3831,78	4097,21	196,52	3767,98	3978,00	311,00	3898,00
14	4044	3892,41	117,53	4382,15	3902,26	129,18	4293,72	4044,00	66,00	4289,00
15	4637	4918,11	527,48	4009,94	4980,72	292,46	4031,44	4637,00	593,00	4110,00
16	5329	5276,73	451,26	5445,59	5360,69	307,51	5273,17	5329,00	692,00	5230,00
17	6194	6402,91	755,92	5727,99	6492,45	449,28	5668,20	6194,00	865,00	6021,00
18	5463	4702,76	-352,75	7158,83	4623,67	50,58	6941,73	5463,00	-731,00	7059,00
19	4350	4350,00	-352,76	4350,01	4165,96	-36,85	4674,25	4350,00	-1113,00	4732,00
20	4990	5435,05	296,27	3997,24	5478,64	195,27	4129,10	4990,00	640,00	3237,00
21		prognozy:		5731,33	prognozy:		5673,91	prognozy:		5630,00
22				6027,60			5869,18			6270,00
23				6323,87			6064,45			6910,00
błąd liniowy		**345,16**			380.81			371.842		
błąd kwadratowy		529,32			**498.983**			601.798		

Źródło: opracowanie własne.

Ograniczanie wartości parametrów α oraz β do przedziału [0, 1] powoduje, że pewnej dużej rodzinie szeregów czasowych przyporządkowywany jest ten sam model Holta o parametrze $\alpha = 1.0$ (lub $\beta = 1.0$). Tak też jest dla rozważanego szeregu. W tej sytuacji wiele różnorodnych szeregów jest opisywanych tym samym modelem. Tymczasem parametry modelu Holta można dobrać tak, aby model dokładniej wyznaczał prognozy wygasłe. Te parametry powinny być wykorzystane do prognozowania.

4. Prognoza na dalsze chwile czasowe

W klasycznym podejściu przedstawionym w postaci równań (1)-(5) optymalne wartości parametrów modelu są wyznaczane na podstawie prognoz wygasłych obliczanych na jeden krok do przodu. Jeżeli jednak za pomocą modelu ma być wyznaczana prognoza na k kroków do przodu, to powinno się wykonywać optymalizację modelu pod kątem prognoz wygasłych na k kroków do przodu. Zaproponowano więc tutaj, aby dla każdej chwili czasowej, na którą ma być wyznaczona prognoza, wyznaczyć inny model, za każdym razem na podstawie innej miary jakości.

Jeżeli prognoza ma być wykonana na k-ty krok do przodu, wtedy należy wyznaczyć parametry modelu, minimalizując miarę jakości w postaci

$$J_1(k) = \frac{1}{n-k-1} \sum_{t=k+1}^{n-1} \left| F_{t-k} + k \cdot S_{t-k} - x_t \right| \tag{13}$$

lub

$$J_2(k)=\sqrt{\frac{1}{n-k-1}\sum_{t=k+1}^{n-1}(F_{t-k}+k\cdot S_{t-k}-x_t)^2}\ , \tag{14}$$

gdzie: $k = 1, 2, 3, \dots$

Obliczenia zostały wykonane za pomocą programu w języku C++ o następującym kodzie:

```
int main(int argc, char *argv[])
{
double X[21]={1715, 1208, 1254, 1405, 1596, 1847, 2043, 2287, 2632, 2621,
            2880, 3436, 3667, 3978, 4044, 4637, 5329, 6194, 5463, 4350, 4990};

Double      F[21], S[21], F_opt, S_opt;  // wielkość tablicy musi mieć rozmiar n
double      J2, J1, a_opt, b_opt, J2_min=999999999, J1_min=999999999;
double      a, b, krok=0.0001;
int    t, n=21, k=1;    // k oznacza na ile krokow do przodu jest prognoza

F[1]=X[1]; S[1]=X[1]-X[0];
for (a=1.4; a<=1.5; a=a+krok)
{   for (b=0.4; b<=0.5; b=b+krok)
   { J2=0; J1=0;
   for (t=2;t<n;t++)
   {  F[t]=a*X[t]+(1-a)*(F[t-1]+S[t-1]);
      S[t]=b*(F[t]-F[t-1])+(1-b)*S[t-1];
      if (t>=(k+1))
      {  J1=J1+fabs(F[t-k]+k*S[t-k]-X[t]);            //błąd liniowy
         J2=J2+pow((F[t-k]+k*S[t-k]-X[t]),2);         //błąd kwadratowy
      }
   }
   if (J1 < J1_min)    //minimalizacja bledu liniowego
   {  J2_min=J2; J1_min=J1;
      a_opt=a; b_opt=b;
      F_opt=F[n-1]; S_opt=S[n-1];
   }
   }
}
J1_min=J1_min/(n-k-1);          //błąd liniowy
J2_min=sqrt(J2_min/(n-k-1));  //błąd kwadratowy
```

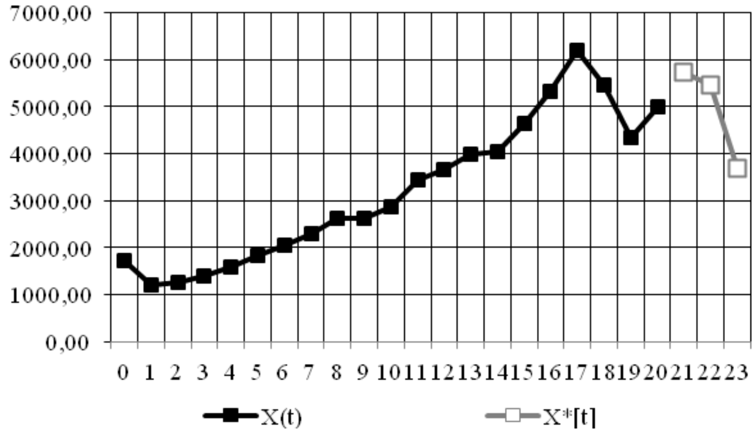
```
cout << "optymalne a = " << a_opt << endl;
cout << "optymalne b = " << b_opt << endl;
cout << "blad liniowy J1 = " << J1_min << endl;
cout << "blad kwadratowy J2 = " << J2_min << endl;
}
```

Wartość prognozy na *k* kroków do przodu jest wyliczana zgodnie z zależnością (5). Wyniki obliczeń dla miary jakości (13) zostały przedstawione w tab. 3 oraz na rys. 4. W przypadku zmodyfikowanej metody prognozy nie muszą się znajdować na prostej, tak jak jest zawsze w przypadku metody tradycyjnej.

Tabela 3. Wyniki obliczeń dla zmodyfikowanej miary jakości $J_1(k)$

t	X(t)	k = 1			k = 2			k = 3		
		a = 1,4483 b = 0,4514			a = 1,0817 b = 0,5667			a = 0,5858 b = 0,7114		
		F(t)	S(t)	X*[t]	F(t)	S(t)	X*[t]	F(t)	S(t)	X*[t]
0	1715,00									
1	1208,00	1208,00	-507,00		1208,00	-507,00		1208,00	-507,00	
2	1254,00	1501,91	-145,47	701,00	1299,18	-168,01		1024,95	-276,54	
3	1405,00	1426,77	-113,72	1356,44	1427,37	-0,15	194,00	1133,04	-2,92	
4	1596,00	1722,85	71,26	1313,05	1609,79	103,31	963,16	1403,03	191,23	-313,00
5	1847,00	1870,71	105,84	1794,11	1857,94	185,39	1427,07	1742,32	296,56	195,32
6	2043,00	2072,79	149,28	1976,55	2042,97	185,19	1816,41	2041,29	298,28	1124,29
7	2287,00	2316,11	191,73	2222,07	2291,81	221,26	2228,72	2308,77	276,37	1976,73
8	2632,00	2687,66	272,90	2507,84	2641,72	294,16	2413,35	2612,59	295,90	2631,99
9	2621,00	2468,77	50,91	2960,56	2595,27	101,14	2734,32	2740,08	176,09	2936,12
10	2880,00	3041,53	286,47	2519,68	2895,00	213,68	3230,05	2894,98	161,02	3137,88
11	3436,00	3484,42	357,08	3328,00	3462,74	414,33	2797,56	3278,60	319,38	3500,28
12	3667,00	3588,78	243,00	3841,49	3649,84	285,56	3322,36	3638,41	348,14	3268,35
13	3978,00	4043,55	338,60	3831,78	3981,48	311,67	4291,40	3981,54	344,58	3378,03
14	4044,00	3892,41	117,53	4382,15	4023,64	158,94	4220,95	4160,85	227,01	4236,74
15	4637,00	4918,11	527,48	4009,94	4674,13	437,50	4604,83	4533,81	330,83	4682,84
16	5329,00	5276,73	451,26	5445,59	5346,76	570,75	4341,53	5136,66	524,35	5015,27
17	6194,00	6402,91	755,92	5727,99	6216,59	740,24	5549,12	5973,24	746,47	4841,87
18	5463,00	4702,76	-352,75	7158,83	5340,95	-175,48	6488,26	5983,53	222,75	5526,30
19	4350,00	4350,00	-352,76	4350,01	4283,38	-675,36	7697,07	5118,87	-550,83	6709,71
20	4990,00	5435,05	296,27	3997,24	5102,91	171,79	4990,00	4815,22	-374,98	8212,63
21		prognoza:		5731,33						
22					prognoza:		5446,50			
23								prognoza:		3690,27
Błąd progn.		$J_1(1) =$		345,16	$J_1(2) =$		596,72	$J_1(3) =$		822,10

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Prognozy dla zmodyfikowanej miary jakości $J_1(k)$

Źródło: opracowanie własne.

Dzięki przedstawionej modyfikacji zostały uzyskane mniejsze średnie błędy prognoz wygasłych. Zostały one zestawione w tab. 4 (dla liniowej miary jakości). Błędy te dla metody tradycyjnej zostały wyznaczone dla modelu, w którym α oraz β mają wartości (9), ale według zależności (13). Natomiast dla zmodyfikowanej metody błędy prognoz wygasłych pochodzą z tab. 3.

Tabela 4. Porównanie średnich błędów prognoz wygasłych dla liniowej miary jakości

	Prognoza na *k* kroków do przodu		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
Metoda tradycyjna	345,16	625,99	929,11
Metoda zmodyfikowana	345,16	596,72	822,10

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie kryterium, jakim jest średni błąd prognoz wygasłych, można stwierdzić, że zmodyfikowana metoda pozwala na wyznaczanie wiarygodniejszych prognoz.

5. Wnioski

W klasycznych zastosowaniach modelu Holta wartości jego parametrów są ograniczane do przedziału [0, 1]. Podejście takie zastosowano na przykład w pakiecie Statistica. W artykule zaproponowano, aby nie ograniczać wartości parametrów tego modelu do przedziału [0, 1]. Modele takie mogą lepiej wyznaczać prognozy wygasłe. Są więc lepszym sposobem wyznaczania przyszłych prognoz.

Ograniczenie wartości parametrów α oraz β do przedziału [0, 1] wynikało zapewne z koncepcji, według której nowe wartości szeregów F_t oraz S_t są w pewnym procencie wcześniejszymi wartościami tych szeregów, a w pozostałej części wartościami innego czynnika (zgodnie z (3) oraz (4)). Rezygnacja z ograniczenia wartości tych parametrów jest naturalnym uogólnieniem metody.

W przypadkach, gdy w modelu uzyskano parametr $\alpha > 1$, nie zawsze szereg F_t był wygładzeniem szeregu x_t. Dla niektórych analizowanych przykładów wartości szeregu F_t oscylowały wokół wartości szeregu x_t. Wtedy szereg F_t nie tyle wygładzał, co wyostrzał wahania oryginalnego szeregu. Niemniej jednak zawsze zmodyfikowane modele lepiej wyznaczały prognozy wygasłe, są więc lepszym narzędziem do wyznaczania przyszłych prognoz.

W artykule zaproponowano także zmodyfikowany sposób optymalizacji modelu Holta. Polega on na niezależnej optymalizacji kilku modeli, po jednym dla każdej prognozy na *k*-ty okres do przodu. W ten sposób wyznaczanych jest tyle modeli Holta, na ile kroków do przodu jest wykonywana prognoza. Taki zmodyfikowany model wyznacza prognozy wygasłe z mniejszym średnim błędem. Jest więc lepszym sposobem wyznaczania przyszłych prognoz. Uzyskane w ten sposób prognozy nie muszą znajdować się na prostej (rys. 4), tak jak jest zawsze w podejściu klasycznym.

Literatura

Dittmann P., *Metody prognozowania sprzedaży w przedsiębiorstwie*, Wydawnictwo AE, Wrocław 1999.

Główny Urząd Statystyczny – Transport wyniki działalności, http://www.stat.gov.pl/cps/rde/xbcr/gus/PUBL_til_transport_wyniki_dzialalnosci_2010.pdf.

http://www.stat.gov.pl/cps/rde/xbcr/gus/PUBL_transport_wyniki_dzialalnosci_2006.pdf

Lipińska Z., Smiłowska T., Suchecki B., *Wybrane metody prognozowania krótkookresowego*, GUS ZBSE, Warszawa 1984.

Pawełek B., Wanat S., Zeliaś A., *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania*, PWN, Warszawa 2008.

Siedlecka U., *Prognozy ostrzegawcze*, Wydawnictwo AE, Wrocław 1993.

Zeliaś A., *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa 1997.

GENERALIZED HOLT'S MODEL EXEMPLIFIED BY THE FORECAST ON THE NUMBER OF AIR TRAVELLERS IN POLAND

Summary: The work presents, proposed by the author, changes in the Holt's method. First, it is assumed that the parameter values in the Holt's model do not need to be limited, as it is commonly assumed, to the range of [0,1]. Secondly, it is proposed a more accurate way of forecasting the number of moments for the more distant time. The aim of the paper is to evaluate the modified approach. Calculations were carried out on the example of data on the number of air travellers in Poland.

Keywords: Holt's method, optimization, forecasting.