

Stefan Miller

TEORIA MASZYN I MECHANIZMÓW

Analiza układów kinematycznych

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Spis treści

Wstęp	
I. Struktura	
1. Pojęcia podstawowe	
1.1. Człon (ogniwo)	
1.2. Para kinematyczna (węzeł kinematyczny)	
1.3. Łańcuch kinematyczny	
1.3.1. Ruchliwość łańcucha	
1.4. Mechanizm, układ, maszyna	
1.5. Wzory strukturalne	
1.6. Ruchliwość lokalna	
1.7. Ruchliwość zupełna i niezupełna	
1.8. Więzy bierne	
2. Klasyfikacja mechanizmów	
II. Kinematyka	
3. Metody graficzne	
3.1. Podziałki	
3.2. Położenia i trajektorie	
3.2.1. Położenia	
3.2.2. Trajektorie	
3.3. Prędkości i przyspieszenia	
3.3.1. Środki obrotu	
3.3.2. Związki podstawowe analizy kinematycznej	
3.3.3. Metoda toru odcelowanego	
3.3.4. Metoda planów	
3.3.5. Metoda wykresów kinematycznych	
4. Metody analityczne	
4.1. Metoda zapisu wektorowego	
4.1.1. Analiza czworoboku przegubowego	
4.2. Metoda klasyczna	
4.3. Metoda macierzowa	
5. Metody numeryczne	
5.1. Metoda przyrostów skończonych	
6. Analiza i przegląd wybranych grup mechanizmów	
6.1. Mechanizmy dźwigniowe	
6.1.1. Płaski czworobok przegubowy	
6.1.2. Sprzęgło Cardana	
6.1.3. Manipulatory	
6.2. Mechanizmy z parami wyższymi	
6.2.1. Mechanizmy krzywkowe	
6.2.2. Mechanizmy zębate	
7. Analiza dokładności	
7.1. Określanie błędów i tolerancji wynikowej	
7.2. Określanie współczynników wpływu	
III. Dynamika	
8. Wprowadzenie	
9. Siły i ich przegląd	
9.1. Siły bezwładności i ich redukcja	
9.1.1. Metoda mas zastępczych	

10. Kinetostatyka	
10.1. Grupy statycznie wyznaczalne	
10.1.1. Analiza sił w grupach statycznie wyznaczalnych	
10.2. Równowaga członu czynnego	
10.3. Wyznaczanie sił i momentów równoważących metodą energetyczną	
11. Tarcie w parach kinematycznych	
11.1. Tarcie w parach postępowych	
11.2. Tarcie w parach obrotowych	
11.3. Tarcie w parach wyższych	
12. Bilans energetyczny maszyny	
12.1. Równanie energii	
12.2. Sprawność mechaniczna maszyny	
12.3. Określanie sprawności mechanizmów	
13. Badanie ruchu maszyn	
13.1. Redukcja sił	
13.2. Redukcja mas	
13.3. Modele maszyn i równania ruchu	
13.4. Nierównomierność biegu maszyn	
13.5. Koła zamachowe	
13.5.1. Przybliżona metoda określania momentu bezwładności koła zamachowego	
13.5.2. Kształtowanie i osadzanie koła zamachowego	
13.6. Obciążenia korygujące	
14. Wyważanie	
14.1. Określanie środka ciężkości mechanizmów	
14.2. Wyważanie mechanizmów dźwigniowych	
14.2.1. Wyważanie statyczne mechanizmów dźwigniowych	
14.3. Wyważanie mas obrotowych	
14.3.1. Wyważanie statyczne członów obrotowych (wirmików)	
14.3.2. Wyważanie dynamiczne członów obrotowych sztywnych	
15. Dynamika mechanizmów z członami podatnymi	
15.1. Dynamika mechanizmów obrotowych	
15.2. Dynamika płaskich mechanizmów dźwigniowych	
15.3. Dynamika mechanizmu krzywkowego z podatnym popychaczem	
15.4. Wyważanie dynamiczne członów obrotowych podatnych	

Literatura

Wstęp

Większość urządzeń technicznych, stosowanych we wszelkich procesach produkcyjnych, jak również wykorzystywanych do obsługi podstawowych sfer życia współczesnego człowieka, stanowią najogólniej tzw. systemy mechaniczne. Wszystkie te systemy, złożone z ciał materialnych (stałych, płynnych,...), można podzielić na dwie różne grupy.

Do pierwszej z nich zaliczamy systemy mechaniczne charakteryzujące się tym, że ich funkcja nie wiąże się ze wzajemnym ruchem elementów składowych, czyli inaczej systemy, w których elementy składowe są połączone ze sobą nieruchomo. Przykładami takich urządzeń są wszelkie konstrukcje sztywne, jak np. obudowy, ramy, zbiorniki itp.

Drugą grupę tworzą systemy, w których elementy składowe są połączone ze sobą ruchowo i w procesie wypełniania swojej funkcji występuje wzajemne ich przemieszczanie. Do nich należą przede wszystkim maszyny, oraz różne aparaty i narzędzia, których budowę i działanie określają układy kinematyczne (mechanizmy). Z tą grupą urządzeń, stanowiących przedmiot rozważań, jest związany szeroki krąg zagadnień dotyczących ich analizy i syntezy. Większość problemów, niezależnie od specyfiki i przeznaczenia urządzeń, jest wspólna. Należą do nich między innymi: zagadnienia torów zakreślanych przez pewne punkty związane z elementami ruchomymi, zagadnienia wzajemnych położenia elementów w kolejnych fazach ruchu, prędkości i przyspieszeń kątowych poszczególnych członów.

Wspólne w zasadzie dla wszystkich urządzeń tego typu jest zagadnienie sił przenoszonych przez elementy ruchome i ich połączenia, ruch określonych układów pod działaniem sił, zjawisko tarcia i jego efekty, moc potrzebna do utrzymania urządzenia w ruchu itd. Ogólne problemy i metody ich rozwiązywania, interesujące zarówno konstruktorów, technologów, jak i eksploatorów systemów mechanicznych, są przedmiotem nauki *teoria maszyn i mechanizmów*, który dzieli się na trzy działy: struktura, kinematyka, dynamika.

W pierwszym dziale, poświęconym **strukturze**, omawia się ogólne właściwości ruchowe układów mechanicznych wiążące się z pewnymi cechami ich budowy, a więc liczbą i rodzajem elementów składowych oraz sposobem ich połączeń.

Dział **kinematyki** jest poświęcony metodom badania wzajemnych ruchów członów i punktów związanych z członami układów mechanicznych. Należy podkreślić, że punktem wyjścia w kinematyce jest tylko ruch elementów napędzających i geometria układu, bez uwzględniania wpływu mas tych elementów i działających na nie sił.

W dziale poświęconym **dynamice** bada się związki zachodzące w układzie między parametrami kinematycznymi elementów składowych a ich masami i działającymi na nie siłami.

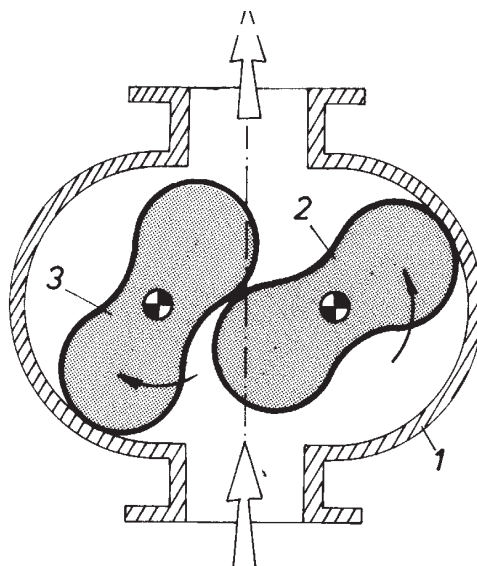
Teoria maszyn i mechanizmów stanowi w dużej mierze ukierunkowane rozwinięcie mechaniki, jest więc na pograniczu nauk podstawowych i stosowanych. Wyjaśnia ważniejsze zjawiska zachodzące w układach kinematycznych, zarazem umożliwia zrozumienia istotnych problemów budowy i działania maszyn oraz urządzeń mechanicznych. W tym sensie znajomość tego przedmiotu powinna stanowić skuteczną pomoc dla wszystkich, którzy zajmują się twórczą pracą inżynierską.

I. STRUKTURA

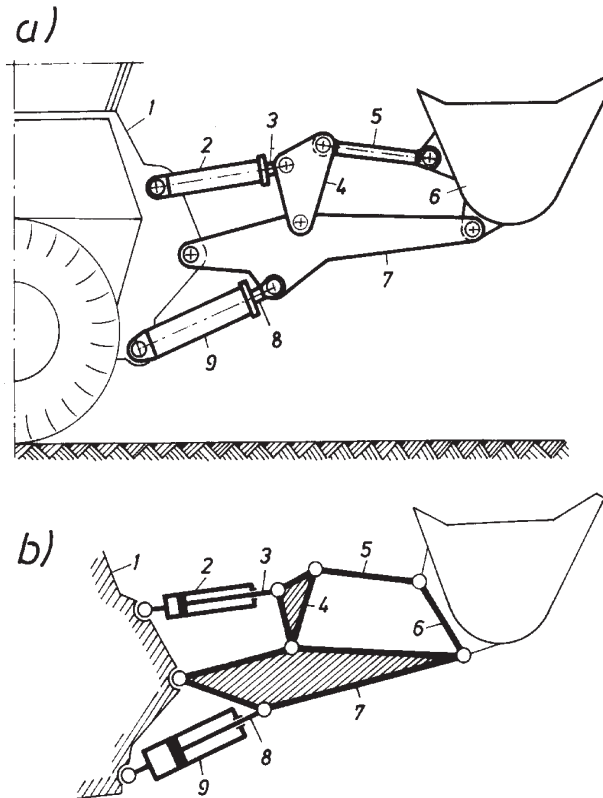
1. Pojęcia podstawowe

1.1. Człon (ogniwo)

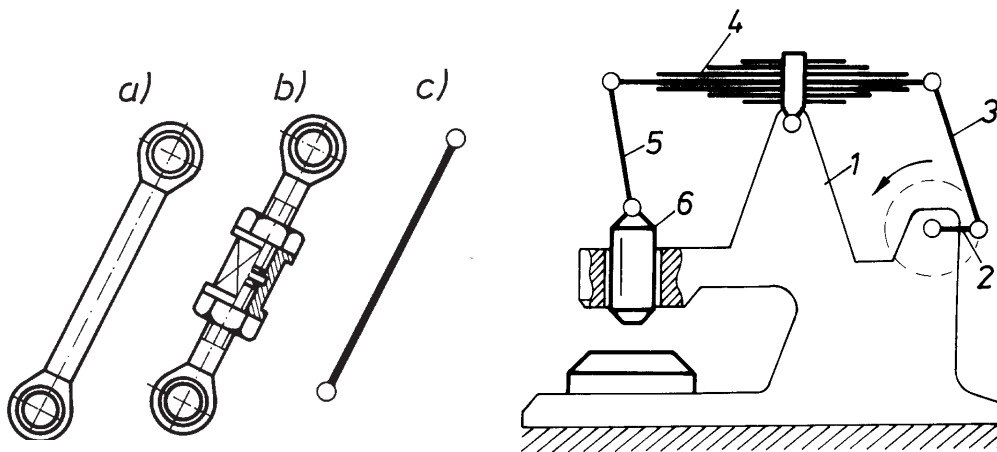
W układach kinematycznych można wyróżnić elementy składowe wykonujące w stosunku do siebie ruchy względne. Elementy te będziemy nazywać ogólnie **członami** lub ogniwami. Przykładami członów są elementy składowe (1–3) układu pompy przedstawionej na rys.1 oraz (1–9) układu wysięgnika ładowarki hydraulicznej z rys. 2. Człon może występować w postaci jednoczęściowej (rys.3a) lub, jak to często bywa, mogą być zbudowane z wielu części (rys. 3b). Mówimy o jednym członie wówczas, gdy poszczególne części (jak na rys. 3b) są połączone ze sobą sztywno. Najczęściej mamy do czynienia z członami sztywnymi, tzn. takimi, których odkształcalność nie ma istotnego wpływu na przenoszony ruch; członami jednak będziemy nazywać również elementy podatne, jak cięgna i sprężyny, a także uczestniczące w przekazywaniu ruchu określone objętości gazów lub cieczy. Przykładami tego typu członów mogą być: sprężysty element (4) układu napędowego młota (rys. 4) lub zamknięta ciecz (3) w hydraulicznej prasie (rys. 5). W dalszym ciągu zajmiemy się przede wszystkim układami członów sztywnych.



Rys. 1. Mechanizm pompy rotacyjnej: 1 – podstawa, 2 i 3 – wirniki



Rys. 2. Układ wysięgnika ładowarki hydraulicznej: a) widok ogólny układu, b) schemat kinematyczny układu



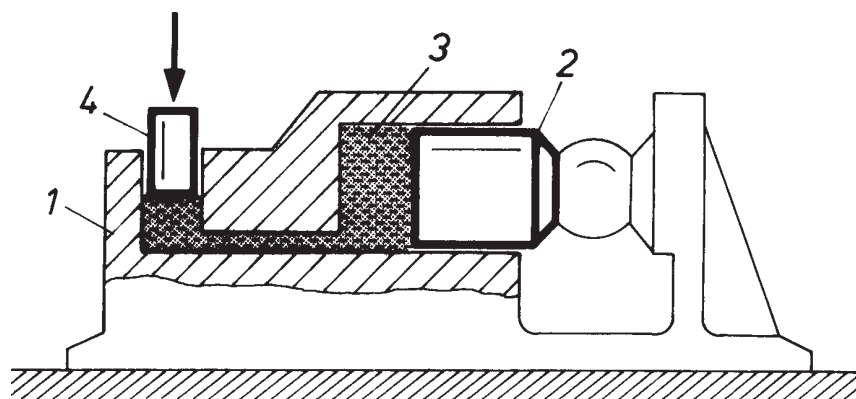
Rys. 3. Przykłady członów dwuwzłowych:
a) człon prosty, b) człon złożony, c) schemat

Rys. 4. Mechanizm napędu młota:
4 – człon sprężysty

Jeden z członów układu, względem którego badamy ruchy pozostałych członów, będziemy nazywać **podstawą** lub ostoją. Jest to zwykle człon nieruchomy i nietrudno go odróżnić. Podstawą jest obudowa (1) pompy z rys. 1, rama (1) ładowarki z rys. 2, a także korpus młota i prasy przedstawiony na rys. 4 i 5. Wśród pozostałych (poza podstawą) ruchomych członów układu będziemy wyróżniać człony czynne, do których jest przyłożony napęd układu, człony bierne, czyli napędzane, oraz grupę członów **pośredniczących** w przekazywaniu ruchu i sił. Uwzględniając charakter ruchu, będziemy członom ruchomym przypisywać bliższe określenia. I tak, korbą będziemy nazywać człony wykonujące pełny ruch obrotowy, wahaczem – człon o nawrotnym ruchu obrotowym w granicach kąta niepełnego, suwakiem – człon o ruchu postępowym itp.

W naszych rozważaniach nie będziemy się interesować tymi cechami członów, które nie mają wpływu na ruch i jego przenoszenie. Traktując człony jako ciała sztywne, zaakcentujemy tylko te ich wymiary, które określają wzajemne położenie miejsc przystosowanych do wejścia w ruchowe połączenia z innymi członami. Według liczby tych miejsc, zwanych dalej **półparami** lub półwęzłami, można dzielić wszystkie człony na 2-, 3- i n -węzłowe. Cecha ta jest widoczna wyraźnie przy schematycznym sposobie rysowania układów i członów (rys. 2b, 3c), z którego będziemy powszechnie korzystać.

Węzłowość członów będziemy oznaczać symbolami N_2, N_3, \dots, N_n , natomiast liczby takich członów w układzie odpowiednio przez n_2, n_3, \dots, n_n . Istotę podziału członów płaskich według węzłowości wyjaśniono na rys. 6, na którym wyróżniono dodatkowo człony występujące w układach płaskich i przestrzennych. Często jest użyteczne przypisywanie określonym typom członów charakterystycznych dla nich liczb b wszystkich krawędzi, czyli odcinków, jakimi można połączyć poszczególne półwęzły między sobą oraz liczb b_w tych odcinków schodzących się w jednym półwęzle.



Rys. 5. Mechanizm napędu prasy hydraulicznej: 3 – ciecz spełniająca rolę członu

Typy członów		N_2	N_3	N_4	N_5
Graficzna postać członów wielowzłowych	w układzie płaskim				
	w układzie przestrzennym				

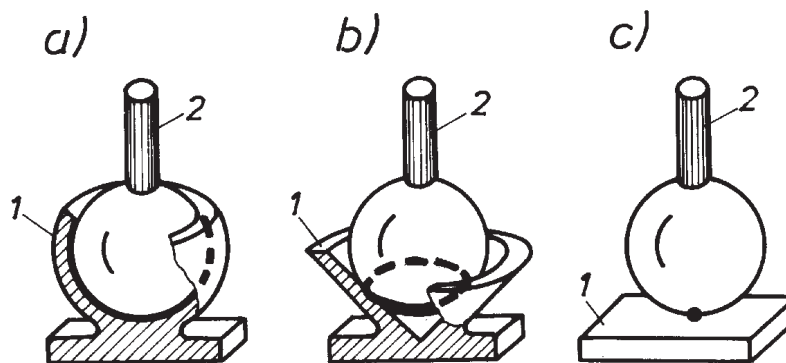
Rys. 6. Oznaczenia płaskich i przestrzennych członów wielowzłowych

1.2. Para kinematyczna (węzeł kinematyczny)

Istotną cechą każdego układu kinematycznego są ruchowe połączenia członów. Połączenia takie, umożliwiające wzajemny ruch względny dwóch członów, nazywa się powszechnie **parą kinematyczną** lub węzłem kinematycznym. Kilka przykładów par kinematycznych można wskazać już w układach przedstawionych na rys. 1 i 2.

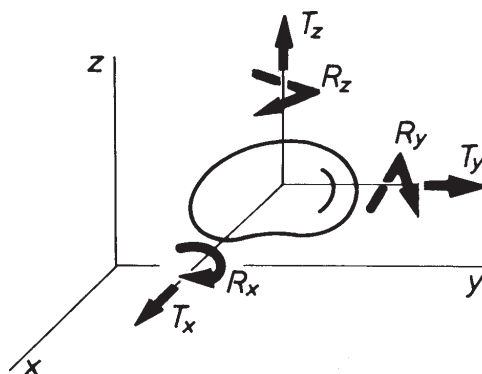
Duża różnorodność występujących w praktyce par sugeruje potrzebę dokonania pewnego podziału i systematyki. Stosuje się więc nie wymagający wyjaśnienia podział par na przestrzenne i płaskie. Powszechnie stosowanym kryterium podziału par jest rodzaj miejsca styku dwóch tworzących parę członów. Parami niższymi nazywa się pary, w których styk członów jest powierzchniowy, jak np. w parze przedstawionej na rys. 7a (powierzchnia kulista), parami wyższymi zaś, w których miejscem styku członów pary jest linia lub punkt (rys. 7b i c).

Wśród wielu stosowanych podziałów tych różnorodnych połączeń powszechnie stosuje się podział par na **klasy** według liczby **stopni swobody** jednego członu względem drugiego członu pary. Człon swobodny dysponuje, jak wiadomo, sześcioma stop-



Rys. 7. Przykłady podziału par ze względu na rodzaj styku: a) styk powierzchniowy (para niższa), b) styk liniowy (para wyższa), c) styk punktowy (para wyższa)

niami swobody. Najbardziej obrazowo i dogodnie – z punktu widzenia technicznego – można je przedstawić jako trzy niezależne od siebie ruchy postępowe T_x, T_y, T_z (translacje) wzdłuż trzech prostopadłych osi układu x, y, z oraz trzy ruchy obrotowe R_x, R_y, R_z (rotacje) wokół tych osi (rys. 8). W każdej parze tworzące ją człony nakładają na siebie pewne ograniczenia ruchu lub inaczej – **więzy**. Każdy człon pary rozporządza względem drugiego odpowiednio mniejszą liczbą stopni swobody. Kierując się taką liczbą posiadanych stopni swobody [1], [7], [13] dzieli się wszystkie pary na 5 klas, oznaczanych dalej cyframi rzymskimi I, II, III, IV i V*).



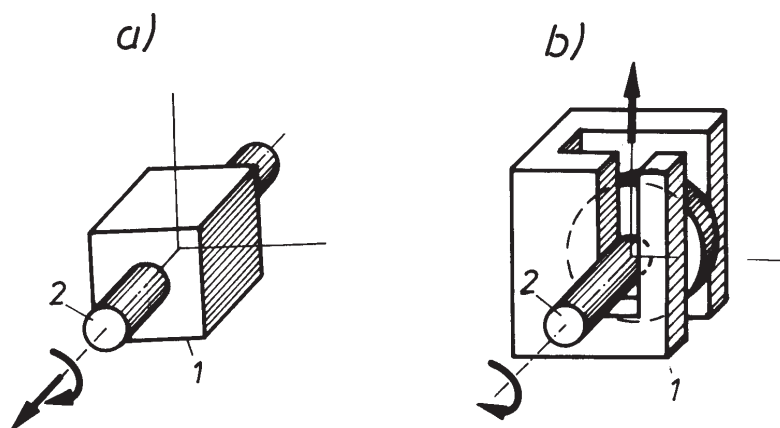
Rys. 8. Stopnie swobody i ich oznaczenia

W tej konwencji na przykład parę przedstawioną na rys. 7a, w której człon (2) może wykonywać względem członu (1) trzy ruchy obrotowe, zaliczymy do kl. III, parę wyższą z rys. 7c zaś do klasy V. Przykłady par wszystkich klas zestawiono w tabeli 1.

Każda z klas obejmuje cały zbiór par różniących się jednak między sobą nie tylko cechami konstrukcyjnymi, ale nawet kinematycznymi. Różnice te można prześledzić na przykładzie, zestawionych na rys. 9 i 10, par II klasy.

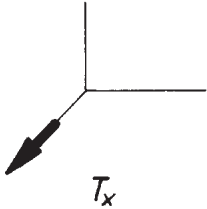
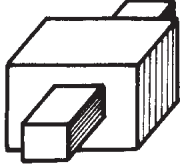
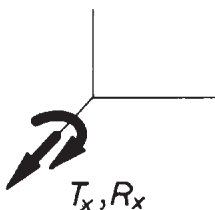
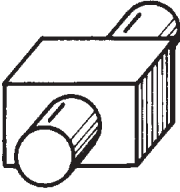
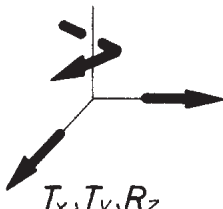
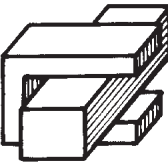
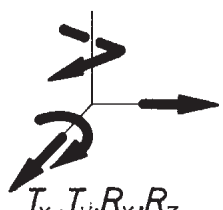
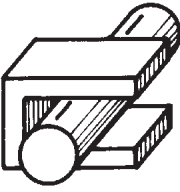

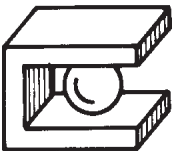
W parach a i b z rysunku 9, człon (2) dysponuje względem członu (1) możliwością obrotu i przesunięcia, lecz osie tych ruchów są do siebie bądź równoległe (rys.

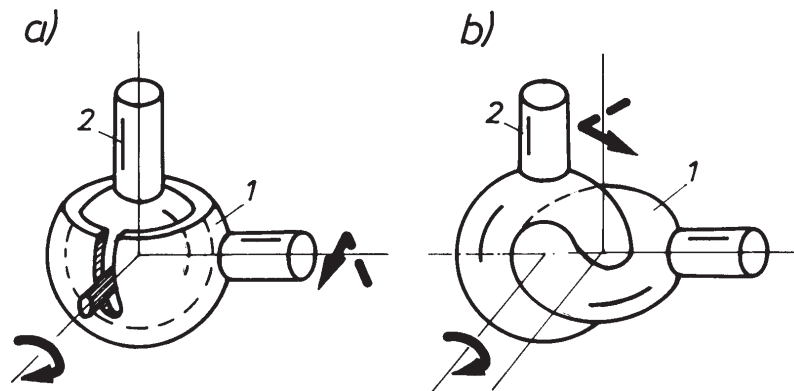
*) Można się spotkać również z innym podziałem na klasy [2], [9], [12], w którym o klasie decyduje liczba odebranych stopni swobody.



Rys. 9. Przykłady par II klasy: a) oś ruchu obrotowego równoległa do kierunku ruchu postępowego, b) oś ruchu obrotowego prostopadła do kierunku ruchu postępowego

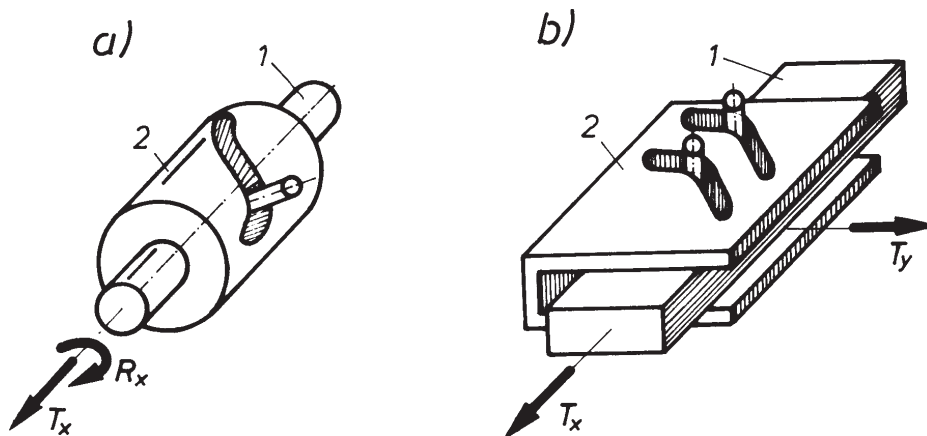
Tabela 1

KL.	SYMBOLE	PRZYKŁADY ROZWIĄZANIA
I	 T_x	
II	 T_x, R_x	
III	 T_x, T_y, R_z	
IV	 T_x, T_y, R_x, R_z	
V	 T_x, T_y, R_x, R_y, R_z	



Rys. 10. Przykłady par kinematycznych II klasy: a) przecinające się osie obrotów, b) zwichrowane osie obrotów

9a), bądź prostopadłe (rys. 9b). W parach przedstawionych na rys. 10a i 10b człon (2) może wykonywać 2 obroty, przy czym w przypadku a) osie tych obrotów przecinają się pod kątem prostym, w przypadku b) zaś są do siebie również prostopadłe, lecz wzajemnie zwichrowane. Nie zawsze też stopnie swobody odnoszą się do prostych ruchów postępowych lub obrotowych. W pewnych rozwiązaniach jeden prosty ruch względny dwóch rozpatrywanych członów wywołuje ściśle określony jeden lub kilka innych ruchów prostych. Znanym przykładem takiego zjawiska jest para śrubowa przedstawiona na rys. 11a. Ruchowi obrotowemu członowi (2) względem członu (1) towarzyszy ściśle określony ruch postępowy. Te ruchy T_x i R_x , dla odróżnienia od odpowiednich ruchów niezależnych, będziemy sygnalizować przez zapis ich symboli w jednym nawiasie okrągłym ($T_x R_x$). Kolejny przykład tego typu funkcyjnych powiązań ruchów dwóch członów pary przedstawiono na rys. 11b. Ruch postępowy T_x członu (2) względem członu (1) wywołuje jednocześnie przesunięcie wzdłuż osi y , a więc T_y .



Rys. 11. Przykłady par kinematycznych I klasy o funkcyjnym powiązaniu ruchów elementarnych: a) $T_x = f(R_x)$, b) $T_x = f(T_y)$

Tabela 2

	1	2	3	4	5	6
I	T_x	$(T_x T_y)$	$(T_x T_y T_z)$	$(T_x T_y T_z R_x)$	$(T_x T_y T_z R_x R_y)$	$(T_x T_y T_z R_x R_y R_z)$
	R_x	$(T_x R_y)$	$(T_x T_y R_z)$	$(T_x T_y R_x R_y)$	$(T_x T_y R_x R_y R_z)$	
		$(T_x R_x)$	$(T_x T_y R_x)$	$(T_x T_y R_x R_z)$		
		$(R_x R_y)$	$(T_x R_y R_x)$	$(T_x R_x R_y R_z)$		
			$(T_x R_y R_z)$			
		$(R_x R_y R_z)$				

Zgodnie z wprowadzoną umową, tej parze przypiszemy symbol $(T_x T_y)$. W obydwu przypadkach (rys. 11) ruch członu (2) względem (1) jest ściśle określony przez jeden ruch prosty, można więc mówić o jednym stopniu swobody i parze I klasy.

Już z tych kilku przykładów widać, że poszczególne klasy par obejmują liczne zbiory par różniących się liczbami możliwych ruchów postępowych i obrotowych, wzajemnym usytuowaniem osi tych ruchów oraz różnymi powiązaniem funkcyjnymi między tymi ruchami. W tej sytuacji celowy jest dalszy podział par należących do jednej klasy na **rzędy** i **odmiany**, według wymienionych cech kinematycznych. Istotę tego podziału ilustruje tabela 2, w której wszystkie możliwe odmiany par I kl. zestawiono w rzędy 1–6 według liczby ruchów funkcyjnych ze sobą związanych.

Pary płaskie

W zdecydowanej większości układów kinematycznych ruchy względne członów odbywają się w płaszczyznach wzajemnie równoległych. Mówimy wtedy o układach płaskich.

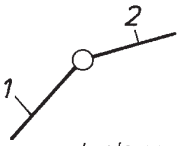
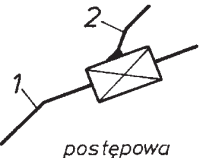
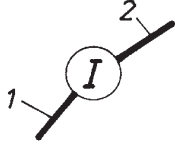
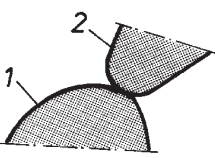
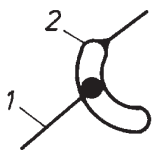
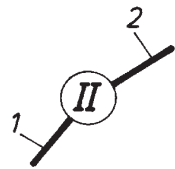
W takich układach występują niektóre tylko spośród omawianych par, zwane krótko parami płaskimi. Ruch członu można opisać dwoma ruchami postępowymi wzdłuż osi do siebie prostopadłych (np. x i y), ruchem obrotowym wokół osi prostopadłej do poprzednich (np. z) lub ich kombinacją. W tej sytuacji pary płaskie mogą zapewniać wzajemny ruch tworzących je członów w zakresie jednego lub dwóch stopni swobody, co oznacza, że mogą występować tylko jako pary I i II klasy, i to tylko wybranych odmian. Przykłady najprostszych i najczęściej spotykanych par kinematycznych zestawiono w tabeli 3.

1.3. Łańcuch kinematyczny

Łańcuchem kinematycznym nazywamy szereg członów połączonych ze sobą ruchowo. Kilka przykładów łańcuchów przedstawiono na rys. 12.

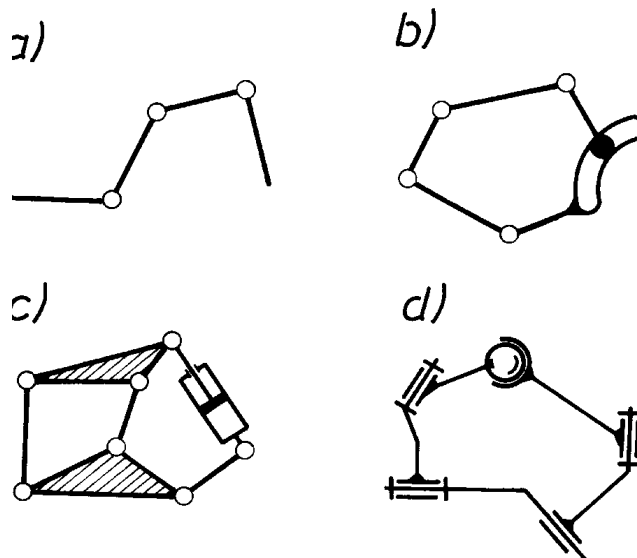
Według przyjętego kryterium podziału wyróżniamy trzy grupy łańcuchów:

Tabela 3

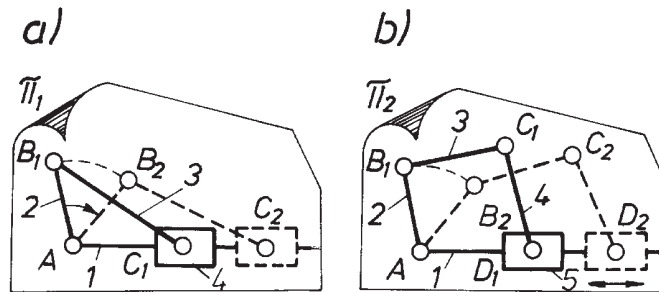
Kl.	Przykłady par płaskich		Symbole strukturalne
I	 <p style="text-align: center;"><i>obrotowa</i></p>	 <p style="text-align: center;"><i>postępowa</i></p>	
II	 <p style="text-align: center;"><i>krzywkowa</i></p>	 <p style="text-align: center;"><i>kulisowa</i></p>	

- a) płaskie, przestrzenne,
- b) otwarte, zamknięte,
- c) jednobieżne, niejednobieżne.

O **łańcuchu płaskim** mówimy wtedy, gdy wszystkie jego człony wykonują ruchy w płaszczyznach równoległych (rys. 12a, b, c). Gdy warunek ten nie jest spełniony jak to ma miejsce w przypadku ostatnim (rys. 12d) mówimy o łańcuchu przestrzennym.



Rys. 12. Przykłady łańcuchów kinematycznych



Rys. 13. Przykładowe łańcuchy kinematyczne: a) jednobieżny, b) niejednobieżny

Do **łańcuchów otwartych** zaliczymy te, które zawierają człony tworzące pary tylko z jednym członem. Na rys. 12a przedstawiono łańcuch otwarty, na rysunku 12 b, c, d natomiast **łańcuchy zamknięte**.

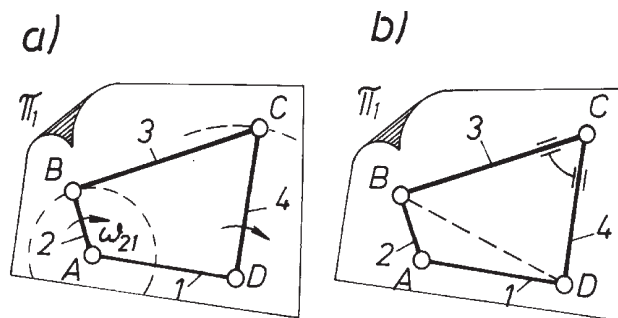
Zwróćmy uwagę na pewne zjawiska kinematyczne. Niech będzie dany płaski łańcuch kinematyczny złożony z czterech członów, połączonych jak na rys. 13a. Nie trzeba wykazywać, że w układzie tym każdemu położeniu członu (2) w płaszczyźnie związanej z członem (1) odpowiadają określone położenia pozostałych członów (3) i (4). Oznacza to, że zadanemu ruchowi członu (2) względem dowolnego innego członu odpowiadają określone ruchy pozostałych członów względem siebie. Łańcuch o takich właściwościach nazywamy **jednobieżnym**.

W układzie pięcioc członowym, przedstawionym na rys. 13b, ruch względny członu (2) względem członu (1) nie warunkuje jednoznacznych ruchów względnych pozostałych członów. Jest to przykład łańcucha **niejednobieżnego**. Oczywiście i w tym łańcuchu można otrzymać ruchy ściśle określone, jeżeli jednocześnie będziemy napędzać jakikolwiek inny człon, np. obracając korbą (2) przesuwając wzdłuż prowadnicy suwak (5).

Już z tych przykładów widać, że jednobieżność wiąże się z jednej strony z liczbą członów czynnych (napędzających), z drugiej zaś z pewnymi cechami budowy układu lub – jak powiedzmy inaczej – ze **strukturą** układu.

1.3.1. Ruchliwość łańcucha

Ruchliwość łańcucha lub stopień ruchliwości w sensie fizycznym określa, przy istnieniu pewnych zastrzeżeń, liczbę stopni swobody, jakimi dysponują człony układu względem jednego z nich. Ruchliwość można inaczej określić liczbą ograniczeń ruchów prostych (więzów), które nałożone na ruchome człony układu powodują, że układ staje się sztywny. W płaskim łańcuchu przegubowym $ABCD$ (rys. 14a) człony dysponują względem siebie jednym stopniem swobody ($W = 1$), o czym można się przekonać choćby po zbudowaniu jego fizycznego modelu. Jeżeli jednak w tym modelu wyeliminujemy jedną możliwość ruchu względnego członów, np. w parze C (rys. 14b), będziemy mieli do czynienia z układem sztywnym ($W = 0$). Takiemu układowi przypiszemy więc ruchliwość $W = 1$. W ten sam sposób można się przekonać, że



Rys. 14. Ilustracja pojęcia ruchliwości łańcucha kinematycznego: a) łańcuch o ruchliwości $W = 1$, b) układ sztywny

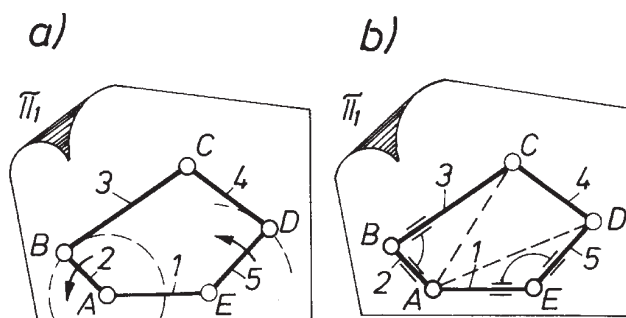
układ $ABCDE$, z rys. 15a, charakteryzuje się ruchliwością $W = 2$; do otrzymania zeń układu sztywnego potrzeba dwóch ograniczeń ruchu, np. w parach B i E (rys. 15b).

Układ jest jednobieżny, jeżeli liczba członów czynnych odpowiada jego ruchliwości. Ruchliwość układu można więc w prostych przypadkach ocenić intuicyjnie, można jednak również dokonać tego w sposób formalny, stosując tzw. wzory strukturalne (podrozdz. 1.5).

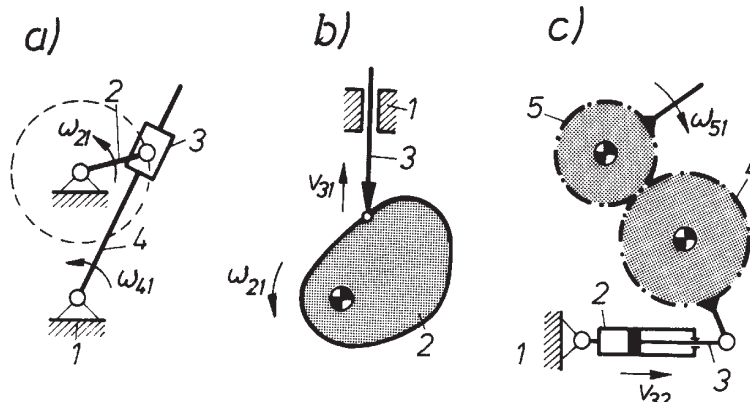
1.4. Mechanizm, układ, maszyna

1. Pojęciem **mechanizm** będziemy określać zamknięty łańcuch kinematyczny z jednym członem spełniającym funkcję podstawy, charakteryzujący się liczbą członów czynnych równą jego ruchliwości. Będziemy więc nazywać mechanizmem układ jednobieżny umożliwiający przekazywanie ruchu, często z jednoczesną zmianą jego parametrów. Oczywiście, realizacja tego zadania jest możliwa z udziałem sił, ale istotą mechanizmu jest ruch. Kilka przykładów mechanizmów zestawiono na rys. 16.

Na rysunku 16a przedstawiono układ umożliwiający zamianę ruchu obrotowego członu (2) względem podstawy (1) na ruch obrotowo-zwrotny (wahadłowy) członu (4) względem podstawy. Mechanizm krzywkowy (rys. 16b) zamienia ruch obrotowy krzywki (2) na ruch postępowy członu (3), mechanizm zębaty zaś (rys. 16c) umożli-



Rys. 15. Ilustracja pojęcia ruchliwości łańcucha kinematycznego: a) łańcuch o ruchliwości $W = 2$, b) układ sztywny



Rys. 16. Przykłady mechanizmów: a) jarzmowy, b) krzywkowy, c) zębaty z członem czynnym w postaci siłownika hydraulicznego

wia zamianę względnego ruchu postępowego w siłowniku hydraulicznym AB na ruch obrotowy koła (5).

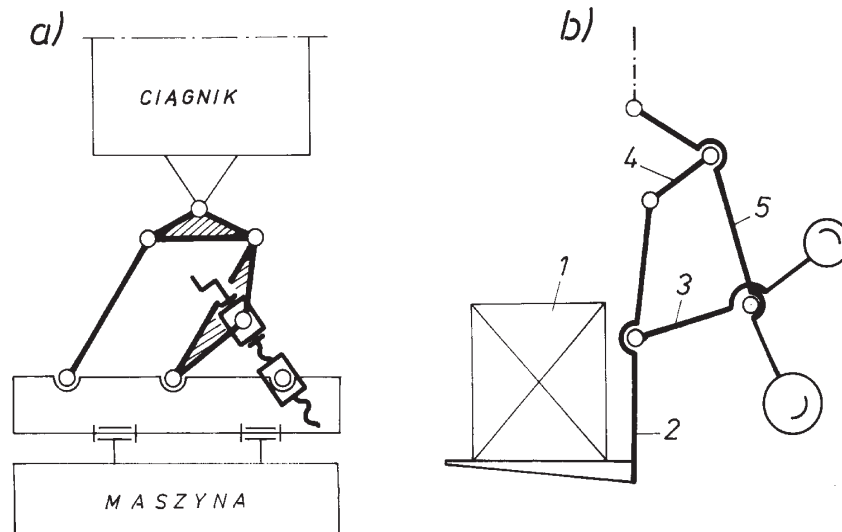
2. Istnieje wiele urządzeń o budowie opartej na łańcuchu kinematycznym, które nie spełniają wszystkich w/w kryteriów – nie zasługują na miano mechanizmu. Są więc urządzenia, które służą do przekazywania sił, jednak bez udziału ruchu, a więc jako łańcuchy sztywne, przynajmniej w pewnych fazach pracy. Są łańcuchy kinematyczne niejednolite, występują wreszcie łańcuchy kinematyczne bez wyraźnej akcentowanej podstawy itp. Wszystkie takie urządzenia, wraz z całą grupą zdefiniowanych mechanizmów, będziemy obejmować szerokim pojęciem **układów mechanicznych** lub **układów kinematycznych**.

Przykładem układu mechanicznego może być urządzenie zaczepowe (rys. 17a) umożliwiające przeniesienie siły uciążu ciągnika na ramę maszyny. Układ ten wykonuje swoje zadanie w zasadzie bez udziału ruchu względnego tworzących go członów. Ruch względny członów, potrzebny w fazie jego ustawiania, występuje w tym przypadku przed jego obciążeniem.

Na rysunku 17b przedstawiono schematycznie układ pewnego zawiesia do przeniesienia ładunków paletowych. Układ ten, dzięki odpowiednio dobranym przeciwcieżarom, wisi swobodnie i umożliwia przeniesienie elementów, zachowując potrzebne poziome ich położenie. Istotny jest tu więc nie ruch względny czy wzajemne położenie członów, lecz położenie jednego członu (2) względem ziemi.

3. W języku potocznym pojęcie **maszyny** odnosi się do wielu różnorodnych urządzeń i podkłada się pod nie różne znaczenia. Tu maszyną będziemy nazywać urządzenie, w którym z udziałem ruchu mechanicznego zachodzi proces energetyczny polegający na wykonywaniu pracy użytecznej lub przekształceniu energii. Stosownie do tego, maszyny dzielimy na:

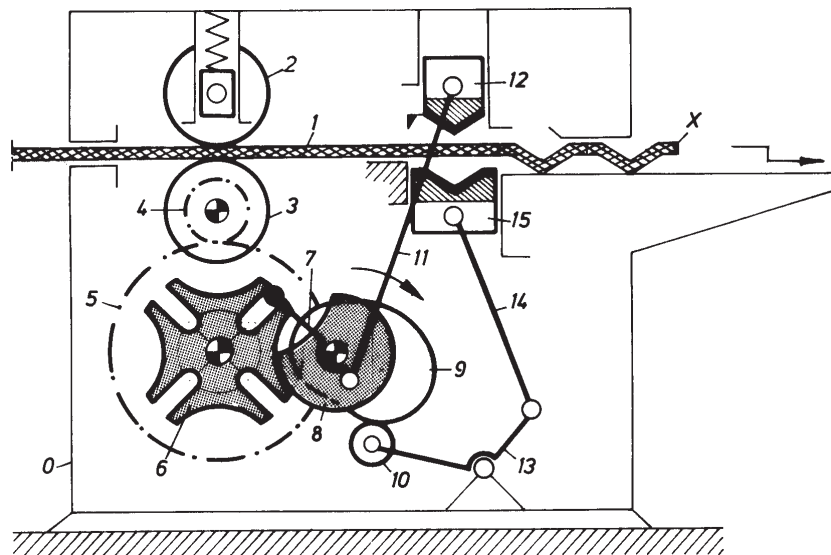
1. **Maszyny robocze**, w których właściwy efekt uzyskuje się przez zamianę dostarczonej energii w pracę (tokarka, prasa, koparka).



Rys. 17. Przykłady układów mechanicznych: a) układ zaczepu, b) układ zawiesia

2. **Silniki i generatory**, w których zachodzi przekształcanie jednego rodzaju energii w drugi (silnik spalinowy, generator prądu elektrycznego...).

Istotną cechą maszyny jest to, że zawiera co najmniej jeden, a zwykle kilka odpowiednio ze sobą współpracujących mechanizmów. Rozpatrzmy dla przykładu maszynę przeznaczoną do seryjnego wytłaczania z taśmy (1) półwyrobu x (rys.18). Można w niej wyróżnić mechanizmy:



Rys. 18. Przykład maszyny do przeróbki plastycznej z zaakcentowaniem mechanizmów składowych

- zębaty (złożony z członów 0, 4, 5),
- cierny (0, 2, 1, 3),
- maltański (0, 7, 6),
- krzywkowy (0, 9, 10, 13),
- dźwigniowe korbowo-wodzikowe: (0, 8, 11, 12) i (0, 13, 14, 15).

Podobnie, w każdym silniku spalinowym można wyróżnić: układ korbowo-tłokowy, mechanizm krzywkowy rozrządu, mechanizmy przekładni itd.

Na inny aspekt pojęcia maszyny zwrócimy uwagę w rozdz. 12.

1.5. Wzory strukturalne

Wszystkie człony występujące w układach kinematycznych podzielono, ze względu na liczbę półpar, na typy N_i (rys. 6). Jeżeli przez n_i oznaczyć liczbę członów N_i , przez n zaś ogólną liczbę członów w układzie, to oczywiście

$$n = n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_w. \quad (1)$$

Na każdą parę składają się dwie półpary. Jeżeli przez p oznaczyć ogólną liczbę par w układzie, przez m natomiast liczbę półpar, to

$$m = 2p, \quad (2)$$

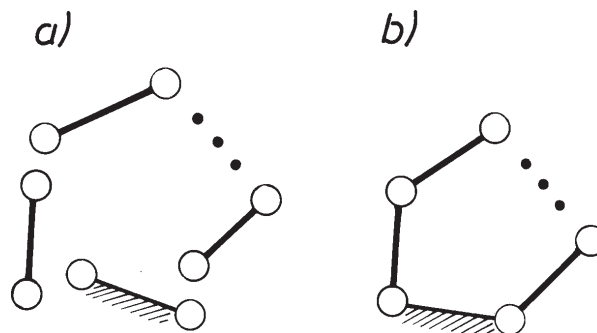
albo inaczej

$$m = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + n_w. \quad (3)$$

Po uwzględnieniu wzorów (2) i (3) otrzymamy

$$2p = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + n_w. \quad (4)$$

Zarówno ze względu na analizę, jak i syntezę układów kinematycznych istotny jest związek, jaki zachodzi między budową układu a jego ruchliwością. W celu wyprowadzenia tego związku rozważmy dowolny łańcuch kinematyczny (rys. 19) zbudowany z n członów. Jeden z członów układu spełnia rolę podstawy, a zatem liczba ruchomych (względem podstawy) członów wynosi $n - 1$.



Rys. 19. Rysunek pomocniczy do wyprowadzenia wzorów strukturalnych: a) n członów przygotowanych do połączenia w łańcuch, b) łańcuch złożony z n członów

Wszystkie człony ruchome przed wejściem w pary kinematyczne (rys. 19a) dysponowały łącznie

$$x = 6(n - 1)$$

stopniami swobody. Wskutek połączenia tych członów ze sobą i z podstawą (rys. 19b) liczba ich stopni swobody została pomniejszona. Jeżeli w rozpatrywanym łańcuchu przez p_i oznaczyć liczbę par i -tej klasy, przy czym w każdej parze jeden człon odbiera drugiemu $(6 - i)$ stopni swobody, to łącznie wszystkie ruchome człony tracą

$$y = \sum_1^5 (6 - i)p_i$$

stopni swobody.

W tej sytuacji ruchliwość W , rozumiana jako liczbą pozostałych stopni swobody ruchomych członów układu, wyrazi się wzorem

$$W = x - y,$$

czyli

$$W = 6(n - 1) - \sum_1^5 (6 - i)p_i. \quad (5)$$

Odpowiednio dla łańcuchów płaskich

$$W = 3(n - 1) - \sum_1^2 (3 - i)p_i. \quad (6)$$

Po rozpisaniu wzorów (5) i (6) otrzymamy dla łańcuchów przestrzennych

$$W = 6(n - 1) - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - 1p_5 \dots, \quad (7)$$

dla łańcuchów płaskich

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - 1p_2. \quad (8)$$

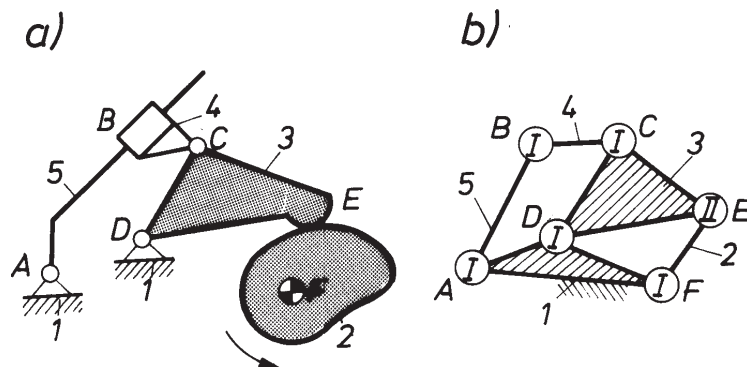
Na przykład dla mechanizmu krzywkowego z rys. 20 otrzymamy

$$W = 3(5 - 1) - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 1.$$

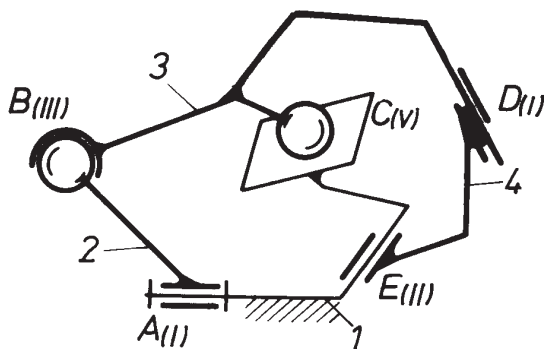
Oznacza to, że przy jednym członie czynnym (krzywka 2) układ jest jednobieżny. Tym razem wynik był oczywisty również intuicyjnie. Trudniej byłoby już jednak dokonać tego w przypadku nawet tak prostego układu przestrzennego, jak przedstawiony na rys. 21. Stosując środki formalne ustalimy: $n = 4$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_5 = 1$ i po podstawieniu do wzoru (7) otrzymamy

$$W = 6(4 - 1) - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0.$$

Wynik $W = 0$ oznacza tu, że układ jest sztywny. Mimo ruchliwych połączeń nie występują w tym układzie ruchy względne członów.



Rys. 20. Schematy mechanizmu jarzmowo-krzywkowego: a) kinematyczny, b) strukturalny



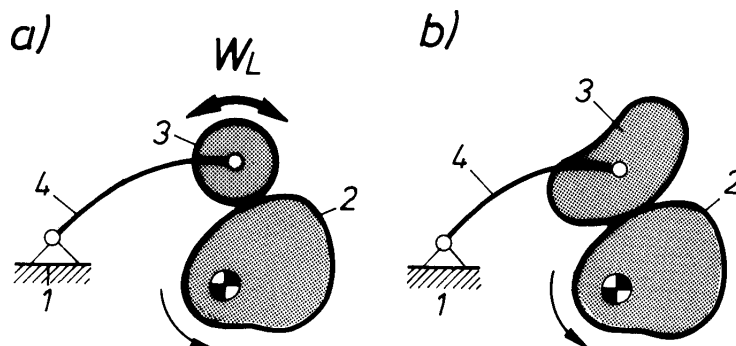
Rys. 21. Przykłady przestrzennego złożonego łańcucha kinematycznego

1.6. Ruchliwość lokalna

Przeanalizujmy mechanizm przedstawiony na rysunku 22. Nietrudno się zgodzić z tym, że przy zadanej prędkości kątowej ω_2 krzywki (2) popychacz (4) wykonuje ruch ściśle określony. Można by z tego wysunąć wniosek, że układ jest jednobieżny, a zatem charakteryzujący się ruchliwością $W = 1$ (przy jednym członie czynnym). Tymczasem zastosowawszy wzór (8) otrzymamy

$$W = 3(4 - 1) - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2.$$

Pozorną niezgodność wyników tłumaczy się tym, że rachunek formalny, poza wspomnianą już ruchliwością $W = 1$ popychacza (4), wykazał bezbłędnie również jeden stopień swobody krążka (3). Krążek ten może się obracać wokół własnej osi, nie zakłócając zresztą w żadnym stopniu istotnego tu ruchu popychacza (4). Wiąże się to tym razem z kształtem członu (3) i jego centrycznym ułożyskowaniem (por. przypadek ogólny na rys. 22b). Tego typu lokalne stopnie swobody członu lub pewnej grupy członów, nie zmieniające ruchliwości pozostałej części łańcucha, nazywa się **ruchliwością lokalną**. Istotę tego zjawiska można prześledzić również na przykładzie układu przestrzennego (rys. 23). Łącznik (3), pośredniczący tu w jednoznacznym przeka-



Rys. 22. Ilustracja pojęcia ruchliwości lokalnej: a) mechanizm o ruchliwości $W = 2$ (ruchliwość lokalna członu 3), b) mechanizm o ruchliwości $W = 2$ (brak ruchliwości lokalnej)

zywaniu ruchu z członu czynnego (2) na człon bierny (4), może, jak widać z rysunku, obracać się wokół własnej osi przechodzącej przez środki obu przegubów kulistych. I znów ruch ten, nieistotny ze względu na realizowany ruch członu biernego, zostanie w rachunku odnotowany. Mamy tu bowiem:

$$W = 6(4 - 1) - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2.$$

Z dokonanych rozważań wynika, że na użytek praktyczny należy omówione wzory określające ruch uzupełnić do postaci

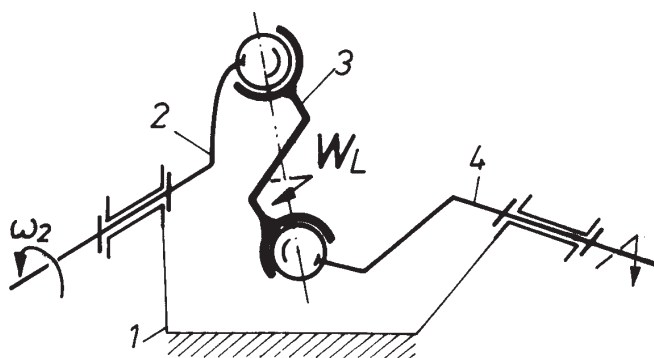
$$W = W_w + W_L, \quad (9)$$

w której: W – ruchliwość liczona według zależności (7) i (8),

W_w – ruchliwość wykorzystywana,

W_L – ruchliwość lokalna członu lub grupy członów.

Właściwa interpretacja wyników otrzymanych ze wzoru określającego ruchliwość wymaga znajomości W_L . Niestety, dotychczas nie można polecić dostatecznie ogólnej i prostej metody określania ruchliwości lokalnej.



Rys. 23. Przykład mechanizmu przestrzennego z ruchliwością lokalną

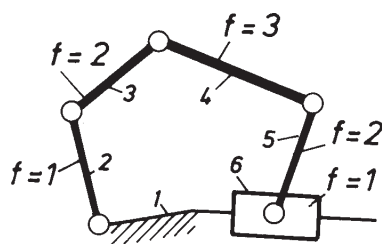
1.7. Ruchliwość zupełna i niezupełna

Rozpatrując ruchliwość układów należy pamiętać, że uzyskanego za pomocą wzorów strukturalnych wyniku nie można interpretować jednoznacznie. W pewnych przypadkach wynik określa liczbę stopni swobody wszystkich członów względem podstawy. Takie zjawisko występuje w prostych układach charakteryzujących się ruchliwością $W = 1$, np. w układzie przedstawionym na rys. 14a. Każdy z członów (2, 3 i 4) ma względem podstawy jeden stopień swobody. Innym razem ruchliwość W określa liczbę stopni swobody członu najbardziej „ruchliwego”. Z takim przypadkiem spotykamy się w układzie przedstawionym na rys. 24. Ruchliwość $W = 3$ odpowiada tu trzem stopniom swobody ($f = 3$) członu (4) względem podstawy. Z pozostałych członów, (3) i (5) mają po dwa ($f = 2$), (2) i (6) zaś po jednym stopniu swobody ($f = 1$) względem podstawy.

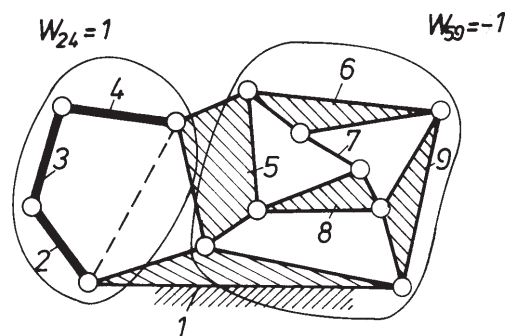
Kolejny przypadek zilustrowano na rys. 25. Obliczona według wzoru (8) ruchliwość daje $W = 0$. Nietrudno zauważyć, że na ten wynik złożyły się: ruchliwość $W_{24} = 1$ (lewej strony) i $W_{59} = -1$ (prawej strony układu). W tym przypadku wynik $W = 0$ nie odpowiada sytuacji ruchowej żadnego członu.

Jest jeszcze inny aspekt pojęcia ruchliwość [7]. Na rysunku 26 przedstawiono dwa układy zbudowane z tej samej liczby takich samych członów i par. Oczywiście, również ruchliwość obydwu układów, obliczona za pomocą wzoru (8), jest identyczna i wynosi $W = 1$. Jak nietrudno zauważyć, w układzie z rys. 26a człony 1, 4, 5, 6 i 7 tworzą sztywną figurę, ruchliwość $W = 1$ zaś dotyczy tylko członów (2) i (3), natomiast w układzie z rys. 26b możliwością ruchu dysponują jednocześnie wszystkie człony względem podstawy.

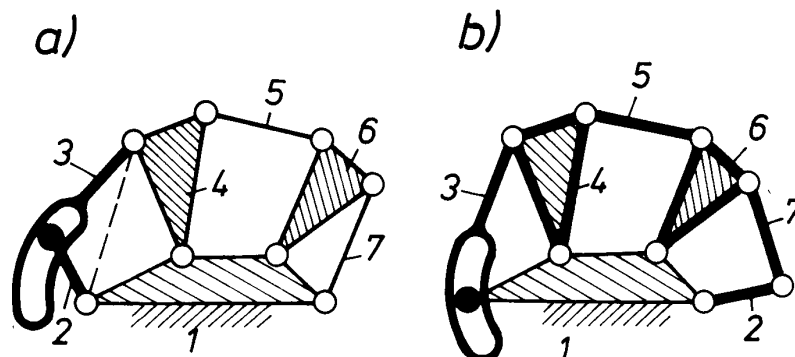
Przytoczone przykłady sugerują potrzebę wprowadzenia nowych określeń umożliwiających bliższy opis omawianych tu cech układów ruchomych. Gdy ruchliwość $W = 1$, tzn. wszystkie człony układu wykonują ruchy względem siebie, wówczas mówimy o tzw. **ruchliwości zupełnej**, gdy zaś dodatkowo wszystkie ruchome człony dysponują względem podstawy taką samą liczbą stopni swobody f , mówimy o **ruchli-**



Rys. 24. Schemat układu kinematycznego z podanymi stopniami swobody poszczególnych członów



Rys. 25. Przykład układu kinematycznego o ruchliwości niezupełnej



Rys. 26. Przykłady łańcuchów kinematycznych o $W = 1$: a) ruchliwość niepełna, b) ruchliwość pełna i jednorodna

wości jednorodnej. Stosownie do tego, ruchliwość układu z rys. 24 określilibyśmy jako pełną, lecz niejednorodną, ruchliwość układu z rys. 25 jako **niepełną**, układowi z rys. 26b zaś przypisywalibyśmy ruchliwość pełną i jednorodną.

1.8. Więzy bierne

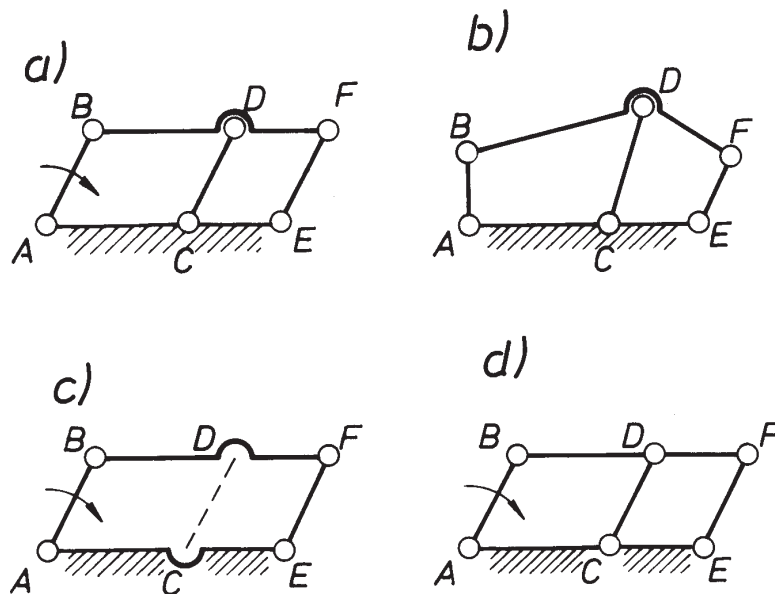
W układzie przedstawionym na rysunku 27a zachodzą następujące związki: $AB = CD = EF$ oraz $AC = BD$ i $CE = DF$. Przy takim wykonaniu układu może być wykorzystany do jednoznacznego przekazywania ruchu obrotowego (w określonych granicach) z członu AB na EF . Sugerowałoby to, że przy jednym członie czynnym należy się spodziewać ruchliwości układu $W = 1$. Taką ruchliwość można stwierdzić w praktyce, np. na wykonanym modelu. Jednocześnie, po zastosowaniu wzoru (8) otrzymamy

$$W = 3(5 - 1) - 2 \cdot 6 = 0.$$

Wynik obliczeń wskazuje na to, że mamy do czynienia z układem sztywnym. Tak też jest w istocie w przypadku ogólnym (rys. 27b). Fizyczną ruchliwość $W = 1$ można przypisać omawianemu układowi tylko wtedy, gdy będą spełnione podane równości. Wtedy bowiem pewne więzy, jako powtórzenia już istniejących, nie dają o sobie znać. Takie dodatkowe i zbędne kinematycznie ograniczenia będziemy nazywać więzami biernymi. Liczbę więzów biernych R_b w łańcuchu można określić, jeżeli są znane ruchliwość rzeczywista W_{rz} (realizowana) oraz ruchliwość teoretyczna W (obliczona ze wzoru (6):

$$R_b = W_{rz} - W. \quad (10)$$

W przykładowym układzie (rys. 27a) $W_{rz} = 1$, $W = 0$, czyli $R_b = 1$. Do układów kinematycznych z liczbą więzów biernych $R_b \neq 0$ stosuje się, nie bez racji, określenie nieracjonalne. Określenie to wydaje się trafne, zwłaszcza jeżeli uzmysłowić sobie, jak



Rys. 27. Ilustracja pojęcia więzów biernych

niełatwo w praktyce spełnić wiążące się z więzami biernymi wymagania dokładnościowe.

Ponieważ uzyskanie absolutnej dokładności jest zwykle niemożliwe, istnienie więzów biernych oznacza jednocześnie:

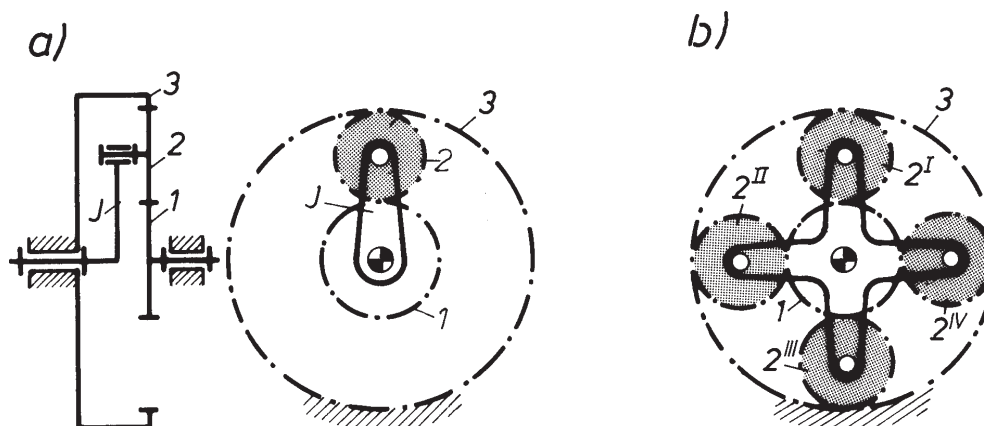
- trudności montażowe,
- pojawienie się dodatkowych naprężeń wewnętrznych w członach układu,
- przyspieszone zużycie elementów węzłów kinematycznych,
- inne ujemne skutki.

Z tego też względu rozwiązań takich ogólnie należy unikać. W omawianym przypadku można tego dokonać, np. przez rezygnację z członu dodatkowego DC (rys. 27c) lub zastąpienie jednego członu BDF dwoma członami BD i DF (rys. 27d).

Z układami zawierającymi więzy bierne można się spotkać w praktyce niestety bardzo często, przy czym są one częściej wynikiem nieświadomości projektującego niż z przemyślanej decyzji. Przykładem takiego układu z więzami biernymi z przekonującym uzasadnieniem może być przekładnia obiegowa (rys. 28). Do jednoznacznego przeniesienia ruchu, np. z koła (1) na jarzmo J (rys. 28a) wystarczy jedno koło satelitarne (2), instaluje się jednak zwykle większą liczbę satelitów (rys. 28b) w celu uzyskania rozłożenia nacisków międzyzębnych.

Niezamierzone zapewne, bo niczym nie usprawiedliwione, wydaje się rozwiązanie pewnego klinowego układu zaciskowego (rys. 29a). Na podstawie wzoru strukturalnego (7) dla układów przestrzennych otrzymamy

$$W = 6(3 - 1) - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1.$$

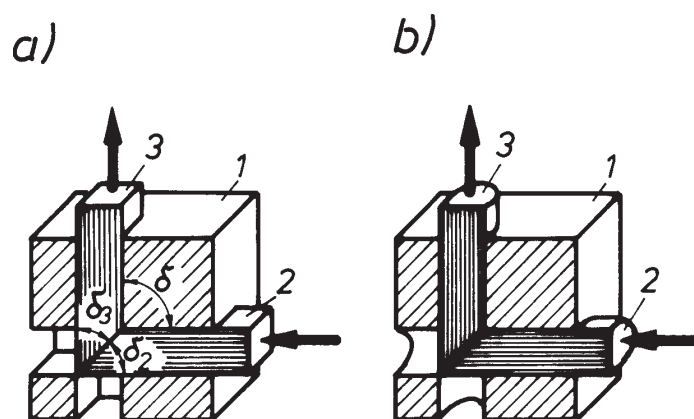


Rys. 28. Przykłady przekładni obiegowej: a) bez więzów biernych, b) z więzami biernymi

Układ jest przesztyniony. Potrzebne przeniesienie ruchu członu (2) na ruch członu (3) można uzyskać i przy tym rozwiązaniu, lecz wymaga to zachowania pewnych warunków dokładności. Bez tego typu ograniczeń będzie działać niezawodnie rozwiązanie przedstawione na rys. 29b, w którym, w wyniku podwyższenia klasy par 1-2 i 1-3, człony (2) i (3) będą oddziaływać na siebie całymi płaszczyznami klinowymi niezależnie od wartości kątów ich ścięcia.

W ogólnym przypadku w łańcuchach kinematycznych mogą występować zarówno więzy bierne, jak i ruchliwość lokalna. Wtedy ruchliwość rzeczywistą określonego członu lub grupy członów biernych można wyznaczyć z następującej zależności

$$W_{rz} = W - W_L - R_b \quad (11)$$



Rys. 29. Mechanizm klinowy: a) z więzami biernymi, b) bez więzów biernych

Omówione zagadnienia ruchliwości, ruchliwości lokalnej, zupełnej, jednorodnej oraz więzów biernych umożliwiają, za pomocą wzorów strukturalnych (5)–(11), określenie rzeczywistej sytuacji ruchowej w łańcuchu kinematycznym. Tym samym wzory te umożliwiają analizę i kontrolę poprawności intuicyjnych założeń dokonanych podczas projektowania układów kinematycznych.

Wyprowadzone związki (5)–(11) wraz z (1)–(4) mogą być również stosowane skutecznie w procesie wyczerpywania możliwych form strukturalnych układów spełniających z góry założone wymagania. Postępowanie takie, leżące u podstaw tzw. syntezy strukturalnej, nie będzie przedmiotem dalszych rozważań.

2. Klasyfikacja mechanizmów

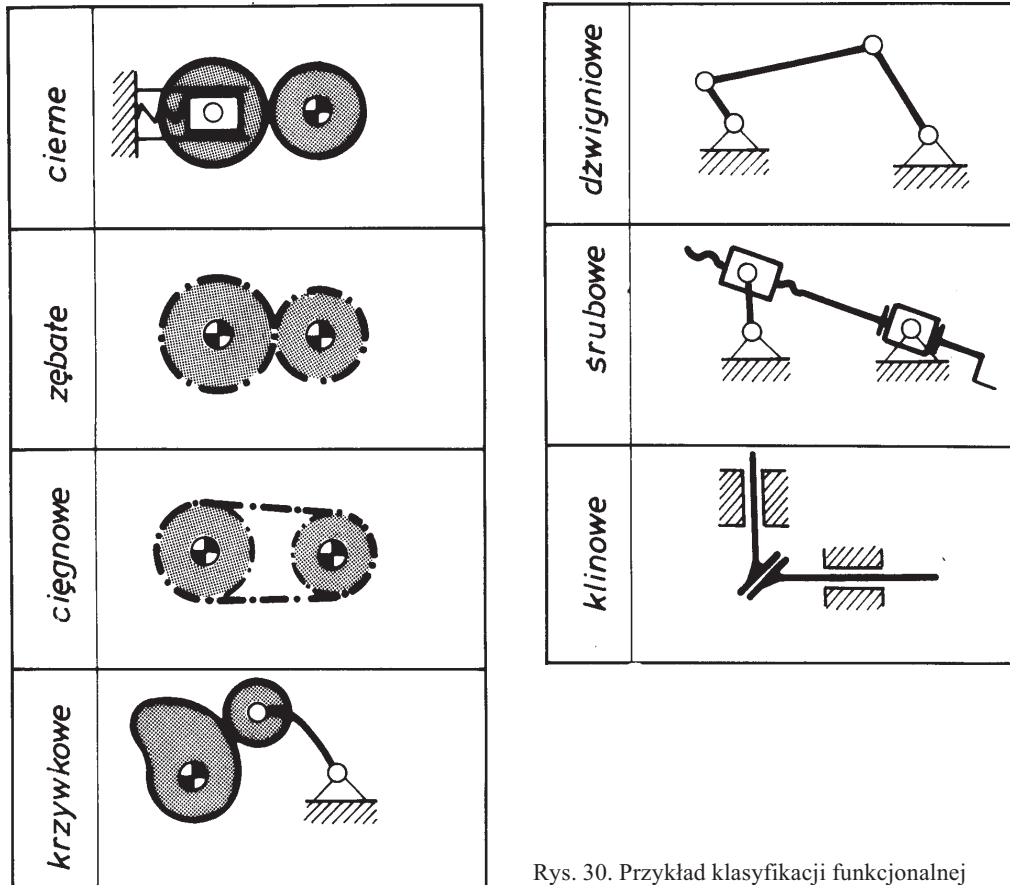
Bogactwo i różnorodność mechanizmów spotykanych w budowie maszyn stwarza potrzebę określonego ich uporządkowania i systematycznego uszeregowania lub wręcz pewnego podziału według określonych zasad i kryteriów. Właściwie opracowana klasyfikacja mogłaby z jednej strony ułatwić i inspirować dobór mechanizmów do określonych zastosowań, z drugiej zaś umożliwić opracowanie w miarę ogólnych metod analizy kinematycznej i dynamicznej oraz ogólnych podstaw i metod syntezy nowych mechanizmów. Niestety, nie istnieje dotychczas taka w pełni zadowalająca klasyfikacja, która byłaby jednocześnie naukowo uzasadniona, metodologicznie racjonalna i użyteczna w praktyce inżynierskiej. Licznie podejmowane od wielu lat prace w tym zakresie poszły w zasadzie w dwu odmiennych kierunkach, a ich wynikiem są różne wersje tzw. klasyfikacji funkcjonalnych i kolejne propozycje klasyfikacji strukturalnej.

1. **Klasyfikacja funkcjonalna** otwiera historyczny już (rok 1875) podział mechanizmów zasugerowany przez Reuleaux. Istotę tego podziału, przewijającą się zresztą przez kolejne propozycje, można przedstawić na przykładzie jednej z ostatnich klasyfikacji [2] (rys. 30). Klasyfikacja ta, jak zresztą inne tego typu, nie spełnia podstawowych kryteriów każdej klasyfikacji naukowej, a mianowicie:

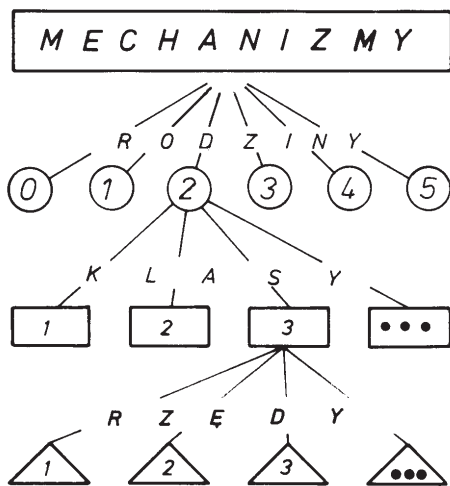
- a) kryterium podziału według jednej zasady,
- b) kryterium wyłączności,
- c) kryterium zupełności.

Nie rozwijając bliżej tych kryteriów, zwrócimy tylko uwagę, że pozostając przy tej klasyfikacji, mielibyśmy sporo kłopotu z zakwalifikowaniem ogromnej liczby mechanizmów bardziej złożonej. Taki podział mechanizmów nie sugeruje również odpowiedniego podziału metod ich analizy.

2. **Klasyfikacja strukturalna.** Niedoskonałym próbom klasyfikacji funkcjonalnych można przeciwstawić klasyfikację, sugerującą możliwość podziału wszystkich mechanizmów według cech strukturalnych. Klasyfikacja ta została zapoczątkowana przez Assura (rok 1914), i była kolejno uzupełniana. Podstawowe jej zasady prześledzimy pobieżnie na przykładzie opracowania Artobolewskiego. Wszystkie mechanizmy dzieli się na **rodziny** (rys. 31), przy czym kryterium takiego podziału jest liczba ogólnych więzów nałożonych na człony mechanizmu. Istotę tego podziału wyjaśniają przykłady mechanizmów reprezentujących poszczególne rodziny (rys. 32). Do rodziny 0. należą więc wszystkie mechanizmy przestrzenne, na które nie nałożono żadnych ograniczeń (rys. 32a). Rodzinę 1. tworzą mechanizmy, których człony nie mogą korzystać z jednego (tego samego) stopnia swobody. Na przykład w mechanizmie z rys. 32b



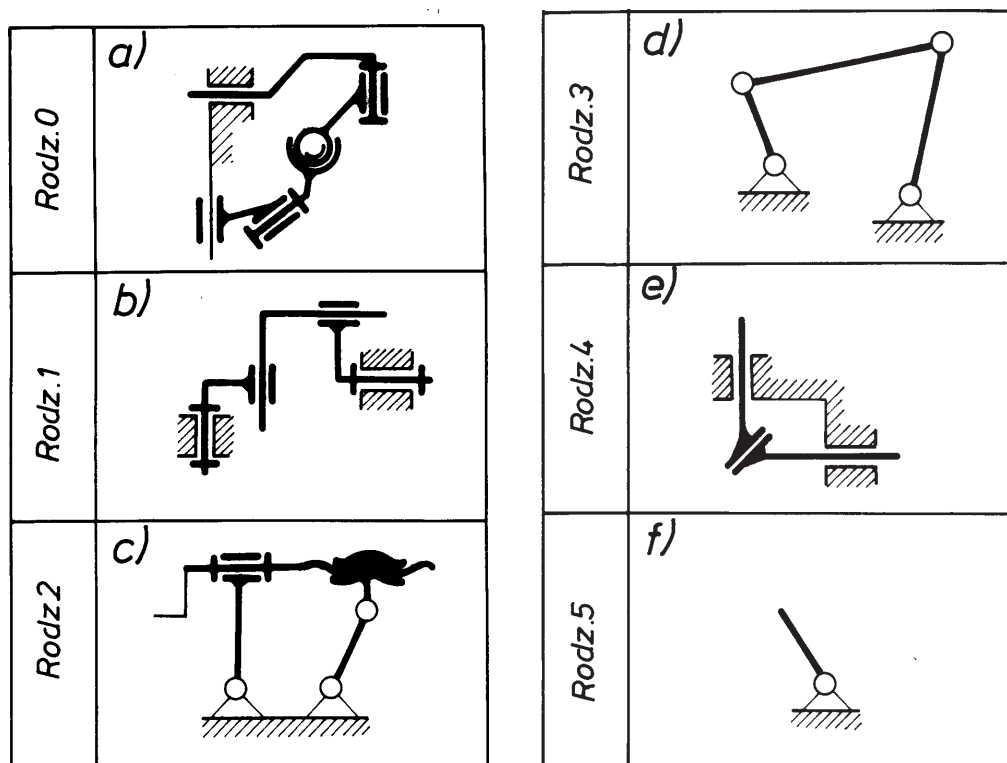
Rys. 30. Przykład klasyfikacji funkcjonalnej



Rys. 31. Ilustracja klasyfikacji strukturalnej

żaden z członów nie może wykonywać obrotu wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Do rodziny 3. należą między innymi mechanizmy płaskie (rys. 32d), gdyż członom takich mechanizmów odebrano generalnie 3 stopnie swobody itd.

W ramach każdej rodziny dzieli się mechanizmy na **klasy**, przy czym o klasie mechanizmu decyduje najwyższa klasa grupy. Pojęciem **grupy** określa się łańcuch kinematyczny, w którym ruchowe połączenie wolnych członów z podstawą zamienia go w układ sztywny. Oznacza to, że dla grup, zwanych dalej grupami Assura, obowiązuje równanie strukturalne w postaci



Rys. 32. Przykłady mechanizmów z podziałem na rodziny

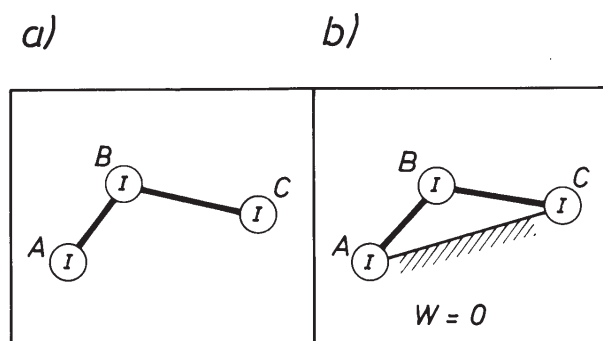
$$3k - 2p_1 - p_2 = 0 \quad (12)$$

lub w razie uwzględnienia istnienia tylko par I klasy

$$3k = 2p_1, \quad (13)$$

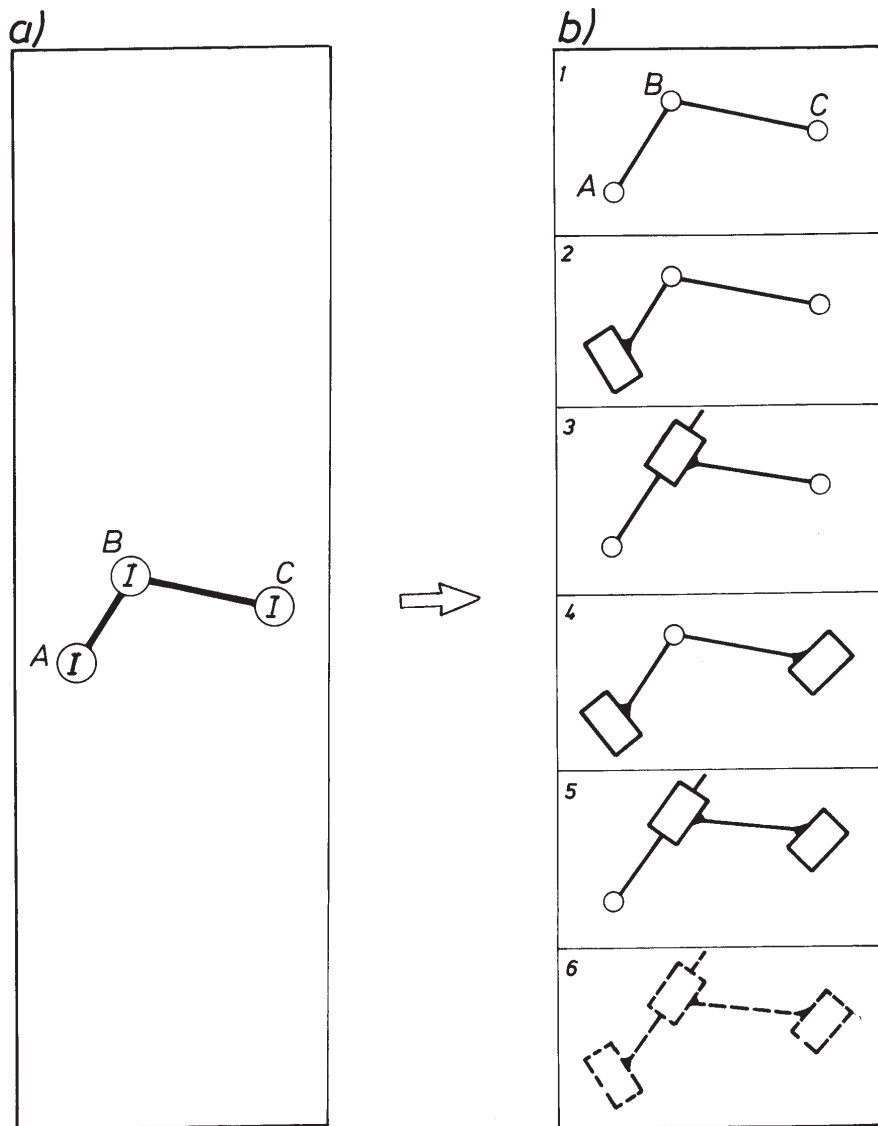
gdzie: k – liczba członów grupy,

p_1 – liczba par kinematycznych I klasy.

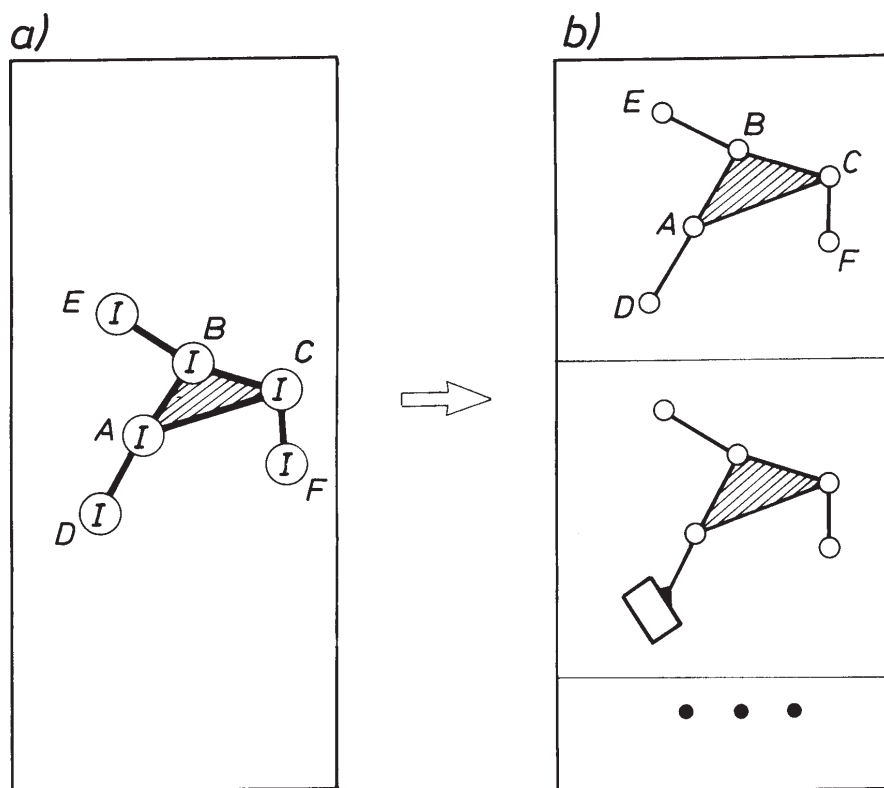


Rys. 33. Przykład grupy Assura: a) grupa ABC, b) grupa przyłączona do podstawy jest układem sztywnym

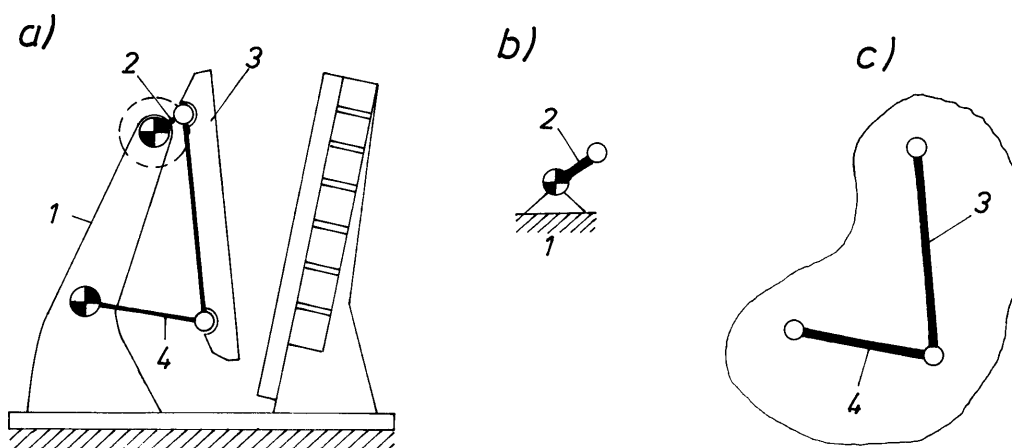
Na podstawie warunku (13) można określać formy strukturalne grup Assura kolejnych klas. Najprostszą grupę, tzw. grupę II klasy, charakteryzują liczby $k=2$, $p_1=3$. Schemat strukturalny tej grupy przedstawiono na rys. 33a, przy czym parę B będziemy nazywać parą wewnętrzną, pary A i C zaś parami zewnętrznymi. Nietrudno sprawdzić, że po podłączeniu tego dwuczłonu parami zewnętrznymi do podstawy (rys. 33b) otrzymamy układ sztywny. Schemat strukturalny omawianej grupy II klasy obejmuje całą rodzinę grup kolejnej postaci. Otrzymamy je przypisując parom I klasy A, B, C (rys. 34a) postacie par obrotowych lub postępowych (rys. 34b).



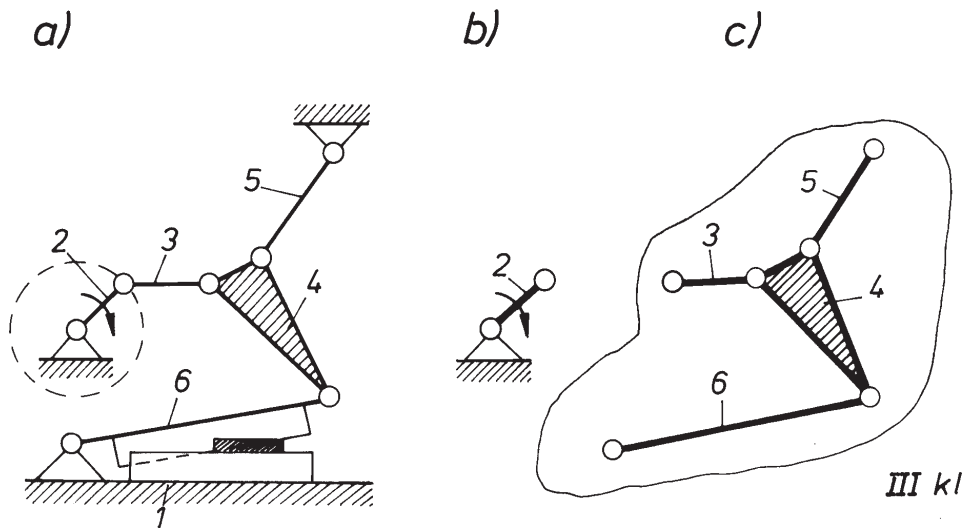
Rys. 34. Dwuczłonowa grupa Assura: a) schemat strukturalny, b) schematy kinematyczne



Rys. 35. Przykład czterocłonowej grupy Assura: a) schemat strukturalny, b) schematy kinematyczne



Rys. 36. Przykład podziału mechanizmu na grupy Assura: a) schemat kruszarki, b) człon czynny, c) grupa dwuczłonowa



Rys. 37. Przykład podziału mechanizmu na grupy Assura: a) schemat nożyc do blachy, b) człon czynny, c) grupa czterocząłowa

Kolejne liczby $k = 4$, $p_1 = 6$, spełniające warunek (13), odnoszą się do grupy III klasy (rys. 35a). Rzeczywiste postacie tej grupy (rys. 35b) otrzymamy rozpatrując wszystkie możliwe kombinacje par obrotowych i postępowych. Omówione najprostsze grupy II i III klasy (rys. 34 i 35) można wyróżnić i wydzielić z ogromnej większości spotykanych w praktyce mechanizmów dźwigniowych.

Na rysunku 36a przedstawiono schemat opartego na czworoboku mechanizmu kruszarki do skał. Po wydzieleniu członu czynnego (2), stanowiącego tzw. mechanizm I klasy, pozostały dwuczłon (3–4) jest typową grupą II klasy pierwszej postaci (rys. 34b). Z tego powodu mechanizm ten zaliczamy do II klasy.

Mechanizm nożyc do cięcia blachy, przedstawiony na rysunku 37a, jest mechanizmem III klasy. Decyduje o tym grupa III klasy (człony (4), (3), (5), (6)) (rys. 37c), jaka pozostaje po wydzieleniu członu czynnego (2) (rys. 37b).

Ogólnie należy stwierdzić, że taka możliwość dokonania podziału każdego mechanizmu dźwigniowego na człon lub człony czynne (napędzające) oraz grupy Assura określonych klas ma istotne znaczenie. Stwarza szansę uogólnienia metod analizy i syntezy strukturalnej, kinematycznej i dynamicznej. Jednocześnie jednak trzeba uprzedzić Czytelnika, że problem ten nie jest do końca rozwiązany. Zaproponowana klasyfikacja strukturalna dotyczy tylko mechanizmów dźwigniowych, a jej zasady budzą wciąż wiele wątpliwości merytorycznych.

3. Mechanizmy w pewnych przypadkach można również podzielić na dwie grupy:
 - a) z parami niższymi,
 - b) z parami wyższymi.

Do grupy pierwszej (a) należą popularne mechanizmy dźwigniowe, typowymi zaś przedstawicielami drugiej grupy (b) są mechanizmy krzywkowe i zębate. Do takiego podziału odwołamy się przy omawianiu metod analizy kinematycznej.

II. KINEMATYKA

Kinematyka obejmuje zagadnienia związane z badaniem ruchu mechanizmów, przy założeniu, że człony mechanizmów są sztywne i nie uwzględnia się ani wpływu ich mas, ani działających sił. Przedmiotem rozważań są więc:

- położenia członów,
- trajektorie punktów,
- prędkości liniowe i kątowe,
- przyspieszenia liniowe i kątowe.

Do określenia tych parametrów można korzystać z różnorodnych metod, np.:

- graficznych,
- analitycznych,
- numerycznych,
- kombinowanych.

O wyborze metody decydują: rodzaj badanego problemu, potrzeby dotyczące szybkości otrzymanych wyników i ich dokładności.

Rozwój współczesnych środków obliczeniowych (komputery, kalkulatory programowane) nobilituje przede wszystkim metody analityczne i numeryczne, w obecnej dobie jednak stosowane są wciąż jeszcze i metody graficzne.

3. Metody graficzne

Metody graficzne, dziś już klasyczne, umożliwiają w pewnych przypadkach określenie parametrów ruchu mechanizmów w sposób prosty i bardzo poglądowy. Mają niezaprzeczalny aspekt dydaktyczny, łatwiej też z ich pomocą wyjaśnić pewne pojęcia kinematyczne. Znajomość metod graficznych ułatwia zwykle dokonanie zapisu analitycznego. Stanowią one cenne uzupełnienie pozostałych metod przez to również, że umożliwiają sprawdzenie poprawności wyników uzyskanych na innej drodze. Podstawową wadą metod graficznych jest to, że uzyskane wyniki dotyczą zwykle jednego położenia mechanizmu i charakteryzują się określoną dokładnością.

3.1. Podziałki

Stosując graficzne metody analizy kinematycznej przedstawiamy występujące wielkości, np. przemieszczenie, czas, prędkość, przyspieszenie, w postaci odcinka linii prostej. Aby to przedstawienie było jednoznaczne, wprowadza się pojęcie podziałki.

Podziałką będziemy nazywać stosunek wartości wielkości rzeczywistej do wartości wielkości rysunkowej

$$\text{Podziałka} = \frac{\text{wielkość wartości rzeczywistej}}{\text{wielkość wartości rysunkowej}}$$

Określenie to zapiszemy w postaci

$$\kappa_x = \frac{x}{(x)}. \quad (14)$$

Podziałkom należy przypisać wymiar zależny zarówno od wymiaru wielkości rzeczywistej, jak i wymiaru wielkości rysunkowej. Zazwyczaj wymiarami czasu t , przemieszczenia l , prędkości v, \dots , będą odpowiednio sekunda, metr, metr na sekundę, ... Wielkość rysunkowa jest przedstawiana najczęściej w milimetrach. Przy takich założeniach będzie

$$\kappa_t = \frac{t}{(t)} \left[\frac{\text{s}}{\text{mm}} \right],$$

$$\kappa_l = \frac{l}{(l)} \left[\frac{\text{m}}{\text{mm}} \right],$$

$$\kappa_v = \frac{v}{(v)} \left[\frac{\text{m}}{\text{s} \cdot \text{mm}} \right].$$

Podziałki można przyjmować dowolnie, należy tylko pamiętać o tym, że wartość podziałki ma istotny wpływ na dokładność uzyskanego wyniku. Oczywiście im mniejsza wartość podziałki κ , tym większa dokładność odczytu.

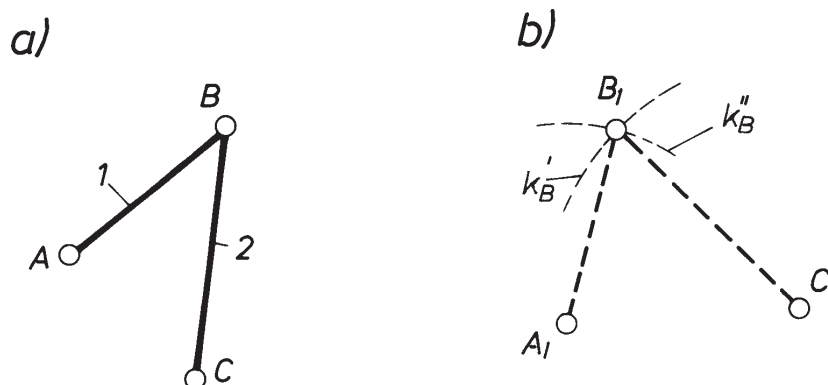
3.2. Położenia i trajektorie

Określanie położen członów w poszczególnych fazach ruchu mechanizmu oraz trajektorii (torów), jakie zakreślają pewne charakterystyczne punkty związane z członami ruchomymi, należy do najprostszych zadań analizy kinematycznej. Czynności takie, niezbędne np. w fazie projektowania układów ruchliwych, przy korzystaniu z metod graficznych są zwykle elementarne.

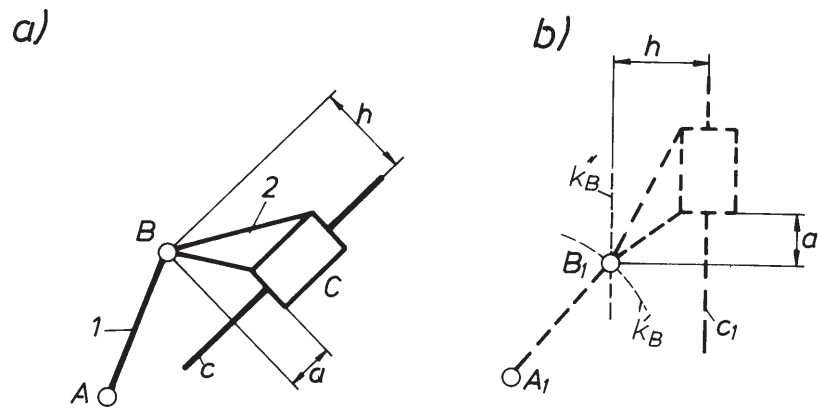
3.2.1. Położenia

Jak zaznaczono w podrozdziale 2.2, każdy mechanizm można rozłożyć na grupy członów, z których każda po przyłączeniu wolnymi półparami do podstawy tworzy układ sztywny. Taki podział mechanizmu umożliwia badanie jego paramterów poprzez analizę poszczególnych grup. Jest to pewne udogodnienie, gdyż pozwala zarówno na uogólnienie metod badania, jak również ograniczenie rodzajów omawianych mechanizmów. Jednymi z prostszych (według klasyfikacji strukturalnej) są mechanizmy II klasy, najelementarniejszymi zaś grupami są grupy II klasy, tzn. grupy składające się z dwóch członów typu N_2 oraz trzech par I klasy postaci obrotowej lub postępowej.

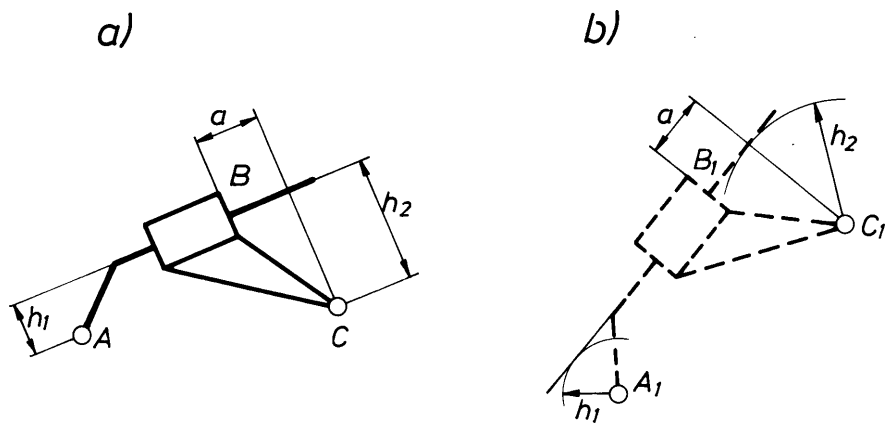
Rozważmy na początek przypadek dwuczłonu ABC (rys. 38a). Załóżmy, że po pewnym czasie Δt punkty A i C przyjmują położenia A_1 i C_1 (rys. 38b). Wtedy punkt B -- przejdzie w położenie B_1 , które znajdziemy na przecięciu łuków k_B' i k_B'' zakreślonych z A_1 i C_1 promieniami równymi długości AB i CB .



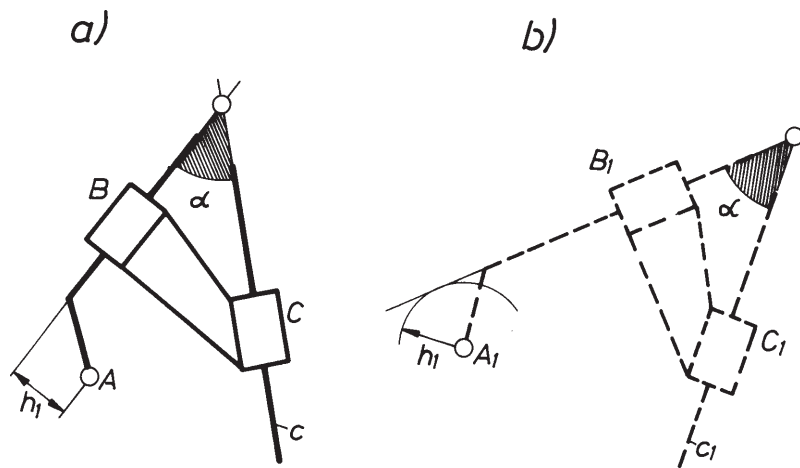
Rys. 38. Konstrukcja nowego położenia członów grupy II klasy z parami obrotowymi



Rys. 39. Konstrukcja nowego położenia członów grupy II klasy z zewnętrzną parą postępową



Rys. 40. Konstrukcja nowego położenia członów II klasy z wewnętrzną parą postępową

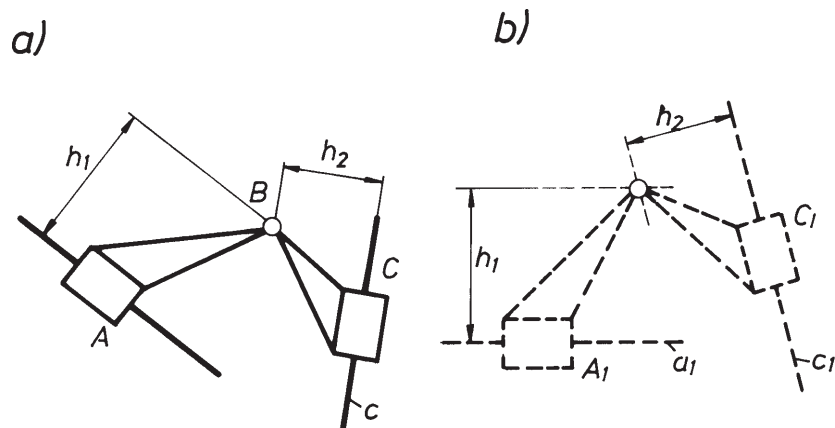


Rys. 41. Konstrukcja nowego położenia członów grupy II klasy z zewnętrzną i wewnętrzną parą postępową

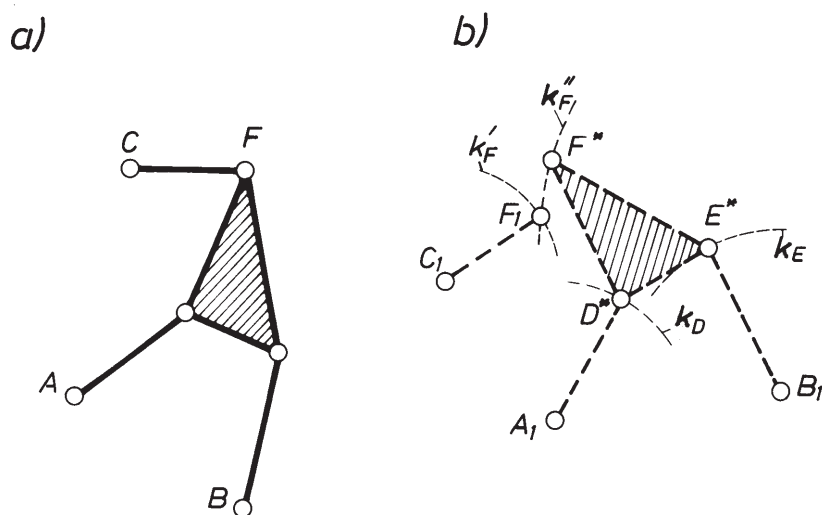
Jeżeli para zewnętrzna dwuczłonu ABC jest parą postępową (rys. 39a), to po określonym czasie Δt znane jest nowe położenie A_1 punktu A oraz nowe położenie c_1 prowadnicy c . Nowe położenie członu (1) i (2) znajdziemy określając położenie B_1 punktu B na przecięciu łuku k'_B i prostej k''_B (rys. 39b).

Podobnie, równie elementarnie, można określać nowe położenia pozostałych grup i ich możliwych odmian. Dla ćwiczenia proponujemy prześledzić samodzielnie konstrukcje nowych położenia członów kolejnych odmian dwuczłonu (rys. 40–42) oraz grupy III klasy z parami obrotowymi (rys. 43).

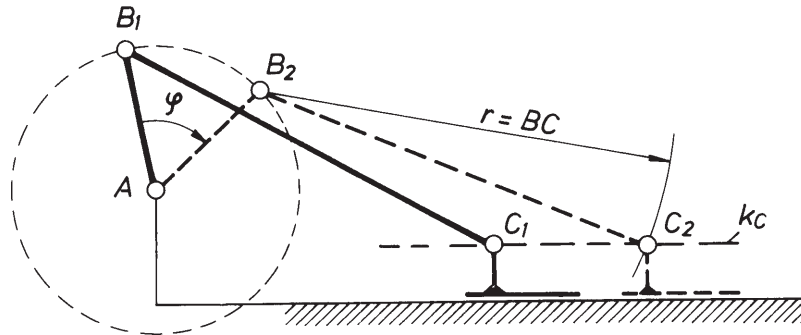
Korzystając z omówionej metody rozwiązywania poszczególnych grup można już bez trudu określać nowe położenia wszystkich członów mechanizmów. Przykłady wyz-



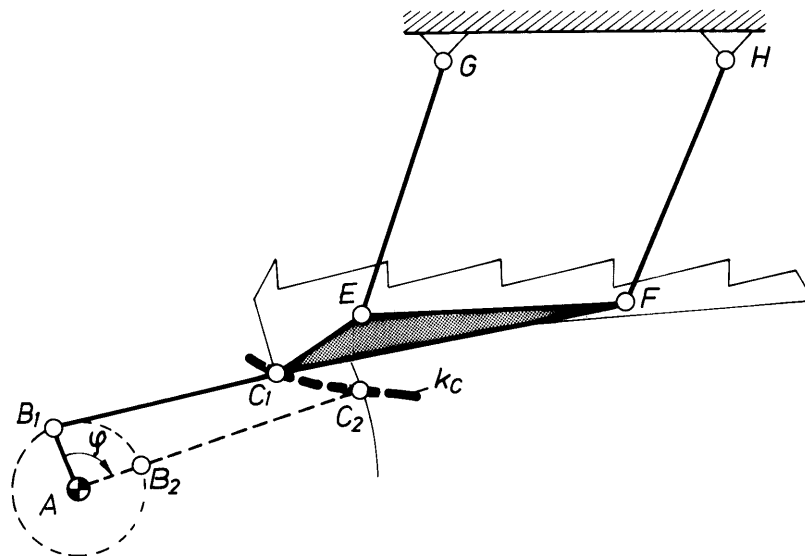
Rys. 42. Konstrukcja nowego położenia członów grupy II klasy z zewnętrznymi parami postępowymi



Rys. 43. Konstrukcja nowego położenia członów grupy III klasy



Rys. 44. Przykład konstrukcji nowego położenia mechanizmu

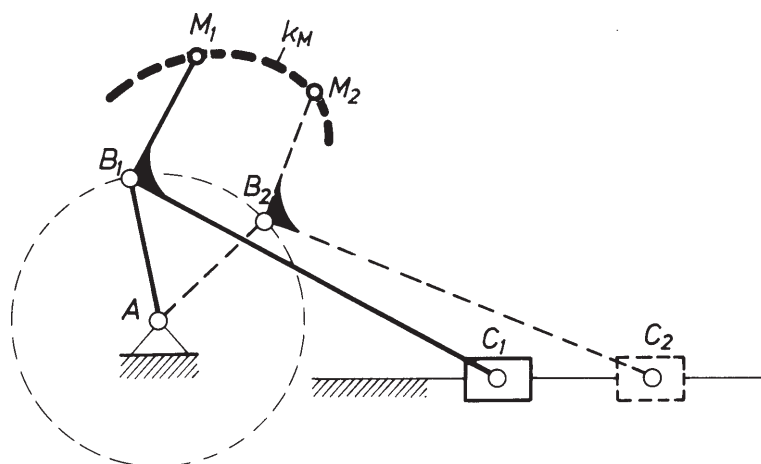
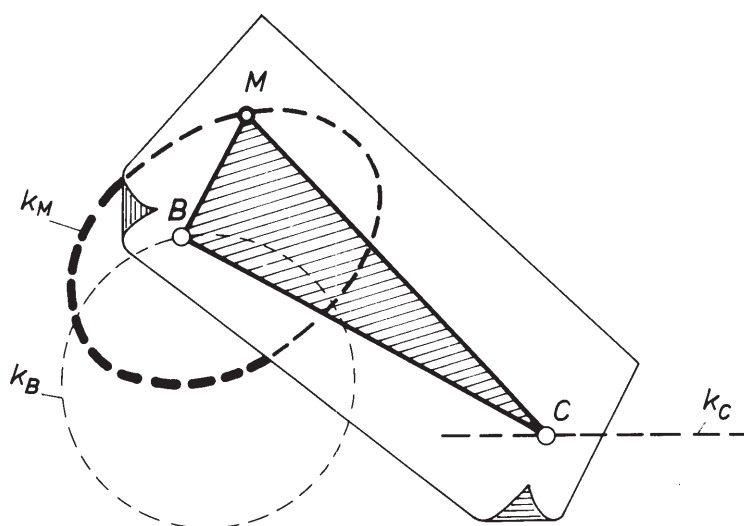


Rys. 45. Przykład konstrukcji nowego położenia mechanizmu (wytrząsacza do słomy) z grupą III klasy

naczania nowych położenia mechanizmów płaskich napędu listwy nożowej kosiarki i układu wytrząsacza słomy w kombajnie przedstawiono na rys. 44 i 45.

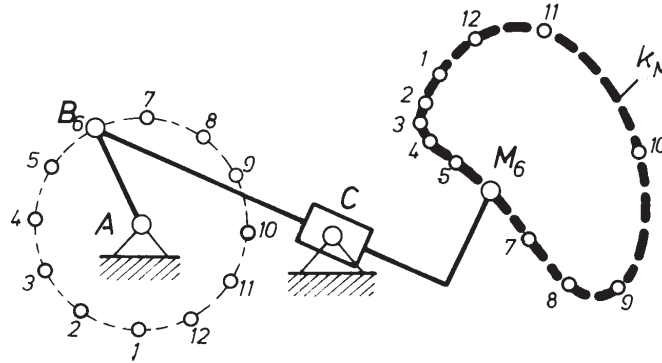
3.2.2. Trajektorie

Trajektorią lub torem punktu nazywamy miejsce geometryczne jego kolejnych położenia w przyjętym układzie odniesienia. Trajektorię można wyznaczyć metodą geometryczną, określając kolejne położenia członu, do którego rozpatrywany punkt należy (rys. 46), lub metodą wzornikową (rys. 47). Jeżeli na wykreślonej drodze punktu M nanieść kolejne jego położenia wyznaczające odcinki drogi przebyte w jednakowych odstępach czasu, to otrzymamy tzw. **tor ooczowany** (rys. 48). Wykreślanie

Rys. 46. Wykreślanie trajektorii k_M metodą geometrycznąRys. 47. Wykreślanie trajektorii k_M przy wykorzystaniu wzornika

jego jest ułatwione, gdy, jak to zwykle bywa, człon napędzający pozostaje w ruchu obrotowym jednostajnym. W mechanizmie z rysunku 48 tak jest, i wtedy jednakowym przedziałom czasu można przyporządkować takie same drogi kątowe korby AB lub odcinka toru punktu B .

Znajomość kształtu trajektorii niektórych punktów mechanizmu jest czasem niezbędna do określania kolejnych położenia mechanizmu (rys. 45). Często kształt wykreślonej trajektorii decyduje o istocie działania całego mechanizmu (rys. 88, 89). Tor odcinany może być wykorzystany do określania parametrów ruchu rozpatrywane-



Rys. 48. Przykład toru odcelowanego

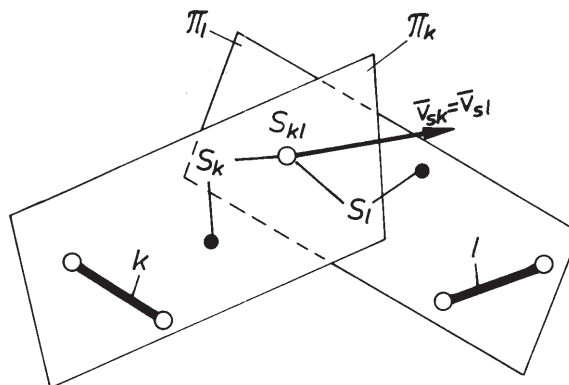
go punktu, np. prędkości i przyspieszenia. Mamy tu na myśli np. metodę toru odcelowanego lub metodę wykresów czasowych (patrz p. 3.3.5.).

3.3. Prędkości i przyspieszenia

3.3.1. Środki obrotu

Rozpatrzmy dwa człony k oraz l realizujące względem siebie ruch względny płaski (rys. 49.). Załóżmy, że z tymi członami są związane sztywno odpowiednie płaszczyzny π_l i π_k . Na płaszczyznach tych zawsze można znaleźć takie dwa punkty S_l oraz S_k , które pokrywają się ze sobą i mają identyczne prędkości liniowe ($v_{S_l} = v_{S_k}$).

Oznacza to, że względna prędkość tych punktów jest równa zero ($v_{S_k S_l} = 0$). Punkt oznaczony dalej symbolem S_{kl} , będziemy nazywać **środkiem obrotu** członu k względem l . Jeżeli we wzajemnym płaskim ruchu względnym będzie się znajdować n członów, to liczba i środków obrotu wyrazi się zależnością

Rys. 49. Ilustracja chwilowego środka obrotu członów k i l

$$i = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}. \quad (15)$$

W liczbie tej mogą wystąpić tzw. środki obrotu **stałe**, **trwałe** i **chwilowe**. Pojęcia te wyjaśnimy na przykładzie czworoboku przegubowego (rys. 50). W układzie tym człony (1), (2), (3) wykonują ruchy względem siebie oraz względem podstawy (4). Liczba i możliwych środków obrotu wynosi tu

$$i = \binom{4}{2} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$$

Wypiszmy je w sposób uporządkowany:

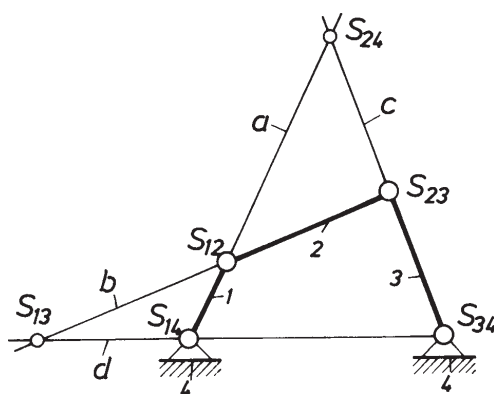
$$\begin{array}{ccc} S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ & S_{23} & S_{24} \\ & & S_{34} \end{array}$$

Wśród nich środki obrotu S_{14} i S_{34} należą do stałych, S_{12} i S_{23} zaś do trwałych środków obrotu. Chwilowymi środkami obrotu są S_{13} oraz S_{24} .

W układach kinematycznych położenie stałych i trwałych środków obrotu jest zadane przez położenie odpowiednich par kinematycznych. Chwilowe środki obrotu można wyznaczyć korzystając z tego, że leżą na liniach prostopadłych do prędkości względnych punktów jednego względem drugiego rozpatrywanego członu, lub z twierdzenia o trzech środkach obrotu. Mówi ono, że

przy 3 członach k, l, m , będących względem siebie w ruchu płaskim, środki obrotu S_{kp} , S_{km} , S_{lm} leżą na jednej prostej.

Przydatność tego twierdzenia można prześledzić na przykładzie rozpatrywanego czworoboku z rys. 50. Na jednej linii prostej leżą tu odpowiednie środki obrotu S_{12} , S_{23} i S_{13} członów (1), (2), (3), a także następne kombinacje. Zauważmy przy tym, że istnieje pewna regularność dotycząca samych indeksów. Przejawia się ona w tym, że



Rys. 50. Środki obrotu członów czworoboku przegubowego

indeks dowolnego środka obrotu można zestawić z nie powtarzających się znaków pozostałych środków. Fakt, że w każdym środku obrotu przecina się ze sobą kilka linii (co najmniej 2) można wykorzystać do ich znalezienia. W środku S_{13} przecinają się linie b (S_{23}, S_{12}, S_{13}) oraz d (S_{34}, S_{14}, S_{13}), co można odnotować skrótowo

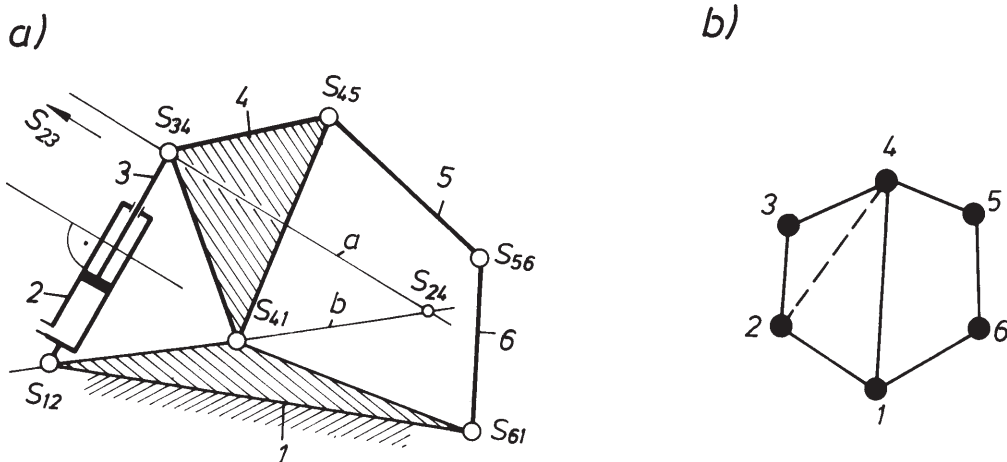
$$S_{13} \begin{cases} S_{12} - S_{23} \\ S_{14} - S_{34} \end{cases}$$

Podobnie, w poszukiwanym środku S_{24} , przecinają się proste a i c , czyli

$$S_{24} \begin{cases} S_{14} - S_{12} \\ S_{34} - S_{23} \end{cases}$$

W przypadku określania chwilowych środków obrotu w mechanizmach wielocłonowych, pewne kłopoty może sprawiać ustalenie właściwej kolejności określania środków. Można wtedy skorzystać z metody opartej na przedstawieniu mechanizmu w postaci grafu struktury [14]. Metodę tę wyjaśnimy na przykładzie. W mechanizmie sześciocłonowym (rys. 51a) należy określić położenia wszystkich środków obrotu. Ze wzoru (15) wynika, że jest ich 15. Wypiszmy je w sposób uporządkowany, obwodząc kółkiem te, które są wyznaczone przez pary I klasy

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{S_{12}} & S_{13} & \textcircled{S_{14}} & S_{15} & \textcircled{S_{16}} \\ & \textcircled{S_{23}} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & \textcircled{S_{34}} & S_{35} & S_{36} \\ & & & \textcircled{S_{45}} & S_{46} \\ & & & & \textcircled{S_{56}} \end{array}$$



Rys. 51. Ilustracja metody wyznaczania środków obrotu członów układu w mechanizmach złożonych

Położenie pozostałych nie oznaczonych (chwilowych) środków obrotu należy określić. W tym celu narysujmy pomocniczo graf struktury tego mechanizmu (rys. 51b), na którym punkty zaczernione oznaczają człony, łączące zaś je linie pary kinematyczne, rozumiane również jako środki obrotu. Jak się wykazuje [14], można bez trudu znaleźć te środki obrotu, których symbol graficzny (odcinek) dzieli już istniejący czworobok, wyznaczony przez znane środki obrotu, na dwa trójkąty. W naszym przypadku znane już środki obrotu wyznaczają dwa czworoboki 1 2 3 4 1 i 1 4 5 6 1 (rys. 51b). Każdy z nich można podzielić na dwa trójkąty, łącząc w nich punkty 1–3, 2–4, 1–5 i 4–6. Określmy dla przykładu S_{24} .

Sposób najprostszy podpowiadają dwa trójkąty 1 2 4 oraz 2 3 4, czyli

$$S_{24} \begin{cases} S_{23} - S_{34} \\ S_{12} - S_{14} \end{cases}$$

Inaczej środek chwilowy S_{24} znajdziemy na przecięciu linii a , przechodzącej przez środki S_{23} i S_{34} , oraz linii b , przechodzącej przez S_{12} i S_{14} . Podobnie można wyznaczyć pozostałe chwilowe środki obrotu.

Należy tu przypomnieć, że znajomość położenia chwilowych środków obrotu ułatwia określanie kierunków prędkości, przemieszczeń itd.

3.3.2. Związki podstawowe analizy kinematycznej

Człony mechanizmów płaskich realizują ruchy: postępowe, obrotowe i płaskie złożone. Przypomnijmy podstawowe związki i zależności dotyczące prędkości i przyspieszeń liniowych i kątowych dla tych wymienionych ruchów.

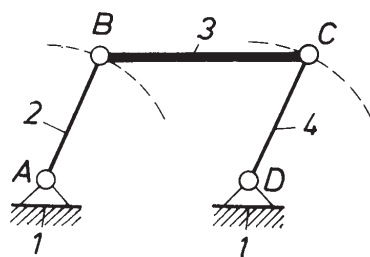
Ruch postępowy

Człon jest w ruchu postępowym wtedy, gdy dowolny odcinek BC , związany z tym członem, zachowuje we wszystkich fazach ruchu położenie równoległe. Ruch taki realizuje suwak po prowadnicy prostoliniowej, ale też np. łącznik 3 równoległoboku przegubowego (rys. 52).

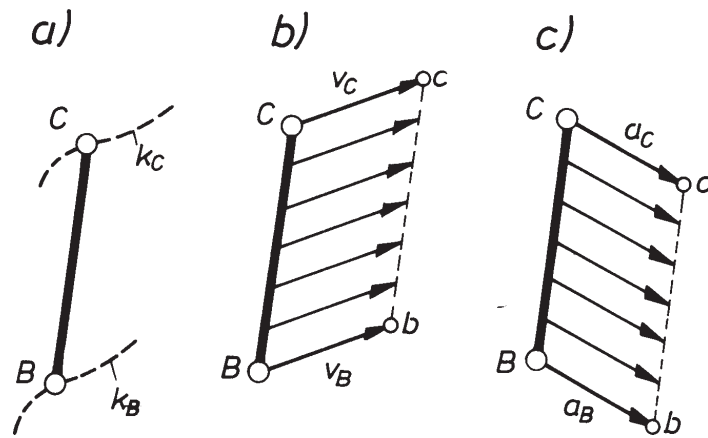
Tory wszystkich punktów związanych z członem będącym w ruchu postępowym są jednakowe (rys. 53a), prędkości v_i zaś i przyspieszenia a_i w tym samym położeniu identyczne (rys. 53b i c). Kierunki prędkości są styczne do torów, kierunki przyspieszeń zależą natomiast od kształtu toru i parametrów ruchu. Jest więc

$$v_B = v_C = v_i, \quad \omega = 0, \quad (16)$$

$$a_B = a_C = a_i, \quad \varepsilon = 0. \quad (17)$$



Rys. 52. Przykład mechanizmu z członem (3) w ruchu postępowym

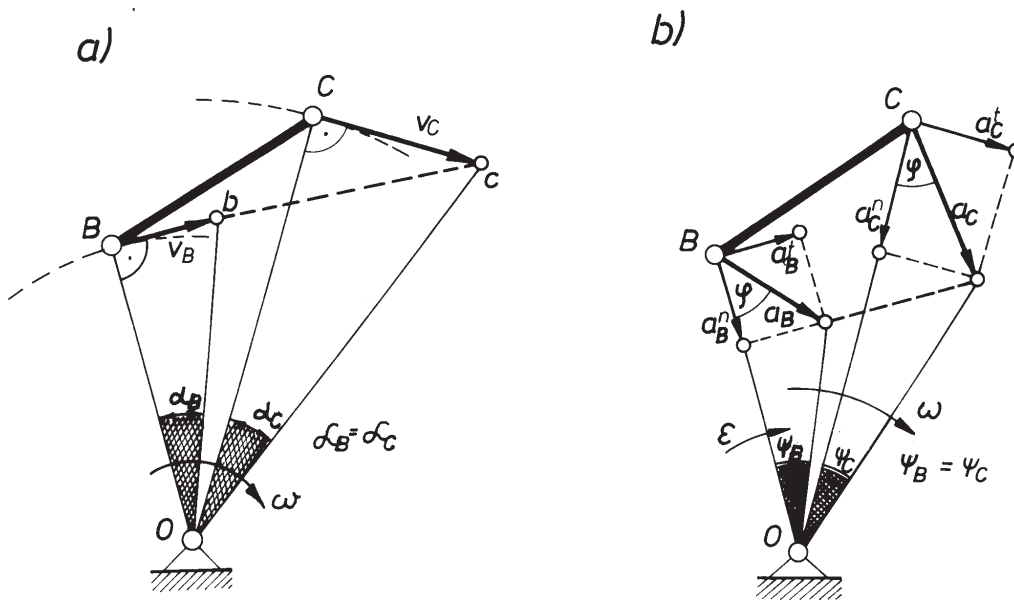
Rys. 53. Tor, prędkości i przyspieszenia punktów członu BC w ruchu postępowym

Ruch obrotowy

Ruch obrotowy członu BC (rys. 54a) wokół środka obrotu O charakteryzuje się tym, że wszystkie punkty tego członu zakreślają tory kołowe koncentryczne. Jak wiadomo

$$v_i = \omega r_i \quad \text{lub} \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \quad (18)$$

przy czym: r_i – promień obrotu punktu
 ω – prędkość kątowa członu BC .



Rys. 54. Człon w ruchu obrotowym: a) rozkład prędkości, b) rozkład przyspieszeń

Wektory v_i prędkości liniowej punktów członu są styczne do torów tych punktów, czyli prostopadłe do promieni obrotu. Wektory te są widziane ze środka obrotu O pod tym samym kątem

$$\alpha_B = \alpha_C = \alpha_i.$$

Na przyspieszenie a_i punktów I w ruchu obrotowym składają się: przyspieszenie normalne

$$a_i^n = \omega^2 \cdot r_i \quad \text{lub} \quad \bar{a}_i^n = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i)$$

oraz przyspieszenie styczne

$$a_i^t = \varepsilon \cdot r_i \quad \text{lub} \quad \bar{a}_i^t = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_i.$$

Jak wynika z zapisu wektorowego, składowa a_i^n ma kierunek promienia obrotu i zwrot do środka obrotu O , składowa a_i^t natomiast kierunek prostopadły do promienia obrotu i zwrot zgodny z przyspieszeniem kątowym ε (rys. 54b).

Całkowite przyspieszenie a_i wyraża się sumą wektorową

$$\bar{a}_i = \bar{a}_i^n + \bar{a}_i^t \quad (19)$$

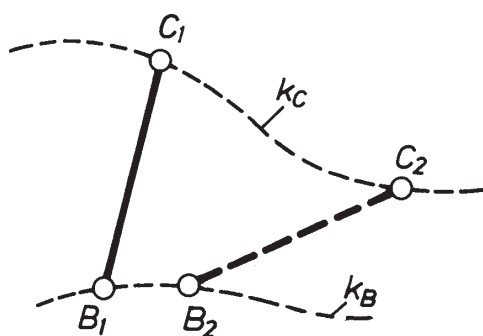
lub algebraicznie

$$a_i = \sqrt{(a_i^n)^2 + (a_i^t)^2} = r_i \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (19a)$$

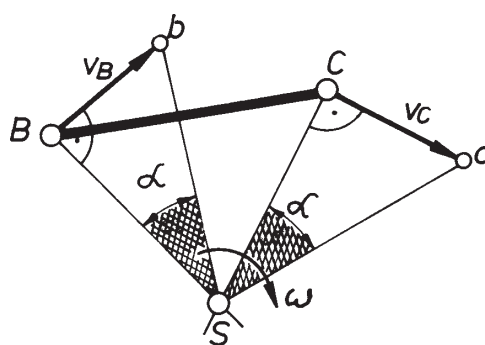
Przy stałej prędkości kątowej członu ($\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$) przyspieszenie całkowite a_i jest równe przyspieszeniu normalnemu.

Ruch złożony płaski

1. Jeżeli dowolny odcinek BC (rys. 55) związany na sztywno z członem zajmuje w kolejnych fazach ruchu w stosunku do siebie położenie nierównoległe, to mówimy o ruchu płaskim złożonym.



Rys. 55. Człon BC w ruchu płaskim złożonym



Rys. 56. Interpretacja ruchu złożonego członu BC za pomocą chwilowego środka obrotu

Ruch ten można interpretować jako ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu S leżącego na przecięciu prostopadłych do prędkości liniowych punktów związanych z członem (rys. 56). Wynika z tego, że prędkości dowolnych punktów członu będącego w tym ruchu widać z bieguna S pod tym samym kątem α , natomiast

$$\omega = \frac{v_C}{SC} = \frac{v_B}{SB} = \frac{v_I}{SI} \quad (20)$$

jest prędkością kątową tego członu. Spostrzeżenie to można zastosować do wyznaczenia prędkości dowolnego punktu I członu przy danych prędkościach dwóch innych punktów lub prędkości jednego punktu i danym położeniu chwilowego środka obrotu S .

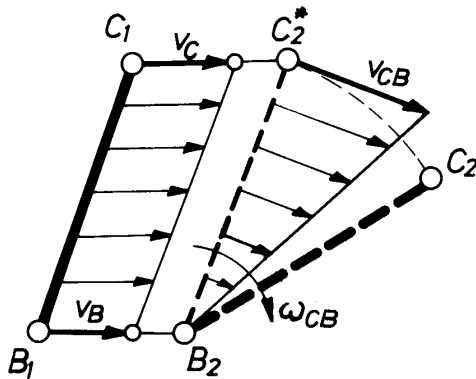
Ruch złożony członu interpretuje się również jako wynik ruchu postępowego i obrotowego jednocześnie (rys. 57). W interpretacji tej relację między prędkościami dwóch punktów, np. B i C zapiszemy w postaci

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB} \quad \text{lub} \quad \bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC}. \quad (21)$$

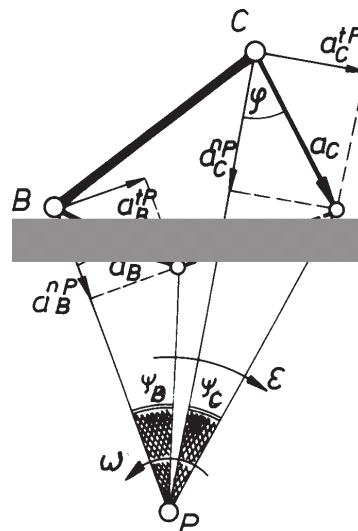
Wektor $\bar{v}_{CB} = -\bar{v}_{BC}$ reprezentuje tu prędkość względną punktu C względem B . Prędkość względna v_{CB} ma kierunek prostopadły do promienia BC i pozostaje z prędkością kątową tego członu w relacji

$$v_{CB} = \omega_{CB} l_{CB}.$$

Przez analogię do chwilowego środka obrotu S można operować pojęciem chwilowego środka przyspieszeń P , tj. takiego punktu związanego z rozpatrywanym członem, którego przyspieszenie jest równe zero ($a_p = 0$), rys. 58.



Rys. 57. Ruch złożony płaski członu BC jako suma ruchu postępowego i obrotowego



Rys. 58. Człon BC w ruchu złożonym płaskim i jego chwilowy środek przyspieszeń

Położenie punktu P jest zazwyczaj różne od położenia środka obrotu S . Wektory przyspieszeń np. \bar{a}_B i \bar{a}_C (rys. 58), tworząc z odcinakmi PB i PC jednakowe kąty φ , są widoczne z punktu P pod tym samym kątem ψ .

W niektórych wypadkach dogodniej jest, rozpatrując przyspieszenie poszczególnych punktów członu w ruchu złożonym, interpretować ten ruch jako sumę ruchu postępowego i obrotowego (rys. 59). Między przyspieszeniami dowolnych dwóch punktów, np. B i C , tego członu zachodzi związek

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}, \quad (22)$$

w którym

$$\bar{a}_{CB} = \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t.$$

Składowa normalna przyspieszenia względnego

$$a_{CB}^n = \omega^2 \cdot l_{CB} = \frac{v_{CB}^2}{l_{CB}},$$

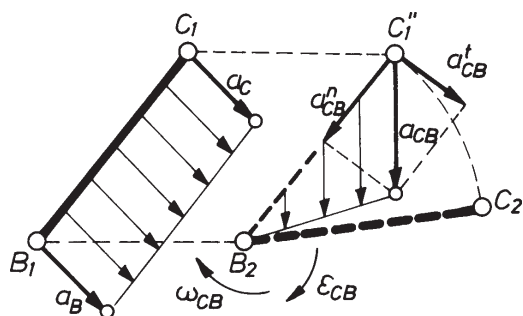
ma kierunek CB i zwrot od C do B , składowa zaś styczna przyspieszenia względnego

$$\bar{a}_{CB}^t = \bar{\varepsilon} \times \bar{l}_{CB}$$

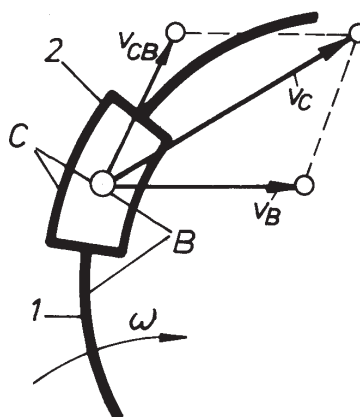
jest wektorem o kierunku prostopadłym do CB i zwrocie zgodnym z przyspieszeniem kątowym.

Jest więc

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t. \quad (23)$$



Rys. 59. Interpretacja przyspieszenia względnego a_{CB} członu BC w ruchu złożonym płaskim



Rys. 60. Graficzny obraz związków między prędkościami wybranych punktów B i C należących do różnych członów

Związek ten pozwala na graficzne lub grafoanalityczne określenie przyspieszenia dowolnego punktu, jeżeli znane jest np. przyspieszenie innego punktu oraz ω , ε i odległość tych punktów.

Rozważmy z kolei przypadek ruchu suwaka (2) (rys. 60) współpracującego z ruchomą prowadnicą (1). Przez B oznaczono punkt związany z członem (1), przez C natomiast punkt pokrywający się z punktem B , lecz należący do członu (2). w wyniku ruchu członu (1) związany z nim punkt B ma prędkość v_B , punkt C natomiast przemieszcza się dodatkowo względem członu (1) z prędkością v_{CB} . Wynikową prędkość punktu C rozpatrywaną w układzie odniesienia można wyrazić

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB},$$

gdzie \bar{v}_{CB} – prędkość względna punktu C względem B .

Kierunek tej prędkości określa oczywiście aktualne położenie prowadnicy.

Przyspieszenie punktu C (rys. 61) można wyrazić równaniem wektorowym

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}, \quad (24)$$

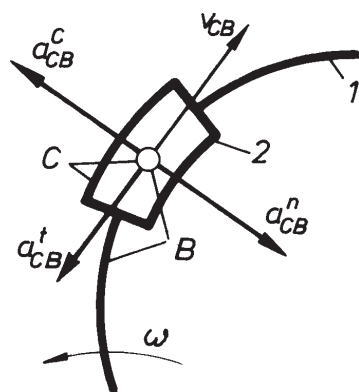
w którym \bar{a}_{CB} jest względnym przyspieszeniem składającym się z przyspieszeń: normalnego, stycznego i Coriolisa,

$$\bar{a}_{CB} = \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t + \bar{a}_{CB}^c, \quad (25)$$

Składowe przyspieszenia względnego są określone następująco

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{\rho},$$

gdzie ρ – promień krzywizny prowadnicy dla miejsca współpracy z suwakiem (w punkcie B).



Rys. 61. Składowe przyspieszenia względnego wybranych punktów B i C należących do członów (1) i (2)

Przyspieszenie to występuje tylko przy prowadnicach krzywoliniowych. w przypadku stosowania prowadnicy prostoliniowej ($\rho = \infty$) jest więc

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{\infty} = 0.$$

Kierunek tego wektora pokrywa się z kierunkiem promienia ρ , skierowany zaś jest do środka krzywizny. Składowa styczna przyspieszenia ma kierunek równoległy do prędkości względnej v_{CB} , moduł zaś określa zależność

$$a_{CB}^t = \frac{dv_{CB}}{dt}.$$

Kierunek i zwrot przyspieszenia Coriolisa wynikają z zapisu wektorowego

$$\bar{a}_{CB}^c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{CB},$$

można je ustalić również obracając wektor prędkości względnej v_{CB} o 90° , zgodnie z prędkością kątową unoszenia. Ostatecznie więc

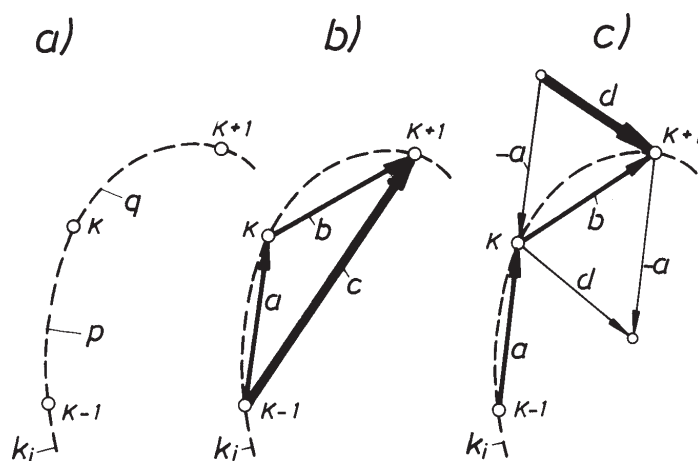
$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t + \bar{a}_{CB}^c. \quad (26)$$

Podstawowe związki, które przytoczono, mogą być stosowane w różnych metodach określania parametrów ruchu członów mechanizmów i związanych z nimi punktów.

3.3.3. Metoda toru ocechowanego

Niech będzie dana trajektoria k_i punktu I (rys. 62a), należącego do członu mechanizmu. Trajektorię tę ocechowano tak, że przemieszczenia po jej fragmentach p i q , pomiędzy punktami $K-1$, K oraz K , $K+1$, odpowiadają równym przedziałom czasowym Δt . Po zastąpieniu rzeczywistych przemieszczeń p i q odpowiednio wektorami a i b (rys. 62b), średnią prędkość punktu I w położeniu K można wyrazić zależnością

$$\bar{v}_K \cong \frac{\bar{v}_a + \bar{v}_b}{2},$$



Rys. 62. Wyznaczanie prędkości i przyspieszeń metodą toru ocechowanego

czyli

$$\bar{v}_K \cong \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2\Delta t} \quad (27)$$

lub

$$\bar{v}_K \cong \frac{\bar{c}}{2\Delta t}, \quad (27a)$$

Po uwzględnieniu podziałki przemieszczeń κ_l uzyskano

$$\bar{v}_K \cong \frac{(c)\kappa_l}{2\Delta t}. \quad (28)$$

Średnie przyspieszenie punktu I w położeniu K można wyrazić wzorem

$$\bar{a}_K \cong \frac{\bar{v}_b - \bar{v}_a}{\Delta t},$$

co prowadzi do

$$\bar{a}_K \cong \frac{\bar{b} - \bar{a}}{\Delta t^2} \quad (29)$$

lub

$$\bar{a}_K \cong \frac{\bar{d}}{\Delta t^2}.$$

Po uwzględnieniu podziałki przemieszczeń

$$\bar{a}_K \cong \frac{(\bar{d})\kappa_l}{\Delta t^2}, \quad (30)$$

Jak wiadomo, mechanizmy charakteryzują się cyklicznością ruchu, to znaczy po pewnym okresie T powtarza się położenie, prędkość oraz przyspieszenie. Załóżmy, że liczba okresów T wynosi n w czasie jednej minuty. Cechowanie toru przeprowadzono w ten sposób, że okres T podzielono na m równych przedziałów Δt . Jest więc

$$T = m\Delta t \quad \text{oraz} \quad T = \frac{60}{n}.$$

Ostatecznie więc, ze wzoru (28) i (30)

$$\bar{v}_K \cong (\bar{c}) \frac{\kappa_l \cdot m \cdot n}{120}, \quad (31)$$

$$\bar{a}_K \cong (\bar{d}) \frac{\kappa_l \cdot m^2 \cdot n^2}{3600}. \quad (32)$$

Dla porządku należy odnotować, że wraz ze wzrostem m przedziałów wzrasta dokładność uzyskanych wyników. Jednak wraz ze wzrostem liczby przedziałów m rośnie wpływ błędów rysunkowych. Zalecane jest [11] następujące przyjęcie liczby przedziałów:

$m = 18$ – jeżeli wyznaczona trajektoria mieści się w formacie A6,

$m = 24$ – jeżeli wyznaczona trajektoria mieści się w formacie A4.

Orientacyjne błędy w wyznaczeniu prędkości wynoszą wtedy 6–4%, a w wypadku przyspieszeń 12–8%. W liczbach tych nie jest zawarty błąd związany z dokładnością wyznaczenia punktów toru odcelowanego.

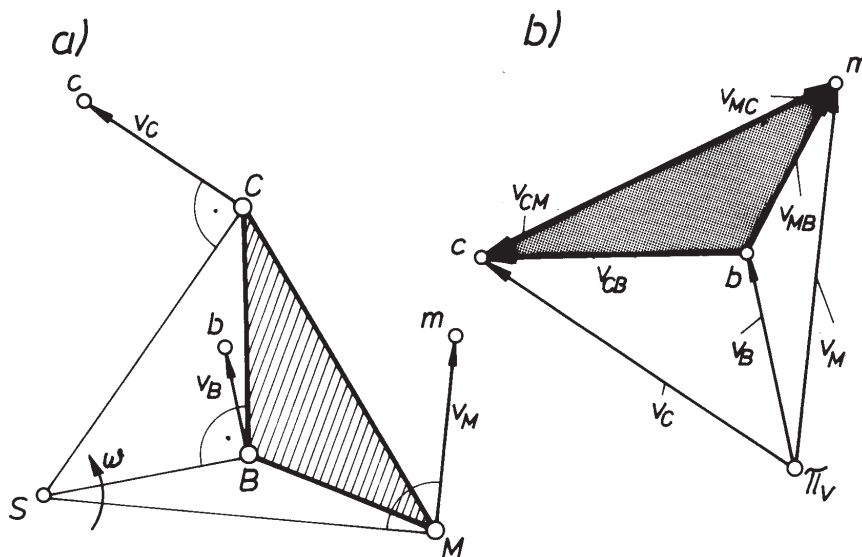
3.3.4. Metoda planów

Niech będzie dany człon BCM w ruchu złożonym płaskim (rys. 63a) i niech v_B, v_C, v_M będą prędkościami punktów B, C i M tego członu. Jeżeli wektory prędkości narysować w dowolnej podziאלce κ_v , rozpoczynając z dowolnego punktu π_v , to końce ich, oznaczone odpowiednimi symbolami b, c i m , wyznaczą pewną figurę bcm (rys. 63b). Figura taka, jako miejsce geometryczne końców wektorów prędkości punktów tego samego członu, nosi nazwę **planu prędkości członu**, a punkt π_v **bieguną planu prędkości**. Posługując się odpowiednimi związkami między prędkościami punktów B, C i M , np.

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB},$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_B + \bar{v}_{MB},$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}$$



Rys. 63. Plan prędkości: a) człon BCM w ruchu złożonym płaskim, b) plan prędkości członu BCM

można wykazać, że bc , bm i cm reprezentują w przyjętej podziałce κ_v [m/s·mm] odpowiednie prędkości względne, a mianowicie:

$$v_{CB} = bc \cdot \kappa_v,$$

$$v_{MB} = mb \cdot \kappa_v,$$

$$v_{MC} = mc \cdot \kappa_v.$$

Zależności te można zapisać inaczej. Pamiętając, że

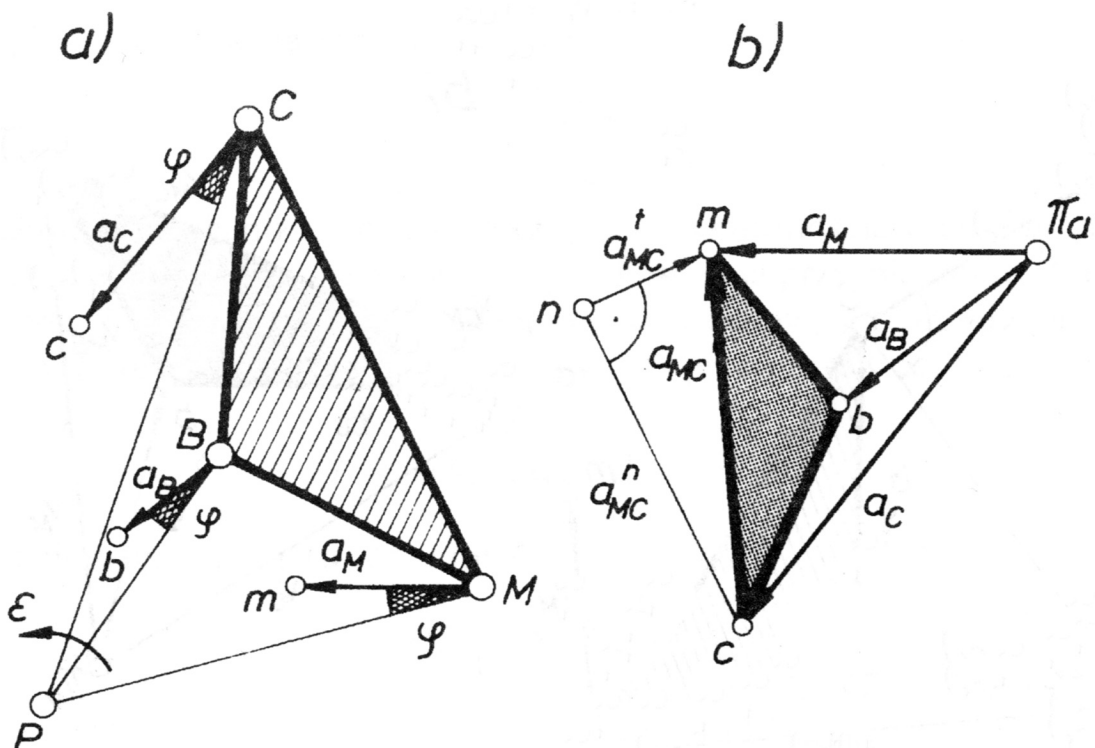
$$\bar{v}_{kj} = -\bar{v}_{jk}$$

będzie np.

$$\bar{v}_{CM} = \bar{cm} \cdot \kappa.$$

Figura bcm jest podobna do członu BCM i obrócona względem niego o 90° , zgodnie z prędkością kątową ω . Plan prędkości można otrzymać rozwiązując graficznie odpowiednie równanie wektorowe typu (21) i dlatego dogodnie jest zaczynać od zapisu tych związków. Plany prędkości kolejnych członów mechanizmu wykreślone ze wspólnego bieguna π_v tworzą plan prędkości mechanizmu. Konstrukcję taką wykorzystuje się do określania prędkości liniowych punktów, a pośrednio i kątowych członów mechanizmów.

Kolejnymi parametrami ruchu układów kinematycznych są przyspieszenia liniowe punktów i kątowe członów. Wektory przyspieszeń punktów B , C i M członu BCM



Rys. 64. Plan przyspieszeń: a) człon BCM w ruchu złożonym płaskim, b) plan przyspieszeń członu BCM

(rys. 64a) odłożone w tej samej podziałce z jednego bieguna π_a tworzą końcami b , c i m figurę bcm (rys. 64b). Przez analogię do planu prędkości, figurę taką będziemy nazywać **planem przyspieszeń członu**. Plan bcm jest podobny do członu BCM i obrócony względem niego o kąt $(180 - \varphi)$, zgodnie z przyspieszeniem kątowym ε , przy czym

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Odcinki łączące odpowiednie końce wektorów określają przyspieszenie względne poszczególnych punktów, np.

$$\overline{mc} = \frac{\overline{a}_{MC}}{\kappa_a},$$

gdzie κ_a [m/s²·mm] jest podziałką planu przyspieszeń.

Na ogół przyspieszenie względne całkowite jest sumą wektorową składowej normalnej i stycznej, co przykładowo pokazano dla przyspieszenia a_{MC}

$$\overline{a}_{MC} = \overline{a}_{MC}^n + \overline{a}_{MC}^t$$

lub

$$\overline{cm} = \overline{cn} + \overline{nm}.$$

Wektor \overline{a}_{MC}^n ma kierunek MC , zwrot od M do C , a moduł

$$a_{MC}^n = \frac{v_{MC}^2}{l_{MC}}.$$

Przyspieszenie względne styczne $a_{MC}^t = \varepsilon l_{MC}$ ma kierunek prostopadły do MC . Plany przyspieszeń kolejnych członów mechanizmu wykreślone z jednego bieguna π_a tworzą plan przyspieszeń mechanizmu, za którego pomocą można określać dowolne przyspieszenia liniowe i kątowe.

W dalszym ciągu przedstawiono sposoby wyznaczania prędkości i przyspieszeń dla wybranych grup Assura.

Grupa dwuczłonowa drugiej klasy z trzema parami obrotowymi

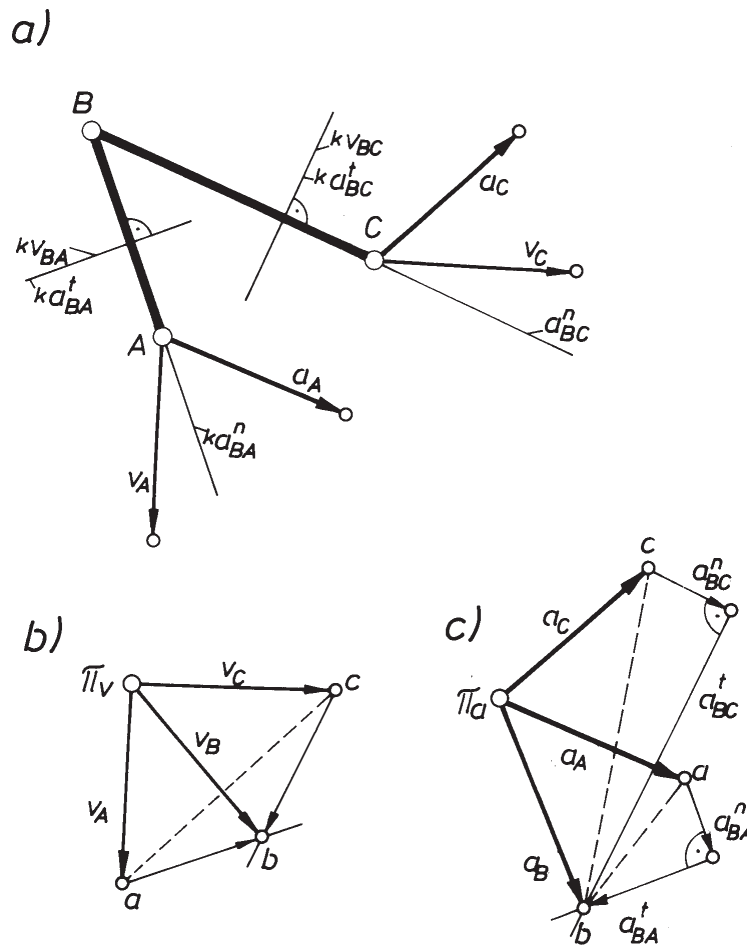
Grupę tę pokazano schematycznie na rysunku 65a. Załóżmy, że w wyniku wstępnych obliczeń kinematycznych określono:

- prędkość v_A oraz przyspieszenie a_A punktu A ,
- prędkość v_C oraz przyspieszenie a_C punktu C .

Analizując ruch punktu B napiszemy:

– dla członu AB

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA},$$



Rys. 65. Plan prędkości i przyspieszeń grupy II klasy

– dla członu BC

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}} = \underline{\underline{\bar{v}_C}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BC}}},$$

tak więc

$$\underline{\underline{\bar{v}_B}} = \underline{\underline{\bar{v}_A}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BA}}} = \underline{\underline{\bar{v}_C}} + \underline{\underline{\bar{v}_{BC}}}. \quad (33)$$

W zależności (33) znane są wektory prędkości punktów A oraz C , co zaznaczono przez ich trzykrotne podkreślenie. Kierunki prędkości względnych są prostopadłe do odpowiednich członów (rys. 65a), co zaznaczono przez jednokrotne podkreślenie v_{BA} i v_{BC} w rozpatrywanej zależności. Równanie to rozwiążemy graficznie. Wykreślając z bieguna π_v wektory $\underline{\underline{\bar{v}_A}}$ oraz $\underline{\underline{\bar{v}_C}}$, a następnie odpowiednio kierunki prędkości względnych, wyznaczmy prędkość v_B punktu B (rys. 65b).

Podobnie, aby wyznaczyć przyspieszenie \bar{a}_B punktu B napiszemy
– dla członu AB

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t,$$

– dla członu BC

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^t.$$

tak więc

$$\bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BA}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BA}^t}} = \underline{\underline{\bar{a}_C}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BC}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BC}^t}}. \quad (34)$$

W równaniu (34) znane są wektory a_A oraz a_C , moduły składowych normalnych wektorów zaś przyspieszeń względnych obliczymy odpowiednio

$$a_{BA}^n = \frac{v_{BA}^2}{l_{BA}}; \quad a_{BC}^n = \frac{v_{BC}^2}{l_{BC}}. \quad (35)$$

Wektory te mają kierunki odpowiednich członów, zwroty zaś odpowiednio od punktu B do punktów A i C . Kierunki składowych stycznych wektorów przyspieszeń względnych są prostopadłe do odpowiednich członów (rys. 65a). Tak więc znane co do modułu, kierunku i zwrotu wektory przyspieszeń podkreślono w zależności (34) trzema kreskami, wektory zaś znane co do kierunku – jedną kreską. Zależność (34) rozwiążemy graficznie następująco:

Z dowolnie przyjętego bieguna π_a wykreślimy wektory a_C oraz a_A . Dodając odpowiednio wektory przyspieszeń normalnych względnych, a następnie wykreślając kierunki przyspieszeń stycznych wyznaczmy punkt b , stanowiący koniec wektora a_B przyspieszenia punktu B (rys. 65c).

Grupa czteroczłonowa trzeciej klasy z parami obrotowymi

Analizę kinematyczną grup tego typu (rys. 66) prowadzi się korzystając z tzw. punktów Assura. Punktem Assura będziemy nazywać punkty R , S lub T członu trójwęzłowego ABC pokrywające się z punktem przecięcia odpowiednich kierunków jego dwóch członów dwuwęzłowych (rys. 66a). Jeżeli znane są prędkości i przyspieszenia punktów D , E i F , to kolejność operacji zmierzających do określenia prędkości i przyspieszenia punktów A , B i C może być następująca:

– dla punktu R napiszemy

$$\bar{v}_R = \bar{v}_A + \bar{v}_{RA} = \bar{v}_D + (\bar{v}_{AD} + \bar{v}_{RA}),$$

oraz

(36)

$$\bar{v}_R = \bar{v}_B + \bar{v}_{RB} = \bar{v}_E + (\bar{v}_{BE} + \bar{v}_{RD}).$$

Wektory prędkości ruchu względnego v_{AD} i v_{RA} oraz v_{BE} i v_{RB} mają jednakowe kierunki, można je więc zastąpić odpowiednio jednym wektorem, a zatem zależności (36) można zastąpić przez równania:

$$\underline{\underline{\bar{v}_R}} = \underline{\underline{\bar{v}_D}} + \underline{\underline{\bar{v}_{RD}}}$$

(37)

oraz

$$\underline{\underline{\bar{v}_R}} = \underline{\underline{\bar{v}_E}} + \underline{\underline{\bar{v}_{RE}}}.$$

w równaniach tych prędkości v_D i v_E są zadane, natomiast v_{RD} oraz v_{RE} znane co do kierunku. Odkładając od przyjętego bieguna π_v wektory v_D i v_E oraz przeprowadzając przez ich końce d i e , prostopadłe do RD oraz RE , wyznaczmy w ich punkcie przecięcia r koniec wektora \bar{v}_R (rys. 66b). Prędkość punktu C wyznaczmy z zależności

$$\underline{\underline{\bar{v}_C}} = \underline{\underline{\bar{v}_F}} + \underline{\underline{\bar{v}_{CF}}}$$

(38)

oraz

$$\underline{\underline{\bar{v}_C}} = \underline{\underline{\bar{v}_R}} + \underline{\underline{\bar{v}_{CR}}}.$$

Graficzne wyznaczenie prędkości punktu C pokazano również na rys. 66b. Korzystając np. z zasady podobieństwa planu prędkości członu do członu można następnie wyznaczyć prędkość punktów A oraz B .

Tym samym punktem R można określić przyspieszenie punktów A , B i C członu trójwęzłowego (rys. 67a). Najpierw wyznaczmy przyspieszenie a_R korzystając z równań

$$\bar{a}_R = \bar{a}_A + \bar{a}_{RA}^n + \bar{a}_{RA}^t = \bar{a}_D + \bar{a}_{AD}^n + \bar{a}_{AD}^t + \bar{a}_{RA}^n + \bar{a}_{RA}^t$$

(39)

oraz

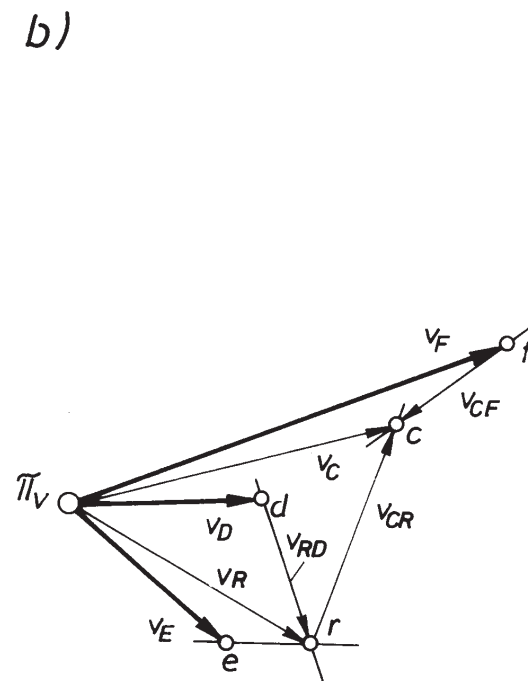
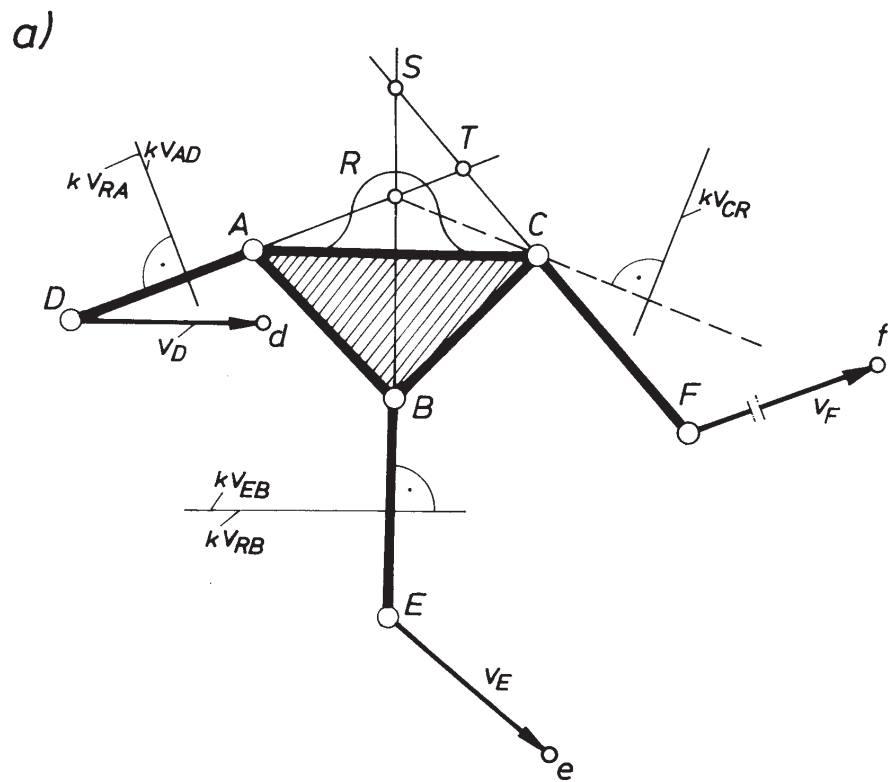
$$\bar{a}_R = \bar{a}_B + \bar{a}_{RB}^n + \bar{a}_{RB}^t = \bar{a}_E + \bar{a}_{BE}^n + \bar{a}_{BE}^t + \bar{a}_{RB}^n + \bar{a}_{RB}^t$$

w których przyspieszenie normalne

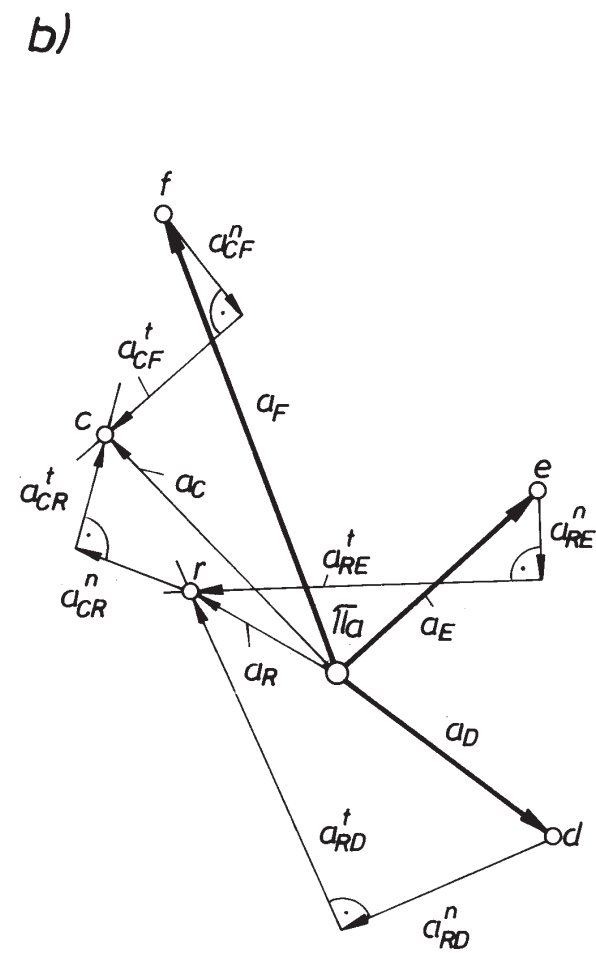
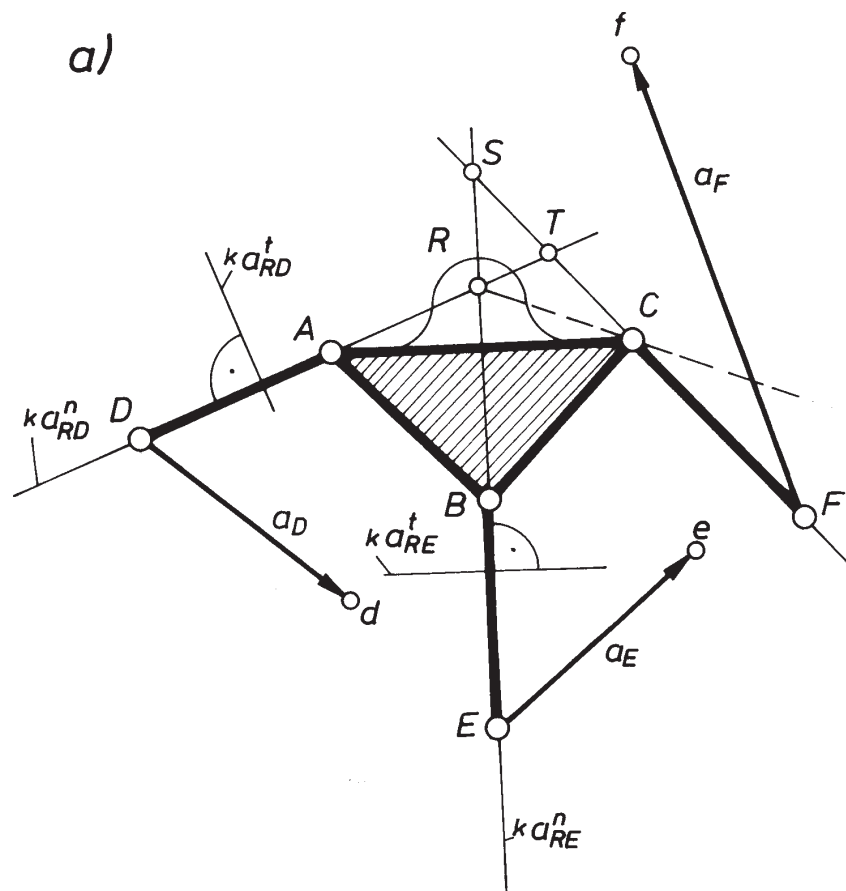
$$a_{RA}^n = \frac{v_{RA}^2}{l_{RA}}; \quad a_{AD}^n = \frac{v_{AD}^2}{l_{AD}},$$

$$a_{RB}^n = \frac{v_{RB}^2}{l_{RB}}; \quad a_{BE}^n = \frac{v_{BE}^2}{l_{BE}},$$

obliczamy korzystając z planu prędkości.



Rys. 66. Przykład grupy III klasy i jej plan prędkości



Rys. 67. Przykład grupy III klasy i jej plan przyspieszeń

Równanie (39) można przedstawić w postaci

$$\bar{a}_R = \underline{\underline{\bar{a}_D}} + \underline{\underline{\bar{a}_{AD}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{RA}^n}} + \underline{\bar{a}_{AD}^t} + \underline{\bar{a}_{RA}^t},$$

$$\bar{a}_R = \underline{\underline{\bar{a}_E}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BE}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{RB}^n}} + \underline{\bar{a}_{BE}^t} + \underline{\bar{a}_{RB}^t}$$

lub, po wprowadzeniu, dla uproszczenia, odpowiednich symboli sum wektorów równoległych,

$$\bar{a}_R = \underline{\underline{\bar{a}_D}} + \underline{\underline{\bar{a}_{RD}^n}} + \underline{\bar{a}_{RD}^t}, \quad (40)$$

$$\bar{a}_R = \underline{\underline{\bar{a}_E}} + \underline{\underline{\bar{a}_{RE}^n}} + \underline{\bar{a}_{RE}^t},$$

Graficzne rozwiązanie równań (40) przedstawiono na rysunku 67b. Przyspieszenie punktu C wyznaczmy z równań

$$\bar{a}_C = \underline{\underline{\bar{a}_R}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CR}^n}} + \underline{\bar{a}_{CR}^t}$$

oraz (41)

$$\bar{a}_C = \underline{\underline{\bar{a}_F}} + \underline{\underline{\bar{a}_{CF}^n}} + \underline{\bar{a}_{CF}^t},$$

w których

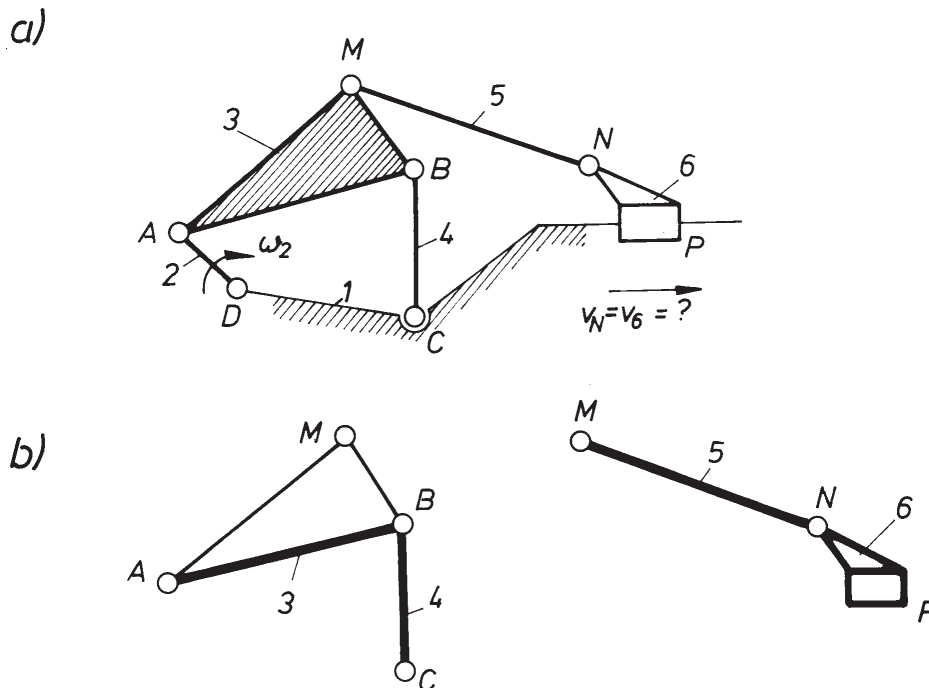
$$a_{CR}^n = \frac{v_{CR}^2}{l_{CR}}; \quad a_{CF}^n = \frac{v_{CF}^2}{l_{CF}}.$$

Rozwiązując równanie (41) graficznie, a następnie korzystając np. z podobieństwa planu przyspieszeń członu do członu, możemy wyznaczyć przyspieszenie punktów A i B .

Dysponując ogólną metodą rozwiązywania poszczególnych grup można przy ich zastosowaniu analizować praktycznie wszystkie mechanizmy dźwigniowe. Należy w tym celu dokonać w badanym mechanizmie analizy strukturalnej i wydzielenia odpowiednich grup. Idee tę zilustrowano przykładem.

Niech będzie dany mechanizm $DABCMN$ (rys. 68a), w którym należy określić prędkość v_N przy zadanej prędkości kątowej ω_2 korby DA . Zauważmy, że przy tych założeniach jest to mechanizm II klasy i można w nim wyróżnić dwie grupy II klasy, tzn. grupę 34 (ABC) i grupę 56 (MNP) (rys. 68b). Grupy te należy rozwiązywać w tej kolejności, stosując omówiony wzór dla grupy II klasy (rys. 65).

Założmy z kolei, że dla tego samego układu należy określić ω_4 przy zadanej prędkości v_6 członu (6) (rys. 69a). Tym razem, wychodząc od członu czynnego (6),



Rys. 68. Założenia do analizy kinematycznej mechanizmu: a) schemat mechanizmu II klasy, b) składowe grupy Assura

można wyróżnić tylko jedną grupę III klasy (rys. 69b). Rozwiązując tę grupę według omówionego wzoru (rys. 66) znajdziemy v_c , a więc również ω_4 .

3.5.5. Metoda wykresów kinematycznych

Wykresy kinematyczne są graficznym przedstawieniem zależności funkcyjnej drogi, prędkości liniowej i przyspieszenia liniowego lub kąta obrotu, prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego członu od określonego parametru. W takim przedstawieniu ruchu punktu lub członu mechanizmu parametrem może być czas lub dowolna inna współrzędna uogólniona, np. droga wybranego punktu lub kąt obrotu członu czynnego.

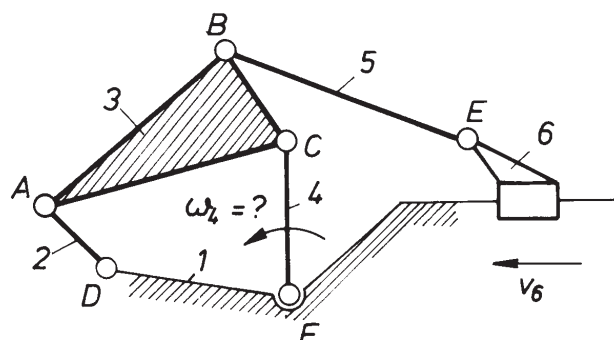
Podczas sporządzania wykresów kinematycznych pewne przebiegi (np. $s = s(t)$) należy poddać operacji różniczkowania (np. $v = ds/dt$) lub całkowania (np. $v = \int a dt$). Czasem dogodnie jest operacje te przeprowadzać graficznie, korzystając z odpowiednich metod, które przedstawiono dalej.

Różniczkowanie graficzne metodą stycznych

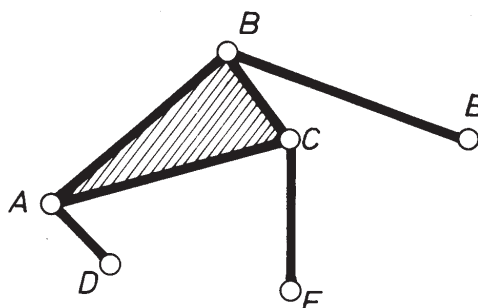
Dla zadanej krzywej przemieszczeń $s(t)$ (rys. 70a) należy znaleźć przebieg zmian prędkości $v(t)$ w funkcji czasu. Załóżmy na początku, że zadany wykres $s(t)$ i szukany $v(t)$ będą miały wspólną podziałkę czasu κ_t [s/mm], co umożliwi usytuowanie układów współrzędnych jak na rys. 70.

Na krzywej $s(t)$ przyjmijmy dowolne punkty $1s, 2s, \dots$, np. odpowiadające jednokowym odcinkom czasu Δt i do krzywej w tych punktach poprowadźmy styczne.

a)



b)



Rys. 69. Założenia do analizy kinematycznej mechanizmu: a) schemat mechanizmu III klasy, b) składowe grupy Assura

Przez punkt H_v , przyjęty dowolnie na ujemnej osi czasu układu (v, t) , poprowadźmy proste równoległe do stycznych, które na osi v odczną odcinki proporcjonalne do prędkości w chwilach odpowiadających punktom $1s, 2s, \dots$. Konstrukcja przedstawiona na rys. 70b prowadzi do punktów $1v, 2v, \dots$, a tym samym do szukanej krzywej $v(t)$.

Aby ustalić podziałkę κ_v wykresu $v(t)$ przypomnijmy, że dla dowolnego punktu I

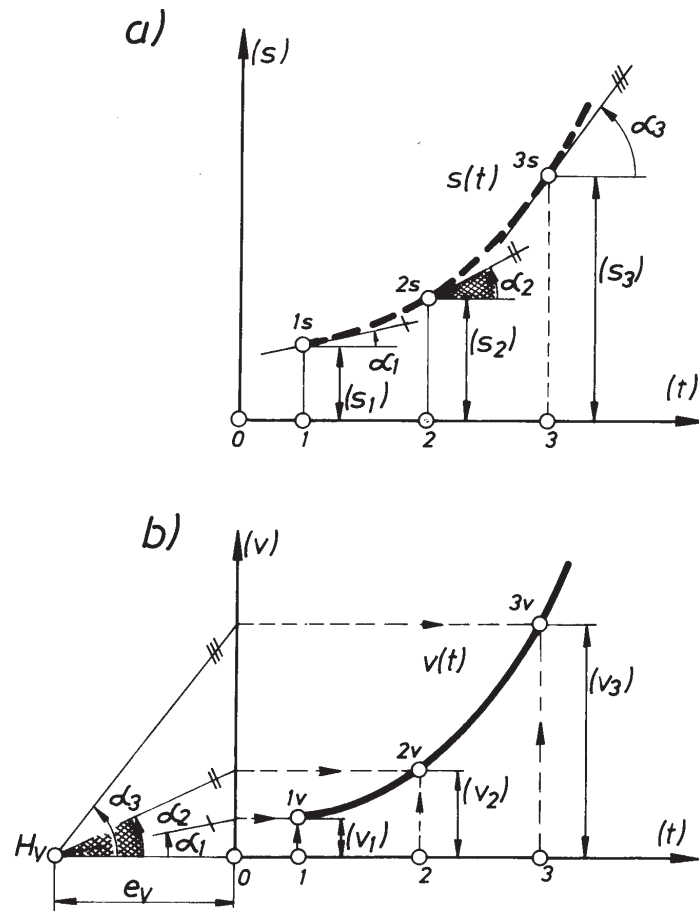
$$v_i = \frac{ds_i}{dt} = \frac{\kappa_s}{\kappa_t} \frac{d(s_i)}{d(t)} = \frac{\kappa_s}{\kappa_t} \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Ponieważ z drugiej strony

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{(v_i)}{e_v},$$

otrzymamy więc

$$v_i = \frac{\kappa_s}{\kappa_t} \frac{(v_i)}{e_v}.$$



Rys. 70. Przykład graficznej metody różniczkowania funkcji: a) krzywa $s(t)$, b) rezultat różniczkowania $v(t)$

Porównując tę zależność ze znaną ogólną zależnością

$$v_i = (v_i) \kappa_v,$$

otrzymamy podziałkę prędkości

$$\kappa_v = \frac{\kappa_s}{\kappa_t \cdot e_v}. \quad (42)$$

Podobnie, różniczkując wykres, np. $v(t)$, dla uzyskania przebiegu $a(t)$, otrzymamy podziałkę

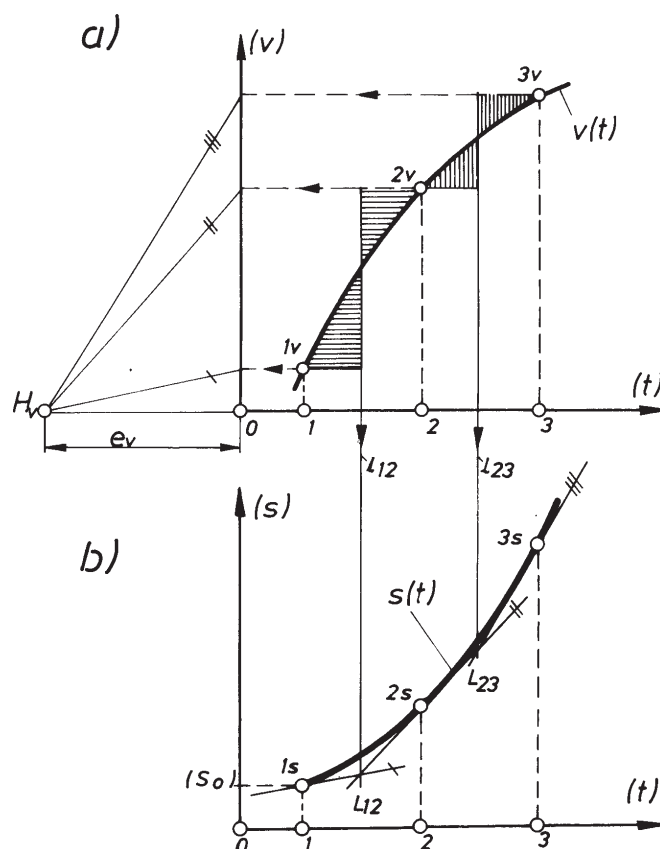
$$\kappa_a = \frac{\kappa_v}{\kappa_t \cdot e_a}.$$

Należy zwrócić uwagę, że o ile jednokrotne różniczkowanie jest operacją stosunkowo dokładną, o tyle dwukrotne powtarzanie tej operacji może prowadzić do istotnych błędów.

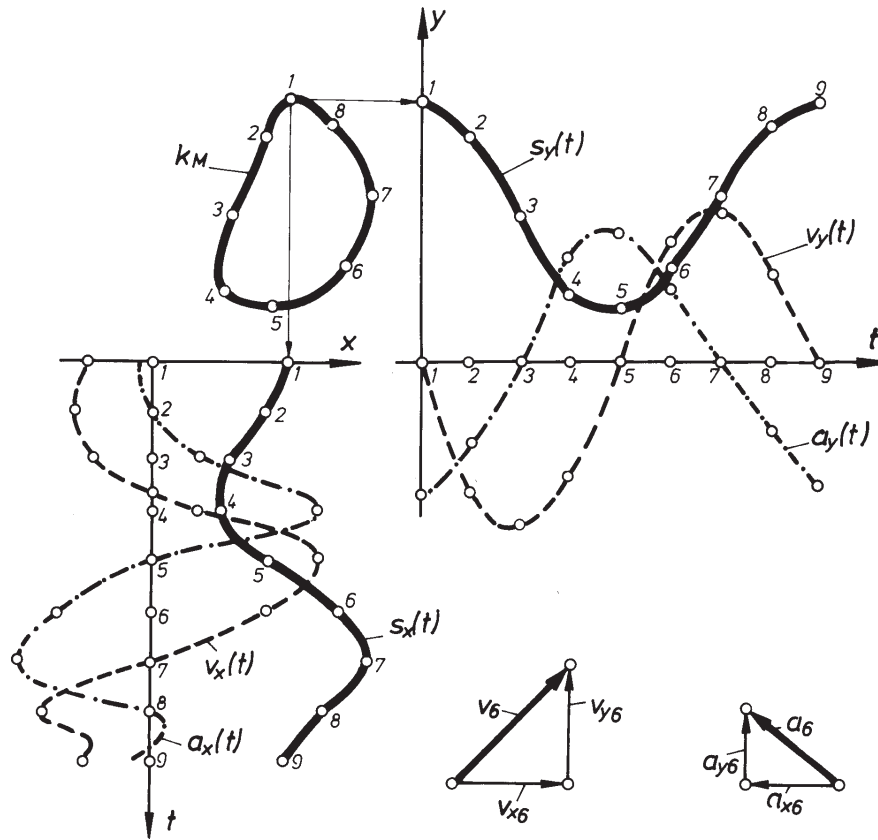
Całkowanie graficzne metodą stycznych

Jest to operacja odwrotna do różniczkowania graficznego. Umożliwia ona np. znalezienie przebiegu przemieszczeń $s(t)$ na podstawie wykresu prędkości $v(t)$ (rys. 71). Omówimy ją na takim właśnie przykładzie.

Daną krzywą $v(t)$ (rys. 71a) podzielimy dowolnie punktami $1v, 2v, \dots$, a rzędne tych punktów przeniesiemy na oś prędkości v . Tak otrzymane punkty łączymy z dowolnie przyjętym na ujemnej osi czasu biegunem H_v . Otrzymamy w ten sposób kierunki stycznych do krzywej przemieszczeń $s(t)$ w odpowiednich punktach $1s, 2s, \dots$. Styczne do krzywej o tych kierunkach tworzą w układzie (s, t) linię łamaną $1s, L_{12}, L_{23}, \dots$, (rys. 71b), która jednoznacznie określa szukaną krzywą $s(t)$. Do wykreślenia tej linii, poza kierunkami stycznych jest niezbędny punkt początkowy $1s$ oraz punkty L_{12}, L_{23}, \dots



Rys. 71. Przykład graficznej metody całkowania funkcji: a) krzywa $v(t)$, b) rezultat całkowania $s(t)$



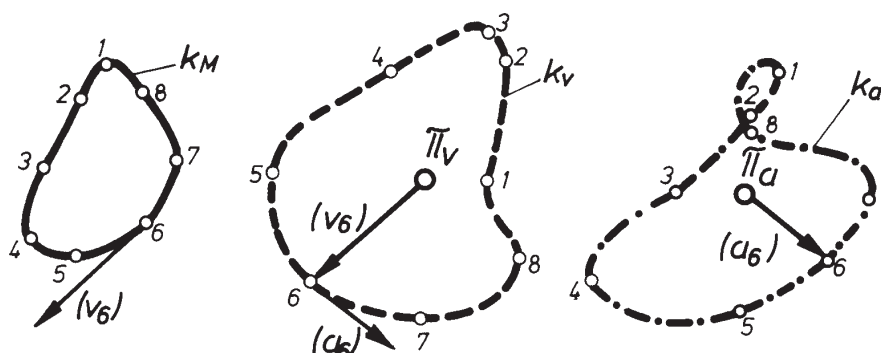
Rys. 72. Analiza ruchu punktu M metodą wykresów kinematycznych

Pierwszy z nich, określający jednocześnie stałą całkowania, ustala się na podstawie warunków brzegowych. W celu określenia pozostałych L_{12}, L_{23}, \dots korzystamy z następujących konstrukcji. Poszczególne przedziały czasowe $12, 23, \dots$ dzielimy liniami l_{12}, l_{23}, \dots tak, aby utworzone figury, na rysunku jednakowo zakreskowane, miały takie same pola. Linia l_{12} na przecięciu ze styczną wyprowadzoną z $1s$ daje L_{12} – początek następnej stycznej $L_{12}-L_{23}$. Określanie położenia kolejnych punktów $2s, 3s, \dots$ na stycznych oraz sposób wykreślenia samej krzywej $s(t)$ nie wymaga bliższych wyjaśnień.

Podziałkę κ_s otrzymanego wykresu $s(t)$, korzystając ze wspomnianej już odwrotności operacji całkowania do różniczkowania, zapiszemy na podstawie (42)

$$\kappa_s = \kappa_v \cdot \kappa_t \cdot e_v. \quad (43)$$

Omówione metody graficznego różniczkowania i całkowania umożliwiają otrzymywanie różnych, w zależności od potrzeby, charakterystyk ruchu punktów lub członów mechanizmów. Charakterystyki takie są przedstawiane zwykle w funkcji czasu



Rys. 73. Tor odcenowany, hodograf prędkości i przyspieszeń punktu M

lub parametru zależnego od czasu w sposób liniowy, np. kąta obrotu korby o stałą prędkości kątowej.

Założmy, że interesuje nas pełna charakterystyka ruchu punktu M (rys. 72), należącego do członu pewnego mechanizmu. Założmy dalej, że posługując się metodą przedstawioną w podrozdz. 3.2. otrzymano tor odcenowany k_M punktu M . Następnie, po przyjęciu układu współrzędnych xy , zrzutowano na jego osie tor odcenowany i otrzymano wykresy przemieszczeń $s_x(t)$ oraz $s_y(t)$. Po zróżniczkowaniu oddzielnie obu wykresów, otrzymano odpowiednio $v_x(t)$ i $v_y(t)$ oraz $a_x(t)$ i $a_y(t)$. Rzeczywiste wartości prędkości i przyspieszeń w poszczególnych punktach drogi otrzymujemy sumując geometrycznie odpowiednie składowe. Na rysunku 72 przedstawiono sumowanie dla: $\vec{v}_6 = \vec{v}_{x6} + \vec{v}_{y6}$. Należy pamiętać, że dogodnie jest wektorowe rezultaty analizy zestawiać w tzw. **hodografy** prędkości i przyspieszeń (rys. 73), otrzymane przez wykreślenie wektorów ze wspólnych biegunów π_v i π_a . Interesujące właściwości tych hodografów (wektor przyspieszenia a_i ma kierunek stycznej do krzywej k_v w punkcie i , moduł jego równa się chwilowej prędkości poruszania się po k_v końca wektora v_i) pozwalają nie tylko na sprawdzenie poprawności wyników, ale również umożliwiają określenie interesujących nas parametrów inną metodą.

4. Metody analityczne

W metodach analitycznych dąży się do uzyskania algebraicznych związków określających położenia członów mechanizmu i torów punktów związanych z członami w funkcji czasu lub parametru położenia członu czynnego. Odpowiednie związki na określenie prędkości i przyspieszenia uzyskuje się zwykle na drodze odpowiedniej obróbki (różniczkowanie) funkcji położenia. Te niezbędne funkcje położenia można uzyskać różnymi metodami, dobieranymi stosownie do analizowanego obiektu. Najczęściej stosuje się wtedy tzw. metodę zapisu wektorowego.

4.1. Metoda zapisu wektorowego

Metoda zapisu wektorowego polega na zastępowaniu łańcucha kinematycznego członów mechanizmu odpowiednim łańcuchem wektorowym. Przykłady takich zabiegów przedstawiono na rys. 74. Warunek zamykania się takich wieloboków wektorowych można zapisać w postaci

$$\sum \bar{l}_i = 0 \quad (44)$$

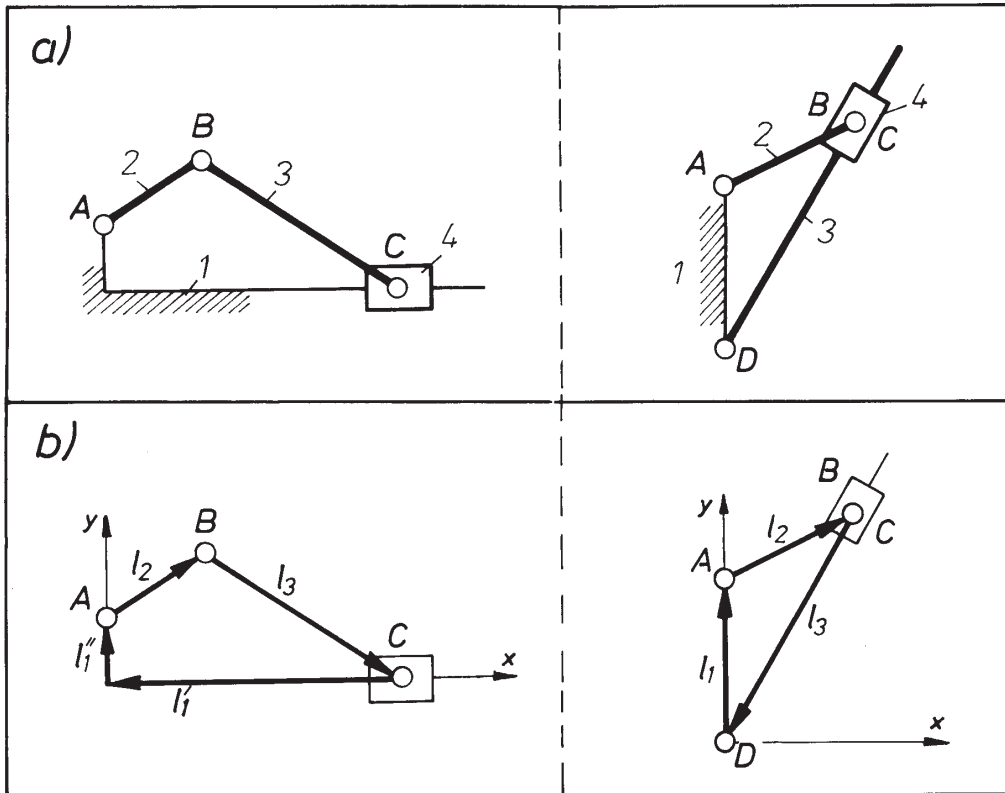
lub

$$\begin{aligned} \sum l_{ix} &= 0, \\ \sum l_{iy} &= 0, \end{aligned} \quad (45)$$

W równaniach (45) l_{ix} i l_{iy} oznaczają rzuty wektorów na osie x i y układu współrzędnych. Jeżeli wprowadzić jednolitą umowę co do oznaczeń i odkładania kątów kierunkowych kolejnych wektorów, to rzuty l_{ix} i l_{iy} można wyrazić ogólnie:

$$\begin{aligned} l_{ix} &= l_i \cos \alpha_i, \\ l_{iy} &= l_i \sin \alpha_i. \end{aligned} \quad (46)$$

Związki określające prędkość i przyspieszenie można otrzymać z równań (45) w wyniku ich różniczkowania względem czasu



Rys. 74. Zastępowanie łańcuchów kinematycznych łańcuchami wektorowymi:
a) przykłady mechanizmów, b) łańcuchy wektorowe

$$\sum \frac{dl_{ix}}{dt} = 0,$$

$$\sum \frac{dl_{iy}}{dt} = 0$$

(47)

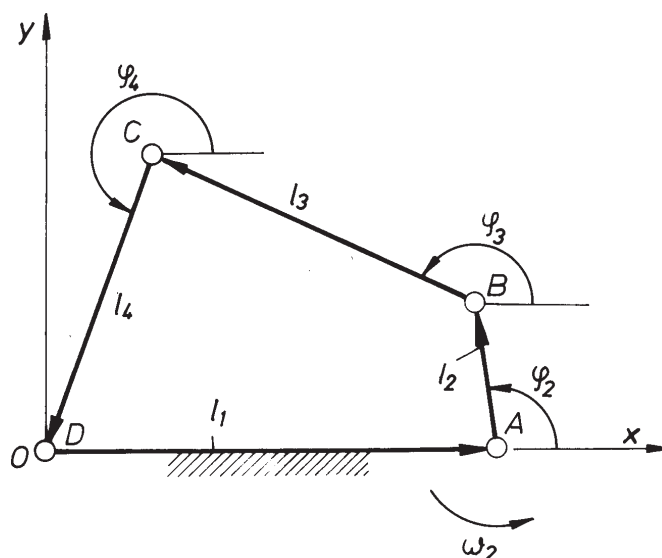
oraz

$$\sum \frac{d^2 l_{ix}}{dt^2} = 0,$$

$$\sum \frac{d^2 l_{iy}}{dt^2} = 0.$$

(48)

W celu zilustrowania tej metody rozpatrzmy analizę czworoboku przegubowego.



Rys. 75. Rysunek pomocniczy do analitycznego badania parametrów ruchu czworoboku przegubowego

4.1.1. Analiza czworoboku przegubowego

Niech będzie dany czworobok $ABCD$ (rys. 75) o znanych długościach członów l_1, l_2, l_3 i l_4 oraz prędkości kątowej ω_2 członu czynnego. Należy określić położenia, prędkości i przyspieszenia wszystkich członów.

Przyjmijmy układ współrzędnych xOy , a człony mechanizmu zastąpmy przez odpowiednie wektory $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ i \vec{l}_4 . Równanie (44) wektorowe wieloboku w tym konkretnym przypadku ma postać

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \vec{l}_4 = 0, \quad (49)$$

natomiast równania (45) przy wprowadzonych oznaczeniach kątów φ_i

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 + l_4 \cos \varphi_4 &= 0, \\ l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 + l_4 \sin \varphi_4 &= 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Podstawiamy

$$a = l_1 + l_2 \cos \varphi_2,$$

$$b = l_2 \sin \varphi_2.$$

Po podniesieniu do kwadratu i dodaniu stronami otrzymamy wtedy

$$a^2 + b^2 + 2al_3 \cos \varphi_3 + 2bl_3 \sin \varphi_3 + l_3^2 + l_4^2 = 0. \quad (51)$$

Po podzieleniu zależności (51) przez $2al_3$ i oznaczeniu

$$A = \frac{a^2 + b^2 + l_3^2 + l_3^2}{2al_3} \quad \text{oraz} \quad B = \frac{b}{a}$$

otrzymano

$$A + \cos \varphi_3 + B \sin \varphi_3 = 0,$$

a następnie

$$(1 + B^2) + \cos^2 \varphi_3 + 2A \cos \varphi_3 + (A^2 + B^2) = 0. \quad (52)$$

Po podstawieniu danych liczbowych można z zależności (52) wyznaczyć kąty φ_3 . Dla oznaczonych wartości φ_3 i założonej wartości φ_2 wartość kąta φ_4 wyznaczmy z zależności (50)

$$\cos \varphi_4 = \frac{l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3}{-l_4} \quad (53)$$

Znając położenie członów rozpatrywanego czworoboku przegubowego można przystąpić do wyznaczenia prędkości i przyspieszeń. Po zróżniczkowaniu równań położenia (50) otrzymano

$$\begin{aligned} \omega_2 l_2 \sin \varphi_2 + \omega_3 l_3 \sin \varphi_3 + \omega_4 l_4 \sin \varphi_4 &= 0, \\ \omega_2 l_2 \cos \varphi_2 + \omega_3 l_3 \cos \varphi_3 + \omega_4 l_4 \cos \varphi_4 &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

gdzie $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$, $\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}$, $\omega_4 = \frac{d\varphi_4}{dt}$.

Obracając układ współrzędnych o kąt φ_3 otrzymamy dla pierwszego z równań (54)

$$\omega_2 l_2 \sin (\varphi_2 - \varphi_3) + \omega_3 l_3 \sin (\varphi_3 - \varphi_3) + \omega_4 l_4 \sin (\varphi_4 - \varphi_3) = 0.$$

Składnik $\omega_3 l_3 \sin (\varphi_3 - \varphi_3)$ jest oczywiście równy zeru, więc

$$\omega_4 = \frac{-l_2 \sin (\varphi_2 - \varphi_3)}{l_4 \sin (\varphi_4 - \varphi_3)}. \quad (55)$$

Analogicznie, obracając układ współrzędnych o kąt φ_4 , dla drugiego z równań (54) otrzymamy

$$\omega_3 = \frac{-l_2 \sin (\varphi_2 - \varphi_4)}{l_3 \sin (\varphi_3 - \varphi_4)}. \quad (56)$$

W celu uzyskania przyspieszeń kątowych członów zróżniczkowano zależności (55) oraz (56) i uzyskano

$$\varepsilon_4 = \frac{\omega_2^2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \omega_3^2 l_3 \cos(\varphi_4 - \varphi_3)}{l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\omega_2^2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) + \omega_3^2 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) + \omega_4^2 l_4}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}.$$
(57)

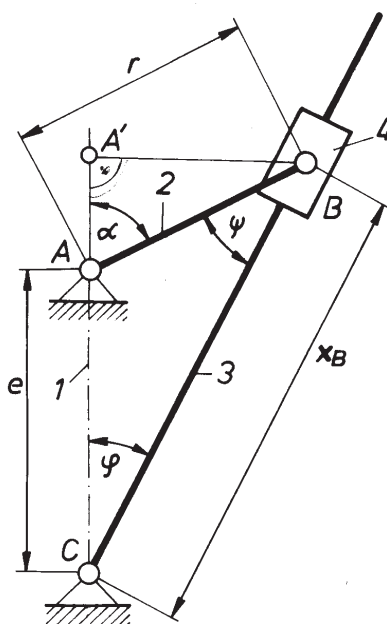
Przedstawiona metoda zapisu funkcji położenia i jej obróbki nadaje się do stosowania w całej grupie mechanizmów dźwigniowych.

4.2. Metoda klasyczna

Czasem potrzebną funkcję położenia można otrzymać zapisując określone związki wprost z rysunku. Niech np. będzie dany mechanizm jarzmowy (rys. 76). Zakładając, że członem czynnym jest tu korba AB , należy określić prędkość kątową ω_3 i przyspieszenie ε_3 jarzma (3).

Rzutując długość r korby AB i zmienną długość jarzma BC na linię AC ustalimy zależność między znanym w dowolnej chwili kątem α obrotu korby i kątem φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r \sin \alpha}{e + r \cos \alpha},$$
(58)



Rys. 76. Rysunek pomocniczy do analizy mechanizmu jarzmowego

Po wprowadzeniu

$$\lambda = \frac{e}{r}$$

przepiszemy (58) w postaci

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha}{\lambda + \cos \alpha}, \quad (59)$$

stąd

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{\lambda + \cos \alpha}. \quad (60)$$

Zależnie od wartości λ otrzymujemy mechanizm z jarzmem obrotowym lub wahadłowym. Dla jarzma wahadłowego $\varphi < 90^\circ$, ($\operatorname{tg} \varphi < \infty$) mianownik zależności (59)

$$\lambda + \cos \alpha \neq 0,$$

więc

$$\lambda > 1.$$

Podobnie dla jarzma obrotowego

$$\lambda < 1, \text{ tzn. } e < r.$$

Po zróżniczkowaniu zależności (58) przy założeniu, że $(d\alpha/dt) = \omega_2$ i $(d\varphi/dt) = \omega_3$, otrzymano

$$\omega_3 = \omega_2 r \frac{(e + r \cos \alpha) \cos \alpha + r \sin^2 \alpha}{(e + r \cos \alpha)^2} \cos^2 \varphi$$

lub po przekształceniu

$$\omega_3 = \omega_2 r \frac{r(r + e \cos \alpha)}{e^2 + 2er \cos \alpha + r^2}$$

oraz

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{1 + \lambda \cos \alpha}{1 + 2\lambda \cos \alpha + \lambda^2}. \quad (61)$$

Różniczkując powtórnie zależność (61), znajdujemy wzór określający przyspieszenie kątowe jarzma

$$\varepsilon_3 = \omega_2^2 \frac{\lambda(1 - \lambda^2) \sin \alpha}{(1 + 2\lambda \cos \alpha + \lambda^2)^2} + \varepsilon_2 \frac{1 + \lambda \cos \alpha}{1 + 2\lambda \cos \alpha + \lambda^2}. \quad (62)$$

Jeżeli $\omega_2 = \text{const}$, $\varepsilon_2 = 0$, to otrzymamy oczywiście

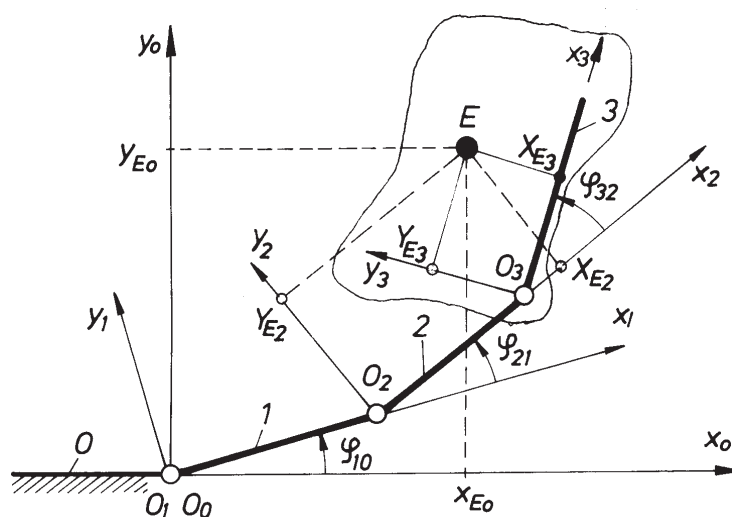
$$\varepsilon_2 = \omega_2^2 \frac{\lambda(1-\lambda^2)\sin\alpha}{(1+2\lambda\cos\alpha+\lambda^2)^2}. \quad (63)$$

4.3. Metoda macierzowa

Metodę macierzową, stosowaną zwłaszcza przy wykorzystywaniu współczesnych środków obliczeniowych, zilustrujemy na przykładzie analizy łańcuchów kinematycznych otwartych. Problemy analizy łańcuchów otwartych pojawiają się najczęściej przy badaniach manipulatorów. Przedstawioną niżej metodę można jednak zastosować w równym stopniu do badania łańcuchów zamkniętych.

Niech będzie więc dany płaski łańcuch kinematyczny otwarty złożony z czterech członów tworzących kolejno ze sobą tylko pary obrotowe (rys. 77). Stwierdzając, że ruchliwość tego łańcucha wynosi $W = 3$, przyjmijmy, że jego jednobieżność uzyskuje się w wyniku zadanych ruchów względnych ω_{10} , ω_{21} i ω_{32} . Przyjmijmy innymi słowy, że kąty φ_{10} , φ_{21} i φ_{32} są określonymi funkcjami czasu. Załóżmy dalej, że znane są parametry geometryczne łańcucha (długość członów l_1 i l_2 oraz współrzędne x_{E3} i y_{E3} punktu E , związanego na sztywno z członem (3). Przy takich założeniach należy określić trajektorię punktu E_3 w układzie podstawy O . Zadanie to można sprowadzić do określenia współrzędnych punktu E_3 w układzie podstawy, czyli x_{EO} i y_{EO} .

Wprowadźmy układy pomocnicze $x_1O_1y_1$, $x_2O_2y_2$ i $x_3O_3y_3$ związane z kolejnymi członami i wyrażmy położenie punktu E w tych układach. Na podstawie rysunku 77 otrzymamy [4]



Rys. 77. Założenia do macierzowego zapisu położenia punktu E w układzie $0 x_0 y_0$

$$x_{E2} = x_{E3} \cos \varphi_{32} - y_{E3} \sin \varphi_{32} + l_2, \quad (64)$$

$$y_{E2} = x_{E3} \sin \varphi_{32} + y_{E3} \cos \varphi_{32},$$

$$x_{E1} = x_{E2} \cos \varphi_{21} - y_{E2} \sin \varphi_{21} + l_1, \quad (65)$$

$$y_{E1} = x_{E2} \sin \varphi_{21} + y_{E2} \cos \varphi_{21},$$

$$x_{E0} = x_{E1} \cos \varphi_{10} - y_{E1} \sin \varphi_{10}, \quad (66)$$

$$y_{E0} = x_{E1} \sin \varphi_{10} + y_{E1} \cos \varphi_{10},$$

Mamy w ten sposób sześć równań z sześcioma niewiadomymi. Po rozwiązaniu tych równań można między innymi otrzymać szukane x_{E0} i y_{E0} . Dla ułatwienia tego zadania oraz uproszczenia zapisów dogodnie jest przejść na zapis macierzowy.

W tym celu przepiszmy jeszcze raz układ równań (64) uzupełniony tożsamością $1 = 1$

$$x_{E2} = x_{E3} \cos \varphi_{32} - y_{E3} \sin \varphi_{32} + l_2,$$

$$x_{E2} = x_{E3} \sin \varphi_{32} + y_{E3} \cos \varphi_{32} + 0, \quad (66a)$$

$$1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1.$$

Układ równań (66a) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x_{E2} \\ y_{E2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} & l_2 \\ \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{E3} \\ y_{E3} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Łatwo to sprawdzić dokonując mnożenia. Na tej zasadzie, po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\mathbf{T}_{32} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} & l_2 \\ \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & l_1 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{10} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{10} & -\sin \varphi_{10} & 0 \\ \sin \varphi_{10} & \cos \varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{r}_{E3} = \begin{bmatrix} x_{E3} \\ y_{E3} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{E2} = \begin{bmatrix} x_{E2} \\ y_{E2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{E1} = \begin{bmatrix} x_{E1} \\ y_{E1} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{E0} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ 1 \end{bmatrix}$$

można zapisać równania (64), (65), (66) w postaci

$$\mathbf{r}_{E2} = \mathbf{T}_{32} \mathbf{r}_{E3}, \quad (68)$$

$$\mathbf{r}_{E1} = \mathbf{T}_{21} \mathbf{r}_{E2}, \quad (69)$$

$$\mathbf{r}_{E0} = \mathbf{T}_{10} \mathbf{r}_{E1}, \quad (70)$$

lub po podstawieniu

$$\mathbf{r}_{E0} = \mathbf{T}_{10} \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{32} \mathbf{r}_{E3}. \quad (71)$$

Po wykonaniu mnożenia z zapisu (71) otrzymamy

$$x_{E0} = x_{E3} \cos \varphi_{30} - y_{E3} \sin \varphi_{30} + l_2 \cos \varphi_{20} + l_1 \cos \varphi_{10}, \quad (72)$$

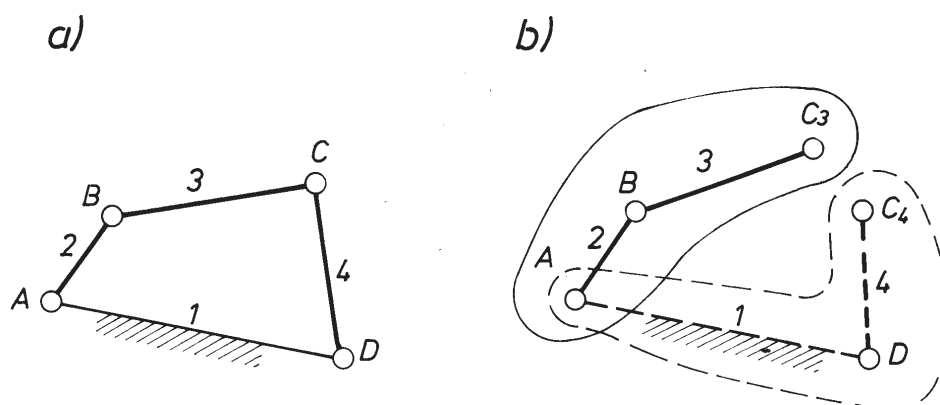
$$y_{E0} = y_{E3} \sin \varphi_{30} + x_{E3} \cos \varphi_{30} + l_2 \sin \varphi_{20} + l_1 \sin \varphi_{10},$$

gdzie: $\varphi_{30} = \varphi_{32} + \varphi_{20}$,

$$\varphi_{20} = \varphi_{21} + \varphi_{10}.$$

Dokładnie ten sam wynik (72) otrzymalibyśmy w wyniku rozwiązania układu równań (64), (65) i (66) przy znacznie większym nakładzie pracy. Różnice na korzyść metod macierzowych ujawniają się ze szczególną siłą, zwłaszcza podczas badania łańcuchów przestrzennych.

Trzeba podkreślić, że na podstawie zapisów (71) lub (72) można określić położenia dowolnych dwóch punktów związanych z członem (3), a więc można określić



Rys. 78. Ilustracja do macierzowego zapisu łańcucha zamkniętego: a) schemat mechanizmu, b) podział na łańcuchy otwarte

położenie członu (3). Podobnie można określić położenia pozostałych członów łańcucha, a więc również ich położenia wzajemne.

Omówiona metoda nadaje się również do rozwiązywania układów kinematycznych zamkniętych. Droga wiedzie przez podział łańcucha zamkniętego na łańcuchy otwarte w wyniku rozłączania określonych par kinematycznych. Na przykład badając czworobok przegubowy $ABCD$ (rys. 78a) można wyróżnić dwa łańcuchy kinematyczne otwarte ABC_3 i ADC_4 powstałe po rozłączeniu pary C (rys. 78b). Dla każdego składowego łańcucha otwartego należy określić odpowiednie współrzędne położenia elementów odpowiednich członów i zapisać warunki zamykania. Na przykład dla przyczozonego czworoboku przegubowego, przy jego podziale jak na rys. 78, warunki zamykania przyjąłby postać

$$\begin{aligned}x_{C4} &= x_{C3}, \\y_{C4} &= y_{C3}.\end{aligned}\tag{73}$$

Otrzymane w ten sposób układy równań umożliwiają określenie interesujących nas parametrów położenia badanego mechanizmu. Jest to jedna z wielu proponowanych metod.

Bardzo skuteczną i godną polecenia jest metoda polegająca na podziale badanego mechanizmu na grupy członów (grupy Assura) i człony czynne. Opracowane dla poszczególnych grup zapisy macierzowe [10] umożliwiają również (w sposób niemal schematyczny) zapis funkcji położenia dla dowolnego płaskiego mechanizmu dźwigniowego.

Dysponując zapisem funkcji położenia można otrzymać następnie poszukiwane funkcje prędkości i przyspieszeń poprzez odpowiednią ich obróbkę (różniczkowanie po czasie).

5. Metody numeryczne

Na ogół poznane metody graficzne i analityczne są przydatne do analizy stosunkowo prostych mechanizmów. Ograniczeniem stosowania metod graficznych jest ich dokładność, a często i przejrzystość konstrukcji geometrycznych. W przypadku metod analitycznych uzyskanie rozwiązań w zamkniętej postaci jest często żmudne i pracochłonne. w takich przypadkach można sięgać po zwykle niezawodne (zwłaszcza przy korzystaniu z techniki komputerowej) metody numeryczne.

W praktyce stosuje się metody numeryczne najczęściej do korygowania wyników otrzymanych innym sposobem i traktowanych jako pierwsze przybliżenia, albo do zastępowania wybranych fragmentów obliczeń. Metod numerycznych jest bardzo wiele, tu ograniczymy się jedynie do przytoczenia jednej z nich: metody przyrostów skończonych.

5.1. Metoda przyrostów skończonych

Metodę przyrostów skończonych przedstawimy na przykładzie badania ruchu punktu M po torze k_M (rys. 79). Interesuje nas prędkość v_i i przyspieszenie a_i ruchu tego punktu. Do dyspozycji mamy kolejne położenia tego punktu oznaczone indeksami ... $i-2, i-1, i, i+1, i+2, \dots$ zajmowane przez niego w równych odstępach czasu Δt . Przybliżone wartości składowych prędkości wzdłuż osi x i y w położeniu i można wyznaczyć z zależności [12]

$$v_{xi} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t}, \quad (74)$$

$$v_{yi} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t}.$$

przy czym oczywiście

$$v_i = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{v_{yi}}{v_{xi}}$$

Podobnie przyspieszenie w położeniu i określają wzory

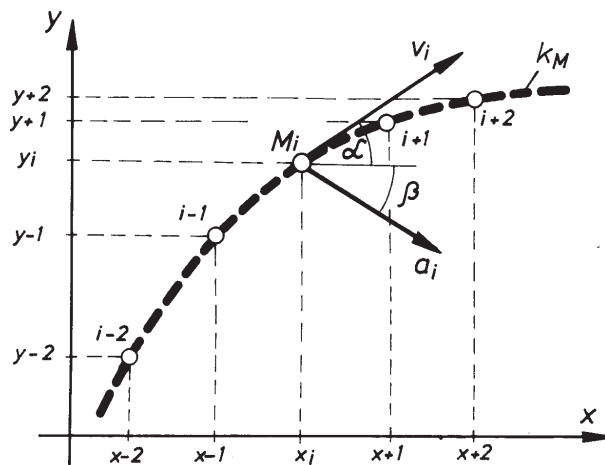
$$a_{xi} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2},$$

$$a_{yi} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2},$$
(75)

przy czym

$$a_i = \sqrt{a_{xi}^2 + a_{yi}^2}, \quad \beta = \arctg \frac{a_{yi}}{a_{xi}}.$$

Należy podkreślić, że wyniki uzyskane tą metodą są z założenia przybliżone, przy czym przybliżenie to zależy dodatkowo od dokładności określenia przyrostów Δx_i , Δy_i oraz wartości przedziału czasu Δt . Metoda ta może być z powodzeniem stosowana do określania prędkości i przyspieszenia w przypadku, gdy przyrosty położenia są określone dokładnie, np. z zależności analitycznej – funkcji położenia. Można w ten sposób określać również parametry ruchu w przypadku danych o położeniu, uzyskanych z pomiaru. Konieczność taka występuje np. przy ocenie parametrów ruchu popychacza w rzeczywistym mechanizmie krzywkowym, gdzie geometria profilu krzywki nie jest bliżej znana. Należy pamiętać, że w takich przypadkach, w wyniku nieodczynnych błędów pomiarowych, należy liczyć się również z dużą niedokładnością wyników obliczeń, zwłaszcza przy określaniu przyspieszeń. Zachodzi wtedy potrzeba stosowania odpowiednich metod statystycznych, które do określania przyspieszeń w danym położeniu mechanizmu stosują dane z pomiaru w kilku sąsiednich położeniach. Odpowiednia metoda numeryczna nazywa się rachunkiem wyrównawczym [12].



Rys. 79. Ilustracja do metody przyrostów skończonych

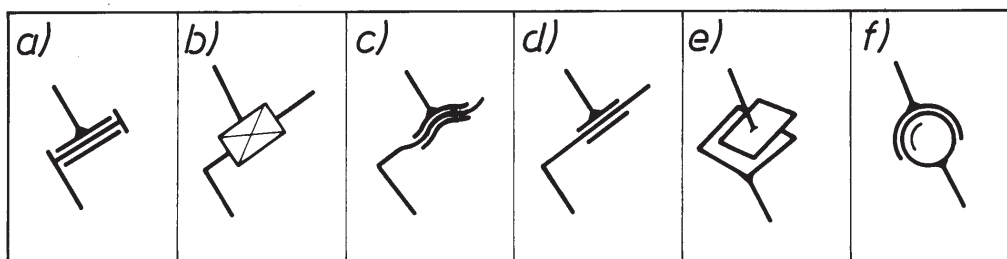
6. Analiza i przegląd wybranych grup mechanizmów

Omówione w rozdziałach 3, 4 i 5 ogólne metody analizy kinematycznej umożliwiają badanie praktycznie dowolnego układu kinematycznego. Należy jednak podkreślić, że podczas analizy pewnych grup mechanizmów preferuje się często również inne metody specjalnie dla danej grupy opracowane. Zwróćmy na to uwagę przy okazji dokonywania przeglądu najbardziej znanych i powszechnie we współczesnej technice stosowanych grup mechanizmów. Do nich należy zaliczyć: mechanizmy dźwigniowe oraz niektóre grupy mechanizmów z parami wyższymi.

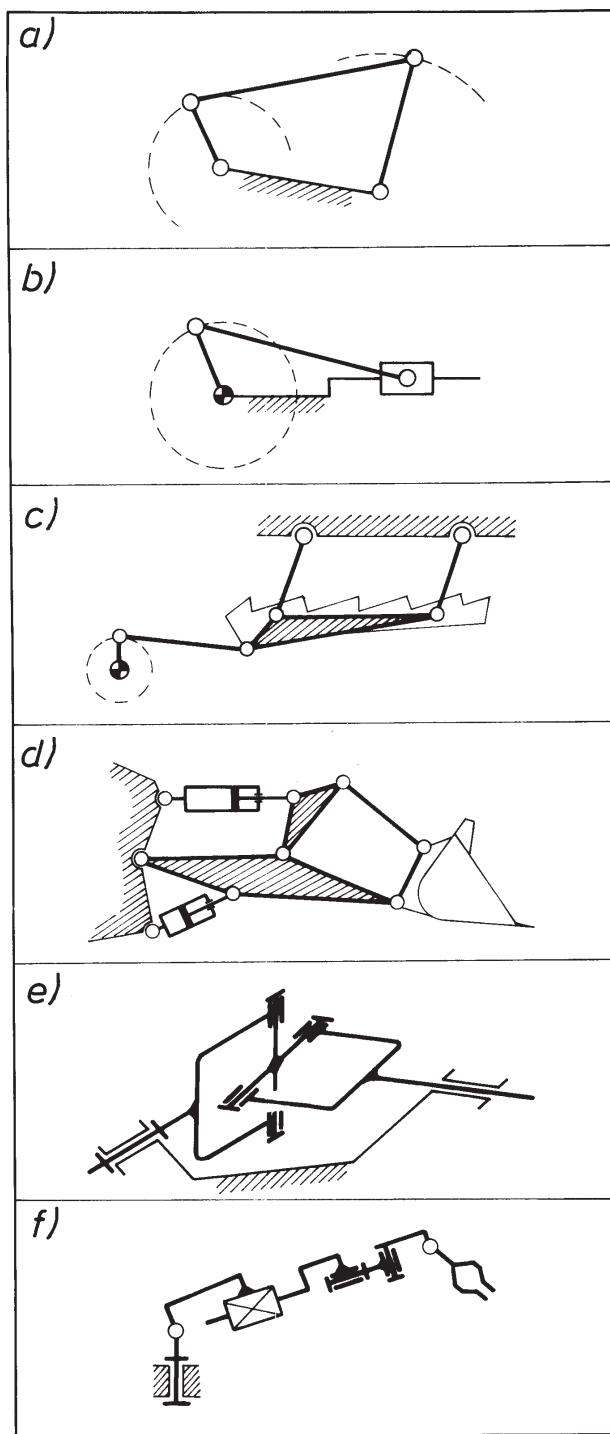
6.1. Mechanizmy dźwigniowe

Mechanizmy dźwigniowe są to mechanizmy, w których występują tylko pary niższe, tj. pary o styku powierzchniowym (rys. 80). Liczne walory tego typu ruchowych połączeń sprawiły, że mechanizmy dźwigniowe odgrywają w budowie maszyn zasadniczą rolę. Spotkać je można w podstawowych podzespołach maszyn i urządzeń. Występują w układach przenoszenia i transformacji ruchu, w układach napędowych i regulacyjnych, w układach wykonawczych i sterowania. Kilka przykładów mechanizmów dźwigniowych zestawiono na rys. 81.

Jako pierwszy (nie bez powodu) przytoczono czterocłonowy mechanizm płaski, zwany czworobokiem przegubowym (rys. 81a), oraz jego odmianę – powszechnie stosowany układ korbowo-wodzikowy (rys. 81b). Przykładami bardziej złożonych mechanizmów dźwigniowych są układ wytrząsacza do słomy (rys. 81c) oraz układ wysięgnika ładowarki hydraulicznej (rys. 81d). Były to tzw. mechanizmy płaskie, w których wszystkie punkty należące do członów ruchomych wykreślają trajektorie w płaszczyznach równoległych. Jako przykłady mechanizmów dźwigniowych przestrzen-



Rys. 80. Przykłady par kinematycznych niższych



Rys. 81. Przykłady mechanizmów dźwigniowych

nych załączono tu powszechnie stosowany układ kinematyczny sprzęgła Cardana (rys. 81c) oraz manipulator robota (rys. 81f).

6.1.1. Płaski czworobok przegubowy

Płaski czworobok przegubowy tworzą cztery człony obrotowe wchodzące z sobą w cztery pary obrotowe. Należy do najprostszych, a jednocześnie do najczęściej w praktyce spotykanych mechanizmów (rys. 82). Występuje w trzech odmianach różniących się stosunkami wymiarów poszczególnych członów oraz wynikającymi stąd ruchami. Będziemy więc mówić o odmianie **korbowo-wahaczowej** wtedy, gdy ruchowi obrotowemu członu (2), zwanego korbą, towarzyszy ruch wahadłowy napędzanego członu (4) (rys. 82a). Przy innej proporcji wymiarów obydwie ramiona (2) i (4) mogą wykonywać względem podstawy (1) tylko ruchy obrotowo-zwrotne (rys. 82c). taką odmianę nazywa się **dwuwahaczową**. Jest możliwa odmiana, w której ruch obrotowy członu (2) wywołuje ruch obrotowy członu (4) (rys. 82b). Mówimy wtedy o czworoboku **dwukorbowym**. Przynależność badanego układu do jednej z wymienionych odmian można ustalić opierając się na tzw. nierównościach Grashofa, które można bez trudu wyprowadzić na podstawie rys. 83. Naniesione tu dwa położenia szczególne, jakie muszą zająć względem siebie człony czworoboku przy pełnym obrocie korby (2), prowadzą wprost do nierówności:

$$l_2 + l_3 < l_1 + l_4,$$

$$l_4 < l_3 - l_2 + l_1,$$

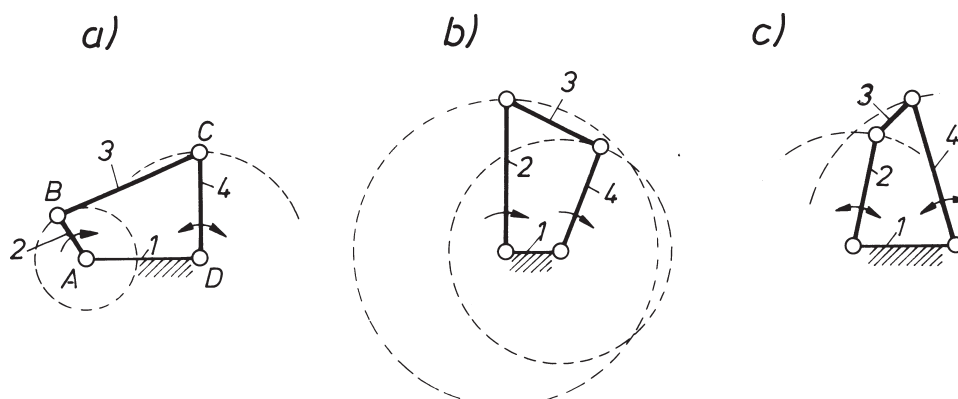
$$l_1 < l_3 - l_2 + l_4,$$

z których po przekształceniu otrzymamy:

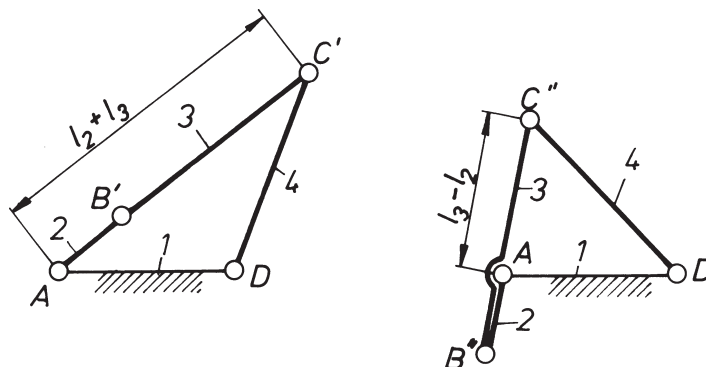
$$l_2 + l_3 < l_1 + l_4,$$

$$l_2 + l_4 < l_1 + l_3, \quad (76)$$

$$l_2 + l_1 < l_3 + l_4.$$



Rys. 82. Podstawowe rodzaje czworoboku przegubowego: a) korbowo-wahaczowy, b) dwuwahaczowy, c) dwukorbowy



Rys. 83. Położenie zwrotne czworoboku przegubowego

Z nierówności tych, zwanych często postulatem Grashofa, wynika, że w czworoboku korbkowo-wahaczowym suma długości korby (2) i każdego innego członu jest mniejsza od sumy długości dwóch członów pozostałych. Innymi słowy, w czworoboku korbkowo-wahaczowym najkrótszym członem jest korba – człon tworzący parę obrotową z podstawą. Jeszcze inaczej:

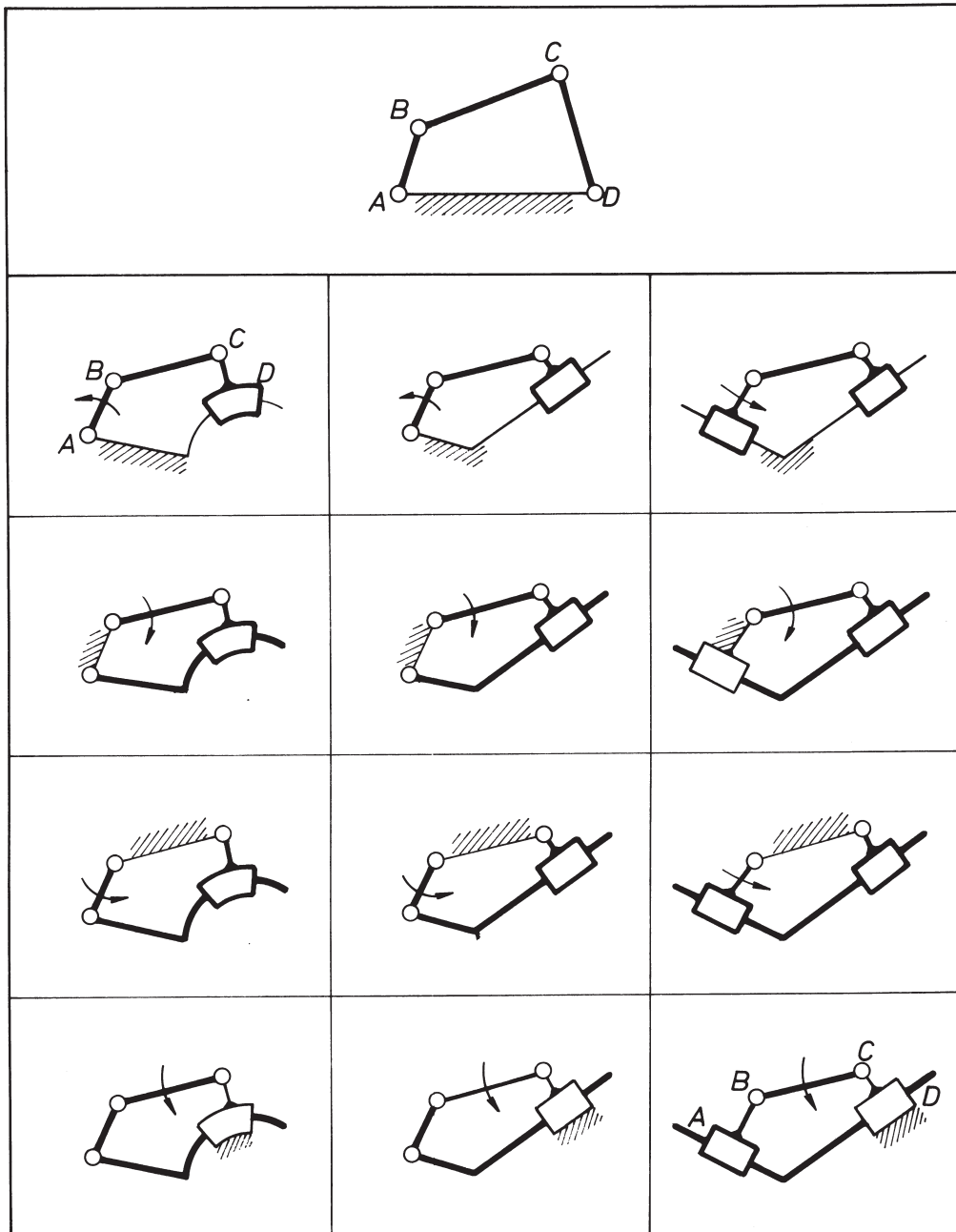
- jeżeli są spełnione związki (76) oraz człon najkrótszy jest przy podstawie, czworobok jest korbkowo-wahaczowy;
- jeżeli przy spełnionych nierównościach (76) człon najkrótszy jest łącznikiem, mamy do czynienia z układem dwuwahaczowym;
- jeżeli postulat Grashofa jest spełniony i człon najkrótszy jest podstawą, występuje czworobok dwukorbkowy.

Jeżeli związki (76) nie są spełnione, to czworobok jest dwuwahaczowy.

Z czworoboku, w wyniku zmiany wymiarów geometrycznych członów i par kinematycznych, można otrzymać wiele różnych modyfikacji mechanizmów pochodnych, jak np. mechanizm korbkowo-wodzikowy, jarzmowy itd. (rys. 84).

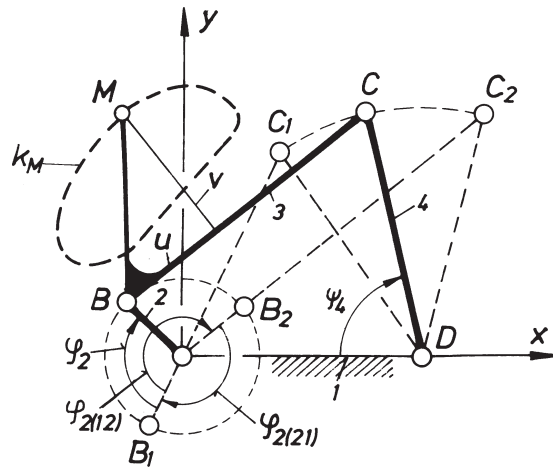
Z czworoboku przegubowego można wywieść wiele prostych i powszechnie stosowanych mechanizmów czteroczłonowych, w wielu zaś bardziej złożonych mechanizmach daje się ten charakterystyczny układ często wydzielić i wyróżnić jako część istotną.

W analizie czworoboku przegubowego można stosować skutecznie każdą z metod omówionych w rozdziałach 3, 4 i 5. Czworobok przegubowy wykorzystano zresztą jako przykład przy omawianiu metody analitycznej (p. 4.1.1). Jak wynika z wyprowadzonych tam zależności (53), (55) i (57), wartości kąta obrotu ψ_4 członu napędzanego (4) (rys. 85) względem podstawy (1) jego prędkości kątowej ω_4 i przyspieszenia kątowego ε_4 są wyrażone złożonymi funkcjami czterech długości członów mechanizmu i kąta obrotu φ_2 członu napędzającego (2). Przykładowe przebiegi tych funkcji dla czworoboku korbkowo-wahaczowego o założonej geometrii ($l_2/l_1 = 0,325$, $l_3/l_1 = 1,125$, $l_4/l_1 = 1,025$) przedstawiono na rys. 86. Przez dobór odpowiednich wartości l_i można za pomocą tego mechanizmu realizować nawet bardzo złożone wymagania dotyczące ruchu względnego różnych jego członów.



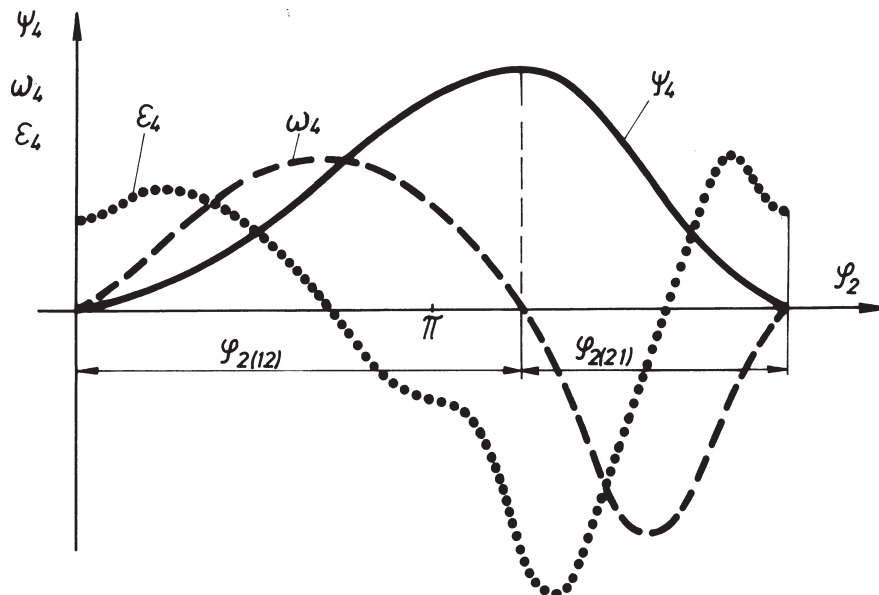
Rys. 84. Czworobok przegubowy i jego pochodne

Dowolny punkt M (rys. 85) związany na sztywno z łącznikiem (3) (załóżmy, że jego położenie na łączniku jest opisane współrzędnymi u i v) zakreśla w układzie podstawy (1) trajektorię k_M , zwaną powszechnie krzywą łącznikową. Trajektorja ta

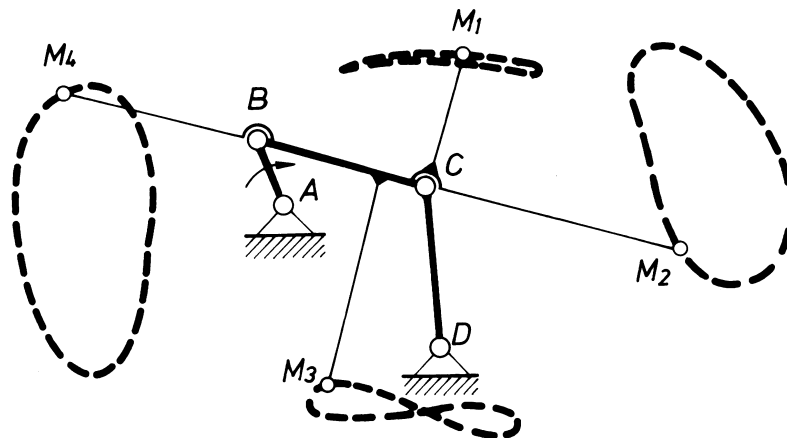


Rys. 85. Czworobok przegubowy w ruchu

jest opisana równaniem 6. stopnia o sześciu parametrach (l_1, l_2, l_3, l_4, u, v). Dlatego też, jak łatwo się domyśleć, krzywe łącznikowe czworoboku charakteryzują się dużą różnorodnością kształtu odmian i postaci. Kilka przykładów takich krzywych wykreślonych przez punkty łącznika tego samego czworoboku przedstawiono na rys. 87. Duża możliwość w zakresie realizacji różnorodnych kształtów krzywych łącznikowych leży u podstaw budowy i działania wielu podzespołów maszyn i urządzeń. Dla przykładu przytoczymy tu jedynie układ prowadzenia piły poprzecznej przedstawionej na



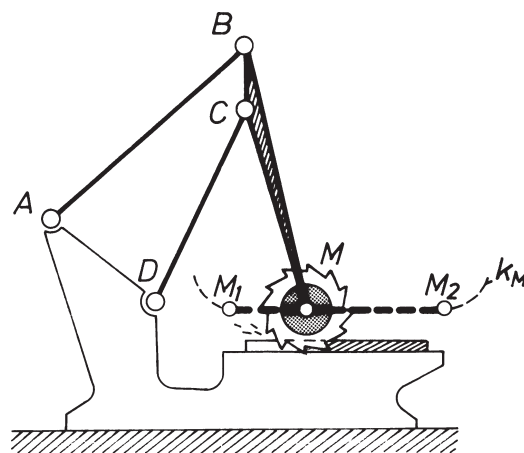
Rys. 86. Charakterystyki ruchu czworoboku z rys. 85



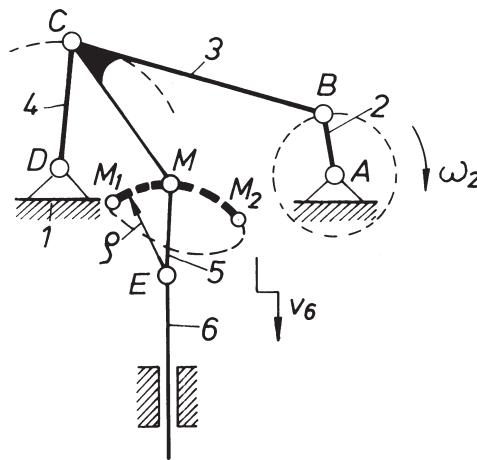
Rys. 87. Przykłady krzywych łącznikowych czworoboku przegubowego ABCD

rys. 88. Wykorzystuje się tu, w zakresie ruchu roboczego M_1-M_2 , zbliżony do prostoliniowego poziomy odcinek trajektorii k_M zakreślonej przez punkt M specjalnie dobranego czworoboku przegubowego ABCD. Tego typu mechanizmy, zwane potocznie prostowodami są stosowane w układach napędowych (np. w układzie napędowym listwy nożowej kosiarki) w układach wodzenia (np. w żurawiach portowych) itd.

Równie często stosuje się w budowie maszyn fragmenty krzywych łącznikowych zbliżone do łuku koła. Przykładem (rys. 89) może być układ realizujący zamianę ciągłego ruchu obrotowego członu (2) na ruch przerywany (z przystankami) suwaka (6). Przerwa w ruchu suwaka (6) występuje wtedy, gdy punkt łącznikowy (M) czworoboku ABCD wędruje po odcinku M_1M_2 zbliżonym do łuku o środku krzywizny w punkcie E .



Rys. 88. Piła poprzeczna jako przykład wykorzystania prostoliniowego odcinka krzywej łącznikowej czworoboku ABCD



Rys. 89. Przykład wykorzystania kształtu krzywej łącznikowej do zamiany ciągłego ruchu obrotowego korbki AB na ruch przerywany członu (6)

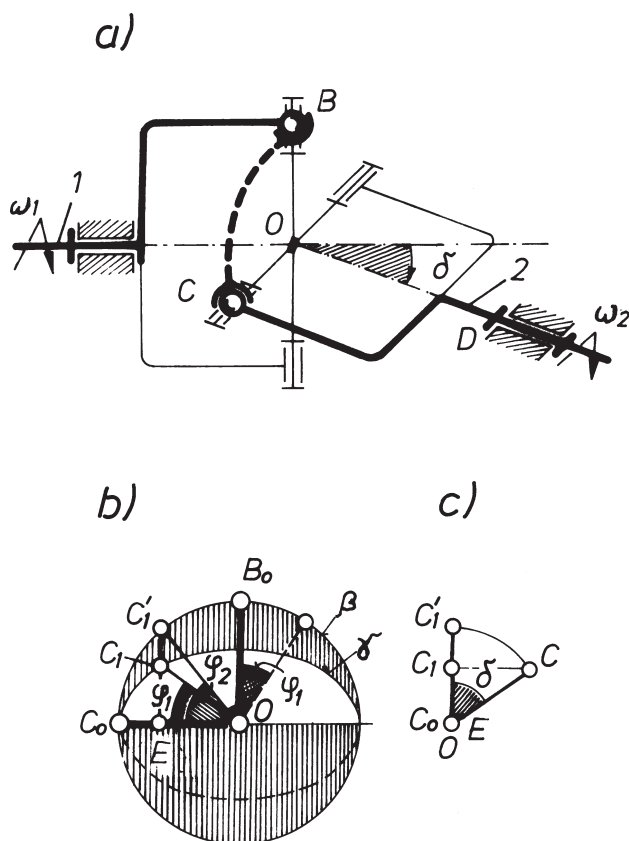
Nie przytaczając już dalszych przykładów można stwierdzić, że różnorakie możliwości czworoboku przegubowego (zarówno w zakresie realizacji prawa ruchu, jak i kreślenia trajektorii) zdecydowały o niezwykle powszechnym jego stosowaniu we współczesnej technice.

6.1.2. Sprzęgło Cardana

Do przenoszenia ruchu między wałami o osiach przecinających się pod zmiennym w czasie pracy kątem δ stosuje się wiele rozwiązań sprzęgieł wychylnych synchronicznych (homokinetycznych).

Jednocześnie występuje powszechnie w budowie maszyn znane niesynchroniczne **sprzęgło Cardana**. Jest to zdwojony czworobok przestrzenny $ABCD$ (rys. 90), który w klasycznym rozwiązaniu składa się z dwóch osadzonych na wałach (1) i (2) widełek połączonych ze sobą za pomocą czteroramiennego krzyżulca. Jak już zasugerowano, to niesynchroniczne sprzęgło przenosi obroty z wału czynnego na bierny, z pewnym przełożeniem $\omega_2/\omega_1 \neq 1$. Przystępując do jego określenia zauważymy, że w czasie ruchu mechanizmu punkt B opisuje okrąg koła w płaszczyźnie prostopadłej do osi wału (1), punkt C zaś w płaszczyźnie prostopadłej do osi wału (2). Kąt między tymi płaszczyznami jest oczywiście równy kątowi δ zawartemu między osiami wałów (1) i (2).

Zrzutujemy drugi z tych okręgów na płaszczyznę okręgu pierwszego (rys. 90b): Wychodząc z położenia początkowego ramion OB_0 i OC_0 dokonajmy korbą OB wału (1) obrotu o kąt φ_1 . Wtedy ramię OC jako prostopadłe do OB zajmie położenie OC_1 , przy czym $\sphericalangle C_0OC_1 = \varphi_1$. Rzeczywistą wartość kąta obrotu φ_2 tego ramienia otrzymamy wykonując kład koła γ na płaszczyznę koła β , przez obrót koła γ , wokół osi C_0O . Punkt C_1 przechodzi wtedy w C_1' i otrzymujemy $\sphericalangle C_0OC_1' = \varphi_2$. Napiszemy teraz



Rys. 90. Sprzęgło Cardana: a) schemat kinematyczny, b) rzuty torów β i γ punktów B i C , c) kąt δ pomiędzy płaszczyznami ruchu punktów B i C

$$EC_1 = OE \operatorname{tg} \varphi_1, \quad EC'_1 = OE \operatorname{tg} \varphi_2 \quad \text{oraz} \quad \frac{EC_1}{EC'_1} = \cos \delta = \frac{EC_1}{OC}$$

i po podstawieniu

$$\operatorname{tg} \varphi_2 \cos \delta = \operatorname{tg} \varphi_1 \quad (77)$$

Jest to związek między kątami obrotu obu wałów.

Po zróżniczkowaniu równania (77) stronami względem czasu otrzymujemy po przekształceniach zależność określającą przełożenie

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \delta}{\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \delta} \quad (78)$$

Jak widać, przełożenie to zależy od kąta nachylenia osi δ i kąta obrotu φ_1 , przy czym:

90

dla

$$\varphi_1 = 0, \pi, \dots, \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\cos \delta},$$

dla

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{\omega_1}{\omega_2} = \cos \delta.$$

Innymi słowy

$$\cos \delta \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} \leq \frac{1}{\cos \delta}. \quad (79)$$

Przyspieszenie kątowe ε_2 wału biernego otrzymamy po zróżniczkowaniu równania (78). Po wykonaniu różniczkowania i uporządkowaniu otrzymamy, zakładając że $\omega_1 = \text{const}$

$$\varepsilon_2 = -\omega_1^2 \frac{\sin 2\varphi_1 \sin^2 \delta \cos \delta}{(\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \delta)}. \quad (80)$$

Charakter zmian ω_2 i ε_2 w funkcji kąta obrotu φ_1 i kąta wychylenia δ można prześledzić z wykresów (rys. 91a i b). Jak wynika z ich analizy, zmiany prędkości kątowej członu biernego dwukrotnie powtarzające się w ramach jednego obrotu są bardzo wyraźne, zwłaszcza przy większych kątach. Szczególnie niekorzystnie przedstawiają się zmiany przyspieszeń kątowych, które są przyczyną kłopotliwych zjawisk dynamicznych. W celu ich uniknięcia, przy większych kątach nachylenia δ korzystne jest stosowanie zestawu podwójnych sprzęgieł (rys. 92). Jeżeli osie wałów (1), (2) i (3) leżą w jednej płaszczyźnie oraz widełki wału pośredniczącego (2) są ustawione w jednej płaszczyźnie, to zachodzą wtedy, zgodnie z (77), zależności:

$$\text{tg } \varphi_1 = \text{tg } \varphi_2 \cos \delta_{12},$$

$$\text{tg } \varphi_3 = \text{tg } \varphi_2 \cos \delta_{23},$$

czyli

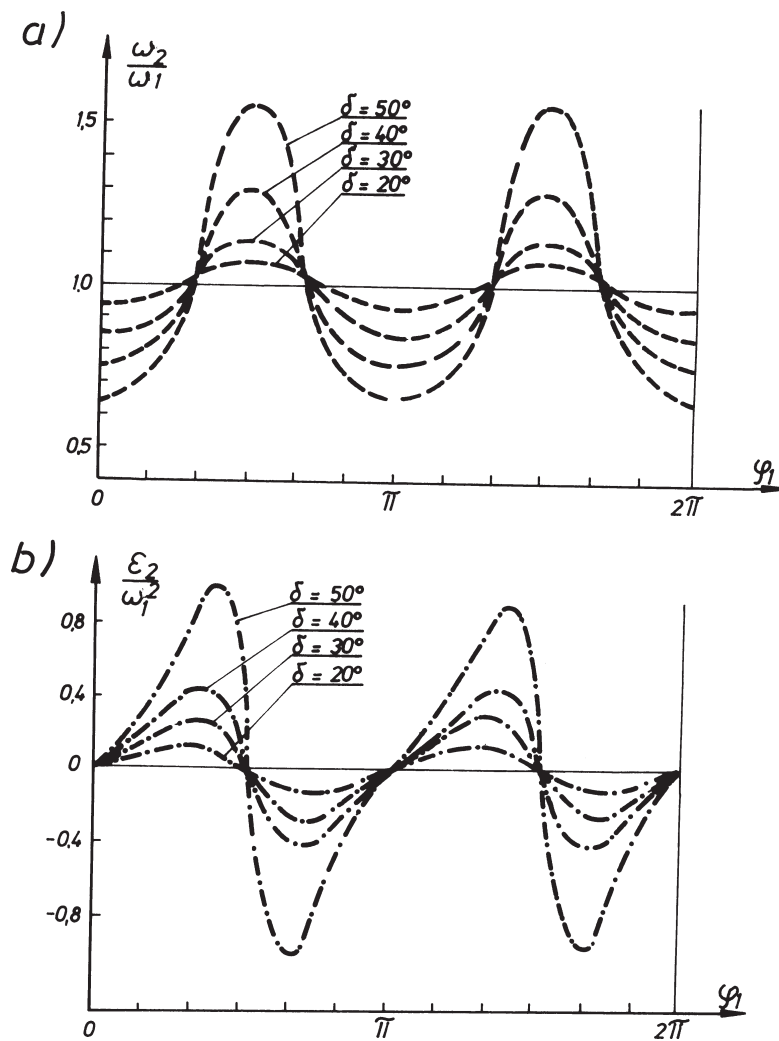
$$\frac{\text{tg } \varphi_1}{\text{tg } \varphi_2} = \frac{\cos \delta_{12}}{\cos \delta_{23}}. \quad (81)$$

Jak nietrudno zauważyć, gdy $\delta_{12} = \pm \delta_{23}$, mamy

$$\varphi_3 = \varphi_1$$

i

$$\omega_3 = \omega_1.$$

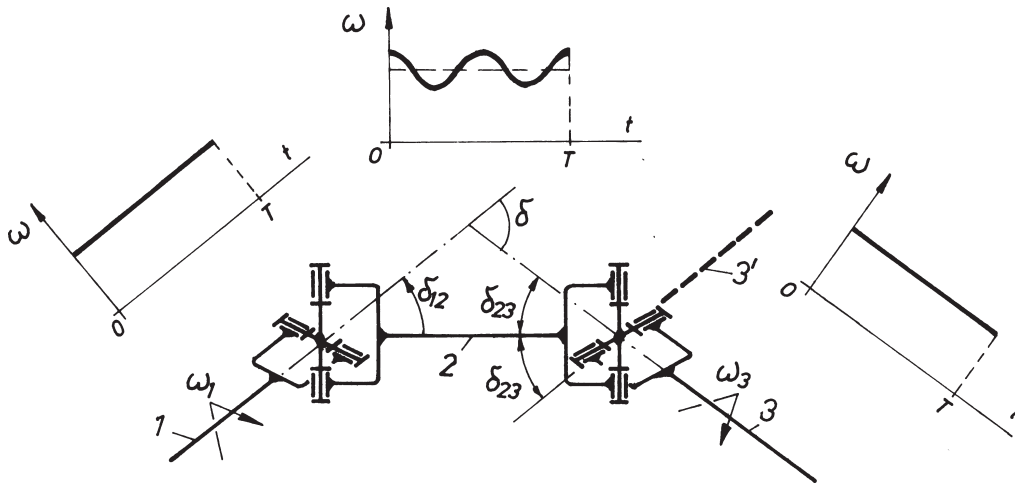


Rys. 91. Charakterystyki ruchu wału biernego sprzęgła Cardana: a) przebiegi zmian $\omega_2/\omega_1 = f(\varphi_{12})$ dla różnych kątów wychylenia osi wałów, b) przebiegi zmian $\varepsilon_2/\omega_1 = f(\varphi_1)$ dla różnych kątów wychylenia osi wałów

Jest to niezwykle korzystne zjawisko, trzeba jednak z naciskiem podkreślić, że występuje tylko wtedy, gdy widełki wału pośredniczącego (2) leżą w jednej płaszczyźnie. Przy ustawieniu tych widełek w stosunku do siebie pod kątem prostym (co często można spotkać w wadliwie zmontowanych układach) zachodzi

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_3} = \cos \delta_{12} \cos \delta_{23},$$

co oznacza istnienie, wtedy już niebezpiecznie zwielokrotnionego, przyspieszenia kątownego członu napędzanego.



Rys. 92. Schemat podwójnego sprzęgła Cardana

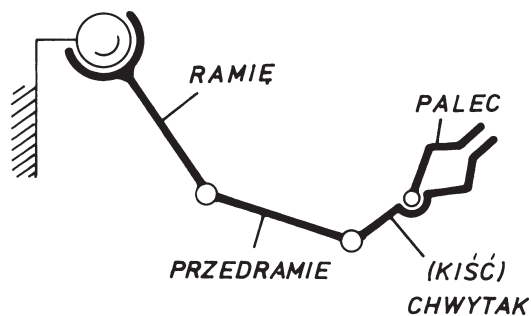
6.1.3. Manipulatory

Wprowadzenie

Pojęciem „manipulator” będziemy określać układ mechaniczny przeznaczony do realizacji niektórych funkcji kończyny górnej człowieka. Urządzenia te pojawiły się w I połowie XX wieku i są stosowane dziś coraz powszechniej, zwłaszcza tam, gdzie bezpośrednia obecność człowieka jest niemożliwa lub niewskazana, np. ze względu na:

- radioaktywność,
- ciśnienie (wysokie i niskie),
- temperaturę (wysoką i niską),
- toksyczność,
- inne (kosmos, głębie oceanu ...).

Początkowo tworzono je na wzór ręki ludzkiej, w podobne wyposażano je części (rys. 93) i od łacińskiego słowa „manus” nadano mu nazwę. Dziś przyjmują formy już



Rys. 93. Manipulator antropomorficzny

zwykle nie antropomorficzne i znajdują różnorakie zastosowania. Cykl rozwojowy ich zastosowań zademonstrowano pogładowo na rys. 94.

W pierwszych okresach rozwoju manipulatorów (początek 1947 r.), służyły one do powielania ruchów ręki ludzkiej w odizolowanej od człowieka przestrzeni (rys. 94a). Te pierwsze rozwiązania były jeszcze mało doskonałe – mechaniczne zwykle sprzężenie obu manipulatorów nie zapewniało potrzebnej dokładności i nie pozwalało na większe obciążenia. Z tego powodu następne manipulatory wyposażano w napędy zasilane z oddzielnych źródeł (rys. 94b) – te znowu nie dawały obsługującemu poczucia obciążenia.

Wady tej nie miały już rozwiązania manipulatorów obsługiwanych za pomocą serwo-mechanizmów (rys. 94c) zapewniających odpowiednie proporcjonalne wspomaganie wysiłku ludzkiego.

Całkowita eliminacja udziału człowieka w tym procesie była możliwa dopiero przez ROBOTY (rys. 94d).

Urządzenia te, przystosowane dziś do realizacji różnych czynności manipulacyjnych i lokomocyjnych, charakteryzują się określonym poziomem energetycznym i informacyjnym. Przechodzą obecnie gwałtowny rozwój poprzez ich kolejne generacje. Jeden z przykładów podziału na generacje podano w tab. 4.

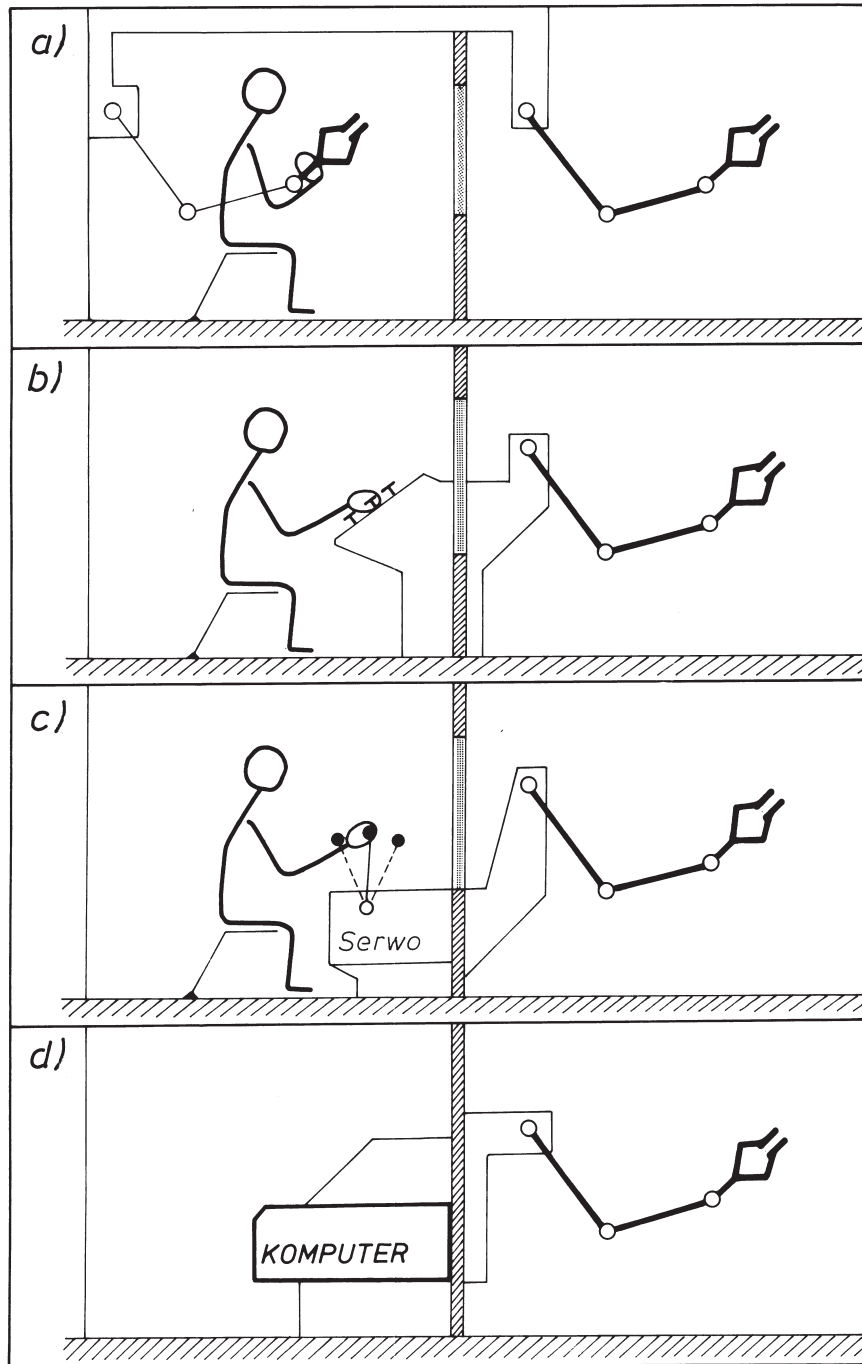
Pozostawiając złożony problem robotów i ich rozwoju, zajmiemy się dalej tylko zagadnieniem budowy ich mechanicznych ramion, tzn. manipulatorów.

Struktura manipulatorów

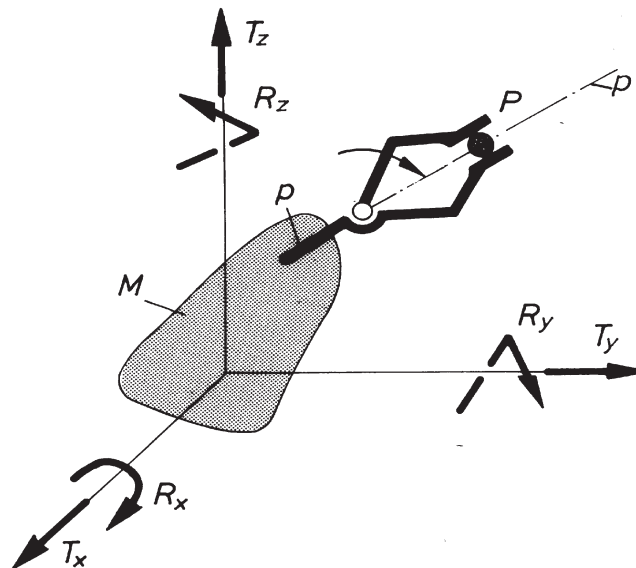
Zadaniem manipulatora jest sterowanie ruchem części chwytnej, zwanej kłasią lub chwytakiem [9]. Najogólniej punkt *P* tego chwytaka (rys. 95) powinien osiągać dowolny punkt określonej przestrzeni przy dowolnym zorientowaniu osi *a*. Oznacza to,

Tabela 4

GENERACJE ROBOTÓW	MANIP. + PAMIĘĆ	I
	MANIP. + PAMIĘĆ + DOTYK	II
	MANIP. + PAMIĘĆ + DOTYK + WZROK	III



Rys. 94. Ilustracja rozwoju manipulatorów: a) sterowany ręcznie, b) z napędem mechanicznym, c) z napędem serwo mechanicznym, d) sterowany wg programu komputerowego



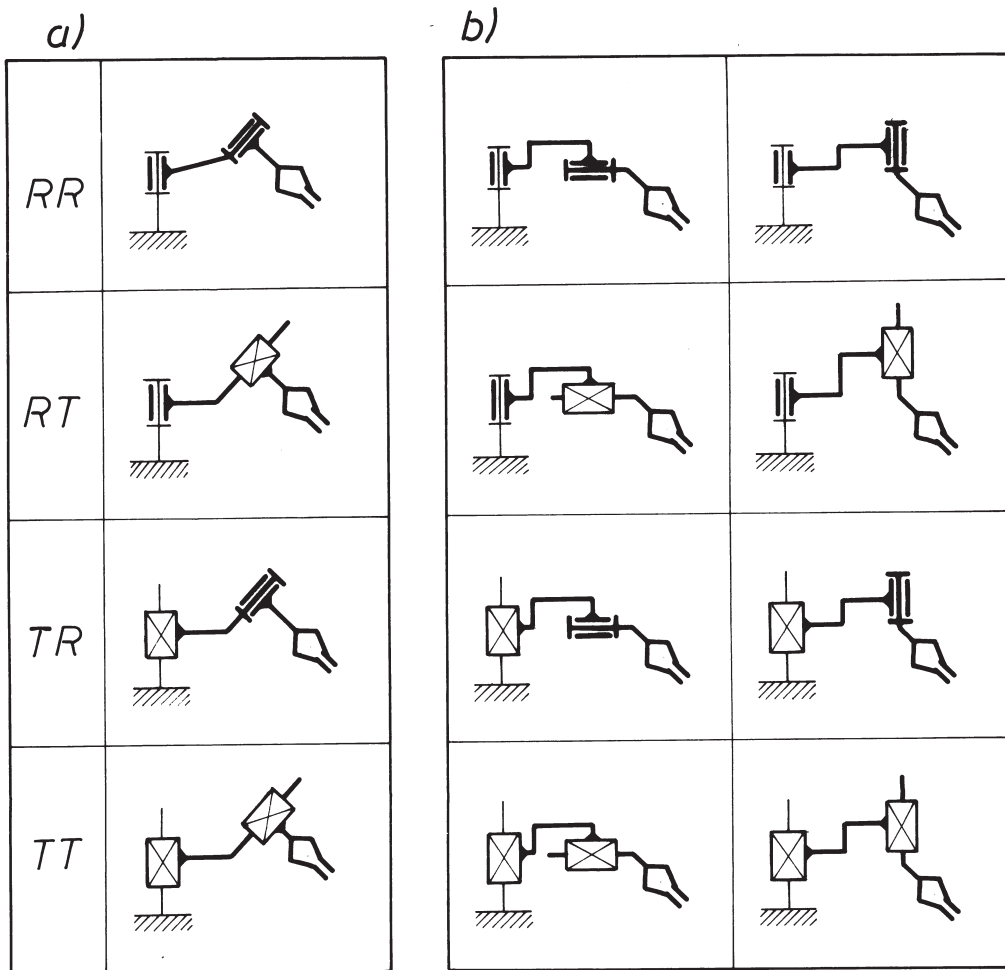
Rys. 95. Ilustracja stopni swobody chwytaka manipulatora

że na ogół chwytak powinien dysponować możliwością przemieszczeń wzdłuż trzech osi współrzędnych oraz obrotu wokół trzech osi. Dodatkowo niezbędny jest też jeden ruch chwytnej palca [8].

W sumie liczba stopni swobody F chwytaka, zapewniająca ogólną możliwość czynności manipulacyjnych, wynosi siedem ($F = 7$). W rzeczywistości liczba F może być mniejsza w przypadkach specjalistycznych lub większa, jeżeli usprawiedliwiają to szczególne okoliczności. Ogólnie więc spotkać można

$$3 \leq F \leq 9.$$

Najczęściej manipulator stanowi łańcuch kinematyczny otwarty o szeregowym połączeniu ze sobą kolejnych jego członów, z parami kinematycznymi I klasy, zwykle obrotowymi lub postępowymi. Nawet przy takich ograniczeniach liczba teoretycznie możliwych odmian budowy omawianych urządzeń jest bardzo duża. Rozważmy dla przykładu niektóre odmiany układów tego typu, opartych na łańcuchach otwartych złożonych z trzech członów i dwóch par kinematycznych. Jeżeli dopuścić tylko dwie odmiany par – postępową i obrotową – otrzymamy prostymi metodami kombinatoryki zestawienie możliwych odmian (rys. 96a). Jeżeli tylko uwzględnić dwie pozycje ustawienia osi pary drugiej względem pierwszej, otrzymamy przypadki zestawione na rys. 96b. Oczywiście liczba możliwych rozwiązań łańcuchów szybko rośnie wraz z liczbą członów i par. Przy łańcuchach złożonych z czterech członów i trzech par kinematycznych, uwzględniając tylko kolejność przyjętych par postępowych i obrotowych, otrzymamy przypadki zestawione w tabeli 5. Każdy z wymienionych w tej



Rys. 96. Przykłady struktur manipulatorów dwuczłonowych: a) rozwiązania ogólne, b) rozwiązania szczególne

tabeli przypadków reprezentuje całą rodzinę rozwiązań różniących się wzajemnym ustawieniem osi par. Na rysunku 97 zestawiono dla przykładu kilka różnych praktycznie stosowanych rozwiązań.

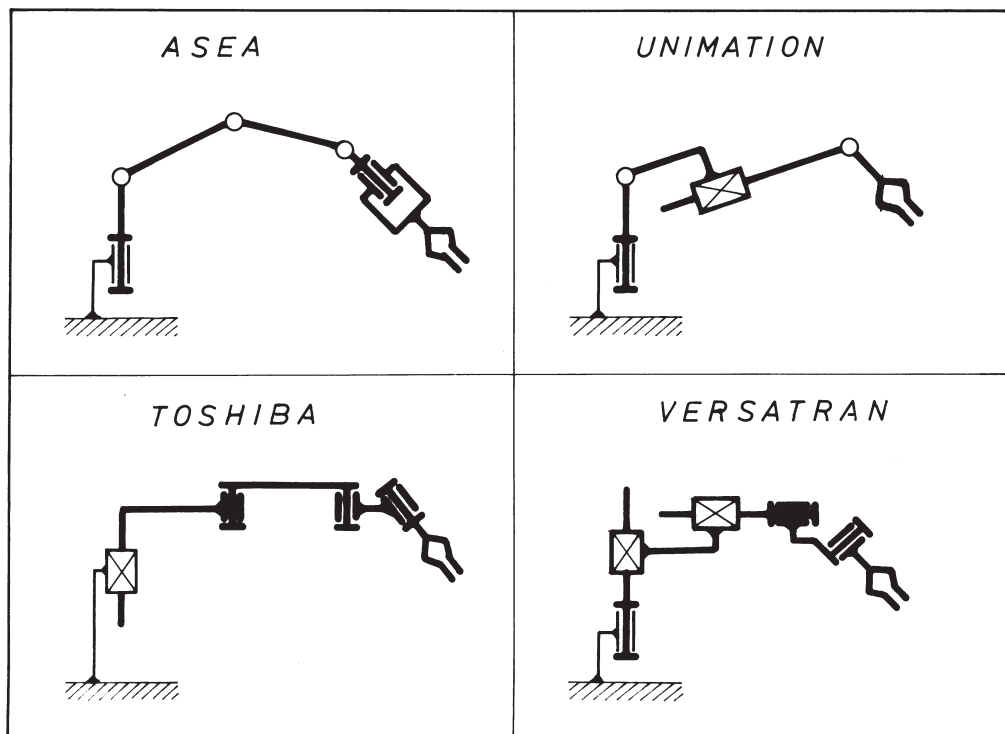
Poza rozwiązaniami typowymi można również spotkać próby budowy manipulatorów do zadań specjalnych. Niektóre z nich nawiązują do bardzo oryginalnych i śmiałych rozwiązań (rys. 98).

Struktura chwytaków

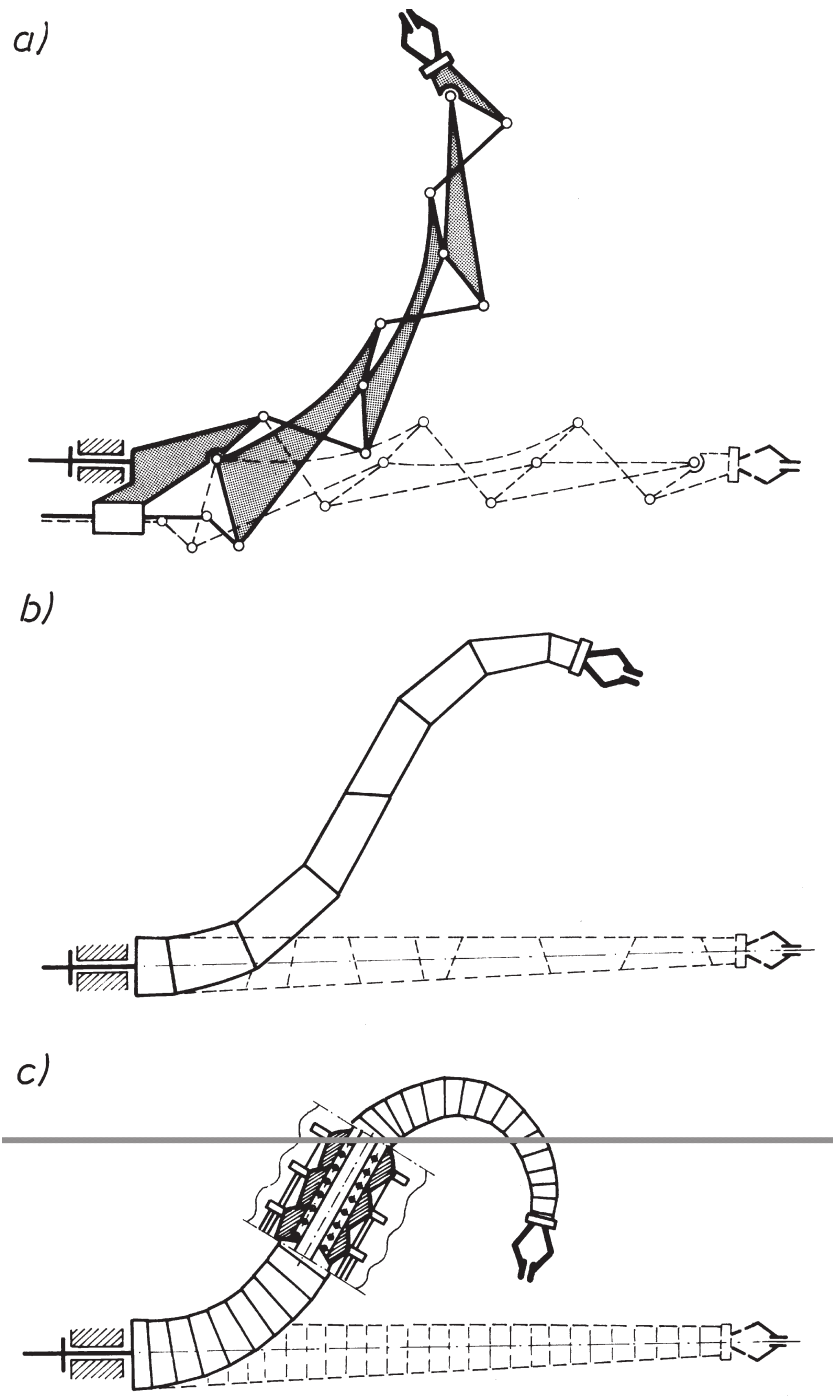
Spotykane wykonania chwytaków (rys. 99) różnią się pomiędzy sobą wieloma cechami, głównie jednak liczbą elementów chwytanych (palców) oraz rodzajem ruchów tych elementów. Najczęściej są to proste ruchy postępowe (rys. 99a) lub obrotowe (rys. 99b), ale można też spotkać ruchy ogólne płaskie czy np. ruchy translacyjne

Tabela 5

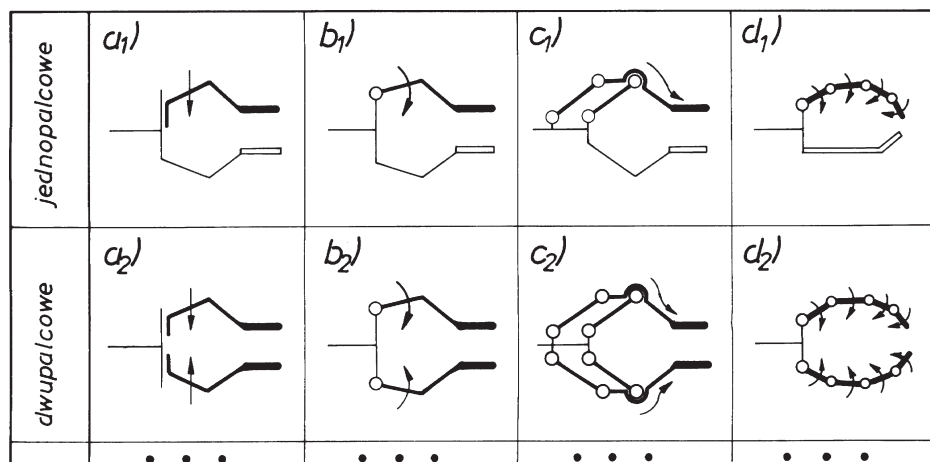
<i>Kolejność par kinematycznych</i>		
<i>R R R</i>		
<i>R R T</i>	<i>R T R</i>	<i>T R R</i>
<i>R T T</i>	<i>T R T</i>	<i>T T R</i>
		<i>T T T</i>



Rys. 97. Przykłady manipulatorów zastosowanych w robotach



Rys. 98. Przykłady poszukiwań rozwiązań do zadań specjalnych: a) manipulator segmentowy dźwigniowy, b) z segmentami obrotowymi, c) w formie trąby słonia



Rys. 99. Przykłady struktur chwytaków: a) z palcami o ruchu postępowym, b) o ruchu obrotowym, c) o ruchu złożonym, d) wieloprzegubowymi

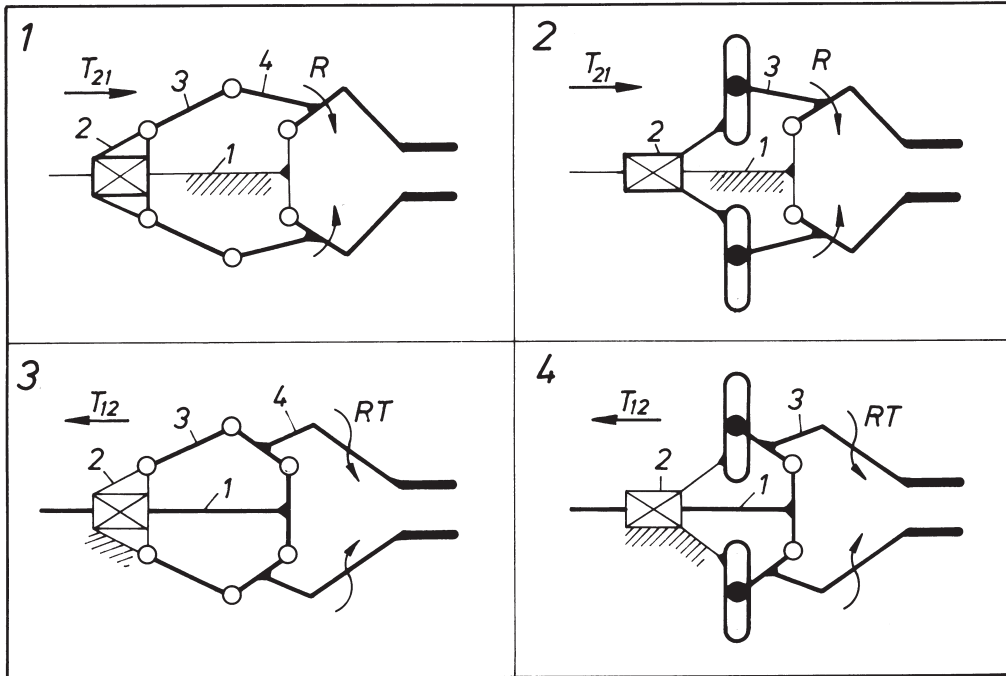
(rys. 99c) zapewniające równoległe prowadzenie palców przy zamykaniu. Do chwytania elementów o nieokreślonych bliżej kształtach są stosowane czasem uchwyty już bardzo wyszukane, np. przedstawione na rys. 99d. Dalsze różnice w budowie chwytaków wynikają ze sposobu wymuszania ruchu palców. Zwykle ruchem wymuszającym (czynnym) w tym układzie jest ruch postępowy T_{ij} (ruch tłoka względem cylindra w siłowniku hydraulicznym czy pneumatycznym, ruch rdzenia względem cewki elektromagnesu). Zamianę takiego ruchu T na ruch obrotowy R lub ogólny RT palców realizuje się w praktycznych wykonaniach w sposób przedstawiony np. na rys. 100. Odmienne też kształtowane są same zakończenia palców, stosownie do potrzeb mogą być płaskie i uprofilowane, stałe i wychylne, sztywne i elastyczne itd.

Podstawowe cechy eksploatacyjne manipulatorów

Użytkownika manipulatora mogą interesować takie cechy eksploatacyjne, jak:

- manewrowość,
- strefa robocza,
- współczynnik serwisu.

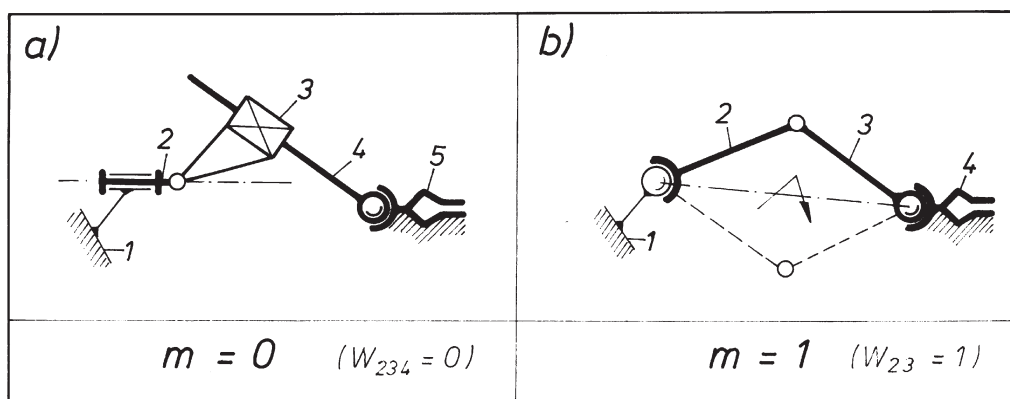
Manewrowość. Pojęcie to określa się liczbą m stopni swobody członów manipulatora przy unieruchomionym uchwycie. Aby wyjaśnić istotę rzeczy, przeanalizujemy przykładowy manipulator przedstawiony na rys. 101a. Przy takim wykonaniu uchwyt (5) ma sześć stopni swobody ($W_5 = 6$). Jeżeli uchwyt (5) w tym manipulatorze unieruchomić, to pozostałe człony ruchome (2), (3), (4) mają zero stopni swobody względem podstawy ($W_{234} = 0$). Manipulator ten charakteryzuje się manewrowością równa zero ($m = 0$). Nietrudno zauważyć, że kolejny przykładowy manipulator, przedstawiony na rys. 101b, charakteryzuje manewrowość $m = 1$. Człony (2) i (3) mogą realizować ruch obrotowy wokół osi łączącej obydwie przeguby kuliste. Ta cecha manipulatora jest istotna, gdyż umożliwia doprowadzenie chwytaka (4) w określone po-

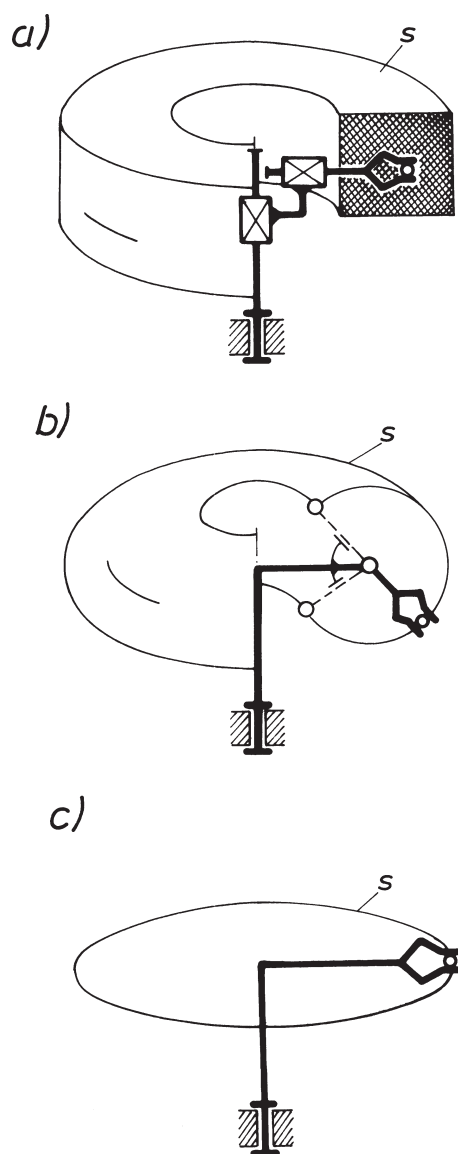


Rys. 100. Przykłady wymuszania ruchu palców w chwytakach manipulatorów

łożenie przy różnym układzie w przestrzeni członów (2) i (3). Jest to konieczne np. przy omijaniu określonych przeszkód w przestrzeni manipulacji.

Strefa robocza. Tak nazywa się miejsce manipulacji chwytaka. Jest to inaczej zbiór możliwych położeń punktu mocowania przemieszczanego manipulatorem przedmiotu.

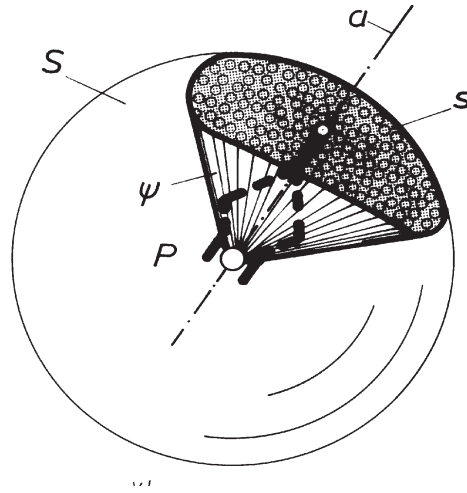
Rys. 101. Ilustracja pojęcia „maneurowość manipulatora”: a) ruchliwość $W_{234} = 0$, b) ruchliwość $W_{23} = 1$



Rys. 102. Przykłady strefy roboczej manipulatora: a) przestrzeń, b) powierzchnia, c) linia

Wielkość i kształt strefy roboczej zależy od struktury manipulatora i jego wymiarów geometrycznych. Zwykle jest to część przestrzeni (rys. 102a), ale może być również fragment powierzchni (rys. 102b), a nawet w szczególnych przypadkach fragment linii (rys. 102c).

Strefy robocze dzieli się dodatkowo na klasy w zależności od istnienia określonych ograniczeń, np. przeszkód.



Rys. 103. Ilustracja pojęcia „współczynnik serwisu”: θ – kąt bryłowy wyznaczony przez oś a chwytaka

Współczynnik serwisu. Przedmiot o kształcie kulistym (i zbliżonym do kulistego) umieszczony w punkcie P strefy roboczej może być podjęty przez chwytak manipulatora na ogół przy różnym usytuowaniu osi tego chwytaka (rys. 103). Właściwość ta (bardzo ważna z punktu widzenia eksploatacji) nazywa się **serwisem** i jest opisana ilościowo tzw. **współczynnikiem serwisu**. Współczynnik ten wyraża się stosunkiem wartości kąta bryłowego (ψ), w którym może zajmować położenie oś a chwytaka do całkowitego kąta bryłowego (4π)

$$\theta = \frac{\psi}{4\pi} \quad (82)$$

lub inaczej

$$\theta = \frac{s}{S}, \quad (83),$$

gdzie: s – powierzchnia określona zbiorem punktów przecięcia osi a uchwytu z powierzchnią kuli (czasza),

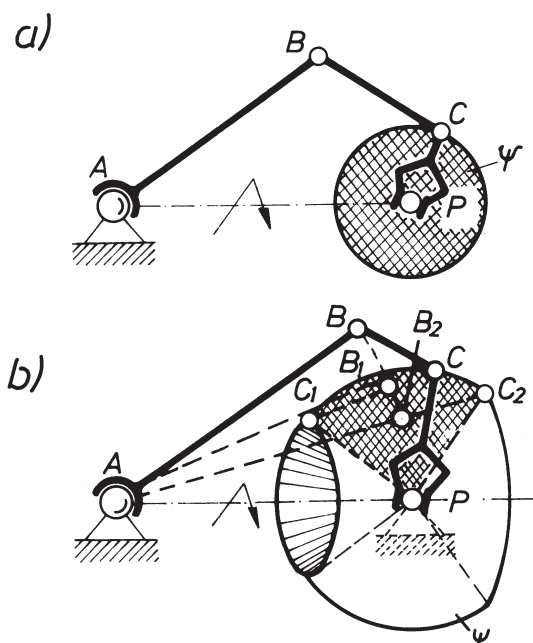
S – powierzchnia całej kuli.

Widać z tego, że

$$0 \leq \theta \leq 1,$$

przy czym $\theta = 0$ na granicach przestrzennej strefy roboczej.

Do wyznaczenia liczbowej wartości współczynnika niezbędna jest znajomość struktury i geometrii układu oraz położenie punktu w strefie roboczej. Na przykład dla manipulatora przedstawionego na rys. 104a współczynnik θ dla punktu P , przyjętego tak, że $AP + PC < CB + BA$ (czworobok $ABCP$ jest korbowo-wahaczowy), jest



Rys. 104. Współczynnik serwisu jest funkcją geometrii manipulatora: a) $\theta = 1$, gdy $ABCP$ jest czworobokiem korbowo-wahaczowym, b) $\theta < 1$, gdy $ABCP$ jest czworobokiem dwuwahaczowym

równy jeden ($\theta = 1$). W pozostałych przypadkach, tzn. gdy czworobok $ABCP$ jest dwuwahaczowy (rys. 104b), $\theta < 1$.

Analiza kinematyczna i dynamiczna manipulatora

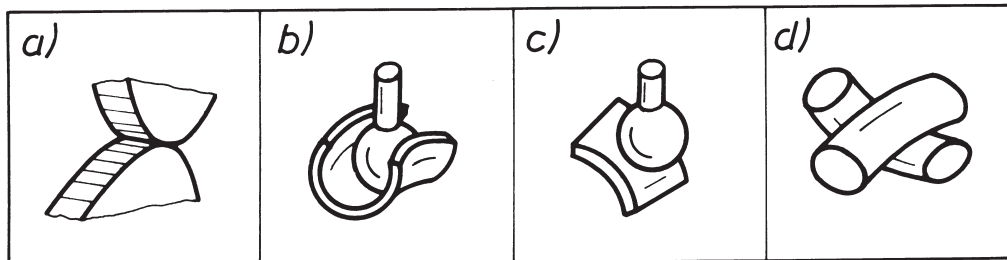
Zagadnienie związane z wyznaczaniem parametrów kinematyki i dynamiki rozpatruje się metodami ogólnymi, wykorzystywanymi do analizy układów kinematycznych. To samo dotyczy ich projektowania. Jednak w przypadku projektowania należy zwrócić szczególną uwagę na uzyskanie:

- minimalnej energii kinetycznej,
- minimalnych strat na tarcie,
- maksymalnego współczynnika sprawności,
- minimalnych czasów przejść pomiędzy wymaganymi położeniami.

Główne problemy związane z układami manipulatorów to: dokładność i obciążenia dynamiczne

6.2. Mechanizmy z parami wyższymi

Określenie to odnosimy do mechanizmów, w których, oprócz innych, występują pary wyższe (o styku liniowym lub punktowym). Kilka przykładów par wyższych przedstawiono na rys. 105. Mechanizmy z takimi parami nie są zalecane do stosowania przy dużych obciążeniach (naciski jednostkowe, zużycie, ...) wyróżniają się jednak ciekawymi walorami kinematycznymi.



Rys. 105. Przykłady par wyższych

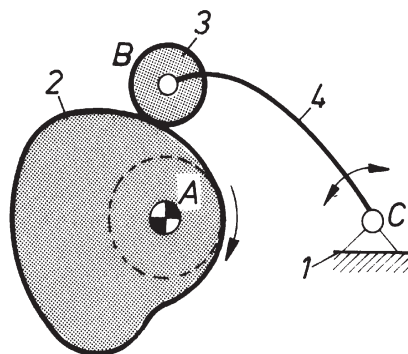
Przez odpowiednie ukształtowanie elementów par wyższych można uzyskać realizację praktycznie dowolnego prawa ruchu. Do najbardziej znanych i stosowanych w technice odmian mechanizmów z parami wyższymi należą:

- krzywkowe,
- zębate.

6.2.1. Mechanizmy krzywkowe

Mechanizmy krzywkowe można spotkać przede wszystkim w układach rozrządowych i regulacyjnych automatów i półautomatów. Spełniają te różnorakie funkcje dzięki możliwości realizacji zamiany i przekształcenia **dowolnego ruchu** członu czynnego na **dowolny ruch** członu biernego.

Istotnym elementem każdego mechanizmu krzywkowego jest krzywka spełniająca zwykle rolę członu czynnego. Współpracuje ona bezpośrednio z członem biernym, zwanym popychaczem (lub poprzez człon pośredniczący w postaci krążka), tworząc z nim tzw. parę kinematyczną wyższą. Prosty przykład płaskiego mechanizmu krzywkowego przedstawiono na rys. 106. W mechanizmie tym ruchowi obrotowemu krzywki (2) towarzyszy ruch wahadłowy popychacza (4), przy czym charakter tego ruchu zależy przede wszystkim od kształtu samej krzywki. Dzięki temu właśnie można, korzystając z mechanizmów krzywkowych, realizować w zasadzie **dowolną charakterystykę ruchu**. Uzyskuje się to przy stosunkowo prostej i zwartej budowie tych me-



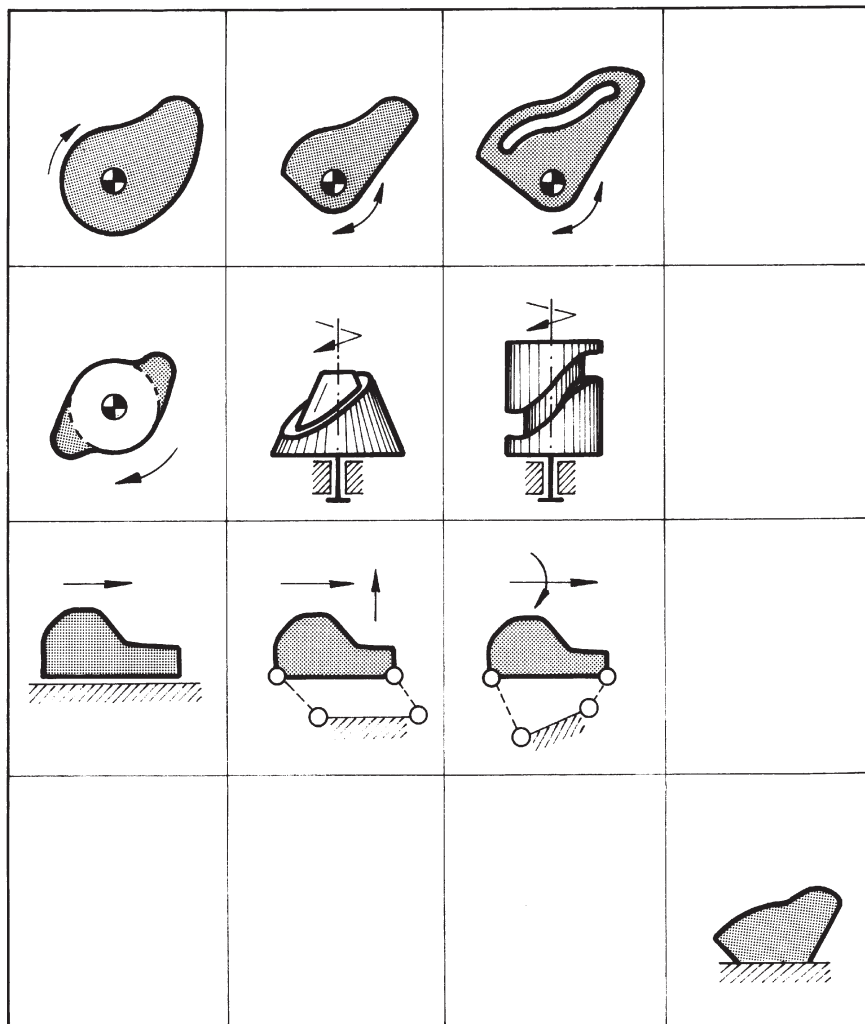
Rys. 106. Przykład mechanizmu krzywkowego: 1 – podstawa, 2 – krzywka obrotowa, 4 – popychacz wahliwy z krążkiem 3

chanizmów. Wadą jest ich szybkie zużywanie się bieżni krzywki na skutek dużych nacisków jednostkowych (para wyższa). Uciążliwym mankamentem tych mechanizmów jest zwykle wysoki koszt wykonania oraz duża ich wrażliwość na niedokładność wykonania. Ogromna różnorodność spotykanych postaci tych mechanizmów stwarza potrzebę dokonania określonego podziału i systematyki. W literaturze istnieje wiele propozycji z tej dziedziny, wszystkie jednak są w jakimś stopniu dyskusyjne i niedoskonałe. W tej sytuacji, rezygnując z kolejnej takiej próby, dokonano poniżej przeglądu jedynie ich podstawowych elementów składowych, jakimi są: krzywka i popychacz. Elementy te dzieli się według różnych cech i kryteriów, najistotniejsze zestawiono w tabeli 6. W ślad za przytoczonymi kryteriami, na rys. 107 zestawiono przykłady najczęściej spotykanych krzywek, na rys. 108 natomiast przykłady popychaczy i ich zakończeń. Kojarząc ze sobą te elementy można utworzyć pokaźną liczbę różnych mechanizmów krzywkowych. Kilka takich skojarzeń zestawiono przykładowo na rys. 109. Tak utworzonym mechanizmom krzywkowym można przypisywać określenia zawierające typy ich elementów składowych. Na rysunku 109d przedstawiono mechanizm krzywkowy płaski złożony z krzywki pojedynczej o ruchu obrotowym współpracującej z popychaczem o ruchu złożonym zakończonym rolką. Ważne dla pracy mechanizmów krzywkowych jest zapewnienie ciągłego kontaktu popychacza z bieżnią krzywki. Uzyskuje się to wykorzystując działającą na popychacz siłę ciężko-

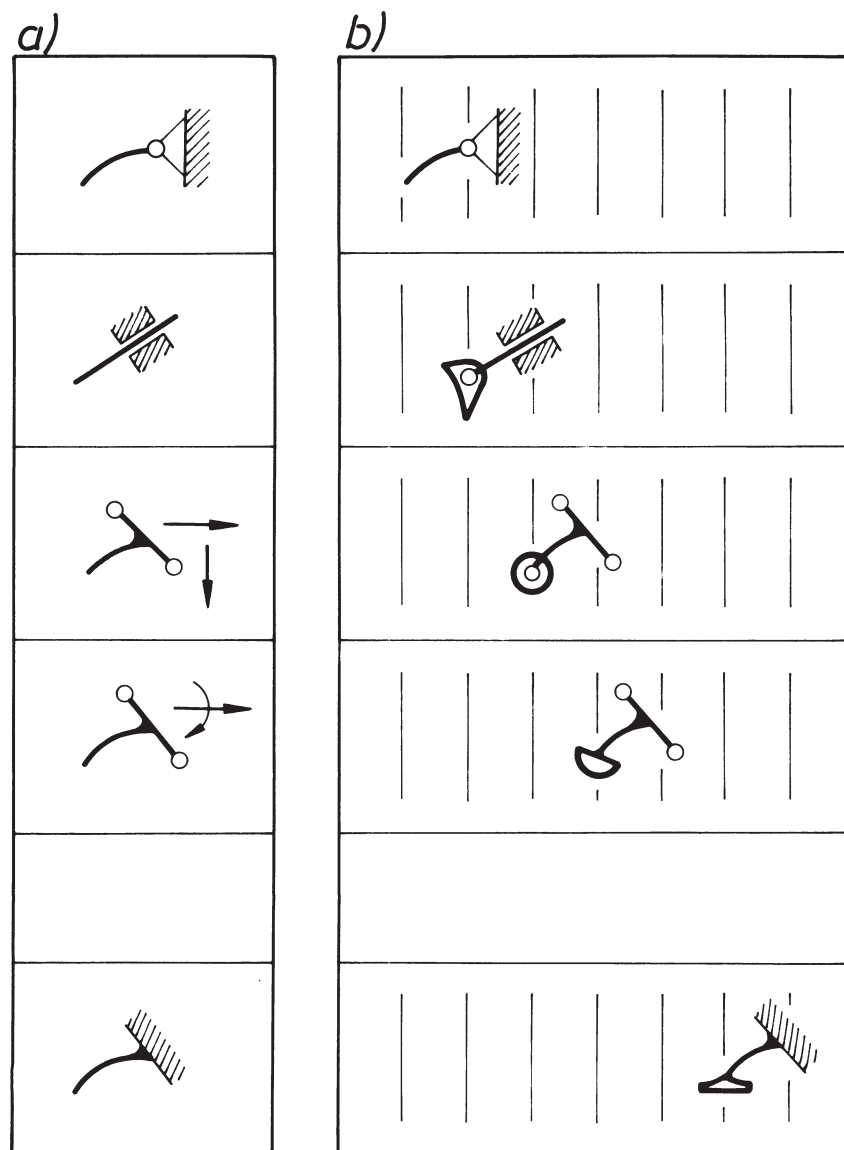
Tabela 6

<i>KRZYWKI</i>	<i>POPYCHACZE</i>
<p><i>A o ruchu</i></p> <ul style="list-style-type: none"> — <i>obrotowym</i> — <i>postępowym</i> — <i>płaskim złożonym</i> • • • — <i>nieruchome</i> <p><i>B (wg liczby cykli)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> — <i>pojedyncze</i> — <i>wielokrotne</i> 	<p><i>A o ruchu</i></p> <ul style="list-style-type: none"> — <i>obrotowym</i> — <i>postępowym</i> — <i>płaskim złożonym</i> • • • — <i>nieruchome</i> <p><i>B zakończone</i></p> <ul style="list-style-type: none"> — <i>ostrzem</i> — <i>członem pośredniczącym</i> — <i>talerzykiem</i> — <i>krążkiem</i> • • •

ści lub (zainstalowanej specjalnie) sprężyny (rys. 110). Mówimy wtedy o **siłowym zamknięciu** mechanizmu krzywkowego. Ciągły kontakt popychacza z krzywką, niezależnie od sposobu obciążenia popychacza, można uzyskać również w wyniku odpowiedniego rozwiązania krzywki lub popychacza (rys. 111). Takie mechanizmy nazywamy **kinematycznie zamkniętymi**. Problem zamknięcia mechanizmów krzywkowych jest istotny, zwłaszcza w układach szybkobieżnych, w których ze szczególną siłą uzewnętrzniają się działające na popychacz siły bezwładności. Wiążą się one z wartością i rozkładem przyspieszeń popychaczy. W spotkanych rozwiązaniach mechanizmów krzywkowych szybkobieżnych przyspieszenia popychaczy zmieniają się (tak są zaprojektowane) według krzywych regularnych trygonometrycznych lub geometrycznych, np.: sinusoidy, cosinusoidy, przebiegu prostoliniowego, trapezowego.



Rys. 107. Przykłady rodzajów krzywek

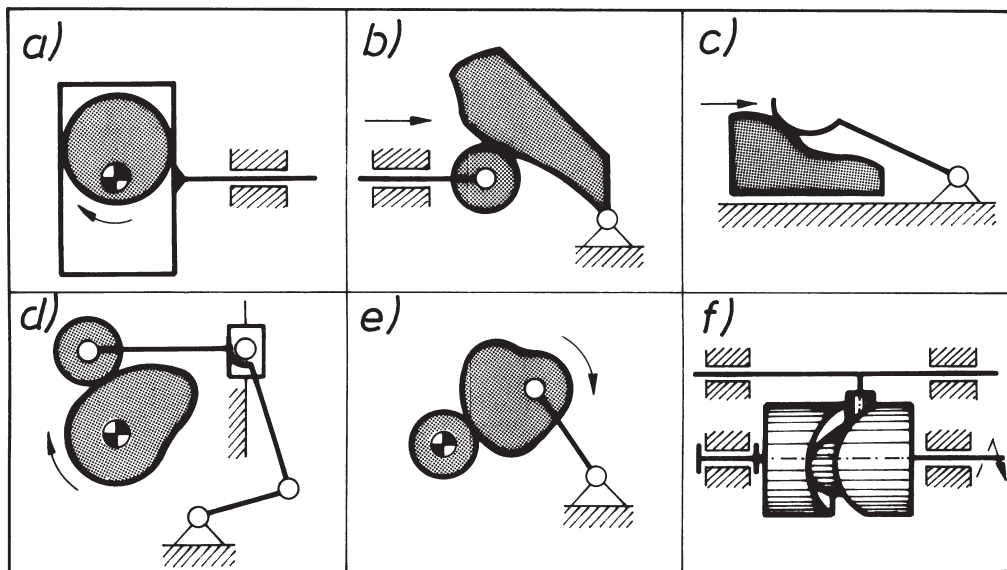


Rys. 108. Przykłady odmian popychaczy: a) podział wg ruchów, b) podział wg rodzaju zakończenia

Przebiegi przyspieszeń stanowią podstawową charakterystykę mechanizmów krzywkowych i są punktem wyjścia w procesie ich projektowania.

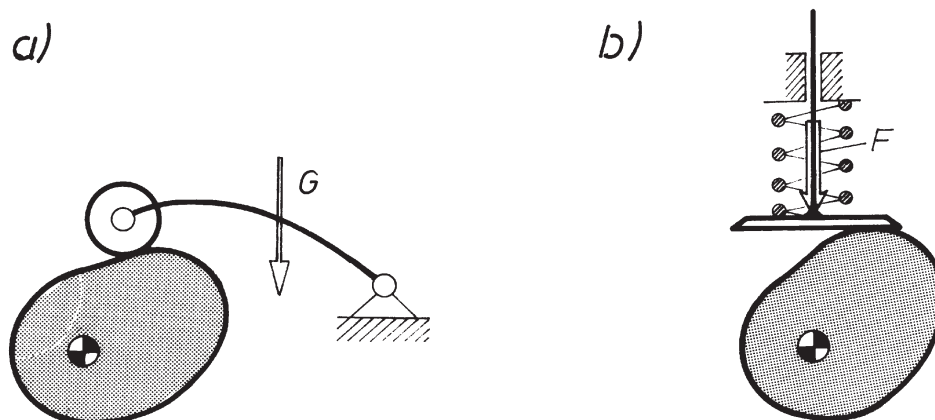
Problemy analizy kinematycznej

Niech będzie dany płaski mechanizm krzywkowy, z krzywką obrotową i popychaczem o ruchu postępowym, zakończonym krążkiem (rys. 112a). Przeanalizujemy na początek najprostsze zagadnienie kinematyki: określenia nowego położenia popychacza po obrocie krzywki o kąt np. $\varphi = 30^\circ$. Wybierając metodę graficzną, rozpocznie-

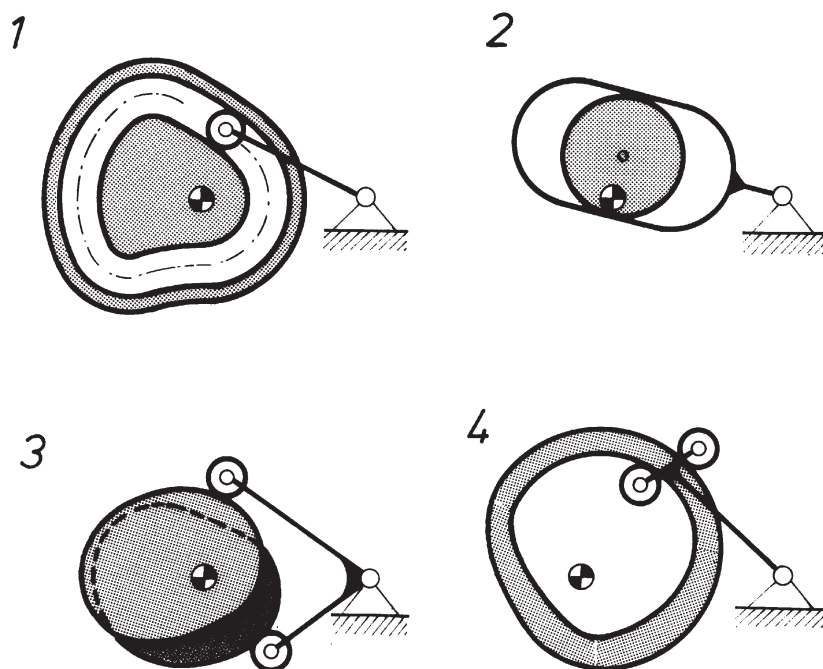


Rys. 109. Przykłady mechanizmów krzywkowych

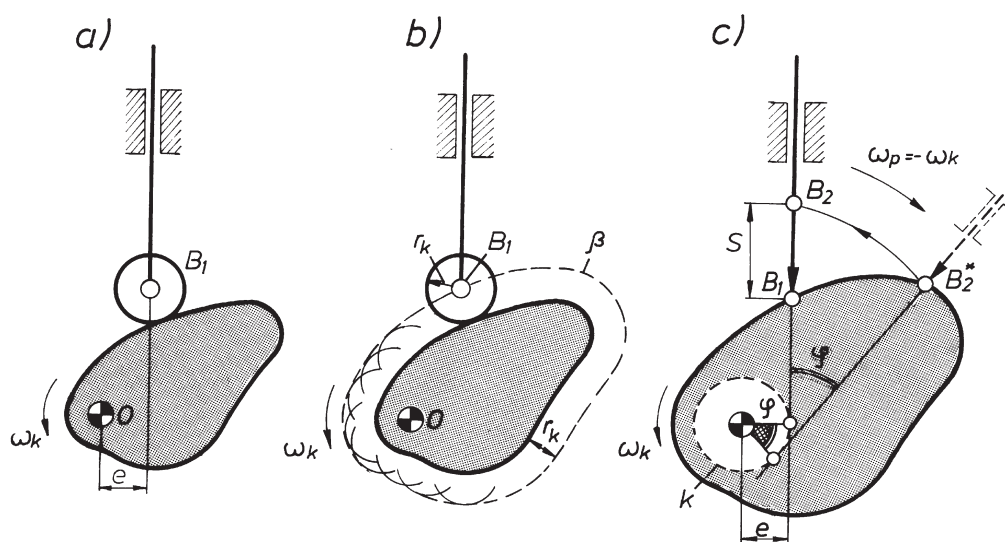
my od wyznaczenia **ekwidystanty** β (rys. 112b), czyli krzywej równoległej do zarysu krzywki wykreślonej przez punkt B popychacza w układzie krzywki. Krzywą tę można otrzymać w praktyce jako obwiednię okręgów wykreślonych promieniem krążka r_k z punktów leżących na zarysie krzywki. Do dalszej analizy dogodnie jest przyjąć równorzędny kinematycznie mechanizm krzywkowy (rys. 112c), w którym przy pozostałych nie zmienionych warunkach współpracuje z popychaczem zakończonym ostrzem krzywka o zarysie ekwidystanty.



Rys. 110. Przykłady mechanizmów krzywkowych zamkniętych siłowo: a) siłą ciężkości, b) siłą sprężyny



Rys. 111. Przykłady mechanizmów krzywkowych kinematycznie zamkniętych

Rys. 112. Konstrukcja nowego położenia punktu B popychacza przy danym obrocie krzywki

Aby uniknąć przy wykreślaniu nowego położenia popychacza przerysowywania złożonego zwykle zarysu krzywki, rozpatrzmy interesujący nas ruch względny popychacza i krzywki w układzie krzywki. W tym celu przy unieruchomionej krzywce obrócimy osią popychacza o kąt φ w kierunku przeciwnym do ruchu krzywki. Oczywiście, nowe położenie osi popychacza względem krzywki można znaleźć prowadząc pod kątem φ w stosunku do położenia pierwotnego, styczną do okręgu k wykreślonego ze środka O promieniem mimośrod e . Po znalezieniu w ten sposób punktu B_2^* (rzeczywistego punktu styku popychacza z biegnią krzywki) znajdziemy punkt B_2 przez obrót B_2^* wokół środka obrotu O . Odcinek $B_1B_2 = S$ jest drogą przebytą przez punkt B przy założonym obrocie krzywki o kąt φ .

Powtarzając taką operację wielokrotnie dla kolejnych równych kątów obrotu krzywki otrzymamy, przy stałej prędkości kątowej krzywki ($\omega = \text{const}$), tor odcinany punktu B popychacza oraz całkowitą drogę tego punktu, czyli skok H popychacza (rys. 113a).

Tor ten może być wykorzystany wprost do określenia chwilowych prędkości i przyspieszeń (metoda toru odcinanego) lub też do wyznaczenia pełnej charakterystyki ruchu popychacza w postaci wykresu $S(\varphi)$ (rys. 113b). Należy w tym celu przyjąć na osi φ odcinek reprezentujący w określonej podziałce pełny kąt obrotu krzywki i podzielić go na tyle równych odcinków, na ile dzielono kąt obrotu krzywki podczas wykreślania toru odcinanego. Punkt szukanej krzywej $S(\varphi)$ znajdziemy w sposób przedstawiony na rys. 113b na przykładzie punktu drugiego.

Z krzywej tej, poprzez różniczkowanie graficzne, można z kolei otrzymać przebieg zmian prędkości $v(\varphi)$ oraz przyspieszeń $a(\varphi)$ popychacza (rys. 113c). Jest to typowa i powszechnie stosowana metoda badania ruchu popychacza w mechanizmach krzywkowych.

Charakterystykę ruchu popychacza w postaci $v(\varphi)$ czy $a(\varphi)$ można sporządzić również na podstawie metody planów prędkości i przyspieszeń. Dogodnie jest wtedy zastąpić mechanizm krzywkowy (rys. 114a) równoważnym mu mechanizmem zastępczym (rys. 114b i c).

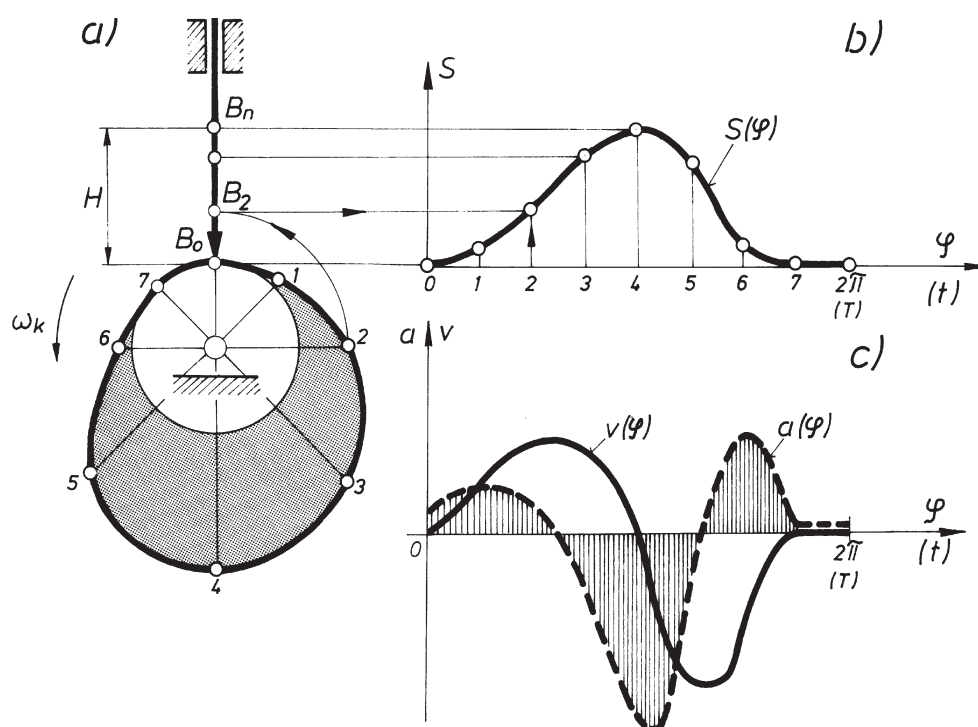
Przykładowo stosując jarzmowy schemat zastępczy i korzystając ze związków:

$$\underline{\underline{v}}_B = \underline{\underline{v}}_A + \underline{\underline{v}}_{BA}$$

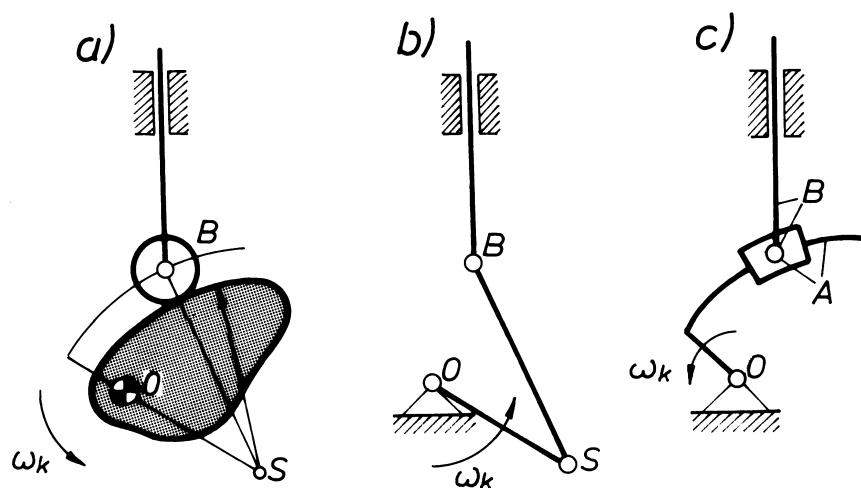
$$\underline{\underline{a}}_B = \underline{\underline{a}}_A + \underline{\underline{a}}_{BA}^c + \underline{\underline{a}}_{BA}^n + \underline{\underline{a}}_{BA}$$

otrzymamy plan prędkości (rys. 115a) oraz przyspieszeń (rys. 115b).

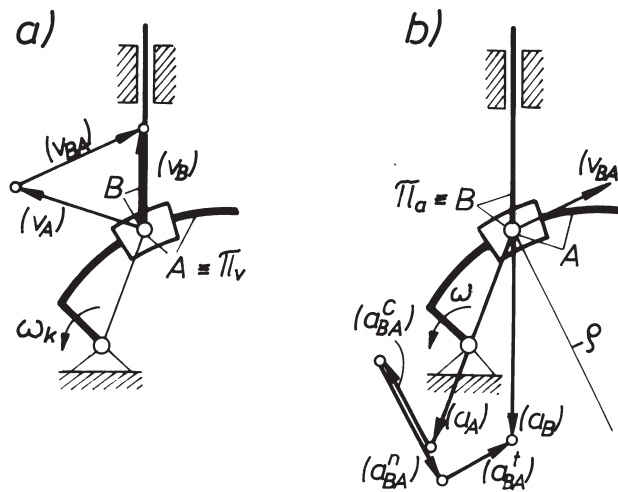
Metoda planów zapewnia wyniki dokładniejsze, lecz jest bardziej pracochłonna i dlatego jest preferowana raczej do badania chwilowych parametrów ruchu – w jednym lub kilku położeniach mechanizmu. Oczywiście, przy określonym zarysie krzywki, do określenia prędkości i przyspieszeń w sposób analityczny lub numeryczny, można zastosować inne metody analizy [12].



Rys. 113. Analiza ruchu popychacza mechanizmu krzywkowego: a) schemat mechanizmu krzywkowego, b) wykres drogi popychacza, c) wykresy prędkości i przyspieszeń popychacza



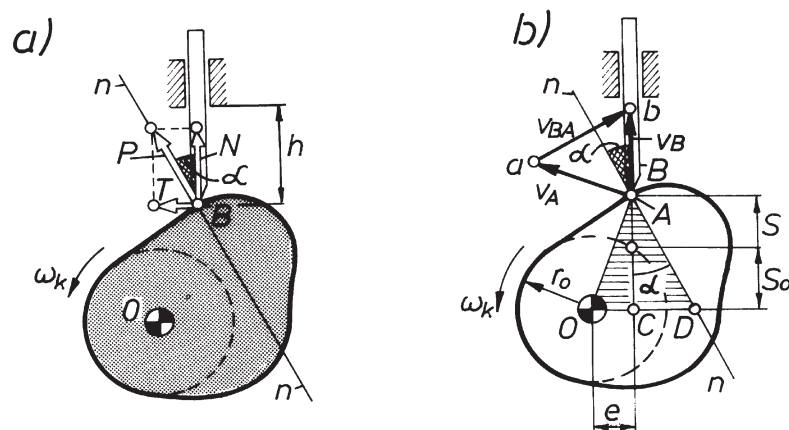
Rys. 114. Mechanizmy zastępcze mechanizmu krzywkowego: a) mechanizm krzywkowy, b), c) mechanizmy zastępcze



Rys. 115. Wykorzystanie mechanizmu zastępczego do analizy ruchu punktu B popychacza metodą planu prędkości i przyspieszeń

Kąt nacisku

Ruch popychacza w mechanizmie krzywkowym (rys. 116a) odbywa się w wyniku oddziaływania nań krzywki z siłą P . Jeżeli nie uwzględniać tarcia, siła ta działa wzdłuż normalnej $n-n$, tj. pod pewnym kątem α do kierunku ruchu popychacza. Z prostego rozkładu tej siły widać, że składowa T jest siłą bezużyteczną, a nawet wręcz szkodliwą. Działając bowiem na ramieniu h , powoduje zginanie trzonu popychacza oraz niepożądane siły oddziaływania w prowadnicy, które przyspieszają jej zużycie i pogarszają sprawność mechaniczną układu.



Rys. 116. Kąt nacisku α . a) mechanizm krzywkowy, b) rysunek pomocniczy do wyprowadzenia wzoru określającego α

Ponieważ siła $T = P \sin \alpha$ zależy od wartości kąta α , który, zwany dalej **kątem nacisku**, będzie przedmiotem naszego zainteresowania. Na podstawie rys. 116b

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{OD - e}{AC},$$

gdzie

$$AC = S_o + S = \sqrt{r_o^2 - e^2} + S$$

Po uwzględnieniu, że (z rys. 116b)

$$v_B/v_A = OD/OA$$

oraz

$$v_A = \omega OA; \quad v_B = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \omega;$$

gdzie φ – kąt obrotu krzywki

$$OD = \frac{dS}{d\varphi}$$

Ostatecznie

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{dS}{d\varphi} - e}{\sqrt{r_o^2 - e^2} + S}. \quad (84)$$

Jak wynika z tej zależności, wartość kąta α (a więc i wartość składowej T) zależy nie tylko od realizowanej przez mechanizm charakterystyki ruchu $\left(S, \frac{dS}{d\varphi}\right)$, ale również od wartości parametrów konstrukcyjnych r_o i e . Te ciekawe spostrzeżenia będą wykorzystywane w procesie projektowania mechanizmów krzywkowych. Dla odpowiednich wartości parametrów konstrukcyjnych można uzyskać zakładane wartości kąta nacisku, a więc i dopuszczalny rozkład sił oddziaływania w całym mechanizmie krzywkowym.

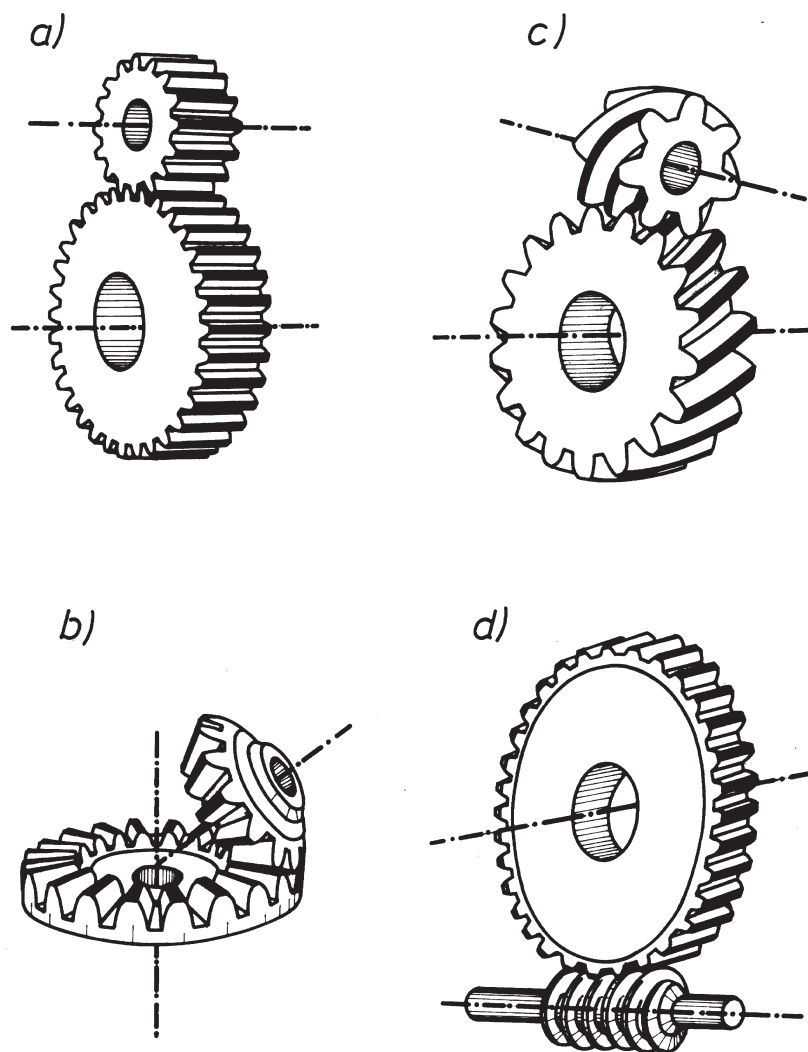
6.2.2. Mechanizmy zębate

Do zamiany i przeniesienia ruchu z jednego wału na drugi stosuje się najczęściej, i to już od bardzo odległych czasów, mechanizmy złożone z kół zębatach. Noszą one zwykle nazwę **przekładni**.

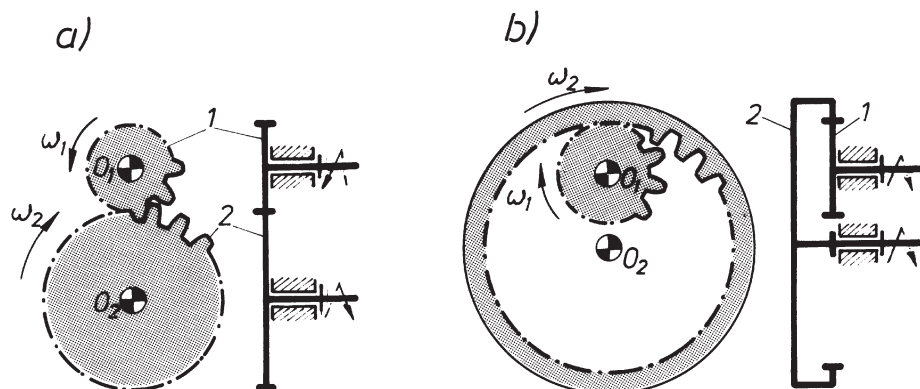
Ze względu na wzajemne usytuowanie osi wałów, na których są osadzone ząbiające się ze sobą koła, rozróżniamy przekładnie:

- **walcowe**, gdy osie kół są równoległe (rys. 117a),
- **stożkowe**, gdy osie kół się przecinają (rys. 117b),
- **śrubowe**, gdy osie kół są zwichrowane (rys. 117c),
- **ślimakowe**, gdy osie kół są zwichrowane i prostopadłe (rys. 117d).

Koła zębate walcowe (jak również stożkowe) mogą być zazębione zewnętrznie (rys. 118a) lub wewnętrznie (rys. 118b), można je dalej rozróżnić według kształtu zarysu zębów, linii zębów itd. Pomijając szczegółowy przegląd tych zagadnień, wspomnimy tylko o istnieniu tzw. „**kół nieokrągłych**”, zwanych również tarczami zębatymi, występujących w przekładniach realizujących zmienne przełożenie w ramach jed-



Rys. 117. Istota podziału prostych przekładni zębatych: a) walcowa, b) stożkowa, c) śrubowa, d) ślimakowa



Rys. 118. Przykłady prostych przekładni zębatych: a) o zazębieniu zewnętrznym, b) o zazębieniu wewnętrznym

nego cyklu (rys. 119a) oraz o tzw. „**kołach niepełnych**” stosowanych do uzyskiwania ruchu przerywanego (rys. 119b).

Przekładnie będziemy dzielić dalej na:

- **stałe**, w których osie kół są nieruchome,
- **obiegowe**, w których osie pewnych kół wykonują ruch obrotowy wokół osi innych kół.

Przekładnie stałe

Przekładnie stałe należą do mechanizmów powszechnie stosowanych w budowie maszyn i występują w licznych i różnych odmianach. Najprostszym ich przykładem jest przekładnia jednostopniowa złożona z dwóch współpracujących ze sobą kół zębatych (rys. 118).

Istotnym parametrem opisującym pracę każdej przekładni jest tzw. **przełożenie**, rozumiane jako stosunek predkości kątowych rozpatrywanych dwóch kół zębatych $i_{kl} = \omega_k / \omega_l$.

Dla przekładni jednostopniowej z rys. 118, przedstawionej jeszcze raz na rys. 120, przełożenie można wyrazić w postaci

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{S_{12}O_2}{S_{12}O_1} = \pm \frac{R_2}{R_1}, \quad (85)$$

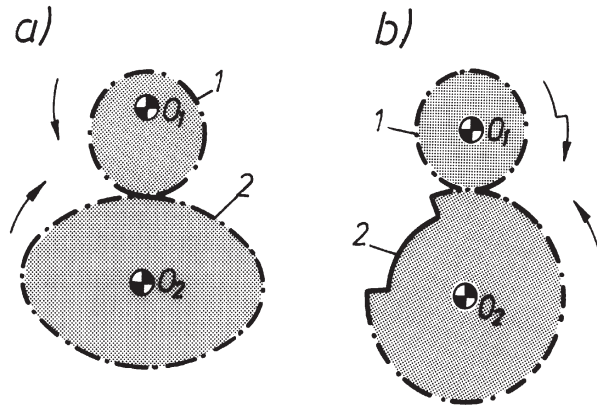
gdzie: S_{12} – chwilowy środek obrotu koła (1) względem (2) określony jako punkt styku kół toczonych,

R_1 i R_2 – promienie kół podziałowych kół (1) i (2).

Proste przekształcenia prowadzą do wyrażenia

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{Z_2}{Z_1}, \quad (86)$$

w którym Z_1, Z_2 – liczby zębów kół zębatych (1) i (2).



Rys. 119. Przykłady „nietypowych” przekładni zębatych: a) przekładnia z tarczą zębatą, b) przekładnia z jednym kołem niepełnym

Znak (–) w wyrażeniach (85) i (86) dotyczy przekładni o zazębieniu zewnętrznym (rys. 120a) i oznacza niezgodność zwrotów prędkości kątowych, znak (+) odnosimy natomiast do zazębienia wewnętrznego (rys. 120), gdzie prędkości kątowe mają zwroty zgodne. Analogicznym stosunkiem liczby zębów można wyrazić przełożenie w przekładniach jednostopniowych, złożonych z kół stożkowych, śrubowych czy ślimakowych. W tych ostatnich przypadkach znaki (+) lub (–) mają sens tylko w świetle oddzielnej umowy, dotyczącej sposobu ich interpretacji. W przekładniach ślimakowych zagadnienie to wiąże się dodatkowo z kierunkiem uzwojenia – występują przekładnie prawo- i lewozwojne.

Przełożenie przekładni można określić również graficznie. Jak wiadomo, prędkość kątową można wyrazić

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{(v) \kappa_v}{(r) \kappa_r} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\kappa_v}{\kappa_r},$$

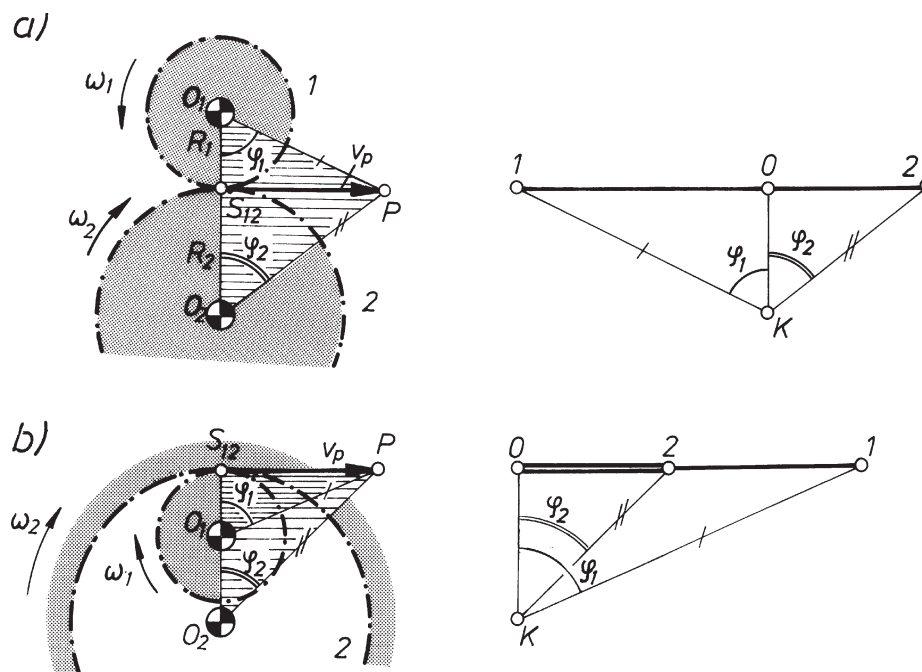
a więc także

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{01}{02}.$$

Sposób określania odcinków 01 i 02 wyjaśniają konstrukcje przedstawione na rys. 120.

Oprócz najprostszych przekładni jednostopniowych występują powszechnie przekładnie bardziej złożone, wśród których rozróżniamy równoległe, szeregowe i mieszane.

Przekładnią równoległą nazywamy taką przekładnię, w której koła pośredniczące między kołem czynnym i biernym są osadzone po 2 na wspólnych wałkach. Przekładnie takie mogą być zestawione z kół różnego typu, jak to pokazano na przykładach przedstawionych na rys. 121. Całkowite przełożenie jest iloczynem przełożeń kolejnych par kół zębatych, czyli

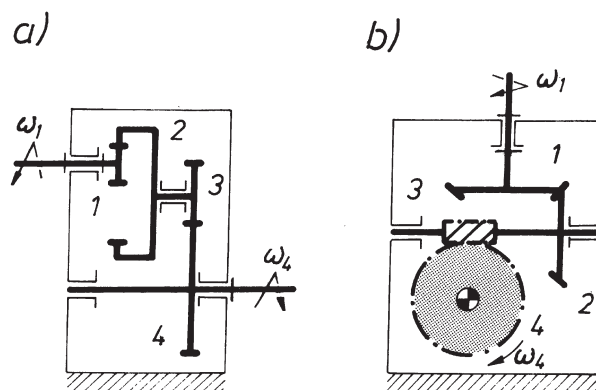


Rys. 120. Graficzna metoda wyznaczania przełożeń w przekładni: a) o zazębieniu zewnętrznym, b) o zazębieniu wewnętrznym

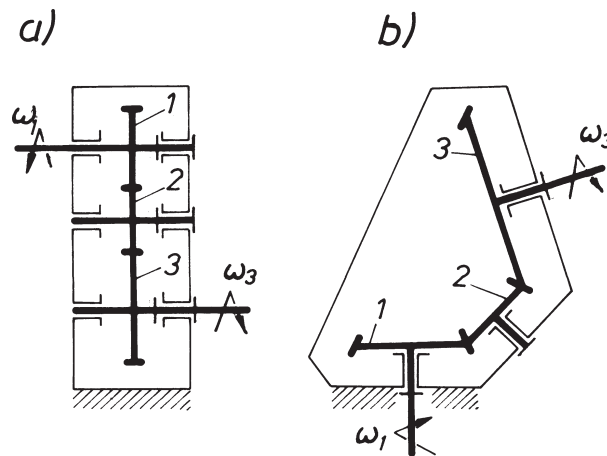
$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{12} i_{23} \dots i_{(n-1)n}, \quad (88)$$

w naszym przypadku (rys. 121a)

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = i_{12} i_{23} = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_4}{Z_3} (-1).$$



Rys. 121. Przykłady przekładni zębatach równoległych



Rys. 122. Przykłady przekładni zębatych szeregowych

Przekładnią **szeregową** będziemy nazywać przekładnię, w której koła pośredniczące między kołem czynnym i biernym są osadzone na oddzielnych wałkach. Przykłady takich przekładni przedstawiono na rys. 122. Każde z kół pośredniczących zazębia się tu jednocześnie z dwoma sąsiednimi kołami. Oznacza to, że moduły takich kół określające geometrię zębów muszą być identyczne. Całkowite przełożenie przekładni szeregowej wynosi

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{12} i_{23} \dots i_{(n-1)n}, \quad (89)$$

co po podstawieniu i uproszczeniu prowadzi do zależności

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{Z_n}{Z_1}, \quad (90)$$

Dla przekładni z rysunku 122a

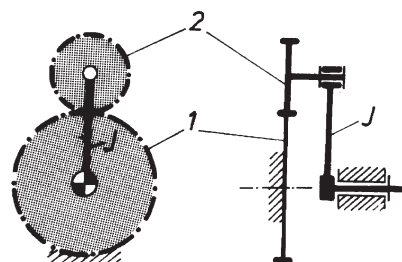
$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{Z_3}{Z_1} (-1)^2.$$

Oprócz przekładni równoległych i szeregowych występują w praktyce różne odmiany **przekładni mieszanych**. Zakłada się, że po tych wyjaśnieniach z określaniem przełożeń w tych przekładniach nie będzie problemów.

Przekładnie obiegowe

Tak nazywamy (jak już wiadomo) przekładnie, w których osie niektórych kół, zwanych obiegowymi (satelitami), wykonują ruch obrotowy wokół osi kół centralnych (słonecznych). Najprostszą przekładnię tego typu przedstawiono na rys. 123.

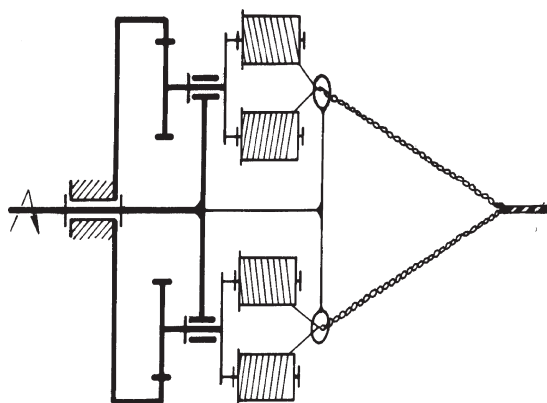
Koło (2), na skutek osadzenie jego osi w obrotowym jarzmie J , jest satelitą koła centralnego (1). Koła centralne mogą być nieruchome, jak w naszym przykładzie, lub ruchome. Przekładnię, w której co najmniej jedno koło centralne jest nieruchome, nazywa się przekładnią **planetarną**, przekładnię zaś, w której wszystkie koła centralne są ruchome – **różnicową**. Pierwsze z nich, przy stosunkowo małej liczbie kół zębatach i zwartej budowie, umożliwiają realizację nawet bardzo dużych przełożeń. Dzięki możliwości zwielokrotnienia liczby kół obiegowych i uzyskania przez to rozłożenia nacisków międzyzębnych nadają się do przenoszenia dużej mocy przy stosunkowo wysokiej sprawności, wymagają jednak dużej dokładności wykonania i montażu.



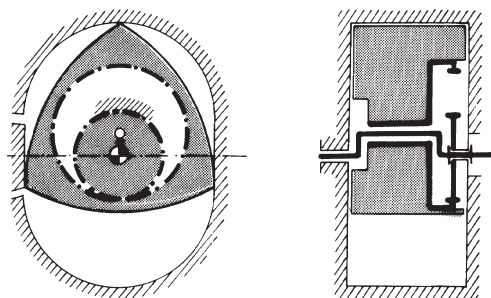
Rys. 123. Przykład prostej przekładni obiegowej

Mechanizmy obiegowe znalazły również zastosowanie w urządzeniach specjalnych, jak np. w maszynie do skręcania lin (rys. 124) czy do uzyskania odpowiedniego ruchu tłoka w komorze silnika Wankla (rys. 125). Należy zwrócić uwagę na dużą różnorodność odmian tych mechanizmów i form ich budowy. Na rysunku 126 zestawiono przykładowo możliwe odmiany przekładni dwurzędowych złożonych tylko z czterech kół zębatach.

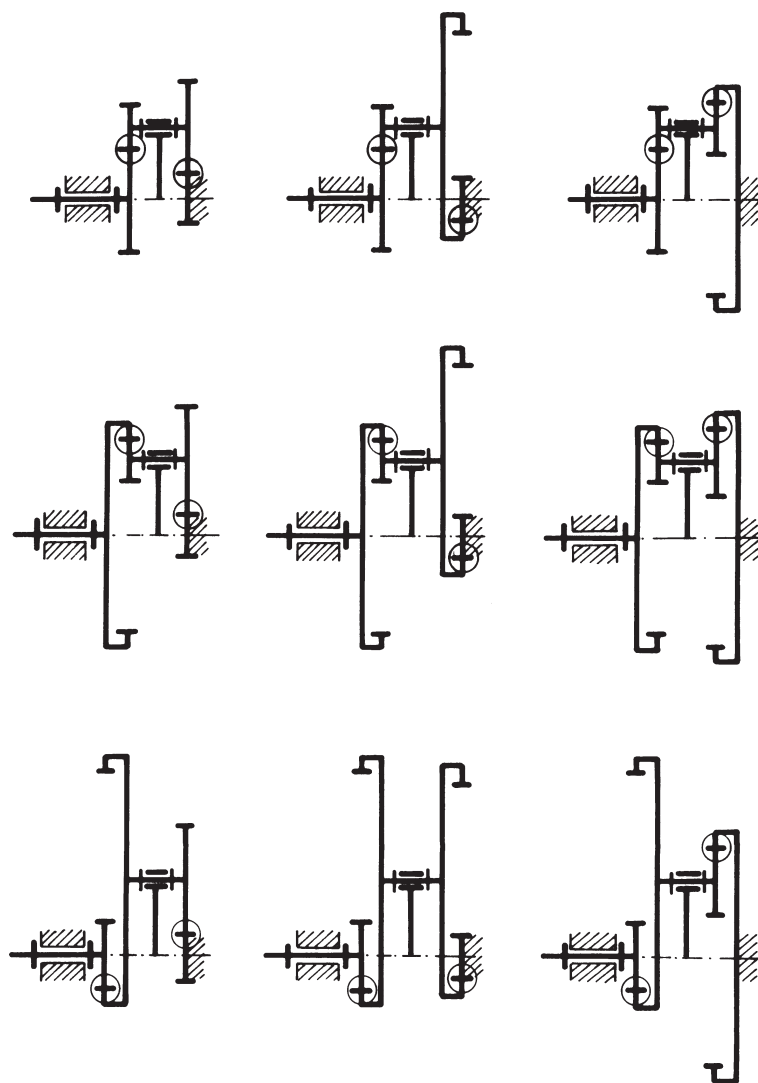
Przekładnie obiegowe różnicowe umożliwiają składanie kilku ruchów obrotowych członów czynnych w jeden ruch obrotowy członu biernego lub na odwrót – przekazywanie ruchu obrotowego z jednego źródła napędu na kilka odbiorników. Pierwszą z tych możliwości wykorzystano w układzie napędu bębna mechanizmu podnoszenia wózka suwnicy (rys. 127). Zainstalowanie dwóch różnej mocy silników S_1 i S_2 zapewnia bardziej racjonalne ich wykorzystanie. Stosownie do obciążenia uruchamia się przy takim rozwiązaniu napędu odpowiednio silnik jeden lub drugi, albo obydwa ra-



Rys. 124. Przykład zastosowania przekładni obiegowej do skręcania lin



Rys. 125. Przykład zastosowania przekładni obiegowej w silniku Wankla



Rys. 126. Możliwe formy strukturalne dwurzędowych przekładni obiegowych

zem. Odwrotną właściwość przekładni różnicowej, przekazywania mocy od jednego silnika na dwa niezależne koła jezdne, zastosowano w powszechnie znanym „dyferencjale” samochodowym (rys. 128).

Określanie przełożeń przekładni obiegowych

Określanie przełożeń należy do podstawowych zagadnień przekładni obiegowych. W fazie doboru i projektowania takich przekładni interesujemy się stosunkiem prędkości kątowych członu czynnego i biernego. Zwykle są nimi jarzmo i koła centralne, choć w szczególnych przypadkach zarówno członem czynnym, jak i biernym mogą być koła obiegowe. Wszelkie przełożenia w przekładniach obiegowych można określać różnymi metodami, z których do bardziej znanych należą:

- metoda analityczna (Willisa),
- tablicowa (Swampa)
- graficzna Kutzbacha.

Wymienione metody omówimy na przykładzie przekładni przedstawionej na rys. 129. Znamy tu liczbę zębów Z_1 , Z_2 i Z_3 oraz prędkość obrotową jarzma n_j . Należy określić prędkość obrotową n_1 koła biernego (1). Przede wszystkim celowe jest ustalenie, czy prędkości obrotowe n_1 , n_2 przy jednym członie czynnym J są jednoznaczne, tzn. czy układ jest jednobieżny. Obliczona ruchliwość tej przekładni jako mechanizmu płaskiego, a więc według wzoru (8)

$$W = 3(4 - 1) - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$$

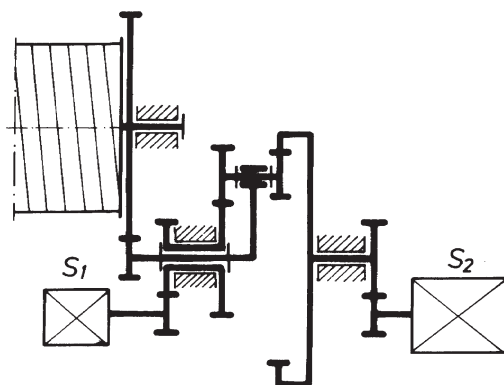
daje odpowiedź twierdzącą. Mamy tu do czynienia z przekładnią planetarną (koło 3 nieruchome).

Metoda analityczna

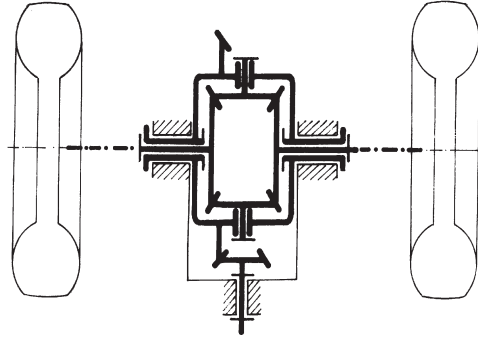
Ruchy wszystkich kół (1, 2 i 3) oraz jarzma J rozpatrywanej przekładni względem podstawy można opisać jednoznacznie, podając ich tzw. prędkości obrotowe bezwzględne

$$n_1, n_2, n_3, n_J.$$

Opisując te same ruchy względem jarzma, otrzymamy odpowiednio prędkości obrotowe względne



Rys. 127. Mechanizm różnicowy zastosowany do wciągarki dźwignicowej



Rys. 128. Przekładnia różnicowa zastosowana do napędu pojazdów

$$n_{1J} = n_1 - n_J; \quad n_{2J} = n_2 - n_J; \quad n_{3J} = n_3 - n_J.$$

Zwróćmy uwagę na to, że rozpatrując ruchy wszystkich kół przekładni względem jarzma, sprowadzamy jak gdyby przekładnię obiegową do przekładni zwykłej o nieruchomych osiach kół (1), (2), (3). Oczywiście, w takiej przekładni zwykłej (u nas szeregowej) zachodzi, na podstawie (89),

$$i_{13} = \frac{n_{1J}}{n_{3J}} = \frac{\omega_{1J}}{\omega_{3J}} = \frac{Z_3}{Z_2} \frac{Z_2}{Z_1} (-1),$$

lub po podstawieniu

$$\frac{n_1 - n_J}{n_3 - n_J} = -\frac{Z_3}{Z_1}.$$

Ostatnie równanie umożliwia (przy założeniu $n_3 = 0$, danych n_J oraz Z_1 i Z_3) obliczenie szukanego n_1 . Otrzymamy po przekształceniu

$$n_1 = n_J \left(1 + \frac{Z_3}{Z_1} \right),$$

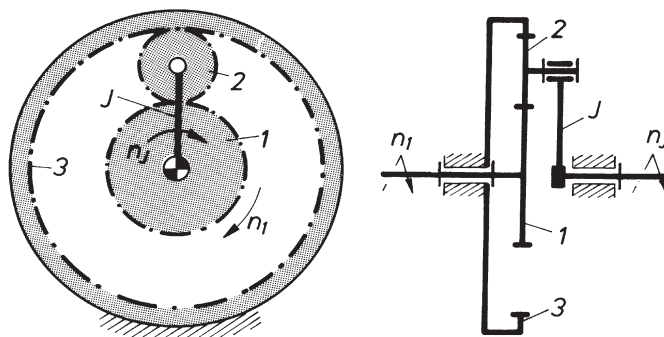
lub inaczej

$$i_{1J} = \frac{n_1}{n_J} = 1 + \frac{Z_3}{Z_1},$$

Istota tej prostej metody polega, podkreślamy to jeszcze raz, na sprowadzeniu przekładni obiegowej do przekładni zwykłej przez rozpatrywanie ruchów wszystkich kół względem jarzma.

Metoda tablicowa

Szukaną prędkość kątową koła (1) lub przełożenie badanej przekładni obiegowej (rys. 129) można określić również, rozumując następująco: Obróćmy cały mecha-



Rys. 129. Jednorzędowa przekładnia obiegowa

nizm, traktując go jako bryłę sztywną, wokół osi centralnej n_J razy. W wyniku tego zabiegu wszystkie człony przekładni wykonają n_J obrotów. Zapiszemy to w pierwszym wierszu tabeli 7. Zauważmy teraz, że w ten sposób jarzmo J wykonało już swoją określoną liczbę n_J obrotów (dalej obracać nim nie ma potrzeby), natomiast koło (3) z założenia nieruchome, wykonało wraz z całym mechanizmem, zamiast zero, n_J obrotów. Aby rozbieżność tę usunąć, należy obrócić (już w następnym, drugim etapie) kołem (3) tak, by w sumie $n_3 = 0$. Oczywiście, w tym przypadku obrócimy kołem (3) o $(-n_J)$ obrotów, ale już przy nieruchomym jarzmie. Konsekwencją tego będą obroty koła (2) oraz koła (1). Łatwo je określić, gdyż w tej fazie ruchu, przy nieruchomym jarzmie, mamy do czynienia z przekładnią zwykłą szeregową. Obroty te, obliczone według zależności $n_2 = n_3 i_{23}$, $n_1 = n_2 i_{12}$, gdzie $n_3 = -n_J$, wpisujemy w odpowiednich rubrykach wiersza 2 tabeli 7, a następnie sumujemy obroty poszczególnych członów w wierszu 3. Oczywiście, $n_J = n_J$; $n_3 = 0$, natomiast interesujące nas obroty koła (1)

Tabela 7

Lp.		Liczba obrotów członu				
		1	2	3	J	UWAGI
1	Obrót całego układu o n_J	n_J	n_J	n_J	n_J	
2	Obrót koła 3 o $(-n_J)$ przy nieruchomym jarzmie	$-n_J \frac{z_3}{z_2} (+1) \frac{z_2}{z_1} (-1)$	$-n_J \frac{z_3}{z_2} (+1)$	$-n_J$	0	Przekładnia zwykła
3	Suma (1 + 2)	$n_J (1 + \frac{z_3}{z_1})$	$n_J (1 - \frac{z_3}{z_2})$	0	n_J	

$$n_1 = n_J \left(1 + \frac{Z_3}{Z_1} \right).$$

Jak z tego widać, istotą metody tablicowej jest również sprowadzenie przekładni obiegowej do przekładni zwykłej w wyniku wstępnego obrotu całego mechanizmu o n_J .

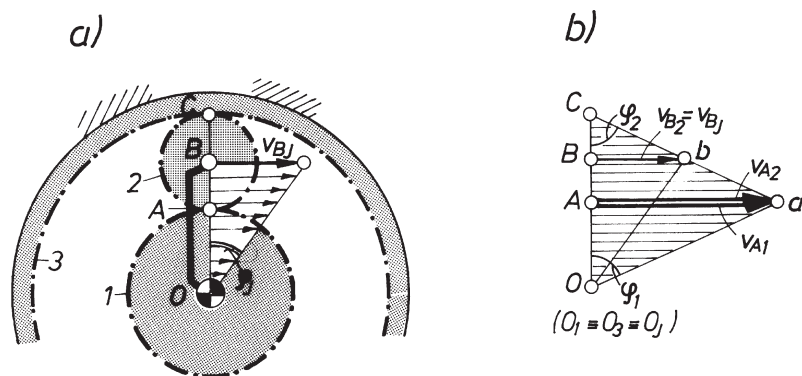
Metoda graficzna (Kutzbacha)

Metodę graficzną Kutzbacha analizy kinematycznej przekładni obiegowej przedstawiamy na przykładzie tej samej przekładni (rys. 129). Korzystając z tej metody, można narysować tę przekładnię w rzucie na płaszczyznę ruchu członów przekładni (rys. 130a) i oznaczyć przez O , A , B i C szczególne jej punkty – pary kinematyczne. Przy danych obrotach n_J jarzma J można obliczyć i w dowolnej podziałce κ_v narysować $v_{BJ} = \omega_J R_J$. Oczywiście, $v_{BJ} = v_{B2}$, zaś w punkcie C , przy nieruchomym kole (3), $v_{C3} = v_{C2} = 0$ (rys. 130b). W tej sytuacji, przy znanych prędkościach dwóch punktów B i C koła (2), jest zdeterminowany ruch całego koła (2), (punkt C – chwilowym środkiem obrotu tego koła względem podstawy), w szczególności zaś jest określony rozkład prędkości punktów leżących na średnicy CA , a tym samym prędkość punktu zazębienia A . Ponieważ w punkcie A $v_{A2} = v_{A1}$, można więc również opisać ruch koła (1)

$$\omega_1 = \frac{\kappa_v}{\kappa_l} \operatorname{tg} \varphi_1.$$

To proste rozumowanie doprowadziło do uzyskania wyniku w postaci graficznej. Z rysunku 130 można odczytać oczywiście i zwrot prędkości kątowej ω_1 , a także zwrot i moduł prędkości kątowej ω_2 koła (2)

$$\omega_2 = -\frac{\kappa_v}{k_1} \operatorname{tg} \varphi_2.$$



Rys. 130. Przykład graficznej metody (określenia) przełożenia przekładni obiegowej

Odczytane w ten sposób wyniki byłyby jednak obarczone błędem nie do przyjęcia, zwłaszcza przy bardzo dużych lub bardzo małych przełożeniach. W takim przypadku postać graficzną rozwiązania można wykorzystać do otrzymania zapisu analitycznego. Z rysunku 130 mamy bowiem $R_J = R_1 + R_2$ lub $R_J = R_3 - R_2$ oraz

$$\omega_1 = \frac{v_{A1}}{R_1} = \frac{2v_{BJ}}{R_1} = \frac{2\omega_J(R_3 - R_2)}{R_1} = \frac{2\omega_J\left(R_3 - \frac{R_3 - R_1}{2}\right)}{R_1} = \omega_J\left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right).$$

Ostatni wynik można zapisać inaczej

$$\omega_1 = \omega_J\left(1 + \frac{Z_3}{Z_1}\right).$$

Przykładem przekładni, dla której wynik rozwiązania w postaci graficznej byłby nie do odczytania, jest przekładnia, przedstawiona na rys. 131, z następującymi liczbami zębów

$$Z_1 = 101; Z_2 = 51; Z_3 = 99; Z_4 = 50.$$

Przełożenie wynosi tu

$$i_{3J} = \frac{\omega_3}{\omega_J} = \left(1 - \frac{Z_1 Z_4}{Z_3 Z_2}\right),$$

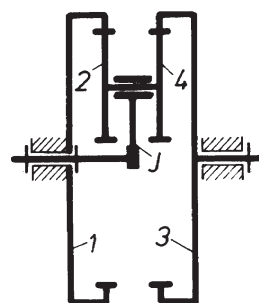
po podstawieniu zaś

$$i_{3J} = \frac{\omega_3}{\omega_J} = \left(1 - \frac{101 \cdot 50}{99 \cdot 51}\right) = \frac{-1}{5049}.$$

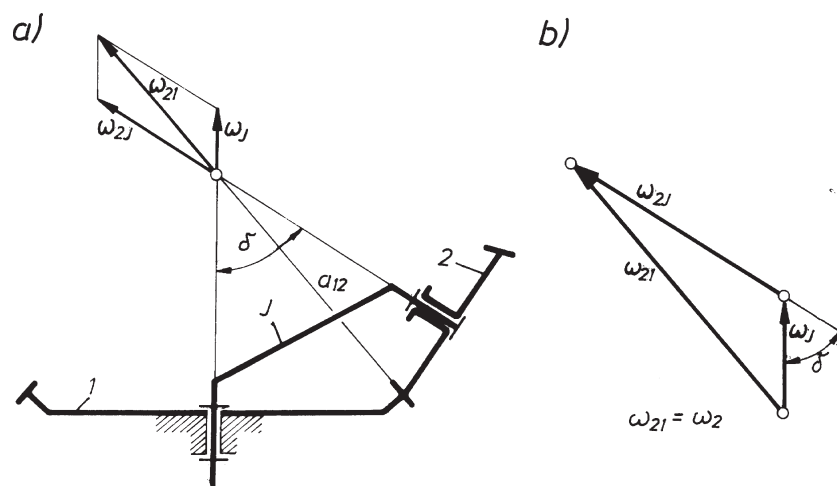
Przykład ten, potwierdzając nieprzydatność metod graficznych w pewnych przypadkach określania przełożeń w przekładniach obiegowych, wskazuje jednocześnie na ogromne możliwości tych przekładni w realizacji bardzo małych (bardzo dużych) przełożeń.

Metoda graficzna (Beyera)

Metoda Beyera służy do analizy przekładni obiegowych kątowych. U podstaw tej metody leży spostrzeżenie, że prędkość kątową każdego członu k przekładni można rozpatrywać jako sumę wektorową prędkości kątowej innego członu l i prędkości unoszenia członu k wraz z członem l ; czyli



Rys. 131. Przykład przekładni obiegowej o dużym przełożeniu

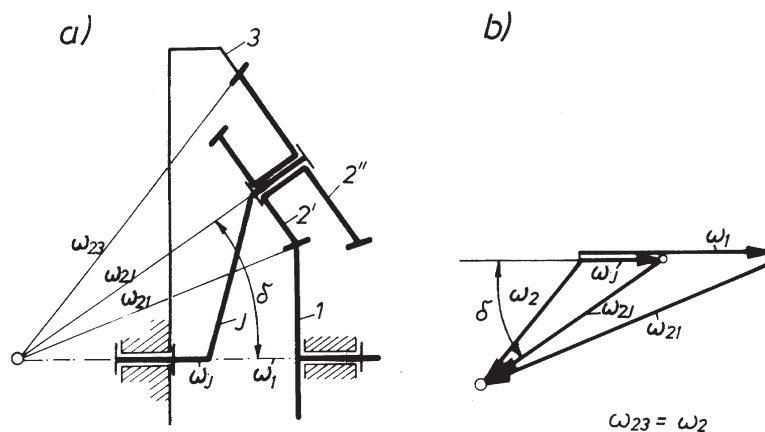


Rys. 132. Przykład określania przełożenia w przekładni obiegowej kątowej: a) schemat przekładni, b) plan prędkości kątowych

$$\bar{\omega}_k = \bar{\omega}_l + \bar{\omega}_{kl}.$$

W przekładniach kątowych te trzy wektory tworzą trójkąt; znając jeden z wektorów oraz kierunki dwóch pozostałych, możemy zbudować ten trójkąt i wyznaczyć długość i zwroty pozostałych wektorów.

Przeanalizujmy dla przykładu układ przedstawiony na rysunku 132a. Podczas obrotu jarzma J dookoła osi koła (1) następuje toczenie się koła (2) po powierzchni koła (1) i jednocześnie obracanie się tego koła względem własnej osi (tj. względem jarzma).



Rys. 133. Przykład graficznej metody (określania) przełożeń: a) schemat przekładni obiegowej kątowej, b) plan prędkości kątowych

Bezwzględnym ruchem koła (2) jest w każdej chwili obrót dookoła linii a_{12} . Obrót koła (2) wraz z jarzmem J jest ruchem unoszenia i odbywa się dookoła osi koła (1), natomiast względny obrót koła (2) następuje względem własnej osi. Dla tego przykładu zapiszemy

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_J + \bar{\omega}_{2J}.$$

Założmy, że dana jest ω_J . Rysując ten wektor (oczywiście w określonej podziałce) możemy, po wykorzystaniu znanych kierunków, znaleźć ω_{2J} i ω_2 (rys. 132b).

Przykład

Dana jest przekładnia przedstawiona na rys. 133a. Dla tej przekładni możemy zapisać

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{12},$$

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_J + \bar{\omega}_{2J}.$$

Ostatnie równania można przedstawić graficznie, bo znane są kierunki wszystkich wektorów (rys. 133a). Po wykonaniu tych sumowań otrzymamy rozwiązania przedstawione na rys. 133b.

7. Analiza dokładności

Przy określaniu parametrów kinematycznych zakładano dotychczas, że człony rozpatrywanego układu są sztywne, a ich geometria znana. W rzeczywistości, podatność obciążonych siłami członów, a także niedokładne ich wykonanie, sprawia, że geometria członów tylko w przybliżeniu odpowiada założeniom projektanta. Oznacza to, że rzeczywiste położenie członów i związanych z nimi punktów odbiegają od położen nominalnych. Fakt ten prowadzi w dalszym ciągu do wniosku, że również rozpatrywane tory, prędkości i przyspieszenia, określone przy założeniu wymiarów nominalnych, należy traktować jako wielkości przybliżone. Oczywiście, rozpatrywane zmiany mogą dotyczyć modułów tych wielkości, kierunków, a nawet ich zwrotów. Należy zasygnalizować już w tym miejscu, że to samo dotyczy również obciążeń statycznych i dynamicznych.

W świetle podanych spostrzeżeń pojawia się potrzeba ilościowego opisu rozpatrywanych zmian. Najistotniejszą, bo decydującą o zmianie pozostałych parametrów, jest zmiana położenia układu. Przeanalizujemy ją bliżej, uwzględniając tylko niedokładności wykonania. Przede wszystkim wprowadzimy kilka podstawowych pojęć:

Błędem będziemy nazywać różnicę wartości wielkości rzeczywistej i nominalnej. Błędy mogą dotyczyć wymiarów liniowych i kątowych, a ponadto ustawienia, zwichrowania, owalu, mimośrodów itp. W dalszym ciągu będziemy się zajmować przede wszystkim błędami wymiarów liniowych i kątowych.

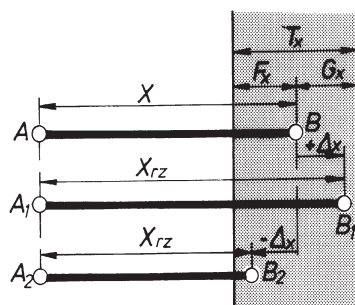
Jeżeli przez x_{rz} oznaczymy wymiar rzeczywisty, przez x_n zaś wymiar nominalny, to błąd Δx wymiaru x wyrazimy

$$\Delta x = x_{rz} - x_n.$$

Błędy nazywa się również odchyłkami. Przy całej serii mierzonych elementów, np. członów AB (rys. 134), wykonanych na ten sam wymiar nominalny x , błędy (odchyłki) rozłożą się w określonym pasmie. Szerokość tego pasma, czyli tzw. **tolerancję** T określa maksymalny błąd dodatni – **odchyłka górna** G oraz maksymalny błąd ujemny – **odchyłka dolna** F . Zachodzi relacja

$$T = G - F. \quad (91)$$

Błędy lub tolerancje wymiarów opisujących geometrię członów będziemy nazywać dalej **błędami** lub **tolerancjami wymiarowymi**. Błędy te powodują, jak już powiedziano, zmianę kształtu członu rzeczywistego w stosunku do kształtu nominalnego. Fakt ten można prześledzić na przykładzie trójwęzłowego członu ABC (rys. 135).

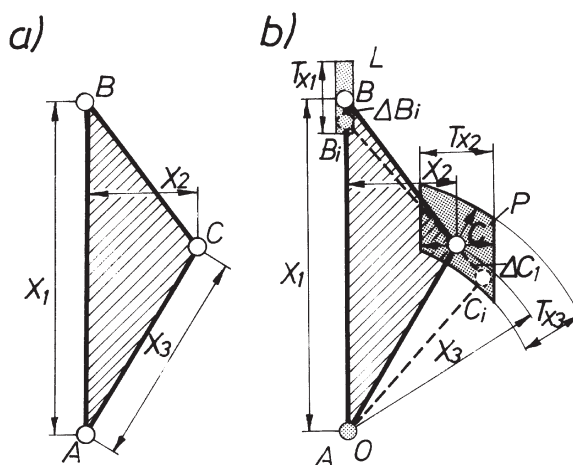


Rys. 134. Ilustracja pojęcia błędu, odchyłki i tolerancji

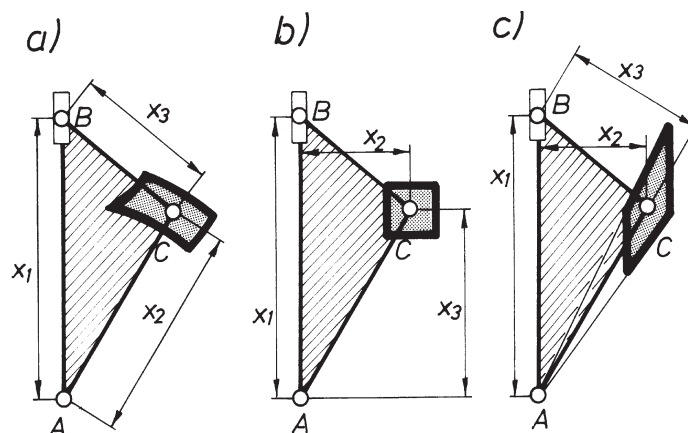
Założmy, że wykonano całą serię tych elementów, opisanych wymiarami x_1, x_2, x_3 , przy określonych tolerancjach T_{x1}, T_{x2}, T_{x3} (rys. 135a). W normalnych warunkach każdy element ABC będzie inny. Każdy będzie charakteryzował się innymi błędami $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Zestawmy w myśli wszystkie te elementy rzeczywiste tak, by punkty A_i pokryły się ze sobą w punkcie O i kierunki $A_i B_i$ pokrywały się z kierunkiem l . Wtedy wszystkie punkty B będą leżały na odcinku L (o długości T_{x1}), punkty C_i natomiast w polu P opisanym tolerancjami T_{x2} i T_{x3} (rys. 135b).

Nietrudno zauważyć, że rzeczywiste kształty takiego członu ABC , wykonanego przy tych samych tolerancjach wykonawczych, będą różne dla różnych sposobów jego zwymiarowania. Można to prześledzić na kolejnych przykładach przedstawionych na rys. 136. W tym świetle dobór odpowiedniego sposobu zwymiarowania nabiera szczególnego znaczenia.

Wracając do układów kinematycznych, złożonych z takich rzeczywistych członów, zwrócimy jeszcze raz uwagę na to, że zmiany ich kształtów powodują zmianę położenia tych członów (w układzie) w stosunku do położenia nominalnych. Jeżeli poło-



Rys. 135. Człon trójwęzłowy: a) sposób zwymiarowania, b) rozrzut położenia punktów węzłowych



Rys. 136. Przykłady kolejnych sposobów zwymmiarowania i rozrzuty położenia punktów węzłowych członów trójwęzłowych

żenie jakiegoś rozpatrywanego członu lub punktu jest opisane wymiarami będącymi funkcją innych wymiarów wykonawczych, to wymiarowi temu, zwanemu dalej **wymiarem wynikowym**, można przypisać błąd lub **tolerancję wynikową**.

Rozpatrzmy przykładowo popularny układ napędowy ABC (rys. 137a). Jeżeli x_1 , x_2 i x_3 przyjąć za wymiary wykonawcze, to interesujący nas kąt ψ , określający położenie ramienia BC , jako funkcja wymiarów x_1 , x_2 i x_3 będzie wymiarem wynikowym, błąd $\Delta\psi$ i $T\psi$ zaś odpowiednio błędem i tolerancją wynikową.

W projektowaniu układów kinematycznych wyłaniają się dwa zagadnienia inżynierskie dotyczące:

- określenia przewidywanych tolerancji wynikowych przy zadanych tolerancjach wykonawczych,
- doboru tolerancji wykonawczych, zapewniających założoną z góry tolerancję wynikową.

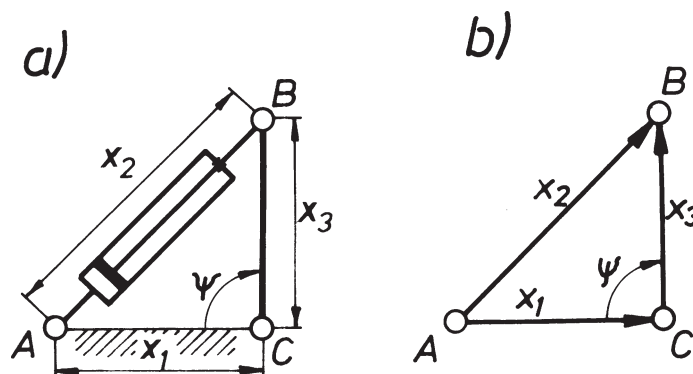
7.1. Określanie błędu i tolerancji wynikowej

Rozpatrywany w analizie dokładności układ kinematyczny dogodnie jest zastąpić ciągiem jego wymiarów wykonawczych oraz zamykającym wymiarem wynikowym. Taki ciąg wymiarów będziemy nazywać **łańcuchem wymiarowym**. Przykładowy łańcuch wymiarowy, dla układu z rys. 137a, przedstawiono na rys. 137b.

W naszych rozważaniach ogólnych oznaczamy dalej wymiary wykonawcze przez x_i , wymiar wynikowy zaś przez b . Przy takich oznaczeniach napiszemy

$$b = f(x_i). \quad (92)$$

Znalezienie błędu Δb wymiaru wynikowego b przy zadanych wymiarach x_i , błędach wykonawczych Δx_i oraz znanej postaci funkcji f jest formalnie proste



Rys. 137. Układ napędowy ABC: a) schemat kinematyczny z wymiarami, b) łańcuch wymiarowy

$$b = f(x_i) + f(x_i + \Delta x_i). \quad (93)$$

W praktyce, korzystanie z wzoru (93) prowadzi jednak do bardzo pracochłonnych i kłopotliwych rachunków. Z tych względów w teorii dokładności rozwija się funkcję (92) w szereg Taylora i przyjmuje do obliczeń tylko wyraz liniowy szeregu. Godząc się z pewnym przybliżeniem, otrzymujemy

$$\Delta b = \sum_{i=1}^{i=n} |w_i \Delta x_i| \quad (94)$$

gdzie

$$w_i = \frac{\partial b}{\partial x_i}. \quad (95)$$

Wielkość w_i nosi nazwę **współczynnika wpływu** i będzie przedmiotem rozważań w kolejnym rozdziale.

Z zależności (94) można korzystać wówczas, gdy znane są błędy Δx_i , a więc gdy rozpatrujemy układ rzeczywisty. W fazie projektowania należy założyć losowy rozkład tych błędów zarówno co do modułu, jak i znaku. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka prowadzą wtedy do związku

$$\Delta b^* = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} (w_i \cdot \Delta x_i)^2}. \quad (96)$$

Często dogodniej jest rozpatrywać nie błędy, lecz tolerancje. W tym celu można stosować analogiczne związki

$$T_b = \sum_{i=1}^{i=n} |w_i T_{x_i}| \quad (97)$$

oraz

$$T_b^* = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} (w_i \cdot T_{xi})^2}. \quad (98)$$

Zależność (94) będziemy stosować we wszystkich przypadkach, w których należy oczekiwać losowych rozkładów błędów, zależność (97) zaś przy ich najbardziej niekorzystnym rozkładzie. Inaczej wystąpienie tolerancji większej od T_b^* jest praktycznie niemożliwe, a większej od T_b zupełnie niemożliwe. Zależnością (97) należy się posługiwać wyjątkowo, gdyż skrajna ostrożność jest uzasadniona ze względów technicznych i ekonomicznych.

7.2. Określanie współczynników wpływu

Współczynnik wpływu można określić przez bezpośrednie różniczkowanie funkcji wymiarowej (92), co na ogół prowadzi do bardzo pracochłonnych rachunków. Z tego względu, w praktyce przyjęły się dogodniejsze graficzne metody określania współczynników wpływu.

Spośród wielu metod określenia współczynników w_i , dotychczas najszersze zastosowanie znalazła metoda opracowana przez N.G. Brujewicza. Polega ona na prostej interpretacji kinematycznej. Dzieląc licznik i mianownik zależności (95) przez $\partial \tau$ otrzymamy

$$w_i = \frac{\partial b / \partial \tau}{\partial x_i / \partial \tau}.$$

Jeżeli przedział czasu $\partial \tau$ będzie dążył do zera, to w granicy otrzymamy

$$w_i = \frac{v_b}{v_{xi}}. \quad (99)$$

Ze wzoru tego wynika, że współczynnik wpływu w_i można interpretować jako stosunek prędkości zmiany wymiaru wynikowego do odpowiedniej prędkości zmiany i -tego wymiaru wykonawczego, przy założeniu niezmienności pozostałych wymiarów. Wprowadzając, zgodnie z wzorem (99), zmienne wymiary wykonawcze, otrzymamy pewne układy kinematyczne – tzw. mechanizmy pomocnicze – o ruchliwości jeden. Otrzyma się więc tyle mechanizmów pomocniczych, ile uwzględniono w analizie błędów wykonawczych.

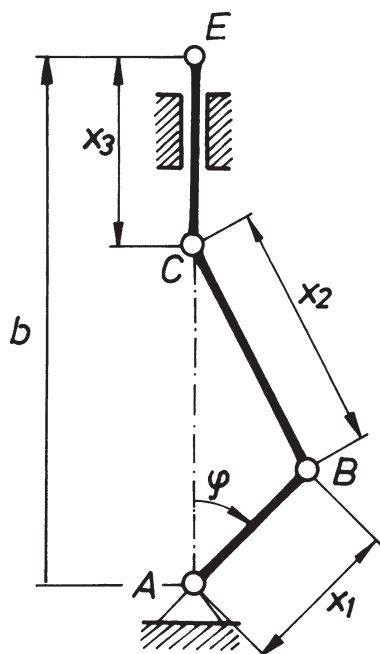
W położeniu układu kinematycznego, w którym ma być przeprowadzona analiza dokładności, należy najpierw układ unieruchomić (nałożyć liczbę więzów odpowiadającą ruchliwości teoretycznej), a dopiero potem wprowadzać mechanizmy pomocnicze według N.G. Brujewicza. Sposób korzystania z metody omówiono na przykładzie.

Niech będzie dany układ kinematyczny przedstawiony na rys. 138. Wymiar b , określający położenie punktu E , jest funkcją wymiarów wykonawczych x_1, x_2, x_3 oraz wartości kąta φ . Jest więc wymiarem wynikowym. Określmy współczynniki wpływu wymiarów x_1, x_2, x_3 . W tym celu sporządzamy schematy mechanizmów zastępczych (rys. 139a) oraz kreślimy plany prędkości dla tych mechanizmów zastępczych (rys. 139b). Zauważmy, że we wszystkich przypadkach mechanizmy pomocnicze zapewniają możliwość zmiany tylko wymiaru badanego przy niezmiennych wartościach wymiarów pozostałych. Zakładając np. jednostkową wartość prędkości tych zmian, można w ten sposób określić wpływ zmiany poszczególnych wymiarów na zmianę wymiaru wynikowego b . Otrzymujemy więc

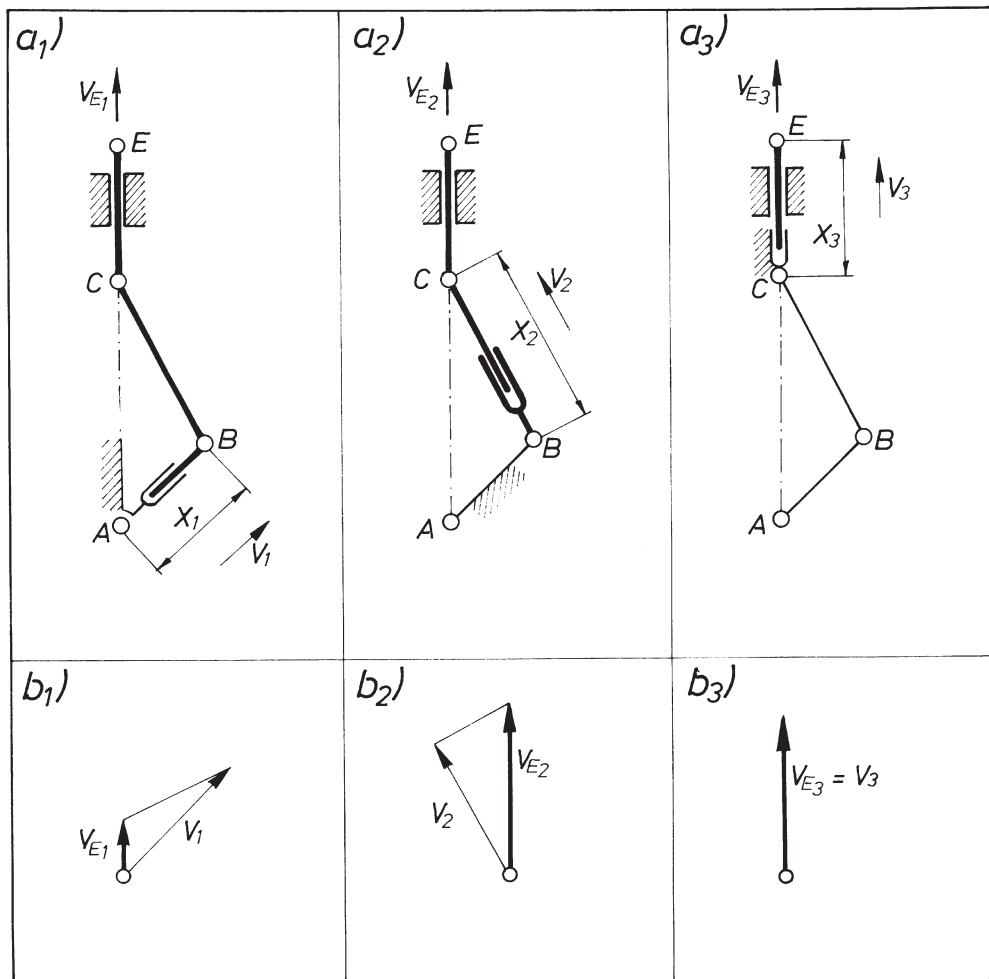
$$w_1 = \frac{v_{E1}}{v_1}; \quad w_2 = \frac{v_{E2}}{v_2}; \quad w_3 = \frac{v_{E3}}{v_3} = 1.$$

Gdy znane są wartości współczynników wpływu, można określić spodziewaną tolerancję T_b wymiaru wynikowego przy zadanych tolerancjach T_i wymiarów x_i . Zgodnie z wzorem (98), otrzymamy

$$T_b^* = \sqrt{(w_1 T_{x1})^2 + (w_2 T_{x2})^2 + (w_3 T_{x3})^2}.$$



Rys. 138. Schemat kinematyczny mechanizmu z naniesionymi wymiarami wykonawczymi (x_i) oraz wymiarem wynikowym (b)



Rys. 139. Ilustracja metody graficznej określania współczynnika wpływu: a) mechanizmy zastępcze układu z rys. 120, b) plany prędkości

Wynik analizy dokładności układu kinematycznego jest związany z określonym położeniem członu czynnego. Oznacza to, że przy stałych błędach wymiarów wykonawczych, w cyklu pracy układu kinematycznego będzie się zmieniać błąd wynikowy, ponieważ zmieniają się współczynniki wpływu. W pewnych położeniach (zwykle bliskich położeniom martwym) wrażliwość układu na błędy wykonawcze członów jest szczególnie duża.

III. DYNAMIKA

8. Wprowadzenie

W dziale dynamika mechanizmów i maszyn rozpatruje się związki między parametrami kinematycznymi (przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia) a masami członów i działającymi na nie siłami. Posługując się takimi związkami, wyrażonymi zwykle w postaci równań różniczkowych, można rozwiązywać dwie podstawowe grupy zagadnień:

- wyznaczanie sił wymuszających określone prawo ruchu mechanizmu,
- określanie prawa ruchu mechanizmu przy zadanym stanie jego obciążenia.

Mniej ambitnymi, choć w praktyce ważnymi, zagadnieniami (omówionymi w tym dziale) jest określanie sił oddziaływania w parach kinematycznych ruchomych mechanizmów z uwzględnieniem zjawiska tarcia, określanie sprawności mechanizmów itp.

Przy rozwiązywaniu większości zagadnień inżynierskich zakłada się zwykle dla uproszczenia, że człony mechanizmów są elementami sztywnymi o wymiarach zdefiniowanych oraz bez luzów w parach kinematycznych. Należy jednak zwrócić uwagę, że różnice między wynikami uzyskanymi przy tych założeniach a występującymi w układach rzeczywistych, mogą w wypadkach szczególnych okazać się nie do pominięcia.

9. Siły i ich przegląd

Siły działające na człony układów mechanicznych można podzielić na siły **czynne** (napędowe) i siły **bierne** (oporu).

Pierwsze z nich charakteryzują się tym, że ich wektory tworzą z wektorami prędkości punktów przyłożenia sił kąty ostre. Siły te podtrzymują ruch układu mechanicznego. Opory, którymi nazywamy siły tworzące z odpowiednimi wektorami prędkości kąty rozwarte, przeciwstawiają się ruchom. Wśród nich należy rozróżnić tzw. opory **użyteczne**, czyli te, których pokonanie jest związane z wykonywaniem pracy celowej i użytecznej oraz opory **szkodliwe**, do których należy zaliczyć przede wszystkim siły tarcia w parach kinematycznych, opory ośrodka itp. Siły obciążające poszczególne człony dzieli się dalej na **zewnętrzne** i **wewnętrzne**. Do sił zewnętrznych zaliczamy te, których źródło leży poza rozpatrywanym członem, np. siły ciężkości, siły technologiczne itp. Do sił wewnętrznych zaliczamy siły występujące między członami mechanizmu lub w rozpatrywanej części mechanizmu, np. w przekroju poprzecznym członu.

Odmienną naturę mają siły bezwładności, będące źródłem tzw. obciążeń dynamicznych. Ze względu na szczególne znaczenie, jakie odgrywają te siły we współczesnej technice, omówiono je bardziej szczegółowo.

9.1. Siły bezwładności i ich redukcja

Na elementarną masę dm_i (rys. 140a) w ruchu, scharakteryzowanym przyspieszeniem a_i , działa siła bezwładności

$$d\bar{P}_{bi} = -dm_i \cdot \bar{a}_i.$$

Na człon o masie rozłożonej w sposób ciągły działa więc pewnego rodzaju ciągłe pole sił elementarnych. Taki rzeczywisty stan obciążenia należy uwzględnić przy określeniu wynikających stąd naprężeń wewnętrznych. Do pewnych jednak celów, np. do wyznaczania sił roboczych i oddziaływania w parach kinematycznych, można i dogodnie jest zastąpić takie obciążenie ciągłe umownymi siłami skupionymi. W ogólnym przypadku efekt działania wszystkich elementarnych sił bezwładności dla członu będącego w ruchu złożonym można przedstawić w postaci jednej siły P_b przyłożonej w środku masy S członu oraz pary sił M_b (rys. 140b). Siła

$$\bar{P}_b = -m \cdot \bar{a}_S. \quad (100)$$

gdzie: m – masa członu,

a_S – przyspieszenie środka masy członu.

Jak wynika z zapisu wektorowego, siła P_b ma kierunek przyspieszenia a_S i zwrot przeciwny do zwrotu przyspieszenia, moduł zaś równy $m a_S$.

Moment sił bezwładności M_b względem środka masy

$$\bar{M}_b = -J_S \cdot \bar{\varepsilon}. \quad (101)$$

gdzie: J_S – masowy moment bezwładności członu względem osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu i przechodzącej przez środek masy,

ε – przyspieszenie kątowe członu.

Ogólnie

$$J_S = \int_m \rho^2 dm \quad (102)$$

lub

$$J_S = m i_s^2,$$

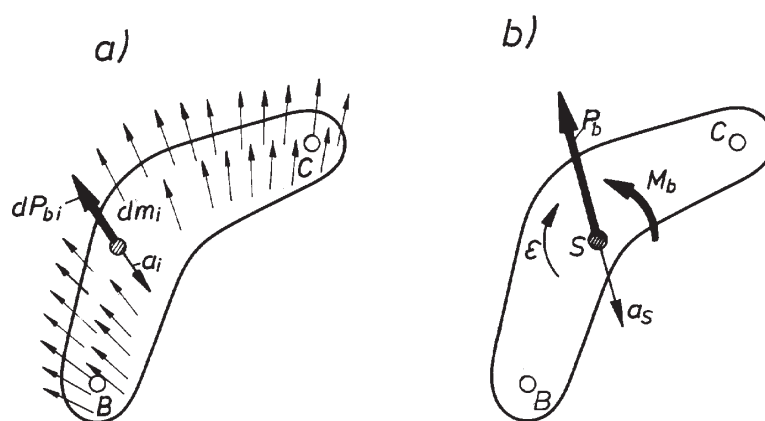
gdzie i_s – promień bezwładności.

Jeżeli moment M_b zastąpić parą sił P_b taką, by jej ramię h było równe

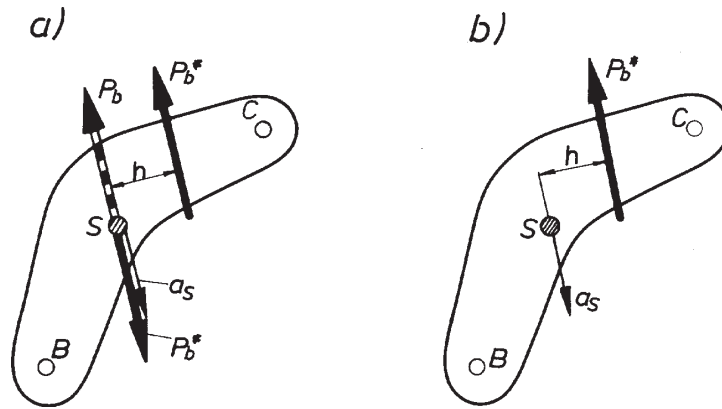
$$h = \frac{M_b}{P_b^*},$$

siły zaś tworzące tę parę (rys. 141a) będą spełniać warunek

$$\bar{P}_b^* = \bar{P}_b = -m \cdot \bar{a}_S,$$



Rys. 140. Redukcja sił bezwładności: a) pole elementarnych sił bezwładności, b) układ zastępczy pola sił



Rys. 141. Układ zastępczy reprezentujący siły bezwładności: a) siła wypadkowa P_b i para sił P_b^* , b) siła wypadkowa P_b^* przesunięta względem S na odległość h

to siły P_b i P_b^* jako równe sobie i przeciwnie skierowane, wzajemnie się równoważą. Wtedy druga siła P_b^* pary, jako jedyna siła reprezentuje efekt działania wszystkich elementarnych sił bezwładności (rys. 141b).

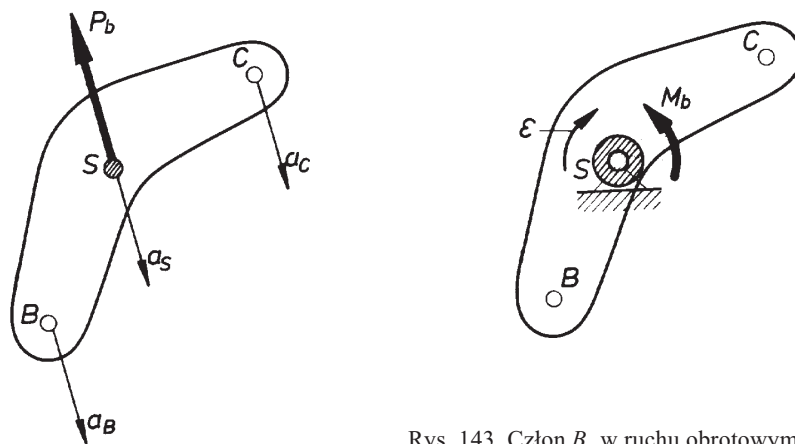
Szczególnymi przypadkami ruchów płaskich są ruchy postępowe i obrotowe. Upraszczają się wtedy zagadnienie sił bezwładności towarzyszących takim ruchom.

1. Człon w ruchu postępowym (rys. 142). Z założenia $\varepsilon = 0$, a więc $M_b = 0$, co oznacza, że siły bezwładności działające na taki człon redukują się do jednej siły

$$\bar{P}_b = -m \cdot \bar{a}_S.$$

przechodzącej przez środek masy.

2. Człon w ruchu obrotowym niejednostajnym wokół środka ciężkości S (rys. 143). W związku z tym



Rys. 142. Człon w ruchu postępowym.
 P_b – wypadkowa sił bezwładności

Rys. 143. Człon B_c w ruchu obrotowym wokół środka ciężkości S. Efektem działania sił bezwładności moment sił M_b

$$a_s = 0, \text{ a więc } P_b = 0.$$

Wynikiem działania elementarnych sił bezwładności jest tylko moment bezwładności

$$\bar{M}_b = -J_S \cdot \bar{\epsilon}.$$

3. Człon w ruchu obrotowym niejednostajnym wokół osi nie przechodzącej przez środek ciężkości (rys. 144a). W tym przypadku

$$\bar{P}_b = -m \cdot \bar{a}_S \text{ i } \bar{M}_b = -J_S \cdot \bar{\epsilon}.$$

Zastępując moment odpowiednio dobraną parą sił P_b^* , równą P_b , można moment i siłę zredukować do jednej siły P_b^* , której linia działania przechodzi przez punkt W , zwany **punktem wahnień** lub **uderzeń** (rys. 144b). Punkt ten można traktować tak, jak gdyby w nim była skupiona masa całego członu, odległość zaś BW jako długość zredukowaną wahadła fizycznego otrzymanego przez podwieszenie członu BC w punkcie B . Odległość BW , zawsze większą od BS , można określić

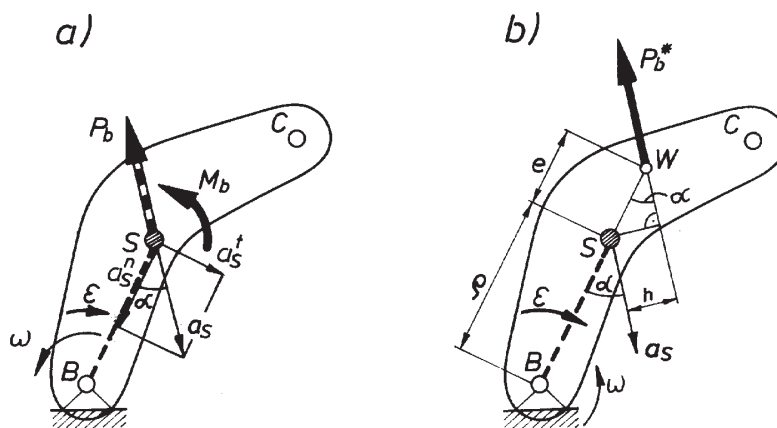
$$BW = BS + SW = \rho + e, \quad (103)$$

przy czym

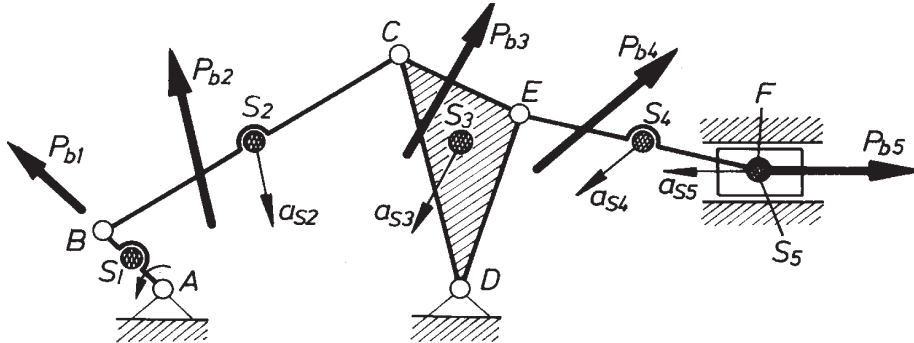
$$SW = e = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{J_S \cdot |\epsilon|}{m \cdot a_s \cdot \sin \alpha} = \frac{m \cdot i_s^2 \epsilon}{m \cdot a_s^t} = \frac{i_s^2 |\epsilon|}{\rho \cdot |\epsilon|} = \frac{i_s^2}{\rho},$$

czyli

$$e = \frac{i_s^2}{\rho}, \quad (104)$$



Rys. 144. Człon BC w ruchu obrotowym. Redukcja sił bezwładności



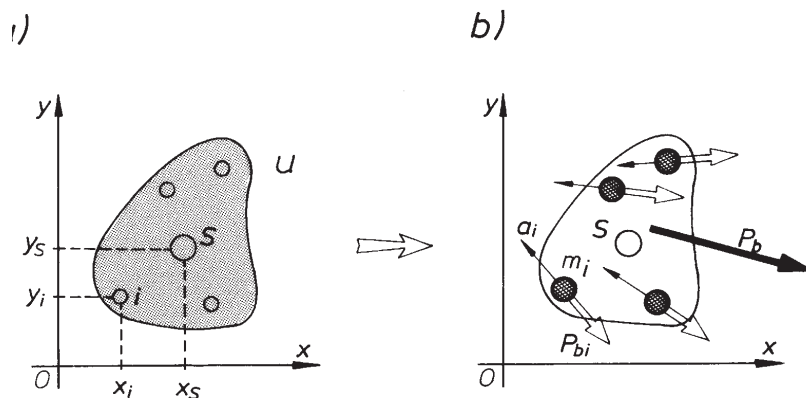
Rys. 145. Przykład mechanizmu dźwigniowego obciążonego układem zredukowanych sił bezwładności

Na podstawie tych ustaleń można przyporządkować każdemu członowi układu kinematycznego siłę bezwładności lub moment sił bezwładności, jeżeli tylko znana jest masa członu, jej rozkład oraz ruch. Zilustrowano to na przykładzie układu kinematycznego przedstawionego na rys. 145, gdzie każdemu członowi przyporządkowano zredukowaną siłę bezwładności.

Rozwiązanie takie poprzedza zwykle określenie samych przyspieszeń, czego dokonujemy np. metodą planu przyspieszeń, oraz ustalenie masowych momentów bezwładności. Te ostatnie można obliczyć analitycznie za pomocą wzoru (102), przy członach łatwych do opisanego, lub zawsze wyznaczyć doświadczalnie, posługując się jedną ze znanych metod: wahadła fizycznego, zawieszenia jedno- lub trzynitkowego.

9.1.1. Metoda mas zastępczych

W niektórych przypadkach korzystniejszy może się okazać inny sposób wyznaczania sił bezwładności, polegający na uprzednim zastąpieniu członu (rys. 146a) jego modelem złożonym z kilku mas skupionych (rys. 146b).



Rys. 146. Metoda mas zastępczych: a) człon rzeczywisty, b) model dynamiczny z naniesionymi siłami bezwładności

Gdy znamy przyspieszenia a_i poszczególnych punktów masowych, nietrudno przy-
porządkować im siły bezwładności P_{bi} (rys. 146b), a redukując je przez kolejne
sumowanie (np. za pomocą wieloboku sznurowego) otrzymujemy wypadkową P_b
tych sił oraz jej linię działania.

Model członu zastosowany do określania wypadkowej sił bezwładności musi być
dynamicznie równoważny członowi, tzn. mieć:

- tę samą masę całkowitą,
- tak samo położony środek ciężkości,
- identyczny moment bezwładności względem środka ciężkości.

Warunki te można zapisać za pomocą następujących równań:

$$\sum m_i = m,$$

$$\sum m_i x_i = m \cdot x_s,$$

$$\sum m_i y_i = m \cdot y_s,$$

(105)

$$\sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_s + m(x_s^2 + y_s^2),$$

w których: m_i – masa zastępcza umieszczona w i -tym punkcie,
 x_i, y_i – współrzędne i -tych mas zastępczych w układzie współrzędnych
prostokątnych xOy (rys. 146),
 x_s, y_s – współrzędne środka ciężkości,
 m – masa członu rzeczywistego,
 J_s – masowy moment bezwładności członu rzeczywistego względem
środka masy członu.

Każdą masę zastępczą można opisać trzema parametrami m_i, x_i i y_i . Mamy więc
łączną liczbę $3n$ parametrów, z których 4 (liczba równań) można obliczyć. Można
więc założyć p parametrów, przy czym musi być spełniony warunek

$$p = 3n - 4,$$

z którego wynika, że $n \geq 2$.

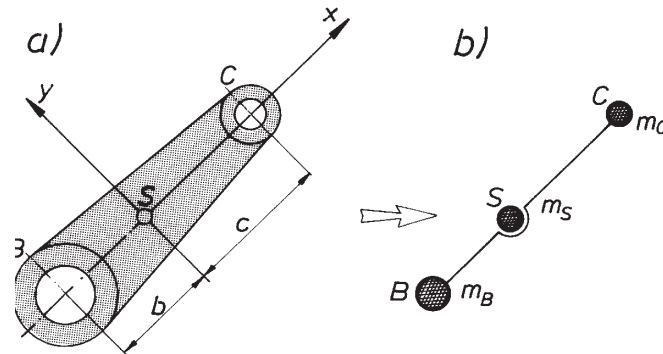
Zwróćmy uwagę, że już przy $n = 4$ można narzucić położenia wszystkich czterech
mas zastępczych, np. w tych punktach, których przyspieszenia znamy lub dogodnie
można je określić.

Stosunkowo łatwo rozwiązuje się układ równań (105), jeżeli jedna z mas zastę-
pczych przyjąć w środku masy S , a tam z kolei umieścić początek układu współrzęd-
nych. W takim przypadku, np. dla łącznika BC (rys. 147), mamy

$$m_B + m_S + m_C = m,$$

$$-m_B \cdot b + m_C \cdot c = 0,$$

$$m_B \cdot b^2 + m_C \cdot c^2 = J_S.$$



Rys. 147. Człon dwuwęzłowy BC i jego trójmasowy model dynamiczny

Po rozwiązaniu

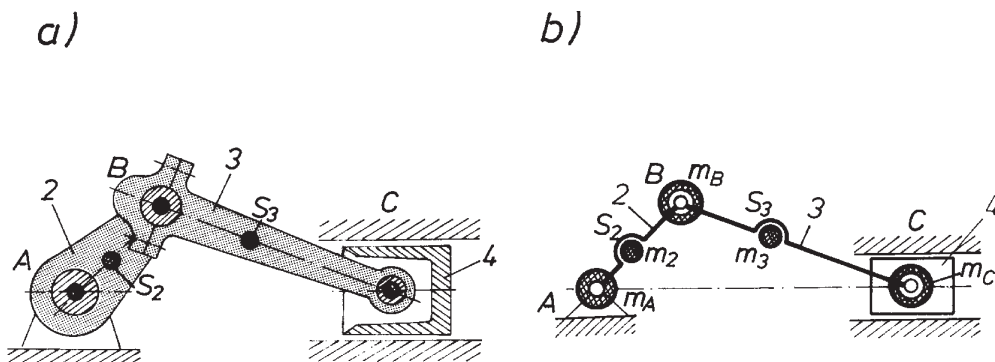
$$m_B = \frac{J_S}{b \cdot l}, \quad m_C = \frac{J_S}{c \cdot l}, \quad m_S = m - \frac{J_S}{b \cdot c}.$$

Masy skupione dogodnie jest umieścić w środkach par obrotowych, co znacznie upraszcza określanie przyspieszeń.

W ten sposób można zastąpić przykładowy mechanizm korbowodzikowy (rys. 148a) dogodnym układem mas skupionych (rys. 148b). Człony (2) i (3) zastąpiono układami trzech mas skupionych (w przegubach i środkach ciężkości) co oznacza, że

$$m_B = m_{B2} + m_{B3} \quad \text{i} \quad m_C = m_{C3} + m_{C4}.$$

Taki układ modelowy (rys. 148b) jest równoważny dynamicznie układowi fizycznemu (rys. 148a).



Rys. 148. Redukcja mas: a) układ rzeczywisty, b) model dynamiczny złożony z członów nieważkich i mas skupionych

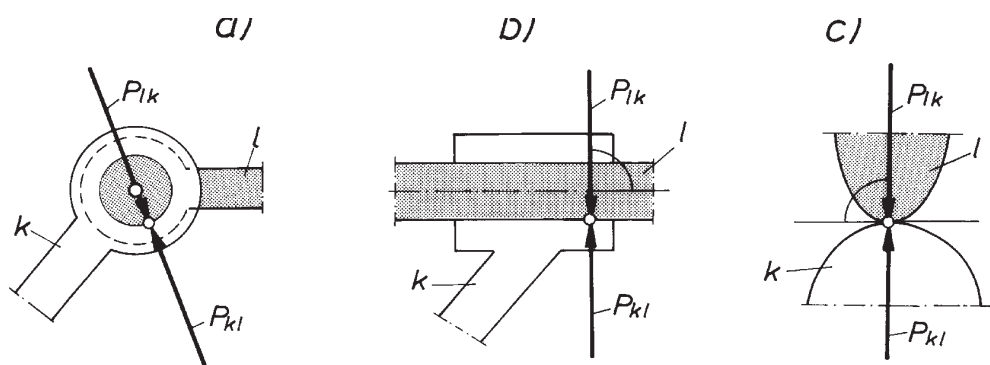
10. Kinetostatyka

W każdym układzie kinematycznym w jego ruchomych połączeniach zachodzi oddziaływanie członów na siebie. **Siłę oddziaływania** tworzących parę członów k i l oznaczamy będziemy przez P_{kl} (oddziaływanie członu k na l) lub przez P_{lk} (oddziaływanie członu l na k), przy czym (rys. 149)

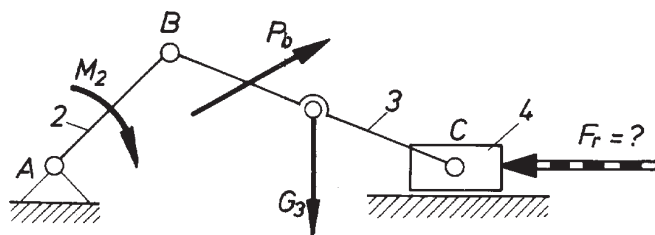
$$\bar{P}_{kl} = -\bar{P}_{lk}.$$

Wyznaczanie tych sił należy do podstawowych zadań w procesie projektowania. Niezbędna jest też znajomość tzw. **sił równoważących** F_r lub **momentów równoważących** M_r . Przez pojęcia te rozumiemy siły (lub momenty sił) przyłożone do wybranych członów układu kinematycznego, utrzymujące układ w równowadze. Jeżeli np. na człony układu działają obciążenia zewnętrzne M_2, P_b, G_3 (rys. 150) i efekt ich działania udaje się zrównoważyć jedną siłą F_r , to taką siłę nazywamy właśnie siłą równoważącą. Wyznaczanie zarówno sił oddziaływania, jak i sił równoważących można dokonywać w układach pozostających w spoczynku znanymi z mechaniki metodami statyki.

Mechanizmy (układy członów ruchomych) odróżnia od układów nieruchomych to, że na ich człony działają dodatkowo **siły bezwładności**. Jeżeli jednak wypadkowe tych sił, które potrafimy określić (p. 9.1) potraktować jako siły zewnętrzne działające na człony obok innych sił zewnętrznych, nie zmieni to obciążenia samych par kine-



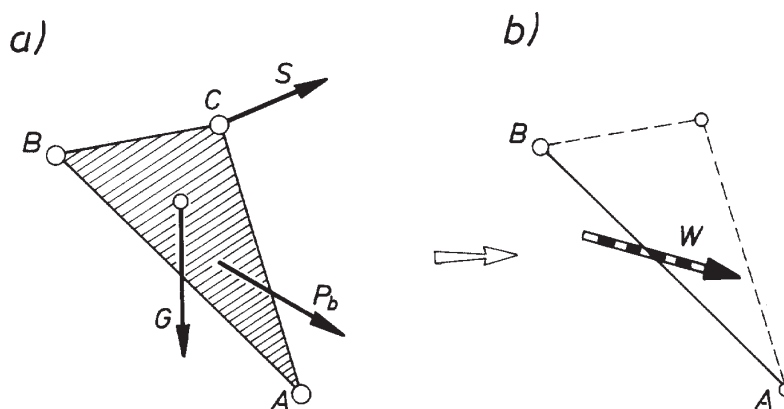
Rys. 149. Siły oddziaływania w parach kinematycznych: a) w parze obrotowej, b) w parze postępowej, c) w parze wyższej



Rys. 150. Ilustracja pojęcia siły równoważącej

matycznych. Oznacza to, że w ten sposób ruchome układy (mechanizmy) można sprowadzić do układów statycznych i rozwiązywać metodami statyki. Metoda taka nosi miano **kinetostatyki**.

Stosując metodę kinetostatyki do określania sił oddziaływania w parach sił i momentów równoważących, dogodnie jest, złożony zwykle układ obciążeń rzeczywistych zastąpić najprostszym układem równoważnym. Można to osiągnąć przez redukcję wszystkich sił i momentów zewnętrznych (np. oporów użytecznych, szkodliwych sił ciężkości itp.) oraz wypadkowych sił bezwładności działających na poszczególne człony jedną tylko siłą lub siłą i momentem sił. Istotę takiego zabiegu zilustrowano na rys. 151, przy czym na rys. 151a mamy człon obciążony układem sił rzeczywistych, na rys. 151b natomiast ten sam człon obciążony jedną siłą wypadkową $\bar{W} = \bar{G} + \bar{S} + \bar{P}_b$.

Rys. 151. Ilustracja redukcji sił działających na człon ABC: a) człon z układem sił zewnętrznych, b) człon z siłą wypadkową W

10.1. Grupy statycznie wyznaczalne

Określając siły oddziaływania i siły równoważące w układach kinematycznych, dogodnie jest badany układ podzielić na takie najprostsze elementy, które po wyodrębnieniu z całego mechanizmu, rozpatrywane w równowadze – umożliwiają określenie sił oddziaływania w kolejnych parach kinematycznych. Elementy takie, zwane **grupami statycznie wyznaczalnymi**, muszą mieć określoną budowę strukturalną.

W celu wyjaśnienia struktury grup statycznie wyznaczalnych, dających możliwość określenia za pomocą metod statycznych niewiadomych sił oddziaływania w parach kinematycznych, konieczne jest ustalenie zależności między liczbą członów i par kinematycznych, przy której siły niewiadome mogą być określone za pomocą równań statycznych.

Zależność tę można ustalić przez dokładną analizę sił oddziaływania w parach kinematycznych. Jeżeli pominąć zjawisko tarcia, to w parze obrotowej (I kl.) linia działania wypadkowej oddziaływania wzajemnego dwóch członów l i k przechodzi przez środek pary oraz $\bar{P}_{kl} = -\bar{P}_{lk}$ (rys. 149a). Nie są znane moduł i kierunek siły. Można powiedzieć inaczej, że para obrotowa I klasy dostarcza dwie niewiadome. W parze I klasy postępowej (rys. 149b) wypadkowa ($\bar{P}_{kl} = -\bar{P}_{lk}$) oddziaływania wzajemnego ma kierunek prostopadły do prowadnicy, nie są znane natomiast punkt przyłożenia i moduł. A więc dostarcza ona także dwie niewiadome. W parze wyższej II klasy (rys. 149c) siła oddziaływania jest określona co do kierunku (normalny do wspólnej stycznej) i punktu przyłożenia (punkt styku), niewiadomą jest zaś tylko moduł.

Jeżeli w układzie mechanicznym płaskim występuje p_1 par I klasy i p_2 par II klasy, to łączna liczba parametrów, jaką należy określić przy wyznaczaniu sił oddziaływania, wyniesie $2p_1 + p_2$. Z drugiej strony, dla każdego członu w łańcuchu płaskim można napisać 3 równania równowagi – suma rzutów na dwie osie prostopadłe oraz suma momentów względem dowolnego punktu równa się zero. Oznacza to, że dla n członów liczba równań, a więc liczba parametrów, które można obliczyć, wynosi $3n$. Można więc napisać

$$3n = 2p_1 + p_2. \quad (106)$$

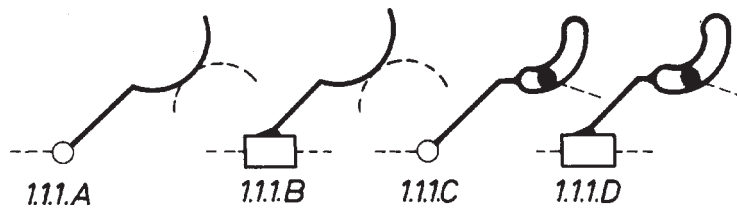
Według zależności (106) można sprawdzić, czy wydzielona z mechanizmu grupa członów jest statycznie wyznaczalna. Należy przy tym nadmienić, że w wydzielonej z mechanizmu grupie statycznie wyznaczalnej muszą być znane wszystkie obciążenia zewnętrzne.

Jeżeli z układu mechanicznego wydzielimy możliwe grupy statycznie wyznaczalne, spełniające warunek (106), to pozostaną tylko człony czynne. Oznacza to, że analizę kinetostatyczną mechanizmów można sprowadzić do analizy grup statycznie wyznaczalnych i członu czynnego, co sugeruje z kolei możliwość opracowania ogólnych metod rozwiązywania wszystkich mechanizmów płaskich.

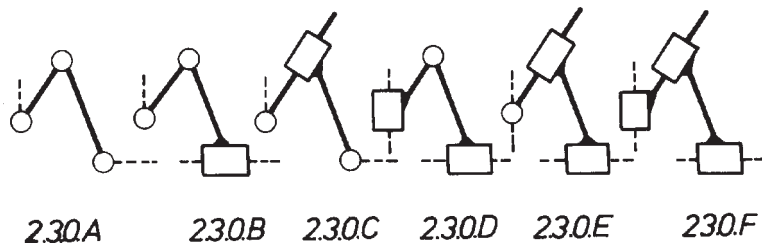
10.1.1 Analiza sił w grupach statycznie wyznaczalnych

Wychodząc z zależności (106), można kolejnym liczbom n członów przyporządkować liczby p_1 i p_2 par występujących w grupie. Zestawione w tabeli 8 przykładowe wyniki takich operacji wskazują na dużą różnorodność grup nawet przy małych liczbach n . Najprostszą odmianę grupy stanowi pojedynczy człón dwuwęzłowy (wersja 1.1.1) lub trójwęzłowy (wersja 1.0.3). Stosunkowo proste grupy tworzą także tzw. dwuczłony, z których do najczęściej spotykanych należy wersja 2.3.0. Po wprowadzeniu w miejsce par kinetycznych I kl i II kl. różnych postaci, otrzymamy różne

<i>n</i>	1		2				3					4		
p_1	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0	6	5	...
p_2	1	3	0	2	4	6	1	3	5	7	9	0	2	...
Wersja	1.1.1	1.0.3	2.3.0	2.2.2	2.1.4	2.0.6	3.4.1	3.3.3	3.2.5	3.1.7	3.0.9	4.6.0	4.5.2	...



Rys. 152. Postacie najprostszej grupy statycznie wyznaczalnej



Rys. 153. Postacie dwuczłonowej grupy statycznie wyznaczalnej

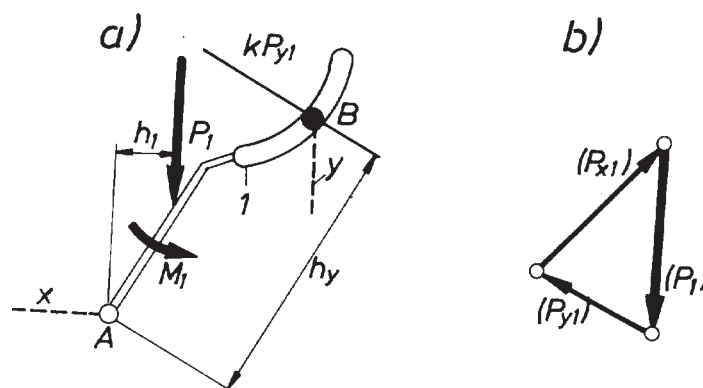
postacie wersji grup statycznie wyznaczalnych. Postacie grup wersji 1.1.1 przedstawiono na rys. 152, natomiast wersji 2.3.0 na rys. 153.

Każda z postaci, nawet tej samej wersji, wymaga nieco odmiennego toku postępowania, co można prześledzić na kilku przykładach rozwiązanych metodami grafoanalitycznymi.

Wersja 1.1.1 postać C

Niech w badanym mechanizmie będzie grupa jednoczłonowa (rys. 154a) obciążona zredukowaną siłą zewnętrzną P_1 i momentem zredukowanym M_1 . Należy określić siły oddziaływania P_{x1} członu x na 1 w parze A i P_{y1} członu y na 1 w parze B . Wiadomo, że w parze obrotowej A wypadkowa siła oddziaływania przechodzi przez środek pary. W parze wyższej B siła oddziaływania przechodzi przez punkt styku i jest prostopadła do stycznej w punkcie styku. Znany jest więc kierunek i punkt przyłożenia siły oddziaływania P_{y1} . Zapisując równania momentów względem punktu A można obliczyć siłę P_{y1} . Będzie

$$P_{y1} \cdot h_y - P_1 \cdot h_1 + M_1 = 0,$$



Rys. 154. Rozwiązanie grupy statycznie wyznaczalnej (wersja 1.1.1.C):
a) człon 1 obciążony siłami zewnętrznymi, b) wielobok sił

a więc

$$P_{y1} = \frac{P_1 \cdot h_1 - M_1}{h_y}.$$

Siłę oddziaływania P_{x1} znajdziemy na podstawie np. warunku, że suma wszystkich sił zewnętrznych działających na człon 1 w równowadze równa się zero, czyli

$$\bar{P}_{x1} + \bar{P}_1 + \bar{P}_{y1} = 0.$$

Ostatnie równanie można rozpisać w postaci dwóch równań analitycznych lub rozwiązać graficznie (rys. 154b).

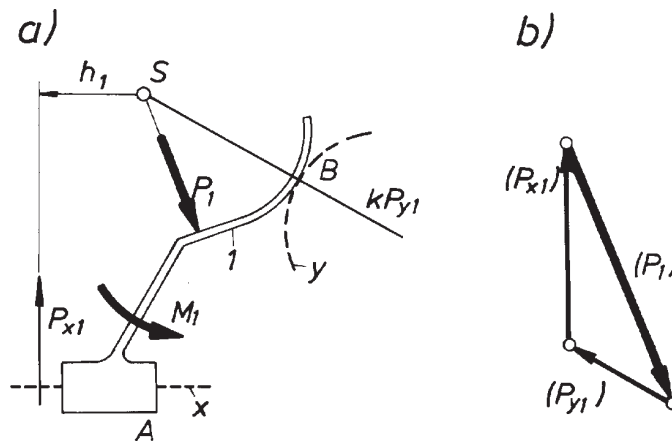
Wersja 1.1.1 postać B

W ogólnym przypadku, gdy człon (1), stanowiący grupę tej wersji, jest obciążony wypadkową siłą P_1 i wypadkowym momentem M_1 (rys. 155), siły oddziaływania P_{x1} w parze postępowej A i P_{y1} w parze wyższej B można określić np. na podstawie następujących równań:

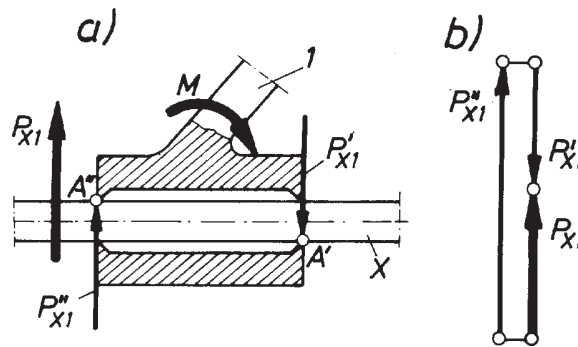
$$\bar{P}_{y1} + \bar{P}_1 + \bar{P}_{x1} = 0.$$

$$-P_{x1} \cdot h_1 + M_1 = 0.$$

Pierwsze z równań, przy znanych kierunkach szukanych sił P_{x1} i P_{y1} , można rozwiązać graficznie (rys. 155b), z drugiego zaś, wyrażającego sumę momentów sił zewnętrznych względem specjalnie dobranej punktu S , można obliczyć h_1 . Należy zwrócić uwagę, że linia działania siły P_{x1} może przebiegać poza miejscem styku wchodzących w połączenie członów. Jest to możliwe dlatego, ponieważ P_{x1} jest wypadkową dwóch sił działających w rzeczywistych lub umownych punktach A' i A'' (rys. 156).



Rys. 155. Rozwiązanie grupy statycznie wyznaczalnej (wersja 1.1.1 B):
a) człon (1) z obciążeniami zewnętrznymi, b) wielobok sił



Rys. 156. Wypadkowa sił oddziaływania w parze postępowej: a) para postępowowa z członem (1) obciążonym momentem M , b) wielobok sił

Wersja 2.3.0 postać A

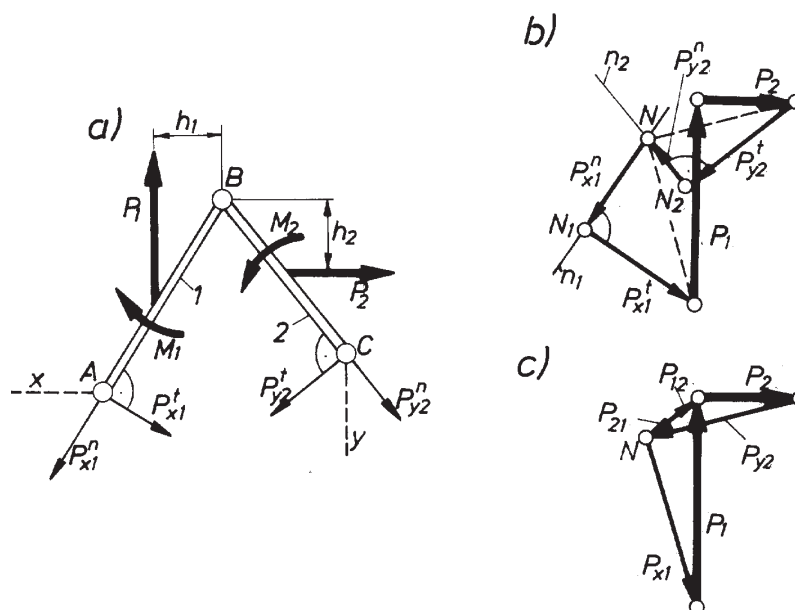
Wydzielając z badanego mechanizmu grupę tego typu (rys. 157a) zastąpimy, jak w poprzednich przypadkach, więzy nakładane przez człony x i y siłami oddziaływania P_{x1} i P_{y2} . Te nie znane siły rozłożymy na dwie ich składowe: normalne (wzdłuż osi członów) i styczne (prostopadłe do pierwszych).

Tak dobrane kierunki składowych pozwalają określić składowe styczne P_{x1}^t i P_{x2}^t . wystarczy w tym celu ułożyć dla każdego członu oddzielnie równanie momentów sił względem wspólnego przegubu B . Mamy wtedy dla członu (1)

$$-P_{x1}^t \cdot AB + P_1 \cdot h_1 + M_1 = 0,$$

a więc

$$-P_{x1}^t = \frac{P_1 \cdot h_1 + M_1}{AB},$$



Rys. 157. Rozwiązania dwuczłonowej grupy statycznie wyznaczalnej z parametrami obrotowymi (wersja 2.3.0.A): a) dwuczłon ABC z obciążeniem zewnętrznym, b i c) wieloboki sił

dla członu (2)

$$P_{y2}^t \cdot BC + P_2 \cdot h_2 + M_2 = 0,$$

a więc

$$P_{y2}^t = \frac{P_2 \cdot h_2 + M_2}{BC}.$$

W równaniach momentów nie wystąpiły siły składowe P_{x1}^n i P_{y2}^n , gdyż ich ramiona działania są równe zero. Składowe te można określić, rozpatrując z kolei równowagę sił całej grupy

$$\underline{\underline{\bar{P}_{x1}^n}} + \underline{\underline{\bar{P}_{x1}^t}} + \underline{\underline{\bar{P}_1}} + \underline{\underline{\bar{P}_2}} + \underline{\underline{\bar{P}_{y2}^t}} + \underline{\underline{\bar{P}_{y2}^n}} = 0.$$

Równanie to, w którym występują tylko dwie niewiadome P_{x1}^n , P_{y2}^n i to znane co do kierunku, można rozwiązać graficznie (rys. 157b). W tym celu prowadzimy znany kierunek $n_1 // AB$ i z dowolnego punktu N_1 rozpoczynamy sumowanie kolejnych sił \bar{P}_{x1}^t , \bar{P}_1 , \bar{P}_2 i \bar{P}_{y2}^t . Z końca N_2 ostatniego wektora poprowadzimy kierunek $n_2 // CB$ przetnie się z n_1 w punkcie N , wyznaczając szukane $P_{y2}^n = N_2 N$ i $P_{x1}^n = N_1 N$. W ten sposób określone $\bar{P}_{x1} = \bar{P}_{x1}^n + \bar{P}_{x1}^t$ i $\bar{P}_{y2} = \bar{P}_{y2}^n + \bar{P}_{y2}^t$, tworzą wraz z siłami \bar{P}_1 i \bar{P}_2 wielobok sił wyznaczający również $\bar{P}_{12} = \bar{P}_{21}$ (rys. 157c). Jest bowiem

$$\bar{P}_{x1} + \bar{P}_1 + \bar{P}_{21} = 0 \quad \text{i} \quad \bar{P}_2 + \bar{P}_{y2} + \bar{P}_{12} = 0$$

Wersja 2.3.0 postać B

Tak jak w poprzednim przypadku i tu przy obciążeniu dwuczłonu ABC jak na rys. 158a, należy określić P_{x1} , P_{y2} i P_{12} . Jak już wiadomo, kierunek wypadkowej P_{x1} siły oddziaływania w parze postępowej jest znany. Siłę oddziaływania P_{y2} rozłożymy na normalną P_{y2}^n wzdłuż prostej CB i styczną P_{y2}^t do niej prostopadłą. Korzystając z równania momentów względem punktu B obliczymy składową P_{y2}^t . Będzie

$$P_{y2}^t \cdot CB - M_2 - P_2 \cdot h_2 = 0,$$

czyli

$$P_{y2}^t = \frac{P_2 \cdot h_2 + M_2}{CB}.$$

Z warunku równowagi sił

$$\underline{\underline{\bar{P}_{y2}^n}} + \underline{\underline{\bar{P}_{y2}^t}} + \underline{\underline{\bar{P}_2}} + \underline{\underline{\bar{P}_1}} + \underline{\underline{\bar{P}_{x1}}} = 0$$

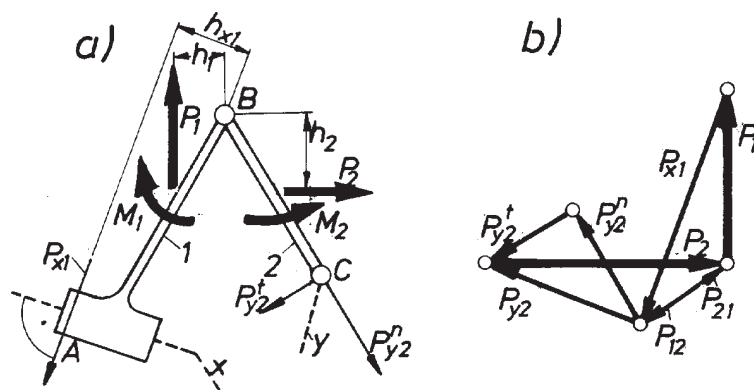
można określić graficznie siły P_{y2}^n i P_{x1} (rys. 158b).

Ramię h_{x1} siły P_{x1} można znaleźć z równania momentów sił przyłożonych do członu (1) względem np. punktu B

$$P_{x1} \cdot h_{x1} - P_1 \cdot h_1 - M_1 = 0,$$

skąd

$$h_{x1} = \frac{P_1 \cdot h_1 + M_1}{P_{x1}}.$$



Rys. 158. Rozwiązanie dwuczłonowej grupy statycznie wyznaczalnej (wersja 2.3.0.C):
a) dwuczłon ABC z obciążeniem zewnętrznym, b) wielobok sił

Tabela 9

Wersja 2.3.0	Schemat grupy	Plan sił	Równania
A			$P'_{x1} = \frac{P_1 \cdot h_1}{l_{AB}}$ $P'_{y2} = \frac{P_2 \cdot h_2}{l_{BC}}$ $\bar{P}'_{x1} + \bar{P}'_{x1} + \bar{P}'_1 + \bar{P}'_2 + \bar{P}'_{y2} + \bar{P}'_{y2} = 0$ $\bar{P}'_1 + \bar{P}'_{x1} + \bar{P}'_{y1} = 0$
B			$P'_{x1} = \frac{P_1 \cdot h_1}{l_{AB}}$ $\bar{P}'_{x1} + \bar{P}'_{x1} + \bar{P}'_1 + \bar{P}'_2 + \bar{P}'_{y2} = 0$ $h'_{y2} = -\frac{P_2 \cdot h_2}{P_{y2}}$ $\bar{P}'_2 + \bar{P}'_{x2} + \bar{P}'_{y2} = 0$
C			$P'_{y2} = \frac{P_2 \cdot h_2 - P_1 \cdot h_1}{l_{AC}}$ $\bar{P}'_{y2} + \bar{P}'_{y2} + \bar{P}'_2 + \bar{P}'_{x2} = 0$ $h'_{y2} = \frac{P_2 \cdot h_2}{P_{y2}}$
D			$\bar{P}'_{x1} + \bar{P}'_1 + \bar{P}'_2 + \bar{P}'_{y2} = 0$ $h_{x1} = \frac{P_1 \cdot h_1}{P_{x1}}$ $h_{y2} = \frac{P_2 \cdot h_2}{P_{y2}}$ $\bar{P}'_1 + \bar{P}'_{x1} + \bar{P}'_{y1} = 0$
E			$\bar{P}'_1 + \bar{P}'_{y1} + \bar{P}'_{x1} = 0$ $\bar{P}'_2 + \bar{P}'_{y2} + \bar{P}'_{x2} = 0$ $h_{y2} = \frac{P_2 \cdot h_2}{P_{y2}}$ $h_{x1} = \frac{P_1 \cdot h_1 + P_2 \cdot h_2}{P_{x1}}$

Pozostałą siłę $P_{12} = -P_{21}$ oddziaływania członów w punkcie B można wyznaczyć z warunku równowagi np. członu (1)

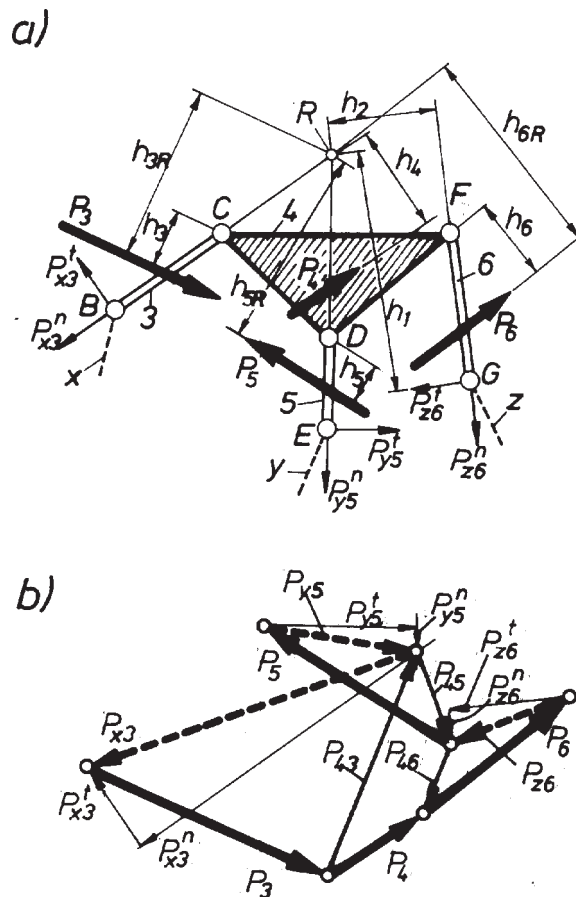
$$\underline{\underline{\bar{P}_1}} + \underline{\underline{\bar{P}_{x1}}} + \underline{\underline{\bar{P}_{21}}} = 0.$$

Wersja 2.3.0, postacie A, B, C, D i E (człony obciążone tylko siłami)

Jeżeli momenty i siły działające na człony zredukować do sił, tok postępowania przy określaniu sił oddziaływania w parach kinematycznych grup statycznie wyznaczalnych wersji 2.3.0 nie zmieni się. Przy takim założeniu rozwiązanie tych grup zestawiono w tabeli 9. Wersja 2.3.0.F nie występuje w mechanizmach 3 rodziny i została tutaj pominięta.

Wersja 4.6.0 postać A

W płaskich mechanizmach dźwigniowych (z parami niższymi) dość często można spotkać właśnie tę grupę wersji 4.6.0, postaci A – z parami obrotowymi.



Rys. 159. Rozwiązanie grupy statycznie wyznaczalnej (wersja 4.6.0): a) grupa z obciążeniami zewnętrznymi, b) wielobok sił

Wydzielając grupę tego typu (rys. 159a) z badanego mechanizmu zastąpimy, jak w poprzednich przypadkach, więzy nakładane przez człony x, y, z , siłami oddziaływania P_{x3}, P_{y5} i P_{z6} . Te nie znane siły rozłożymy na dwie składowe normalne (wzdłuż osi członów) i styczne (prostopadłe do pierwszych).

Tak dobrane kierunki składowych pozwalają określić składowe styczne $\bar{P}_{x3}^t, \bar{P}_{y5}^t, \bar{P}_{z6}^t$. Wystarczy w tym celu ułożyć dla każdego członu oddzielnie równanie momentów względem przegubów C, D i F. Mamy wtedy dla członu (3)

$$P_{x3}^t \cdot BC - P_3 \cdot h_3 = 0,$$

a więc

$$P_{x3}^t = P_3 \cdot \frac{h_3}{BC},$$

dla członu (5)

$$P_{y5}^t \cdot ED - P_5 \cdot h_5 = 0,$$

a więc

$$P_{y5}^t = P_5 \cdot \frac{h_5}{ED},$$

dla członu (6)

$$P_{z6}^t \cdot GF - P_6 \cdot h_6 = 0,$$

a więc

$$P_{z6}^t = P_6 \cdot \frac{h_6}{GF}.$$

Jedną z trzech sił normalnych wyznaczymy, korzystając powtórnie z sumy momentów. W tym celu należy poszukać takiego punktu, dla którego ramiona dwóch sił normalnych będą równe zero. Takim punktem jest jeden z trzech punktów Assura dla grupy III klasy, np. punkt R . Dla równania sumy momentów względem punktu R otrzymamy

$$P_{x3}^t \cdot BR - P_3 \cdot h_{3R} - P_4 \cdot h_4 + P_5 \cdot h_{5R} - P_{y5}^t \cdot ER - P_6 \cdot h_{6R} + P_{z6}^t \cdot h_1 + P_{z6}^n \cdot h_2 = 0,$$

a więc

$$P_{z6}^n = \frac{-P_{x3}^t \cdot BR + P_3 \cdot h_{3R} + P_4 \cdot h_4 - P_5 \cdot h_{5R}}{h_2} + \frac{-P_{y5}^t \cdot ER + P_6 \cdot h_{6R} - P_{z6}^t \cdot h_1}{h_2}.$$

Składowe \bar{P}_{x3}^n i \bar{P}_{y5}^n można określić rozpatrując równowagę sił całej grupy, a więc

$$\bar{P}_{x3}^n + \bar{P}_{x3}^t + \bar{P}_3 + \bar{P}_4 + \bar{P}_6 + \bar{P}_{z6}^t + \bar{P}_{z6}^n + \bar{P}_5 + \bar{P}_{y5}^t + \bar{P}_{y5}^n = 0.$$

Równanie to, w którym występują tylko dwie niewiadome P_{x3}^n i P_{y5}^n , i to znane co do kierunku, można rozwiązać graficznie (rys. 159b). Pozostałe siły oddziaływania można obliczyć z równowagi członów:

$$\text{dla członu (3)} \quad \underline{\underline{\bar{P}_{x3}}} + \underline{\underline{\bar{P}_3}} + \underline{\underline{\bar{P}_{43}}} = 0,$$

$$\text{dla członu (5)} \quad \underline{\underline{\bar{P}_{y5}}} + \underline{\underline{\bar{P}_5}} + \underline{\underline{\bar{P}_{45}}} = 0,$$

$$\text{dla członu (6)} \quad \underline{\underline{\bar{P}_{z6}}} + \underline{\underline{\bar{P}_6}} + \underline{\underline{\bar{P}_{46}}} = 0.$$

Oczywiście, dla członu (4) musi być

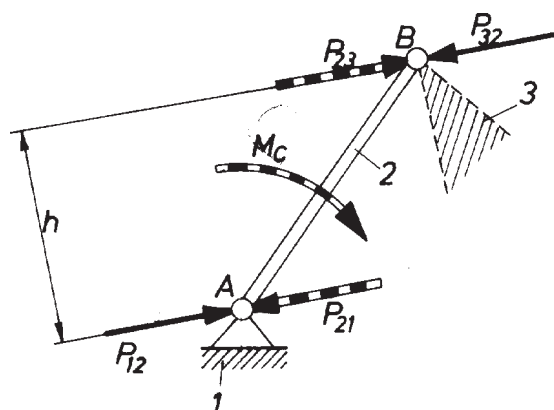
$$\underline{\underline{\bar{P}_{34}}} + \underline{\underline{\bar{P}_4}} + \underline{\underline{\bar{P}_{54}}} + \underline{\underline{\bar{P}_{64}}} = 0.$$

Poprzestając na omówieniu tych przypadków wyrażamy przekonanie, że przykłady te powinny ułatwić stworzenie stosownej metody rozwiązywania kolejnych wersji i postaci grup statycznie wyznaczalnych.

10.2. Równowaga członu czynnego

Jak to wykazano w podrozdziale 10.1, grupy statycznie wyznaczalne charakteryzują się tym, że przyłączone parami wolnymi do podstawy tworzą układ sztywny. Ruchliwość ich $W = 0$, a zatem wydzielone z mechanizmu nie zmieniają ruchliwości pozostałej części układu mechanicznego. Wydzielając takie grupy z układu aż do skutku, otrzymamy pozostałość w postaci jednego członu lub grupy członów napędzających. Najczęściej członem napędzającym jest człon osadzony obrotowo w podstawie z przyłożonym napędem w postaci momentu czynnego M_c (rzadziej siły P_c) lub wchodzący z podstawą w parę postępową z napędem w postaci siły czynnej P_c . Poza tym człon napędzający może być obciążony jak każdy inny siłami zewnętrznymi, bezwładności, ciężkości i siłami oddziaływania innych członów. Najczęściej występujące rodzaje członów czynnych omówiono w kolejności.

A. Człon obrotowo osadzony w podstawie z napędem przyłożonym w postaci momentu M_c (rys. 160). Oznaczmy tradycyjnie podstawę przez (1), człon czynny przez (2), przez (3) natomiast człon mechanizmu, który tworzy połączenie ruchowe z członem czynnym. Człon czynny (2) obciążony jest znaną siłą P_{32} w punkcie B , nie znaną siłą P_{12} w punkcie A oraz nie znanym momentem M_c . Dla określenia tego momentu dogodnie jest M_c zastąpić parą sił. Jeżeli człon (2) jest w równowadze, to jedna z sił tej pary musi w punkcie B równoważyć zewnętrzną siłę P_{32} , czyli $\bar{P}_{32} = -\bar{P}_{32}$. W ten sposób określona jest również i druga siła pary w punkcie A ($\bar{P}_{21} = -\bar{P}_{32}$) oraz ramię h pary.



Rys. 160. Rozkład sił na członie czynnym obrotowym obciążonym momentem M_c

Oczywiście

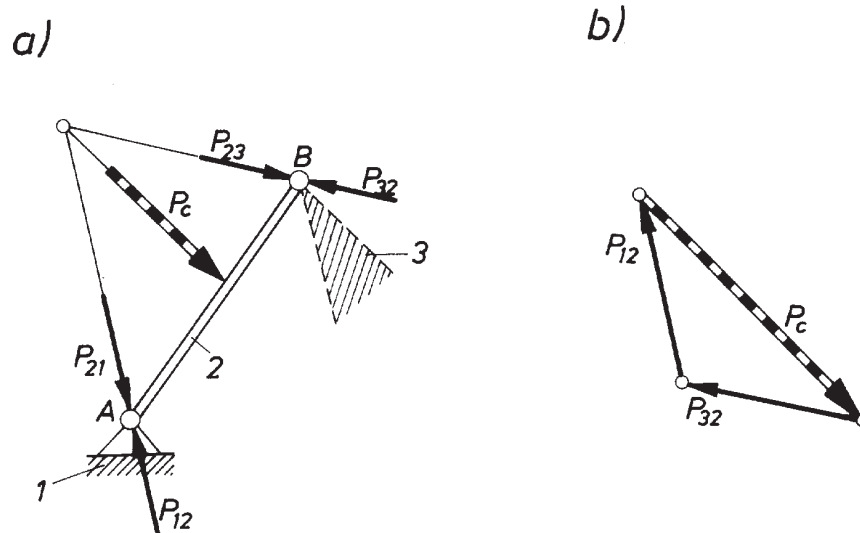
$$M_c = P_{23} \cdot h$$

oraz

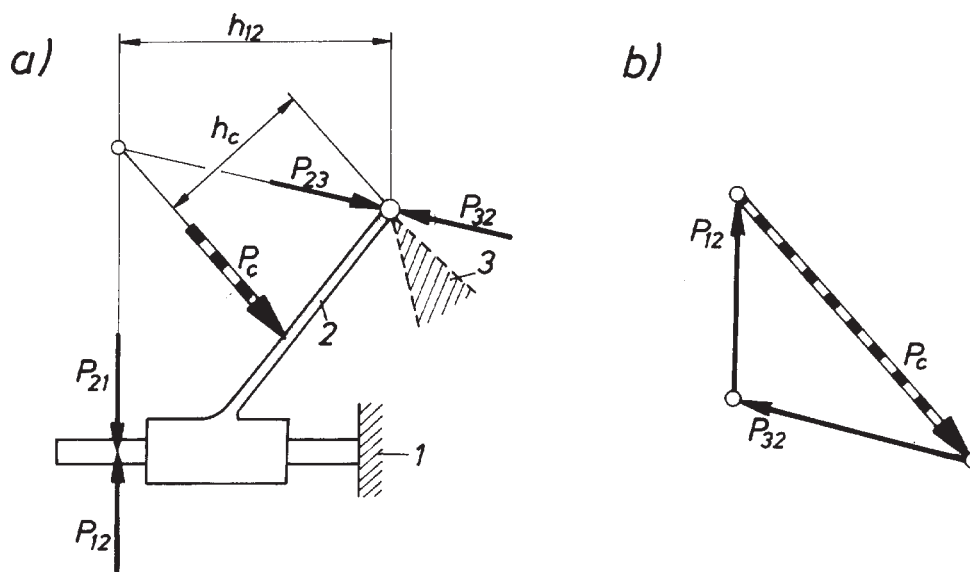
$$\bar{P}_{12} = -\bar{P}_{21}.$$

Siła P_{12} to siła oddziaływania podstawy na człon czynny w punkcie A .

B. Człon obrotowo osadzony w podstawie z napędem przyłożonym w postaci siły P_c (rys. 161). Przy znanej sile zewnętrznej P_{32} należy określić r_c oraz siły oddziaływania w punkcie A . Siły te można określić zakładając równowagę członu (2). Otrzymujemy



Rys. 161. Rozkład sił na członie czynnym obrotowym obciążonym siłą P_c : a) człon czynny, b) plan sił



Rys. 162. Rozkład sił na członie czynnym w ruchu postępowym a) człón czynny, b) plan sił

$$\bar{P}_{12} + \bar{P}_c + \bar{P}_{32} = 0.$$

Korzystając ze znajomości kierunków pozostałych sił (linie tych trzech sił w równowadze przecinają się w jednym punkcie) znajdziemy ich moduły z wieloboku sił (rys. 161b).

C. Człón w ruchu postępowym względem podstawy z przyłożonym napędem w postaci siły P_c (rys. 162). Tu również nie znane dotychczas siły P_c i P_{12} znajdziemy z równowagi człónu (2) (rys. 162b)

$$\bar{P}_{32} + \bar{P}_c + \bar{P}_{12} = 0$$

ramię h_{12} działania siły P_{12} natomiast z równania momentów

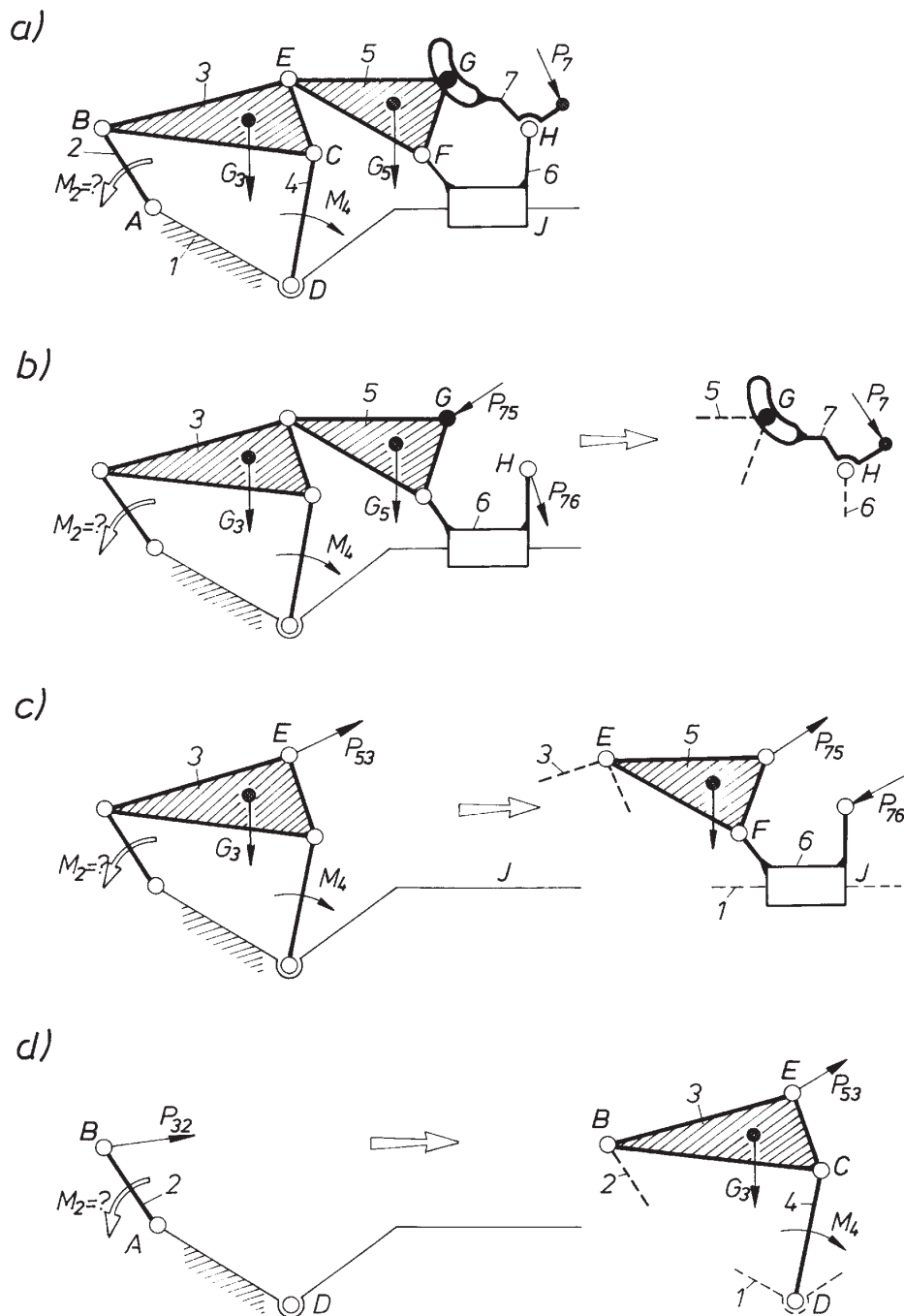
$$P_{12} \cdot h_{12} - P_c \cdot h_c = 0$$

lub graficznie korzystając z tego, że linie trzech sił w równowadze przecinają się w jednym punkcie.

Potrąfimy więc już analizować wydzielone z mechanizmu grupy statycznie wyznaczalne oraz pozostały w wyniku podziału człón czynny przy podstawie. Zalecając taki tok postępowania prześledźmy go na prostym przykładzie (rys. 163).

10.3. Wyznaczanie sił i momentów równoważących metodą energetyczną

Stosując poznaną metodę kinetostatyki można, przez wyznaczenie sił oddziaływania we wszystkich parach kinematycznych, określić również siły i momenty równoważące. W celu określenia tylko sił i momentów równoważących, wielkości niezbędne



Rys. 163. Podział mechanizmu na grupy statycznie wyznaczalne: a) mechanizm obciążony siłami, b) wydzielenie członu GH , c) wydzielenie grupy dwuczłonowej EFJ , d) wydzielenie grupy dwuczłonowej BCD

nych np. do ustalenia mocy napędu, można skutecznie posłużyć się prostą metodą opartą na **zasadzie prac przygotowanych**.

W myśl tej zasady, suma prac przygotowanych sił i momentów działających na człony układu mechanicznego w równowadze równa się zero. Można to zapisać następująco

$$\sum (P_i \cdot \Delta s_i \cdot \cos \alpha_i + M_i \cdot \Delta \varphi_i) = 0, \quad (107)$$

gdzie: P_i, M_i – siły i momenty sił,

$\Delta s_i, \Delta \varphi_i$ – przesunięcia przygotowane wyrażone drogą liniową S punktów przyłożenia sił lub drogą kątową φ obciążonych momentami członów.

Po podzieleniu wyrażenia (107) przez Δt i przejściu do granicy otrzymamy

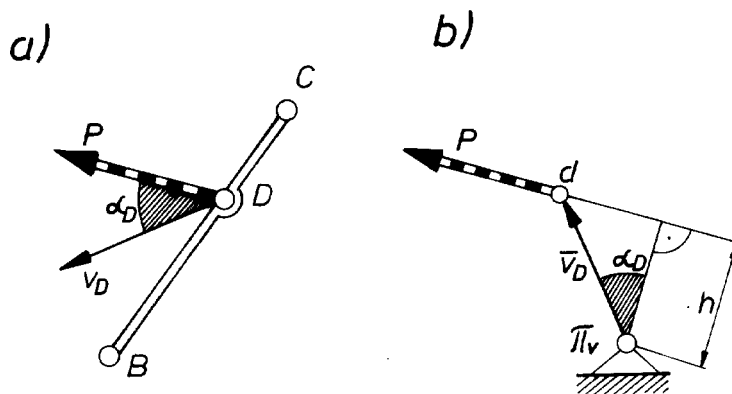
$$\sum (P_i \cdot v_{s_i} \cdot \cos \alpha_i + M_i \cdot \omega_i) = 0, \quad (108)$$

gdzie v_{s_i}, ω_i – prędkość punktu przyłożenia siły, prędkość kątowa członu obciążonego momentem sił.

Z zależności (108) można określić jedną z sił, np. nie znaną siłę równoważącą lub jeden z momentów, przy czym można tego dokonać analitycznie lub graficznie. Pozostając przy drugim sposobie, rozpatrzmy dowolny człon BC (rys. 164a) obciążony siłą P w punkcie D o znanej prędkości v_D . Obierzmy dowolny punkt jako biegun π_v (rys. 164b), odłóżmy z niego obróconą o $\pi/2$ prędkość v_D i do końca tego wektora przenieśmy rozwijaną przez siłę P ($N_D = P \cdot v_D \cdot \cos \alpha_D$) można wyrazić iloczynem $P \cdot h$, w którym $h = v_D \cos \alpha_D$ jest ramieniem siły względem bieguna π_v . Chwilową moc siły P można więc przedstawić w postaci pewnego „momentu”

$$P \cdot v_D \cos \alpha_D = P \cdot h.$$

To samo można powiedzieć o mocach działających na wszystkie inne człony rozpatrywanego układu mechanicznego, a zatem



Rys. 164. Ilustracja zasady dźwigni Żukowskiego: a) człon BC obciążony siłą P , b) obrócony plan prędkości obciążony siłą P

$$\sum(P_i \cdot v_{ki} \cdot \cos \alpha_i) = \sum(P_i \cdot h_i). \quad (109)$$

„Moment” obciążający człon można, jak pokazano na rys. 165a, zastąpić parą sił i traktować je jako siły zewnętrzne. Siły takie przyłożone w odpowiednich punktach na planie prędkości dają moment zastępczy $M^* = F \cdot bc$, ale ponieważ

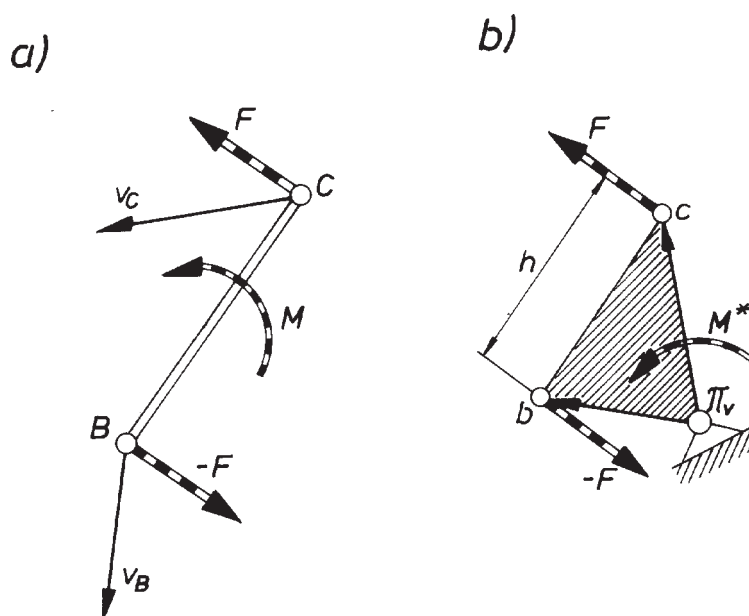
$$F = \frac{M}{BC}$$

więc

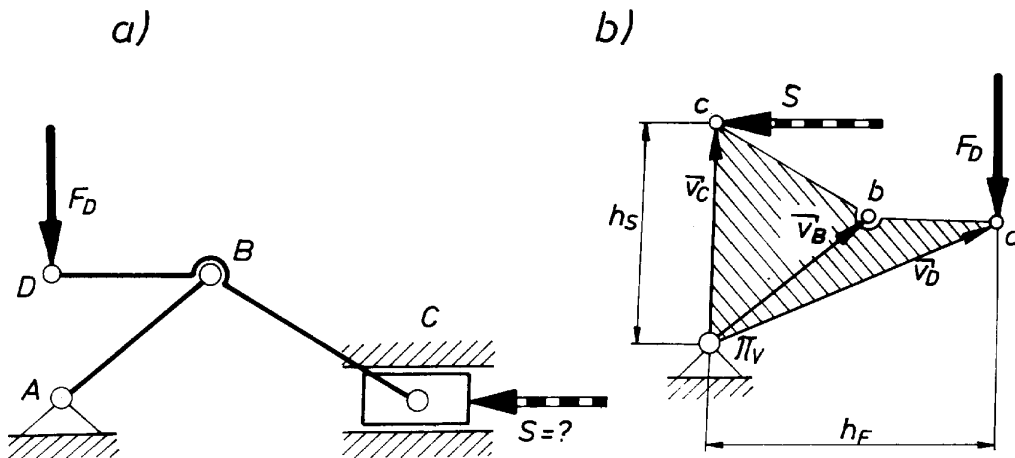
$$M^* = \pm M \cdot \frac{bc}{BC}. \quad (110)$$

Można więc obciążenie członu momentem M zastąpić odpowiednio dobraną parą sił lub „momentem” zastępczym M_x . Znak (+) jest aktualny, gdy zwroty wektorów bc i BC są zgodne, znak (-), gdy zwroty są przeciwne.

Spostrzeżenia te wykorzystujemy do określenia w prosty sposób sił i momentów równoważących w układach mechanicznych. W tym celu należy badanemu mechanizmowi przyporządkować odpowiedni obrócony w dowolnym kierunku i dowolnej podziałce wykreślony plan prędkości i w odpowiednich punktach obciążyć go siłami zewnętrznymi. Warunek równowagi układu mechanicznego obciążonego układem sił sprawdza się, jak to wynika z równania (109), do równowagi momentów tych sił liczonych względem bieguna π_v , czyli równowagi obciążonego planu prędkości trak-



Rys. 165. Ilustracja zasady dźwigni Żukowskiego: a) człon obciążony momentem M , b) obrócony plan prędkości obciążony momentem M



Rys. 166. Określanie siły równoważącej S metodą prac przygotowanych: a) schemat kinematyczny mechanizmu, b) dźwignia Żukowskiego

owanego jako dźwignia sztywna obrotowa osadzona w biegunie. Dźwignia ta nosi nazwę **dźwigni Żukowskiego**. Sposób korzystania z niej zilustrowano na następujących przykładach:

1. Dany jest mechanizm ABC (rys. 166a) obciążony w punkcie D łącznika znaną siłą F_D . Należy określić siłę S , która przyłożona do tłoka utrzyma mechanizm w równowadze.

Zgodnie z opisaną metodą wykreślono, po założeniu dowolnej prędkości dowolnego punktu (np. B) w dowolnym kierunku, obrócony plan prędkości (rys. 166b). W odpowiednich punktach (u nas w d i c) przyłożono znaną siłę F_D i szukaną siłę S . Równowaga dźwigni zachodzi, gdy:

$$-S \cdot h_S + F_D \cdot h_F = 0,$$

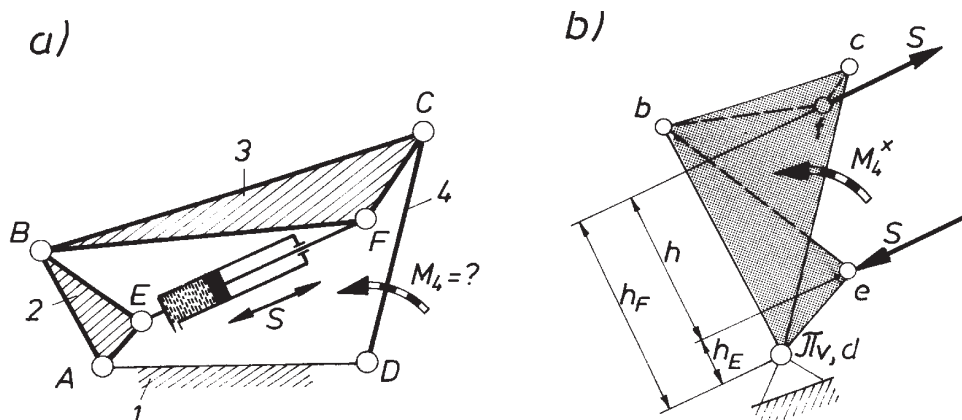
a zatem szukaną siłę równoważącą można obliczyć z zależności

$$S = F_D \cdot \frac{h_F}{h_S}.$$

Wartość stosunku h_F/h_S można określić analitycznie lub, na podstawie rysunku 166b, graficznie.

2. W mechanizmie $ABCD$ (rys. 167a) dana siła S siłownika równoważy moment bierny M_4 . Należy określić ten moment. Sporządzamy obrócony plan prędkości (rys. 167b) i traktując go jako dźwignie sztywną obrotowo osadzoną w biegunie π_v , obciążamy siłami S w punktach e i f oraz „momentem” zastępczym M_4^* . Z równowagi takiej dźwigni wynika, że

$$M_4^* + S \cdot h_E - S \cdot h_F = 0,$$



Rys. 167. Wyznaczanie momentu równoważącego M_4 metodą energetyczną:
 a) schemat kinematyczny mechanizmu, b) dźwignia Żukowskiego

czyli

$$M_4^* = S(h_F - h_E) = S \cdot h.$$

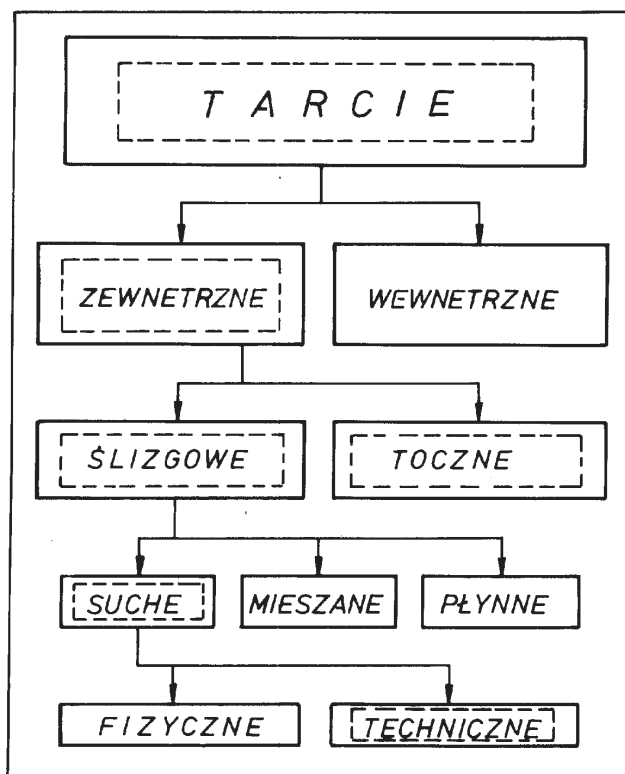
Rzeczywisty moment M_4 obliczymy z zależności (110). Otrzymamy

$$M_4 = M_4^* \frac{DC}{dc},$$

11. Tarcie w parach kinematycznych

Wyznaczając siły oddziaływania w parach kinematycznych zakładano, jak dotychczas, idealne warunki współpracy pólpar członów układów mechanicznych, a więc w obliczeniach nie uwzględniono oporów w postaci tzw. sił tarcia, występujących w ruchu względnym członów. W rzeczywistości założenie takie jest często niedopuszczalne, gdyż różnice wynikające z faktu istnienia sił tarcia mogą być znaczne. Mogą one na ogół dotyczyć zarówno modułów sił, jak i linii ich działania. Innymi słowy, tarcie ma wpływ na rozkłady sił oddziaływania, na wartości sił i momentów równoważących, na sprawność i zużycie. Tarcie w technice jest na ogół zjawiskiem niepożądanym i dąży się do jego zmniejszania. Są jednak przypadki, gdzie siły tarcia wyko-

Tabela 10



rzystuje się z pożytkiem (np. hamulce, sprzęgła i przekładnie cierne). Podjęty temat tarcia rozpatrzmy w aspekcie jego wpływu na siły w parach kinematycznych. Rozpoczynając od krótkiego przypomnienia wiadomości elementarnych, w tabeli 10 zestawiono podstawowe pojęcia i podziały. W tabeli tej zaakcentowano, za pomocą dodatkowych ramek (linia przerywana) przedmiot i kierunek naszych zainteresowań. Pozostając dalej przy tarcii suchym technicznym, zwróćmy uwagę na złożoność zjawiska. Objawia się ono oporem notowanym przy ruchu względem dwóch ciał pozostających ze sobą w kontakcie (rys. 168). Opór ten jest pochodzenia fizykomechanicznego i zależy od wielu czynników. Aby nawiązać do podstawowych pojęć z tego zakresu, rozpatrzmy punktowy styk dwóch ciał (1) i (2) (rys. 169a). Niech będzie człon (2) dociskany do członu (1) z siłą Q i poddany działaniu siły F . W wyniku takiego obciążenia w punkcie styku pojawiają się dwie siły tarcia T_{12} i T_{21} , przy czym

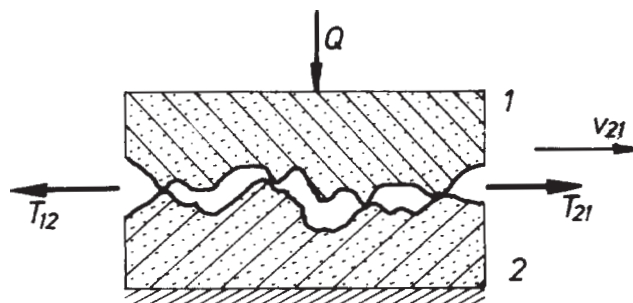
$$\bar{T}_{12} = -\bar{T}_{21}.$$

Ogólnie $0 < T_{ij} < T_{ij}^*$, przy czym, zgodnie z przyjętym i wykorzystywanym w technice prawem Coulomba-Amontosa,

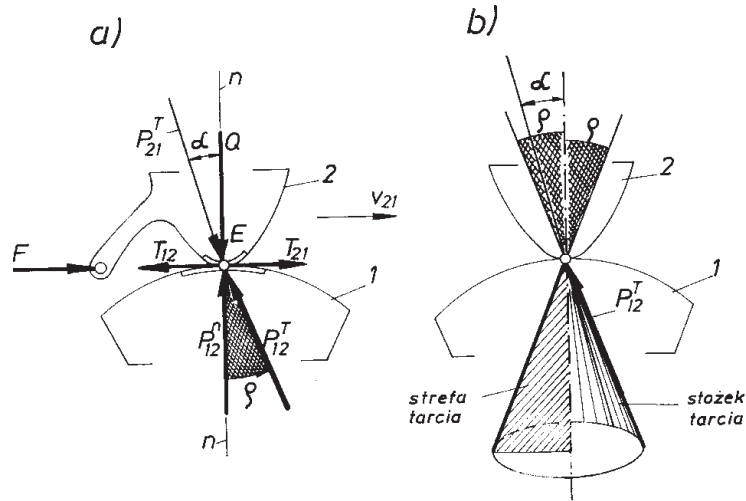
$$T_{ij} = \mu \cdot Q. \quad (111)$$

Wartość **współczynnika tarcia** μ zależy od rodzaju stykających się ciał, stanu ich powierzchni, temperatury, ale również, co się często pomija, od nacisków jednostkowych p , prędkości ruchu względnego v , czasu styku itd. Przykłady charakterów przebiegów niektórych zależności uzyskanych podczas badania wybranych par trących przedstawiono na rys. 170.

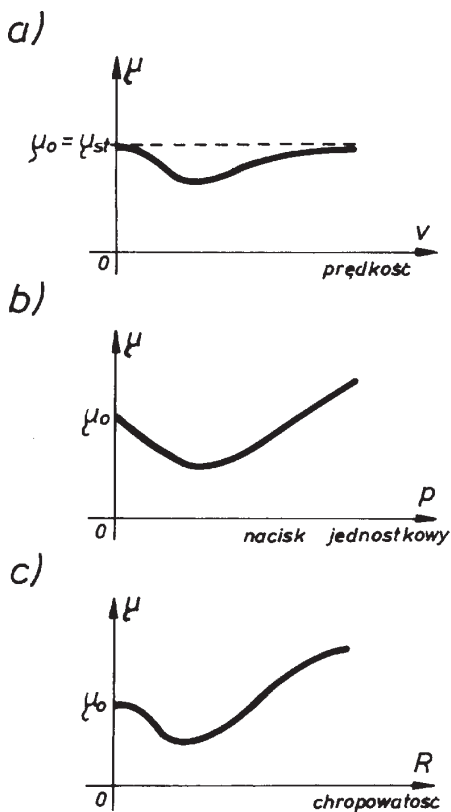
Wróćmy ponownie do rysunku 169. W wyniku pojawienia się podczas ruchu siły tarcia T_{12} , całkowita siła oddziaływania $\bar{P}_{12} = \bar{P}_{12}^n + \bar{T}_{12}$ tworzy z normalną $n-n$ w punkcie styku **kąt tarcia** ρ ($\text{tg } \rho = \mu$). Zakładając, że można rozpatrywać dowolny kierunek ruchu względnego v_{21} , w celu opisanego kierunku siły oddziaływania P_{12}^T oraz ruchu członu przy danym obciążeniu i współczynniku tarcia, stosuje się pojęcie tzw. **stożka tarcia** o kącie wierzchołkowym 2ρ (rys. 169b). Jeżeli linia działania sił zewnętrznych działających na człon (2) ($\bar{P} = \bar{Q} + \bar{F}$) będzie przebiegać przez wierzchołek i wewnątrz tego stożka ($\alpha < \rho$), to występuje tarcie nierozwinięte, charaktery-



Rys. 168. Ilustracja zjawiska siły tarcia



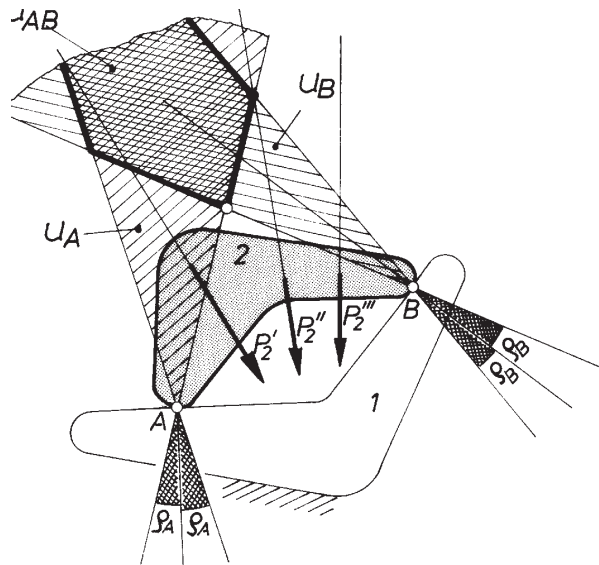
Rys. 169. Ilustracja pojęć z dziedziny tarcia: a) siła tarcia i kąt tarcia, b) strefa tarcia i stożek tarcia



Rys. 170. Przebiegi zmian współczynnika tarcia μ :
a) $\mu(v)$, b) $\mu(p)$, c) $\mu(R_a)$

zujące się brakiem ruchu względnego; gdy linia działania siły zewnętrznej P pokrywa się z jedną z tworzących pobocznicy stożka ($\alpha = \rho$), wówczas zachodzi równowaga (brak ruchu lub ruch jednostajny) i wreszcie, gdy linia ta przebiega poza stożkiem tarcia ($\alpha > \rho$), siła P wywołuje ruch przyspieszony. W obu ostatnich przypadkach mówi się o **tarciu rozwiniętym**. Mówi się również o **tarciu izotropowym**, gdy stożek tarcia ma podstawę kołową oraz o **tarciu anizotropowym**, gdy podstawa stożka tarcia nie jest kołowa. Ten ostatni przypadek zachodzi wtedy, gdy współczynnik tarcia μ zależy od kierunku ruchu. Odpowiednikiem stożka tarcia jest podczas ruchu płaskiego tzw. **strefa tarcia** pokrywająca się z osiowym przekrojem tego stożka.

Omówiony styk „punktowy” dwóch współpracujących członów występuje teoretycznie tylko w parach wyższych. W przypadku styku dwóch ciał w dwóch punktach, np. A i B (rys. 171), strefy U_A i U_B , nakładając się na siebie, tworzą tzw. **wspólną strefę tarcia** U_{AB} . Pojęcie to można



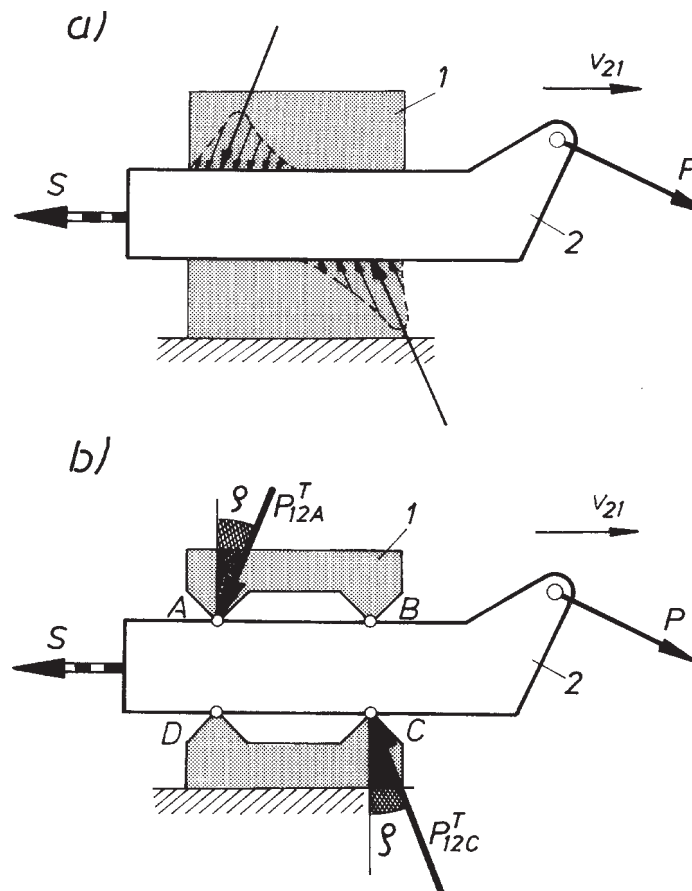
Rys. 171. Ilustracja wspólnej strefy tarcia U_{AB}

stosować do interpretacji skutków działania sił zewnętrznych. Na przykład podczas obciążenia członu (2) siłą wypadkową P_2 mogą zachodzić trzy przypadki:

- gdy linia działania siły P_2 przechodzi przez wspólną strefę tarcia (jak P_2'' na rys. 171), wtedy nie ma ruchu (samohamowność),
- gdy linia P_2 nie przecina U_{AB} (jak P_2''' na rys. 171), człon (2) pod jej działaniem jest w ruchu przyspieszonym,
- gdy linia P_2 jest styczna do U_{AB} , wtedy jest równowaga (spoczynek lub ruch jednostajny).

11.1. Tarcie w parach postępowych

W parach postępowych tworzące je człony mają na ogół styk powierzchniowy. Luzy i niesymetryczne obciążenie powodują, że styk ten koncentruje się w określonych rejonach – zwykła narożach (rys. 172a). Stan naprężeń w tych rejonach, zależy ogólnie od sposobu obciążenia, cech geometrycznych i materiałowych pary, jest trudny do ujęcia ilościowego. Z tego też powodu, rozpatrując w dalszym ciągu problemy sił tarcia, posługiwać się będziemy rozwiązaniami modelowymi (rys. 172b), gdzie w wyniku odpowiedniego ukształtowania prowadnicy lub suwaka są jednoznacznie określone miejsca styku. W miejscach tych (w czasie obciążenia siłą P jak na rysunku) pojawiają się już z założenia skupione siły oddziaływania P_{12A}^T i P_{12C}^T , podczas tarcia rozwiniętego odchyłone od normalnej o kąt tarcia ρ . Gdy znane są geometria pary, obciążenie (np. wypadkowa P) oraz wartości kątów tarcia ρ , wówczas można już bez trudu określić omawiane siły oddziaływania oraz efekty działania sił zewnętrznych, np. siłę S^T . W szczególnym przypadku punkty styku członów (1) i (2) mogą

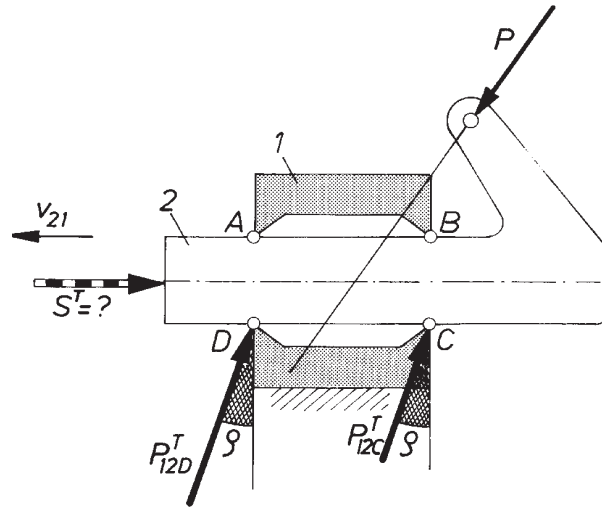


Rys. 172. Siły oddziaływania w parze postępowej przy uwzględnieniu tarcia:
a) w parze rzeczywistej, b) w parze modelowej

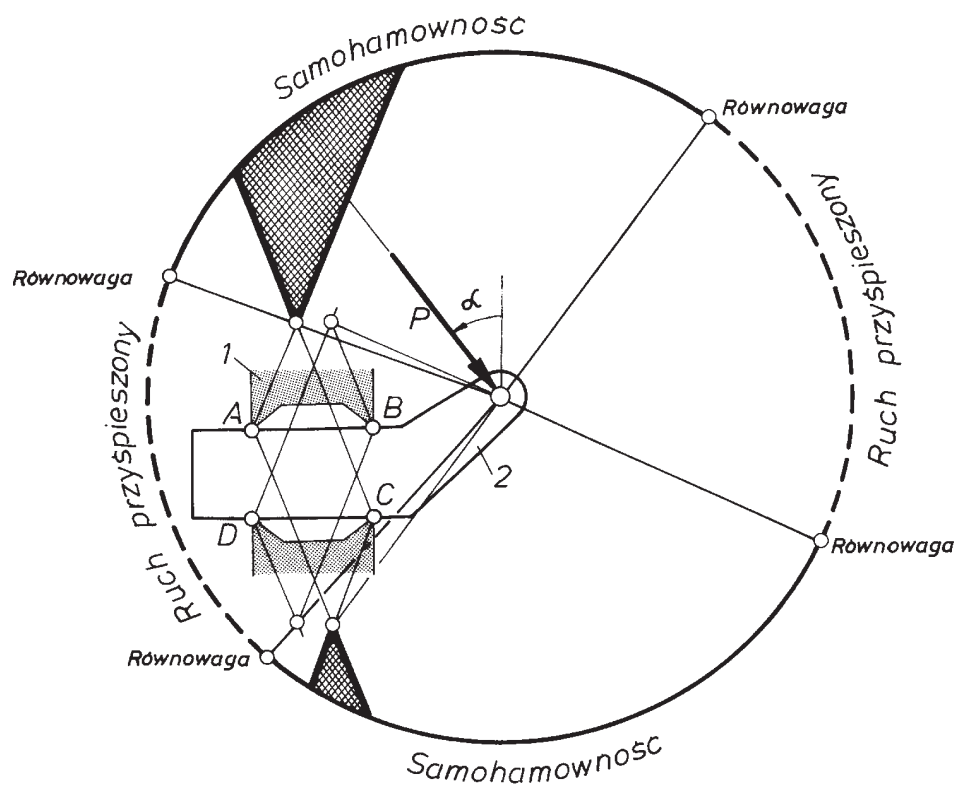
leżeć po jednej stronie pary (rys. 173). Wszystkie możliwe przypadki można prześledzić na rys. 174, przez zmianę kąta α określającego położenie wypadkowej P . Jak widać z rysunku, w zależności od wartości kąta α człon (2) obciążony tylko siłą P pozostaje w spoczynku (jak na rys. 174), w ruchu przyspieszonym lub równowadze. Kierując się takimi spostrzeżeniami można już interpretować sytuację obciążeń w dowolnym mechanizmie płaskim z parametrami postępowymi. Rozpatrzmy przykłady:

1. Na rysunku 175 przedstawiono układ dwukrzywkowy obciążony znana siłą bierną S oraz szukanym momentem czynnym M_c^T wymuszającym ruch członu (2). Należy określić wartość momentu M_c^T o raz siły oddziaływania w parach kinematycznych, uwzględniając tarcie w parach postępowych (ρ – dane).

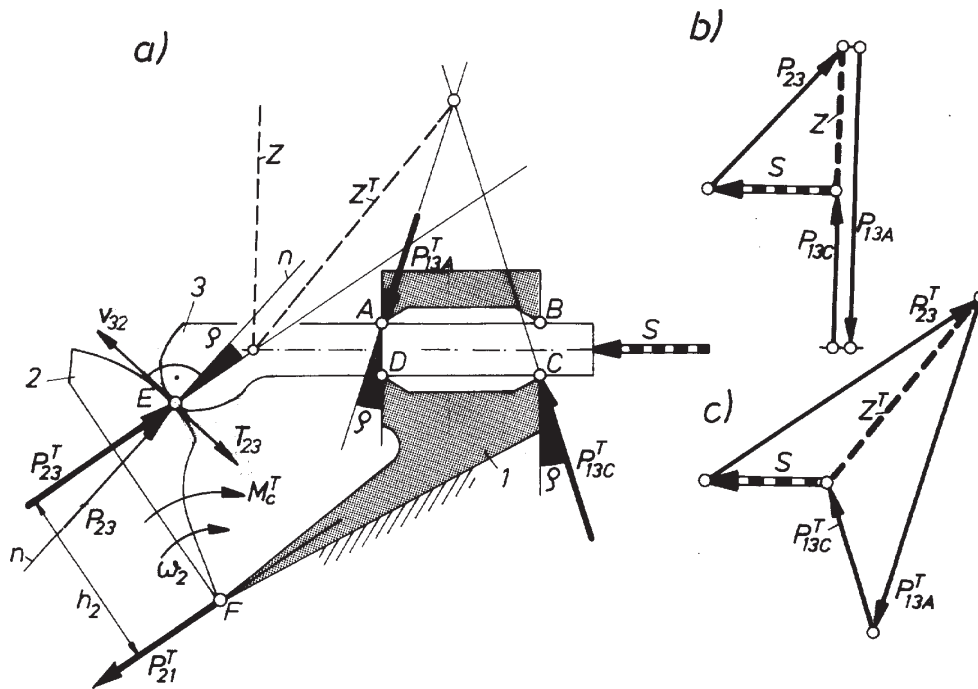
Dla ułatwienia rozwiążemy to zadanie na początek bez uwzględniania sił tarcia. Z równowagi członu (3) napiszemy (dla $\rho = 0$)



Rys. 173. Siły oddziaływania w modelowej parze postępowej z uwzględnieniem tarcia



Rys. 174. Ilustracja efektu działania siły P pod dowolnym kątem α



Rys. 175. Analiza siłowa mechanizmu z uwzględnieniem tarcia: a) schemat mechanizmu, b) plan sił bez uwzględnienia sił tarcia, c) plan sił z uwzględnieniem sił tarcia

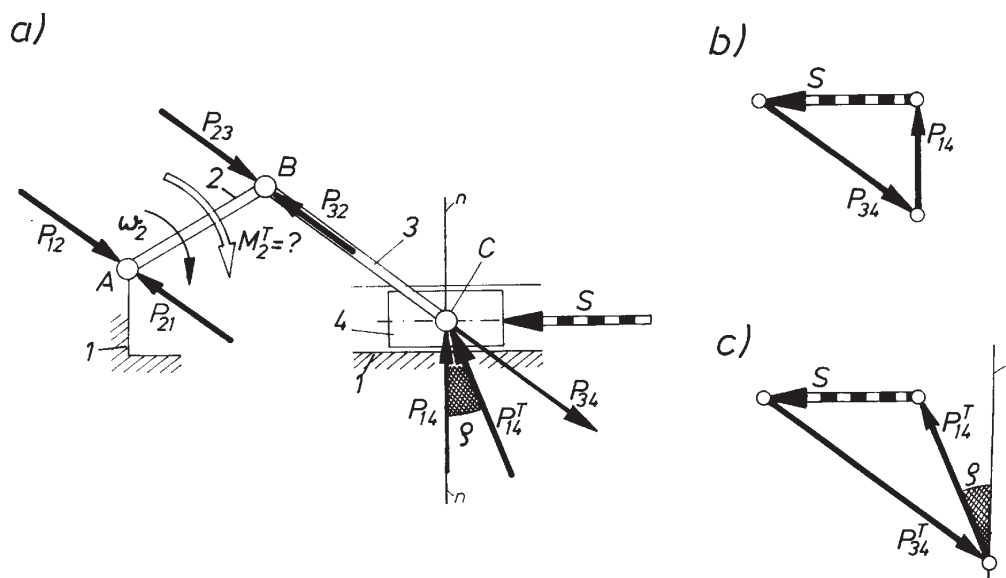
$$\underline{\underline{\bar{P}}}_{23} + \underline{\underline{\bar{P}}}_{13A} + \underline{\underline{\bar{P}}}_{13C} + \underline{\underline{\bar{S}}} = 0.$$

Przy znanej sile $\underline{\underline{\bar{S}}}$ oraz znanych kierunkach pozostałych sił (normalne do powierzchni styku) można znaleźć wszystkie trzy siły (rys. 175b). Należy w tym celu dodatkowo wykorzystać równanie momentów sił, np. względem punktu E.

Po uwzględnieniu tarcia postąpimy podobnie: równanie równowagi członu (3) przyjmie postać

$$\underline{\underline{\bar{P}}}_{23}^T + \underline{\underline{\bar{P}}}_{13A}^T + \underline{\underline{\bar{P}}}_{13C}^T + \underline{\underline{\bar{S}}} = 0$$

Tu również kierunki działania sił są znane: są odchylone od normalnych o kąt tarcia ρ . (W ogólnym przypadku wartości kątów tarcia mogą być różne – tu założymy wartości jednakowe: $\rho_A = \rho_C = \rho_E = \rho$.) Po uwzględnieniu otrzymamy rozwiązanie przedstawione na rys. 175c. Wykorzystano tym razem kierunek linii Culmana Z^T . Znajdując między innymi siłę P_{23}^T , mamy jednocześnie siłę P_{21}^T w punkcie F ($\underline{\underline{\bar{P}}}_{21}^T = -\underline{\underline{\bar{P}}}_{23}^T$) oraz szukany moment M_c^T ($M_c^T = P_{23}^T \cdot h_2$). Jak widać z tego przykładu, cała istota uwzględniania sił tarcia w parach postępowych sprowadza się do ustalania nowych kierunków (odchylone o kąty tarcia ρ). W tym przykładzie ustalając kierunek siły oddziaływania P_{23}^T rozumowano następująco. Gdy kąt ω_2 jak na



Rys. 176. Siły oddziaływania w parach kinematycznych: a) schemat mechanizmu z naniesionymi siłami, b) plan sił (bez tarcia), c) plan sił (z tarciami)

rysunku, nietrudno się domyśleć zwrotu prędkości względnej v_{32} w punkcie E (rys. 175a), a więc i zwrotu siły tarcia T_{23} . Oznacza to, że P_{23}^T odchyła się w prawo względem $n-n$.

Interpretację odchylenia sił P_{13A}^T i P_{13C}^T (rys. 175a) pozostawia się Czytelnikowi.

2. Często rzeczywiste punkty styku członów w parze postępowej znajdują się po jednej stronie. W takim przypadku zagadnienie uwzględniania tarcia upraszcza się jeszcze bardziej. Z taką sytuacją spotykamy się przykładowo w układzie korbowo-wodzikowym (rys. 176a). Załóżmy, że należy określić moment czynny M_2^T , niezbędny do pokonania zadanej siły biernej S z uwzględnieniem tarcia tylko w parze postępowej (1–4). Tym razem z łatwego do przewidzenia kierunku siły P_{34} (człon (3) jest tylko ściskany) wynika, że człon (4) współpracuje (w tym położeniu) z członem (1) po powierzchni dolnej. Wypadkowa P_{14}^T siły oddziaływania członów (1) i (4) przechodzi przez punkt C i jest odchylona od P_{14} o kąt ρ . Po takich ustaleniach otrzymamy rozwiązanie, rozpatrując w równowadze człon (4) bez tarcia (rys. 176b) i z tarciami (rys. 176c).

11.2. Tarcie w parach obrotowych

Linia działania wypadkowej nacisków w parze obrotowej w warunkach teoretycznych przebiega bez tarcia przez punkt styku i wzdłuż normalnej, czyli przez środek czopa. W rzeczywistości w miejscu styku (rys. 177) występuje siła tarcia $\bar{T}_{21} = -\bar{T}_{12}$, która działając na ramieniu r daje moment tarcia $\bar{M}_{21}^T = -\bar{M}_{12}^T$. Jeżeli przez P_{12}^T

oznaczyć wypadkową składowej siły normalnej N_{21} i siły tarcia T_{21} ($\bar{P} = \bar{N} + \bar{T}$), to występujący moment tarcia można ogólnie wyrazić

$$M^T = T \cdot r = N \cdot \mu \cdot r = P \cdot h, \quad (112)$$

gdzie: r – promień czopa,

μ – współczynnik tarcia ślizgowego w parze obrotowej,

h – promień koła tarcia.

Jak wiadomo z mechaniki $\mu' = 1,57\mu$ dla czopa niedotartego,

$\mu' = 1,27\mu$ dla czopa dotartego.

Po uwzględnieniu, że

$$P = \sqrt{N^2 + T^2} = N\sqrt{1 + \mu'^2},$$

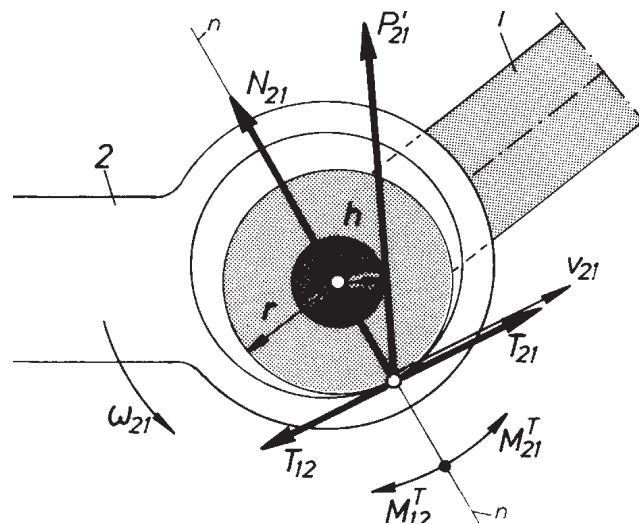
otrzymamy po podstawieniu do (112)

$$M^T = \frac{Pr\mu'}{\sqrt{1 + \mu'^2}} = P \cdot h,$$

stąd

$$h = \frac{r\mu'}{\sqrt{1 + \mu'^2}} \cong r\mu'. \quad (113)$$

Jak z tego wynika, linia działania siły oddziaływania P_{21}^T wskutek tarcia nie przechodzi przez środek czopa, lecz w odległości h , która zależy od promienia czopa r oraz współczynnika μ' tarcia ślizgowego w parze obrotowej. Ponieważ kierunek siły P może być dowolny, dogodnie jest operować pojęciem tzw. **koła tarcia** zakreślone-



Rys. 177. Siły oddziaływania w parze obrotowej z uwzględnieniem tarcia. Koło tarcia

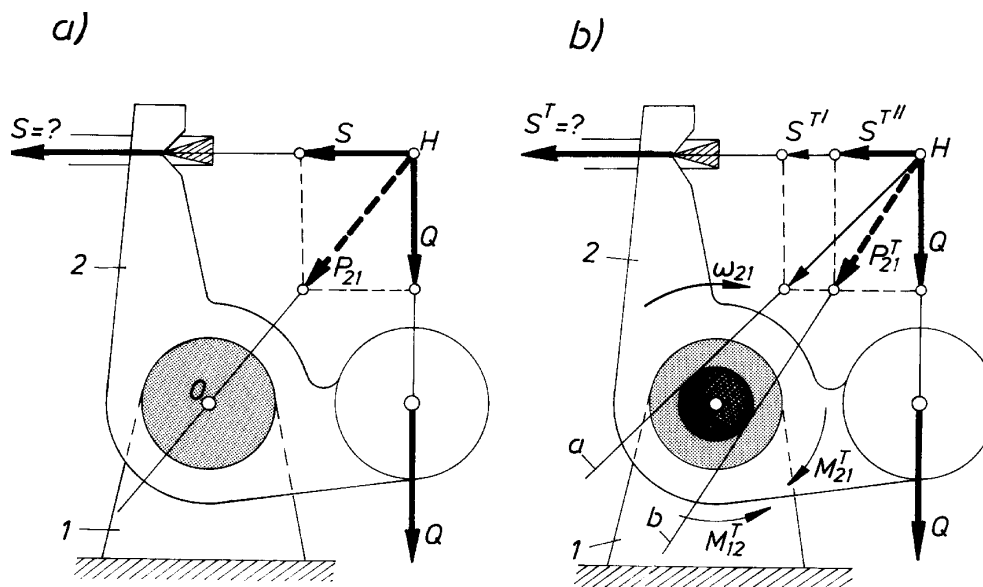
go współśrodkowo promieniem h . Posługując się tym pojęciem można powiedzieć, że podczas tarcia rozwiniętego siła oddziaływania P w parze obrotowej przebiega stycznie do koła tarcia. Ostatnie spostrzeżenie jest prawdziwe, lecz mało precyzyjne, gdyż nie określa w ogóle punktu styczności. Ten ostatni ustalają jednoznacznie kierunek i zwrot siły oddziaływania oraz kątową prędkość względną rozpatrywanych członów tworzących omawianą parę.

Zagadnienie to, bardzo istotne w analizie sił, zostanie wyjaśnione na przykładzie. Należy określić siłę S równoważącą siłę ciężkości Q dźwigni (2) obrotowo osadzonej na nieruchomym sworzniu (1) – rys. 178.

Bez uwzględniania tarcia szukaną siłę S określono by jak na rys. 178a. Wypadkowa P_{21} przechodzi wtedy przez punkt H i środek czopa O .

W rzeczywistych warunkach tarcia w parze obrotowej siła $S_T \neq S$, o czym można wnosić, na tej podstawie, że w stosunku do pierwotnego będzie inny kierunek wypadkowej P_{21}^T . Linia jej działania, przechodząc przez ten sam punkt H , będzie jednocześnie styczną do koła tarcia (rys. 178b), zakreślonego wyznaczonym promieniem h ze środka czopa O . W tym przypadku jednak dwa kierunki, a mianowicie kierunki a i b , spełniają ten sam warunek. Właściwy z nich można określić po ustaleniu kierunku ruchu względnego. Jeżeli założyć, że u nas kąt ω_{21} ma zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara, to nietrudno ustalić, że właściwym kierunkiem jest kierunek b , gdyż wtedy tylko wypadkowa sił zewnętrznych P_{21}^T , działając na ramieniu h , daje moment M_{21}^T zgodny z ruchem.

Do tego samego wyniku można dojść również na podstawie tzw. **zasady najmniejszego skutku użytecznego**, która podaje, że spośród wszystkich możliwych



Rys. 178. Przykład określania siły równoważącej S działającej na dźwignię obrotową:
a) bez uwzględnienia tarcia, b) z uwzględnieniem tarcia w parze obrotowej

układów kierunków stycznych do kół tarcia realizuje się ten, przy którym skutek użyteczny jest najmniejszy. W naszym przypadku oczywiście zachodzi to dla b , gdyż wtedy skutek użyteczny – siła S^T – jest najmniejsza ($S^T < S^T$). Zasada najmniejszego skutku użytecznego może okazać się czasem kłopotliwa w stosowaniu, zwłaszcza dla większej liczby możliwych kombinacji kierunków, dlatego zaleca się przede wszystkim, omówioną już na przykładzie, zasadę zgodności momentu od siły oddziaływania z prędkością kątową ruchu względnego.

Stosując omówione zasady rozwiążemy dwa przykłady.

1. W mechanizmie $ABCD$ (rys. 179a) obciążonym znanym momentem czynnym M_c określić siły oddziaływania w parach kinematycznych oraz moment bierny M_b^T , uwzględniając tarcie w parach obrotowych. W pierwszej kolejności rozwiążemy zadanie bez uwzględnienia tarcia. W naszym przypadku, przy ściskanych tylko członie (3), znane są kierunki sił P_{23} i P_{43} (wzdłuż członu BC), a więc z równowagi członu (2) i (4) również ich moduły

$$M_c = P_{23} \cdot h_2,$$

$$M_b = P_{43} \cdot h_4.$$

Oczywiście

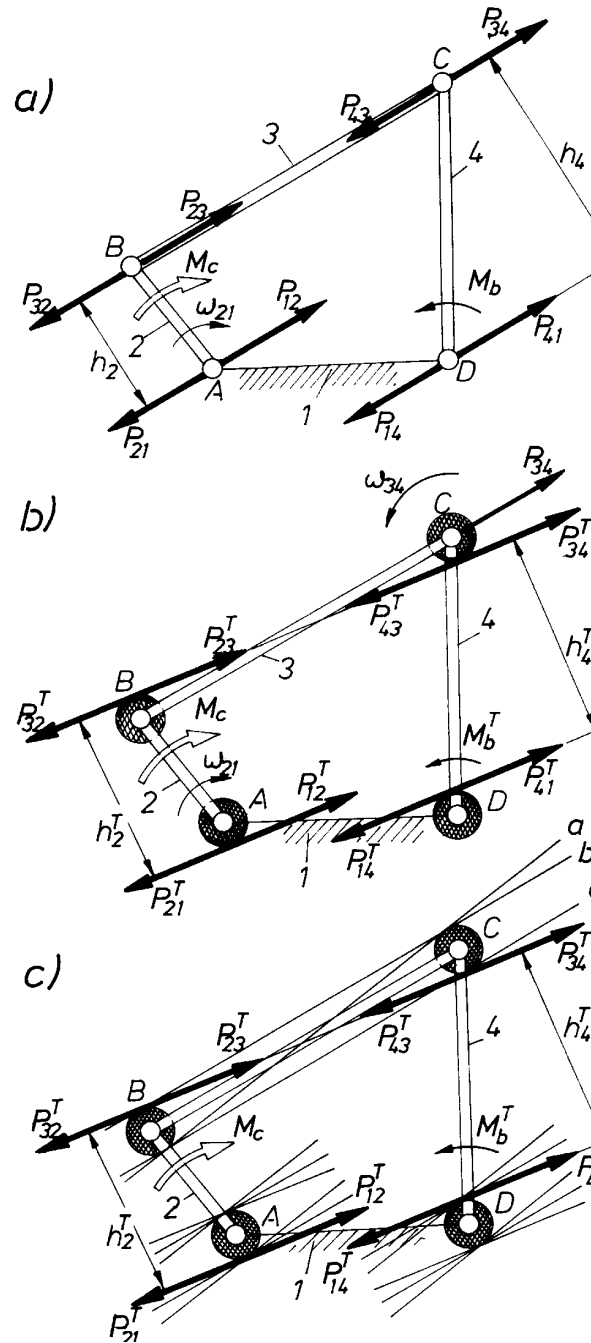
$$\bar{P}_{21} = -\bar{P}_{12} = \bar{P}_{32} = -\bar{P}_{23},$$

$$\bar{P}_{41} = -\bar{P}_{14} = \bar{P}_{34} = -\bar{P}_{43}.$$

Po uwzględnieniu tarcia w parach obrotowych, obliczamy według zależności (113) promienie kół tarcia (zakładamy znajomość promieni czopów i występujących w parach współczynników tarcia μ') i wrysowujemy koła tarcia (rys. 179b). W wyniku analizy kinematycznej określamy przy założeniu zwrotu kąta ω_{21} , zwroty względnych prędkości kątowych. Zwroty tych prędkości, wraz ze znanymi już zwrotami sił oddziaływania (bez tarcia), umożliwią określenie właściwych kierunków linii działania sił w warunkach rzeczywistych. Zastosujemy w tym celu omówioną zasadę zgodności momentów sił czynnych w parze ze zwrotem względnej prędkości kątowej. Zilustrujemy tę zasadę na przykładzie pary C . Otóż ruch członu (3) względem członu (4) pokazany na rysunku strzałką ω_{34} , powstaje na skutek działania siły P_{34}^T . Oznacza to, że linia działania tej siły musi przebiegać stycznie do koła tarcia. Określone w podobny sposób miejsca styczności na pozostałych kołach tarcia umożliwią ostatecznie dokładne już przeprowadzenie poszukiwanych linii działania sił. Po znalezieniu w ten sposób nowych ramion h_2^T i h_4^T znajdziemy bez trudu moduły sił. Oczywiście

$$M_b^T = P_{43}^T \cdot h_4^T.$$

to samo zadanie można rozwiązać również metodą najmniejszego skutku użytecznego. Wrysowujemy określone poprzednio koło tarcia i kierując się rozwiązaniem zadania bez uwzględnienia tarcia (rys. 179a) wykreślamy wszystkie formalnie możliwe



Rys. 179. Analiza sił oddziaływania w czworoboku przegubowym: a) siły oddziaływania bez tarcia, b) siły oddziaływania z tarciem określone metodą zgodności momentu czynnego w parze z kątową prędkością względną, c) siły oddziaływania z tarciem określone z zasady najmniejszego skutku użytecznego

kierunki (a, b, c i d) siły P_{23}^T (rys. 179c) oraz odpowiadające im możliwe linie działania sił P_{21}^T i P_{41}^T .

Rzeczywiście realizujące się w układzie kierunki rozpatrywanych sił ustalimy pamiętając, że „skutek” M_b^T działania momentu M_c musi być najmniejszy spośród wszystkich teoretycznie możliwych. Oznacza to w naszym przypadku, że ramię h_2^T momentu czynnego M_c musi być największe (wtedy $\bar{P}_{23}^T = \bar{P}_{34}^T = \text{minimum}$), ramię h_4^T zaś najmniejsze. Prowadzi to do rozwiązania przedstawionego na rys. 179c.

2. W zadanym mechanizmie (rys. 180) o znanych siłach zewnętrznych P_3 i P_4 określić siły oddziaływania w parach kinematycznych oraz moment czynny M_c^T , uwzględniając tarcie w parach kinematycznych obrotowych.

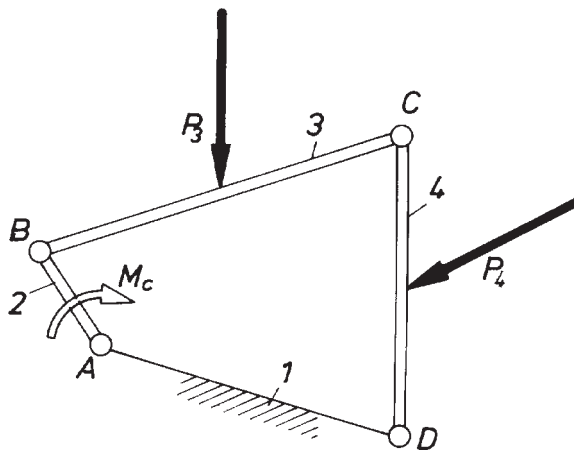
Jak w zadaniach poprzednich, rozpoczniemy i tym razem od rozwiązania zagadnienia bez uwzględnienia tarcia. Wydzielając z układu dwuczłon (3) i (4), o znanych obciążeniach zewnętrznych, stwierdzamy, że jest to grupa statycznie wyznaczalna (spełniony warunek (113)). Podobnie jak w punkcie 10.1.1 wersja 2.3.0, postać A, określamy siły oddziaływania P_{23} , P_{34} i P_{14} w parach kinematycznych B, C i D. Na rysunku 181a przedstawiono wydzieloną grupę statycznie wyznaczalną, na rys. 181b plan sił.

Równowagę członu czynnego (2) (rys. 181c i d) można zapisać następująco

$$\bar{P}_{12} + \bar{P}_{32} = 0,$$

$$M_c = P_{23} \cdot h_2.$$

Zakładając kierunek ruchu członu (2), zgodny z momentem czynnym M_c , można określić zwroty kątowych prędkości względnych, pokazanych na rys. 182a.



Rys. 180. Czworobok przegubowy ABCD obciążony znanymi siłami P_3 i P_4 oraz momentem równoważącym M_c

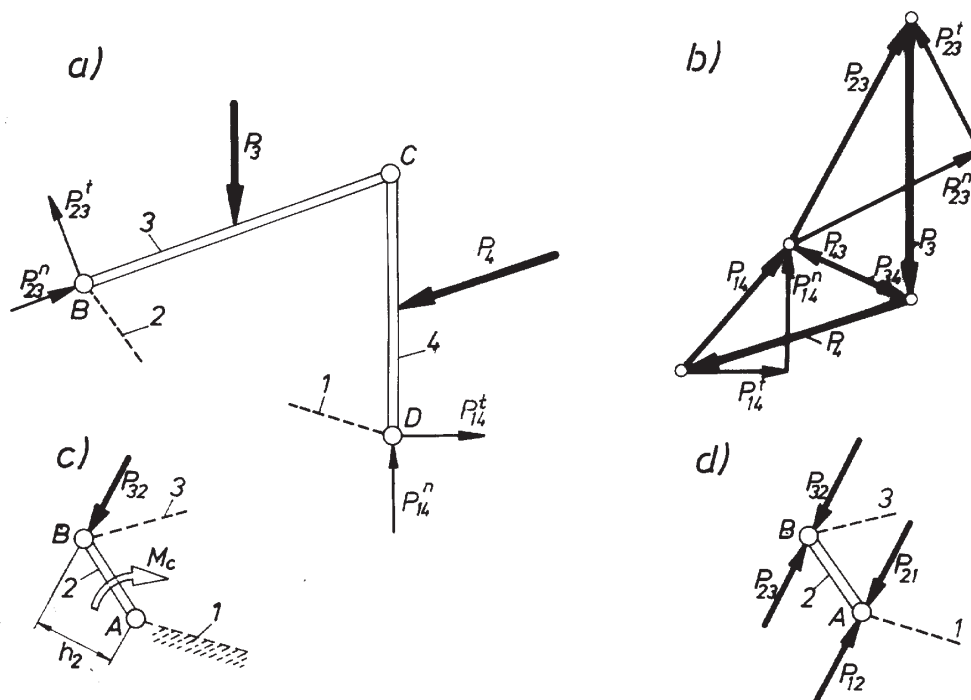
Obecnie można już przystąpić do rozwiązania zadania z uwzględnieniem tarcia. Przede wszystkim obliczamy promienie kół tarcia według zależności (113) oraz – po uwzględnieniu podziałki rysunku – wykreślamy koła tarcia w poszczególnych parach. Linie sił oddziaływania, przechodzące dotychczas przez środki przegubów, będą teraz przebiegać stycznie do wrysowanych kół tarcia. Aby ustalić właściwy kierunek, wykorzystamy zwroty sił (z planu sił bez tarcia) oraz zwroty względnych prędkości kątowych. Pogrubione na rysunku 182a odcinki kół tarcia pokazują możliwe miejsca styczności linii działania sił oddziaływania po uwzględnieniu tarcia w parach kinematycznych.

Opierając się dalej na grupie statycznie wyznaczalnej, złożonej z członów (3) i (4), możemy zapisać równowagę członu (3)

$$\bar{P}_{23}^T + \bar{P}_3 + \bar{P}_{43}^T = 0, \quad (114)$$

oraz członu (4)

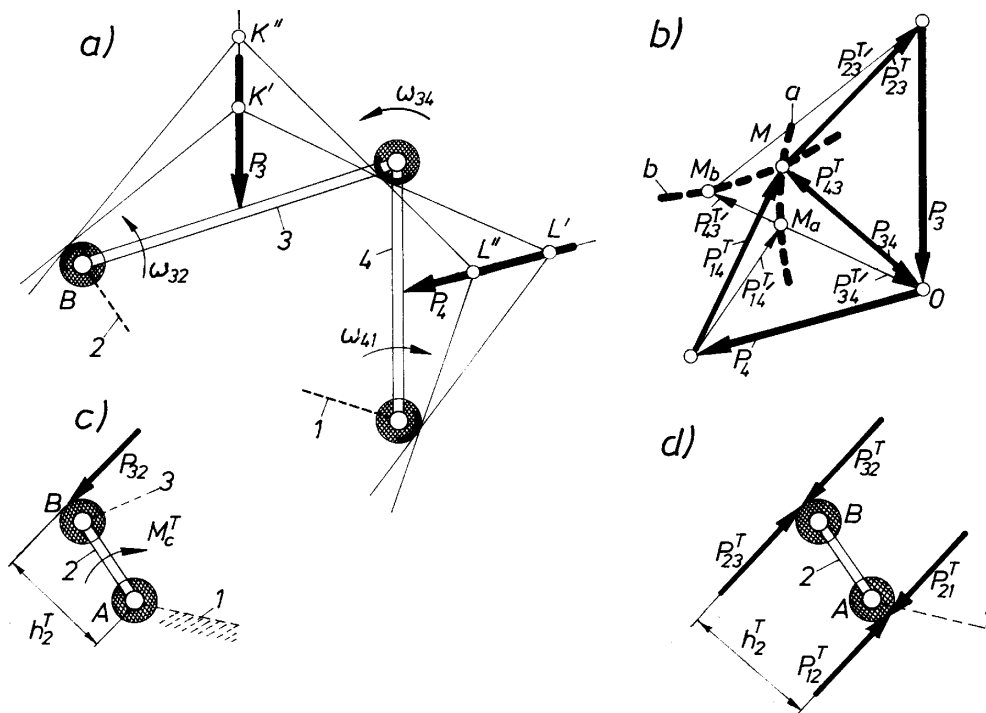
$$\bar{P}_{14}^T + \bar{P}_4 + \bar{P}_{34}^T = 0. \quad (115)$$



Rys. 181. Określenie sił oddziaływania w parach czworoboku $ABCD$ z rys. 180 bez tarcia: a) grupa statycznie wyznaczalna BCD , b) plan sił, c) człon czynny, d) rozkład sił w parach członu czynnego

Siły P_{14}^T i P_{23}^T nie można, jak poprzednio, rozłożyć na składowe styczne i normalne, ponieważ nie są znane ich punkty przyłożenia. W tej sytuacji zastosujemy pewien specjalny graficzny sposób postępowania.

Na człon (3) w równowadze działają trzy siły zewnętrzne, których linie działania przecinają się w jednym punkcie. Załóżmy, że dla członu (3) będzie to punkt K' . Z kierunku siły P_{43}^T wynika punkt L' przecięcia linii działania sił zewnętrznych działających na człon (4). Na rysunku 182b wykreślono plan sił. Jak wynika z planu sił, grupa nie jest w równowadze, ponieważ $\bar{P}_{43}^T + \bar{P}_{34}^T \neq 0$. Siłę P_{43}^T odpowiada w podziałce odcinek OM_b , siłę P_{34}^T zaś odcinek M_aO . W tej sytuacji założymy nowy punkt K'' przecięcia linii działania sił zewnętrznych działających na człon (3). Dla członu (4) otrzymamy wtedy odpowiedni punkt L'' i kolejne rozwiązanie (nie pokazane na rysunku). Jeżeli zabiegi te powtórzymy wielokrotnie, to końce M_b siły P_{43}^T wyznaczą krzywą b , natomiast początki M_a siły P_{34}^T krzywą a . Punkt M przecięcia obydwu krzywych spełnia warunek $\bar{P}_{43}^T + \bar{P}_{34}^T = 0$. Łącząc punkt M z punktem O otrzymamy kierunek, moduł i zwrot siły oddziaływania P_{43}^T , natomiast z początkiem siły P_3 – kierunek, moduł i zwrot siły P_{23} . Połączenie punktu M z końcem siły P_4



Rys. 182. Określenie sił oddziaływania w parach czworoboku $ABCD$ z rys. 180 z uwzględnieniem tarcia: a) grupa statycznie wyznaczalna BCD , b) plan sił, c) człon czynny AB , d) rozkład sił w parach członu czynnego

wyznacza kierunek, moduł i zwrot siły P_{14}^T . Tym samym wyznaczono wszystkie siły oddziaływania w parach kinematycznych grupy z uwzględnieniem tarcia.

Równowagę członu czynnego zapiszemy następująco (rys. 182d)

$$\bar{P}_{32}^T + \bar{P}_{12}^T = 0,$$

$$M_c^T = P_{23}^T \cdot h_2^T.$$

Wartość h_2^T można odczytać z rysunku 182c.

Omawiając metodę uwzględnienia tarcia w parach obrotowych za pomocą kół tarcia należy zaznaczyć, że zjawisko tarcia w analizie dynamicznej można w niektórych przypadkach pominąć po dokonaniu wstępnej oceny jego wpływu na wynik poszukiwań.

W wielu przypadkach, zwłaszcza w mechanizmach o zwartej budowie pracujących w pobliżu położenia zwrotnych, wpływ tarcia w parach kinematycznych obrotowych na wartość występujących sił może być znaczny. W szczególności tarcie w parach obrotowych może być powodem pojawienia się niedopuszczalnych przeciążeń, a nawet może doprowadzić do unieruchomienia układu (położenie martwe).

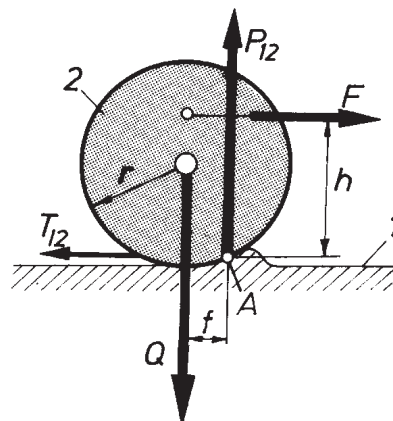
11.3. Tarcie w parach wyższych

W rzeczywistych mechanizmach ruch względny członów tworzących parę kinematyczną wyższą przejawia się w formie poślizgu, toczenia z poślizgiem lub toczenia.

Przeanalizujemy ostatnie zjawisko.

Tarcie toczne

Podczas przetaczania się ciała sprężystego po podłożu sprężystym występuje złożone zjawisko odkształcenia się tych ciał w miejscu styku (rys. 183). W wyniku tego zjawiska między innymi pojawia się opór toczenia. Do jego pokonania należy przyłożyć pewną siłę F równoległą do kierunku ruchu. Siła ta, działając ogólnie na ramieniu h , daje moment



Rys. 183. Tarcie toczne

$$M_c = F \cdot h, \quad (116)$$

który równoważy moment oporu M_b pochodzący od siły docisku Q .

Moment bierny wyraża się

$$M_b = Q \cdot f \quad (117)$$

gdzie f – odległość linii działania siły Q od linii działania wypadkowej sił oddziaływania P_{12} .

Wielkość f , mierzona w centymetrach, nosi nazwę **współczynnika tarcia tocznego**. Z porównania prawych stron równości (116) i (117) otrzymujemy

$$F \cdot h = Q \cdot f,$$

czyli

$$F = Q \frac{f}{h}. \quad (118)$$

Z otrzymanego wzoru (118) wynika, że moduł siły F zależy zarówno od warunków toczenia reprezentowanych przez współczynnik f , jak również od punktu przyłożenia siły czynnej. W czasie poślizgu członu (2) względem członu (1) w miejscu ich styku pojawiałyby się poznana już siła tarcia ślizgowego

$$T_{12} = Q \cdot \mu \quad (119)$$

Po uwzględnieniu (118) i (119) miętudno zauważyć, że czyste toczenie będzie zachodzić, gdy

$$F < T_{12},$$

czyli tzn., gdy

$$\frac{f}{h} < \mu. \quad (120)$$

Zwykle interesujemy się kołowymi elementami tocznymi z przyłożoną siłą czynną w środku koła $h = r$. Wtedy warunek toczenia (114) przyjmie postać

$$\frac{f}{r} < \mu. \quad (121)$$

W niektórych parach, np. w punkcie styku elementów ciernych przekładni ciernych, może wystąpić jednocześnie tarcie toczne z poślizgiem. Wtedy wypadkowa siła oddziaływania przesunie się o wartość współczynnika tarcia f i odchyli o kąt tarcia ρ .

12. Bilans energetyczny maszyny

Rozpatrując całkowity czas ruchu maszyny liczony od rozpoczęcia tego ruchu do jego zakończenia możemy wyróżnić:

- a) rozruch,
- b) ruch ustalony,
- c) wybieg (hamowanie).

Etapy te zilustrowano na rysunku 184 na przykładzie przebiegu prędkości kątowej ω głównego wału maszyny.

1. W okresie rozruchu po każdym cyklu wzrasta prędkość, a więc i energia kinetyczna E maszyny. Dla każdego cyklu w tym okresie

$$E - E_0 > 0,$$

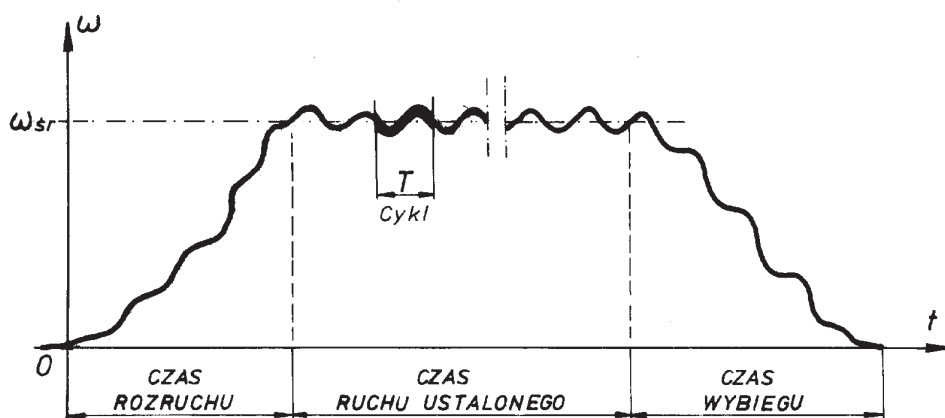
gdyż praca sił napędowych przewyższa pracę oporów (jej nadmiar powoduje zwiększenie energii kinetycznej maszyny).

2. W ruchu ustalonym jest po każdym cyklu

$$E = E_0,$$

co oznacza, że dla pełnego cyklu ruchu lub jego wielokrotności praca sił napędowych jest równa sumie pracy użytecznej i pracy oporów szkodliwych.

W ramach każdego cyklu ruchu ustalonego możliwe są zmiany energii kinetycznej E i prędkości maszyny, spowodowane np. okresowymi zmianami sił napędowych.



Rys. 184. Okresy ruchu maszyny

Zmiany te mogą być nieznaczne, np. w maszynach wirnikowych lub duże, np. w jednocylindrowym czterosuwowym silniku spalinowym. W ruchu ustalonym następują wahania prędkości wokół wartości średniej odpowiadającej danym warunkom ruchu ustalonego. Ruch maszyny powtarza się przy tym identycznie w każdym cyklu.

3. W okresie wybiegu (hamowania)

$$E - E_0 < 0$$

mamy do czynienia ze zmniejszającą się prędkością aż do osiągnięcia spoczynku. Maszyna zatrzyma się, gdy cała energia ruchu ustalonego zostanie zużyta na pokonanie oporów użytecznych i szkodliwych. W celu skrócenia czasu zatrzymania powiększa się dodatkowo opory, np. przez zastosowanie hamulca.

12.1. Równanie energii

Ogólnym przeznaczeniem maszyny jest wykonywanie pewnych operacji technologicznych, jak w maszynach roboczych, lub przekształcanie energii w silnikach i generatorach. Te procesy energetyczne odbywają się w maszynie z udziałem mechanizmu lub zespołu połączonych ze sobą mechanizmów. Człony w tych układach uczestniczą w transformowaniu i przekazywaniu sił z członów napędzających na człony bierne, czyli obciążone siłami oporu. Nie cała jednak praca sił czynnych zostaje wykorzystana do zamierzonych celów użytecznych. Część energii zostaje zużyta na pokonanie towarzyszących ruchom oporów tarcia (oporów ośrodka, sił tarcia w parach kinematycznych) i rozprasza się w otoczeniu w postaci ciepła, część zaś gromadzi się w samym mechanizmie jako energia kinematyczna, a czasem także potencjalna. W tym świetle bilans energetyczny maszyny przyjmie ogólną postać:

$$E_D = E_u + E_T \pm E_K \pm E_P$$

lub

$$L_D = L_u + L_T \pm L_K \pm L_P, \quad (122)$$

gdzie: L_D – dodatnia praca sił działających na człony mechanizmu (praca dostarczona),

L_u – praca oporów technologicznych (praca użyteczna),

L_T – praca sił tarcia i innych oporów szkodliwych,

L_K – praca dostarczona na koszt zwiększenia lub zmniejszenia energii kinetycznej lub, ujmując rzecz inaczej, praca dostarczona na pokonanie sił bezwładności,

L_P – praca dostarczona na zwiększenie lub zmniejszenie energii potencjalnej (energii grawitacyjnej, sprężystości itp.).

Z bilansu prac można przejść również do bilansu mocy

$$N_D = N_u + N_T \pm N_K \pm N_P. \quad (123)$$

Znaczenie poszczególnych indeksów jak we wzorze (122).

W ramach jednego cyklu ruchu ustalonego całkowita praca L_K wykorzystana na zmianę energii kinetycznej równa się zero ($L_K = 0$). Również praca L_P wykorzystana na zmianę energii potencjalnej odniesionej tylko do energii sił grawitacyjnych równa się w takim czasie zero. Oznacza to, że dla jednego cyklu lub całkowitej liczby cykli ruchu ustalonego można równanie (122) i (123) zapisać w postaci

$$L_D = L_U + L_T \quad (124)$$

oraz

$$N_D = N_U + N_T. \quad (125)$$

12.2. Sprawność mechaniczna maszyny

Efektywność wykorzystania pracy sił czynnych w postaci pracy użytecznej może być w praktyce bardzo różna. Zwykle określa się ją tzw. sprawnością, przy czym ilościową stroną tego zagadnienia ujmuje bezwymiarowy **współczynnik sprawności** wyrażony stosunkiem pracy użytecznej do pracy dostarczonej. W dostatecznie długim czasie ruchu ustalonego lub w czasie równym wielokrotności okresu T można współczynnik sprawności η wyrazić w postaci

$$\eta = \frac{E_U}{E_D}, \quad \eta = \frac{L_U}{L_D} \quad (126)$$

lub jego współczynnik sprawności chwilowej η_{ch}

$$\eta_{ch} = \frac{N_U}{N_D}. \quad (127)$$

Korzystając z równania (124) współczynnik sprawności η można wyrazić również w postaci

$$\eta = \frac{L_D - L_T}{L_D} = 1 - \frac{L_T}{L_D}, \quad \eta = \frac{L_u}{L_u + L_T}. \quad (128)$$

Zwróćmy bliższą uwagę na składniki L_T i L_u . Jak już powiedziano, L_T reprezentuje pracę oporów ośrodka i sił tarcia w parach kinematycznych. Te ostatnie siły są uwarunkowane obciążeniem węzłów wywołanym siłami czynnymi F_c , siłami oporów użytecznych F_u , siłami bezwładności P_b , siłami ciężkości G i innymi siłami szczególnymi, jak wciski czy opory wstępne.

Już z tego wyliczenia widać, że zawsze $L_T > 0$. Z kolei praca użyteczna L_U jest zwykle zmienna co do wielkości, a w szczególności może osiągać nawet wartość zero (bieg luzem).

Dla wyrażenia skali zaistniałych strat pracy na tarcie (L_T) stosuje się czasem również pojęcie tzw. **współczynnika strat** (φ) określonego stosunkiem pracy sił tarcia do pracy dostarczonej

$$\varphi = \frac{L_T}{L_D}. \quad (129)$$

Po podzieleniu równania (124) przez L_D otrzymamy

$$1 = \frac{L_U}{L_D} + \frac{L_T}{L_D} \quad \text{lub} \quad 1 = \eta + \varphi.$$

Nietrudno zauważyć, że

$$0 < \eta < 1 \quad \text{i} \quad 0 < \varphi < 1.$$

Ruch maszyny jest możliwy tylko wtedy, gdy $\eta > 0$. Przypadek $\eta < 0$ oznacza samohamowność, czyli brak ruchu.

Jeżeli możliwy jest ruch maszyny, to jej sprawność zależy od bardzo wielu czynników, między innymi – co trzeba podkreślić – również od prędkości jej ruchu i obciążenia. Wzrost prędkości przy tym samym obciążeniu powoduje, ze względu na wzrost sił bezwładności, spadek sprawności, wzrost zaś obciążenia (praca użyteczna L_U) przy tej samej prędkości – zrozumiąły wzrost sprawności.

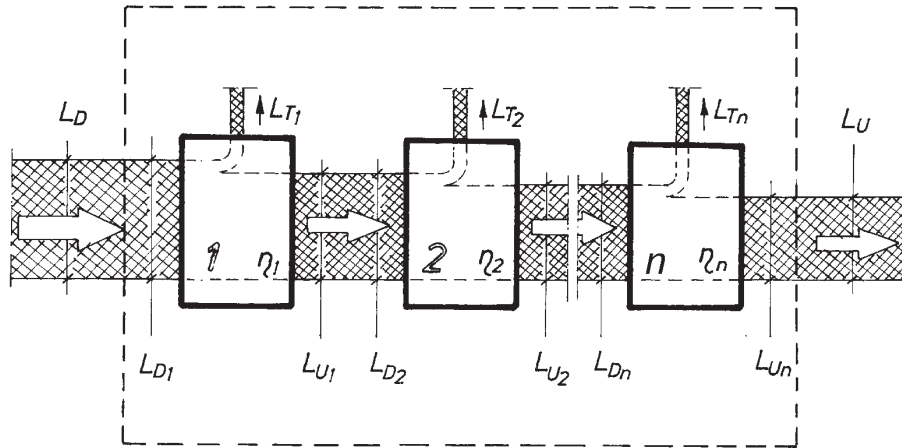
Współczynnik sprawności maszyny można określić względnie dokładnie jedynie w wyniku bezpośredniego pomiaru dwóch spośród trzech składników pracy L_D , L_U , L_T lub mocy N_D , N_U , N_T . Pomiary tych elementów to oddzielne i złożone zagadnienie, wymagające oprzyrządowania, a często i pomysłowości. Współczynnikiem sprawności maszyny interesujemy się jednak już w fazie jej projektowania, dążąc do utrzymania tego wskaźnika w możliwie maksymalnych granicach wartości. Należy pamiętać, że o całkowitej sprawności maszyny decydują sprawności poszczególnych mechanizmów składowych, przy czym, wpływ sprawności mechanizmów składowych na wynik końcowy zależy od struktury samej maszyny, czyli po prostu od sposobu połączenia tych mechanizmów.

Sprawność maszyny o szeregowym połączeniu mechanizmów

Niech rozpatrywana maszyna składa się z n mechanizmów połączonych ze sobą szeregowo (rys. 185). W takim przypadku praca użyteczna (L_U) każdego poprzedniego mechanizmu jest pracą sił napędowych (L_D) każdego następnego. Sprawności poszczególnych mechanizmów można więc przedstawić w postaci:

$$\eta_1 = \frac{L_{U_1}}{L_D}, \quad \eta_2 = \frac{L_{U_2}}{L_{U_1}}, \quad \dots, \quad \eta_n = \frac{L_{U_n}}{L_{U_{n-1}}}. \quad (130)$$

Ponieważ całkowita sprawność maszyny wynosi u nas



Rys. 185. Rysunek pomocniczy do wyznaczania sprawności maszyny przy połączeniu szeregowym podzespołów

$$\eta = \frac{L_{U_n}}{L_D},$$

otrzymamy po wykorzystaniu (130) i przekształceniach

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \dots \eta_n$$

lub krótko

$$\eta = \prod \eta_i. \quad (131)$$

Sprawność maszyny o równoległym połączeniu mechanizmów

Czysty przypadek równoległego połączenia mechanizmów w maszynie przedstawiono obrazowo na rysunku 186.

Jeżeli przez k_i oznaczyć współczynniki rozplywu mocy, przy czym

$$\sum k_i = 1,$$

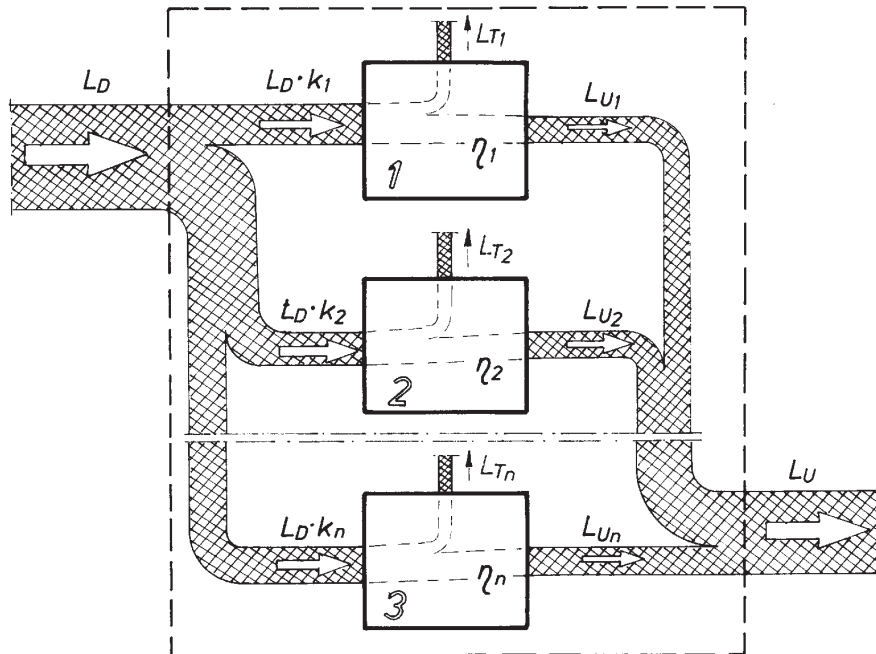
to $L_{D_i} = L_D \cdot k_i$ oraz $L_{U_i} = L_U \cdot k_i \cdot \eta_i$

Z rysunku wynika, że

$$L_U = \sum L_{U_i} = \sum L_D \cdot k_i \cdot \eta_i.$$

a więc całkowitą sprawność η można wyrazić

$$\eta = \frac{L_U}{L_D} = \frac{L_D \cdot \sum k_i \cdot \eta_i}{L_D},$$



Rys. 186. Rysunek pomocniczy do wyznaczania sprawności maszyny przy równoległym połączeniu jej podzespołów

czyli

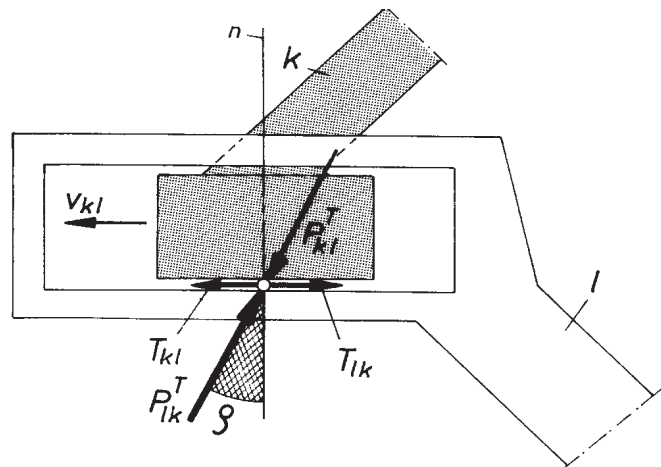
$$\eta = \sum k_i \cdot \eta_i. \quad (132)$$

Ze wzoru (132) wynika, że sprawność ogólna maszyny przy równoległym połączeniu mechanizmów zależy w znacznej mierze od samego rozdziału strumienia energii w maszynie. Należy zaznaczyć, że omówiony „czysty przypadek równoległego połączenia mechanizmów” w maszynie występuje zwykle rzadko, a z reguły mamy do czynienia z przypadkami połączeń szeregowo-równoległych, które już jednak nie wymagają oddzielnego omawiania.

12.3. Określanie sprawności mechanizmów

Jak już powiedziano, do oceny współczynnika sprawności całej maszyny w fazie jej projektowania niezbędna jest znajomość sprawności poszczególnych mechanizmów składowych.

Teoretyczne określenie współczynnika sprawności, nawet najprostszego mechanizmu, jest zwykle kłopotliwe i możliwe do wykonania tylko z określonym przybliżeniem. Ogólna metoda rozwiązywania postawionego zagadnienia jest właściwie prosta, bo, jak sugerują przeprowadzone już rozważania, polega na wyznaczeniu pracy



Rys. 187. Siły oddziaływania w parze postępowej z uwzględnieniem tarcia

lub mocy doprowadzonej do maszyny oraz pracy lub mocy traconej na pokonanie oporów nieużytecznych. Najbardziej uciążliwe jest właśnie ustalenie tych ostatnich elementów. Określenie mocy traconej już tylko w parach kinematycznych wymaga, nawet przy założeniu licznych uproszczeń, przeprowadzenia gruntownej analizy kinematycznej i kinetostatycznej. Ilustrują to następujące proste przykłady.

Moc traconą na pokonanie oporów tarcia w niższej parze postępowej złożonej z członów k i l (rys. 187) można wyrazić wzorem

$$N_{Tp} = T_{kl} \cdot v_{kl} = P_{kl}^T \sin \rho \cdot v_{kl},$$

dla pary obrotowej zaś (rys. 188)

$$N_{To} = M_{kl}^T \cdot \omega_{kl} = P_{kl}^T \cdot h \cdot \omega_{kl} = P_{kl} \cdot \mu \cdot r \cdot \omega_{kl}$$

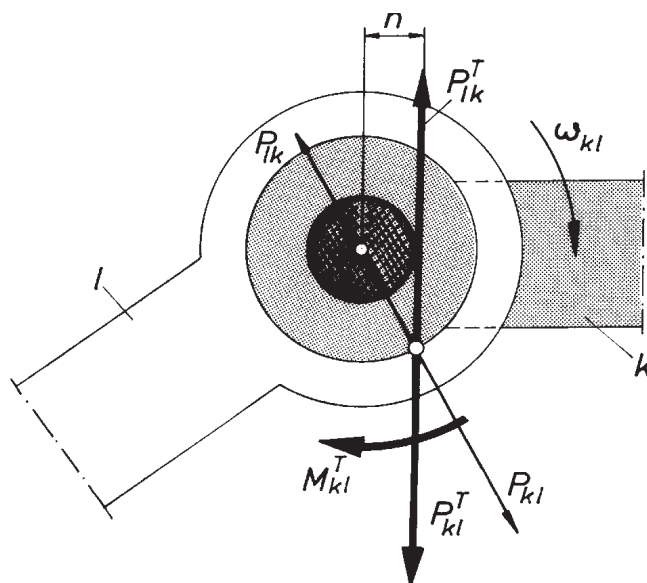
Występujące w tych wzorach siły należy wyznaczyć, zakładając przewidywany stan obciążeń układu, prędkości względne zaś – przyjmując przewidywany ruch ogniw głównego. Czyniąc odpowiednie założenia, można te parametry wyznaczyć korzystając ze stosownych metod. Należy przy tym pamiętać, że operacje takie należy prowadzić dla różnych położeń rozpatrywanego mechanizmu.

W praktyce, w niektórych przypadkach stosowania rozwiązań typowych, np. łożyska, ząbienia, można stosować katalogowe sprawności odpowiednich węzłów, sam zaś proces określenia współczynnika sprawności mechanizmu przeprowadzać prościej metodami opracowanymi specjalnie dla danego typu mechanizmów.

Dalej omówiono przykłady takich nietypowych metod.

Przykładowa metoda określania współczynnika sprawności mechanizmu dźwigniowego

Należy wyznaczyć chwilową sprawność popularnego mechanizmu korbowo-wodzikowego (rys. 189) po założeniu, że jest obciążony tylko momentem czynnym M_c i siłą bierną S .



Rys. 188. Siły oddziaływania w parze obrotowej z uwzględnieniem tarcia

Zauważmy tu, że moc dostarczoną do mechanizmu można wyrazić następująco

$$N_D = M_c \cdot \omega_1.$$

W warunkach idealnych ta sama moc byłaby odebrana w postaci mocy użytecznej N'_U , a więc

$$N'_U = N_D,$$

przy czym

$$N'_U = S \cdot v_{34}.$$

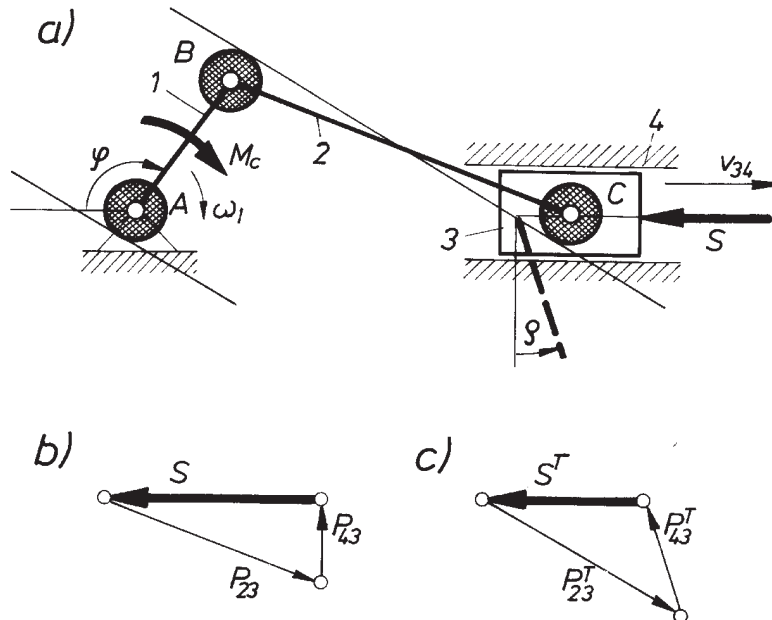
W rzeczywistości moc użyteczna N_U będzie, jak wiadomo, pomniejszona o straty spowodowane tarciami i można ją wyrazić w postaci

$$N_U = S^T \cdot v_{34}.$$

Uwzględniając te spostrzeżenia, szukaną sprawność układu można przedstawić w następującej formie

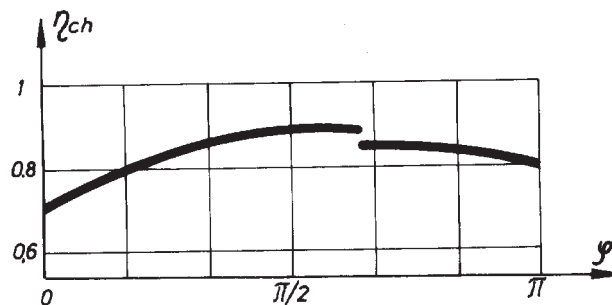
$$\eta_{ch} = \frac{N_U}{N_D} = \frac{S^T \cdot v_{34}}{M_c \cdot \omega_1} = \frac{S^T \cdot v_{34}}{S \cdot v_{34}} = \frac{S^T}{S}.$$

W ten sposób sprawność badanego mechanizmu udało się wyrazić stosunkiem sił, z których jedna S jest siłą równoważącą dany moment M_c wyznaczoną bez uwzględnienia tarcia w parach kinematycznych (rys. 189b), druga zaś S^T taką samą siłą wyznaczoną z uwzględnieniem tarcia (rys. 189c).



Rys. 189. Przykład wyznaczania sprawności mechanicznej układu korbowo-wodzikowego:
 a) schemat mechanizmu z naniesionymi kierunkami sił, b) plan sił bez uwzględnienia tarcia,
 c) plan sił z uwzględnieniem tarcia

Stosunek tych sił wyraża w tym przypadku chwilową sprawność mechanizmu, a więc sprawność w danym jego położeniu. Powtarzając podobne operacje dla kolejnych położeni, otrzymalibyśmy przebieg zmian chwilowej sprawności w funkcji kąta obrotu korby. Taki przykładowy przebieg $\eta_{ch}(\varphi)$ dla danych $l_1 = 500$ mm, $l_2 = 1000$ mm, $d_A = d_B = 30$ mm, $d_C = 20$ mm oraz $\mu = 0,1$ przedstawiono na rys. 190. Przy okazji należy zwrócić uwagę na to, że dla tego samego mechanizmu, lecz przy czynnej sile S przebieg sprawności byłby zupełnie odmienny. Tu wystąpiłyby już, oprócz dodatnich wartości, także $\eta = 0$ i $\eta < 0$, co świadczy o istnieniu zakresów samohamowności.



Rys. 190. Przykładowy przebieg sprawności chwilowej η_{ch}

Przykłady określania sprawności mechanizmu krzywkowego

Rozpatrzmy mechanizm krzywkowy (rys. 191), w którym popychacz (3) jest napędzany siłą oddziaływania P_{23} oraz obciążony zadaną siłą bierną S . Zauważmy, że gdyby założyć brak tarcia w parach kinematycznych dla pokonania zadanej siły S należałoby w punkcie E obciążyć popychacz (3) siłą P_{23} (rys. 191b). W warunkach rzeczywistych (przy znanych kątach tarcia ρ_B , ρ_D i ρ_E) w punkcie E działać będzie siła P_{23}^T (rys. 191c). Jak wiadomo

$$\eta = \frac{N_u}{N_D},$$

przy czym

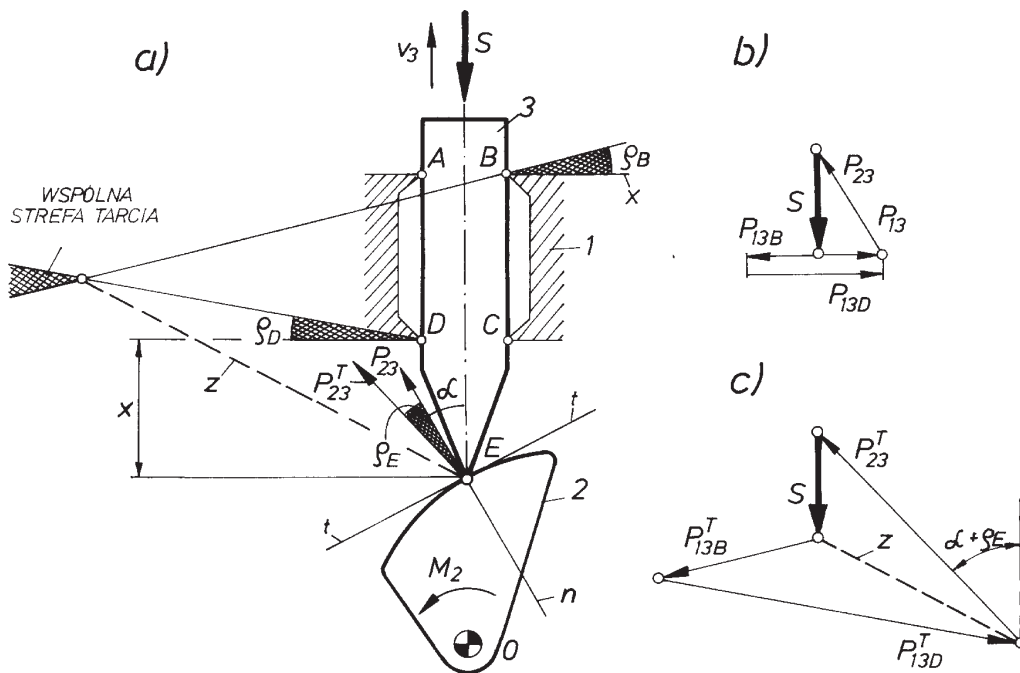
$$N_u = S \cdot v_3.$$

Moc dostarczoną N_D można określić wzorem

$$N_D = M_2^T \cdot \omega_2.$$

lub pomijając tarcie w parze obrotowej O

$$N_D = P_{23}^T \cdot v_3 \cos(\alpha + \rho_E).$$



Rys. 191. Określenie sprawności mechanicznej mechanizmu krzywkowego: a) schemat mechanizmu z naniesionymi kierunkami sił, b) plan sił bez tarcia, c) plan sił z tarcie

Po podstawieniu otrzymamy

$$\eta = \frac{S}{P_{23}^T \cos(\alpha + \rho_E)}.$$

Otrzymano w ten sposób wartość chwilową sprawności odpowiadającą rozpatrywanemu położeniu mechanizmu. Ogólnie sprawność jest funkcją położenia. Aby otrzymać pełny zapis, należy określić związek $P_{23}^T = f(S, x)$ i podstawić do ostatniego wzoru.

13. Badanie ruchu maszyn

Stawiamy tu problem oceny zachowania się maszyny, jej ruchu w rzeczywistych warunkach wykonania i eksploatacji. Już na wstępie należy zaznaczyć, że rzeczywisty stan ruchu maszyny można względnie dokładnie określić na ogół tylko w wyniku bezpośredniego pomiaru. Jednocześnie nie trzeba wykazywać, że znajomość parametrów ruchu maszyny, jej reagowania na wszelkie zmiany warunków eksploatacji jest niezbędna już w fazie projektowania obiektu. Oznacza to potrzebę dokonywania takiej oceny na drodze teoretycznej. Problem jest niezwykle złożony, bo o ruchu każdego podzespołu maszyny i każdego członu w podzespołe decyduje zarówno obciążenie wszystkich połączonych ze sobą w maszynie podzespołów i członów, jak i rozkład mas członów i ich udział w ruchu.

Podejmując ten problem ogólnie robimy trzy założenia;

1. Stwierdzamy, że w układach jednobieżnych (a takimi są zwykle badane obiekty) ruch dowolnego członu jest określony ruchem każdego innego członu, wówczas zajmujemy się badaniem jednego tylko członu, np. głównego wału maszyny.

2. Złożony stan obciążeń przyłożonych do poszczególnych członów układu zastępujemy jedną tylko siłą lub parą sił (równoważną wszystkim działającym obciążeniom) przyłożoną do jednego wybranego członu.

3. Złożony układ mas biorących udział w ruchu zastępujemy jedną masą (reprezentującą wszystkie masy ruchome) przyłożoną do jednego wybranego członu.

Zabiegi wymienione w dwóch ostatnich punktach, zwane redukcją sił i mas, są bardzo wskazane, bo znakomicie upraszczają problem oceny zachowania się układu.

13.1. Redukcja sił

Jak się wykazuje, **siła** (lub para sił) **zredukowana** do wybranego punktu lub członu redukcji, wywołująca ten sam efekt, jaki wywołują siły działające na różne człony badanego układu, rozwija tę samą moc, jaką rozwijają zredukowane obciążenia. Oznacza to, że zasadę redukcji sił można ująć krótko

$$N = N^*, \quad (133)$$

gdzie: N – moc rozwijana przez wszystkie siły (i pary sił) działające w układzie rozpatrywanym,

N^* – moc rozwijana przez siłę (lub parę sił) zredukowaną.

Zmierzając do wykorzystania równania (133) przypomnijmy, że chwilową moc wszystkich sił P_i oraz par sił M_i działających na człony płaskiego mechanizmu w ruchu można wyrazić wzorem

$$N = \sum (P_i v_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i), \quad (134)$$

w którym: v_i – prędkość liniowa punktu przyłożenia siły P_i ,
 α_i – kąt zawarty pomiędzy kierunkiem P_i i v_i ,
 ω_i – prędkość kątowna obciążonego parą sił M_i .

We wzorze (134) iloczynowi $M_i \cdot \omega_i$ należy przyporządkować znak (+), jeżeli zwroty M_i oraz ω_i są zgodne, znak (-) zaś w przypadku przeciwnym.

Oczywiście, moc N_x siły zredukowanej P_{zr} , przyłożonej do określonego punktu członu redukcji x , wynosi

$$N_x = P_{zr} \cdot v_x \cdot \cos \alpha_x, \quad (135)$$

moc zaś pary sił zredukowanej do momentu zredukowanego M_{zr} , obciążającego człon redukcji x , odpowiednio

$$N_x = M_{zr} \cdot \omega_x \quad (136)$$

gdzie: v_x – prędkość punktu przyłożenia siły zredukowanej,
 α_x – kąt zawarty pomiędzy kierunkiem P_{zr} i v_x ,
 ω_x – prędkość kątowna członu redukcji.

Wykorzystując omówioną już równość mocy (133) otrzymamy na podstawie zależności (135), (136) dla siły zredukowanej

$$P_{zr} = \sum \left(P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_x \cos \alpha_x} + M_i \frac{\omega_i}{v_x \cos \alpha_x} \right), \quad (137)$$

dla pary sił zredukowanych zaś

$$M_{zr} = \sum \left(P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega_x} + M_i \frac{\omega_i}{\omega_x} \right). \quad (138)$$

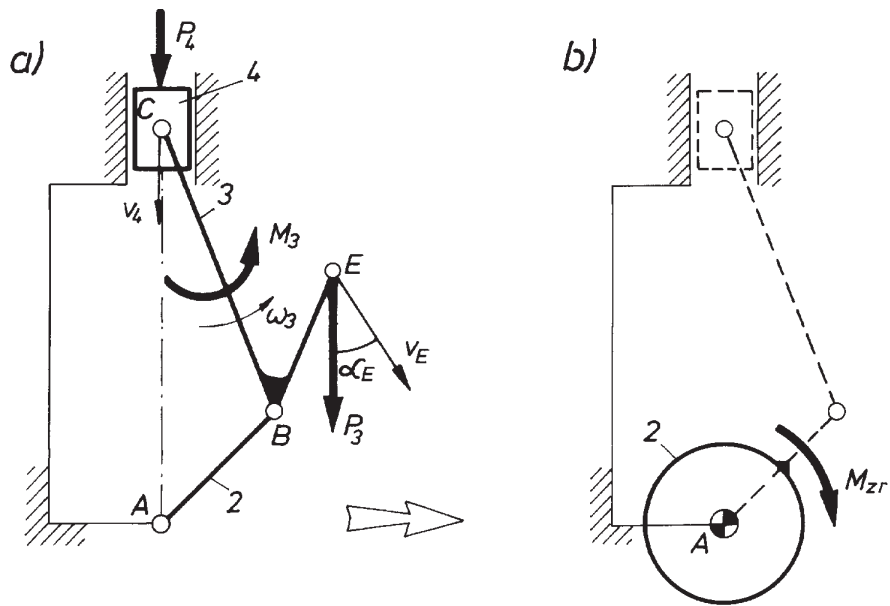
Występujące we wzorach (137) i (138) siły i pary sił nie są stałe. W ogólnym przypadku parametry te, jak również prędkości i kąty, zależą od położenia określanego kątem φ obrotu korby. Oznacza to tym samym, że

$$P_{zr} = f(\varphi), \quad M_{zr} = f(\varphi). \quad (139)$$

Zabieg redukcji prześledzimy na prostym przykładzie.

Niech będzie dany mechanizm ABC (rys. 192a) obciążony siłami P_3 i P_4 oraz momentem M_3 . Należy określić M_{zr} przyłożony do członu (2) (rys. 192b). Zauważmy, że działające na człony układu obciążenia rzeczywiste rozwijają moc

$$N = P_3 v_E \cos \alpha_E + M_3 \cdot \omega_3 + P_4 v_4.$$



Rys. 192. Redukcja sił: a) schemat układu obciążonego siłami, b) człon redukcji (2) obciążony momentem zredukowanym (M_{zr})

Moc rozwijaną przez moment M_{zr} można wyrazić

$$N^* = M_{zr} \cdot \omega_2.$$

Z porównania prawych stron ostatnich dwóch zależności otrzymamy

$$M_{zr} = P_3 \frac{v_E \cos \alpha_E}{\omega_2} + M_3 \frac{\omega_3}{\omega_2} + P_4 \frac{v_4}{\omega_2}.$$

Występujące w wyrażeniu stosunki prędkości należy określić na drodze analizy kinematycznej, kąt α_E określamy graficznie lub analitycznie.

13.2. Redukcja mas

Jak już powiedziano, podczas badania ruchu złożonego układu kinematycznego celowe jest zastępowanie mechanizmu równoważnym mu dynamicznie prostym modelem złożonym z jednej **masy zredukowanej** lub jednego członu obrotowego o **zredukowanym momencie bezwładności**. Model taki będzie równoważny z badanym układem, jeżeli jego energia kinetyczna E_k^* będzie równa energii kinetycznej całego układu E_k . Innymi słowy, u podstaw procesu redukcji mas leży zasada równości energii kinetycznej

$$E_k = E_k^*. \quad (140)$$

Energię kinetyczną wszystkich członów mechanizmu można wyrazić ogólnie

$$E_k = \sum \left(\frac{m_i \cdot v_i^2}{2} + \frac{J_{Si} \cdot \omega_i^2}{2} \right), \quad (141)$$

gdzie: m_i, J_{Si} – masa i -tego członu, moment bezwładności tego członu względem jego środka ciężkości,

v_i, ω_i – prędkość liniowa środka ciężkości i -tego członu, prędkość kątowa tego członu.

Energia kinetyczna skupionej masy zredukowanej m_{zr} wynosi oczywiście

$$E_k^* = \frac{m_{zr} v_x^2}{2}, \quad (142)$$

energia kinetyczna członu o zredukowanym momencie bezwładności J_{zr}

$$E_k^* = \frac{J_{zr} \omega_x^2}{2}, \quad (143)$$

gdzie: v_x – prędkość masy zredukowanej,

ω_x – prędkość kątowa członu redukcji.

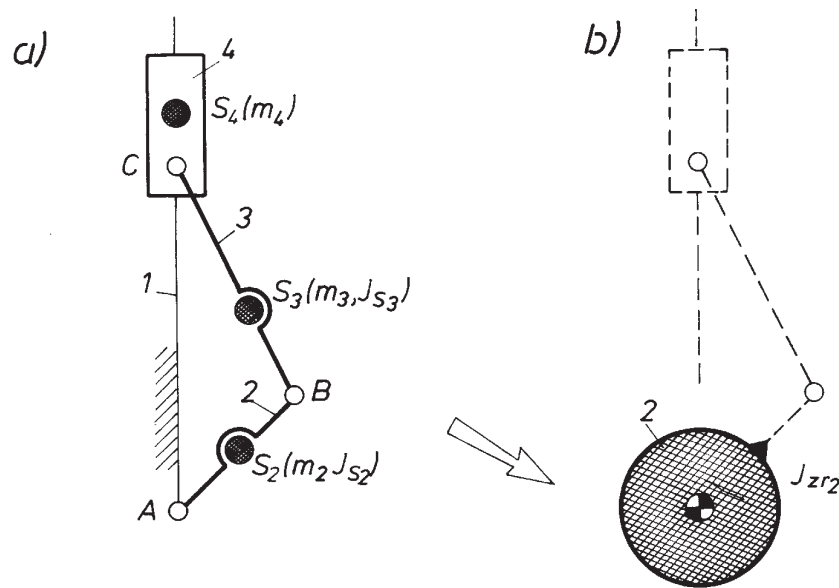
Korzystając ze związków (140), (141), (142), (143) otrzymamy ogólny wzór określający masę zredukowaną

$$m_{zr} = \sum \left[m_i \left(\frac{v_i}{v_x} \right)^2 + J_{Si} \left(\frac{\omega_i}{v_x} \right)^2 \right] \quad (144)$$

oraz zredukowany moment bezwładności

$$J_{zr} = \sum \left[m_i \left(\frac{v_i}{\omega_x} \right)^2 + J_{Si} \left(\frac{\omega_i}{\omega_x} \right)^2 \right]. \quad (145)$$

Jak wynika z zależności (144) i (145), masa i moment bezwładności zredukowany, przy niezmiennych masach członów rozpatrywanego mechanizmu, jest tylko funkcją jego położenia. Aby obliczyć m_{zr} i J_{zr} niezbędna jest znajomość stosunków prędkości, które, jak i przy redukcji sił, najdogodniej jest określić np. za pomocą wykreślonego w dowolnej podziałce planu prędkości. Oczywiście, w celu określenia przebiegu zmian $m_{zr}(\varphi)$ lub $J_{zr}(\varphi)$ operacje te należy powtórzyć wielokrotnie. Stosunkowo prosto określa się m_{zr} i J_{zr} w mechanizmach wirujących, w których stosunki prędkości przełożenia występujące we wzorach (144) i (145) są stałe. Wtedy oczywiście m_{zr} i J_{zr} są niezależne od położenia. Wracając do redukcji układów dźwigniowych, w których występują zmienne przełożenia, prześledzimy prosty przykład.



Rys. 193. Redukcja mas: a) schemat układu mas, b) człon redukcji (2) ze zredukowanym momentem bezwładności (J_{zr})

Dany jest mechanizm ABC w położeniu jak na rysunku 193a. Dane są położenia środków ciężkości S_i oraz masy tych członów i ich momenty bezwładności względem środków ciężkości J_{S_i} . Należy określić moment bezwładności J_{zr} zredukowany do członu (2) (rys. 193b).

Przed wszystkim obliczymy energię kinetyczną układu przed redukcją

$$E_k = E_{k2} + E_{k3} + E_{k4},$$

czyli

$$E_k = \frac{J_{S2} \cdot \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{S2}^2}{2} + \frac{J_{S3} \cdot \omega_3^2}{2} + \frac{m_3 \cdot v_{S3}^2}{2} + \frac{m_4 \cdot v_{S4}^2}{2}.$$

Z drugiej strony energia kinetyczna E_k^* członu (2) o zredukowanym momencie bezwładności (J_{zr}) wynosi

$$E_k^* = \frac{J_{zr} \cdot \omega_2^2}{2},$$

z porównania tych energii otrzymamy

$$J_{zr} = J_{S2} + m_2 \left(\frac{v_{S2}}{\omega_2} \right)^2 + J_{S3} \left(\frac{\omega_3}{\omega_2} \right)^2 + m_3 \left(\frac{v_{S3}}{\omega_2} \right)^2 + m_4 \left(\frac{v_{S4}}{\omega_2} \right)^2.$$

Występujące we wzorze stosunki prędkości można odczytać z narysowanego w dowolnej podziałce planu prędkości.

W ten sposób, po podstawieniu dalszych danych dotyczących mas, momentów bezwładności członów oraz stosunków ich długości, można obliczyć konkretną wartość m_{zr} dla danego położenia mechanizmu. Powtarzając tę operację wielokrotnie można określić przebieg zmian m_{zr} w funkcji kąta obrotu φ członu redukcji.

13.3. Modele maszyn i równania ruchu

W celu określenia ruchu maszyny, zastępujemy złożony zwykle układ maszyny najprostszym równoważnym jej modelem. Może być nim np. pojedynczy człon o ruchu obrotowym (rys. 194a) lub postępowym (rys. 194b), obciążony odpowiednio jedną tylko parą sił czynnych M_{zrc} lub siłą czynną P_{zrc} oraz jedną tylko parą sił biernych M_{zrb} lub siłą bierną P_{zrb} .

Aby taki model był równoważny z badanym układem maszyny, członowi takiemu, którym jest zwykle człon główny, należy przypisać moment bezwładności (jeżeli jest to człon obrotowy) równy zredukowanemu momentowi bezwładności maszyny lub masę m_{zr} (jeżeli chodzi o człon o ruchu postępowym), równą masie zredukowanej maszyny. Oczywiście, również obciążające taki człon pary sił lub siły należy rozumieć jako pary sił lub siły zredukowane.

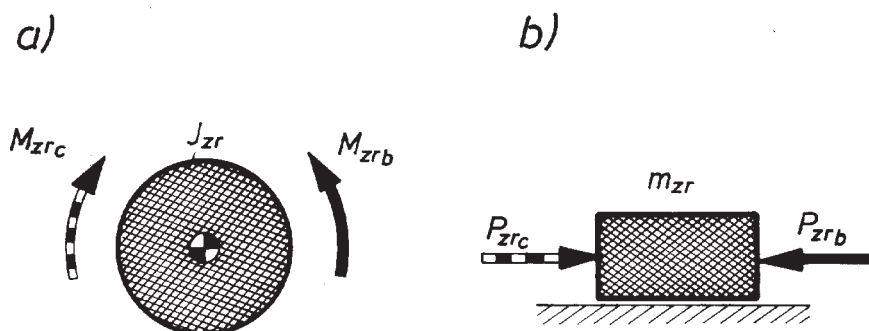
Dla takiego prostego modelu równanie ruchu można zapisać w postaci bilansu energetycznego

$$M \cdot d\varphi = d\left(\frac{1}{2}J \cdot \omega^2\right) \quad (146)$$

i

$$d\varphi = \omega \cdot dt$$

dla modelu z rys. 194a



Rys. 194. Modele dynamiczne maszyny: a) człon w ruchu obrotowym o J_{zr} ,
b) człon w ruchu postępowym o m_{zr}

oraz

$$P \cdot ds = d\left(\frac{1}{2}m \cdot v^2\right) \quad (147)$$

i

$$ds = v \cdot dt$$

dla modelu z rys. 194b.

W równaniach (146) i (147)

$$M = M_{zr_c} - M_{zr_b},$$

$$J = J_{zr},$$

ω – prędkość kątowna,

φ – kąt obrotu członu obrotowego.

$$P = P_{zr_c} - P_{zr_b}$$

$$m = m_{zr}$$

v – prędkość liniowa,

s – droga członu redukcji maszyny.

Ponieważ dogodniej jest zwykle korzystać z modeli członu obrotowego, zagadnienia ruchu maszyn omówimy więc dalej na przykładzie układu równań (146). Przede wszystkim zwróćmy uwagę, że układ równań (146) ujmuje zależność między parametrami kinematycznymi, jak: droga φ , czas t , prędkość ω , a rozkładem mas scharakteryzowanym momentem bezwładności J oraz obciążeniem momentem M . Sugeruje to, że po odpowiednich zabiegach całkowania różniczkowego układu równań (146) można rozwiązać wiele interesujących zagadnień, zwłaszcza dwa podstawowe zadania dynamiki, do których należy:

- określenie ruchu maszyny przy zadanym stanie jej obciążenia,
- określenie warunków, w których maszyna będzie realizować z góry zadany ruch.

Trzeba podkreślić, że prostota równań ruchu jest pozorna, gdyż zarówno M jak i J są zwykle wielkościami zmiennymi i zależnymi od czasu, drogi, prędkości itd. Komplikuje to zagadnienie całkowania równania do tego stopnia, że aby ominąć kłopoty rachunkowe i formalne, musimy często korzystać z różnych metod numerycznych, sposobów przybliżonych lub specjalnych metod graficznych. Niektóre problemy całkowania równań ruchu zostaną tu zilustrowane na przykładach.

1. Należy zbadać ruch wirnika o stałym momencie bezwładności $J_1 = \text{const}$. W chwili początkowej $t = t_0$, jego prędkość kątowna $\omega = \omega_0$. W tej właśnie chwili wyłączono napęd ($M_{zr_c} = 0$), a dołączono moment hamowania ($M_{zr_b} = M_1$). Prędkość wirnika w tej sytuacji będzie spadać, aż osiągnie wartość równą zero.

Można stawiać pytania:

- z jakim przyspieszeniem będzie przebiegał ruch,
- po jakim czasie t wirnik się zatrzyma ($\omega = 0$),
- ile obrotów n wykona w tym czasie,
- jaki moment hamowania M_1 należy przyłożyć, aby wirnik zatrzymał się po wykonaniu określonej drogi, itp.

Aby odpowiedzieć na te pytania napiszemy, opierając się na równaniu (146)

$$-M_1 d\varphi = d\left(\frac{J_1 \cdot \omega^2}{2}\right),$$

$$d\varphi = \omega dt.$$

Po wykonaniu różniczkowania mamy

$$-M_1 d\varphi = J_1 \omega d\omega,$$

$$d\varphi = \omega dt.$$

po podzieleniu zaś stron przez dt i podstawieniu

$$-M_1 \cdot \omega = J_1 \omega \frac{d\omega}{dt},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M_1}{J_1}.$$

Stanowi to odpowiedź na pierwsze pytanie.

Po scałkowaniu ostatniego równania otrzymamy, po uwzględnieniu warunków brzegowych,

$$\omega = -\frac{M_1}{J_1}t + \omega_0.$$

Zależność ta umożliwi sformułowanie odpowiedzi na pytanie drugie. Jeżeli jednak scałkujemy ostatnie równanie powtórnie, otrzymamy

$$\varphi = -\frac{M_1}{2J_1}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0,$$

a więc odpowiedź na pytanie trzecie i czwarte.

Był to najprostszy przypadek badania ruchu maszyny, gdy $M = \text{const}$ i $J = \text{const}$. Częściej jednak, jak już powiedziano, wielkości te są zmienne. Rozpatrzmy taki przypadek.

2. Należy określić prędkość ruchu maszyny i czas rozruchu przy następujących założeniach [14]: Zredukowany do głównego wału maszyny moment bezwładności jest stały ($J_{zr} = 2,2, \text{kg} \cdot \text{m}^2$), zredukowane zaś do głównego wału maszyny momenty sił czynnych i biernych są funkcjami prędkości maszyny

$$M_c = -0,01\omega^2 + 0,5\omega + 376,$$

$$M_b = +0,01\omega^2 + 1.$$

Dane i założenia przedstawiono na rysunku 195, z którego widać, że przy $J_{zr} = \text{const}$ prędkość maszyny ustali się na poziomie ω_u , którą łatwo określić z porównania momentów

$$M_c = M_b,$$

$$-0,01\omega^2 + 0,5\omega + 376 = 0,01\omega^2 + 1.$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$\omega^2 - 25\omega - 18\,750 = 0$$

i po rozwiązaniu

$$\omega' = \omega_u = 150, \quad (\omega'' = -125).$$

Drugie rozwiązanie oczywiście odrzucamy.

Aby poznać charakter zmian prędkości w fazie rozruchu oraz czas tego rozruchu napiszemy równanie ruchu

$$(M_c + M_b) d\varphi = d\left(\frac{J_{zr}\omega^2}{2}\right).$$

Po podstawieniu i przekształceniu otrzymamy

$$\omega^2 - 25\omega - 18\,750 = -d\omega/dt.$$

Równanie to można scałkować po rozdzieleniu zmiennych

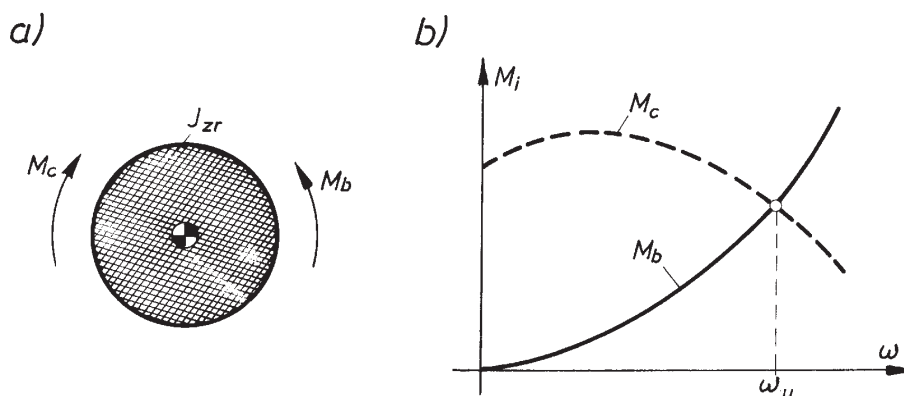
$$dt = -110 \frac{d\omega}{\omega^2 - 25\omega - 18\,750}.$$

Po dokonaniu kolejnych przekształceń i zastosowaniu zapisu

$$\omega^2 - 25\omega - 18\,750 = (\omega - 150)(\omega + 125)$$

otrzymamy równanie w postaci

$$dt = 0,4 \left[\frac{d\omega}{150 - \omega} + \frac{d\omega}{125 + \omega} \right],$$



Rys. 195. Badanie ruchu maszyny: a) model dynamiczny maszyny, b) charakterystyki mechanicznej maszyny

a po scałkowaniu

$$t = 0,4[-\ln(150 - \omega) + \ln(125 + \omega)] + C,$$

czyli inaczej

$$t = 0,4 \ln \frac{125 + \omega}{150 - \omega} + C.$$

Wyznaczamy C z warunków brzegowych $t = 0, \omega = 0$

$$C = -\ln \frac{5}{6}$$

i otrzymujemy

$$t = 0,4 \ln \frac{1,2(125 + \omega)}{150 - \omega}.$$

lub

$$\omega = 150 \frac{e^{2,5t} - 1}{e^{2,5t} + 1,2}.$$

Przebieg ostatniej funkcji przedstawiono na rysunku 196. Jest to krzywa asymptotycznie zbliżająca się do wartości $\omega = 150$. Bliższa analiza ostatnich dwóch wzorów prowadzi do wniosku, że praktycznie czas rozruchu można ustalić jako $t \cong 4s$.

3. Załóżmy z kolei, że zredukowane do głównego wału maszyny pary sił czynnych i biernych są funkcjami położenia $M_c = f_c(\varphi)$, $M_b = f_b(\varphi)$ i dane są w postaci tabeli lub wykresów (rys. 197a). Zredukowany do tego członu moment bezwładności jest stały. Maszyna jest w ruchu ustalonym. Należy określić zmianę prędkości kątowej członu redukcji w ramach jednego cyklu. W ruchu ustalonym energia kinetyczna na początku i na końcu rozpatrywanego cyklu jest taka sama, prace bowiem sił czynnych i biernych są sobie równe. A więc

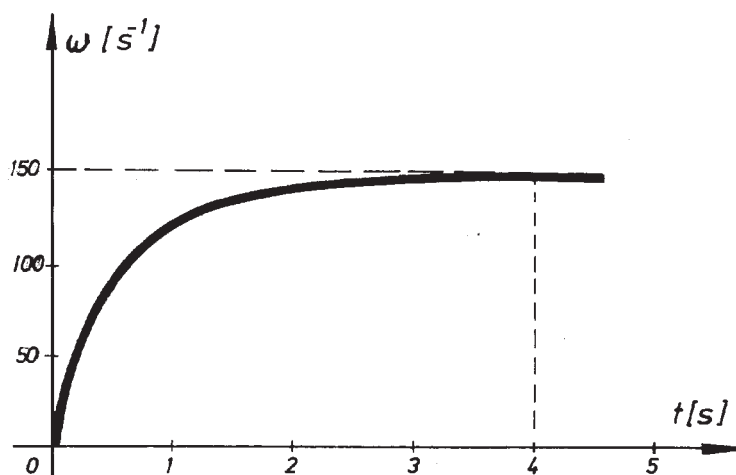
$$\int_0^{\varphi_c} M_c d\varphi = \int_0^{\varphi_c} M_b d\varphi$$

lub

$$\int_0^{\varphi_c} (M_c - M_b) d\varphi = 0.$$

Jeżeli przez F_i (rys. 197a) oznaczyć pola między krzywami $M_c(\varphi)$ i $M_b(\varphi)$, przy czym pola F_1 , F_3 i F_5 obrazują nadwyżkę, F_2 i F_4 zaś niedobór pracy sił czynnych, to

$$(F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5) \kappa_M \kappa\varphi = 0.$$



Rys. 196. Charakterystyka rozruchu badanej maszyny

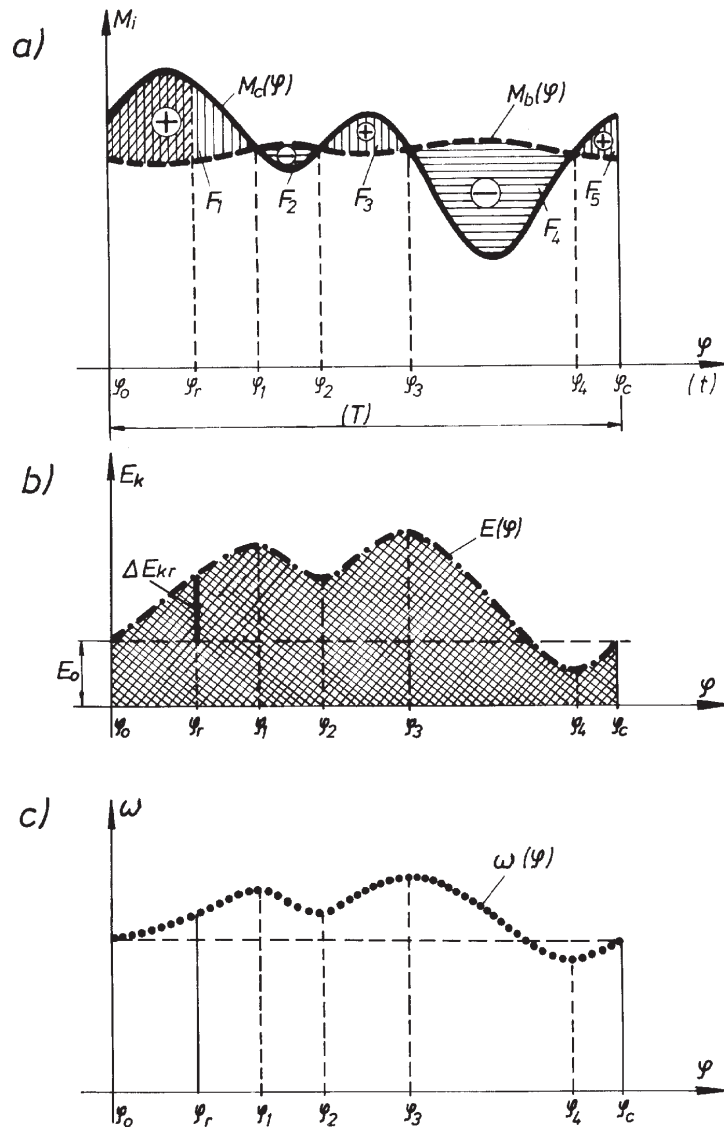
Taka równowaga istnieje w ruchu ustalonym w granicach kąta obrotu φ_c odpowiadającego okresowi T jednego cyklu.

Jeżeli jednak rozpatrzyć zagadnienie w poszczególnych chwilach ruchu, równowagi takiej nie ma. Na przykład w przedziale $0 < \varphi < \varphi_r$ istnieje nadwyżka pracy sił czynnych i reprezentuje ją zakreskowany podwójnie fragment pola F_1 . Praca ta daje przyrost energii ΔE_{kr} , przy czym

$$E_{kr} = \int_0^{\varphi_r} (M_c - M_b) d\varphi = (\Delta E_{kr}) \kappa_E.$$

Jeżeli tak obliczone przyrosty, reprezentowane w podziałce κ_E przez odcinki ΔE_{kr} (rys. 197b), odkładać od pewnego poziomu początkowego E_0 , to otrzymamy przebiegi zmiany energii kinetycznej $E(\varphi)$, np. w granicach całego cyklu. Wartość energii początkowej E_0 można ustalić w wyniku badania okresu rozruchu maszyny lub korzystając z metody wykresów Wittenbauera [2]. Przyjmując na tym etapie rozważań, że E_0 znamy, zauważmy, że krzywa $E(\varphi)$ ma ekstrema w stanach równowagi, czyli w tych położeniach, w których $M_c = M_b$. Łatwo się o tym przekonać śledząc zmianę energii, np. w pierwszym przedziale $\varphi_0 - \varphi_1$. Idąc od φ_0 do φ_1 obserwujemy omawiany już przyrost energii kinetycznej, który występuje tak długo, jak długo istnieje nadwyżka pracy sił czynnych. Nadwyżka ta znika w położeniu określonym przez φ_1 , a pojawia się niedobór pracy sił czynnych, czyli spadek energii. W położeniu φ_1 istnieje lokalne maksimum energii.

Z wykresu $E_k(\varphi)$ można otrzymać wykres zmian prędkości kątowej $\omega(\varphi)$. Skorzystamy tu ze znanego wzoru określającego energię kinetyczną członu obrotowego, z którego po przekształceniu otrzymamy



Rys. 197. Graficzne całkowanie ruchu maszyny: a) wykres zredukowanych par sił czynnych ($M_c(\varphi)$) oraz biernych ($M_b(\varphi)$), b) wykres zmian energii kinetycznej maszyny $E(\varphi)$, c) wykres zmian prędkości kątowej członu redukcji i momentu bezwładności

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_k}{J}}$$

Opierając się na tym wzorze i przy założeniu, że $J = \text{const}$, otrzymamy wykres $\omega(\varphi)$ przedstawiony przykładowo na rys. 197c. To samo zadanie można wykonać

również, gdy $J \neq \text{const}$, jeżeli tylko zmiana ta jest uprzednio określona, np. w postaci wykresu $J(\varphi)$.

Przedstawiono przykłady rozwiązywania problemów badania ruchu maszyn metodą analityczną oraz graficzną. Dziś mamy również do dyspozycji metody numeryczne, przydatne zwłaszcza wtedy, gdy problem jest bardziej złożony lub gdy np. wielkości wejściowe (przebiegi zmian obciążeń) są podane tabelarycznie.

13.4. Nierównomierność biegu maszyn

Dla większości maszyn zdecydowanie dominującym etapem ich pracy jest ruch ustalony. Charakteryzuje się on, jak wiadomo, przy stałej prędkości średniej główne-
go wału maszyny, powtarzającą się periodycznie zmianą prędkości w ramach jednego cyklu. Przyczyną tego zjawiska jest:

- zmienna na ogół zredukowana do głównego wału maszyny para sił czynnych,
- zmienne obciążenie maszyny od sił technologicznych i innych oporów szkodliwych,
- zmienny zredukowany do głównego wału maszyny jej moment bezwładności.

Powtarzające się wahania prędkości bywają nieznaczne, jak np. w pewnych maszynach wirnikowych, ale mogą być też poważne, np. w niektórych maszynach tłokowych. Taka nierównomierność biegu jest zwykle niekorzystna ze względu na sam proces technologiczny, a zawsze szkodliwa ze względu na występujące dodatkowe obciążenia dynamiczne, wywołujące z kolei szkodliwe drgania maszyny. W świetle tego zrozumiałe jest zainteresowanie tym zagadnieniem, zwłaszcza w aspekcie rozpatrywania możliwości wpływu na kształtowanie się zjawiska nierównomierności. Rozpatrzmy jeszcze raz przykładowy przebieg prędkości kątowej wału maszyny w ramach jednego cyklu (rys. 198). Przebiegi takie mogą być w zasadzie dowolnie różnorodne, zawsze jednak można tu wyróżnić dwie wartości ekstremalne ω_{\min} i ω_{\max} oraz wartość prędkości średniej $\omega_{\dot{s}r}$, którą można wyrazić następująco:

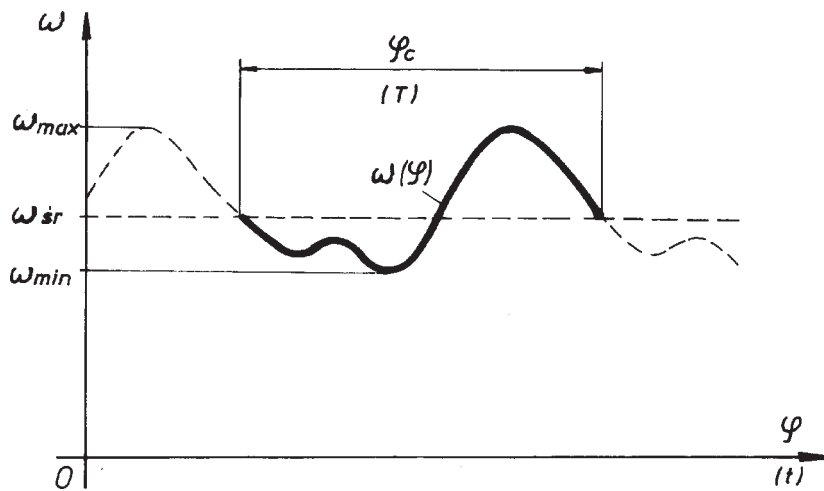
$$\omega_{\dot{s}r} = \frac{1}{T} \int_0^T \omega dt = \frac{1}{\varphi_c} \int_0^{\varphi_c} \omega d\omega = \frac{2\pi n_c}{60T}. \quad (148)$$

Te właśnie parametry wykorzystuje się do określania ilościowej strony zjawiska nierównomierności, wprowadzając jako jego miarę tzw. **współczynnik** lub **stopień nierównomierności biegu** δ . Przyjęto, że

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\dot{s}r}}. \quad (149)$$

Zwykle zakłada się w przybliżeniu

$$\omega_{\dot{s}r} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (150)$$



Rys. 198. Przykładowy przebieg zmian prędkości kątowej głównego wału maszyny

co prowadzi do wzoru

$$\delta \cong 2 \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\max} + \omega_{\min}}. \quad (151)$$

Z zależności (149) i (150) wynika również, że

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &\cong \omega_{sr} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right), \\ \omega_{\min} &\cong \omega_{sr} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right). \end{aligned} \quad (152)$$

Wyrażenia (149) i (150) umożliwiają łatwe określenie współczynnika δ , jeżeli, dysponując maszyną, zmierzmy odpowiednie jej parametry lub sporządzimy charakterystykę ruchu w postaci wykresu $\omega(\varphi)$. Ocena współczynnika δ jest niezbędna jednak już w fazie projektowania maszyny i wtedy potrzebne charakterystyki ruchu trzeba ustalić teoretycznie, np. metodami omówionymi w rozdz. 13.3. Zabiegi tego typu w fazie projektowania maszyny wiążą się z wymaganiami, by rzeczywisty współczynnik δ nie przekroczył dopuszczalnej praktycznie wartości granicznej. Dla różnych maszyn wartości te są zawarte w określonych przedziałach, co obrazują następujące przykłady:

prasy, nożyce	$\delta = 1/5 - 1/10$,
kruszątki	$\delta = 1/10 - 1/20$,
kompresory	$\delta = 1/50 - 1/100$
prądnice prądu zmiennego	$\delta = 1/300$.

W razie stwierdzenia, że projektowany obiekt charakteryzuje się niedopszczalnie dużą wartością współczynnika δ , należy ten współczynnik zmniejszyć. Można tego dokonać różnymi sposobami. Praktycznie zmniejsza się wartość współczynnika δ najczęściej przez:

- montaż dodatkowej masy np. w postaci koła zamachowego,
- dodatkowe obciążenie układu,
- odpowiednie łączenie kilku maszyn w jeden agregat.

13.5. Koła zamachowe

W określonych warunkach pracy współczynnik nierównomierności obiegu można zmniejszyć przez powiększenie jej ruchomych mas, dających dodatkowy moment bezwładności zredukowany do głównego wału maszyny. Zwykle realizuje się to przez zainstalowanie tzw. **koła zamachowego** osadzonego na wale maszyny. Koło takie akumuluje nadwyżki pracy sił czynnych w postaci energii kinetycznej i oddaje ją maszynie w okresach niedoboru pracy tych sił, czyli w okresach przewagi pracy oporów. Wyrównuje bieg maszyny, zmniejsza współczynnik δ , a ponadto – co bardzo istotne – umożliwia zastosowanie źródła napędu (silnika) o mniejszej mocy do utrzymania w ruchu takiej maszyny.

13.5.1. Przybliżona metoda określania momentu bezwładności koła zamachowego

Metoda ta opiera się na wykorzystaniu tylko funkcji zredukowanych do głównego wału maszyny par sił czynnych $M_c(\varphi)$ i biernych $M_b(\varphi)$. Przebiegi zmian momentów $M_c(\varphi)$ i $M_b(\varphi)$, dane zwykle w postaci wykresów (rys. 199a), umożliwiają poprzez całkowanie graficzne (rozdz. 3.4.5) wykreślenie przebiegu zmian energii kinetycznej E_k w funkcji kąta obrotu φ , a więc również przy założeniu, że $J_{zr} = \text{const}$ przebiegu zmian prędkości kątowej $\omega(\varphi)$. Taki wykres $\omega(\varphi)$ (rys. 199b), sporządzony dla przyjętej dowolnej wartości początkowej ω_0 , umożliwi odczytanie kątów obrotu, dla których prędkość kątowa ω osiąga wartości ekstremalne, a mianowicie φ_n dla $\omega = \omega_{\min}$ i φ_x dla $\omega = \omega_{\max}$. Równanie pracy i energii dla przedziału określonego tymi kątami i można zapisać w postaci

$$L^* = L_c - L_b = \frac{J_x \omega_{\max}^2 - J_n \omega_{\min}^2}{2}, \quad (153)$$

w której J_x, J_n są zredukowanymi momentami bezwładności maszyny (bez koła zamachowego) w położeniach φ_x i φ_n .

Korzystając z założenia, że $J_x = J_n = J$, oraz zależności (152) otrzymamy po podstawieniu do (153)

$$L^* = J \omega_{sr}^2 \cdot \delta. \quad (154)$$

Z drugiej zaś strony pracę L^* , która powoduje zmianę prędkości kątowej wału maszyny od ω_{\min} do ω_{\max} można określić

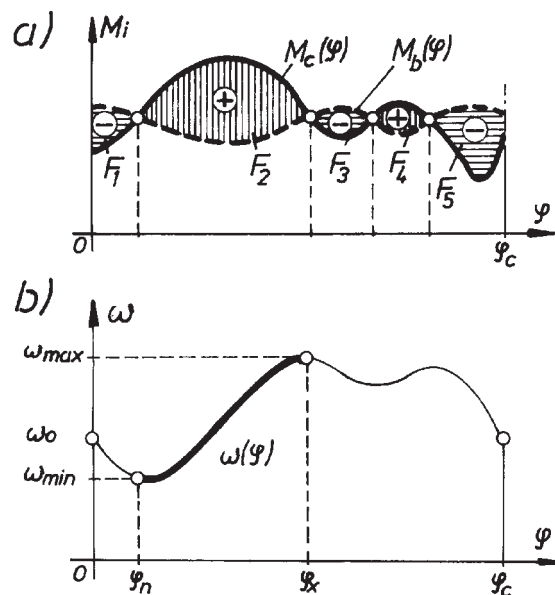
$$L^* = \int_{\varphi_n}^{\varphi_x} (M_c - M_b) d\varphi = \int_{\varphi_n}^{\varphi_x} (F_i) \kappa_M \cdot \kappa \varphi, \quad (155)$$

a więc wyznaczyć co do wartości, np. mierząc odpowiednie pola (tutaj F_2) i mnożąc wynik przez podziałki rysunku. Po stwierdzeniu, że dla tych założeń można określić pracę L^* , wróćmy jeszcze raz do wzoru (154). Ujmuje on zależność między pracą L^* , zredukowanym momentem bezwładności J , średnią prędkością kątową ω_{sr} oraz współczynnikiem nierównomierności δ .

Zależność ta umożliwi więc np. określenie współczynnika δ rozpatrywanej maszyny

$$\delta = \frac{L^*}{J \cdot \omega_{sr}^2}. \quad (156)$$

Gdyby się okazało, że obliczony współczynnik δ jest niedopuszczalnie duży i należałoby go zmniejszyć do wartości δ , to – jak widać teraz wyraźnie ze wzoru (156) – przy określonych warunkach pracy maszyny (dane ω_{sr} i L^*), można to osiągnąć tylko przez powiększenie zredukowanego momentu bezwładności J o jakąś stałą wartość J_k



Rys. 199. Określenie momentu bezwładności koła zamachowego metodą przybliżoną

$$\delta' = \frac{L^*}{(J + J_k)\omega_{sr}^2}, \quad (157)$$

czyli

$$J_k = \frac{L^*}{\omega_{sr}^2 \cdot \delta'} - J. \quad (158)$$

Wzór (158) jest przybliżonym rozwiązaniem naszego zagadnienia. Określono moment bezwładności dokładanego koła zamachowego. Przybliżenie wynika stąd, że w rozważaniach, które doprowadziły do wzoru (158) założono, że $J_x = J_n$. Pamiętając o tym będziemy stosować omawianą metodę wtedy, gdy zmienność $J_{zr}(\varphi)$ jest niezbyt duża lub zabezpieczymy się przez przyjęcie $J_x = J_n = J_{\min}$, co pociąga za sobą przewymiarowanie koła zamachowego, a więc zmniejszenie założonego współczynnika δ .

13.5.2. Kształtowanie i osadzanie koła zamachowego

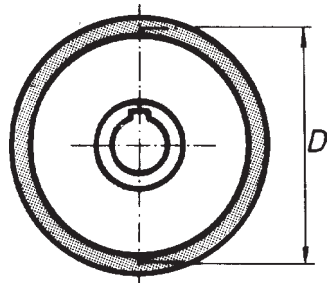
Po wyznaczeniu momentu bezwładności J_k należy dobrać odpowiednie masy, które dodane do ruchomych członów maszyny powiększą jej zredukowany moment bezwładności o tę stałą wartość. Zwykle masy te instaluje się na obrotowym wale maszyny w postaci koła zamachowego, przy czym skupia się wtedy masy przede wszystkim na jego wieńcu. Oznaczając średnią średnicę tego wieńca przez D (rys. 200), ciężar zaś koła przez G , można wyrazić jego moment bezwładności w postaci

$$J_k = mR^2 = \frac{G}{g} \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{GD^2}{4g},$$

stąd

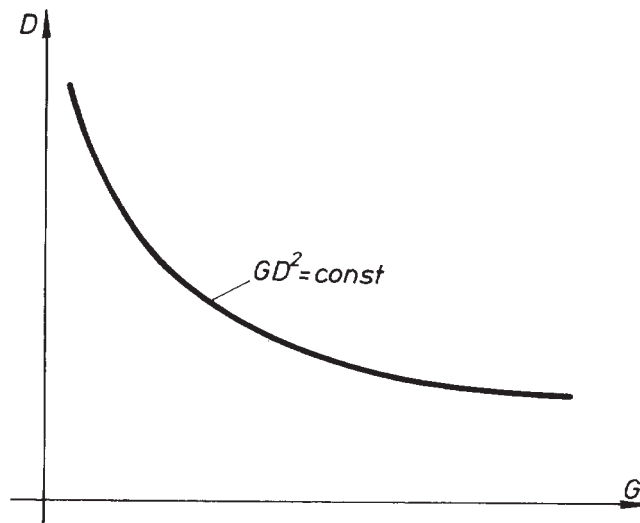
$$GD^2 = 4g \cdot J_k \cong 40J_k.$$

Wyrażenie GD^2 , które w ten sposób można obliczyć, nosi w praktyce nazwę **momentu zamachowego**. Po jego wyznaczeniu można jeden z występujących tu parametrów G i D założyć, drugi obliczyć. Zanim założymy wartość jednego z tych



Rys. 200. Koło zamachowe

parametrów, przyjrzyjmy się przebiegowi funkcji $GD^2 = \text{const}$ (rys. 201). Jak widać, ten sam efekt można uzyskać bardzo różnym kosztem. Na konkretne rozwiązanie zdecydujemy się dopiero po analizie konstrukcji samej maszyny i warunków jej pracy. Należy zwrócić również uwagę na fakt, że górny wymiar średnicy D jest, przy określonej prędkości kątowej koła, ograniczony własnościami materiałowymi. Każ-

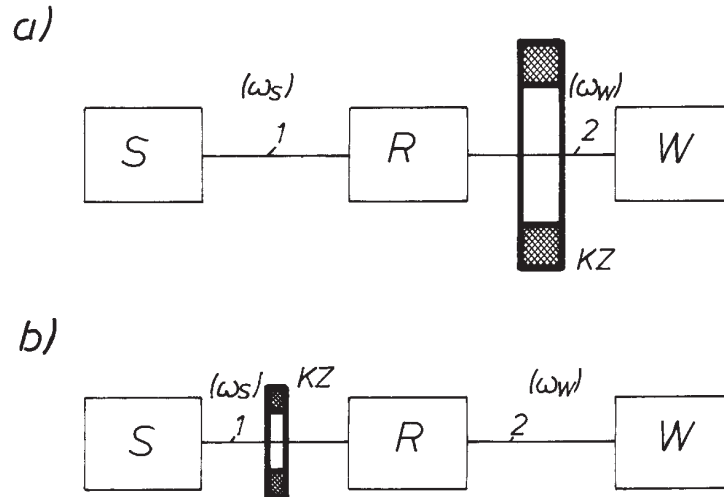


Rys. 201. Problem doboru parametrów koła zamachowego

dy materiał ma pewną krytyczną prędkość obwodową v_k , której przekroczenie grozi pęknięciem wieńca. Przykładowo dla wieńca żeliwnego prędkość taka $v_k = 36$ m/s. Oddzielnym zagadnieniem jest wybór miejsca montażu koła zamachowego decydującego o rozkładzie obciążeń dynamicznych. W omówionej metodzie wyznaczono moment J_k zredukowany do głównego wału maszyny. Decydując się na umieszczenie koła zamachowego na innym wale, o innej prędkości kątowej, należy dokonać odpowiedniej redukcji. Należy przy tym pamiętać, że różnice wymiarów kół zamachowych mogą być bardzo istotne ze względu na to, że $J_k = f(\omega^2)$. Problem ten zobrazowano poglądowo na rys. 202. Przedstawiono tu typową maszynę roboczą złożoną z silnika S , przekładni redukcyjnej R oraz organu wykonawczego W . Najogólniej można wykorzystać do montażu koła zamachowego wałek (1) o wysokiej prędkości obrotowej n_S silnika lub wałek (2) o prędkości roboczej n_W zredukowanej przez przekładnię redukcyjną ($n_S > n_W$). Przy obu rozwiązaniach uzyskuje się ten sam efekt zmniejszenia współczynnika nierównomierności biegu, lecz przy zdecydowanie różnych masach kół zamachowych

$$\frac{J_{kS}}{J_{kW}} = \left(\frac{n_W}{n_S} \right)^2.$$

Oczywiście, różne są również w obu przypadkach (rys. 202) skutki w sensie obciążeń dynamicznych poszczególnych podzespołów i ich elementów. Te ostatnie zależą przecież od tego, co jest źródłem zakłóceń ruchu S czy W . Mając to na uwadze, należy kierować się zasadą: koło zamachowe możliwie najbliżej źródła zakłóceń ruchu.



Rys. 202. Problem wyboru miejsca montażu koła zamachowego

13.6. Obciążenia korygujące

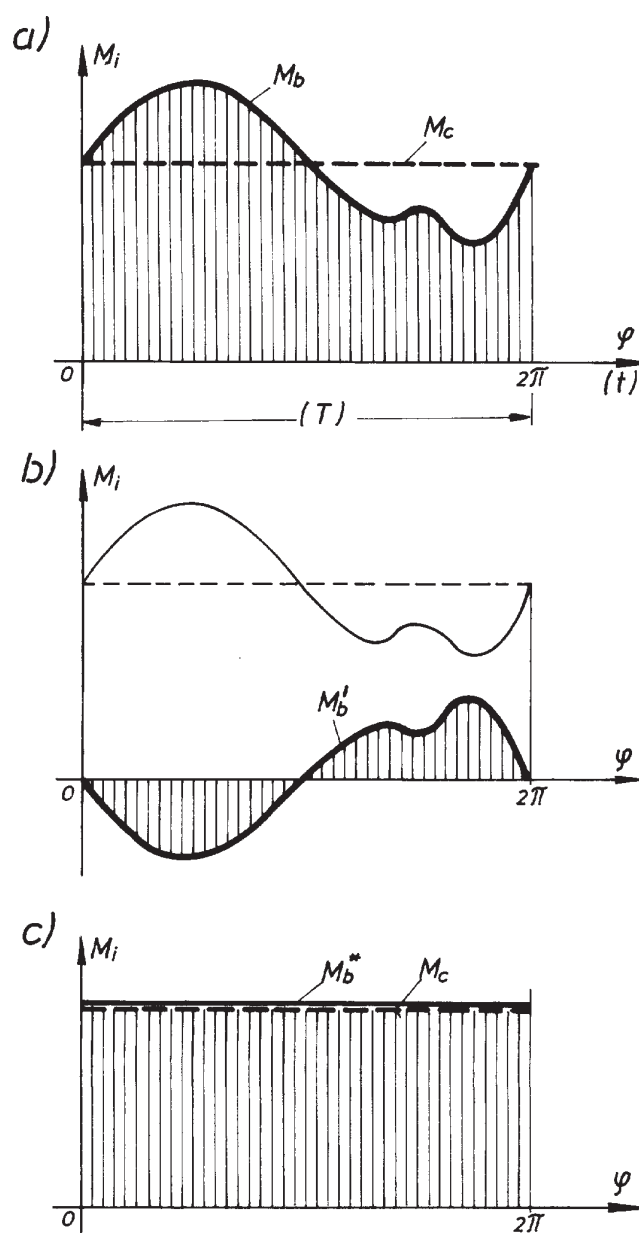
Idea omawianego zabiegu polega na dodatkowym obciążeniu rozpatrywanej maszyny w taki sposób, by w sumie uzyskać oczekiwany efekt zmniejszenia współczynnika nierównomierności biegu δ . Wyjaśnimy ten problem na prostym przykładzie. Niech będzie dana maszyna, w której zredukowany do głównego wału moment bezwładności jest stały ($J_{zr} = \text{const}$) zredukowany moment sił czynnych jest stały ($M_{c_{zr}} = M_c = \text{const}$), a zredukowany moment obciążeń biernych M_b zmienia się cyklicznie (rys. 103a). Przyczyną nierównomierności biegu jest $\Delta M = M_c - M_b$. Przyczynę tę można zlikwidować, przykładając do głównego wału maszyny moment korygujący $M'_b = \Delta M$ (rys. 203b). W wyniku takiego zabiegu otrzymamy obciążenie głównego wału maszyny momentem M_b^* (rys. 203c), przy czym

$$M_b^* = M_b + M'_b = M_c. \quad (159)$$

Idea jest prosta i sugestywna – należy ją tylko próbować rozwiązać praktycznie. Na początek należy zauważyć, że w ruchu ustalonym zawsze całkowita praca momentu korygującego M'_b w ramach jednego cyklu lub wielokrotności tych cykli równa się zeru

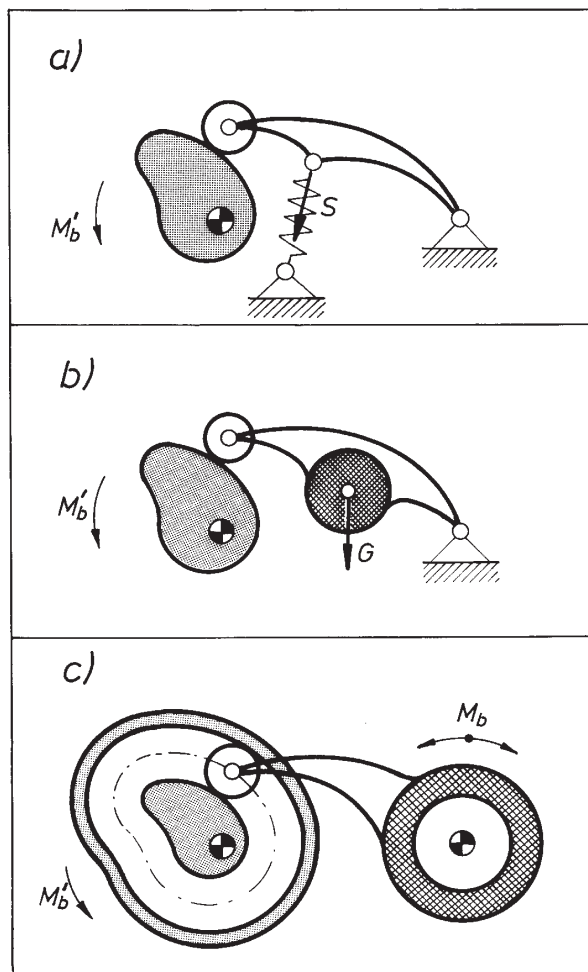
$$\int_0^{\varphi_c} M'_b d\varphi = 0.$$

Oznacza to, że teoretycznie skorygowanie obciążenia maszyny może odbyć się bez dodatkowych nakładów energetycznych. Potwierdzają to również przykłady praktycz-



Rys. 203. Wyrównywanie biegu maszyn poprzez dodatkowe obciążenie głównego wału maszyny:
 a) zadane przebiegi zmian M_c i M_b , b) przebieg zmian potrzebnego momentu dodatkowego,
 c) rezultat dodatkowego obciążenia

ných rozwiązań tego problemu zaproponowanych w pracy [15]. Na rysunku 204 przedstawiono trzy przykłady mechanizmów krzywkowych, w których krzywka jest osadzona na głównym wale maszyny. Siła sprężyny S (rys. 204a), ciężaru G (rys. 204b), lub moment sił bezwładności M_b (rys. 204c), przy odpowiednim doborze parametrów



Rys. 204. Przykłady mechanizmów realizujących dodatkowe obciążenie głównego wału maszyny:
 a) mechanizm krzywkowy sprężynowy, b) mechanizm krzywkowy grawitacyjny,
 c) mechanizm krzywkowy bezwładnościowy

mechanizmu krzywkowego, wywołują obciążenie głównego wału maszyny, tj o przebiegu określonym równaniem (159), pożądanym momentem korygującym M_b' . Nie trudno zauważyć, że rozwiązanie z wykorzystaniem siły ciężkości (rys. 204b) nadaje się do układów wolnobieżnych, rozwiązanie zaś bezwładnościowe (rys. 204c) do układów szybkobieżnych.

Omawiane rozwiązania zostały z powodzeniem wypróbowane w pewnych maszynach ceramicznych [15]. Zainstalowanie tego typu mechanizmów doprowadziło tam do istotnego zwiększenia wydajności tych maszyn.

14. Wyważanie

Podczas ruchu członów ze zmienną prędkością działają na nie siły bezwładności. Siły te, poza niektórymi specjalnymi urządzeniami, jak wibratory, wstrząsarki, przesiewacze itp., są zwykle niekorzystne dla pracy maszyny. Jako obciążenia zmienne okresowo, na skutek cyklicznego ruchu maszyny, stanowią niepożądane dynamiczne obciążenia członów i par kinematycznych układu są źródłem drgań poszczególnych podzespołów i całych obiektów. Te niezrównoważone w mechanizmie siły bezwładności mogą przenosić się poprzez fundament na inne maszyny oraz wpływać ujemnie na pracujące w sąsiedztwie urządzenia. Jak wiadomo, zjawisko to jest szczególnie groźne wtedy, gdy częstotliwość drgań własnych maszyny jest bliska częstotliwości zmian sił wymuszających.

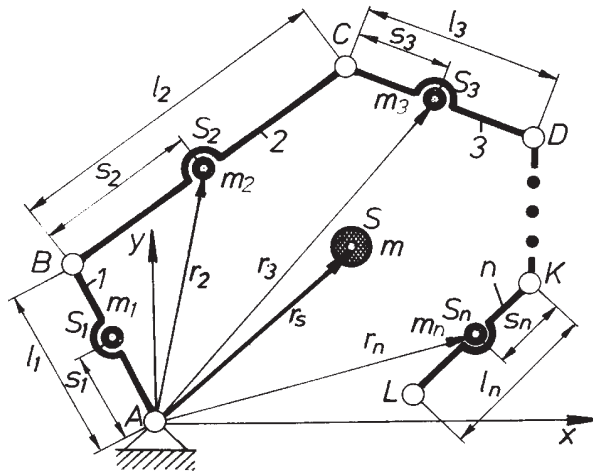
W celu usunięcia szkodliwego wpływu sił bezwładności na pracę maszyny należy je wyrównoważyć. Uzyskuje się to przez odpowiedni dobór lub korekcję rozkładu mas maszyny tak, by w czasie jej ruchu siły bezwładności wyrównoważyły się całkowicie lub przynajmniej częściowo. Najkorzystniej byłoby oczywiście, aby siły bezwładności każdego z członów stanowiły samowyrównoważony układ sił. Ten sposób usunięcia nacisków dynamicznych na elementy par kinematycznych jest możliwy tylko w przypadku członów obrotowych o nieruchomej podstawie. W pozostałych przypadkach występowanie nacisków dynamicznych jest nieuniknione, ze względu na cykliczność ruchu. Wtedy dąży się do wyrównoważenia całkowitego lub przynajmniej częściowego układu sił bezwładności całego mechanizmu czy maszyny.

Można więc sformułować następujące zadania wyrównoważenia sił bezwładności:

- całkowite lub częściowe wyrównoważenie siły wypadkowej i momentu sił bezwładności mechanizmu,
- wyrównoważenie sił bezwładności członów obracających się wokół osi nieruchomych.

14.1. Określanie środka ciężkości mechanizmów

Podczas wyrównoważania sił bezwładności, zwłaszcza układów dźwigniowych, bardzo przydatna jest znajomość ruchu środka ciężkości mechanizmu w cyklu jego pracy. Omówimy jeden z mniej znanych sposobów wyznaczania środka ciężkości układu mechanicznego. Niech będzie dany łańcuch kinematyczny przedstawiony na rys. 205, w którym znane są długości członów l_i , odległości s_i określające położenia środków



Rys. 205. Łańcuch kinematyczny i jego środek ciężkości

ciężkości S_i oraz masy m_i . Dla przyjętego układu współrzędnych można napisać równania momentów statycznych

$$m \cdot x_s = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot x_{s_i}, \quad (160)$$

$$m \cdot y_s = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot y_{s_i} \quad (161)$$

gdzie: $m = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$,

x_s, y_s – współrzędne środka ciężkości układu,

x_{s_i}, y_{s_i} – współrzędne środków ciężkości członów układu.

Po uwzględnieniu zależności (160) i (161) można napisać inaczej

$$m \cdot \bar{r}_s = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot \bar{r}_i, \quad (162)$$

gdzie: r_s – promień–wektor określający położenie środka ciężkości mechanizmu,

r_i – promień–wektor określający położenie środka ciężkości i -tego członu mechanizmu.

Jak widać z rysunku 205, każdy z wektorów r_i można wyrazić

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1 &= \bar{s}_1, \\
\bar{r}_2 &= \bar{l}_1 + \bar{s}_2, \\
\bar{r}_3 &= \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{s}_3, \\
\mathbf{L} \mathbf{L} \mathbf{L} \mathbf{L} \mathbf{L} \\
\bar{r}_3 &= \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \mathbf{K} + \bar{l}_{i-1} + \bar{s}_i.
\end{aligned} \tag{163}$$

po podstawieniu (163) do (162) i przekształceniach otrzymano

$$m \cdot \bar{r}_s = [m_1 \cdot \bar{s}_1 + (m_2 + m_3 + \mathbf{K} + m_n) \bar{l}_1] + [m_2 \cdot \bar{s}_2 + (m_3 + m_4 + \mathbf{K} + m_n) \bar{l}_2] + \mathbf{K} + [m_n \cdot \bar{s}_n];$$

lub

$$\bar{r}_s = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{h}_i \tag{164}$$

gdzie

$$\bar{h}_i = \frac{m_i \cdot \bar{s}_i + (m_{i+1} + m_{i+2} + \mathbf{K} + m_n) \bar{l}_i}{m}. \tag{165}$$

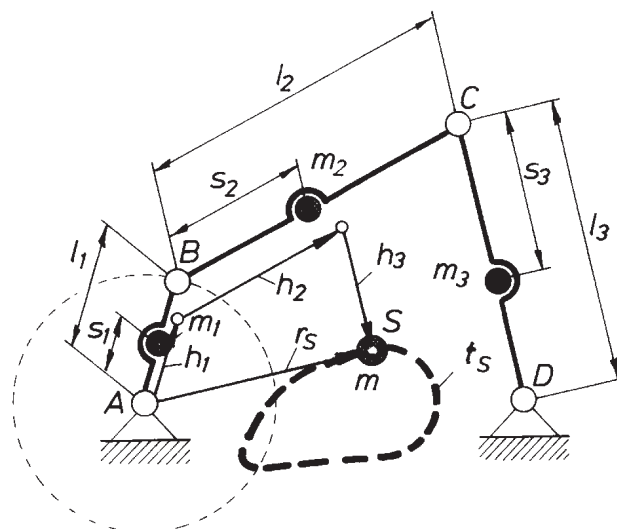
Jak wynika z zależności (165), wektory \bar{h}_i przyjmują kierunki równoległe do kierunków członów oraz są stałe co do modułów w każdym położeniu układu mechanicznego. Noszą one nazwę **wektorów głównych**. Stosując wektory główne można dla każdego układu wyznaczyć położenie środka ciężkości w dowolnym położeniu mechanizmu, a powtarzając ten prosty zabieg – wykreślić bez trudu całą trajektorię t_s środka ciężkości układu.

Pokażemy to na przykładzie czworoboku przegubowego $ABCD$ (rys. 206). Stosując oznaczenia jak na rysunku, położenie środka ciężkości S opiszemy

$$\bar{r}_s = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\bar{h}_1 &= \frac{m_1 \cdot \bar{s}_1 + (m_2 + m_3) \bar{l}_1}{m}, \\
\bar{h}_2 &= \frac{m_2 \cdot \bar{s}_2 + m_3 \cdot \bar{l}_3}{m}, \\
\bar{h}_3 &= \frac{m_3 \cdot \bar{s}_3}{m}.
\end{aligned} \tag{165a}$$



Rys. 206. Czworobok przegubowy $ABCD$ wraz z łańcuchem wektorów głównych h_i określającym położenie środka ciężkości

Kolejne położenie środka ciężkości, a więc i jego trajektorię t_s znajdziemy rysując wieloboki tych samych wektorów $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$, równoległe do odpowiednich członów we wszystkich położeniach układu mechanicznego.

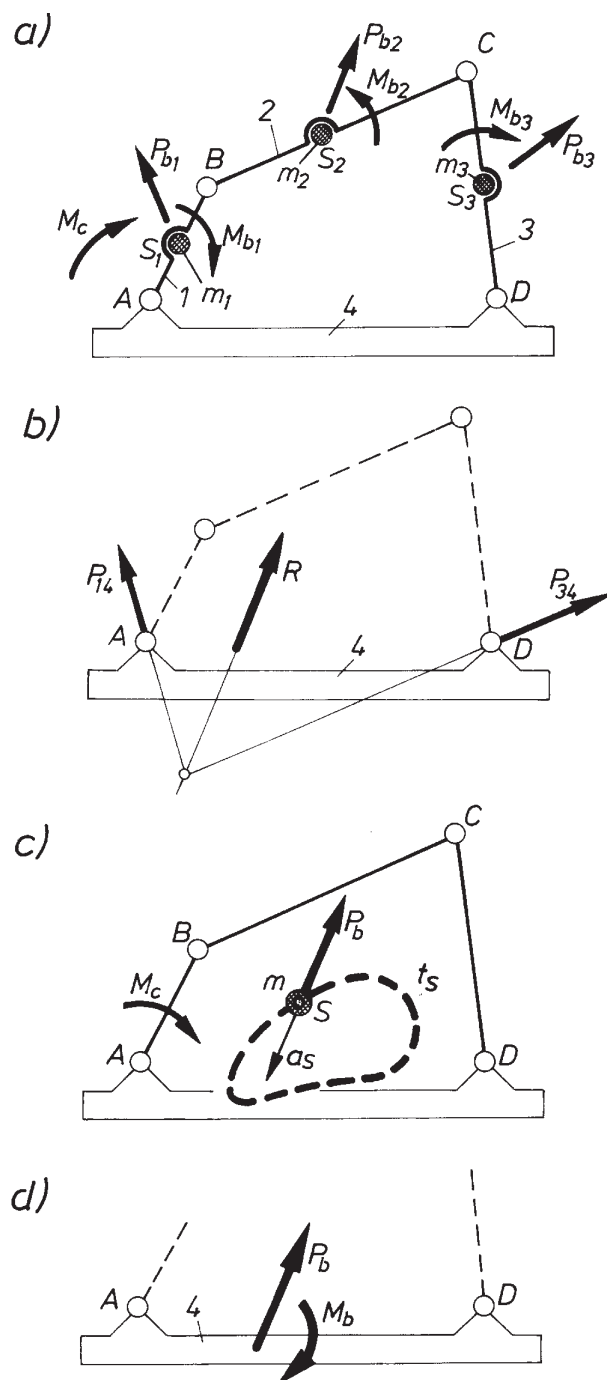
Przedstawiony sposób określania ruchu środka ciężkości całego układu można zastosować skutecznie również do wyważania mechanizmów.

14.1. Wyważanie mechanizmów dźwigniowych

Jak już wspomniano, siły bezwładności działające na poszczególne człony układu kinematycznego obciążają w rezultacie jego podstawę. Przeanalizujemy dla przykładu czworobok przegubowy $ABCD$ (rys. 207a), w ruchu podtrzymywanym momentem czynnym M_c . Pomińmy siły ciężkości, tarcia i inne obciążenia zewnętrzne. Przy takich założeniach człon (1) obciążony jest momentem M_c i M_{b1} oraz siłą bezwładności P_{b1} , człony (2) i (3) zaś tylko siłami bezwładności P_{b2} i P_{b3} i momentami M_{b2} i M_{b3} . W wyniku ich działania podstawa (4) tego układu jest obciążona siłami P_{14} i P_{34} , czyli w efekcie siłą wypadkową R (rys. 207b). Siła ta jest cyklicznie zmienna i wywołuje omówione poprzednio skutki. Obciążenie podstawy można wyznaczyć również inaczej. W czasie ruchu mechanizmu wspólny środek ciężkości S wszystkich ruchomych członów przemieszcza się po określonym torze t_s (rys. 207c). Doznaje przyspieszenia a_s , a więc można mu przypisać siłę bezwładności P_b , przy czym

$$\bar{P}_b = -m \cdot \bar{a}_s, \quad (166)$$

gdzie: m – masa układu członów ruchomych.



Rys. 207. Interpretacja obciążenia podstawy mechanizmu siłami bezwładności: a) mechanizm obciążony siłami bezwładności, b) wypadkowe obciążenie podstawy, c) P_b – siła bezwładności działająca na masę całego członu, d) obciążenie podstawy przez P_b i M_b

Jak widać

$$\bar{P}_b = \sum \bar{P}_{bi}. \quad (167)$$

Tak więc podstawę (4) omawianego czworoboku obciąża wypadkowa siła bezwładności P_b (rys. 207d). Podstawę (4) obciąża również wypadkowy moment M_b reprezentujący wszystkie momenty działające na ruchome człony mechanizmu

$$M_b = \sum M_{bi} + M_c. \quad (168)$$

Poprzez korekcję rozkładu mas poszczególnych członów można wpływać na P_b oraz M_b . Taki zabieg nazywa się wyważaniem, przy czym rozróżnia się dwa przypadki:

1. Wyważanie statyczne – gdy prowadzi do wyniku $P_b = 0$, ale $M_b \neq 0$.
2. Wyważanie dynamiczne – gdy otrzymuje się $P_b = 0$ i $M_b = 0$.

Drugi przypadek jest praktycznie trudny do uzyskania i nie będziemy go tu omawiać. Rozważmy przypadek 1.

14.2.1. Wyważanie statyczne mechanizmów dźwigniowych

Mechanizm dźwigniowy nazywamy wyważonym statycznie wtedy, gdy wypadkowa sił bezwładności jego członów dla dowolnego położenia mechanizmu równa się zero, czyli

$$\bar{P}_b = -m \cdot \bar{a}_s = 0. \quad (169)$$

W układach rzeczywistych warunek (169) jest spełniony tylko wtedy, gdy

$$\bar{a}_s = 0,$$

to zaś zachodzi, gdy

- a) środek ciężkości mechanizmu porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym,
- b) środek ciężkości mechanizmu jest nieruchomy.

W układach dźwigniowych charakteryzujących się ruchem cyklicznym może być spełniony tylko warunek b. Rozważmy ten przypadek.

Jak można wykazać, środek ciężkości całego układu będzie nieruchomy wtedy, gdy

$$\bar{r}_s = \text{const.} \quad (170)$$

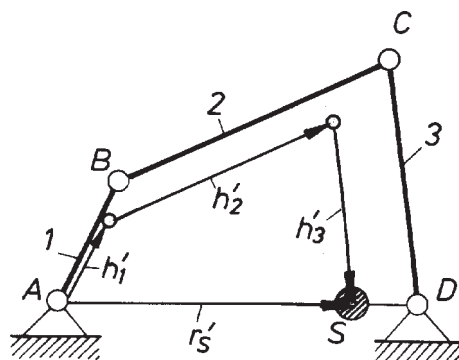
Można to uzyskać przez korekcję rozkładu masy na poszczególnych członach.

Pokażemy to na przykładach.

Czworobok przegubowy

Niech będą dane długości członów l_i , odległości s_i i masy m_i tego układu (rys. 206). W wyniku wyważenia musimy doprowadzić do tego, by środek ciężkości pozostał nieruchomy (rys. 208). Zajdzie to wtedy, gdy

$$\frac{\bar{h}'_1}{l_1} = \frac{\bar{h}'_2}{l_2} = \frac{\bar{h}'_3}{l_3},$$



Rys. 208. Czworobok przegubowy $ABCD$ wyważony statycznie (łańcuch wektorów głównych \bar{h}_i podobny do mechanizmu)

gdzie \bar{h}_i – wektory główne po korekcji mas członów.

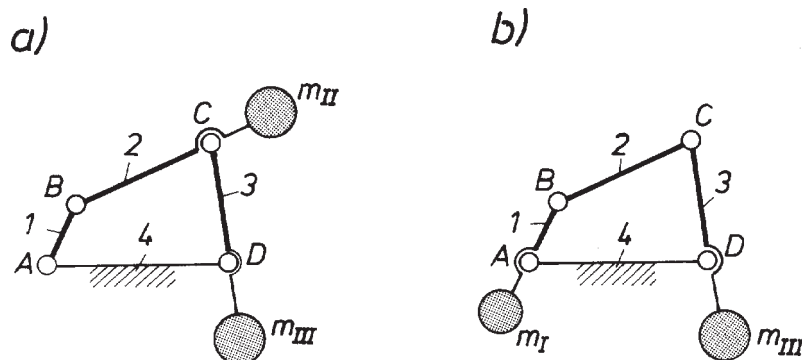
Aby wyznaczyć wielkość niezbędnych przeciwcieżarów i określić ich rozmieszczenia, rozpiszemy ten układ równań w postaci

$$\frac{\bar{h}'_1}{l_1} = \frac{\bar{h}'_3}{l_3}; \quad \frac{\bar{h}'_2}{l_2} = \frac{\bar{h}'_3}{l_3}$$

lub po wyrażeniu wektorów głównych w czworoboku

$$\begin{aligned} [m_1' \cdot s_1' + (m_2' + m_3')l_1]l_3 &= m_3' \cdot s_3' \cdot l_1 \\ [m_2' \cdot s_2' + m_3' \cdot l_2]l_3 &= m_3' \cdot s_3' \cdot l_2. \end{aligned} \quad (170a)$$

W układzie równań (170a) występuje 6 niewiadomych m_1' , m_2' , m_3' , s_1' , s_2' i s_3' , z których dwie można obliczyć. W zależności od tego, które wielkości założymy, otrzymamy (przedstawione na rys. 209) podstawowe kombinacje wyważenia statycznego czworoboku. Pozostaniemy przy wersji a (rys. 210), przyjmując jako dane



Rys. 209. Przypadki wyważenia statycznego czworoboku $ABCD$

$$m_1' = m_1,$$

$$m_2' = m_2 + m_E,$$

$$m_3' = m_3 + m_F,$$

$$s_1' = s_1.$$

Pozostałe wymiary s_3' i s_2' , określające położenie mas zastępczych m_2' i m_3' obliczymy z równań (170a)

$$s_3' = \frac{[m_1' \cdot s_1' + (m_2' + m_3') l_1] l_3}{m_3' \cdot l_1}$$

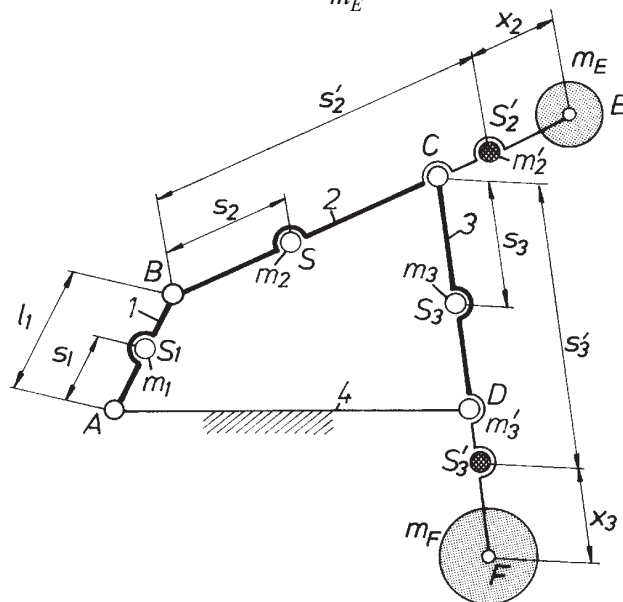
$$s_2' = \frac{m_3' \cdot s_3' \cdot l_2 - m_3' \cdot l_2 \cdot l_3}{m_2' \cdot l_3}.$$

Wielkości te umożliwiają ostateczne określenie miejsca usytuowania przeciważarów E i F . Dla rozpatrywanych członów (2) i (3) (rys. 210) napiszemy z warunku równowagi

$$m_2 (s_2' - s_2) = m_E \cdot x_2,$$

stąd

$$x_2 = \frac{m_2 (s_2' - s_2)}{m_E},$$



Rys. 210. Wyważanie statyczne czworoboku przegubowego ABCD

oraz

$$m_3 (s_3' - s_3) = m_F \cdot x_3,$$

stąd

$$x_3 = \frac{m_3 (s_3' - s_3)}{m_F}.$$

Ostateczne położenie mas dodatkowych m_E i m_F wyznaczymy z równości

$$l_{CE} = s_2' - l_{BC} + x_3,$$

$$l_{DF} = s_3' - l_{CD} + x_3.$$

Mechanizm korbowo-wodzikowy

W mechanizmie korbowo-wodzikowym niewyważonym (rys. 211) wspólny środek ciężkości S zakreśla trajektorię t_s . Aby uzyskać wyważenie statyczne należy doprowadzić do sytuacji, w której spełniony jest warunek (170). W tym mechanizmie znajdzie to wtedy, gdy

$$\bar{h}_1 = 0 \text{ i } \bar{h}_2 = 0. \quad (171)$$

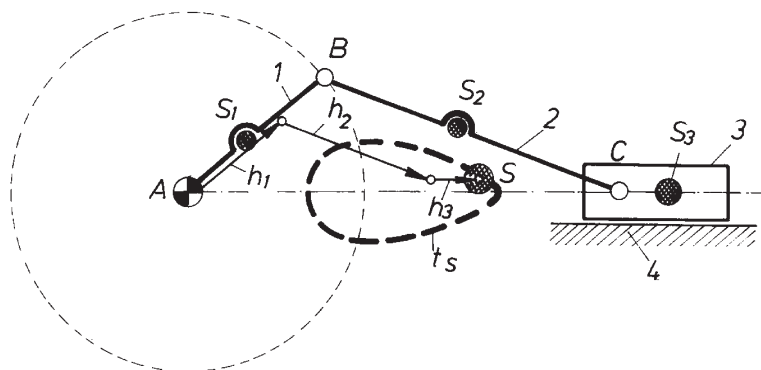
Warunek (171) można, korzystając z zależności (165) i (165a), napisać w postaci

$$m_1' \cdot s_1' + l_1 (m_2' + m_3') = 0, \quad (172)$$

$$m_2' \cdot s_2' + l_2 \cdot m_3' = 0.$$

Z układu równań (172) można obliczyć dwie niewiadome; np. zakładając współrzędne s_i' można obliczyć masę członów m_i'

$$m_1' = -\frac{l_1}{s_1'} (m_2' + m_3'),$$



Rys. 211. Tor środka ciężkości układu wyznaczony metodą wektorów głównych

$$m_2' = -\frac{l_2}{s_2'} m_3'$$

Wyniki te sugerują, że efekt wyważenia statycznego można uzyskać rozbudowując człony (1) i (2) o przeciwwagi E i F (rys. 212) o masach m_E i m_F , przy czym

$$m_E = m_2' - m_2,$$

$$m_F = m_1' - m_1,$$

Niestety, jak się okazuje, masy przeciwwag zapewniających wyważenie statyczne wychodzą stosunkowo duże.

Dla ilustracji liczbowej przytoczmy konkretny przykład. Do wyważenia przyjęto układ, w którym pierwotnie masy poszczególnych członów wynosiły:

$$m_1 = 2 \text{ kg}, \quad m_2 = 3 \text{ kg}, \quad m_3 = 1 \text{ kg},$$

$$l_1 = 80 \text{ mm}, \quad l_2 = 200 \text{ mm},$$

$$s_1 = 30 \text{ mm}, \quad s_2 = 100 \text{ mm}.$$

Dla efektu wyważenia statycznego należałoby w tym przypadku zamocować przeciwwagę E na przyjętej odległości

$$BE = 71,5 \text{ mm} \text{ o masie } m_E = 7 \text{ kg}$$

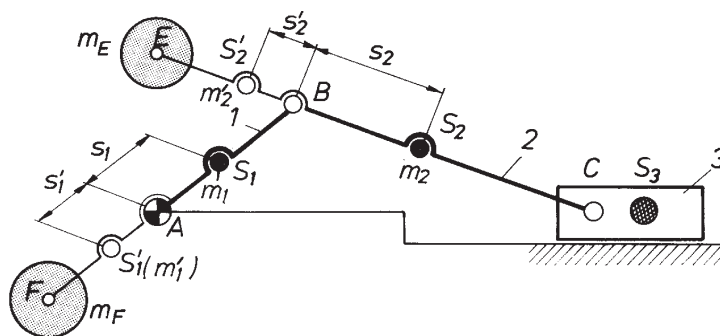
oraz przeciwwagę F na założonej odległości

$$AF = 85 \text{ mm} \text{ o masie } m_F = 20 \text{ kg}.$$

Są to wyniki rzeczywiście nie zachęcające do stosowania. W tej sytuacji częściej stosuje się wyważenie częściowe.

Częściowe wyważenie układu korbowo-wodzikowego

W rozpatrywanym układzie ABC (rys. 213a) człony AB i BC o masie ciągłej zastąpimy ich modelami złożonymi z dwóch mas ulokowanych w parach kinematycznych. Człon AB (rys. 213b), zastąpimy więc masami m_{A1} , m_{B1} , człon BC – masami m_{B2} i m_{C2} . W rezultacie otrzymamy model badanego układu z rys. 213a przedstawiony na rys. 213c.



Rys. 212. Wyważenie statyczne układu korbowo-wodzikowego ABC

Dla tego przypadku

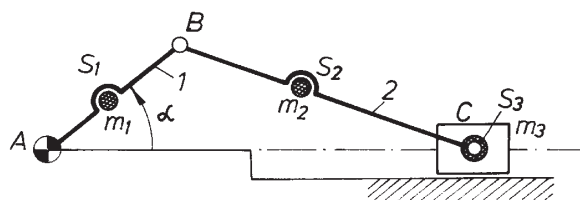
$$m_B = m_{B1} + m_{B2} \quad (173)$$

$$m_C = m_{C2} + m_3$$

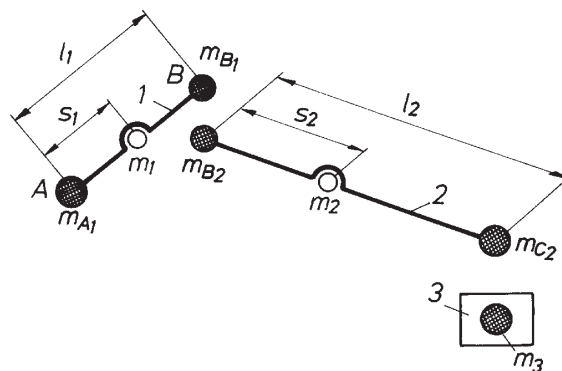
oraz

$$m_{B1} = m_1 \frac{s_1}{l_1}; \quad m_{B2} = m_2 \frac{l_2 - s_2}{l_2}; \quad m_{C2} = m_1 \frac{s_2}{l_2}.$$

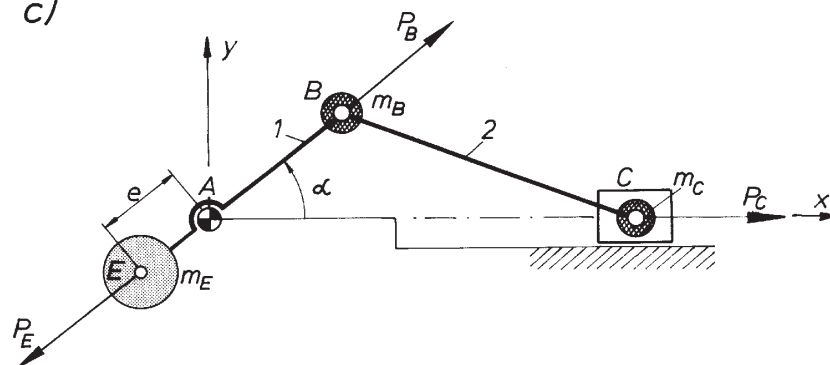
1)



b)



c)



Rys. 213. Wyważanie statyczne (częściowe) układu korbowo-wodzikowego ABC: a) schemat mechanizmu, b) masowe modele członów ruchomych układu, c) układ ABC z przeciwwagą E

Na przedłużeniu korby (1) umieścimy przeciwwagę E o masie m_E i założymy ruch korby ze stałą prędkością kątową $\omega_1 = \text{const}$. Przy tych założeniach na ruchome masy m_B , m_C , m_E działają siły bezwładności

$$\begin{aligned}\bar{P}_B &= -m_B \cdot \bar{a}_B, \\ \bar{P}_C &= -m_C \cdot \bar{a}_C, \\ \bar{P}_E &= -m_E \cdot \bar{a}_E\end{aligned}\tag{174}$$

po podstawieniu odpowiednich wzorów na przyspieszenia:

$$\begin{aligned}\bar{P}_B &= -m_B \cdot l_1 \cdot \omega_1^2, \\ \bar{P}_C &= m_C \cdot l_1 \cdot \omega_1^2 (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha + \mathbf{K}), \\ \bar{P}_E &= -m_E \cdot e \cdot \omega_1^2.\end{aligned}\tag{175}$$

Rzutując te siły na osie układu współrzędnych otrzymamy

$$\begin{aligned}\underline{m_B \cdot l_1 \cdot \omega_1^2} \cos \alpha + m_C \cdot l_1 \cdot \omega_1^2 (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha + \mathbf{K}) &= \underline{m_E \cdot e \cdot \omega_1^2} \cos \alpha, \\ \underline{m_B \cdot l_1 \cdot \omega_1^2} \sin \alpha &= \underline{m_E \cdot e \cdot \omega_1^2} \sin \alpha.\end{aligned}\tag{176}$$

Jak widać z układu równań (176), obydwa równania nie mogą być spełnione jednocześnie (uwaga na składniki podkreślone). Oznacza to, że siła bezwładności jednej przeciwwagi E nie może zrównoważyć wyższych harmonicznych siły bezwładności masy m_C w ruchu posuwisto-zwrotnym. Przy zastosowaniu tylko jednej przeciwwagi (na korbie) zawsze pozostają w czasie ruchu niezrównoważone siły bezwładności wyższego rzędu mas wozdżika o ruchu posuwisto-zwrotnym, mające kierunek osiowy

$$m_C \cdot l_1 \lambda \omega_1^2 \cos 2\alpha + \mathbf{K}$$

Ze względu na małą wartość $\lambda = l_1/l_2$ można na ogół takie niezrównoważenie dopuścić, zwłaszcza wtedy, gdy chodzi o siły wyższego niż drugiego rzędu – ich wartości są proporcjonalne do potęg λ .

Zachowując w równaniach (176) tylko siły pierwszego rzędu otrzymamy

$$\begin{aligned}(m_B + m_C)l_1 \omega_1^2 \cos \alpha &= m_E \cdot e \omega_1^2 \cos \alpha, \\ m_B \cdot l_1 \omega_1^2 \sin \alpha &= m_E \cdot e \omega_1^2 \sin \alpha.\end{aligned}\tag{177}$$

Z równań (177) widać, że i przy tych uproszczeniach możliwe jest tylko częściowe zrównoważenie sił pierwszego rzędu.

Przeanalizujemy trzy przypadki:

1. Masę przeciwwagi można przyjąć tak, by w każdej chwili ruchu było spełnione drugie równanie układu (177). Oznacza to wyważenie tylko mas obrotowych. Dla tego przypadku

$$m_B \cdot l_1 = m_E' \cdot e,$$

czyli

$$(178)$$

$$m_E' = m_B \frac{l_1}{e},$$

W czasie ruchu pozostaje wtedy nierównoważona zmienna siła bezwładności P_C (rzędu pierwszego) mas w ruchu posuwisto-zwrotnym mająca kierunek osi cylindra (osi x):

$$P_C' = m_C \cdot l_1 \cdot \omega_1^2 \cos \alpha. \quad (179)$$

2. Masę m_E przeciwwagi E można dobrać tak, by w każdej fazie ruchu było spełnione pierwsze równanie układu (176). Oznacza to wtedy, że

$$(m_B + m_C) l_1 = m_E'' e,$$

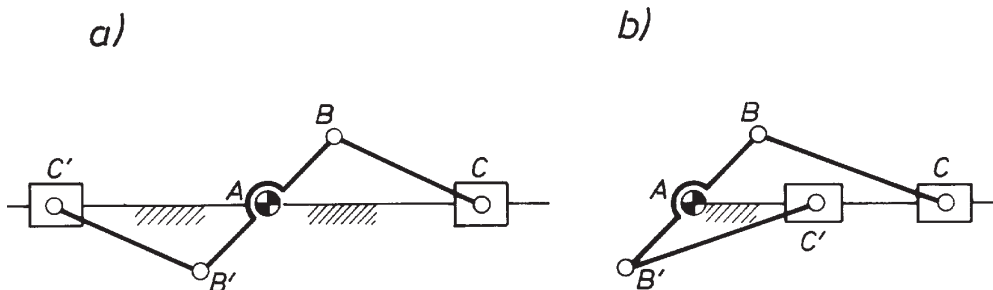
czyli

$$m_E'' = (m_B + m_C) \frac{l_1}{e}. \quad (180)$$

W czasie ruchu pozostanie jednak wtedy nierównoważona zmienna siła bezwładności o kierunku poprzecznym (osi y) i wartości

$$P_{By}'' = -m_C l_1 \omega_1^2 \sin \alpha.$$

3. Masę m_E przeciwwagi E można dobrać tak, by zrównoważyć częściowo masy uczestniczące w ruchu obrotowym i częściowo masy w ruchu posuwisto-zwrotnym. Masę m_E można wtedy wyznaczyć, zakładając pożądany stosunek niewyważonych sił o kierunkach poprzecznym i podłużnym.



Rys. 214. Przykłady wyciszania dynamicznych oddziaływań w parze A: a) całkowite, b) częściowe

Na zakończenie należy również wspomnieć o możliwości wyzerowania dynamicznych sił oddziaływania w głównym łożysku A (całkowicie lub częściowo) w wyniku osadzenia na jednym wale kilku identycznych układów. Przykłady takich rozwiązań przedstawiono na rys. 214.

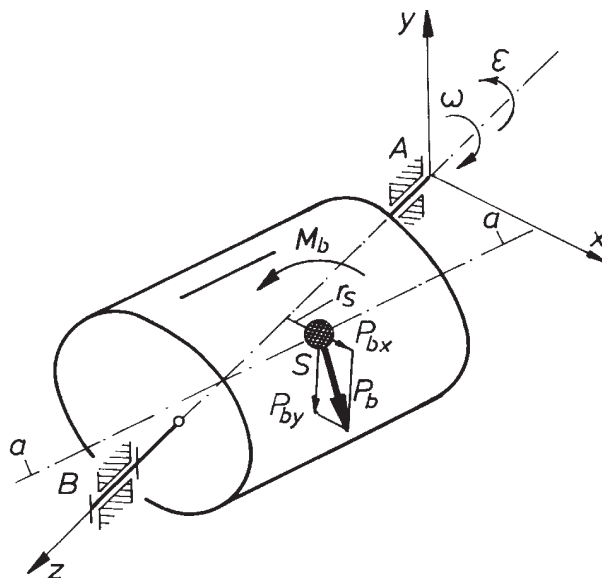
14.3. Wyważanie mas obrotowych

Ciało wirujące dookoła jednej ze swych głównych osi bezwładności obciąża podtrzymujące go łożyska tylko siłami oddziaływania statycznego. Tak się zwykle projektuje wszelkie elementy typu wirnikowego. Praktycznie jednak taki przypadek jest nieosiągalny (niejednorodność materiału, obróbka, montaż) i zwykle w łożyskach wirników pojawiają się (poza statycznymi) dodatkowe oddziaływania dynamiczne. Aby ocenić skalę zjawiska, podamy następujący przykład.

Wirnik o masie $m = 10 \text{ kg}$ obraca się ze stałą prędkością $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$ ($n = 9500 \text{ obr/min}$). W rzeczywistym wykonaniu środek ciężkości S tego wirnika jest przesunięty względem osi obrotu o wartość $x = 0,1 \text{ mm}$. Wirnik taki obciąża wtedy siłą bezwładności P_b

$$P_b = x \omega^2 m = 0,0001 \cdot 1000^2 \cdot 10 = 1000 \text{ N.}$$

Zwróćmy uwagę na ten wynik. Przy tak małej niedokładności (0,1 mm) siła bezwładności jest dziesięciokrotnie większa od siły ciężkości ($P_b/G = 10$). Zauważmy również, że siła P_b , a więc również i wywoływane tą siłą oddziaływania w łożyskach podtrzymujących wirnik są siłami wirującymi.



Rys. 215. Człon obrotowy niewyważony

W ogólnym przypadku, oprócz siły bezwładności P_b , przyłożonej w środku ciężkości, element wirujący obciąża również moment sił bezwładności M_b . Obydwa te obciążenia wywołują w łożyskach wirnika oddziaływania dynamiczne.

Nasuwa się pytanie: jakie warunki muszą być spełnione by wartości tych oddziaływań były minimalne?

Chcąc ująć rzecz ogólnie, rozpatrzmy człon sztywny pozostający w ruchu obrotowym wokół osi z układu współrzędnych x, y, z (rys. 215) z prędkością kątową ω i przyspieszeniem kątowym ε . Jak można wykazać [1], [2], [12], [13], składowe P_b oraz M_b można wyrazić

$$\begin{aligned} P_{bx} &= m (\omega^2 \cdot x_S - \varepsilon \cdot y_S), \\ P_{by} &= m (\omega^2 \cdot y_S - \varepsilon \cdot x_S), \\ P_{bz} &= 0. \end{aligned} \quad (181)$$

oraz

$$\begin{aligned} M_x &= \omega^2 \cdot J_{yz} - \varepsilon \cdot J_{xz}, \\ M_y &= -\omega^2 \cdot J_{xz} - \varepsilon \cdot J_{yz}, \\ M_z &= -\varepsilon, \end{aligned} \quad (182)$$

gdzie: x_S, y_S – współrzędne środka S mas wirujących,
 J_{xz}, J_{yz} – momenty dewiacyjne względem odpowiednich osi,
 J_z – moment bezwładności członu względem osi z .

Po uwzględnieniu (181) P_b można wyrazić w postaci wzoru

$$P_b = \sqrt{P_{bx}^2 + P_{by}^2} = r_S m \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Z ostatniego wzoru wynika, że dla wszystkich ω i ε zachodzi

$$P_b = 0 \quad (183)$$

tylko wtedy, gdy

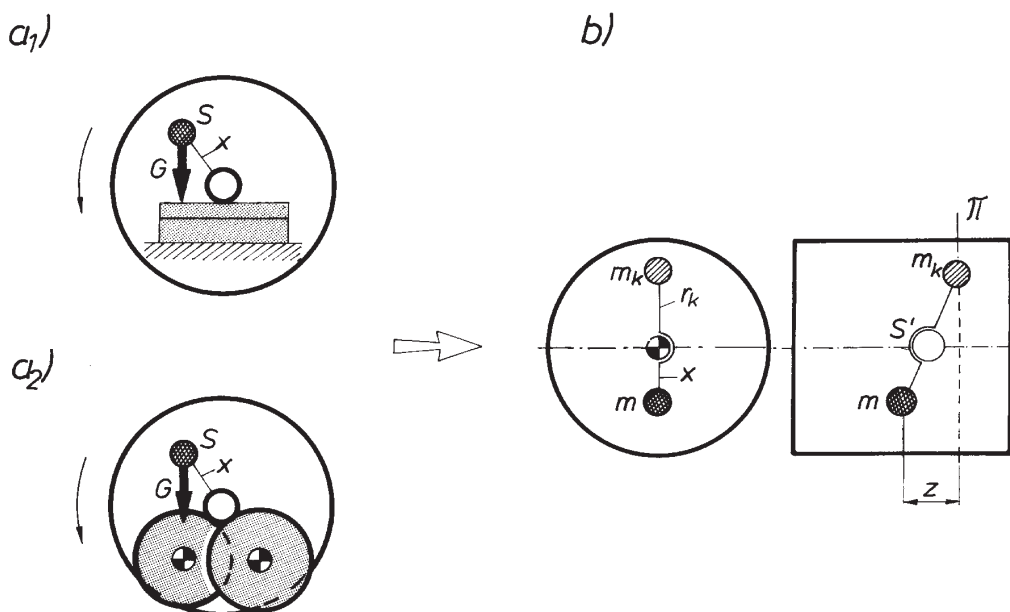
$$r_S = 0. \quad (184)$$

Człon wirujący będzie wyważony całkowicie, jeżeli ponadto składowe M_x i M_y momentu sił bezwładności (M_b) będą równe zero. (Składowa M_z jest równoważona momentami sił zewnętrznych – napędowych – i nie wywołuje oddziaływań dynamicznych w łożyskach podporowych A i B). Tak więc dla uniknięcia oddziaływań dynamicznych musi zaistnieć również warunek

$$M_x = 0, \quad (185)$$

$$M_y = 0.$$

Warunek ten będzie spełniony dla wszystkich ω i ε , gdy



Rys. 216. Wyważanie statyczne wirnika: a) wykrywanie niewyważenia, b) wyważanie masą m_k

$$J_{xz} = 0,$$

$$J_{yz} = 0, \quad (186)$$

tzn. gdy jedna z głównych osi bezwładności (a) pokryje się z osią obrotu z.

Aby to uzyskać, należy w rozpatrywanym wirniku dokonać odpowiedniej korekty rozkładu mas (przez dodawanie lub odejmowanie bądź przemieszczanie). Zabieg taki nazywa się powszechnie **wyważaniem**, przy czym rozróżniamy:

- a) **wyważanie statyczne**, gdy prowadzi do spełnienia warunku (183),
- b) **wyważanie dynamiczne**, gdy ma na celu spełnieniu warunków (183) i (185) jednocześnie.

14.3.1. Wyważanie statyczne członów obrotowych (wirników)

Omawiany zabieg, mający na celu spełnienie warunku $P_b = 0$, oznacza innymi słowy sprowadzenie środka ciężkości wirnika do jego osi obrotu. Jest to zabieg stosunkowo prosty. Można w tym celu ustawić czopy wirnika na gładkich poziomych prowadnicach lub rolkach (rys. 216a). Wirnik obróci się wtedy tak, by środek ciężkości wirnika zajął położenie najniższe. W rzeczywistości, wskutek istnienia tarcia, będzie to cały obszar położen równowagi. Jego granice można wyznaczyć ustawiając dwukrotnie wirnik tak, by obracał się raz w jedną raz w drugą stronę. Dokładną masę korekcyjną należy umieścić nad osią wirnika. Jej ilość dobiera się na drodze kolejnych prób lub poprzez pomiar stopnia niewyważenia na specjalnych urządzeniach.

Wirnik wyważony statycznie pozostaje w równowadze w każdym położeniu. Oczywiście wynik taki uzyska się wtedy, gdy przyłożona masa korekcyjna spełni warunek

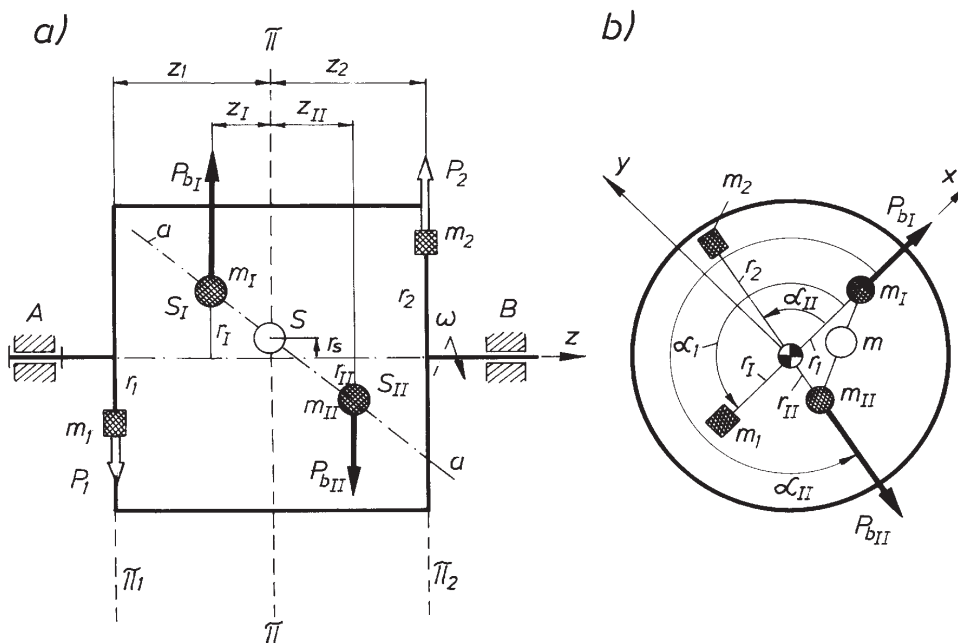
$$m_k \cdot r_k = m \cdot x. \quad (187)$$

Jak wynika z warunku (187), masa korekcyjna m_k może być przykładana na dowolnie zakładanym promieniu r_k i w zasadzie w dowolnej płaszczyźnie π . Ze zrozumiałych powodów zaleca się jednak przyjmować płaszczyznę korekcji tak by $z = 0$ (rys. 216b).

Wyważanie statyczne może być zalecane i wystarczające tylko w przypadku tarcz lub kół, w których można przyjąć, że praktycznie masa rozłożona jest w jednej płaszczyźnie. I w tych jednak przypadkach należy się liczyć z możliwością wystąpienia określonego momentu sił bezwładności przy obrocie wirnika.

14.3.2. Wyważanie dynamiczne członów obrotowych sztywnych

Rozważmy ogólny przypadek wirnika osadzonego obrotowo w łożyskach A i B (rys. 217a), w których obydwaj warunki (183) i (185) nie są spełnione. Występuje wtedy, gdy środek S masy tego wirnika nie leży na osi obrotu i główna oś bezwładności a nie pokrywa się z osią obrotu. Do poglądowego przedstawienia problemu podzielmy wirnik płaszczyzną π na dwie części i przez S_I i S_{II} oznaczmy ich środki mas. Rozpatrzmy problem wyważania tych mas. Jak wynika z analizy warunków (181)



Rys. 217. Wyważanie dynamiczne wirnika: a) interpretacja zjawiska niewyważenia, b) rozkład mas niewyważenia m_i oraz mas wyważających m_{ki}

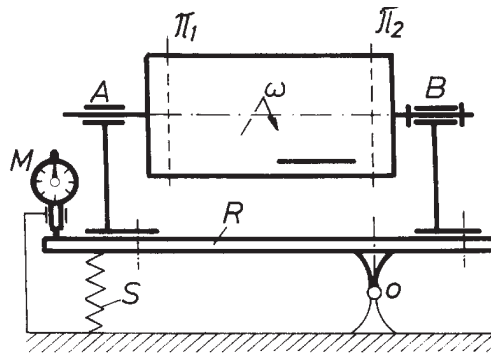
i (182), efekt wyważenia można uzyskać dokładając (lub odejmując) co najmniej dwie masy. Niech będą to masy korekcyjne m_1 i m_2 przyłożone w płaszczyznach π_1 i π_2 prostopadłych do osi obrotu, na promieniach r_1 i r_2 (rys. 217a). Jeżeli wprowadzić układ współrzędnych jak na rys. 217b, to zgodnie z (184) i (186) – poszukiwane masy korekcyjne m_1 i m_2 powinny spełniać równania:

$$\begin{aligned} m_1 r_1 + m_2 r_2 \cos \alpha_2 + m_1 r_1 \cos \alpha_1 + m_{II} r_{II} \cos \alpha_{II} &= 0, \\ m_2 r_2 \sin \alpha_2 + m_1 r_1 \sin \alpha_1 + m_{II} r_{II} \sin \alpha_{II} &= 0, \\ z_1 m_1 r_1 + z_2 m_2 r_2 \cos \alpha_2 + z_1 m_1 r_1 \cos \alpha_1 + z_{II} m_{II} r_{II} \cos \alpha_{II} &= 0, \\ z_2 m_2 r_2 \sin \alpha_2 + z_1 m_1 r_1 \sin \alpha_1 + z_{II} m_{II} r_{II} \sin \alpha_{II} &= 0. \end{aligned} \quad (188)$$

Podany układ równań umożliwia obliczenie czterech niewiadomych. Zakładając np. promienie r_1 i r_2 , można wyznaczyć pozostałe parametry mas korekcyjnych, a więc m_1 , m_2 , α_1 i α_2 . Przykładowo dla $z_1 = z_I$, $z_2 = z_{II}$ z układu równań (188) otrzymalibyśmy:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \pi, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 - \pi, \\ m_1 r_1 &= m_{II} r_{II}, \\ m_2 r_2 &= m_{II} r_{II}. \end{aligned} \quad (189)$$

Jak wynika z tego przykładu, problem wyważania dynamicznego byłby względnie łatwy, gdyby znany był stan niewyważenia, tzn. wartości mas m_1 i m_{II} oraz miejsce ich położenia. W praktyce są to wielkości nie znane, bo zwykle niezamierzone. Problem sprowadza się więc do ich określenia. Dokonuje się tego doświadczalnie z zastosowaniem specjalnych urządzeń, zwanych wyważarkami dynamicznymi. Urządzenia te umożliwiają przede wszystkim wyznaczenie w przyjętych płaszczyznach tzw. **płaszczyznach niewyważenia**



Rys. 218. Przykład zasady działania wyważarki dynamicznej

$$\mu_i = \frac{m_i \cdot r_i}{m} \quad (190)$$

będącego miarą przesunięcia masy m_i członu odniesionego do rozpatrywanej płaszczyzny. Jednocześnie urządzenie to określa miejsce, gdzie należy masę korekcyjną przyłożyć lub odjąć.

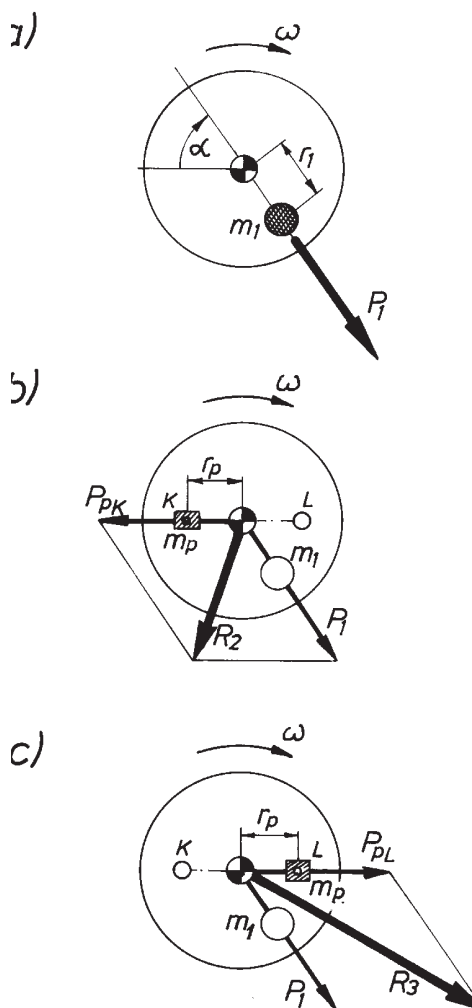
Poniżej prześledzimy zasadę działania przykładowego rozwiązania wyważarki dynamicznej (rys. 218). Istotnym elementem wyważarki dynamicznej jest rama R osadzona obrotowo w podstawie i podparta w drugim końcu sprężynie. Na ramie w łożyskach A i B osadzony jest wyważony wirnik tak, by jedna z wybranych płaszczyzn wyważenia przechodziła przez oś O obrotu ramy. Jeżeli wirnik zostanie wprawiony w ruch obrotowy siły bezwładności mas niewyważonych spowodują wychylenie się ramy R wokół przegubu O . Wychylenie się ramy z położenia równowagi, przy ustawieniu wirnika jak na rys. 218, będzie wywoływane tylko przez siły bezwładności niewyważenia przypadającego na płaszczyznę korekcji π_1 . O wartości tego niewyważenia można wnosić z amplitudy drgań mierzonej, np. czujnikiem M . Amplituda A jest proporcjonalna do siły wynuszającej $P_b = P_1$

$$A_1 = k \cdot P_1, \quad (191)$$

gdzie: k – współczynnik proporcjonalności, wartość charakterystyczna (lecz nie znana) dla całego zespołu rama–wirnik,

P_1 – siła bezwładności niewyważenia odniesionego do płaszczyzny π_1 .

W celu wyznaczenia współczynnika k przeprowadzamy następujące rozumowanie i zabiegi. Zmierzona maksymalna wartość amplitudy A_1 (określona przy prędkości rezonansowej) pojawiła się w wyniku działania siły P_1 (rys. 219a). Siła P_1 nie jest znana, bo nie jest znana masa niewyważenia m_1 i parametry jej położenia r_1 i α .



Rys. 219. Siły bezwładności w kolejnych fazach wyważania dynamicznego

W tej sytuacji zamocujemy w dowolnym miejscu, np. w punkcie K (rys. 219b), dowolną (lecz znaną) masę próbną m_p na promieniu r_p . Po ponownym uruchomieniu wirnika na czujniku M odczytamy maksymalną amplitudę A_2 , która jest proporcjonalna do wypadkowej siły bezwładności obu mas m_1 i m_p

$$A_2 = k \cdot r_2,$$

gdzie

$$\bar{R}_2 = \bar{P}_1 + \bar{P}_{pK}.$$

Ten sam pomiar powtórzmy mocując tę samą masę próbną m_p po przeciwnej stronie wirnika w punkcie L (rys. 219c). Otrzymamy wtedy

$$A_3 = k \cdot r_3,$$

gdzie

$$\bar{R}_3 = \bar{P}_1 + \bar{P}_{pL}.$$

Siły \bar{P}_1 , \bar{P}_{pK} , \bar{P}_{pL} , \bar{R}_2 i \bar{R}_3 tworzą plan sił przedstawiony na rys. 220a, amplitudy A_1 , A_2 , A_3 zaś i nie znana A_p , przypadająca na masę próbną m_p , tworzą podobny plan przedstawiony na rys. 220b.

Z planu tego można określić nie znaną dotychczas A_p , wykorzystując np. twierdzenie o przekątnych równoległoboku

$$2A_p^2 + 2A_1^2 = A_2^2 + A_3^2,$$

czyli

$$A_p = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}, \quad (192)$$

jednocześnie:

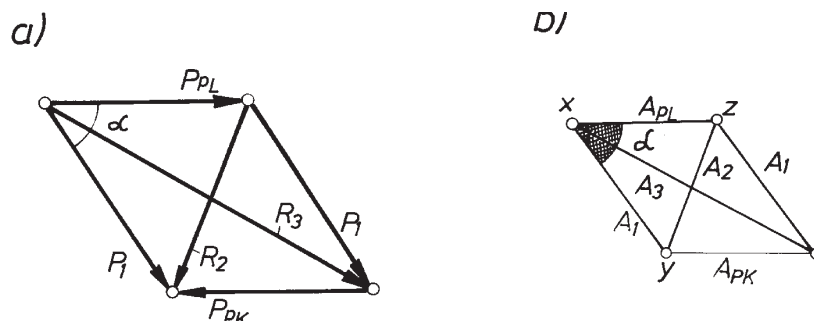
$$A_p = k \cdot P_p,$$

a więc

$$k = \frac{A_p}{P_p}. \quad (193)$$

Korzystając teraz z wzorów (193) i (191) otrzymamy

$$\bar{P}_1 = \frac{A_1}{k} = \frac{A_1}{A_p} P_p,$$



Rys. 220. Rysunek pomocniczy do wyznaczania miejsca masy korekcyjnej na elemencie wyważanym

czyli

$$\bar{P}_1 = m_1 r_1 = \frac{A_1}{A_p} m_p r_p. \quad (194)$$

W ten sposób można wyznaczyć nieznane dotychczas niewyważenie P_1 w płaszczyźnie π_1 . Można również określić miejsce masy niewyważonej. Z $\Delta x, y, z$ otrzymamy

$$\alpha = \arccos \frac{A_1^2 + A_p^2 - A_2^2}{2A_p A_1}. \quad (195)$$

Po wyważeniu wirnika w płaszczyźnie (1) odwracamy wirnik osadzając go tak w ramie wyważarki, by płaszczyzny π_1 i π_2 zamieniły się miejscami i zabiegi te powtarzamy.

Na zakończenie należy podkreślić, że opisaną tu wyważarkę trzeba traktować jako przykład dydaktyczny. Współczesne rozwiązania charakteryzują się często pełną elektronizacją i automatyzacją. Obsługa tych urządzeń sprowadza się zwykle do założenia elementu wyważanego, uruchomienia, a następnie odczytu wartości i miejsca przyłożenia masy korekcyjnej. W produkcji seryjnej, np. podczas wyważania wirników silników elektrycznych małej mocy, w pełni zautomatyzowana maszyna dokonuje wszystkich czynności związanych z wyważaniem. Dokonuje również korekty rozkładu masy, zwykle nie poprzez dokładanie, lecz usuwanie nadmiaru masy. Dzieje się to za pomocą nawiercania, frezowania lub szlifowania specjalnie w tym celu już konstrukcyjnie przewidzianych miejsc.

Analizowane zagadnienia wyważania dotyczyły przede wszystkim elementów sztywnych. Jak wiadomo, nie zawsze można takie upraszczające założenia przyjąć. Uwzględnienie podatności wyważanych elementów ogromnie komplikuje jednak cały problem. Nawiązano do tych spraw w rozdz. 15.4.

15. Dynamika mechanizmów z członami podatnymi

Niektóre problemy inżynierskie można rozwiązać traktując poszczególne podzespoły maszyn jako układy kinematyczne złożone z członów sztywnych. W wielu jednak przypadkach założenie o nieodkształcalności członów jest zbyt dużym uproszczeniem. Podatność członów w rzeczywistości wpływa, i to często w sposób istotny, na parametry ruchu układu. Wpływa na kinematykę i dynamikę układu, ale również zmienia jego strukturę. Trzeba powiedzieć już na początku, że uwzględnienie podatności członów w ruchomych układach kinematycznych jest zwykle problemem trudnym i złożonym. Wymaga tworzenia specjalnych modeli dynamicznych i rozwiązywania ich na gruncie teorii drgań. Nie wchodząc w tę szeroką i oddzielną dziedzinę wiedzy, pragniemy tu jedynie zasygnalizować niektóre problemy cząstkowe, by zachęcić Czytelnika również do innej literatury przedmiotu [4], [9], [12].

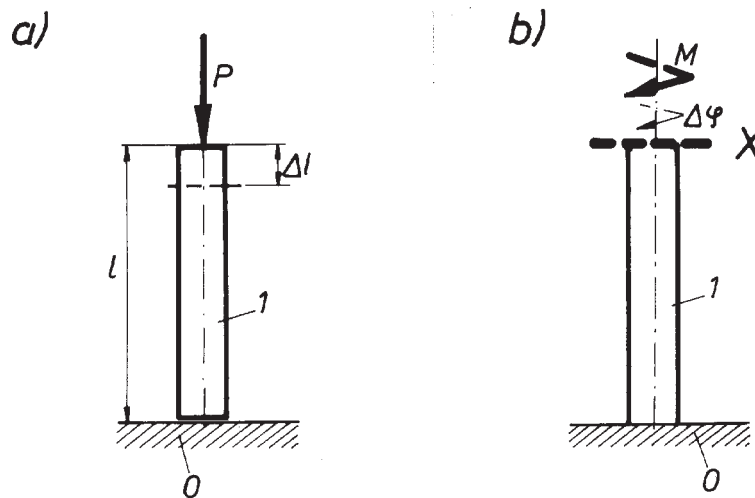
Podczas rozpatrywania wielocłonowych mechanizmów z uwzględnieniem podatności, zapisywanie równań ruchu, a zwłaszcza ich rozwiązywanie, ogromnie się komplikuje. Wynika to z tego, że każdy podatny człon wnosi do układu dodatkową stopniowość swobody. Dlatego też do rozwiązywania problemów dynamiki z uwzględnieniem podatności często stosuje się metody przybliżone, wykorzystujące tzw. sztywności uogólnione, określane np. **współczynnikiem sztywności zredukowanej** (zastępczej) lub **współczynnikiem podatności zredukowanej** (zastępczej).

Na początek przypomnijmy tu, znane z wytrzymałości materiałów, pojęcie sztywności i podatności członu. Rozważmy w tym celu człon podatny (1) obciążony siłą osiową P (rys. 221a). Jeżeli pod działaniem siły P człon ulegnie odkształceniu o wartość Δl , to stosunek siły P do odkształcenia Δl będziemy nazywać **sztywnością wzdłużną** k_l

$$k_l = \frac{P}{\Delta l} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]. \quad (196)$$

Jeżeli pod działaniem momentu M (rys. 221b) przekrój X członu (1) dokona obrotu o kąt $\Delta \varphi$, to stosunek momentu M do odkształcenia $\Delta \varphi$ będziemy nazywać **sztywnością poprzeczną** k_s

$$k_s = \frac{M}{\Delta \varphi} \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \right]. \quad (197)$$



Rys. 221. Interpretacja pojęcia sztywności: a) sztywność wzdłużna, b) sztywność skrętna

Do określania rozpatrywanych właściwości członów podatnych stosuje się również pojęcie **podatności**, oznaczane symbolami c_l i c_s . Jak wiadomo [4], sztywność k jest odwrotnością podatności c

$$k = \frac{1}{c}. \quad (198)$$

Odnosi się to również do wspomnianej sztywności zredukowanej (lub zastępczej) k_r i podatności zredukowanej c_r , czyli

$$k_r = \frac{1}{c_r}. \quad (199)$$

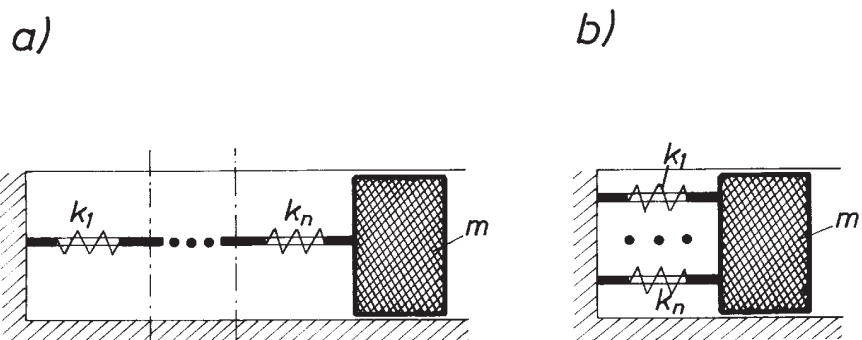
Przy określaniu sztywności lub podatności zredukowanej rozróżniamy dwa typowe przypadki połączeń członów podatnych, tzn. szeregowych (rys. 222a) i równoległych (rys. 222b). Ilościowo współczynnik k_r lub c_r określa się na podstawie zasady równości energii potencjalnej (przy równoległym połączeniu) oraz równości siły wymuszającej odkształcenie (przy szeregowym). Otrzymuje się odpowiednio dla połączeń:

– równoległych

$$k_r = \sum k_i \quad (200)$$

– szeregowych

$$\frac{1}{k_r} = \sum \frac{1}{k_i}. \quad (201)$$

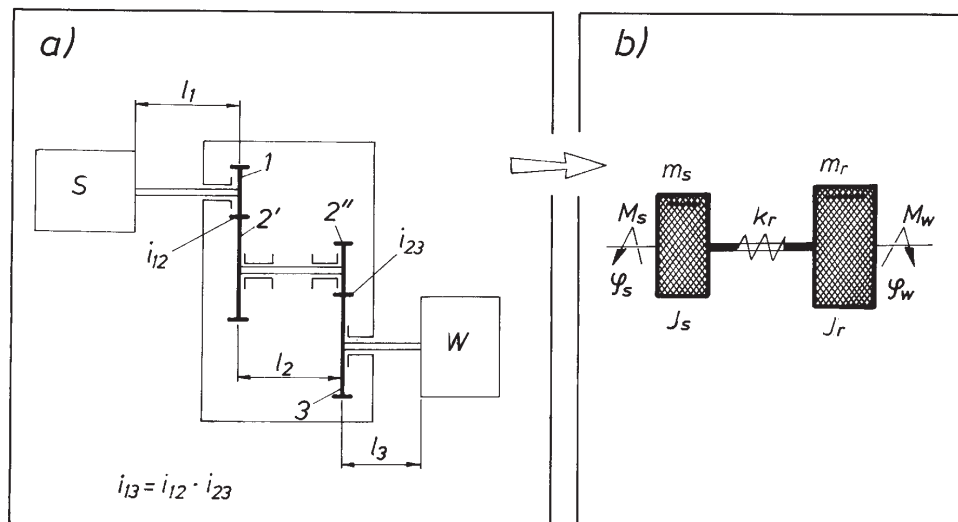


Rys. 222. Sztywność zredukowana: a) połączenie szeregowe, b) połączenie równoległe

Należy podkreślić, że wzory (200) i (201) zostały wyprowadzone z pominięciem masy rozpatrywanych członów podatnych oraz założenia, że człony te są ze sobą sprzężone bezpośrednio (realizują ten sam ruch). Operowanie sztywnością zredukowaną umożliwia zastąpienie złożonych układów kinematycznych prostymi modelami i ułatwia w ten sposób rozwiązanie problemu.

15.1. Dynamika mechanizmów obrotowych

Dany jest układ (rys. 223a) złożony z dwustopniowej przekładni zębatej łączącej silnik S z organem wykonawczym W w postaci wirnika wentylatora o stałym momencie bezwładności $J_w = \text{const}$. Wirnik silnika S ma moment bezwładności



Rys. 223. Wyznaczanie odkształceń układu przeniesienia napędu: a) schemat układu, b) model dynamiczny ze zredukowaną sztywnością k_r

$J_s = \text{const}$ i daje moment sił M_s równoważący moment sił biernych M_w obciążający wirnik wentylatora W . Wirnik silnika i wentylatora połączone są ze sobą za pośrednictwem szeregu elementów podatnych. Dla uproszczenia potraktujemy tarcze kół zębatych jako elementy sztywne i uwzględnimy tylko podatność wałków (1), (2) i (3), określoną współczynnikami c_1 , c_2 i c_3 . W wyniku odnotowanych trzech podatności układ ma cztery stopnie swobody, co ogromnie utrudnia zapis jego ruchu.

Dla uproszczenia problemu zastąpimy układ rzeczywisty (rys. 223a) modelem dynamicznym (rys. 223b), złożonym z dwóch mas połączonych jednym członem. W modelu tym masa m_s o momencie bezwładności J_s reprezentuje masę wirnika silnika, masa m_r reprezentuje masę wirnika wentylatora oraz masy kół zębatych (1), (2''), (2''') i (3). Taka zredukowana masa scharakteryzowana jest zredukowanym momentem bezwładności J_r . Łączący te dwie masy umowny człon (rys. 223b) odznacza się podatnością zredukowaną e_r lub sztywnością k_r . Aby określić wartość tego współczynnika zauważymy, że odkształcenie $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ i $\Delta\varphi_3$ wałków (1), (2) i (3) w wyniku obciążenia układu momentem czynnym M_s można wyrazić wzorami

$$\Delta\varphi_1 = c_1 M_s$$

$$\Delta\varphi_2 = c_2 M_s \cdot i_{12}, \quad (202)$$

$$\Delta\varphi_3 = c_3 M_s \cdot i_{13},$$

w których: $i_{12} = M_s/M_2$ – przełożenie pomiędzy wałkiem (1) i (2),
 $i_{13} = M_s/M_3$ – przełożenie pomiędzy wałkiem (1) i (3).

Obrót wirnika S w wyniku odkształcenia wałka (2) oraz wałka (3) można wyrazić

$$\Delta\varphi_{1(2)} = \Delta\varphi_2 \cdot i_{12}, \quad (203)$$

$$\Delta\varphi_{1(3)} = \Delta\varphi_3 \cdot i_{13}.$$

Przy takich oznaczeniach, łączne odkształcenie układu mierzone kątem $\Delta\varphi$ obrotu wirnika S względem W , w wyniku obciążenia momentem M_s , można wyrazić wzorem

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_{1(2)} + \Delta\varphi_{1(3)}$$

lub po podstawieniu (203) i (202)

$$\Delta\varphi = M_s (c_1 + c_2 \cdot i_{12}^2 + c_3 \cdot i_{13}^2). \quad (204)$$

Z drugiej strony, z założenia

$$\Delta\varphi = c_r \cdot M_s, \quad (205)$$

czyli po uwzględnieniu (204) i (205), otrzymamy

$$c_r = c_1 + c_2 \cdot i_{12}^2 + c_3 \cdot i_{13}^2$$

lub

$$k_r = \frac{1}{c_r}.$$

Mamy więc dwumasowy model dynamiczny rozpatrywanego układu możliwy do przyjęcia jednak tylko wtedy, gdy momenty bezwładności elementów (1), (2) i (3) zredukowane do wirnika W są odpowiednio małe w porównaniu z J_s i J_w . W przeciwnym razie należy przejść na model bardziej rozbudowany. Pozostając przy naszym modelu, należy go poddać bliższej analizie. Należy napisać układ dwóch równań różniczkowych ruchu, np. w postaci

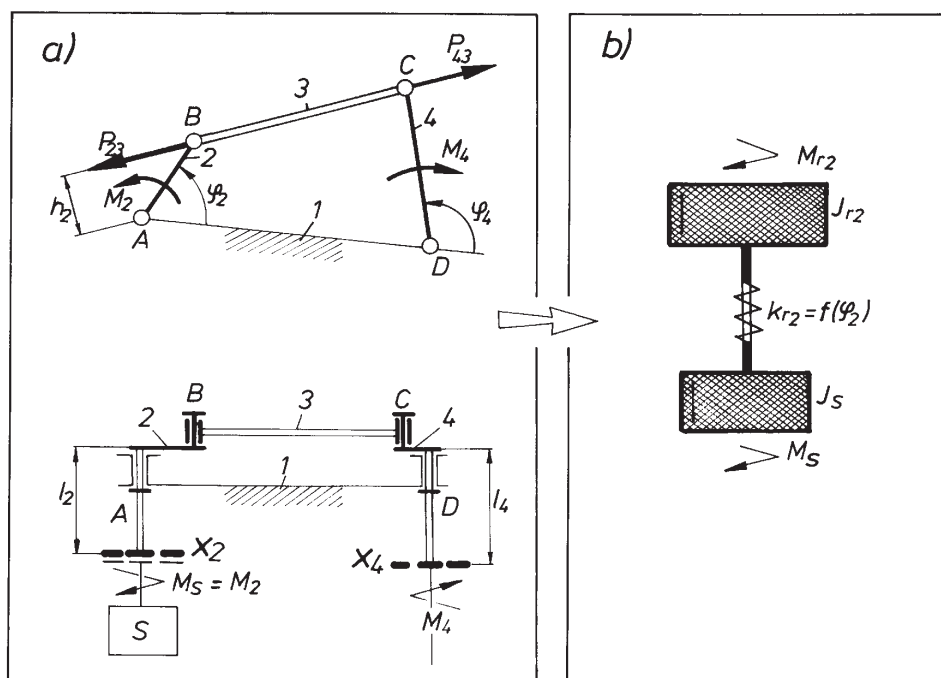
$$J_s \cdot \ddot{\varphi}_s = M_s - k_r \cdot \varphi_s - \varphi_w,$$

$$J_w \cdot \ddot{\varphi}_w = M_w - k_r \cdot \varphi_s - \varphi_w$$

i przeprowadzić ich szczegółowe badania. Nie podejmując tu tych na ogół uciążliwych zabiegów, powiemy tylko, że rozpatrywany model ma dwa stopnie swobody, można się więc spodziewać ruchu złożonego z pewnej stałej prędkości ω i dodatkowego ruchu z prędkością zmienną cyklicznie (drgania).

15.2. Dynamika płaskich mechanizmów dźwigniowych

Rozpatrzmy dla przykładu czworobok przegubowy $ABCD$ (rys. 224a). W mechanizmie tym moment napędowy (czynny) przyłożony jest do wału (2), na którym jest osadzona korba AB , moment bierny zaś obciąża wał (4) zakończony ramieniem



Rys. 224. Określanie odkształceń w czworoboku przegubowym: a) schemat układu, b) dwumasowy model dynamiczny układu ze zredukowaną sztywnością k_{r2}

DC. W wyniku obciążenia układu ulegnie odkształceniu człon *AB* i jego wał (2) na długości l_2 oraz ramię *DC* i jego wał (4) na długości l_4 . Załóżmy, że odkształcenia te będziemy określać odpowiednio jednym współczynnikiem skrętnego podatności c_2 i jednym współczynnikiem skrętnego podatności c_4 . O członie pośredniczącym (łączniku) (3) założymy, że jest on tylko rozciągany siłą osiową $P_{23} = P_{43} = M_2/h_2$ i pomijamy jego masę. Odkształcenie członu (3) w tych warunkach określimy współczynnikiem wydłużenia c_3 . Zakładamy, że wartości współczynników c_i są znane z bezpośrednich pomiarów lub obliczone analitycznie według wzorów

$$c_2 = \frac{l_2}{G_2 \cdot J_2}, \quad c_4 = \frac{l_4}{G_4 \cdot J_4}, \quad (206)$$

w których: l_i – długość części skręcanej wałka *i*-tego,
 G_i – moduł sprężystości poprzecznej,
 J_i – biegunowy moment bezwładności przekroju wałka *i*-tego
 oraz

$$c_3 = \frac{l_3}{E_3 \cdot X_3}, \quad (207)$$

gdzie: l_3 – długość łącznika,
 E_3 – moduł sprężystości podłużnej,
 X_3 – przekrój poprzeczny łącznika.

Znając wartość współczynników c_i oraz obciążeń zewnętrznych, można określić deformacje rozpatrywanych członów

$$\Delta\varphi_2 = M_2 \cdot c_2, \quad (208)$$

$$\Delta\varphi_4 = M_4 \cdot c_4,$$

$$\Delta l_3 = P_{23} \cdot c_3, \quad (209)$$

Przeanalizujemy z kolei łączny wpływ deformacji poszczególnych członów na deformację całego układu. W szczególności, jeżeli przez X_2 i X_4 oznaczyć przekroje wałów (2) i (4), w których przyłożone są momenty M_2 i M_4 , to przedmiotem zainteresowania będzie kąt obrotu $\Delta\varphi$, rozumiany jako miara obrotu przekroju X_2 względem przekroju X_4 . Nie trzeba wykazywać, że

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_2 + \Delta l_3 \cdot j_{23} + \Delta\varphi_4 \cdot i_{24}, \quad (210)$$

gdzie j_{23} – współczynnik wpływu zmiany długości łącznika na obrót ramienia *AB* przy unieruchomionym ramieniu *DC*,

czyli

$$j_{23} = \frac{\Delta\varphi_2'}{\Delta l_3}, \quad (211)$$

i_{24} – przełożenie określone stosunkiem obrotu ramion DC i AB ,
czyli

$$i_{24} = \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_4}. \quad (212)$$

Po podstawieniu do (210) zależności (208) i (209) otrzymamy

$$\Delta\varphi = M_2 \cdot c_2 + P_{23} \cdot c_3 \cdot j_{23} + M_4 \cdot c_4 \cdot i_{24} \quad (213)$$

Zauważmy z kolei, że

$$P_{23} = M_2 \cdot j_{23}, \quad (214)$$

$$M_4 = M_2 \cdot i_{24} \quad (215)$$

i podstawmy te związki do (213), Otrzymamy

$$\Delta\varphi = M_2(c_2 + c_3 \cdot j_{23}^2 + c_4 \cdot i_{24}^2), \quad (216)$$

Z drugiej strony można zapisać

$$\Delta\varphi = M_2 \cdot c_{r2}, \quad (217)$$

gdzie c_{r2} – zredukowana do członu (2) podatność całego układu.

Wartość tego współczynnika można określić z porównania (216) i (217). Otrzymamy

$$c_{r2} = c_2 + c_3 \cdot j_{23}^2 + c_4 \cdot i_{24}^2 \quad (218)$$

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem współczynników c_{r2} i i_{24} . Jak wynika z definicji (211), (212), są to określone przełożenia

$$i_{24} = \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_4} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{v_B \cdot l_{CD}}{v_C \cdot l_{AB}}, \quad (219)$$

$$j_{23} = \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta l_3} = \frac{\omega_2'}{v_3'} = \frac{v_B'}{v_3' \cdot l_{AB}}, \quad (220)$$

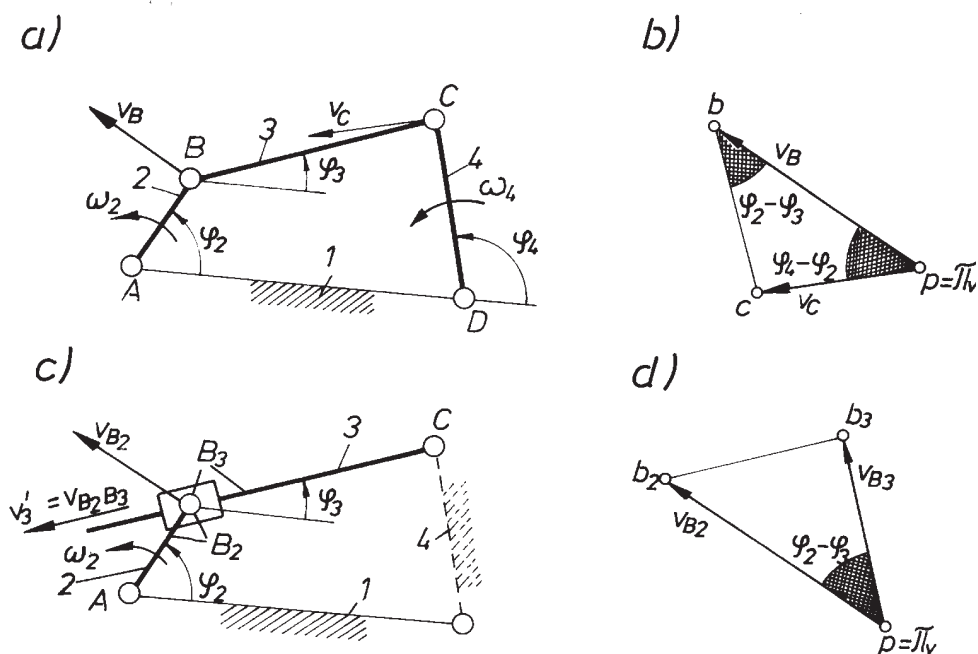
gdzie v_3' – prędkość zmiany długości łącznika BC podczas jego odkształcenia wywołująca prędkość v_B' punktu B .

Jak z tego widać, przełożenie i_{24} i j_{23} można wyznaczyć posługując się np. odpowiednimi, w dowolnej podziałce wykreślonymi, planami prędkości (rys. 225). I tak

$$i_{24} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{pb \cdot l_{CD}}{pc \cdot l_{AB}} \quad (221)$$

lub wykorzystując twierdzenie sinusów dla trójkąta abc (rys. 225b)

$$i_{24} = \frac{l_{CD} \sin(\varphi_4 - \varphi_3)}{l_{AB} \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}. \quad (222)$$



Rys. 225. Rysunek pomocniczy do wyznaczania przełożeń: a) c) schematy mechanizmów, b) d) plany prędkości

W celu określenia przełożenia j_{23} przeanalizujemy mechanizm zastępczy (rys. 225c) i jego plan prędkości (rys. 225d). Jeżeli z założenia $j_{23} = \omega_2/v'_3$, to z Δpb_2b_3 otrzymamy

$$j_{23} = \frac{pb_2}{b_2b_3 \cdot l_{AB}} \quad (223)$$

lub korzystając z twierdzenia sinusów dla prostokątnego trójkąta pb_2b_3 (rys. 225d)

$$j_{23} = \frac{1}{l_{AB} \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}. \quad (224)$$

Ostatecznie, po uwzględnieniu wzorów (218), (222) i (224), otrzymamy

$$c_{r2} = c_2 + \frac{c_3}{l_{AB}^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{c_4 l_{CD}^2 \sin^2(\varphi_4 - \varphi_3)}{l_{AB}^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} \quad (225)$$

lub

$$k_{r2} = \frac{1}{c_{r2}}. \quad (226)$$

Na podstawie otrzymanych wyników można ostatecznie zbudować model dynamiczny rozpatrywanego układu. Będzie to znów model dwumasowy (rys. 224b), różny od omawianego już modelu na rys. 223b tylko tym, że sztywność k_{r2} nie jest stała, lecz zależy od położenia mechanizmu $k_{r2} = f(\varphi_2)$. Oczywiście, należy o tym pamiętać podczas analizowania różniczkowych równań ruchu, które dla tego przypadku przyjąłby postać

$$J_s \ddot{\varphi}_s = M_s - k_{r2}(\varphi_s - \varphi_2),$$

$$J_{r2} \ddot{\varphi}_2 = M_{r2} - k_{r2}(\varphi_s - \varphi_2),$$

gdzie: φ_s – kąt obrotu silnika,

M_s – moment na wale silnika ($M_s = M_2$),

J_s – zredukowany moment bezwładności ruchomych części silnika,

φ_2 – kąt obrotu przekroju X_2 członu (2),

M_{r2} – zredukowany do członu (2) moment M_4 ($M_{r2} = M_4 \cdot i_{24}$),

J_{r2} – zredukowany do członu (2) moment bezwładności czworoboku (członów (2), (3) i (4)),

k_{r2} – zredukowana do członu (2) sztywność czworoboku (226).

Ze względu na to, że $k_{r2} = f(\varphi_2)$, ostatni układ równań można rozwiązać tylko metodami numerycznymi.

15.3. Dynamika mechanizmu krzywkowego z podatnym popychaczem

Na rysunku 226a przedstawiono mechanizm zamiany ruchu obrotowego krzywki (2) na ruch postępowo-zwrotny popychacza (3). Na popychacz działa siła zewnętrzna P_{43} ze strony uruchamianego przezeń członu (4), siła F_s sprężyny zamykającej oraz siły tarcia T_{13} . Z założenia uwzględniamy tylko podatność popychacza (zakładamy, że sztywność pozostałych członów i ich połączeń jest niewspółmiernie większa). Przy tych założeniach, w celu przeanalizowania ruchu popychacza, przejdziemy na model dynamiczny (rys. 226b), w którym przez k_3 oznaczono sztywność popychacza, przez m_r – zredukowaną do końca masę popychacza oraz pozostałych mas związanych z członem (4), przez F – oznaczono tu wypadkową obciążeń zewnętrznych popychacza

$$\bar{F} = \bar{P}_{43} + \bar{T}_{13} + \bar{F}_s, \quad (227)$$

natomiast przez s i y oznaczono przemieszczenie końca B popychacza wymuszane przez krzywkę oraz masy zredukowanej m_r na końcu popychacza.

Dla takiego modelu jednomasowego można zapisać równanie ruchu w postaci

$$m_r \ddot{y} = -F + k_3(s - y), \quad (228)$$

gdzie k_3 – znana sztywność popychacza (określona doświadczalnie lub oceniona teoretycznie).

Moduł siły F obliczymy ze wzoru

$$F = P + k_s \cdot y, \quad (229)$$

$$\bar{P} = \bar{P}_{43} + \bar{T}_{13}, \quad (229a)$$

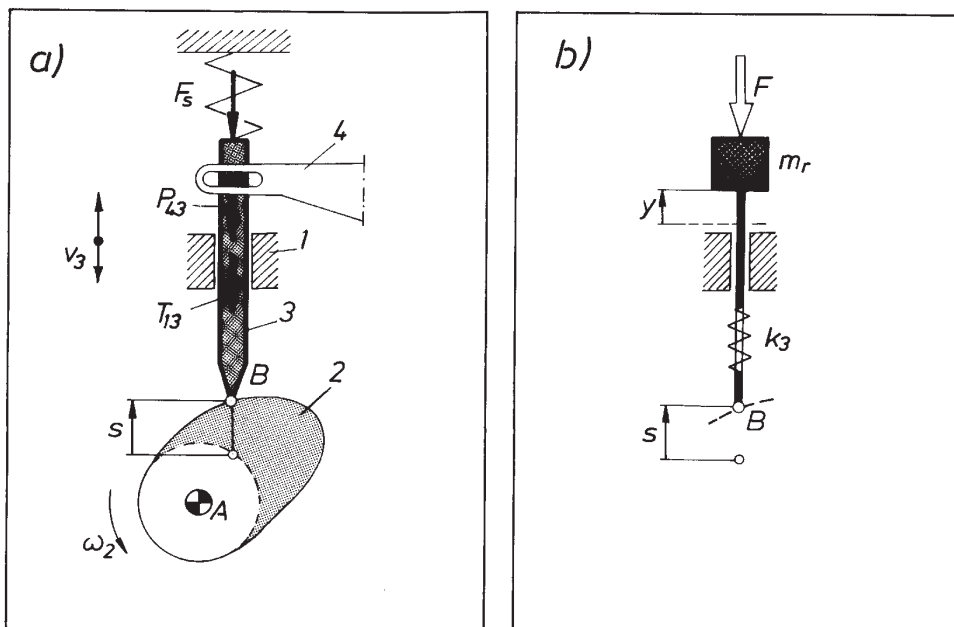
w którym k_s – znana sztywność sprężyny zamykającej.

Po uwzględnieniu (228) i (229) otrzymamy po przekształceniach

$$\frac{k_s + k_3}{m_r} y = - \frac{F_b + k_3 \cdot s}{m_r}. \quad (230)$$

Równanie (230) umożliwia ocenę ruchu końca popychacza przy znanym ruchu wymuszenia punktu B . Do oceny różnicy ruchów obu końców stosuje się często tzw. **współczynnik dynamiczny** ψ , określony umownie stosunkiem maksymalnych wartości przyspieszeń masy m_r z uwzględnieniem podatności popychacza (\ddot{y}_{\max}) i bez uwzględnienia podatności (\ddot{s}_{\max})

$$\psi = \frac{\ddot{y}_{\max}}{\ddot{s}_{\max}}. \quad (231)$$



Rys. 226. Analiza dynamiczna mechanizmu krzywkowego z uwzględnieniem podatności popychacza:
a) schemat mechanizmu, b) jednomasowy model dynamiczny popychacza

Dla przykładu przeanalizujemy bliżej przypadek krzywki o charakterystyce sinusoidalnej z popychaczem obciążonym tylko siłą bezwładności. Zakładamy więc, że droga i przyspieszenie punktu B podczas podnoszenia popychacza wyraża się wzorami

$$s = \frac{h}{2}(1 - \cos \pi t'), \quad (232)$$

$$\ddot{x} = \frac{\pi^2 h}{2T^2} \cos \pi t', \quad (233)$$

oraz przyjmujemy: $P = 0$, $k_s = 0$. Przy takich założeniach otrzymamy w wyniku przekształcenia równania (230) odpowiednie zależności

$$y = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{n^2 \cos \pi t' - \cos n\pi t'}{n^2 - 1} \right), \quad (234)$$

$$\ddot{x} = \frac{n^2}{n^2 - 1} \frac{\pi^2}{2} (\cos \pi t' - \cos n\pi t') \frac{h}{T^2}, \quad (235)$$

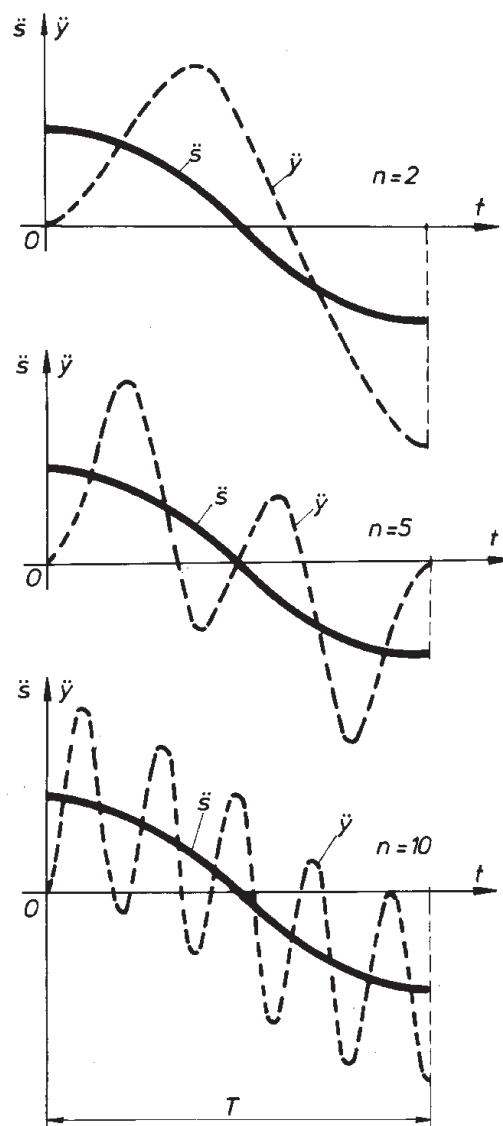
W równaniach (232)–(235) oznaczają:
 h – skok popychacza (maksymalna droga),
 $t' = t/T$ (T – czas podnoszenia popychacza na wysokość h),
 n – liczba drgań masy popychacza podczas podnoszenia ($n = 2T/T^*$, T^* – okres drgań własnych).

Przebiegi $\ddot{s}(t)$ oraz $\ddot{y}(t)$, gdy $n = 2, 5$ i 10 przedstawiono na rys. 227. Wartości współczynników dynamicznych według wzoru (231) wynoszą odpowiednio

$$\psi = 2,67, \quad 2,07, \quad 2,002.$$

Można zauważyć, że gdy $n \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow \psi_x = 2$. Podobnie rzecz wygląda również przy innych przebiegach przyspieszeń $\ddot{s}(t)$ z tzw. nieciągłością funkcji. Gdy funkcja ta charakteryzuje się dodatkowo skokową zmianą znaku (np. podczas prostokątnych przebiegów przyspieszeń), wtedy $\psi_x = 3$. Z kolei, przy ciągłych funkcjach przyspieszenia, np. sinusoidalnych, dla $n \rightarrow \infty$, $\psi_x \rightarrow 1$.

Na zakończenie jeszcze raz podkreślmy, że badaliśmy model mechanizmu bardzo uproszczony, bo zbudowany przy wielu założeniach. Uzyskane w ten sposób wyniki różnią się więc jeszcze od wyników rzeczywistych, otrzymanych np. na drodze pomiarów. Różnice te w przypadkach nieadekwatnie przyjętych do modeli mogą być bardzo istotne. Aby je zminimalizować, należy sięgać po modele coraz bardziej rozbudowane. Należy przy tym podkreślić, że przyjmowanie modelu, ustalanie jego struktury, liczby stopni swobody, tłumienia i wymuszeń jest zagadnieniem niełatwym i wymaga od prowadzącego badania zarówno wiedzy, jak i doświadczenia.



Rys. 227. Wyniki analizy dynamicznej mechanizmu krzywkowego z rys. 226

15.4. Wyważanie dynamiczne członów obrotowych podatnych

Wyważanie wirników, które praktycznie zaliczamy do sztywnych, wykonywać można przy dowolnej prędkości kątowej. Ich wyważanie uzyskuje się dodając (lub odejmując) dwie masy korekcyjne w dwóch różnych płaszczyznach. Inne wymagania mają człony obrotowe, które ze względu na ich proporcje wymiarowe traktować trzeba jako elementy podatne (wały napędowe, długie wirniki turbin...). Dla określenia tych

różnic przeanalizujemy pionowo ułożyskowany wał AB (rys. 228a) z osadzoną tarczą o środku ciężkości S przesuniętym, jak to zwykle bywa, o wartość e . Przy ruchu wału z prędkością kątową w siła bezwładności masy niewyważonej tarczy (masę wału na razie pominiemy) spowoduje odkształcenie wału (rys. 228b) określone strzałką ugięcia y . Siłę tę można wyrazić

$$P_b = m(e + y)\omega^2. \quad (236)$$

Z drugiej strony

$$y = P_b \cdot c_1, \quad (237)$$

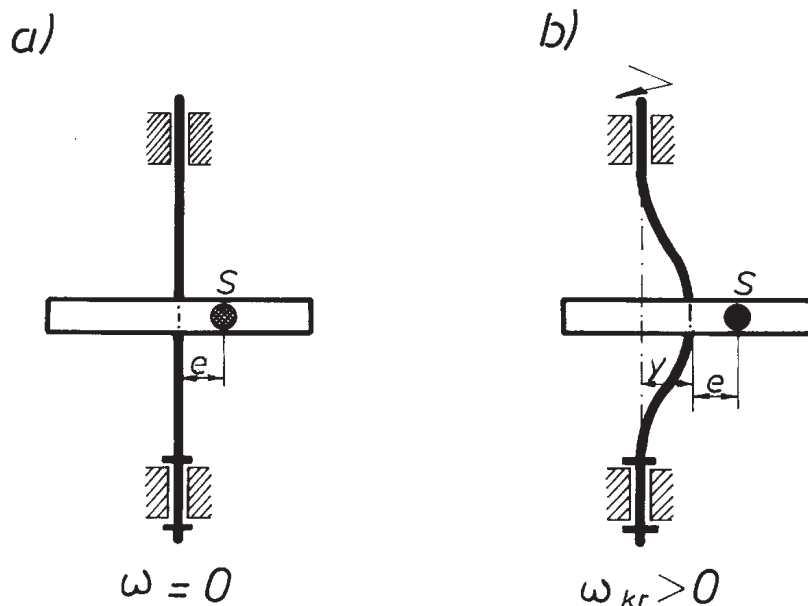
gdzie c_1 – współczynnik podatności określający ugięcie pod działaniem siły jednostkowej,

Na podstawie wzorów (236) i (237) otrzymamy po przekształceniach

$$y = \frac{\omega^2 \cdot e}{\frac{1}{c_1 m} - \omega^2}. \quad (238)$$

Prędkość kątową wału, przy której $y \rightarrow \infty$, nazywamy **prędkością krytyczną** ω_k , a jej wartość otrzymamy przyrównując do zera mianownik wyrażenia (238)

$$\omega_k = \sqrt{\frac{1}{c_1 m}}. \quad (239)$$



Rys. 228. Wyważanie elementów podatnych: a) wirnik w spoczynku, b) wirnik w ruchu

Na podstawie wzorów (238) i (239) przedstawmy jeszcze raz wzór określający strzałkę ugięcia y w postaci

$$y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 - 1}. \quad (240)$$

Z wyrażenia (240) wynika, że gdy $\omega < \omega_k$, wówczas $y > 0$, gdy zaś $\omega > \omega_k$, wówczas $y < 0$. Należy to rozumieć tak, że przy prędkościach ponadkrytycznych strzałka ugięcia y ma zwrot przeciwny do zwrotu siły wymuszającej (jest przesunięta w fazie o kąt π). W zakresie prędkości ponadkrytycznych, gdy $\omega \rightarrow \infty$, strzałka y maleje i zmierza do a , ($y \rightarrow e$). Siła bezwładności ma wtedy wartość

$$P_b = m(e + y)\omega^2.$$

Jak wynika z tych rozważań, wirniki podatne należy wyważać przy prędkościach ich pracy i masy korekcyjne umieszczać w odpowiednio dobranych płaszczyznach. Wprowadzenie mas korekcyjnych w niewłaściwych miejscach, określonych przy prędkościach wyważania różnych od prędkości roboczych, może (zamiast poprawić) pogorszyć efekt wyważania.

Wyważanie wirników podatnych jest zabiegiem trudnym i oczekiwany, a właściwie kompromisowy, efekt uzyskuje się zwykle na drodze kolejnych prób.

LITERATURA

- [1] ADAMCZYK E., JUCHA J., MILLER S., *Teoria mechanizmów i maszyn*, Wrocław, PWr., 1980.
- [2] ARTOBOLEWSKI J. J., *Teoria mehanizmov i mašin*, Moskva 1967.
- [3] DZIOGLU B., *Getrieblehre*, Fr Vieweg, Sohn. Braunschweig 1965.
- [4] LEVITSKIJ N.J., *Teoria mehanizmov i mašin*, Moskva, Nauka, 1979.
- [5] KOŻEWNİKOW S., *Teoria mechanizmów i maszyn*, Warszawa, Wyd. MON, 1956.
- [6] MILLER S., *Zarys teorii mechanizmów i maszyn*, Wrocław, PWr., 1974.
- [7] MILLER S., *Układy kinematyczne (podstawy projektowania)*, Warszawa, WNT, 1988.
- [8] MINKOV K., *Robotika* (skrypt Uniwersytetu sofijskiego), Sofia, 1986.
- [9] MORECKI A., ODERFELD J., *Teoria maszyn i mechanizmów*, Warszawa, PWN, 1987
- [10] NOWIŃSKI W.L., *Komputerowy system dialogowy przeznaczony do rozwiązywania zagadnień TMM*. Rozprawa doktorska 1987 (Bibl. Nauk. Politechniki Łódzkiej).
- [11] ODERFELD J., *Wstęp do mechanicznej teorii maszyn*, Warszawa, WNT, 1962.
- [12] OLEŃDZKI A., *Podstawy teorii maszyn i mechanizmów*, Warszawa, WNT, 1987.
- [13] PARSZEWSKI Z., *Teoria maszyn i mechanizmów*, Warszawa, WNT, 1974.
- [14] PYŁAK K., BARTNIK R., *Zbiór zadań z TMM*, Wydawnictwa Uczelniane Politechniki Lubelskiej 1986.
- [15] SZALA W., *Zasady stabilizacji zmiennych obciążeń momentowych w maszynach ceramicznych*. Praca doktorska. Politechnika Wroclawska 1976.
- [16] VOLMER J., *Getriebtechnik*, VEB, Verlag Technik 1969