

Die 3 wei malige Cohnerhöhung für Buchdruder und Buchbinder allein im letzen Dierteljahre wie die gleichzeitige weitere Preissteigerung aller Materialien zwingt mich zu einer nochmaligen Erhöhung des Grundpreises der Sammlung ab 1. Januar 1919, und zwar für die bisherige Einbandausführung von M. 1.50 auf M. 1.90.

Um die Bandchen auch zu einem billigeren Preise bei geringeren Ansprüchen an die Ausführung des Einbandes auganglich au machen, liefere ich ferner

zu dem einband [chlag). gleich de noch steis und der

Leipgi:

teswelt"

prem Entstehen dem 3 ahn dem Tüch= Wissenschaft, Kunst ei zugleich unmittel= end die Einsicht

> gebiete für m heutigen irfnis, dem ern tragen, it mit dem

ge Uber: s getstigen dem immer auf den

ikenswerter Selegenheit estrebt, der

eht als die bearbeitet, is jeht eine

rs geeignet, nen Betrag, pflegt, auch

für die Befriedigung geistiger anzuwenden. Durch den billigen Preis ermöglichen sie es tatjächlich sedem, auch dem wenig Begüterten, sich eine Bücheret zu schaffen, die das für ihn Wertvollste "Aus Natur und Geisteswelt" vereinigt.

Jedes der meist reich illustrierten Bandchen ift in sich abgeschlossen und einzeln käuflich

Jedes Bandchen geheftet M. 1.20, gebunden M. 1.50 Teneumagsuichlage 30% einichlieft. 10% Zuichlag der Buchbandlung

Leipzig, im Juni 1918.

B. G. Teubner

and area are

Biblioteka Politechniki Wrocławskiej

D.1635_

Archiwum

Teubners Künstlersteinzeichnungen

Wohlfeile farbiae Originalwerte erfter deutscher Runftler fürs deutsche Saus Die Sammlung enthält jeht über 200 Bilder in den Grofen 100×70 cm (M.7.50), 75×55 cm (M. 6.—), 103×41 cm u. 60×50 cm (M. 5.—), 55×42 cm (M. 4.50), 41×30 cm (M. 3.—) Rahmen aus eigener Werkftätte in den Bildern angepaßten Ausführungen äußerst preistwürdig.

R. W Diefenbachs Schattenbilder "Göttliche Jugend"

"Per aspera ad astra" Album, die 34 Teilb. des vollft. Wandfriefes fortl. wiederg. (20 ½->25 cm) A. 15.— Leilbilder als Wandfriese (42>80 cm) je M. 5.—, (35×18 cm) . je M. 1.25 lehtere u. Glas m. Leinmd .= Einf. je M. 4 .-

2 Mappen, I. 2. Aufl., mit je 20 Blatt (251/2×34 cm) . . . je 2ff. s.− Einzelbilder je 22. -.75 unter Glas u. Leinwandeinf. je IR. 3 .-

Rarl Bauers Lederzeichnungen

Kührer und helden im Weltkrieg. Einzelne Blätter (28×36 cm) M.-.75, Liebhaberausgabe M. 1.25, 2 Mappen, enthaltend je 12 Blatter, je . . M. 3 .-Charafterfopfe 3. deutschen Geschichte. Mappe, 32 31. (28×36 cm) M.6.35. 12 Bl. M. 3.50, Einzelblatter M. -. 85. Liebhaberausgabe auf Karton getlebt M. 1.25

Aus Deutschlands groffer Reit 1813. Su Mappe, 16 81. (28×36 cm) M. 4.50,

Scherenschnittevon Rolf Winkler

1. Reihe: "Aus der Kriegszeit". 6 Blätter, Scherenschnitte des Künstlers wiedergebend. 1. Abschied des Landwehrmannes. 2. Auf der Wacht. 3. In Zeuerstellung. 4. Stipatrouille. 5. Treue Rameraden. 6. Am Grabe des Rameraden.

Auf Rart. m. verfciedenfarb. Tonunterdruct: Einz. M. 1.25, 6 Bl. in Mappe M. 5.— Unter Glas in Leinwand-Einfaffung: M. 4.—. In Mahagonirah mehen: M. 7.—

Deutsche Kriegsscheiben

Scheibenbilber erfter Mundener Runfter wie v. Defregger, J. Diez, E. Gruhner, Scheibenbliet einer Aningener Aufgeie vo. Defregger, G. Diez, C. Drugner, d. d. Die hie en A. Jank, v. Jügel n. Sie beingen töftlich humorvolle, zumeist auf den Krieg bezügliche Darstellungen, wie den großmäuligen Engländer, die Entente, "Aussensduorfon", U. 21 auf der Jagd, u. a. und sind zur Schieldunsbildung und als Jimmerschmut gleich geeigner und wertwolf.
Breis ie ca. A. 1.50. Auf Pappe mit grünem Krauz je ca. A. 1.80. Auf Holz mit grünem Krauz je ca. A. 1.80. Auf holz mit grünem Krauz je ca. A. 1.80. Auf holz

Als 12 et Scheibchen (Blatten) Stud 15 Pf., 12 Stud M. 1 .-

Bostkartenausgaben

Jede Rarte 15 Pf., Reihe von 12 Karten in Umfchlag M. 1.50, jede Karte unter Glas mit fdwarzer Cinfaffung und Conur IR. 1.

Teubners Runftlerfteinzeichnungen in 11 Reiben (bavon 50 verfc). Motive auch u. Glas in ovalem Rahmen je M. 2.—, in edigem Holzuhmeh, je M. 2.25). Bauero Zührer u. Helden in 2 Reihen. Winklers Scherenschnitte, 6 Kart. in Umschl. M. –80. Kriegsscheiben-Karten in 2 Reihen (Dieje nicht mit Einfaff, tauft.). Dentwurdige Statten aus Mordfrantreich. 12 Karten nach Orig.-Eithograph. von R. Lohe. Diefenbachs Schattenbilder in 6 Reihen Kinderleben, 6 Karten nach Glesschichen, von Heisenbags Schutenbliebe in d'Arigen Le Ber bose des Grands nach Glesschichen, von Heila Peters. 1. Der gute Inder. 2. Der bose Amber. 3. Wo drückt der Schuh? 4. Schmeichellähden. 5. Püpphen, ausgepastel 6. Große Wasche. In Umicht. M. ... so. Schattenriffente. von Geda Luife Schnidt: 1. Aeiber Spiel u. Lanz, Seft im Garten, Volumenoralel, Die Leine Schäferin, Belaufcher Dieber, Kattenfänger von hameln. 2. Reibe: *Die Freude, *Der Belud. Im Grünen, *Reisenspiel, *Ein zushlingsfrauf, *Der Liebesbriel. 3. Reibe: *Der Brief an "Ihn", *Annafherungsverluch, *Am Spinett, *Beim Wein, *Ein Marchen, *Der Bebuttstag. Jede Reihe in Umichl. M. -. 80 *Diese Schattenriffarten von Gerda Luise Schmidt auch als Bilder im Kormat 20x15 cm je M. -. 50. In Mahagonirahmaen m. Glas einfal. Bild je M. 5.50 Bollft. Rat. ff. tunftler. Wandichm. m. farb. Wiederg. v. ff. 200 Bl. geg. Einsendg. v. 75 Bf. (Rusl. 85 Bf.) Ausf. Berg. d. Bofitartenausg. umfonft. Beibe v. Verlag in Leipzig, Boftftr. 3.

Verlag von B.G. Teubner in Leipzig und Berlin

Bisher find zur Mathematik und Aftronomie ericienen:

Einführung in die Mathematit. Von Oberlehrer W. Ginführung in b. Mathe Mendelsiohn. Mit 42 Kig. (Bd. 503.) matif

*Mathematische Kormellammlung. Ein Wiederholungsbuchder Elementarmathematik. Von Brof. Dr. G. Jatobi. (Bb. 567.)

Arithmetif und Algebra sum Selbstunterricht. V. Studienrat Arithmetit, D. Crants. 2 Hände. (3d. 120, 205, auch in 1 Band gebunden.)
I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen eisen Grades mit einer und mehrere Undedannten. Gleichungen weiten Grades, S. Aufl. Mit 9 Siguren. (3d. 120.)
II. Teil: Gleichungen. Arithmetische u.geomet. Reiben. Jineszinse u. Aentaucchung.
Kompleze Jahlen. Binomischet Lehtfach. 4. Aust. Mit 21 Terifiguren. (3d. 205.) *Einführung i.d. Bektorrechnung. V.Brof. Dr. A. Jung. (668.) Einführung i. d. Infinitefimalrechnung m. einer biftor.Aberficht. D. Brof. Dr. G. Rowalewsti. 2. Aufl. Mit 18 Sig. (Bd. 197.) Differentialrechnung unter Berudfichtigung der praft. Anwend. in der Technik mit gable. Beispielen u. Aufg, verfeben. Bon Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit 45 Sig. u. 161 Aufg. (Bd. 987.) Integralrechnung mit Aufgabenfammlung. Von Studientat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit Siguren. (8d. 673.) *Ausgleichungsrechnung. Von Geh. Regierungsraf Broi. E. Begemann. (80. 609.)

Blanimetrie zum Selbitunterricht. Von Studienrat B. Crank. Geometrie 2. Rufl. Mit 94 Siguren im Text. (Bd. 940.)-

Ebene Trigonometrie zum Gelbstunterbicht. Bon Studiental B. Crant. 2. Rufl. Mit 50 Siguren im Test. (30. 431.)

*Sphärifche Trigonometrie. Von Studienrat B. Crank. (605.) Analytifche Geometrie der Ebene zum Selbftunterricht. Von Studienrat B. Cranh. Mit 55 Siguren. (Bb. 504.)

Braftifche Mathematit. Von Brof. Dr. R. Neuendorff, 2Bde. Angewandte Bedftige Mathematit. Von Jiof. Dr. A. Acuentoriff. 2004. Mathematik I. Teil: Graphische Dariteilungen. Tetürzies Rechnen. Das Nechnen mit Tabellen. Mathematik Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufen. Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlicheites nechnung. 2., verweiseite Auslage. Wit 29 Jiguren und 1 Tasel. (Bd. 341.) II. Teil: Geometrisches Zeichnen, Projektionslehre, Flächenmessung, Körpermessung. Mit 193 Jiguren. (Bd. 526.)

Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Von Reas Rat Dipl.=Ing. R. Lenz. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 490.)

Geometrifches Reichnen. Von Reichenlehrer A. Schubeisto.

Mit Siguren. (Bd. 568.)

Brojettionslehre. Die rechtwinklige Barallelprojettion u. ihre Anwendung auf die Darftell, techn. Gebilde nebit Anhang über die fchiefwinklige Barallelprojektion in turger leichtfaßl. Darftell. f. Gelbftunterr. u. Schulgebr. V. Beichenl. A. Schudeisth. Mit 208 Sig. (Bb. 564.) Die Grundzüge der Berivettive nebit Anwendungen. Von Brof. Dr. R. Doeblemann. Mit 91 Sig. u. 11 Abb. (Bd. 510.) Die graphische Darftellung, Bon Sofrat Brof. Dr. S. Auerbad. Mit 100 Abbildungen. (Bd. 497.) Make und Meisen. Bon Dr.W. Blod. Mit34 Abb. (Bd. 385.)

ANUG 14: Mathematif a Alemande, VI. 18

M 350 + 3.85

Mathema: Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. 3. Auflage. tifche Spiele Mit 1 Titelbild und 77 Siguren. (8d. 170.)

Das Schachspiel und seine strategischen Brinzipien. Von Dr. M. Lange. Mit den Bildn. E. Lasters u. P. Morphys, 1 Schachsbreitssellund 43 Darstellungen von Ubungsbeispielen. 9., verand. Aufl. 13.–18. Tausend. (Bd. 281.)

*Die Hauptvertreter der Schachspielkunft u. die Eigenarten ihrer Spielführung. Von Dr. M. Lange. (Bd. 531.)

Seichichte Naturwissenschaften und Mathematik im Llassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. E. Heiberg. Mit 2 zig. (Bd. 370.)

*Die Naturwissenschaften im Mittelalter und im Zeitalter des Wiedererwachens der Wissenschaften. Von Direktor Dr. z. Dannemann. (Bd. 695.)

*Die Naturwissenschaften in der Neuzeit. Von Direktor Dr. z. Dannemann. (Bd. 696.)

Aftronomie Der Bau des Weltalls. Bon weil. Brof. Dr. J. Scheiner.

u. Aftrologie 4. Auflage. Mit 26 Siguren. (Bd. 24.)

Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von weil. Prof. Dr. M.B. Weinstein. 2. Aufl. (8d. 223.) Untergang der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von weil. Prof. Dr. M.B. Weinstein. (8d. 470.) Das aftronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2. Aufl. Mit 19 Abb. (8d. 110.) Probleme der modernen Aftronomie. Von Professor. Oppenheim. Mit 11 Kiauren. (8d. 355.)

Die Aftronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben. Bon Professor Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abbildungen. (Bd. 378.) Die Sonne. Bon Dr. A. Krause. Mit 64 Abb. (Bd. 357.) Der Mond. Bon Prosessor Dr. J. Franz. Mit 34 Abbildungen. 2. Aussage. (Bd. 90.)

Die Blaneten. Bon weil. Brof. Dr. B. Beter. Mit Siguren. 2. Auflage von Dr. H. Naumann. (Bb. 240.)

Der Ralender. Bon weil. Brof. Dr. W. J. Wislicenus. 2. Ruf-lage. (Bd. 69.)

Sternglaube und Sterndeutung. Die Geschichte und das Wesen der Astrologie. Unter Mitwirdung von Geh. Nat Prof. Dr. C. Bezold dargestellt von Geh. Hofrat Prof. Dr. Franz Boll. Mit 1 Sternkarte und 20 Abbildungen. (Bd. 698.)

Meteoro- Einführung in die Wetterkunde. Von Brof. Dr. E. Weber. 3.Aufl.v. "Windu. Wetter." Mit28 Abb. i. I. u. 3 Taf. (Bb. 55.)
Unfer Wetter. Einführung in die Klimatologie Deutschlands. Von Dr. R. Hennig. 2. Auflage. 6.—10. Taufend.
Mit zahlreichen Abbildungen. (Bd. 349.)

Die mit * bezeichneten u. weitere Bande befinden fich in Borb.



Die "Melandolie" von Durer.

16351

Aus Natur und Geisteswelt Sammlung wissenschaftliche gemeinverständlicher Darstellungen

170. Bändchen

Mathematische Spiele

Von

Dr. W. Ahrens

in Roftod

Vierte, verbesserte Auflage 17.-22. Taufend

Mit einem Titelbild und 78 Figuren im Text



Verlag und Drud von B. G. Tenbner in Leipzig und Berlin 1919



Schussormel für die Bereinigten Staaten von Amerika: Copyright 1919 by B. G. Teubner in Leipzig

Alle Rechte, einschließlich des Übersehungsrechts, vorbehalten

Akr. 318 1946

Vorwort.

"Das vorliegende Büchelchen gibt eine Auswahl von mathematischen Spielen, und zwar solche, die mir einerseits besonderes Interesse zu versteinen schienen, andererseits sich für diesenige Darstellung eigneten, die ich mir für dieses Buch vorgeset hatte. Um nämlich niemanden, auch den der Mathematik völlig Unkundigen, von der Lektüre auszuschließen, habe ich nirgends irgendwelche mathematischen Kenntnisse beim Leser vorausgeset. Die durch diese Kücksicht bedingte Darstellung gestaltete sich zwar an einzelnen Stellen etwas breiter, während an anderen wenigen Stellen auf strenge Beweissührung verzichtet werden mußte. Ich hosse jedoch, daß man diese Mängel nicht als erheblich empsinden, sondern sie mit dem gewonnenen Vorteil einer im weitesten Sinne populären Darstellung entschuldigen wird."

Mit diesen Worten wurde das Programm der ersten Auflage dieses Buches (1907) im damaligen Vorwort gekennzeichnet. Die zweite Ausgabe (1910/1911) ersuhr sodann eine Erweiterung durch ein neues Kapitel: "Mathematische Trugschlüsse", und hierfür mußte natürlich der in den übrigen Kapiteln befolgte Grundsatz, der mathematischen Kunstsprache durchaus zu entraten, preisgegeben werden. Beruhen doch diese Trugschlüsse in der Hauptsache gerade auf unrichtiger Handhabung der mathematischen Technik. Derzenige Leser, der über keinerlei mathematische Kenntnisse versügt, wird also auf dieses Kapitel IX, das übrigens von der dritten Auslage (1916) ab noch eine Erweiterung

erfahren hat, im wesentlichen verzichten muffen.

Um das Mitarbeiten des Lesers mehr zu beleben, sind dem Text einige fortlausend durch das Buch numerierte Fragen beigegeben, die durchweg so einsach sind, daß der Leser, der mit Verständnis gesolgt ist, sie selbständig beantworten wird. Die am Schlusse gegebenen Untworten sollen daher mehr der Beruhigung des Lesers als der Befriedigung eines Bedürsnisses dienen. In höherem Grade wird vielen Lesern eine Besprechung ("Ausdeckung") der Trugschlüsse erwünscht sein, und diese ist daher denn gleichfalls in jenem Schlußabschnitt "Beantwortung der Fragen" gegeben. Gegenüber der dritten Auslage, die, obschon nahezu ebenso stark wie die beiden ersten zusammengenommen, in ziemlich kurzer Zeit versichwunden ist, konnte die jezige, vierte Ausgabe eine nennenswerte Umsangsvermehrung schon aus äußeren Gründen nicht mehr ersahren. Vielmehr mußten sogar einige kleinere Partien, die niemand vermissen wird, gestrichen werden, um insbesondere für eine Anzahl neuer Vilber, die manchen Lesern, wie ich hosse, nicht unerwünscht sein werden, Raum zu schaffen. Auch die aus einem anderen (äußeren) Grunde vorgenommene Neubearbeitung von Kapitel VIII, § 3, brachte erwünschten Raumgewinn.

Wer eine eingehendere und gründlichere Behandlung dieses ganzen Gebietes mit aussührlichen geschichtlichen und literarischen Angaben sucht, sindet diese in meinen im gleichem Berlage erschienenen "Mathematischen Unterhaltungen und Spielen", die gegenwärtig in zweiter und zweibändiger Ausgabe vorliegen. Dort haben sämtliche in diesem kleinen Buche besprochenen Gegenstände neben zahlreichen anderen Themen eine aussührliche Behandlung ersahren mit alleiniger Aussnahme der "Trugschlüsse". Der für Dinge dieser letzteren Art besonsders interessierte Leser sindet übrigens manche andere, hiermit verwandte Fragen in meinem Buche "Altes und Keues aus der Untershaltungsmathematit" (Berlin 1918), und zwar in Kapitel VIII dort, behandelt.

Roftod (g. 3t. Arendfee) in Medl., ben 6. Juli 1918.

28. Ahrens.

Inhaltsverzeichnis.

| | Dette |
|---|-------|
| Einleitung | 7 |
| Rapitel I. Wettipringen | 11 |
| | 13 |
| Rapitel II. Das Boß Puzzle oder Fünfzehnerspiel | 13 |
| § 2. Lösung der Aufgabe | 15 |
| § 2. Löjung der Aufgabe | 18 |
| Rapitel III. Solitar: oder Ginfiedlerfpiel | 25 |
| § 1. Spielregel. Notation | 25 |
| § 2. Aufgaben bei teilweise besetztem Brett | 27 |
| § 3. Vollbesetztes Brett | 29 |
| § 4. Theorie des Spiels | 31 |
| Rapitel IV. Dyadische Spiele | 35 |
| § 1. Die Reihe der Botenzen der Zahl 2 | 35 |
| § 2. Eine besondere Unwendung der Reihe der Potenzen von 2 . | 37 |
| § 3. Erraten gedachter Bahlen und Gegenstände | 40 |
| § 4. Der Lucassche Turm | 43 |
| Rapitel V. Das Zankeifen | 46 |
| Rapitel VI. Nim | 50 |
| § 1. Beschreibung bes Spiels und Stizzierung seiner Theoric | 50 |
| \$ 2. Bearündung der Theorie des Spiels | 53 |
| § 3. Das praktische Spiel | 60 |
| Rapitel VII. Der Röffelsprung | 62 |
| § 1. Definition. Geschichte. Vorbemerkungen | 62 |
| 8 2. Reiniele non Mollelinrungen | 64 |
| § 3. Ginige Methoden gur Bildung von Röffelfprungen | 65 |
| § 4. Magische Rösselsprünge | 72 |
| Rapitel VIII. Magische Quadrate | 73 |
| § 1. Einleitung | 73 |
| § 2. Das neunzellige magische Quadrat. | 75 |
| § 3. Allgemeine Methode für Bildung ungeradzelliger magischer | 77 |
| Quadrate | 82 |
| § 4. Geradzellige Quadrate | 86 |
| 9 5. Muylluk Amurtuk an amurkuta. | |
| Rapitel IX. Mathematische Trugschlüffe | |
| Beantwortung der Fragen | 107 |

Das, sollte ich meinen, liefte sich wohl aus der Ersahrung dathun, dass auch bes Bielen, die nie den Namen Mathematik gehört haben, eine große Menge von Bergnügungen mathematisch ist. Alle Spiele, die ungleich voll von Nachbenten, in langer Ordnung vom Schach bis tief unter das Bochenhinunter gehen, vergnügen, weil man bes ihnen rechnet, und Kontenelle bat sie länghfür eine nafürliche Algebra erklätt.

R. G. Käftnet. "Uber den Wetth der Mathematif, wenn man sie als einen Zeitvertreib betrachtet." Ges. schönwissensch. Werde III, Berlin 1841. p. 83.

Ginleitung.

Mit "Spiel" pslegen wir eine Beschäftigung zu bezeichnen, die wir nicht eines bestimmten nüplichen Zweckes wegen, sondern lediglich zu unserer Unterhaltung, unserem Bergnügen, unserer Zerstreuung, unserer Erbauung entweder selbst vornehmen oder von anderen vornehmen lassen. Wir sprechen so von dem "Spiel" der Kinder, dem "Spiel"

des Musikers, dem "Spiel" auf dem Theater usw.

Daß das Spiel oft auch einen bilbenden Wert, selbst einen bedeutenden bildenden Wert hat, widerspricht unserer Definition durchaus nicht; man darf vielmehr, wie dies geschehen ist, in gewissem Sinne die Wissenschaft selbst als ein "Spiel" bezeichnen. — Das vorliegende Büchelchen enthält nur Spiele und erwartet vom Leser, daß er mitspielt. Sin Teil der darin behandelten Spiele erfordert, wenn dies auch keineswegs ein Erfordernis des Spiels an sich ist, bei praktischer Ausführung die Beteiligung von mindestens einer zweiten Person und kommt dann zumeist auf einen Wettstreit zwischen den beiden Spielenden hinaus.

Während dem Spielenden an sich ein bestimmtes Ziel nicht vorzusichweben braucht, ist dies bei vielen Spielen und bei den im vorliegenden Buche behandelten ausschließlich der Fall. Die Erreichung dies Zieles kann, wie bei den reinen Glücksspielen, lediglich vom Zusall abhängen, sie kann aber auch bedingt sein durch manuelle Fertigkeiten oder durch eine geistige Leistung. Bei vielen Spielen — ich nenne als Beispiel das Billard — wird das Ergebnis durch das Zusammenwirken dieser verschiedenen Faktoren, von denen je nach Lage des Falles der eine mit größerer, der andere mit geringerer Stärke wirken wird, bestimmt werden.

Als "mathematisch" wird man ein Spiel nun dann zu bezeichnen haben, wenn es zu seiner Ausübung eine geistige Tätigkeit ersordert, bei der Methoden und Schlußweisen nach Art der in der Mathematik üblichen zur Anwendung gelangen oder doch bei verständigem Spielsbetrieb gelangen müssen. Der mathematische Charakter des Spiels wird um so vollkommener sein, se mehr solche mathematischen Denkprozesse und Normen das ganze Spiel für sich allein beherrschen. Die mathematische Behandlung eines Spiels ist natürlich — ebenso wie auch die Mathematik selbst — nicht unbedingt an eine bestimmte techsnische Sprache, dargestellt durch Zeichen, Formeln usw., gebunden.

Diese Dinge sind vielmehr stets nur aus Rücksichten geistiger Ökonomie geschaffen und daher allerdings, insbesondere bei den schwierigeren Fragen der mathematischen Wissenschaften, dem menschlichen Geiste, der die verborgenen Wahrheiten nicht unmittelbar zu erkennen versmag, sondern zu ihnen nur unter Benutzung geistiger Krücken vorzusdringen in der Lage ist, absolut unentbehrlich und sind die zu dem Grade wichtig, daß zweckmäßige Festsehungen in diesen Außerlichkeiten sogar ausschlaggebend für die ganze weitere Entwicklung des betreffensden Wissenschaftsgebietes werden können. Für die hier behandelten Materien, die ausschließlich von der alleresementarsten Art sind, können wir jedoch von einer technisch=mathematischen Darstellungsweise—außer im letzten Kapitel, das überhaupt eine Sonderstellung in dem Buche einnimmt, —absehen, ohne uns einen erheblichen Zwang anzutun.

Es fei gestattet, das Befen eines mathematischen Spiels an einem Beispiel zu erläutern, wofür wir bas in Kapitel VI behandelte "Nim"= Spiel mablen wollen: Gine relativ einfache Theorie, die, wenn auch obne die eigentliche Kunftsbrache des Mathematikers darstellbar, von ausgeprägt "mathematischem" Charafter ift, lehrt, daß es ein unbedingt zum Siege führendes Verfahren gibt, burch das in ber großen Mehr-Rahl der Fälle der anziehende Spieler fich - fogar bereits mit dem ersten Zuge - ben Sieg sichern kann. Die Renntnis biefer Theorie verschafft baher dem Spielenden gegenüber einem der Theorie unkundigen Gegner, mag biefer an fich in beraleichen Spielen nicht ungeübt und felbst scharffinnig sein, zunächst eine Überlegenheit, die der einer mit den modernsten Feuerwaffen ausgerüsteten Truppe gegenüber einem Saufen mit Bfeil und Bogen bewaffneter Bilben gleichkommt. Falls beide Spieler die mathematische Spieltheorie kennen und fehlerfrei handhaben, hängt der Ansgang des Spiels nur noch von der Anfangs= stellung ab, und, da die Spielenden die Bestimmung biefer bem Rufall überlaffen werben, fo würde das Spiel damit den Charakter eines reinen Glüdsfpiels annehmen, womit zugleich die praftifche Durchführung der Spielpartien allen Reiz verlieren murde. Als Spiel vermag uns das "Nim" daher höchstens folange zu fesseln, als wir das mathematische Bringip noch nicht erfannt haben, und bas Intereffe, bas biefer Gegenstand unter allen Umftanden verbient, liegt vorzugsweise in feiner ingenibsen mathematischen Theorie begründet.

Es sind nun durchaus nicht etwa gerade die kompliziertesten Spiele, die vom mathematischen Standpunkte das größte Interesse verdienen;

benn eine abschließende, alle überhaupt möglichen Fälle umfaffende Theorie ist für folche Spiele, unter benen bas Schach als bas mohl fomplizierteste und jedenfalls bilberreichste obenan fteht, taum bentbar, wir meinen eine Theorie, die genau für jede nur denkbare Bosition den absolut besten Aug angeben wurde und die etwa als Refultat ergeben murde, daß der Anziehende stets fiegen muß ober, mas wohl mahrscheinlicher ift, die Bartie stets unentschieden machen fann. Zwar ist verschiedentlich versucht worden, auch die Mathematik der Schachtheorie dienstbar zu machen, jedoch wird man diese Bersuche als miklungen ansehen burfen, soweit es sich um die "Theorie" in bem foeben erläuterten Sinne handelt. Denn mas foll man überhaupt unter einer .. mathematischen" Behandlung der Schachtheorie verstehen? Eine folde munte fich von der Schachtheorie im gewöhnlichen Sinne boch zunächst iedenfalls dadurch unterscheiden, daß fie alle bei einer gegebenen Stellung überhaupt nur möglichen Züge in den Bereich ihrer Erwägungen zöge: dies übersteigt aber wohl menschliches Können überhaupt. Aft doch, um nur ein Beispiel anzuführen, die Bahl aller verschiedenen, nach 2 Zügen (2 von jeder Seite) möglichen Positionen bereits größer als 70000, wenn auch die meisten dieser Kombinationen mehr oder minder fehlerhafte Buge enthalten werden, und vorläufig erscheint es jedenfalls ganz aussichtslos. durch Benukung spezifisch mathematischer hilfsmittel oder Denkprozesse für ein folches erichöpfend analytisches Verfahren eine erhebliche Abkurzung zu erreichen. Bielmehr murbe, wenn man etwa an die Stelle ber einfachen und übersichtlichen Gangarten der Figuren, des Mat usw. komplizierte Formeln seben und mit diesen gewisse Rechnungs-Algorithmen ausbilden wollte in der Beise, wie dies teilweise versucht ift, Arthur Schopenhauer nur recht bekommen mit seinem bekannten Ausspruch. baß ber Mathematifer einem Menschen gleiche, ber fich seine gesunden Beine abschneibe, um fich ftatt beren hölzerne anseben zu laffen, - fo unberechtigt dies Wort des mathematikerfeindlichen und wenig mathematikverständigen Philosophen auch sonst ist. Eine vollständig erschöpfende Berücksichtigung aller nur möglichen Kombinationen wurde bem praktischen Schachspieler übrigens einen unverhältnismäßigen Aufwand an Zeit und Rraft bedeuten, vielmehr scheidet sein tattischer Blick eine große Rahl offenbar fehlerhafter ober wertlofer Rüge von bornherein aus und läßt ihn seine gange Rraft benjenigen zuwenden, Die im Bereich des 3wedmäßigen liegen und beren Ronseguengen da=

her so weit wie möglich zu verfolgen sind: er gleicht einem Wanderer, ber auf feiner Banderschaft eine große Stadt paffiert und fich ein Bild von dieser verschafft, indem er der Flucht der Hauptstraßen folgt. Lage und Aussehen der hervorragendsten und merkwürdigften Gebäude fich genau einprägt und bann feine Banderschaft fortsett, mahrend ein anderer fich vornimmt, die Stadt nicht früher zu verlaffen, als bis er jede, auch die offenbar unbedeutendste Strake passiert und jedes einzelne Haus betrachtet hat, wobei er allerdings vielleicht einmal eine Mertwürdigkeit entdeden wird, die dem ersteren entging, andererseits aber von Zeit zu Zeit sich in Sachgassen festrennt und einen unverhältnis= mäßig viel längeren Aufenthalt nehmen muß ober überhaupt gang hängen bleibt. So ist das Schachspiel zwar, da manuelle Fertigkeiten babei gar feine Rolle spielen und auch die Macht des Rufalls so gut wie vollständig ausgeschaltet wird, ein rein geiftiges, rein logisches und boch fein mathematisches ober wenigstens nur ein recht un= vollkommen mathematisches Spiel. Das .. fonigliche Spiel" wurde auch feine fo große Gemeinde von Sungern und Berehrern gablen und sich durch die vielen Sahrhunderte hindurch nicht in jugendlich-reizvoller Frische erhalten haben, wenn nicht durch die unermeklich große Rahl von Rombinationen einer abichliekenden Behandlung porgebeugt wäre, und auch vermittelst der ihr eigenen Hilfsmittel wird es der Mathematik, wie schon gesagt wurde, wohl nie gelingen, das Schach bes Reizes, ben es als Spiel ausübt, zu entfleiden.

Ein Beispiel eines Spiels, das gleichfalls — wenigstens in Deutschland — auf den 64 Feldern des Schachbretts gespielt wird und für das eine abschließende Theorie resp. Unalnse leicht gegeben werden kann, ist das unter dem Namen "Schaf und Wolf" bekannte. Für dieses unvergleichlich viel einsachere und nicht im entserntesten so abwechselungsvolle Spiel läßt sich unter Berücksichtigung aller überhaupt möglichen Fälle zeigen, daß und wie der Führer der als "Schafe" bezeichneten Steine steine steine kiets gewinnen muß, ein Beweiß, den man führt, indem man eine erschöpfende Liste aller nur möglichen Fälle in zwecksmäßig spitematischer Anordnung aufstellt und für jeden Fall den resp. die richtigen Jüge angibt. Vom Standpunkt des Mathematikers bietet dies Versahren übrigens kein besonderes Interesse, da keinerlei der Mathematik besonders eigentümliche Schlußweisen dabei zur Anwenzung kommen, das Versahren vielmehr sast einer Art von Statistik mehr ähnelt als einem mathematischen.

Rapitel I.

Bettipringen.

Wir beginnen mit einem ganz besonders einfachen Spiel, dem fols genden:

Eine Person A nennt eine beliebige Jahl, jedoch höchstens 10; eine zweite Person, B, nennt darauf eine größere Jahl, die mindestens um [und höchstens um [0 größer ist als die von A genannte. Dann neunt wieder A eine Jahl, die mindestens um [und höchstens um [0 größer ist als die zuvor von B genannte, und so abwechselnd fort. Sieger ist derjenige, der gerade [00 erreicht. Läßt sich der Sieg erzwingen und gegebenenfalls: wie und von welchem der beiden Spieler?

Man kann bem Spiel natürlich auch etwa folgende, anschaulichere Einkleidung geben:

Zwei Knaben A und B, von denen jeder höchstens $10 \, \mathrm{fug}$ weit zu springen vermag, wollen in abwechselndem Sprunge eine gegebene Bahn von $100 \, \mathrm{Fug}$ Länge zurücklegen und dabei solgende Regeln beobachten: Jeder muß jedesmal mindestens $1 \, \mathrm{fug}$ weit springen. A beginnt, und B springt alsdann von der Stelle aus, bis zu der A gekommen ist, dieser wieder von der Stelle ab, bis zu der B kam, usw. (Hierbei wird jedoch, wenn die Sprungweite sich nach Bruchteilen von kuß mißt, nur die nächstellenere ganze Zahl gerechnet, z. B. statt $5^3/_4$ f. nur $5 \, \mathrm{f.}$) Sieger ist derjenige, der gerade das Ende der Bahn erreicht.

Nach wenigen Versuchen bemerken die Spieler, daß der Zielpunkt 100 mit Sicherheit für denjenigen erreichbar ist, der zuvor auf 89 gelangt ist (s. die umstehende Fig. 1). Denn wenn der eine, sagen wir A, gerade bis 89 gekommen ist, so trennt den Gegner B vom Ziel noch eine Distanz, die seine maximale Leistungsfähigkeit noch um 1 Juß übersteigt. B selbst kann also mit dem nächsten Sprunge das Ziel nicht erreichen; andererseits ist er aber nach der Spielregel verpflichtet, mindestens 1 Fuß weit zu springen. Mag er nun bis 90, 91, 92 . . . oder im

äußersten Falle bis 99 springen: in jedem Falle fann A mit dem

nächsten Sprunge bas Biel erreichen.

Fit nun das Ziel 100 von 89 aus mit Sicherheit zu erreichen, so ist 89 wieder von 78 aus unbedingt zu erreichen, und so geht dies offenbar fort durch Stusen von je 11, also durch 67, 56 ... hindurch bis zu 12 und schließlich zu 1. Hieraus folgt, daß der Sieg ers zwungen werden kann, und zwar von demjenigen, der bei dem Spiel beginnt. Er muß nur zuerst 1 Fuß weit springen, beim nächs

sten Male auf Bunkt 12 kommen, dann auf 23 usw. bis 78, 89 und

schließlich 100.

Offenbar läßt sich das Spiel auch dann, wenn sür die Länge der Sprungbahn, si wie sür die maximale und minimale Sprungweite der beiden Spielenden andere Zahlenwerte sestgeset werden, entsprechend durchführen. Die Distanz der Stusen, nach denen man sortzuschreiten hat, um den Sieg zu erzwingen — in unserem Falle 11 — ist, wie leicht zu sehen, stetz ebenso groß wie die maximale und minimale Sprungweite des einzelnen zusammengenommen (in unserem Falle 10+1=11). Ist daher die Länge der Sprungbahn zusällig ein Vielsaches dieser Stusendistanz, so kann mithin der Sieg von dem bezinnenden Spieler (A) nicht mehr erzwungen werden, wohl aber alsdann von dem zweiten Spieler (B). Wenn die Bahn z. B. 99 Fuß lang und im übrigen alles wie in dem obigen Falle ist, so mag A beginnen, wie er will: B kann mit seinem ersten Sprunge auf 11 gelangen, mit seinem zweiten dann auf 22, . . mit seinem neunten auf 99 und hat damit den Sieg erzwungen.

Frage 1: Die Länge der Sprungbahn beträgt 200 Fuß; im übrisgen ift alles wie im ersten Falle oben. A glaubt irrtümlicherweise, zunächst wieder (wie im ersten Falle) auf 1 springen zu müssen; wie

muß B fortfahren, um ben Sieg zu erzwingen?

Frage 2: Ber kann ben Sieg erzwingen, wenn der maximale Sprung des einzelnen 8 Fuß beträgt, als Minimum wieder 1 Juß festgeset ift und die Bahn 90 Juß lang ift, und wie ist zu versahren?

Frage 3: Ber kann ben Sieg erzwingen, wenn ber maximale Sprung 17 dm, ber minimale 1 dm und die Bahnlänge 150 dm beträgt? Frage 4: Ber kann ben Sieg erzwingen, wenn ber maximale

Sprung 10 Fuß beträgt, das Minimum auf 3 Fuß festgeset wird

und die Bahn 182 Fuß lang ift?

Frage 5: Der maximale Sprung sei 9 Fuß, der minimale 2 Fuß, die Bahnlänge 100 Fuß. Als Sieger gilt derjenige, der den Gegner zwingt, zuerst das Ziel zu erreichen oder auch zu überschreiten. Wer kann den Sieg erzwingen?

Rapitel II.

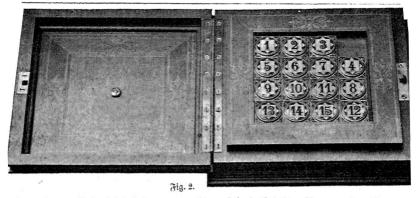
Das Bog Puzzle oder Fünfzehnerspiel.

§ 1. Geidichte und Beidreibung des Spiels.

In einem Spielschrein, der dem deutschen Kronprinzenpaare, dem späteren Kaiser Friedrich und seiner Gemahlin, zu ihrer am 25. Jasuar 1883 begangenen Silberhochzeit vom Verein für deutsches Kunstzgewerde als Ehrengade dargebracht wurde, einem Meisterwerk deutsicher Kunst, an dem mehr als 80 Künstler und Kunstgewerdler — Bildhauer, Architekten, Zeichenkünstler, Metallindustrielle usw. — unter Einschung ihres besten Könnens mitgewirkt hatten, besindet sich unter einer beträchtlichen Anzahl von Spielen der verschiedensten Artweis, das gerade damals in den vorhergegangenen Jahren eine außerschentlich große Verbreitung gesunden hatte und das daher in dem konprinzlichen Spielschen neben den mancherlei Kartens, Veretts und Gesellschaftsspielen gewiß nicht sehlen durste. Unsere umstehende Fig. 2 gibt das prächtige Exemplar des Spielschreins, den mit Einlegearbeit geschmückten Ebenholzkasten mit den 15 kunstvoll verzierten Spielsteisnen darin, in getreuer, nur verkleinerter Nachbildung wieder.

Das Spiel ist im Jahre 1878 in Amerika ersunden; sein Ersinder soll der geistvolle Sam Loyd gewesen sein, der in der Schachwelt als hervorragender Schachproblemkomponist wohlbekannt ist. Schon bald nach seiner Ersindung verdreitete das Spiel sich, in den Ländern eng-lischer Junge "Fisteenth Puzzle", in Deutschland "Boß Puzzle" oder auch "Fünfzehner: Spiel" und in Frankreich "jeu du taquin" (Neckspiel) genannt, über die ganze zivilisierte Erde und wurde in jenen ersten Jahren überall mit solchem Eiser gespielt, wie wohl kaum ein

¹⁾ Bei dieser Frage allein soll also zwischen dem Erreichen und Ubersichen bes Ziels kein Unterschied gemacht werden, während z. B. bei Frage 4 dieser Unterschied wesentlich ins Gewicht fällt.



anderes Gedulbspiel je zuvor. So wird beispielsweise von Hamburg erzählt, daß man dort die kleinen Kästen mit den 15 Holzklötzchen selbst in den Pferdebahnwagen erblicken und unruhige Hände darin schieben sehen kounte, daß die Prinzipale in den Handelskontoren über das Puzzlesieber ihrer Angestellten in Verzweislung gerieten und durch Anschläge das Spielen während der Bureauzeit aufs strengste verbieten mußten, daß große Turniere veranstaltet wurden usw. Selbst im Situngssaale des Deutschen Reichstages, so erzählt Siegmund Günther, der hervorragende Geograph, Mathematiker und liberale Politiker, der in jenen Jahren, nämlich 1878—1884, dem hohen Hause angehörte, konnte man damals auf den Bänken an der Band Abgeordnete aller Parteien sehen, die den Reden keinerlei Ausmerkssamkeit schenkten, dafür aber um so eifriger "hoßspuzzleten".

Die Aufgabe bes Spiels 1) besteht in folgendem:

Die 15, mit den Sahlen 1—15 numerierten Steine werden in willfürlicher Reihenfolge in den Kasten hineingelegt, und nun soll lediglich durch Verschieben der Steine untereinander, wie dieses ja infolge des einen leer gebliebenen Platzes möglich ist, die in der nachstehenden Figur 3 angegebene Stellung herbeigeführt werden.

¹⁾ Das Spiel kann bezogen werden von den Zullchower Anftalten (Die rektor: Paftor Friz Jahn), Zullchow bei Stettin (Nr. 840/11 des Preisberspeichnisses, das u. a. eine systematisch geordnete Zusammenstellung der verschiedensten Spiele bietet).

In vielen Källen ift es, wie wir feben werden, unmöglich, bie geforberte Stellung (Fig. 3), die wir die .. normale" mollen 1) nennen herbeizuführen; wir werden alsbann fagen, die Aufgabe fei "unlösbar". Db eine Aufgabe lös= bar ober unlösbar ist, wird ledialich von der Anfanas= stellung abhängen. Wie entscheiden wir nun, ob bei irgend= einer uns gegebe=

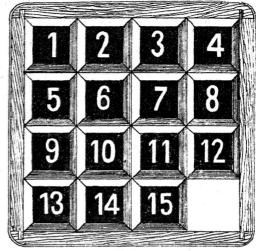


Fig. 3.

nen Anfangsstellung die Aufgabe lösbar oder unlösbar ist, und wie erhalten wir im ersteren Falle die Lösung?

§ 2. Löjung ber Aufgabe.

Bevor wir die am Ende von § 1 anfgeworfenen Fragen zu beantworten suchen, bemerken wir zunächst noch, daß wir auch die "Pläte" oder "Felder" des Brettes durch die Zahlen 1—16, entsprechend der Figur 3, unterscheiden wollen, so daß also z. B. mit "Plat 4" beständig der Plat bezeichnet wird, den in Fig. 3, also in der "normalen" Stellung, der Stein 4 einnimmt, und "Plat 16" der äußerste Plat unten rechts heißt, der in Fig. 3 gerade leer ist. Ferner wollen wir die wagerechten Keihen kurz "Zeilen", die lotrechten kurz "Spaleten" nennen und erstere von oben nach unten als erste, zweite, dritte, vierte und letztere ebenso, von links nach rechts gerechnet, unterscheiden.

Wir benten uns nun eine beliebige Anfangsftellung und versuchen,

¹⁾ Daß auch unsere Fig. 2 eigentlich die "normale" Endstellung bereits zeigt und diese jedenfalls aus ihr sosort durch Berschieben der Steine 4, 8, 12 herzustellen ift, braucht nicht erft bemerkt zu werben.

ob wir aus ihr durch Berschieben ber Steine die normale Stellung (Rig. 3) erhalten können. Bu dem Zweck wollen wir folgendermaßert perfahren: Runachst bringe man ben Stein 1 auf Blat 1, falls er nicht etwa schon zufällig bort fieht, und sodann, ohne 1 wieder zu perschieben, den Stein 2 auf Blat 2. Dies beides ift, wie leicht er= fannt wird, durch verhältnismäßig wenig Berichiebungen ftets zu er= reichen. - Sodann kann man, ohne an ber ersten Reile etwas zu perschieben, leicht die Steine 3 und 4 in das von der dritten und pierten Spalte eingenommene achtfeldrige Gebiet bringen, wofern die Steine nicht icon in diefem Gebiet ftanden. Auf jeden Fall durfen mir also binfort annehmen, daß die Steine 3 und 4 fich nunmehr in diesem achtfeldrigen Gebiet, und zwar auf irgendwelchen Bläten bort, befinden und daß das leere Weld gleichfalls diesem Gebiete angehört. Wenn nun die Steine 3 und 4 nicht etwa zufällig bereits auf ihren normalen Blaben stehen, so konnen wir sie leicht dabin bringen lediglich durch Verschiebungen innerhalb unseres achtfelbrigen Ge= bietes. Es wird nicht erforderlich fein, dies für alle möglichen Stellungen durchzuführen, sondern wir durfen uns darauf beschränken, bas Bringip bes zu beobachtenden Verfahrens an dem Beispiel eines besonders ungunstigen Falles darzulegen, nämlich desienigen, bei dem ber Stein 3 auf Blat 4 und Stein 4 auf Blat 3 fteht. Unfer acht feldriges Bebiet foll also etwa fo beschaffen sein, wie es Ria. 4 zeigt.

Bir werden alsdann bei allen Berschiebungen, die wir an Fig. 4 vornehmen, die Steine 6 und 14 unberührt stehen lassen, da wir ihrer nicht bedürfen, werden uns also freiwillig auf das Gebiet der oberen 6 Felder, das uns ausreichende Bewegungsfreiheit gewährt, beschränsten. Bollten wir uns allerdings auf die obersten 4 Felder allein, eins davon natürlich leer vorausgesetzt, beschränken, so würde, worauf wir noch zurücksommen werden, es uns nicht gelingen, die Steine 3 und

| | | | • | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 4 3 | 8:5 | 8 5 | 4 8 | 4 8 |
| 12 8 | 3 | 4 3 | 12 5 | 3 |
| 5 | 4 12 | 12 | 3 | 5 12 |
| 6 14 | 6 14 | 6 14 | 6 14 | 6 14 |
| Fig. 4. | Fig. 5. | Fig. 6. | Fig. 7. | Fig. 8. |

4 auf ihre normalen Bläte zu bringen. Aus Fig. 4 leiten wir nun leicht die Stellung Fig. 5 her, indem wir alle 5 Steine des sechse feldrigen Gebietes zweimal, den Stein 5 sogar dreimal, im umgekehrten Drehungssinne bes Uhrzeigers verschieben. Durch Bersichieben innerhalb ber 4 mittleren Felber erhält man aus Fig. 5 leicht Ria. 6. Run verschiebt man die 5 Steine des sechsfeldrigen Gebietes im Uhrzeigerfinne o, fo, daß Stein 4 auf Blat 3 kommt; man erhalt so Fig. 7 und bringt nun durch Berschiebungen innerhalb ber mittleren 4 Kelber ben Stein 3 auf Blat 7 (Fig. 8). Die jetige Stellung der Steine 3 und 4 (Fig. 8) ift nun eine thpische; fie ift, wie aus unserem, sogar noch besonders ungunftig gewählten Falle erhellen dürfte, stets zu erreichen, und aus ihr kann man nun sofort ben Stein 4 auf Blat 4 bringen und ben Stein 3 nachziehen auf Blat 3. Damit ist dann auch die ganze erste Zeile des Spielkastens in Ordnung gebracht, und an ihr wird hinfort nichts mehr geändert. -Wesentlich bei diesem Verfahren war, daß wir ein sechsfelbriges Rangiergebiet mit einem leeren Felbe gur Berfügung hatten: fo mar es uns möglich, nicht nur die 5 Steine bes fechsfeldrigen Gebietes ber Reihe nach zu verschieben, sondern außerdem innerhalb dieses fechsfelbrigen Gebietes wieder in einem vierfelbrigen Gebiete mit 3 Steinen und einem leeren Felbe Verschiebungen vorzunehmen. Erft burch die Verbindung dieser beiden Arten von Verschiebungen wird es möglich, wesentliche Beranderungen in die Stellung hineinzubringen. Mukte man fich lediglich auf ein vierfeldriges Gebiet beschränken, so murbe bei allen Verschiebungen bas Bild im wesentlichen ftets basselbe bleiben.

Genau ebenso wie die erste Zeile läßt sich nun auch die zweite in Ordnung bringen, wobei man sich bei allen Verschiebungen auf das Gebiet der untersten drei Zeilen beschränkt, also die Steine der ersten Zeile nicht mehr berührt, so daß die dort hergestellte normale Ordnung nicht wieder gestört wird. Zunächst werden dabei natürlich die Steine 5 und 6 leicht auf ihre normalen Plätze gebracht, und weiter hat man dann in dem Gebiet der 6 Felder 7, 8, 11, 12, 15, 16 (s. Fig. 3) in entsprechender Weise zu operieren, wie wir dies oben an den Figuren 4—8 dargelegt haben. Wir dürsen nämlich die obigen Ausssührungen ohne weiteres auf unseren jezigen Fall übertragen: zwar steht uns jezt nur ein sechsseldriger Rangierplatz zur Verfügung, jedoch führten wir ja oben mit freiwilliger Selbstbeschränkung gleichsfalls alle Operationen auf einem sechsseldrigen Gebiet aus und zeigs

ten, daß bieses zu genügen vermag. So bringen wir also jest bie Steine 7 und 8 auf ihre normalen Plage und haben bamit die beiben

erften Zeilen in Ordnung.

In den beiden letzten Zeilen bringt man nun zunächst Stein 13 auf Plat 9 und Stein 9 auf Plat 10, und zwar geschieht dies in ganz analoger Beise, wie wir oben für die Steine 3 und 4 die entsprechende typische Stellung der Fig. 8 herbeiführten; nur haben wir jetzt in den zwei letzten Zeilen zu operieren, während es oben die zwei letzten Spalten waren. Darauf zieht man die Steine 13 und 9 auf

| 7 | 2 | 3 | 4 |
|----|----|----|----|
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 12 | 11 |
| 13 | 14 | 15 | |
| | | | |

Fig. 9.

ihre normalen Plätze. Es bleibt uns dann noch das sechsseldrige Rangiergebiet der Plätze 10, 11, 12, 14, 15, 16; wir bringen auf ihm die Steine 10 und 14 — wieder in der darz gelegten Beise — auf ihre normalen Plätze und haben dann nur noch mit einem vierzseldrigen Gebiet zu tun, auf dem die Steine 11, 12, 15 stehen. Durch Berschieben dieser drei Steine kann man natürlich erreichen,

daß 15 auf seinen normalen Platz gelangt und zugleich das leere Feld rechts unten sich besindet. Die Steine 11 und 12 werden dabei dann entweder auf ihre normalen Plätze kommen oder der Stein 12 kommt auf Platz 11 und Stein 11 auf Platz 12. Im ersteren Falle ist die Aufgabe gelöst; im letzteren Falle haben wir die Stellung der Fig. 9. Wir können unser Resultat so aussprechen:

Sat 1: Aus jeder beliebigen Anfangsstellung läßt sich jedenfalls entweder die normale Stellung (Fig. 3) ober

die ber Fig. 9 herleiten.

Auf die Frage, ob auch beides zugleich möglich ist, nämlich ob eine Ansangsstellung sich u. U. sowohl in die normale Stellung wie in die der Fig. 9 überführen läßt, wollen wir vorläusig noch keine abschlies sende Antwort geben, sondern uns jetzt damit begnügen, daß in jest dem Falle die eine von beiden Stellungen erreichbar ist.

§ 3. Die mathematische Theorie bes Spiels.

Wir wollen uns nun eine bestimmte Anfangsstellung, z. B. die der Fig. 10, denken. Wir wollen die Zahlen dieser Figur vorlesen, und zwar in der Reihenfolge, die wir beim Lesen üblicherweise stetz beobachten, d. h. in jeder Zeile von links nach rechts gehend und die

Reilen der Reihe nach von oben nach unten durchlaufend. Bir bemerten bann, daß Stein 1 bereits auf feinem normalen Blate ftebt; Dagegen fieht ber nächste Stein, 4, wie wir sagen wollen, "vor" zwei anderen Steinen, die bei "normaler" Stellung vor ihm rangieren würden, nämlich vor den Steinen 3 und 2. Wir haben also bei Stein 4, wie wir fagen wollen, zwei "Berftoße gegen bie Rangordnung". Entsprechend haben wir bei Stein 7, ber por ben Steinen 3, 5, 2, 6 fteht, vier folde Berftoße; bei Stein 13 3, B., ber por 11, 10, 2, 12, 6 fteht, fünf Berftoge usw. Wir erhalten fo im

ganzen 0+2+4+5+1+1+2+6+6+5+3+2+0+1=38 Berîtöñe gegen die Rangordnung. Aus diefer Gefamt= zahl der Verstöße läßt sich nun ersehen, ob man die normale Schlufftellung der Fig. 3 erhalten kann ober nicht: ist nämlich die so er= haltene Bahl, wie in unserem Falle, eine gerabe Rahl (hier 38), so ist die normale Schlußftellung ber Fig. 3 zu erhalten; die Aufgabe

12

Ria. 10.

ift also lösbar. Ift die betreffende Bahl dagegen eine ungerade. To erhalt man die normale Schlufftellung nicht, und die Aufgabe ift unlösbar. Boraussehung ist dabei stets, daß das leere Keld fich an= fänglich rechts unten, also auf Blat 16, befand. Anstatt der unbequemen Bezeichnung "Berftoße gegen die Rangordnung" wollen wir, wie in der Mathematik gebräuchlich, "Inversionen" sagen. Torechen alsbann das Kriterium, das wir für die Lösbarkeit der Aufgabe foeben, und zwar vorläufig ohne Begrundung, angegeben haben, To aus:

Rriterium: Die notwendige und hinreichende Bedingung bafür, baß eine vorgelegte Stellung mit bem leeren Felde auf Blat 16 in die normale Schlufftellung (Fig. 3) übergeführt werden fann, ift bie, daß die Ungahl aller Enversionen für die gegebene Anfangsftellung eine gerade Rahl ift.

Für die Richtigkeit dieses Kriteriums der Lösbarkeit wollen wir jett ben Beweiß erbringen und legen und zu dem Rweck gunächst folgende Frage vor: "Wie andert fich durch Schieben eines Steins Die Angahl ber Inversionen?" Die Antwort ift fehr leicht, wenn ber Stein in magerechter Richtung geschoben wird; benn alsbann anbert fich bie

Anzahl der Inversionen für die betreffende Stellung offenbar gar nicht. — Wie ist es dagegen, wenn der Stein in lotrechter Richtung geschoben wird? Diese Verschiedung bedeutet, daß der Stein in der Rangordnung um 3 Pläte vorrückt oder zurücktritt, je nachdem er lotrecht nach oden oder nach unten geschoben wird. Die 3 Steine, die er so überspringt, sei es vorz, sei es rückwärts, mögen die Nummern a, d, c, tragen, während der Stein, der geschoben wird, die Nummer x haben soll. (a, d, c, x sind also Zahlen im Gediet von 1 dis 15.) Es sind alsdann solgende Fälle zu unterscheiden:

1) x ift größer als jede der Zahlen a, b, c;

2) x ist kleiner als jede der Zahlen a, b, c;

3) x ist größer als zwei von den gahlen a, b, c und kleiner als die dritte;

4) x ift größer als eine von den Zahlen a, b, c und kleiner als bie beiben anderen.

Im ersten der 4 Fälle entstehen, wenn der Stein x vor die Steine a, b, c rück, 3 neue Inversionen, weil die Zahlen a, b, c alle kleiner als x sind; springt x hinter a, b, c, so verschwinden dagegen 3 von den vorher vorhandenen Inversionen. Jedenfalls ändert sich also die Anzahl aller Inversionen durch die Verschiedung von x um 3: entsweder sie wird um 3 größer oder um 3 kleiner.

Im zweiten der 4 Fälle ist es ganz entsprechend; auch hier ändert sich die Anzahl aller Inversionen um 3, wird um 3 kleiner oder um

3 größer.

Im dritten Falle entstehen, wenn x vor die kleineren Zahlen — es seien etwa a und b — rückt, zwar zwei neue Inversionen, jedoch verschwindet gleichzeitig von den früheren Inversionen eine, weil x ja auch vor die größere Zahl c rückt. Der Gesamtessett ist also der, daß die Anzahl aller Inversionen um 1 größer wird. Rückt x hinter die Zahlen a, b, c, so wird die Anzahl aller Inversionen um 1 kleiner. In jedem der beiden Unterfälle ändert sich mithin die Anzahl aller Inversionen um 1.

Im vierten Falle andert sich, wie im dritten, gleichfalls die Anzahl

aller Inversionen steis um 1.

Wir sehen also, daß durch das Schieben eines Steins die Anzahl aller Juversionen sich nur um 3 oder um 1 ändern kann, sei es, daß sie um so viel größer oder um so viel kleiner wird. Dies Resultat sprechen wir so aus:

Silfssat: Durch bas magerechte Verschieben eines Steins ändert sich die Anzahl aller Inversionen gar nicht, durch bas lotrechte Verschieben dagegen stets um eine ungerade Rahl (1 ober 3).

Bir benten uns nun ben leeren Blat auch mit einem Stein befett, nämlich mit einem fingierten Stein 16. Misbann konnen mir fagen, baß ein einzelner Rug, nämlich bas Schieben eines Steins auf Den leeren Nachbarplat, immer in einer Bertauschung bes Steins 16 mit einem benachbarten Stein besteht. Stand nun, wie wir bies zunächst annehmen wollen, unser Stein 16 zu Anfang auch auf Feld 16, fo muß, damit bies zu Ende wieder der Fall ift, die Anzahl folcher Bertauschungen offenbar eine gerade fein; benn jeber Bug, fei es in wagerechter, sei es in lotrechter Richtung, muß burch einen anderen. genau entgegengesett gerichteten gleichsam wieder annulliert werben, foll Stein 16 wieber an ben alten Blat gurudfehren. Die Angahl ber Buge, die eine Stellung in eine andere mit bemfelben leeren Felbe überführen, ift alfo ftets gerade, und zwar ift offenbar sowohl die Anzahl aller magerechten Buge. für fich genommen, gerade, wie auch die Ungahl aller lot= rechten Büge.

Wir resumieren: Bon einer Anfangsftellung zu einer Schlufftellung führt, wenn beide das leere Feld auf Plat 16 haben, eine gerade Bahl wagerechter und eine gerade Bahl lotrechter Büge. Die ersteren verändern die Anzahl der Inversionen gar nicht, die letteren dagegen jedesmal um eine ungerade Bahl (f. Hilfsfat), insgefamt alfo, ba biefe Buge felbst in gerader Bahl vortommen, um eine gerade Bahl. Gine Anfangsftellung tann baber in irgendeine andere Stellung - immer unter ber Boraussehung, daß bei beiden das leere Feld auf Plat 16 ift, - höchstens bann übergeführt werden, wenn bie Anzahl der Inversionen der einen sich von der Anzahl der Inverfionen ber anderen um eine gerade Rahl unterscheidet, und ficher bann nicht, wenn diese Differen, der beiderseitigen Inversionen ungerade ift. Nun ist die Anzahl der Inversionen für die normale Schlußstellung (Fig. 3) = 0, für die Schlußstellung ber Fig. 9 bagegen = 1 (Stein 12 fteht por 11). Hieraus folgt, beiläufig gesagt, baß sich Die Stellung ber Fig. 9 nie in die normale Stellung überführen läßt und daß ebensowenig das Umgekehrte möglich ift. Bor allem feben wir aber jest, daß eine gegebene Stellung in die normale Schluß=

ftellung höchstens bann übergeführt werden tann, wenn für die ge= gebene Stellung die Angahl ber Inversionen gerade ift. Diefe Bedingung ift also notwendig für die Überführung in die normale Stellung; fie ift aber auch hinreichenb. Denn qualeich folgt aus bem Borftebenden, daß eine Anfangsftellung mit gerader Inversionengahl in die Stellung Rig. 9 (mit ungerader Inversionenzahl) nicht übergeführt werden fann. Da nun aber jede Stellung fich entweber in die normale Schlufftellung ober in die der Fig. 9 überführen läßt, wie oben gezeigt war (Sat 1), fo folgt, daß bei gerader Inversionenzahl eine gegebene Stellung ftets in die normale Schluß= stellung übergeführt werden fann. — Andererseits laffen fich alle Stellungen mit ungeraber Inversionenzahl ftets in die Stellung Fig. 9 überführen: benn in die normale Stellung tonnen fie nicht gebracht werden, eine der beiden Schlufftellungen (Fig. 3 ober Fig. 9) ift aber nach Sat 1 ftets erreichbar. In diesen Fällen - den "unlösbaren" - ift also die Schlufftellung ber Fig 9 ftets erreichbar und auch nur in biesen. - Damit ift bas oben (S. 19) angegebene "Kriterium" in vollstem Umfange bewiesen und zugleich die am Ende von § 2 offen gelaffene Frage dabin beantwortet, daß niemals ein und diefelbe Stellung sowohl in die normale Schlufiftellung wie in die der Fig. 9 übergeführt werden fann, fondern ftets nur das eine von beiden möglich ift.

Auf diesem Vorkommen von "unlösbaren" Stellungen, also von Stellungen, die allen auch noch so beharrlichen Lösungsversuchen einen unüberwindbaren Widerstand entgegensehen, beruhte der außerordentsliche Reiz, den das Spiel bei seinem ersten Auftreten auszuüben versmochte: Der Spieler, dem die Lösung so mancher anderen (lösdaren) Stellung bereits mehr oder weniger leicht gesungen sein mochte, denn aber das Vorkommen "unlösdarer" Stellungen noch unbekannt war, glaubte naturgemäß, auch diese Stellungen durch beharrlichen Eiser schließlich bewältigen zu können, und wurde so zu immer neuen Versinchen gereizt. Dieses Puzzlesseuer erhielt dann noch weitere Kahzrung, wenn etwa Inhaber von Vergnügungsetablissements Puzzleszurniere veranstalteten und den Siegern hohe Preise aussehten, wie sie natürsich völlig gesahrlos zu tun sich erlauben durften, falls eben die von ihnen gewählte Ausgabe zu den "unlösdaren" gehörte.

Frage 6: 3ft die Aufgabe Fig. 11 lösbar ober unlösbar?

| 5 | 6 | 7 | 8 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 |
|---|------|-------------------|----|----|----|----|-----|-------|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 9 | 10 | 13 | 14 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 9 | 10 | 17 |
| 5 | 12 | 11 | | 15 | 14 | 13 | | 12 | 13 | 14 | 15 |
| _ | Fig. | Fig. 11. Fig. 12. | | | | - | Fig | . 13. | - | | |

Als Beispiel werbe noch betrachtet diejenige Ansangsstellung, die sich aus der normalen Stellung ergibt, wenn man die Steine der einzelnen Zeilen in ihrer Reihenfolge umkehrt und das leere Feld wieder unten rechts annimmt (s. Fig 12). Die Anzahl der Inverssionen ist ungerade (in jeder der drei oberen Zeilen = 6, in der untersten = 3), also läßt sich die Stellung Fig 12 in die normale Stellung nicht überführen, wohl aber in die Schlufstellung Fig. 9.

Boraussehung bei allen vorstehenden Erörterungen war stets, daß das leere Feld auch bei der Ansangsstellung sich auf Plat 16 besand. Liegt uns eine andere Ansangsstellung vor und wollen wir die Frage der "Lösdarkeit" entscheiden, so werden wir durch einsache Berschiedungen zunächst bewirken, daß Plat 16 das leere Feld wird. So werden wir z. B bei der Stellung der Fig. 13 die Steine 1, 2, 3, 7, 11, 15 der Reihe nach verschieden, um Plat 16 leer zu bekommen. Für diese neue Stellung zählen wir alsdann 9 Inversionen; die Ansangsstellung Fig. 13 ist somit nicht in die normale, wohl aber in die Schlußstellung Fig. 9 überführbar.

Es läßt sich nun leicht erkennen, daß, wenn eine Stellung sich in eine zweile überführen läßt, auch umgekehrt diese in jene übergeführt werden kann. Denn wodurch wird die erstere Überführung bewirkt? Durch eine Reihe von "Zügen", d. h. durch eine Reihe von Vertausichungen des hypothetischen Steins 16 mit jeweils benachbarten Steinen. Es möge die erste Stellung in die zweite z. B. dadurch übergeführt werden, daß der Stein 16 der Reihe nach mit den Steinen a, d, c......m, n, r, s vertauscht wird. Der Stein 16 war also der Reihe nach den Steinen a, d, c...... und zulezt den Steinen m, n, r, s benachbart. Disendar können wir daher, von der zweiten Stellung ausgehend, den umgekehrten Weg gehen und den Stein 16 zuerst mit s, dann mit r und so fort vertauschen und führen so die

zweite Stellung in die erste über. Daraus folgt dann z. B., daß die Stellung Fig. 9 sich sowohl in die Stellung Fig. 12 wie in die von Fig. 13, die beide ihrerseits in jene übergeführt werden konnten, überssühren läßt. Da nun alle Stellungen mit ungerader Inversionensanzahl sich in die Stellung Fig. 9 übersühren lassen und diese letztere wieder sowohl in die von Fig. 12 wie in die von Fig. 13, so läßt sich also jede Stellung mit ungerader Inversionenanzahl sowohl in die Stellung Fig. 12 wie in die von Fig. 13 übersühren. — Ferner solgt aus diesem Prinzip der Umkehrung der Übersührungen, daß jede beliebige Stellung mit gerader Inversionenanzahl sich in jede beliebige andere Stellung von gleichsalls gerader Inversionenanzahl übersühren läßt und daß die Stellungen mit ungerader Inversionenanzahl übersühren läßt und daß die Stellungen mit ungerader Inversionenanzahl unterseinander sich ebenso verhalten. Wir sassen diese Resultate solgenders maßen zusammen:

Sat 2: Alle Stellungen, die — bei einem leeren Felde auf Plat 16 — eine gerade Anzahl von Inversionen auf weisen, bilden für sich eine Gruppe derart, daß von irgen dzwei dieser Stellungen die eine in die andere übergeführt werden kann; sie sind alle insbesondere in die normale Stellung übersührbar. Ebenso bilden alle Stellungen, die — bei einem leeren Felde auf Plat 16 — eine ungerade Anzahl von Inversionen aufweisen, eine zweite Gruppe ineinander übersührbarer Stellungen; alle Stellungen dieser Gruppe lassen sich in die Stellung der Fig. 12 und ebenso in die der Fig. 13 überssühren. Eine Stellung der einen Gruppe kann niemals in eine der anderen übergeführt werden!); die Stellungen der zweiten Gruppe sind daher insbesondere niemals in die normale Stellung überzusühren.

¹⁾ Die Schranke zwischen den beiden Gruppen würde sallen, wenn man gewisse, bei unseren jetigen Spielregeln nicht erlaubte Operationen gestateten würde. Jede "unlösdare" Stellung würde nämlich in eine "lösdare" verwandelt werden, wenn man den ganzen Spielkasten um 90° drehte und hinterher alle Steine auf ihren Plägen wieder zurechtrückte (um 90° zurückrehte) Dasselbe würde man serner beilpielsweise auch dann erreichen, wenn man die Steine 6 und 9 umkehrte, so daß sich 6 in 9 und 9 in 6 verwandelse. Wir gehen jedoch auf diese Spielsormen, die, wie gesagt, bei unsern strengeren Spielregeln ausgeschlossen sind, nicht näher ein.

Rapitel III.

Solitär= oder Ginfiedlerfpiel.

§ 1. Spielregel. Rotation.

Der kronprinzliche Spielschrein, von bessen Inhalt wir bereits im vorigen Kapitel eins der Spiele abbildeten und beschrieben, birgt weister ein Spiel in sich, das unter dem Namen "Solitärs" oder "Einssiedler-Spiel" recht bekannt ist. Unsere Fig. 14a zeigt uns den wesentslichen Teil des Spiels: ein Spielbrett mit 33 Löchern darin, in die Pflöcke oder ähnliche Gegenstände hineingesteckt werden können. Bei unserer kronprinzlichen Prachtausgabe des Spiels sind es kugelförmige Spielsteine, die mit durchweg verschiedenen Berzierungen kunstvoll ausgestattet sind; der mittelste Stein, dessen Loch in dem Spiel eine Art Sonderstellung einnimmt, ist dabei in besonderem Material — Blutstein — ausgestührt.

über den Ursprung des Spiels ist Sicheres nicht bekannt. Jedensfalls besigt es bereits ein beträchtliches Alter, wosür beispielsweise eine im Jahre 1710 veröffentlichte Abhandlung von Leidniz als Zeugsnis beigebracht werden kann. Auf unserer Fig. 14b, dem Spielkaftensbeckel aus dem kronprinzlichen Spielschrein, führt uns das vortresseliche kleine Ölbild von Prof. Bernhard Plockhorst den angeblichen Ersinder des Spiels, den "Einsiedler", beim Spiel vor, dem sein zah-

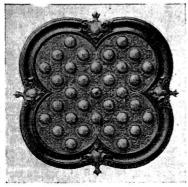




Fig. 14a.

Fig. 14 b.

| mes | Reh | neug | gieri | g zı | ıſcha | ut. — Unter ben | | | 37 | 47 | 5°F | | |
|-----|-----|------|-------|------|-------|---------------------------------|----------|----|----------|--------|-----|----|-----|
| | | • | | | | verschiedenen Formen, in de- | | | 36 | 46 | 56 | • | |
| | | • | • | | | nen unser Spiel | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 |
| • | | • | ٠ | • | ٠ | auftritt, über= | 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 | 74 |
| • | | • | • | ٠ | • | wiegt in | 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 | 73 |
| • | | • | • | | ٠ | Deutschland diese der 33 | ! | | 32 | 4,2 | 52 | | |
| | • | • | • | | | Löcher, von de= | | | 31 | 41 | 51 | | 635 |
| | ٠ | Fig. | 15. | | | nen mindestens | | | <u>~</u> | ig. 16 | j. | • | |

des Spiels stets leer sein muß. Die Anordnung der Löcher zueins ander bringen wir nochmals: durch Fig 15, zur Anschauung.1)

Die verschiedenen Löcher werden wir durch eine ähnliche Bezeichsnung ("Notation"), wie sie für die Felder des Stachbretts üblich ist, unterscheiden und dementsprechend auch jedes Loch fortan quadratisch darstellen, so daß wir auch beliedig von "Löchern" und "Feldern" sprechen werden. Wir tragen in jedes Loch gleich seine Notation ein (s. Fig. 16), wobei die erste Ziffer immer die Vertikalreihe oder "Spalte", und zwar von links nach rechts gerechnet, die zweite die Horizontalzreihe oder "Zeile", von unten nach oben gerochnet, angibt.")

Die einzige Spielregel besteht darin, daß, wenn von 3 in horizontaler oder vertikaler Reihe gelegenen Löchern 2 benachbarte mit einem Pflock versehen sind, während das dritte, unmittelbar daneben liegende lecr ist, alsdann der Pflock aus dem entfernteren der beiden besetzten Löcher in das leere gesteckt werden darf, wobei aus dem anderen besetzten (mittleren) Loch, das hierbei übersprungen wird, der Pflock herausgezogen und beiseite gelegt werden muß.

2) Bem ein anderes Spielexemplar nicht zur Berfügung steht, wird für die Aufgaben der folgenden Paragraphen gut zun, sich selbst ein Spielbrett in der Art der Fig. 16 herzustellen und an Stelle der Pflöcke oder Spiels

fteine etwa Papierichnitelchen zu verwenden.

¹⁾ Außer den hier angegebenen führt das Spiel übrigens noch verschies dene andere Namen, darunter: "Nonnenspiel", "Grillenspiel". Unter diesen Namen ist es im Preisverzeichnis der S. 14, Aam. 1, genannten Züllchower Anstalten (Nr. 840/1) au gesührt; von dort in zwei Ausführungen, mit "Zäpschen" (Holzpschäden) oder mit Kugeln, zu beziehen; lettere Form wohl zu bevorzugen.

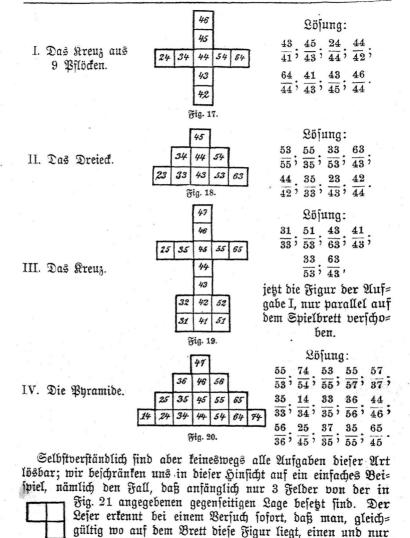
Diese Operation, die stets das Verschwinden eines Pflodes und für einen anderen eine Playänderung zur Folge hat, nennen wir kurz einen "Zug", so daß also, wenn zu Ansang z. B. nur das Loch 44 leer ist, nur einer der 4 "Züge" $\frac{24}{44}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{42}{44}$ möglich ist, wo in dieser auch weiterhin stets gebrauchten Bezeichnung der Züge in Form von Brüchen der Zähler das Loch angibt, aus dem ein Pflod fortgenommen, und der Nenner dassenige, in das er gesteckt wird. Zähler und Nenner eines solchen Bruches stimmen natürlich immer entweder in den ersten oder in den letzten Zissern überein, während die beiden nicht übereinstimmenden Zissern sich um 2 unterscheiden; die zwischen den beiden letzteren siegende Zahl und die im Zähler und Nenner gleicherweise vorkommende ergeben zusammen dann das Loch, über das hinzweggesetz wird, aus dem also ein Pflock verschwindet, in unserem obigen Beispiel bzw. 34; 45; 54; 43.

Die Aufgabe des Spiels besteht gewöhnlich darin, aus 32 besetzten Söchern der Reihe nach alle Pslöcke bis auf einen sortzuschaffen, wobei das zu Ansang leere Loch vielsach das mittelere (44) ist, jedoch auch ein anderes sein kann und wobei zumeist auch vorgeschrieben ist, in welchem Loch der zuletzt allein übrigbleibende Pslock sich am Ende besinden soll.

Selbstverständlich brauchen aber zu Anfang nicht alle 32 Löcher besetzt zu sein, sondern etwa nur ein Teil des Bretts, z. B. so, daß die Pslöcke eine bestimmte Figur, ein Quadrat, ein Kreuz oder dgl., bilden, wobei die Aufgabe im übrigen dieselbe ist, also in Entsernung aller Pslöcke dis auf einen besteht.

§ 2. Aufgaben bei teilmeife befegtem Brett.

Ilm in das Wesen des Spiels etwas einzusühren, besprechen wir zus nächst, auf der folgenden Seite, eine Anzahl von Ausgaben, in denen nur ein Teil des Brettes besetzt ist und die Entsernung aller Pflöcke dis auf einen verlangt wird. Die in den verschiedenen Fisguren mit ihrer Notation angegebenen Felder sind zu Ansang besetzt; der übrige, leere Teil der Bretter kann nach Fig. 16 leicht hinzusgedacht werden.



Big. 21. einen Pflod fortbringen fann, alfo zwei übrigbleiben muffen.

§ 3. Bollbejettes Brett.

Gewöhnlich besteht die Aufgabe bei unserem Spiel jedoch, wie schon in § 1 gesagt wurde, darin, daß zu Ansang alle 32 Pflöde in den Löchern steden, während ein beliedig vorgeschriebenes Loch, von uns weiterhin als das "Ansangsloch" bezeichnet, leer ist, und daß nun der Reihe nach alle Pflöde dis auf einen entsernt werden sollen, welch letzterer dann in einem gleichfalls vorgeschriebenen Loch, weiterhin kurz

"Schlufloch" genannt, fteden bleiben foll.

Es sollen für diese Aufgabe — wir wollen sie die "Hauptaufgabe bes Spiels" nennen — hier jet eine Reihe von speziellen Fällen, unterschieden nach "Anfangs:" und "Schlußloch", besprochen werden. Diese Aufgaben mag der Leser hier vorläusig nur als willkürlich aus einer großen Bahl herausgegriffene Beispiele ansehen; die Folge (§ 4) wird jedoch zeigen, daß unsere Auswahl keine willkürliche, sondern vielmehr so getrossen war, daß mit den jetzt solgenden 16 Fällen im Grunde genommen die Gesamtheit aller überhaupt lösbaren Fälle der "Hauptaufgabe des Spiels" erschöpst ist.

I. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 44.

$$\frac{64}{44}, \frac{56}{54}, \frac{44}{64}, \frac{52}{54}, \frac{73}{53}, \frac{75}{73}, \frac{43}{63}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{35}{55}, \frac{65}{45}, \frac{15}{35}, \frac{45}{25}, \frac{37}{35}, \frac{57}{37},$$

$$\frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \frac{25}{45}, \frac{46}{44}, \frac{23}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{51}{31}, \frac{52}{32}, \frac{31}{33}, \frac{14}{34}, \frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{32}{34}, \frac{34}{54}, \frac{64}{44}.$$

II. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 74.

Wie I, nur statt bes letzten Zuges: $\frac{54}{74}$.

III. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 74.

Der erste Zug von II ist burch $\frac{54}{74}$ zu erseben.

IV. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 47.

$$\frac{54}{74}; \frac{52}{54}; \frac{44}{64}; \frac{73}{53}; \frac{74}{54}; \frac{54}{52}; \frac{51}{53}; \frac{31}{51}; \frac{32}{52}; \frac{43}{63}; \frac{51}{53}; \frac{63}{43}; \frac{34}{32}; \frac{13}{33}; \frac{15}{13};$$

$$\frac{43}{23}; \frac{13}{33}; \frac{32}{34}; \frac{56}{54}; \frac{75}{55}; \frac{54}{56}; \frac{57}{55}; \frac{37}{57}; \frac{36}{56}; \frac{45}{65}; \frac{57}{55}; \frac{65}{46}; \frac{24}{44}; \frac{44}{46}; \frac{25}{46}; \frac{45}{47}.$$

V. Anfangsloch: 74; Schlufloch: 14.

Bunachst die ersten 24 Züge von IV, dann $\frac{34}{36}; \frac{55}{35}; \frac{57}{55}; \frac{25}{45}; \frac{56}{35}; \frac{36}{34}; \frac{34}{14}$ -

VI. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 54.

 $\frac{56}{54}, \frac{75}{55}, \frac{54}{56}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{73}{53}, \frac{43}{53}, \frac{51}{53}, \frac{63}{43}, \frac{33}{53}, \frac{41}{43}, \frac{53}{33}, \frac{23}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{3}{32}$

 $\frac{13}{33}; \frac{15}{13}; \frac{25}{23}; \frac{34}{32}; \frac{13}{33}; \frac{32}{34}; \frac{45}{25}; \frac{37}{35}; \frac{57}{37}; \frac{34}{36}; \frac{37}{35}; \frac{25}{45}; \frac{56}{36}; \frac{44}{46}; \frac{36}{56}; \frac{56}{54}.$

VII. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 57.

Der letzte Zug von VI ist durch $\frac{55}{57}$ zu ersetzen.

VIII. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 57.

Der erste Zug von VII ist burch 55 zu erseben.

IX. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 24.

Die ersten 27 Züge von VI, alsbann $\frac{56}{54}$; $\frac{54}{34}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{44}{24}$.

X. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 24.

Der erste Zug von IX ist zu ersetzen durch $\frac{55}{57}$.

XI. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 51.

Zunächst die ersten 6 Züge von X; die 24 folgenden leiten sich tuß den entsprechenden von VI durch Spiegelung an der horizontalen Mittellinie her; der letzte Zug ist $\frac{53}{51}$.

XII. Anfangsloch: 24; Schlußloch: 24.

 $\frac{44}{24}, \frac{36}{34}, \frac{15}{35}, \frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \frac{57}{35}, \frac{56}{36}, \frac{45}{25}, \frac{37}{35}, \frac{25}{45}, \frac{32}{34}, \frac{13}{33}, \frac{34}{32}, \frac{31}{33}, \frac{51}{31};$

 $\frac{52}{32}, \frac{43}{23}, \frac{31}{33}, \frac{23}{43}, \frac{54}{56}, \frac{75}{56}, \frac{73}{75}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55}, \frac{56}{54}, \frac{64}{44}, \frac{44}{42}, \frac{63}{43}, \frac{42}{44}, \frac{14}{34}, \frac{44}{24}$

XIII. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 55.

 $\frac{53}{55}; \frac{73}{53}; \frac{75}{73}; \frac{65}{63}; \frac{52}{54}; \frac{73}{53}; \frac{54}{52}; \frac{51}{52}; \frac{51}{53}; \frac{31}{51}; \frac{32}{52}; \frac{43}{63}; \frac{51}{53}; \frac{63}{43}; \frac{45}{65}; \frac{57}{55};$

 $\frac{65}{45}; \frac{35}{55}; \frac{47}{45}; \frac{55}{35}; \frac{25}{45}; \frac{37}{35}; \frac{45}{25}; \frac{15}{25}; \frac{13}{35}; \frac{23}{25}; \frac{34}{36}; \frac{15}{36}; \frac{36}{36}; \frac{33}{34}; \frac{34}{53}; \frac{53}{54}; \frac{53}{55}.$

XIV. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 52.

Der lette zug von XIII ist zu ersetzen durch $\frac{54}{52}$.

XV. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 52.

Der erste Zug von XIV ist zu ersegen durch $\frac{54}{52}$.

XVI. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 25.

Die 28 ersten Züge von XV, dann $\frac{43}{23}$; $\frac{44}{24}$; $\frac{23}{25}$.

Selbstverständlich kann es für jede der vorstehenden Aufgaben noch andere und wird zumeist sogar recht viele andere Lösungen geben. Die von uns angegebenen erheben keinen Auspruch darauf, einen Borzug vor jenen anderen zu besitzen. Ihre Auswahl war nur durch Rücksichten der Systematik bestimmt, und unter den sonst existierenden Lösungen werden sich gewiß manche viel elegantere vorsinden. Sehr viel besser gliedert und daher übersichtlicher ist z. B. solgende Lösung sür Aufgabe I: $\frac{42}{44}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{43}{23}$ | $\frac{13}{33}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{15}{13}$; $\frac{25}{23}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{32}{34}$ | $\frac{73}{53}$; $\frac{54}{52}$; $\frac{75}{73}$; $\frac{65}{63}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{52}{54}$ | $\frac{45}{65}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{37}{56}$; $\frac{54}{55}$; $\frac{57}{45}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{44}{24}$; $\frac{36}{34}$; $\frac{24}{44}$, wobei die durch 2 vertikale Striche markierten Stellen sich den jeweiz ligen Konfigurationen nach als natürsliche Einschnitte in dem Gange der Lösung darstellen.

§ 4. Theorie des Spiels.

Auf die Theorie des Spiels soll hier nicht weiter eingegangen werben, als daß wir ihre wichtigsten Resultate — ohne mathematische Begründung — angeben. Zu dem Zwecke desinieren wir zunächst als "kongruente" Felder zwei Felder von der Art, daß von dem einen zu dem andern ein Übergang möglich ist durch eins oder mehrmaliges Überspringen von je zwei in horizontaler oder vertikaler Linie liegenz den Feldern. Kongruent sind so z. B. die Felder 15 und 45, da man von 15 zu 45 durch Überspringen von zwei zwischengelegenen Feldern (25 und 35) gelangt; ebenso ist 42 zu 45 kongruent und desgleichen 42 zu 15 (45 ist Zwischenstuffe für diesen letzteren Übergang). Ferner soll jedes Feld auch als mit sich selbst kongruent angesehen werden. —

Die mathematische Untersuchung lehrt nun, daß auf unserem Brett der 33 Felder eine Lösung für die im vorigen Paragraphen erörterte "Hauptaufgabe" des Spiels höchstens dann möglich ist, wenn Anfangse und Schlußloch so vorgeschrieben wurden, daß sie "kongruent" in dem anges

gebenen Sinne find.

Die sveben angegebene Vorbedingung für die Lösbarkeit der Saupt= aufgabe, nämlich die Rongruens von Anfangs= und Schluffeld, ift aber nicht nur notwendig, fondern auch hinreichend für die Lösbarkeit, b. h. immer, wenn diese Bedingung erfüllt ist, ist die Hauptaufgabe lösbar. Das System ber 16 in § 3 gegebenen Beispiele birgt sogar bereits für alle möglichen Fälle, in denen die Hauptaufgabe überhaupt lösbar ift, wenigstens je eine Lösung in sich. Dies erkennt man folgendermaßen: Man beachte zunächst, daß die Figur des Bretts (Fig. 15) bei Drehung um einen oder mehrere rechte Winkel mit fich felbst zur Deckung fommt, und ferner, daß sie in bezug auf die horizontale und die ver= titale Mittellinie symmetrisch ist, so daß also bei Spiegelung an einer dieser beiden Mittellinien die eine Hälfte der Figur mit der anderen zur Dedung fommen wurde. Offenbar find nun die bei diesen Spiege= lungen und Drehungen zusammenfallenden Felder für unsere Aufgabe äquivalent, wonach sich folgende Gruppen von untereinander äquiva= lenten Feldern ergeben:

- 1) 13; 15; 37; 57; 75; 73; 51; 31. 4) 24; 46; 64; 42.
- 2) 14; 47; 74; 41. 5) 35; 55; 53; 33.
- 3) 25; 36; 56; 65; 63; 52; 32; 23. 6) 34; 45; 54; 43. 7) 44.

Gibt also z. B. Nr. II in § 3 (S. 29) eine Lösung für 44 als Ansfangs und 74 als Schlußloch, so läßt sich danach sofort eine Lösung für die Aufgabe: "44 Anfangsloch, 14 Schlußloch" angeben, da die Änderung nur einer Spiegelung an der vertikalen Mittellinie entspricht. Ebenso ergibt sich z. B. aus Nr. VII (54 Anfangsloch, 57 Schlußsloch) sofort eine Lösung für "45 Anfangs und 75 Schlußloch", da die Änderung einer Viertelkreisdrehung in der umgekehrten Drehungsrichtung des Uhrzeigers , verbunden mit nachfolgender Spiegelung an der vertikalen Mittellinie, entspricht.

Sodann erhält man aus der Lösung für Anfangsloch a und Schluß= loch b sofort eine Lösung für Anfangsloch b und Schlußloch a, indem

man das Lösungsschema der ersteren Aufgabe umkehrt, d. h. die Brüche in umgekehrter Reihenfolge (vom hinteren zum vorderen Ende) liest. Daß in der Tat diese Beziehung stattfindet, soll hier unter Berzicht auf

einen allgemeinen Beweis nur an dem Beispiel eines besonders einfachen Spielbrettes plausibel gemacht werden, nämlich an dem der Fig. 22, das wir, um eben einen möglichst einfachen Fall zu haben, einmal für einen Moment unserem gewöhnlichen Spielbrett substituieren wollen. Es sei A als Ansangs-, E als Schlußloch vorgeschrieben; die

| D | C | E B A | Sig. 22.

Lösung der Hauptaufgabe ist alsdann: $\frac{E}{A}$; $\frac{D}{B}$; $\frac{A}{E}$. Kehren wir nun

die Reihenfolge der 3 Brüche um, schreiben also: $\frac{A}{E}$; $\frac{D}{B}$; $\frac{E}{A}$, so ist dies die Lösung der Hauptaufgabe für den Fall: E Anfangs= und A Schlußloch. Zwei Aufgaben, die in dieser Beziehung der rezihrosen Vertauschung von Anfangs= und Schlußloch zueinander stehen, wollen wir "rezihrose" nennen.

Man sieht nun zunächst, daß unter den 16 Lösungen des § 3 sieben enthalten sind, in denen das Ansangsloch zugleich Schlußloch ist, und zwar sind diese 7 so gewählt, daß jede der obigen 7 Gruppen von Feldern (S. 32) einen Repräsentanten hierfür gestellt hat, wie die solsgende Zusammenstellung zeigt.

| Nr. der Gruppe von Feldern | Das aus der Gruppe ausgewählte Feld | Nr. der betr. Aufgabe in § 3 | | | | |
|-------------------------------|--|---------------------------------|--|--|--|--|
| 1 9 | 57 74 | VIII | | | | |
| 3. | 52 | XV | | | | |
| 5 | 24 55 | XII | | | | |
| 6 7 | 54 44 | VI I | | | | |

Die Hauptaufgabe bei gleichem Anfangs: und Schlußloch ist somit durch die Lösungen des § 3 für alle 33 Felder erschöpfend gelöst. So bleiben also nur die Fälle, in denen Ansangs: und Schlußloch versichieden sind, wobei wir zunächst wiederholen, daß Ansangs: und Schlußloch stets, damit überhaupt Lösungen existieren, "kongruent" in bem angegebenen Sinne sein müssen. Wir haben also jetzt alle mögslichen Kombinationen von zwei verschiedenen, aber einander kongruensten Feldern in Betracht zu ziehen, und sassen beispielsweise zunächst das Mittelseld des Brettes, d. h. 44, ins Auge, das zugleich in unserer Sinteilung der Felder auf S. 32 eine Gruppe für sich, nämlich die 7., bildet. Man sieht nun, daß sämtliche zu Feld 44 kongruenten Felder gerade die Gruppe 2 bilden, und diese Felder von Gruppe 2 sind auch unter sich kongruent und besigen kongruente Felder in den anderen 5 Gruppen nicht. Die Gruppen 2 und 7 bilden also eine gewisse Gesmeinschaft in der Art, daß, wenn das Ansangsloch dieser Gemeinschaft entnommen wird, auch das Schlußloch ihr entnommen werden muß, wenn die Hauptausgabe überhaupt irgendwelche Aussicht auf Lösbarskeit bieten soll. Offenbar ergeben sich innerhalb dieser Gemeinschaft nur solgende wesentlich verschiedene Fälle von Aufgaben (bei unsgleichem Ansangs und Schlußloch):

Anfangsloch Schlußloch Diese Aufgaben sind aber in § 3 44 74 unter II, IV, V behandelt. Rechnet 74 47 man dazu noch die Nummern I und 74 14 III für die Fälle eines gleichen An-

fangs- und Schlußloches, so umfassen mithin die Nummern I—V alle wesentlich verschiedenen Fälle, die innerhalb der von den Feldersgruppen 2 und 7 gebildeten Gemeinschaft vorkommen können. Für jeden anderen Fall läßt sich aus einem dieser 5 die Lösung sofort hersleiten durch die Beziehungen der Symmetrie (Drehungen und Spiegeslungen) und der Reziprozität (Vertauschung von Ansangs- und Schlußsloch). — Entsprechend bilden die Gruppen 1, 4 und 6 eine Gemeinschaft: zwar ist nicht jedes Feld dieser Gemeinschaft jedem anderen kongruent, aber jedes einem Felde dieser Gemeinschaft kongruente Feld gehört wieder der Gemeinschaft an. Die verschiedenen Fälle, die sich innerhalb dieses Gebietes ergeben können, sind in § 3 durch die Numsmern VI—XII erledigt. Schließlich bilden die Gruppen 3 und 5 eine dritte Gemeinschaft, der in § 3 die Lösungen XIII—XVI in erschöpsfender Weise zugehören.

Frage 7: Gib eine Lösung an für ben Fall: 14 Anfangsloch,

41 Schlufloch.

Frage 8: Gib eine Lösung an für ben Fall: 52 Anfangsloch, 55 Schlufiloch.

Frage 9: Gib eine Lösung an für den Fall: 46 Anfangsloch, 13 Schlukloch.

Rapitel IV.

Dhadische Spiele.

§ 1. Die Reihe ber Potenzen ber Bahl 2.

Bon der Erfindung des Schachspiels erzählen altere arabische Quellen, der Erfinder habe das geiftvolle Spiel zur Unterhaltung eines indischen Königs erdacht und bieser sei barüber von so lebhafter Bewunderung und Freude ergriffen worden, daß er dem Erfinder ein Ehrengeschent zu gewähren wünschte. "Dann bitte ich" so foll biefer nun auf des Königs Frage erklart haben, "daß ein Beigenforn auf das erste Feld des Schachbretts, zwei auf das zweite gelegt und die Rahl der Körner fortmährend verdoppelt werde, bis das lette Feld erreicht sei: welches dies Quantum auch sein möge, ich wünsche, es au bekommen." Hierbei stellte sich nun heraus, daß bas Getreibe aller königlichen Speicher und selbst bes ganzen Landes nicht ausreichen murde, dies Berlangen, das dem Könige ursprünglich außerordentlich bescheiden vorgekommen war, zu befriedigen. Als bem Rönig dies gemelbet wurde, sprach er zu bem Erfinder: "Dein Scharffinn, einen folchen Bunsch auszudenken, ift noch bewundernswerter als bein Talent im Erfinden bes Schachsviels."

In der Tat würde sich, da das Schachbrett 64 Felder (8×8) hat, eine ungeheuer große Zahl von Weizenkörnern ergeben, nämlich für alle 64 Kelder zusammen die 20stellige Zahl

18446744073709551615,

eine Körnermenge, die genügen würde, um das ganze feste Land der Erde bis zu einer Höhe von sast 1 cm zu bedecken. Die Zahlen wachsen, durch die Verdoppelung von Feld zu Feld, natürlich sehr schnell und nehmen schließlich ungeheuer große Werte an. — Diese Tatsache des enormen Wachstums bei fortgesetzter Verdoppelung benutzte einmal eine in München erscheinende Zeitung der vormärzlichen Zeit, "Die deutsche Tribüne", zu einem seinerzeit vielbesachten Wize"): Das Blatt wußte sich gegenüber den bestängigen Zensurplackereien nicht anders zu helsen, als daß es die vom Zensor gestrichenen Ars

¹⁾ Ludwig Salomon, "Geschichte bes Deutschen Zeitungswesens", Bb. III, S. 460.

tikel trozdem abdruckte. Natürlich wurde es nun mit Geldstrase beslegt, und zwar wurde, da die Zeitung dies Versahren sortsetzte, die Geldbüße von Fall zu Fall verdoppelt. Da brachte die "Tribüne" eines schönen Tages einen Artikel, in dem genauer dargelegt wurde, daß das Ministerium ein Mittel ersunden habe, um die baherischen Staatsschulden in Jahr und Tag zu tilgen: Es brauche nur mit der angeordneten jedesmaligen Verdoppelung der Geldstrasen in der besgonnenen Weise sortzusahren. Die Heiterkeit war allgemein, und die baherische Regierung sah sich veranlaßt, zu anderen Mitteln zu greissen, verzichtete sogar auf den Versuch, die Geldstrasen, die bereits eine unerschwingliche Höhe erreicht hatten, einzutreiben, — und der baherische Staat hat so seine Staatsschulden dis zum heutigen Tage behalten.

Rehren wir zu bem Fall der Weizenkörner auf dem Schachbrett zurück und schreiben wir für die einzelnen Felder die Jahlen der Körner hin, so erhalten wir eine Reihe von Jahlen, die so beginnt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, womit wir nur erst für ein Viertel aller Felder des Schachbretts die betreffenden Jahlen angegeben haben. Die Jahlen dieser Reihe, von denen jede sich aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit <math>2 ergibt $(z, 2, 2 \times 8 = 16)$, nennt man die "Potenzen" der Jahl 2, und zwar bezeichnet man die Jahl 2 selbst als die erste Potenz von 2, die Jahl $4 = 2 \times 2$ als die zweite, die Jahl $8 = 2 \times 2 \times 2$ als die dritte Potenz der 2 usw. Man schreibt dies auch folgendermaßen:

 $2^{1} = 2$; $2^{2} = 4$; $2^{3} = 8$; $2^{4} = 16$; $2^{5} = 32$ u/m.

Aus Gründen der Analogie wird man alsdann die erste Zahl der obigen Reihe, nämlich 1, die "nullte Potenz der 2" nennen und ent=

sprechend: 20 = 1 schreiben muffen.

Bor diese Reihe der Potenzen der Zahl 2, d. h. vor die Zahl 1, mit der die Reihe ja anfängt, wollen wir nun aus einem besonderen Grunde noch eine zweite 1 schreiben, so daß die Reihe nunmehr so beginnt: $1, 1, 2, 4, 8, 16, 32 \dots$ In dieser neuen Reihe ist nun jede Zahl genau ebenso groß wie alle in der Reihe vorhersgehenden Zahlen zusammengenommen, z. B. 1+1+2=4, sodann 1+1+2+4=8. Gilt dies aber für den Ansang, also z. B. dis 8, so gilt es auch stets weiterhin, wie der Leser sofort aus der Schreibweise

fieht, wenn er bedentt, daß nach bem Bildungsgeset refp. der Definition ber Reihe auf 8 die Bahl 2 × 8 = 16, auf 16 wieder 2 × 16 = 32 uiw. folgt. Laffen wir nun die gur Aushilfe hingugenommene erfte Gins wieder fort, fo ift bie Summe ber Bahlen bis aur 8 (mit Ausschluß biefer) natürlich nicht mehr = 8, sondern nur = 7. also um 1 kleiner als die in der Reihe folgende Bahl 8, und wir haben baber bas Refultat:

Sat 1: In ber Reihe ber Botengen ber Rahl 2 ift jebe Bahl um 1 größer als alle borbergebenben Bahlen gufammengenommen.

Aus diesem Grunde wurden auf das 64. Feld des Schachbretts ebensoviel Weizenkörner resp. genau gesprochen: noch ein Rorn mehr als auf die ersten 63 Felder zusammengenommen kommen. murben baber, wenn wir die Gesamtzahl ber Beigenkörner aller 64 Relber ausrechnen wollten, diese Addition aller 64 Bablen nicht einzeln ausführen, sondern natürlich nur die Zahl der Körner des letten Kelbes berechnen. Diese Bahl, vermindert um 1, ift dann que gleich die Summe ber Körner von den übrigen 63 Felbern.

§ 2. Gine besondere Anwendung der Reihe ber Botengen bon 2.

Die Gewichtsfabe unferer gleicharmigen Bagen bestehen gewöhnlich aus folgenben Studen:

und setzen sich nach diesem Pringip, eventuell nach beiben Seiten bin, fort. Der Gewichtsfat, ben wir hier betrachten wollen, mag auf bie angegebenen 8 Bewichte beschränkt sein und ermöglicht alsbann jedenfalls alle Bägungen von 1 g bis einschließlich 110 g und zwar bon g zu g.

Wir wollen nun die frage erheben, ob fich dieselben Wägungen, wie mit diesen 8 Gewichten, auch mit einer geringeren Anzahl von Gewichten ausführen ließen, refp. wie viele Bewichte mindestens und welche hierzu erforderlich find.

Dabei wollen wir voraussehen, daß die eine Schale der Wage ausichließlich bem zu magenden Gegenstande verbleibt, also nicht etwa auch mit Gewichten unseres Gewichtssates (Gegengewichten) belaftet wird. Dann muß zunächst, will man ein Gewicht von 1 g abwägen können, in dem Gewichtssatz jedenfalls das Gewicht 1 g vertreten fein. 1) Will man auch 2 g abwägen, so muß entweder zu bem Ge= wicht von 1 g noch ein gleiches hinzutreten ober aber ein Gewicht pon 2 g vertreten sein. Die lettere Unnahme führt uns jedoch weiter als die erstere, indem sie nämlich außer den Abwägungen von 1 g und 2 g auch zugleich eine folche von 3 g = 1 g + 2 g ermöglicht. Wir werden baber die beiden ersten Stude unseres gesuchten Gewichts= sates so wählen: 1 g, 2 g. Um nun auch 4 g abwägen zu können, brauchen wir entweder ein weiteres Gewicht von 1 g ober ein zweites von 2 g ober eins von 3 g ober schließlich eins von 4 g. Der Leser ift keinen Moment barüber im Zweifel, wofür wir uns zu entscheiben haben werden; benn, während 3. B. ein Gewichtssat von 1 g, 2 g, 2 g uns nur alle Wägungen von 1 g bis 5 g ermöglicht, können wir mit 1 g, 2 g, 4 g alle Wägnngen von 1 g bis 7 g einschließlich aus= führen (5 = 4 + 1; 6 = 4 + 2; 7 = 4 + 2 + 1). Um nun hier= über hinauszukommen, werden wir offenbar ein Gewicht von 8 g hinzunehmen und können alsbann mit ben 4 Gewichten von 1 g, 2 g, 4 g, 8 g bereits alle Wägungen von 1 g bis 15 g infl. ausführen, indem 9 = 8 + 1ift. Man fieht fofort, bag man jest ein Be-10 = 8 + 2wicht von 16 g wird hinzunehmen muffen, und 11 = 8 + 2 + 1wir erfennen in der Reihe von Bahlen: 1, 2, 4, 12 = 8 + 48, 16, auf die wir hier kommen, die aus dem vori= 13 = 8 + 4 + 1gen Baragraphen uns wohlbekannte Reihe ber 14 = 8 + 4 + 2Botenzen ber Bahl 2 wieder. In ber Tat würden

^{15 = 8 + 4 + 2 + 1} wir bei weiterer Fortsetzung unseres Verfahrens stets nach den Zahlen dieser Reihe fortschreiten müssen, so daß also jett 32, 64, 128 usw. kommen würden. Man erkennt diese Not-wendigkeit leicht folgendermaßen: Die Gewichte 1 g, 2 g, 4 g, 8 g

1) Würden die Gewichte auf beide Schalen verteilt, so ließe sich 1 g ja

¹⁾ Würben die Gewichte auf beide Schalen verteilt, so ließe sich 1 g ja auch ohne das Eingrammsgewicht abwägen, etwa als Differenz von 3 g und 2 g. Läßt man auch diese Art Wägungen (durch Gegengewichte) zu, so kommt man tatsächlich mit noch weniger Gewichten aus, als sich für unsere obige Fragestellung ergeben werden, doch soll dieser Fall, wie gessagt, hier ganz außer Betracht bleiben; s. jedoch meine "Math. Unterh. u. Spiele", Bd. I (2. Aust.), S. 88 ff.

ermöglichen alle Wägungen von 1 g bis 15 g einschließlich, wie wir gezeigt haben. Ich bente mir biefe 15 Bagungen nun ber Reihe nach ausgeführt und lege jedesmal bas neu hinzugetretene Gewicht 16 g bazu: alsbann erhalte ich ftatt ber Baqungen von 1 g bis 15 g alle Bägungen von 17 g bis 31 g einschließlich, insgesamt also alle Bagungen von 1 g bis 31 g einschließlich. Bu ber Abwägung von 31 g brauche ich alle 5 Gewichtsstücke (1 g. 2 g. 4 g, 8 g. 16 g), vermag aber eine Wägung von 32 g mit ihnen offenbar nicht mehr au leisten. Wie wir nämlich aus bem vorigen & (Sat 1) wiffen, ift es eine allgemeine Eigenschaft ber Reihe ber Botenzen ber Bahl 2, baf die Summe ber Rahlen diefer Reihe, bis zu einer gemiffen Grenze genommen, um 1 fleiner ift als die nächstfolgende Rabl ber Reibe. hiernach ift es begreiflich, daß wir mit unferen 5 Gewichteftuden 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g nur bis ju Bagungen von 31 g einschließ= lich zu reichen vermögen, alfo unmittelbar vor 32, ber nächftfolgenden Botenz ber 2, halt machen muffen. Wollen wir weiter geben, fo muffen wir alfobein Gewicht von 32 g bingunehmen und bermogen mit ben jest zur Verfügung stehenden Gewichten offenbar alle Baqungen bis 63 g, und zwar ludenlos von g zu g, auszuführen. Das weiter hinzutretende Gewicht muß bann 64 g fein, und biefer Gewichtesat von jest 7 Gewichten: 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, 32 g, 64 g ermöglicht uns alle Wagungen bis einschließlich 127 g; er leiftet fomit. obwohl nur aus 7 Gewichten bestehend, mehr als die im Berfehreleben üblichen mit ihren ersten 8 Gewichten, die nur Bagungen bis 110 g gestatten, wie schon oben gesagt wurde. - Um übrigens einem etwaigen Migverständnis vorzubeugen, fei noch ausbrudlich bemerkt, daß solche nach den Potenzen der Zahl 2 fortschreitenden ("dyadischen") Gewichtefäte für den praktischen Gebrauch gewiß nicht empfehlenswert find, eine Frage, die jedoch hier nicht gur Erörterung fteht.

Bei Gelegenheit biefer besonderen Aufgabe gewannen wir zugleich ein wichtiges allgemeines Resultat, bon bem wir noch weiterhin Bebrauch machen werden und das wir daher für sich gesondert aus-

sprechen wollen als:

Sat 2: Sebe beliebige Bahl läßt fich barftellen als Summe von Bahlen aus ber Reihe ber Botengen der 2 und zwar fo, bag jebe biefer Botengen höchftens einmal in der Summe portommt.

Frage 10: Leistet nicht ein Gewichtssatz, bestehend aus den Gemichten 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, 33 g, 65 g noch mehr als der soeben (S. 39) angegebene, indem er auch noch Abwägungen von 128 g und 129 g ermöglicht?

Frage 11: Durch wieviel Gewichte (Mindestzahl) kann ein Gewichtssan, bestehend aus Gewichten von 1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g,

20 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 200 g, erset merben?

§ 3. Erraten gedachter Bahlen und Gegenftände.

Die in dem Sat 2 des vorigen Paragraphen ausgesprochene Mögelichkeit der Darstellung jeder Zahl als Summe von lauter verschiebenen Potenzen der 2 findet dei zahlreichen Spielen und Aufgaben Anwendung, die wir daher, wie in der Überschrift dieses Kapitels gesichen, "dyadische" nennen und von denen wir in diesem und dem nächsten Paragraphen einige Proben geben wollen.¹) Dabei wollen wir die Zahlen der gedachten Keihe, also 1, 2, 4, 8 . . " der einssacheren Unterscheidung halber als unsere "Grundzahlen" bezeichnen.

I. Das Erraten einer gebachten Bahl.

In einer Gesellschaft denkt man sich eine Zahl, die der vorher hinausgesandte A sich anheischig macht zu erraten, salls der mit ihm unter einer Decke spielende B ihn durch einige aneinandergelegte Münzen "auf die richtige fährte

führen" darf,

unserer, wie wir ja fagen wollten.

wobei es, wie A und B etwa geheimnisvoll behaupten, auf die Winkel ankomme, unter denen die Münzen aneinandergelegt werden. Die Verabredung zwischen A und B geht einsach dahin, daß die Kehrseite (Wappenseite, Revers) einer Münze immer eine Null, die Kopsseite (Avers) dagegen die verschiedenen Potenzen von 2, und zwar von links ansangend sukzessive 1, 2, 4, 8..., bedeuten soll. B stellt die gedachte Zahl dann einsach als Summe

"Grundzahlen" 1, 2, 4, 8 . . . dar. Fig. 28. Wenn B also aus seinen Münzen beispielsweise die Fig. 23 formt, so

¹⁾ Übrigens gehören auch noch bie folgenben, in ben Kapiteln V und VI gesondert behandelten Spiele zu ben "bhabischen".

bebeutet dies: Da die erste Münze links die Wappenseite zeigt, so ist die erste "Grundzahl", also 1, fortzulassen; dagegen hat A wegen der Kopfseite der zweiten und britten Münze die zweite und britte Grundzahl, also 2 und 4, zu nehmen; die vierte Grundzahl (8) ist wieder auszulassen, die fünste (16) dagegen zu nehmen. Die gedachte Jahl ist somit 2+4+16=22, die A nun der staunenden Wenge verstünden dark.

II. Das Erraten eines gedachten Bilbes.

Auf einer Karte sind 32 verschiedene Bilder dargestellt, etwa in 4 Reihen zu je 8. Irgend jemand, sagen wir Z, wird von A aufgesordert, sich eins dieser Bilder zu denken; A will dann erraten, welches Bild Z sich gedacht hat.

Außer ber großen Karte mit allen 32 Bilbern, ber "Hauptkarte" besitzt A noch 5 weitere Karten ("Teilkarten"), auf beren jeder 16 ber 32 Bilber (etwa in 2 Keihen zu 8) wiedergegeben sind. A hält nun dem Z jede dieser 5 Karten der Keihe nach hin und läßt sich jedesmal von ihm angeben, ob das gedachte Bild auf der betressenden Karte vorkommt oder nicht. Nach den Antworten, die Z hierauf gibt, kann A dann das gedachte Bild eindeutig bestimmen.

Es ändert offenbar an dem Spiel nichts, wenn wir statt der 32 Bilber 32 Rahlen, am einfachsten bie Rahlen 1-32, annehmen: bas erste Bild ber hauptfarte wird eben burch die Bahl 1 ersett, bas zweite burch 2, das lette durch 32, wobei wir in der Rumerierung der Bilder in jeder Reihe von links nach rechts gehen und die 4 Reihen von oben nach unten durchlaufen. Jede der Zahlen 1-31 läßt fich nun als Summe der Grundzahlen 1, 2, 4, 8, 16 barftellen (bie letzte Zahl, 32, die selbst eine Grundzahl ist, laffen wir vorläufig außer Betracht). Wir benten uns biefe Darftellung nun für alle 31 Bahlen burchgeführt, also 3. B für die Bahl 23 in der Form: 1 + 2 + 4 + 16. Wie oft, meint der Leser wohl, wird bei diesen 31 Darstellungen rechts die Grundzahl 1 vorkommen? Offenbar tritt fie auf bei allen ungeraben Zahlen, also bei 1, 3, 5, . . . 31. Es find beren im gangen 16. Diese 16 Bahlen refp. die ihnen entsprechenden Bilder find nun auf ber einen der 5 Teilkarten abgebildet. Aber nicht nur die 1 tritt bei dies fen 31 Darftellungen gerabe 16 mal auf, sondern, wie eine einfache Überlegung zeigen wurde, kommt jede der übrigen Grundzahlen, alfo die 2, die 4, die 8, die 16, hierbei ebenso oft vor, die Grundzahl 16 z. B. in den Darstellungen der Zahlen 16—31. Man hat daher die 16 Zahlen, in deren Darstellung die Grundzahl 2 auftritt, resp. die ihnen zugeordneten 16 Bilder auf die zweite Teilkarte gebracht und entsprechend den Grundzahlen 4, 8 und 16 die drei weiteren Teilkarten angesertigt. Die Zahl 32 resp. das 32. Bild kommt so offenbar auf keiner der Teilkarten vor. Die 5 Teilkarten sind also, wenn wir auf jeder die Zahlen der Größe nach ordnen, so beschaffen, wie Fig. 24

| I. | | II. | III. | IV. | . V. |
|-------------|----|------------------------|------------------------|-----|------|
| 1 | | 2 | 4 | 8 9 | 16 |
| 1 3 | | 3 | 5 | 9 | 17 |
| 5 | *. | 6 | 6 | 10 | 18 |
| 5 7 9 | | 7 | 7 | 11 | 19 |
| 9 | | 2 3 6 7 10 | 4 5 6 7 12 | 12 | 20 |
| 11 | | 11 | 13 | 13 | 21 |
| 13 | 1 | 14 | 14 | 14 | 22 |
| 15 | | 14 15 | 15 | 15 | 23 |
| 17 | | 18 | 20 | 24 | 24 |
| 19 | | 19 | 21 | 25 | 25 |
| 21 | | 22 | 22 | 26 | 26 |
| 23 | | 23 | 23 | 27 | 27 |
| 25 | | 26 | 28 | 28 | 28 |
| 27 | | 27 | 29 | 29 | 29 |
| 29 | | 30 | 30 | 30 | 30 |
| 31 | | 31 | 31 | 31 | 31 |

Sig. 24.

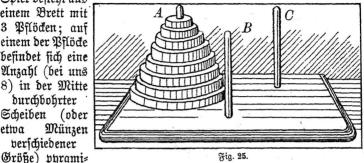
zeigt, wobei wir uns nur statt ber Zahlen die betreffenden Bilber, diese etwa in zwei wagerechten Reihen zu je 8 angeordnet, gesetzt benken müssen. Gibt nun Z beispielsweise an, daß das von ihm gebachte Bild auf den Teilskarten II, III, V vertreten ist, auf den Teilskarten I und IV aber sehlt, so sagt dies dem A folgendes: Die Teilskarten I, II, IV, V entsprechen den Grundzahlen 1, 2, 4, 8, 16 (in unserer Fig. 24 ist die oberste Zahl jeder Teilkarte zugleich die betreffende Grundzahl); von diesen Grundzahlen sind im vorliegenden Falle die zweite, dritte und fünste, d. h. 2, 4, 16 zu nehmen, die erste und vierte (1 und 8) dagegen sortzulassen. Das gedachte Bild hat mithin auf der Hauptkarte den Plat 2 + 4 + 16 = 22 und ist damit eindeutig bestimmt.

Kommt das gedachte Bilb auf keiner ber 5 Teilkarten vor, so ist es das 32., das letzte der Hauptkarte.

§ 4. Der Queasiche Zurm.

Dieses von dem französischen Mathematiker E. Lucas erfundene

Spiel besteht aus einem Brett mit 3 Pflöden; auf einem der Bflöcke befindet fich eine Anzahl (bei uns 8) in der Mitte durchbohrter Scheiben (ober Münzen etma verschiedener



benartig übereinander und nach der Größe geordnet.1)

Das Spiel besteht darin, die Scheiben alle auf einen der beiden anderen Offocke zu bringen, wenn man zur Zeit immer nur eine Scheibe umsetzen und bei allen Umsetzungen stets nur eine kleinere Scheibe auf eine größere, niemals umgekehrt, setzen darf.

Natürlich foll das Ziel durch möglichst wenig Operationen erreicht,

unnötige Umsehungen also vermieben werben.

Es fei C ber Pflod, auf ben bie Scheiben gebracht werden follen, und A ber, auf bem fie ursprünglich figen, wie in Fig. 25 angegeben. Man beginne das Spiel zunächst mit nur 2 Scheiben, bente fich also bie übrigen 6 unserer Figur fort. Man fieht, daß man alsdann bie obere Scheibe auf B zu fteden hat, bann bie untere (größere) auf C und nun die von B auf C. Bei 2 Scheiben sind also 3 Umsetzungen zur Erreichung bes Ziels erforberlich. — Nimmt man jest 3 Scheiben — wir wollen fie von oben nach unten 1, 2, 3 nennen —, so wird man, bevor die Scheibe 3 von A heruntergenommen werden tann, erft 1 und 2 auf einen anderen Bflod bringen muffen und zwar wird man bies fo einzurichten haben, daß 3 darauf fofort auf C kommt. C muß also bann leer sein; b. h. man hat zunächst 1 und

¹⁾ Das Spiel fann von den Zullchower Anftalten (f. S. 14, Anm. 1) bezogen werden (Nr. 840/4 bes Preisverzeichnisses: "Die Ringe bes Braminen").

2 auf B zu bringen. Dies erforbert, mit Vertauschung von B und C. unser voriges Verfahren bei nur 2 Scheiben, begnsprucht also 3 Umsetzungen (Scheibe 1 von A auf C, 2 von A auf B, 1 von C auf B). Alebann kommt nun 3 auf C, und barauf muffen 1 und 2 von B auf C gebracht werben, was wieder 3 Umsetzungen erfordert (1 von B auf A, 2 von B auf C, 1 von A auf C). Bei 3 Scheiben find also 7 Umsehungen erforderlich. — Man fieht sofort, daß bies ganz anglog fo weiter geht: Um 4 Scheiben von A auf C zu bringen, hat man zunächst die 3 Scheiben 1, 2, 3 von A auf B zu bringen (7 Umsetzungen), darauf Scheibe 4 von A auf C, dann die Scheiben 1, 2, 3 von B auf C (7 Umsehungen); zusammen 15 Umsehungen. Wir hätten hierbei also zunächst die Umsehungen des vorigen Falles der 3 Scheiben zu wiederholen, jedoch mit Vertauschung ber Pflöcke B und C. Begannen wir im vorigen Falle mit: "1 von A auf C", fo wurden wir daher jest zu beginnen haben: "1 von A auf B". Zuruchlickend feben wir fo, daß die erfte Umfetung lautete:

> bei 2 Scheiben: "1 von A auf B" = 3 = "1 von A auf C" = 4 = "1 von A auf B".

Da nun jedesmal, wenn wir zu einer um 1 größeren Scheibenzahl sortschreiten, wieder eine solche Vertauschung von B und C stattsinden wird, so wird der Anfang offenbar abwechselnd lauten: "1 von A auf B" und "1 von A auf C", und zwar gilt das erstere bei gerader Scheibenzahl, das sestere bei ungerader. Nennen wir C den "Endspslock" und B den "Übergangspslock", so können wir also sagen:

Bei ungeraber Scheibenzahl hat man bamit zu beginnen, bie kleinste Scheibe auf ben Endpflock zu bringen, bei gestaber Scheibenzahl bagegen auf ben übergangspflock.

Diese für das praktische Spiel sehr wichtige Regel ist leicht zu beshalten und eine Berwechselung der beiden Fälle völlig ausgeschlossen, wenn man dabei nur an den allereinfachsten Fall, eine Scheibe, denkt, für den sich die Regel von selbst versteht.

Für die Bahl der erforderlichen Umsehungen hatten wir gefunden:

Wenn der Leser auch bereits hiernach das Gesetz dieser Zahlen erstät, so werden wir doch noch eine bessere Einsicht in die Art, wie die Zahlen 1, 3, 7, 15 usw. zustandekommen, gewinnen, wenn wir die Frage auswersen: Wie viele der 15 Umsetzungen, die dei 4 Scheiben ersorderlich sind, werden vorgenommen mit Scheibe 1, wie viele mit Scheibe 2 usw.? — Nun, von den 3 Umsetzungen, die dei 2 Scheiben ersorderlich sind, ersolgen zwei mit Scheibe 1 und eine mit Scheibe 2. Wir schreiben dies kurz so:

2 Scheiben
Scheibe 1 2 Umf.
2 1 Umf.
3uf. 3 Umf.

Bei 3 Scheiben gliedert sich das Verfahren in folgende 3 Stufen: Umsehen der Scheiben 1 und 2 von A auf B, Umsehen der Scheibe 3 von A auf C, Umsehen der Scheiben 1 und 2 von B auf C. Hierausstieht man, da das Versahren der 2 Scheiben (1 und 2) zweimal auszuführen ift, daß die Umsehungen für diese beiden Scheiben sich versboppeln gegenüber dem vorigen Fall, und wir erhalten also:

| 3 Scheiben | | | | | | 4 Scheiben | | | | | | | | | | | | |
|------------|----------|----|----|----------|-----|------------|---|----------|--|--|---------|---|--|---|-----|--|----|------|
| Scheibe | 1 | | | | | 4 | 1 | Umf. | | | Scheibe | 1 | | | | | 8 | Umj. |
| = | 2 | | | | | 9 | 2 | Umj. | | | = | 2 | | | | | 4 | Umj. |
| = | 3 | | | | | 1 | | Umj. | | | = | 3 | | | | | 2 | Umj. |
| | | | | 31 | uſ. | . ' | 7 | Ums. | | | = | 4 | | | | | 1 | Ums. |
| und l | jier | cn | ad | 5 | er | tt | þ | rechend: | | | | | | ð | uſ. | | 15 | Ums. |

Die Zahlen der Umsetzungen für die einzelnen Scheiben, von unten nach oben gelesen (1, 2, 4, 8 im letzten Falle), sind die Potenzen von 2 und zwar nicht nur hier in diesen einsachsten Fällen, sondern dies gilt, da sich beim Fortschreiten von Fall zu Fall die Zahlen versdoppeln und unten stets eine 1 hinzutritt, ganz allgemein. Die Gesamtzahl der Umsetzungen für seden Fall ist dann nach unserem Sat 1×37 um 1 kleiner als die nächstsolgende Potenz von 2; so würde sich also bei 3 Scheiben als Gesamtzahl aller Umsetzungen $31 \times 32 - 1$ ergeben.

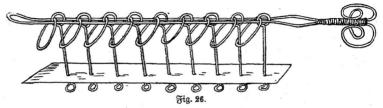
Frage 12: Wie viele Umsehungen sind bei 7 Scheiben im ganzen erforderlich? Wie viele Umsehungen hiervon werden mit Scheibe 1, wie viele mit Scheibe 5 vorgenommen? Welches ist die allererste Um:

fenung in biefem Falle?

Rapitel V.

Das Zankeisen.

Das Wuseum für Bölkerkunde in Leipzig besitzt in seinen Sammslungen ein merkwürdiges, aus China, und zwar der Provinz Schanstung, stammendes Spielzeug, das unsere Fig. 26 in verkleinerter Wiesbergabe zur Anschauung bringt: Auf einer in einen Griff auslausens

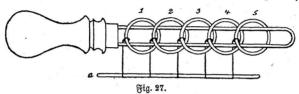


ben Gabel oder Spange sigen, wenn wir uns zunächst auf den oberen Teil des Instruments beschränken, 9 Ringe; das Ganze ist, mit Ausenahme der Bindsadenumwickelung am Griff, in Messing ausgeführt. Wenn auch die chinesische Serkunft dieses Exemplars unzweiselhaft selzustehen scheint, so ist doch kaum anzunehmen, daß das geistreiche Spielzeug eine Ersindung der Chinesen überhaupt sei, und jedenfalls ist es in Suropa, gering veranschlagt, seit vier Jahrhunderten bekannt. Von den verschiedenen Namen, unter denen es in Deutschland seit längerer Zeit umläust, haben wir hier den des "Zankeisens" bevorzugt. — Für die Besprechung des Spielzeugs ist es bequemer, an Stelle des chinessischen Exemplars mit seinen 9 Ringen eins mit weniger Ringen zugrunde zu legen, und so geben wir denn in Fig. 27 eine schematische Zeichnung mit 5 Kingen, die unseren weiteren Aussiührungen als Grundlage dienen mag. Mit Bezug auf sie können wir dann Sinerichtung und Zweck des Spielzeugs so beschreiben¹):

¹⁾ Für die Beschäftigung mit diesem höchst reizvollen Spiel, die ich dem Leser nicht dringend genug anraten kann, ist die Benutzung eines Modells kaum zu entbehren oder wenigstens sehr zu empsehlen. Wer nicht vorzieht, sich selbst ein solches anzusertigen, kann es von den Züllchower Anstalten (s. hier S. 14, Anm. 1) beziehen (Ar 842/4 des Preisverzeichnisses). Augenblicklich ist dort freilich nur die Spielsorm mit 9 Kingen vorrätig, doch ist später (nach dem Kriege) daneben auch die Aussührung mit weniger, etwa 5, 7 und 8 Kingen, in Aussicht genommen.

Jeder der 5 Ainge ist durch einen an ihm befestigten faschen, der, außer bei einem Aing (Ar. 1 unserer Figur), durch das Innere des benachbarten Ainges und — bei allen Aingen — zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurchgeht, mit einer kleinen Stange (a in unserer figur) sest verbunden. Das Spiel besteht nun darin, die Spange von dem System der Ringe zu trennen.

Der Anfänger versucht die Lösung gewöhnlich in der Weise, daß er, den Griff etwa in die linke Hand nehmend, die Ringe nach rechts



bis über das Ende der Spange zieht und nun — irrtumlicherweise die Ringe über einen ber beiben Bugel ber Spange wirft, muß bann aber erkennen, daß dies zur Lösung der Aufgabe nicht nur nichts beis trägt, vielmehr nur eine Verwirrung ber Fäben berbeiführt. Man erkennt in der Tat fehr leicht, daß man die einzelnen Ringe gwar nach rechts (im Sinne ber Fig. 27) von der Spange herunterzuziehen haben wird, daß fie barauf jedoch nicht auf die eine Seite ber Spange, sondern zwischen den beiden Bügeln ber Spange hindurch nach unten geworfen werden muffen, und es entsteht jest nur die Frage, in welcher Reihenfolge man diese Manipulationen mit ben verschiedenen Ringen vorzunehmen hat, um auf die schnellfte Urt eine Trennung von Spange und Ringen zu erzielen. In ber ursprünglichen Stellung (f. Fig. 27) können nur die Ringe 4 und 5 nach unten gelangen ohne daß einer der betreffenden Faben über einen Bugel ber Spange greift, was natürlich zu vermeiden ist -, und zwar 5 in der bereits angegebenen Beije, und 4, indem man 4 und 5 gleichzeitig nach rechts über die Spange hinausführt und bann 4 bon oben zwischen ben Bügeln hindurch nach unten wirft, 5 bagegen wieder auf die Spange fest oder gleichzeitig mit 4 nach unten wirft. Bezeichnen wir nun bas Lostrennen eines Ringes von der Spange furz als bas "Senken" eines Ringes und die umgekehrte Operation als das "Beben" und rechnen wir die Ringe in der Reihenfolge der Rummern in der Fig. 27,

also 3. B. 3 als den auf 2 "folgenden" Ring, so erkennt man leicht

folgendes:

Ein Ring kann nur dann gehoben resp. gesenkt werden, wenn der folgende Ring oben ist, alle weiteren folgenden Ringe jedoch unten sind; der lette Ring (5) kann jederzeit gehoben resp. gesenkt werden.

Hätten wir z. B. die durch das Schema do do angedeutete Stellung — in der die Gerade die Spange und die kleinen Kreise oberhalb derselben die auf ihr sitzenden Kinge, die unteren Kreise die gesenkten Kinge bedeuten — auf irgendeine Weise herbeigesührt, so würde der King 2 jetzt gehoben werden können, weil der folgende King (3) oben ist, alle weiteren folgenden Kinge (4 und 5) dagegen unten. Dagegen würden die Kinge 1 und 3 nicht gesenkt und 4 nicht gehoben werden können; wohl aber könnte 5 gehoben werden und mit ihm zugleich allerdings auch 4.

Hinge von der Spange zu trennen, vor allem darauf ankommen wird, den Ring 1 zu senken, und daß, nachdem dies geschehen, dieser Ring völlig aus der Betrachtung ausscheidet und man dann nur noch mit einem Spiel von 4 Ringen zu tun hat. Damit aber 1 gesenkt werden kann, muß nach unserer obigen Borschrift Ring 2 oben und müssen 3, 4, 5 unten sein. Es ist also vorher 3 zu senken, und dieserfordert, daß 4 oben und 5 unten ist. Hiernach ergibt sich solgende Disposition: Es ist zunächst 5 zu senken, darauf kann dann auch 3

gesenkt werden, und wir erhalten somit die Stellung o o o Um nun auch 4 senken zu können, mussen wir 5 wieder heben und können darauf 4 und 5 — gleichzeitig, wie schon oben bemerkt war, — senken.

Wir erhalten so die Stellung $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ die nun, wie schon gesagt, die Borbedingung für das Senken von 1 darstellt. Aus ihr resultiert daher $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ Damit scheidet 1 ganz aus der Betrachtung aus, und, damit nun 2 gesenkt werden kann, muß zuvor 3 gehoben werden. Dies bedingt aber, daß 4 gehoben wird, und dies wieder dasselbe

leich geschehen kann, erhalten also o o o o o o o gehoben wersen, so muß erst wieder 5 gesenkt werden, so daß wir sukzessive die

für 5. Wir heben daher zunächst 4 und 5, was bei diesen beiben zu=

Stellungen - 2 3 4 5 und - 2 3 4 5 erhalten. Damit nun 2 gesenkt werden kann, muß nicht nur 3 oben, sondern zugleich 4 und 5 unten sein, und, um 4 senken zu können, mussen wir zuvor 5 beben, so bak wir zunächst die Stellung ooo befommen. Dies ift aber die Unfangsstellung für ein Spiel mit 4 Ringen, und die weiteren Operationen find genau diefelben, als ob wir von Anfang an nur 4 Ringe gehabt hätten. Durch die jest zunächst erreichbare Zwischenstellung gelangen wir zu o, womit auch ber Ring 2 aus ber Betrachtung ausscheibet. Damit nun 3 gesenkt werden kann, muß zuvor 4 gehoben werden, und dies bedingt wieder, daß 5 zuvor resp. gleichzeitig gehoben wird, fo daß folgende futzeffive Stellungen notwendig werden: $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{1}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{1}$ $\frac{5}{1}$

gen), ooo oo oo Seben wir nun noch 5 und fenken dann 4 und 5 gleichzeitig, so ist bas gange Suftem ber Ringe von ber

Spange getrennt, wie verlangt mar.

Umgekehrt bringt man die Ringe wieder auf die Spange zurud, indem man genau die umgekehrten Operationen wie gubor, und zwar in umgekehrter Reihenfolge, ausgeführt, alfo:

1. Seben von 4 und 5 2. Senten bon 5

10. Keben bon 5 3. Seben bon 3

4. Heben von 5

5. Senken von 4 und 5

6. Seben von 2

7. Seben von 4 und 5

8. Senfen non 5

9. Senken von 3

11. Senken von 4 und 5

12. Heben von 1 13. Heben von 4 und 5

14. Senken von 5

15. Heben von 3

16. Heben bon 5.

Auf die mathematische Theorie des Spiels, für die - beiläufig bemerkt - die im vorigen Rapitel besprochene Reihe der Botengen ber 2 eine grundlegende Bedeutung befitt (vgl. S. 40, Anm. 1). bürfen wir nach den obigen Ausführungen verzichten. Die Theorie wurde uns im Grunde genommen nur eine Beftätigung unferer Darftellung liefern und insbesondere ben Beweis bafür geben, daß bas von uns oben angewandte Verfahren auch wirklich bas fürzefte ift. um die gestellte Aufgabe zu lofen. Bei diesem unserem Berfahren waren für ben von une hier zugrunde gelegten Spezialfall von 5 Rin-

gen 16 Operationen er: forberlich, menn mir ein gleichzeitiges Beben und Senten ber beiden letten Ringe (4 und 5) für eine Operation gählen. wollen nun wenigstens bei der mathematischen Theorie unferes Spiels bie An= leihe machen, daß mir noch die Angabl ber erforder= lichen einzelnen Umftel= lungen für verschiedene Un= gablen von Ringen in einer Tabelle, wie folgt, zufam= menftellen:

| Anzahl ber Ringe | Anzahl der Umstellungen |
|------------------|-------------------------|
| 2 | 1 |
| . 3 | 4 |
| 4 | 7 |
| 5 | 16 |
| 6 | 31 |
| 7 | 64 |
| 8 | 127 |
| 9 | 256 |
| 10 | 511 |
| 11 | 1024 |
| 12 | 2047 |
| 20 | 524287 |

Bei 65 Ringen würde die Minimalzahl der erforderlichen Um= stellungen bereits eine 20 stellige Zahl und gerade um 1 größer sein als die Anzahl aller Weizenkörner auf dem Schachbrette in dem oben (S. 35 f.) besprochenen Falle.

Frage 13: Welche anfängliche Stellung wäre bei 5 Ringen die ungünftigste, d. h. diejenige, von der aus am meisten Operationen erstorberlich sind, um das System der 5 Ringe von der Spange zu trenenen? Wie viele Operationen erfordert dieser ungünstigste Kall?

Rapitel VI.

Rim.

§ 1. Beigreibung bes Spiels und Stiggierung feiner Theorie.

Der Ursprung dieses Spiels ift unbekannt. Auf einigen amerikanischen Schulen, bisweilen auch auf Jahrmärkten, wird es gespielt; es soll aber auch in Deutschland schon seit Jahrzehnten bekannt sein. Genannt wird es zumeist "Fan-Tan". Da man jedoch mit demselben Namen auch ein ganz anderes, bei Chinesen beliebtes Spiel bezeichnet, bas ein reines Glücksspiel ist, so haben wir hier den obigen englischen, von einem amerikanischen Mathematiker vorgeschlagenen Namen akzeptiert.

Man benutt zu dem von zwei Personen gespielten Spiel eine Ungahl von irgendwelchen Objekten, etwa Zündhölzern oder kleinen Steinen. Es wird damit begonnen, daß 3 "Baufen" von "Steinen" gebildet werden, und zwar fo, daß jeder Haufen, wie wir vorläufig der Einfachheit halber annehmen wollen, höchstens 7, andererseits aber auch wenigstens 1 Stein 1) enthalten mag. Das Spiel besteht nun darin, daß zunächst einer der Spielenden eine beliebige Ungahl von Steinen von einem Haufen fortnimmt, d. h. also wenigstens einen Stein und eventuell auch den ganzen haufen. Innerhalb und mit Einschluß dieser Grenzen darf der Spielende also beliebig wählen, ebenso wie ihm auch die Wahl des haufens überlaffen bleibt; nur durfen nicht gleichzeitig Steine verschiedener haufen fortgenommen werden. Darauf kommt der andere Spieler an die Reihe, um nun seinerseits nach denselben Bestimmungen, wie der erstere, zu verfahren, und zwar darf er denselben haufen wie sein Begner oder auch einen anderen wählen. So geht dies abwechselnd fort, solange Steine porbanden find. Wer den letten Stein bekommt, ift Sieger.

Wir wollen der Einfachheit halber die einzelnen Operationen der Spieler als ersten, zweiten usw. "Zug" unterscheiden. — Die mathematische Theorie lehrt nun, daß einer der beiden Spieler stets den Sieg erzwingen kann; welcher von beiden sich in dieser günstigen Lage besindet, ob derzenige, der den ersten oder der den zweiten Zug tut, hängt lediglich von der Anfangsstellung ab.

Eine bestimmte Phase des Spiels ist offenbar durch die Anzahlen der Steine in den Hausen völlig charakterisiert. Wir werden sie dasher etwa durch 1, 4, 6 bezeichnen, wenn der eine Hausen 1, ein anderer 4 und der dritte 6 Steine enthält, und wollen solche Spielsphasen "Stellungen" nennen. Dabei wollen wir aus später zu ers

tennenden Gründen die Stellungen

¹⁾ Wir sprechen also aus Zweckmäßigkeitsgründen auch von einem "Haufen" von einem Stein und überlossen den Logikern die Erörterung der berühmten Streitfrage, bei welcher Mindestzahl von Objekten der vulgäre Begriff des "Hausens" beginnt.

"ausgezeichnete" und die übrigen mit gleichfalls 3 Saufen, alfo g. B. 1. 4, 6 oder 3, 4, 4, "gewöhnliche" nennen. Der Lefer erfennt un= ichwer, daß die Bahl der "gewöhnlichen" Stellungen fehr viel größer ift als die ber "ausgezeichneten". Befinden fich 3. B. in dem einen Saufen 2 Steine und in einem zweiten 4, fo haben wir eine ,,aus= gezeichnete" Stellung nur bann, wenn in bem britten Saufen 6 Steine liegen. In allen anderen Fällen, b. h. alfo, wenn in dem dritten Saufen 1, 2, 3, 4, 5 ober 7 Steine liegen, murbe die Stellung eine "gewöhnliche" sein; denn nur 2, 4, 6 findet sich in unserem "Spstem I", nicht aber 2, 4, 1 oder 2, 4, 2 oder 2, 4, 3 usw. — Fft ein Saufen gang verschwunden, fo mogen "ausgezeichnet" biejenigen Stellungen beißen, bei benen bie beiden übriggebliebenen Saufen gleich viele Steine enthalten; alle übrigen Stellungen mit nur zwei Saufen, also alle mit zwei ungleichen Baufen, sollen "gewöhnlich" beifen. Stellungen mit nur einem Saufen werden ftets "gewöhnlich" genannt. Bu ben oben angegebenen "ausgezeichneten" Stellungen des "Spstems I" kommen also als gleichfalls "ausgezeichnet" noch hinzu:

und schließlich noch 0, 0, 0, also biejenige Stellung, die dem Spieler, der sie erreicht, die Siegespalme einträgt. Einschließlich dieser letzten Stellung haben wir somit im ganzen 15 "ausgezeichnete" Stellungen, während eine einsache Rechnung lehren würde, daß die Zahl der "ge» wöhnlichen" Stellungen 105 beträgt. Die "ausgezeichneten" Stelslungen sind nun so ausgewählt, daß folgendes gilt:

Sat 1: Eine "ausgezeichnete" Stellung fann burch ben nächsten Zug nie wieder in eine "ausgezeichnete", sondern immer nur in eine "gewöhnliche" Stellung übergeführt werben.

Sat 2: Eine "gewöhnliche" Stellung läßt sich durch ben nächsten Bug zwar stets in zahlreiche "gewöhnliche", jedoch auch stets in mindestens eine "ausgezeichnete" Stellung überführen.

Wir werden in den nächsten Paragraphen sehen, daß die "ausgezeichneten" Stellungen den Spieler zum Siege führen. Hiernach und nach den soeben — vorläusig freilich ohne Begründung — angegebenen Säßen läßt sich das Prinzip des praktischen Spiels bereits jetzt solgendermaßen formulieren: Der Spieler muß danach trachten, durch seinen Zug eine "ausgezeichnete" Stellung herzustellen. Ist dies z. B. dem Spieler A gelungen, so wird B, da er ziehen muß und eine "ausgezeichnete" Stellung nur in eine "gewöhnliche" übergeht (Sah 1), die "ausgezeichnete" Stellung wieder zerstören, also eine "gewöhnliche" herstellen müssen. A kann diese jedoch wieder in eine "ausgezeichnete" umwandeln (Sah 2) und kann so von einer "ausgezeichneten" Stellung zur anderen und schließlich zum Siege fortschreiten.

§ 2. Begründung ber Theorie des Spiels.

Die Überzeugung von der Richtigkeit der im vorhergehenden § 1 ausgesprochenen Sate gewinnt der Lefer leicht an der Sand bestimmter Beispiele. Bunachft Sat 1: Greifen mir querft von ben ,ausgezeichneten" Stellungen bes Shitems II eine, etwa 0. 5. 5. beraus, so sehen wir, daß durch den nächsten Zug notwendig eine "gewöhn= liche" Stellung daraus wird; benn entweder der eine ber beiben Saufen verschwindet beim nächsten Buge ganz ober er verringert sich und wird damit dem anderen ungleich. Das Resultat des nächsten Zuges ist also entweder 0, 0, 5 oder etwa 0, 2, 5; beides sind aber nach unseren Definitionen "gewöhnliche" Stellungen. Die "ausgezeichneten" Stellungen bes Systems II laffen fich somit durch je einen Bug ficher fämtlich nur in "gewöhnliche" überführen, wie Sat 1 es will. — Aber auch für die Stellungen bes Suftems I gilt ber Sat: wir betrachten zu bem 3weck ein Beispiel, etwa 2, 5, 7. Laffen wir burch ben nächsten Bug einen Saufen gang verschwinden, fo wird bie Stellung, ba die beiden übrigbleibenden Saufen ungleich find, unbedingt "gewöhnlich". Wir haben also nur noch die Fälle zu betrachten, in benen einer ber Saufen verringert wird, ohne zu verschwinden. Nehmen wir nun bon bem erften Saufen einen Stein fort, fo bag 1, 5, 7 bleibt, fo haben wir eine "gewöhnliche" Stellung; benn in benjenigen "ausgezeichneten" Stellungen, in benen bie 1 vortommt,

fommen niemals zugleich 5 und 7 vor (s. Shstem I, erste Spalte). Verringern wir den zweiten Hausen, so bleiben jedenfalls in dem ersten Hausen 2 und in dem dritten 7 Steine. Nun finden wir aber in dem ganzen Shstem I nur eine Stellung, die zugleich 2 und 7 enthält; das ist unsere anfängliche Stellung 2, 5, 7. Wird also der Hausen 5 verringert, so ergibt sich zweisellos eine "gewöhnliche" Stellung. Bei Verringerung des dritten Hausens ist es ganz ents

fprechend.

Der Leser hat unschwer erkannt, daß wesentlich hierbei folgender Umstand ist: bas Spftem I ber "ausgezeichneten" Stellungen ift fo eingerichtet, daß irgend zwei Bahlen, 3 B. 3 und 7, nur einmal zusammen in einer "Stellung" vorfommen, nämlich in 3. 4. 7. Andererseits kommt aber jedes Baar von zwei Bahlen auch einmal zusammen in einer Stellung des Syftems I vor. Wir werden zwar hierauf zurückkommen und diese Angabe, die wir hier nur provisorisch machten, noch näher begründen muffen, wollen jedoch zur befferen Veranschaulichung biefer Einrichtung bes Shitems I jest noch folgendes hinzufügen: Wir benten uns, die Rablen 1, 2, ... 7 bezeichneten die Mitglieder eines Stattlubs; nennen wir fie ber Reihe nach etwa: Schulze, Müller. Schmidt, Meber, Lehmann, Rrause, Fischer. Die Rombinationen gu je 3 in unserem System I bezeichnen bann immer gerade eine Statpartie. Das Spftem I erhalt nun 7 "Stellungen"; biese mogen ben 7 Tagen ber Boche entsprechen, b. h. es mag in bem Klublofal an jedem Abend der Woche sich ein Trio zu einer Spielvartie einfinden. Nehmen wir alsbann die Stellungen des Shstems I in jeder Reile von links nach rechts, fo liefert uns unfer Spftem I folgenden Wochenfpielplan für den Rlub:

> Sonntag: Schulze, Müller, Schmibt. Montag: Müller, Meyer, Krause. Dienstag: Schmibt, Meyer, Fischer. Schulze, Weyer, Lehmann. Donnerstag: Müller, Lehmann, Fischer. Freitag: Schmidt, Lehmann, Krause. Sonnabend: Schulze, Krause, Fischer.

Wir bemerken alsdann folgendes: Jedes Alubmitglied kommt gleich oft zum Spiel, nämlich dreimal in der Woche. Dabei spielt jedes der 7 Mitglieder gerade einmal in der Woche mit jedem anderen zusamsmen: an seinem ersten Abend mit zwei Mitgliedern, an seinem zweis

ten Abend nicht wieder mit einem des ersten Abends, sondern mit zwei anderen Mitgliedern und an seinem britten Spielabend mit den noch übrigen zwei.¹) So spielt Schmidt z. B. am Sonntag, Dienstag und Freitag, und zwar am Sonntag mit Schulze und Müller, am Dienstag mit Weher und Fischer, am Freitag mit Lehmann und Krause, also mit jedem gerade einmal in der Woche. — Dies mag zur Versanschaulichung der Urt, wie die Zahsen des Shstems I miteinander

fombiniert find, vorläufig genügen.

Bir versuchen nun, uns ben Sat 2 plausibel zu machen: Der erfte Teil, daß eine "gewöhnliche" Stellung fich auf mannigfache Beife burch einen Rug in andere "gewöhnliche" überführen läßt, 3. B 1, 2, 5 in 1, 2, 4 oder in 1, 2, 2 oder in 1, 2, 1 oder in 1, 2, 0 oder in 0, 2, 5 usw., bedarf feiner weiteren Begründung. Es läßt sich aber, wie ber Sat 2 weiter will, jede "gewöhnliche" Stellung burch einen Bug auch in minbeftens eine "ausgezeichnete" überführen. Um leich= testen erkennt man dies bei nur zwei Saufen: hat man z. B. die "gewöhnliche" Stellung O, 4, 7, so erhält man baraus eine "ausgezeich= nete", wenn die beiden Saufen gleich gemacht werden, mas nur durch Berringerung bes größeren möglich ift, so daß man also 0, 4, 4 be= tommen wurde. Bare in ber , gewöhnlichen" Stellung nur noch ein Saufen vertreten, hatten wir alfo g. B. O, O, 4, so mußte, wie felbst= verständlich, diefer Saufen gang jum Berschwinden gebracht werden, um die "ausgezeichnete" Stellung 0, 0, 0, die zugleich bas Spiel mit bem Siege bes Ziehenden beendet, zu erhalten.2) - hat man eine "gewöhnliche" Stellung mit brei Saufen, 3. B. 3, 6, 7, fo barf man teinesfalls, will man eine "ausgezeichnete" erhalten, einen Saufen gang verschwinden laffen. Man barf also einen Saufen nur verringern. Will man ben erften Saufen verringern, fo bleiben also jedenfalls die Rahlen 6 und 7 bes zweiten und britten Saufens unveranbert. Die einzige "ausgezeichnete" Stellung, in ber 6 und 7 gufam= men porkommen, ist nun 1, 6, 7 (f. Spftem I); es muß also ber erste Saufen von 3 auf 1 verringert werden. Entsprechend findet man, daß

¹⁾ Darauf, ob eventuell alle 3 Spielabende des einzelnen Mitglieds uns mittelbar aufeinander folgen resp. wie sie sich sonst auf die Woche verteilen, ist hier keine Rücksicht genommen.

²⁾ Der Leser sieht also ichon hier, daß es nicht willfürlich war, wenn wir die Stellung 0, 0, 0 zu ben "ausgezeichneten" rechneten (S. 52), sons dern daß vielmehr innere Gründe hierzu zwingen.

man ben zweiten Haufen von 6 auf 4 ober ben britten von 7 auf 5 zu verringern hätte, mit dem Resultat, daß man so eine der "auß=gezeichneten" Stellungen 3, 4, 7 und 3, 6, 5 erhalten würde. In dem Falle dieses Beispiels läßt sich die "gewöhnliche" Stellung alf vourch den nächsten Zug auf 3 Arten in eine "ausgezeichnete" über=sührung zwar nicht geben, und es genügt uns auch vollkommen, wertnes nur eine gibt. Es entsteht aber die Frage, ob eine solche Mögslichkeit auch stels statt hat. Wollten wir an dieser Frage vorüber=gehen, so würden wir in unserer Beweisssührung eine erhebliche Lücke lassen, so würden wir in unserer Beweisssührung eine erhebliche Lücke lassen, so würden wir in unserer Beweisssührung eine erhebliche Lücke lassen, so würden wir uns diese Erörterung, ein wenig in die mathematische Theorie des Spiels einzudringen. Der Leser, der hier=auf verzichten will, möge daher den Rest dieses Paragraphen über=schlagen und alsdann gleich bei § 3 fortsahren.

Es hätten schon oben die Fragen aufgeworsen werden können, durch welche wesentlichen Eigenschaften sich die "ausgezeichneten" Stellungert von den "gewöhnlichen" unterscheiden und auf welche Weise die "aus=gezeichneten" Stellungen, insbesondere die des Shstems I, erhaltert wurden. Jur Beantwortung dieser Fragen erinnern wir den Leser zu=nächst an die schon S. 36 f. betrachtete Reihe der Potenzen der Zahl 2.

also an jene mit 1 beginnende Zahlenreihe, in der jede Zahl das Doppelte der vorhergehenden ist: 1, 2, 4, 8, 16..... Bir brauchen augenblicklich von dieser Reihe nur den Ansang: 1, 2, 4. Wir erinnern uns weiter daran, daß jede beliebige Zahl sich als Summe von Zahlen dieser Reihe darstellen läßt (Sat 2, S. 39), nämlich die uns hier allein intersessierenden Zahlen bis 7 einschließlich in nebenstehens der Weise:

Wir wollen daher 4, 2, 1 der Kürze halber jet wieder, wie schort auf \mathfrak{S} . 40, unsere "Grundzahlen" nennen. Greisen wir nun irgendeine "Stellung" aus dem Shstem I, etwa 3, 4, 7, heraus und schreiben die drei darin vorkommenden Zahlen in der soeben angegebenen Weise untereinander, also 3 = 2 + 1

$$4 = 4$$

 $7 = 4 + 2 + 1$

jo sehen wir, daß auf der rechten Seite an Grundzahlen untereinander behen zwei 1, zwei 2 und zwei 4. Würden wir diese Darstellung der Zahlen

nun für alle "Stellungen" bes Spstems I vornehmen, so würden wir sinden, daß von den Grundzahlen 1, 2 und 4 stels jede entweder zweimal oder gar nicht in einer "Stellung" vorkommt, wie dies letztere z. B. bei der Stellung 2, 4, 6: 2 = 2

2 = 2 4 = 4 6 = 4 + 2

bezüglich der Grundzahl 1 der Fall ift. Riemals aber kommt eine der Grundzahlen bei biefer Darftellung in ben Stellungen bes Syftems I ein: ober breimal bor; vielmehr murde alsbann bie Stellung gu ben "gewöhnlichen" gehören. Daß auch die Stellungen von Syftem II dies felbe Gigenschaft zeigen, bedarf faum der Ermahnung, ba bieje Stels lungen, abgesehen von ber 0, immer nur zwei gleiche Bahlen aufweisen, wobei unsere Bedingung bezüglich ber Grundzahlen felbst= verständlich erfüllt ist. Doch nicht nur besiken alle Stellungen pon Shitem I und II, also alle "ausgezeichneten" Stellungen, die betreffende Gigenschaft, fondern fie find auch die einzigen Stellungen, benen biefe Gigenichaft gutommt. Wenn wir nämlich irgendwelche Stellungen, bie außerhalb der Shfteme I und II ftehen, also "gewöhnlich" find. hieraufbin prüfen würden, so würden wir ftets finden, daß ihnen diese Eigenschaft abgeht. Wir greifen als Beispiele etwa bie Stellungen 1, 2, 4 und 3, 6, 7 heraus, die nicht zu ben ..ausgezeichneten" bes Shitems I gehören und für die wir folgende Darfiellungen in den Grundzahlen erhalten:

Bei der ersteren kommen die Grundzahlen 4, 2 und 1 nur je einmal vor, bei der letzteren die Grundzahlen 4 und 1 allerdings je zweimal, dagegen die Grundzahl 2 dreimal; die verlangte Bedingung wird also durch keins der beiden Beispiele ersüllt. — Der Bollständigkeit halber sei nur noch bemerkt, daß die Stellung 0, 0, 0 natürlich der gestellten Bedingung genügt, also mit Recht den "ausgezeichneten" Stellungen zugerechnet wird (vgl. die Anm. 2 S. 55).

Damit haben wir eine bestimmte **Definition** für die "ausgezeicheneten" Stellungen gewonnen, nämlich die, daß bei Darstellung ihrer 3 Zahlen durch die Grundzahlen jede Grundzahl gar nicht oder zweismal vorkommt, und haben an speziellen Beispielen die Überzeugung

gewonnen, daß alle "ausgezeichneten" Stellungen die angegebene charakteristische Eigenschaft besitzen, alle "gewöhnlichen" Stellungen dagegen nicht. Wir wollen jedoch dieser Desinition jetzt eine genetische Form geben, indem wir in Beantwortung einer oben (S. 56) bereits ausgeworfenen Frage ein Versahren angeben, um die Gesamtheit aller "ausgezeichneten" Stellungen zu bilden. Suchen wir beispielsweise eine nach unserer jetzigen Desinition "ausgezeichnete" Stellung, in der die Zahlen 3 und 5 vorkommen, so würde man so sagen müssen:

$$3 = 2 + 1$$

 $5 = 4 + 1$

Da nun hierin die Grundzahlen 4 und 2 nur je einmal, 1 jedoch zweis mal vortommt, fo muß die britte Bahl der gesuchten "Stellung" die Grundzahl 4 einmal, die Grundzahl 2 einmal, die Grundzahl 1 gar nicht enthalten, also 4 + 2 = 6 fein; die so erhaltene Stellung besitt bann die Gigenschaft, die wir unserer jetigen Definition gemäß von ben "ausgezeichneten" Stellungen verlangen. Danach muß also 3, 5, 6 eine "ausgezeichnete" Stellung sein, und in der Tat finden wir fie im Suftem I. In Diefer Beife findet man zu zwei gegebenen Rahlen ftets eine und nur eine britte Bahl, bie mit ben beiben erften eine "ausgezeichnete" Stellung bilbet, ober mit anderen Worten: 3, 5, 6 ift bie einzige "ausgezeichnete" Stellung, in ber die Bahlen 3 und 5 jufammen bortommen. Damit durfen wir junachft eine auf G. 54 in unferen Darlegungen gebliebene Lude als ausgefüllt ansehen: Wir antizipierten bort, jedoch ohne Begrundung, die carafteristische Eigen= schaft bes Syftems I, daß es in ihm für je zwei Bahlen ftets eine, aber auch nur eine "Stellung" gibt, in ber biefe beiben Bablen zusammen vorkommen1), eine Eigenschaft, für die wir hier nun den in= neren Grund erkennen. - Bir fonnen uns nun benken, daß man, wie in unserm Beispiel: 3, 5, so alle Rombinationen ber gahlen 1, 2, .. 7 zu je zweien vornimmt, und jedesmal die zugehörige "ausgezeichnete" Stellung bilbet. So muß man jedenfalls zu allen Stellungen bes Syftems I und bamit, ba Spftem II fofort hingeschrieben werden fann, zu allen "ausgezeichneten" Stellungen überhaupt tommen. Man braucht nicht einmal alle Kombinationen der Rahlen 1, 2, .. 7 zu je zweien

Ebenso wie entsprechend in dem oben betrachteten Unalogon des Skats die Spielordnung eine solche war, daß irgend zwei Mitglieder jedens in einem Abend der Woche, aber auch nicht öfter, zusammen spielen.

zu wählen, sondern kann das Versahren entsprechend abkürzen; wir wollen dies jedoch nur andeuten, indem wir darauf hinweisen, daß, wenn wir, wie oben von 3, 5, jetzt von 3, 6 ausgehen würden, wir als dritte Zahl natürlich 5 finden, also zu derselben "ausgezeichneten" Stellung 3, 6, 5, die wir bereits gebildet hatten, kommen würden, so daß wir also, ohne eine Einduße zu erleiden, die Kombination 3, 6 ganz ignorieren dürsen, nachdem eine "ausgezeichnete" Stellung mit 3 und 6, nämlich 3, 5, 6, schon gefunden war. Jedensalls erschöpfen wir durch ein solches Versahren die Gesamtheit aller Stellungen des Systems I leicht und erkennen so, daß es außerhalb der Stellungen von System I und II einschließlich 0, 0, 0 keine weitere Stellung geben kann, die die verlangte Eigenschaft der "ausgezeichneten" Stellungen besitzt.

Aus dem Vorhergehenden erhellt nun weiter leicht, wie wir eine "gewöhnliche" Stellung in eine "ausgezeichnete" überzuführen haben. Wenn die Stellung, um die es sich handelt, "gewöhnlich" sein soll, so wird mindestens eine der Grundzahlen 4, 2, 1 ein= oder dreimal vorkommen; denn andernfalls wäre die Stellung ja bereits "ausgeszeichnet". Wir sehen uns also hieraushin jedesmal die Grundzahlen 4, 2, 1 von links nach rechts an. Beispielsweise in unserem oben

(S. 57) an zweiter Stelle betrachteten Spezialfall

$$3 = 2 + 1$$

 $6 = 4 + 2$
 $7 = 4 + 2 + 1$

kommt zunächst die Grundzahl 4 zweimal vor. Daran darf also nichts geändert werden. Sodann kommt jedoch die Grundzahl 2 dreimal vor, die Grundzahl 1 dagegen wieder zweimal; es ist also nur eine 2 zu beseitigen. Man verringert somit entweder den ersten Hausen von 3 auf 1 oder den zweiten von 6 auf 4 oder den dritten von 7 auf 5. In jedem Falle fällt eine 2 fort. Genau dieselben drei Möglichkeiten hatten wir schon oden (S. 55/56) für diesen Fall, und zwar lediglich auf Grund der Betrachtung des Systems 1, angegeben. — Wir nehmen auch das erste der odigen (S. 57) Beispiele vor: 1

$$2 = 2$$
 $4 = 4$

Die erste Grundzahl, bei der die Bedingung für die "ausgezeichnete" Stellung nicht erfüllt ist, ist die nur einmal vorkommende 4; man wird also diese, da auch die Grundzahlen 2 und 1 nur je einmal vorkommen,

ersetzen müssen durch 2 + 1. Alsdann kommt die 4 gar nicht mehr und die 2 und 1 je zweimal vor. Praktisch bebeutet dies: der Haufen 4 wird auf 3 verringert, und man gelangt so zu der "ausgezeichneten" Stellung 1, 2, 3. In dem Falle dieses Beispiels gibt es nur diese eine Möglichkeit, zu einer "ausgezeichneten" Stellung zu gelangen; denn es darf nur verringert, nicht hinzugesügt, und es darf in einem Zuge auch nur ein Haufen, nicht etwa mehrere zugleich, verringert werden. Deshalb mußte die größte nur einmal vorkommende Grundsahl, nämlich 4, ganz beseitigt und zu den anderen nur einmal vorkommenden, nämlich 2 und 1, je eine gleiche hinzugesügt werden. Man erkennt so leicht, daß die Möglichkeit der Überführung einer "gewöhnslichen" in eine "ausgezeichnete" Stellung siets vorhanden sein muß1), womit die im Beweise des Satzes 2 oben (S. 56, Ende des ersten Absatzes) gebliebene Lücke ausgefüllt ist.

§ 3. Das prattifche Spiel.

Aus den vorstehenden Erörterungen ergeben sich für das praktische Spiel nun folgende im wesentlichen schon am Ende von § 1 (S. 53) antizipierte Konsequenzen: Da die "gewöhnlichen" Stellungen sehr viel zahlreicher sind als die "ausgezeichneten", so wird die willkürlich²) geswählte Anfangsstellung zumeist eine "gewöhnliche" sein. Der beginnende Spieler A wird diese dann durch seinen Zug in eine "ausgezeichnete" umwandeln; der zweite Spieler B kann aus dieser "ausgezeichneten" Stellung jedoch nur wieder eine "gewöhnliche" machen, die alsdann von A wieder in eine "ausgezeichnete" übergeführt wird. A schreitet so von einer "ausgezeichneten" Stellung zu einer anderen fort und gewinnt schließlich³). Ist also die willkürlich gewählte Anfangss

ren Grundzahlen (i. Sat 1, S. 37).
2) Die Bestimmung der Ansangsstellung werden die Spieler, etwa versmittelst des Loses oder nach irgendeinem anderen Bersahren, dem Zusall—
der auch einer am Spiel unbeteiligten und der Spieltheorie unkundigen

itten Berfon überlaffen.

¹⁾ Das Berfahren, die größte ein- oder dreimal vorkommende Grundsahl einmal zu jubtrahieren und dafür alle nachfolgenden (kleineren), ein- mal vorkommenden Grundzahlen je einmal zu addieren, ist steis aussührsbar, weil jede dieser "Grundzahlen" größer ist als die Summe aller kleineren Grundzahlen (i. Sak 1. S. 37)

³⁾ Man hat daher unsere "ausgezeichneten" Stellungen als diesenigen, berzustellen jeder Spieler bestrebt sein muß, die "richtigen" und die öhnlichen" die "unrichtigen" genannt.

stellung "gewöhnlich", was, wie gesagt, zumeift ber Fall sein wird. io gewinnt bei richtigem Spiel ber Anziehende; ift die Anfangsstellung eine "ausgezeichnete", so gewinnt bei richtigem Spiel ber Nachziehende.

Die Art, wie fich hiernach das Spiel gestaltet, mag auch noch burch ein Beispiel veranschaulicht werden, wobei wir die Buge numerieren und bei jedem Spieler diejenige Stellung angeben, die er burch ben

betreffenden Aug herstellt:

A muß jest, um richtig ju spielen, den letten Stein bes erften Saufens nehmen und ichafft fo eine "ausgezeichnete" Stellung mit nur zwei und zwar gleichen Saufen (Suftem II) alfo:

A nimmt jest ftets ebenso viele Steine von dem anderen (größeren) Haufen, damit die Gleichheit ber beiden Haufen wiederhergestellt wird, also:

4) 0, 2, 2 — etwa 0, 1, 2 5) 0, 1, 1 — = 0, 1, 0 6) 0, 0, 0.

Selbstverftändlich ift man feineswegs an die Maximalzahl 7 für bie Objette bes einzelnen Saufens gebunden, vielmehr hatten wir biefe nur aus Bequemlichkeitsgrunden vorläufig angenommen. Der Leser wird auch, wenn er darüber hinausgehen will, das Sustem ber "ausgezeichneten" Stellungen nach ben Ausführungen bes § 2 leicht selbst erweitern konnen. Enthält z. B. ein Saufen 7, ber zweite 9 Steine, so werben wir biefe Stellung zu einer "ausgezeichneten" erganzen, indem wir 7 und 9 in den Grundzahlen darftellen, mobei zu 1, 2 und 4 jest als nächste Grundzahl 8 hinzutritt. Wir erhalten fo:

$$7 = 4 + 2 + 1 \\
9 = 8 + 1.$$

Die britte Zahl muß also sein: 8+4+2=14 und die "ausgezeichnete" Stellung ift mithin 7, 9, 14. Will man fo beim Spiel beispielsweise bis zu 15 Steinen einschließlich geben, so erhalt man als Erweiterung bes früheren Syftems I das folgende:

| 1, 2, 3 1, 4, 5 1, 6, 7 | 2, | 4, 6 5, 7 8, 10 | 3, | 4, 7 5, 6 8, 11 | 4, | 8, 12 9, 13 10, 14 |
|-------------------------------|--------|-----------------------|--------|-----------------------|---------|--------------------------|
| 1, 8, 9 | 2, | 9, 11 | 3, | 9, 10 | | 11, 15 |
| 1, 10, 11 | | 12, 14 | | 12, 15 | | |
| 1, 12, 13 | 2, | 13, 15 | 3, | 13, 14 | | |
| 1, 14, 15 | 0 40 | • | 0 4. | _ | 0.45 | |
| 5, | | | 8, 14 | | 8, 15 | |
| | 9, 12 | | 9, 15 | | 9, 14 | |
| | 10, 15 | | 10, 12 | | 10, 13 | |
| ο, | 11, 14 | 0, | 11, 13 | ι, | 11, 12. | |

Hierzu kommt bann natürlich wieder noch bas Shsiem aller der Stellungen mit nur noch zwei und zwar einander gleichen Haufen.

Das Spiel kann auch mit mehr als 3, ja beliebig vielen Haufen gespielt werden, doch soll darauf hier nicht eingegangen werden, obwohl die Theorie des Spiels sich alsdann nur unwesentlich ändert.
— Man kann auch festsetzen, daß derzenige, der den letzten Stein nehmen muß, als Verlierer gilt. Anch für diese Spielregel bleibt die obige Theorie in der Hauptsache bestehen; immerhin tritt eine kleine Erschwerung ein, so daß wir deshalb auf diese Variante unseres Spiels nicht näher eingehen, obwohl sie die verbreitetere sein soll.

Frage 14: Ein Saufen enthält 7, ein zweiter 25 Steine; wie viele muß ber britte enthalten, wenn die Stellung "ausgezeichnet"

fein foll?

Frage 15: Wer gewinnt bei ber Anfangsstellung 3, 17, 18 bei richtigem Spiel?

Frage 16: Liegt nur ein Haufen, und zwar von 25 Steinen, vor und wird die Spielregel dahin abgeändert, daß jeder der Spielenden mindestens einen und höchstens 4 Steine mit jedem Zuge sortnimmt, wer kann alsdann den Sieg erzwingen?

Rapitel VII. Der Rösselsprung.

§ 1. Definition. Gefdichte. Borbemertungen.

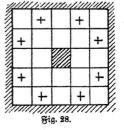
Das gewöhnliche Schachbrett weist bekanntlich 64 Felber auf und sorbert zum Spiel 32 Figuren. Die Zahl der Figuren würde also rade ausreichen, um alle Felber der einen Bretthälfte zu besehen.

Verschiebene Schachautoren des Mittelalters machen von diesem Umstande Gebrauch, um folgende Aufgabe zu stellen: Man denke sich die eine Hälfte des Brettes mit den Figuren in beliediger Ordnung vollbeset und schlage nun mit einem der Springer in besiediger, aber ununterbrochener Reihenfolge alle Figuren fort. Bekanntlich "schlägt" man im Schach eine Figur mit einer zweiten, wenn man die letztere auf das Feld der ersteren bringt. Der betreffende Springer, der alle Figuren sukzessiede schlägen soll und selbst auf einem der 32 Felder steht, hat also die Ausgabe, von seinem Felde aus hintereinander auf alle 31 anderen Felder, und zwar auf jedes nur einmal, zu springen und dabei Felder der anderen Bretthälfte nicht zu betreten.

Hieraus hat sich nun die weitere Ausgabe entwickelt, nicht nur das halbe, sondern das ganze Schachbrett in beliediger, aber ununterbrochener folge der 64 felder mit dem Springer zu durchlausen, eine Ausgabe, die heute unter dem Namen "Rösselsprung" allgemein bekannt ist und in dem Kätselrepertoire zahlreicher Familienjournale einen ständigen Plat einnimmt, die aber um die Mitte des 18. Jahrshunderts noch wenig bekannt gewesen sein muß, da Leonhard Euler, der große Mathematiker, von ihr dis dahin noch nicht gehört hatte, als sie ihm eines Tages in einer Gesellschaft entgegentrat. Allerdings muß die Ausgabe dalb darauf und vielleicht zum Teil infolge der Abhandlung, die Euler nun hierüber versaßte, weite Berbreitung gestunden haben, so daß beispielsweise ein jüngerer Zeitgenosse Eulers, von Kempelen (1734—1804), durch seinen berühmten Schachautomaten bereits Kösselsvrünge ausstühren ließ.

Ein "Springerzug" besteht bekanntlich darin, daß die Figur von ihrem Felde nach einer der beiden Seiten um zwei Felder in horizontaler und dann von hier um eins in vertikaler Richtung resp. zuserst um zwei in vertikaler und dann um eins in horizontaler Richtung

fortschreitet. Bon zwei Felbern, zwischen benen ein Übergang vermittels eines solchen Sprinsgerzuges möglich ist, sagt man: "sie rösseln sich". Die Maximalzahl der mit einem gegebenen Felbe sich rösselnden Felber ist offenbar 8, wie Fig. 28 darstellt, wenn wir unter dem schraffierten Feld das Feld des Springers verstehen, und die 8 Felder, die sich mit dem schraffierten Felde "rösseln", durch Kreuze bezeichnen.



Die ganze Figur stellt natürlich nur einen Teil des ganzen, 64-seldrigen Schachbretts dar. Würden wir den Springer mehr nach dem Rande des Brettes zu ausstellen, so würde sein Feld sich eventuell nur mit 6, 4 oder 3 und, wenn wir ihn auf einem Ecfeld ausstellten, gar nur mit 2 anderen Feldern rösseln. — Wir haben in unserer Figur den auf dem Schachbrett üblichen Unterschied zwischen schwarzen und weißen Feldern nicht gemacht und werden auch in den weiteren Figuren hiervon absehen; der Leser erkennt jedoch auch so, daß, wenn unser in Fig. 28 schraffiertes Feld auf dem Schachbrett etwa schwarz ist, alle 8 Felder, die sich damit rösseln, weiß sind und umgekehrt. Der Springer wechselt also mit jedem Juge die Farbe des Feldes: steht er jetzt auf einem weißen Felde, so gelangt er durch den nächsten Zug, den er tut, sicher auf ein schwarzes, von dort wieder auf ein weißes usw.

Das erste Feld eines Kösselsprungs nennen wir "Anfangs-" ober "Ausgangsselb", das letzte "Schlußselb", beide gemeinsam die "Endselber". Kösseln sich Ausgangs- und Schlußseld, so daß man also von dem Schlußseld durch einen Springerzug wieder zu dem Ausgangsfeld zurückehren kann, so nennt man den Kösselsprung "gesichlossen", anderenfalls "ungeschlossen" oder "offen".

§ 2. Beispiele von Röffelsprüngen.

Die Anzahl aller überhaupt möglichen verschiedenen Rösselsprünge ist bisher nicht ermittelt; jedenfalls ist sie aber ganz außerordentlich groß. Bir können hier natürlich nur einzelne wenige Beispiele hers ausgreifen, und zwar wollen wir mit dem ersten Beispiel, das wir

| ***** | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|-----|----|-----|
| 37 | 62 | 43 | 56 | 35 | 60 | 42 | 50 |
| 44 | 55 | 36 | 61 | 42 | 49 | 34 | 5,9 |
| 63 | 38 | 53 | 46 | 57 | 40 | 51 | 48 |
| 54 | 45 | 64 | 39 | 52 | 47 | 58 | 33 |
| 1 | 26 | 15 | 20 | 7 | 3,2 | 13 | 22 |
| 16 | 19 | 8 | 25 | 14 | 21 | 6 | 31 |
| 27 | 2 | 17 | 10 | 29 | 4 | 23 | 12 |
| 18 | 9 | 28 | 3 | 24 | 11 | 30 | 5 |
| | | | ~ | | | | |

Fig. 29.

geben, der im vorigen Paragrasphen angegebenen historischen Entwicklung unseres Problems insofern Rechnung tragen, als wir sordern, daß bei unserem Rösselsprung zusächt die eine Bretthälste für sich allein ganz abgelaufen werde und dann erst die andere an die Reihe komme. Ein solcher "zweiteiliger" Rösselsprung, wie man sagt, ist der von Euler herrührende der Fig. 29. Die Felder werden dabei

in der Reihenfolge vom Springer durchlaufen, wie die hineingeschriesbenen Zahlen dies angeben, also zunächst die ganze untere Bretthälfte und dann erst die obere.

Unser Rösselsprung ist übrigens auch "geschlossen", b. h. ermöglicht einen Übergang von dem Schlußseld zum Ausgangsseld zurück, da die Felder 64 und 1 sich rösseln. Mit der Existenz eines geschlossen Rösselsprungs ist zugleich der Nachweis erbracht, daß auch dei beliebigem Ausgangsseld stets ein Rösselsprung, und zwar sogar ein geschlossener, existiert. Um z. B. einen solchen mit 19 als Ansangsseld zu erhalten, braucht man ja in Fig. 29 nur die Felder 19—64 in alter Weise zu durchlausen, von 64 zu 1 zu gehen und dann die Felder 1—19 wieder in alter Weise zu durchlausen. Es ist damit sogar gezeigt, daß es dei beliebigem Ausgangsseld sogar mindestens 2 Rösselsprünge gibt, da jeder geschlossen Reihensolge gestattet, z. B. unser ursprünglicher (Fig. 29) neben der Durchlausung im angegebenen Sinne (1, 2, 3 ... 64, 1) auch die in umgekehrtein Sinne (1, 64, 63 ... 2, 1).

Die Diagramme der weitaus meisten Kösselprünge bieten natürlich ein durchaus unregelmäßiges Aussehen, und eine vollständige Symmetrie ist aus Gründen, die in der Ratur der Ausgabe liegen, überhaupt nicht zu erreichen. Die Kösselsprungkomponisten haben jedoch vielsach auch den ästhetischen Kücksichten soweit wie möglich Rechnung getragen und sind hierbei zu hübschen Kesultaten gelangt. Einige der bemerkenswertesten Beispiele dieser Urt geben die umstehenden Figuren 30—35 wieder, von denen Fig. 30 ein Kreuz, Fig. 31 ein N (Napoléon), Fig. 32 ein viersaches W (Wij Willen Wilhelmus Wederom), Fig. 33 ein doppeltes V (Vivat Victoria) im Wappen sührt, während Fig. 34 als Ganzes eine Urt Base darstellt und Fig. 35 im Innern eine Urt Blume und auch sonst schwenetzie zeigt. Alle diese Kösselsprünge sind "geschlossen", nur der letzte ist "offen".

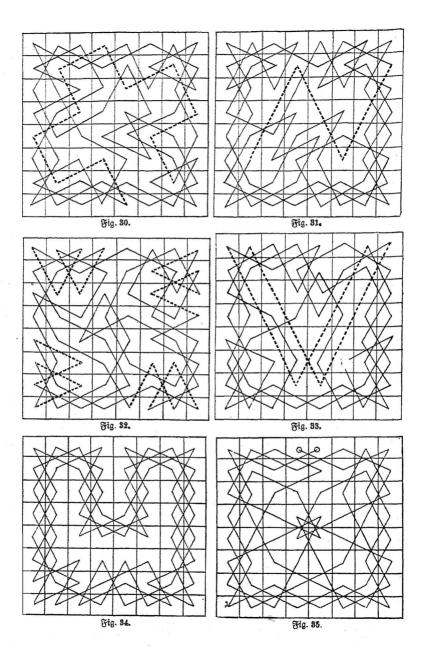
§ 3. Ginige Methoden zur Bildung bon Röffelfprüngen.

I.

Gine für praktische Zwecke sehr geeignete Vorschrift zur Bildung

von Röffelsprüngen ift die folgende:

"Bei jedem Springerzuge mähle man unter den verschies denen Feldern, die durch diesen Zug überhaupt zu erreis Mus 170: Abrens, Math. Spiele 4 Aufl.



den find, basjenige, von bem am wenigften Springerguge nach unbesetten Felbern hin noch möglich find, ba hier die Gefahr, das betreffende Feld nicht wieder zu erreichen und es fomit gang auszulaffen, verhältnismäßig am größten ift. während natürlich diejenigen Felber, die noch mit einer arößeren Bahl von freien Feldern fich röffeln, eher von einem biefer aus fpater noch erreicht werben fonnen. Stehen hiernach mehrere Felder (mit einer gleichen Minbeftsahl von freien Ausgängen) zur Wahl, so wähle man unter ihnen beliebig."

Die praktische Brauchbarkeit diefer Regel ift so groß, daß fie felbst bei ganz willfürlich angefangenen und schon ziemlich weit ohne Beachtung ber Regel fortgesehten Röffelsprungen noch jum Ziele führt. Es moge 3. B. der Röffelsprung über 40 Felder bereits willfürlich und mehrfach im Widerspruch zu unserer Regel so, wie Fig. 36 angibt, geführt sein; die Beachtung unserer Regel für die weitere Fortsetzung liefert uns alsdann bennoch eine Bervollständigung bes Röffel-

iprungs, wie die umstehende Rig. 37 bies angibt.

Die Art, wie der Röffelsprung der Fig. 37 aus Fig. 36 unter Anwendung unserer Regel entstanden ift, mag noch durch folgende Ausführungen näher erläutert werden, wobei wir die Felder des Schachbretts der Einfachheit wegen mit den Rablen der Rig, 37 bezeichnen

wollen: Bon Feld 40, bem Endpunkt unferer anfäng: lichen planlofen Wanderung (Fig. 36), find außer bem Feld 41 noch folgende bis= her leer gebliebene Felber erreichbar: 43, 45, 59 und 49. Bon biefen befitt bas Felb 43 noch brei offene Ausgänge, nämlich nach 42, 44 und 60; Feld 45 hat gleichfalls brei folcher Ausgänge, nämlich nach 44, 58 und 46, und ebenfoviel Aus= gange besitt auch jedes ber Felder 59 und 49. Dagegen

| , | 21 | 34 | 9 | | 19 | 32 | 7 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 35 | 10 | | 20 | 33 | 8 | | 18 |
| 22 | | - | | | | 6 | 31 |
| 11 | 36 | | 9 | | | 17 | |
| | 23 | | | 40 | | 30 | 5 |
| 37 | 12 | 25 | | 27 | | | 16 |
| 24 | | 2 | 39 | 14 | | 4 | 29 |
| 1 | 38 | 13 | 26 | 3 | 28 | 15 | |

| 54 | 21 | 34 | 9 | 58 | 19 | 32 | 7 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 35 | 10 | 55 | 20 | 33 | 8 | 57 | 18 |
| 22 | 53 | 64 | 59 | 56 | 45 | 6 | 31 |
| 11 | 36 | 49 | 46 | 63 | 60 | 17 | 44 |
| | | | 67 | | | | |
| 37 | 12 | 25 | 48 | 27 | 62 | 43 | 16 |
| 24 | 51 | 2 | 39 | 14 | 41 | 4 | 29 |
| | | | 26 | | | | |
| | | | | | | | |

Fig. 37.

hat Keld 41 nur noch zwei offene Ausgänge, nämlich nach 42 und 48. Wir er= halten also in unzweideutiger Beise 41 als basienige aller in Betracht kommenden Felder, das am wenigsten freie Ausgange besitt, und müssen daher nach unserer Regel von 40 auf 41 fprin= gen. - Für ben nächsten Rug kommen in Frage die Felder 42 und 48. Bon diefen hat das zweite jest noch vier freie Ausgange, namlich nach 47, 63, 49 und 51;

dagegen hat 42 nur einen Ausgang, nämlich nach 43. Wir müssen also unbedingt 42 wählen. Würden wir dies nicht tun, sondern von 41 zu 48 gehen so könnten wir späterhin zu 42 nur noch von 43 aus gelangen, aber 42 nicht mehr verlassen. Feld 42 würde also entweder ganz ausfallen oder es könnte höchstens noch Schlußfeld des Rösselsprungs werden. — Von 43 aus kann man zu 44 und 60 gelangen, und zwar haben diese beiden Felder je drei freie Aussänge; man kann also der Regel gemäß zwischen 44 und 60 beliebig wählen. Entscheidet man sich, wie wir tun wollen, für 44, so sührt die weitere Wanderung notwendig zu Feld 45, da dieses nur zwei freie Ausgänge hat, während die daneben zur Wahl stehenden Felder 47 und 57 deren je drei besitzen. In dieser Weise setzt sich das Versahren fort.

Frage 17: Gehe von dem linken der beiden Endfelder der Fig. 35 aus, mähle auch die nächsten 36 Felder ebenso wie in dieser Figur und setze die Wanderung von da ab nach der eben besprochenen Regel fort!

II.

Während die soeben angegebene Methode, so wertvoll sie für Bersvollständigung bereits angesangener Kösselsprünge ist, der strengen theoretischen Begründung entbehrt und daher auch nicht notwendig

zum Biele zu führen braucht. wenn bies im allgemeinen auch ber Fall sein wird, mögen jest noch zwei an= dere Methoden besprochen werden, die sich zwar nicht einem beliebigen Anfana anhaffen, dafür aber die Bildung eines Röffel= sprungs von Anfang an in recht übersichtlicher Weise lehren. Bei ber einen De= thobe benkt man sich bas Schachbrett geteilt in ein inneres Quabrat von 16 und ein Randgebiet von

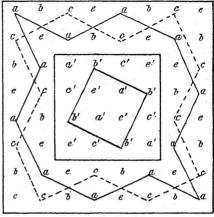


Fig. 38.

48 Felbern (s. Fig. 38), und weiter die Felber jedes dieser 2 Teile wieder in 4 Klassen, und zwar so, daß sich die Felber berselben Klasse stehe sintereinander mit dem Springer durchlausen lassen. In Fig. 38 ist diese Einteilung so veranschaulicht, daß die Felber dersselben Klasse dieselbe Bezeichnung tragen und sür einige Klassen die betreffenden Ketten von Springerzügen gezeichnet sind. Wir haben im ganzen 8 Ketten von Springerzügen: 4 innere (wir nennen sie kurz: a', b', c', e') von je 4 Felbern und 4 äußere (a, b, c, e) von je 12 Felbern.

Die Methode besteht nun barin, die 8 Ketten aneinsanberzureihen in der Weise, daß immer eine innere Kette mit einer äußeren abwechselt, wobei alle Folgen zulässig sind außer solchen von gleichen Buchstaben, also außer aa', bb', cc', ee', zwischen benen eben ein Übergang nicht möglich ift. So erhält man einen brauchbaren Rösselsprung beispielsweise aus dem Schema ae'cb'ea'be', nämlich den umstehend in Fig. 39 angegebenen.

Bei der eben besprochenen Methode faßten wir die 16 Felder des inneren Quadrats zu Gruppen von je 4 oder "Quadrupeln", wie wir sagen wollen, zusammen. Zwei dieser Quadrupel bildeten die Figur eines Quadrats (b' und c'), die beiden anderen (a' und e') die eines Rhombus. Diese selbe Einteilung wollen wir nun für das ganze Schachbrett durchführen, indem wir dieses zunächst in 4 gleiche

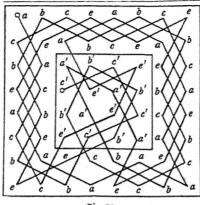


Fig. 39.

Teile (Quadranten), jeden aus 16 Feldern bestehend, teilen und darauf in jedem dieser Quadranten die Felder zu Quadrupeln zusammensfassen. Die 4 Felder, die zu demselben Quadrupel gehören, sollen dieselbe Bezeichnung erhalten, z. B. alle vier ein a oder ein C oder ein E'usw. (s. Fig. 40). Die entsprechend gelegenen Quadrupel in den 4 Quadranten mögen durch bieselbe Buchstadenart bezeichsnet, jedoch untereinander durch

kleine und große Buchstaben und Strickelung dieser unterschieden werden, also z. B. als A, a, A', a'. Dabei mögen die Quadrupel, die die Figur eines Khombus bilben, durch Vokale (A und E), die von der Figur eines Quadrats durch Konsonanten (B und C) bezeichenet werden.

Man kann nun die Quadrupel desselben Buchstabens aneinander reihen. Zeichnen wir z. B. die 4 Rhomben A, a, A', a', so sehen wir, daß wir diese zu einem zusammenhängenden Zuge verbinden

| | | | | 1 | | | |
|----|----|----|----|----|------------|------------|------------|
| A | В | C | E | a | ъ | c | e |
| C | E | A | В | с | e | a | ъ |
| В | 1 | E | С | ь | a | e | c |
| E | C | В | A | e | c | ъ | a |
| a' | ъ' | c' | e' | A' | B' | C" | E' |
| c' | e' | a' | ъ′ | C' | B ' | A' | <i>B</i> ′ |
| ъ′ | a' | e' | c' | В' | A' | Æ' | C' |
| e' | c' | ъ' | a' | E' | C' | <i>B</i> ' | A' |

Fig. 40.

nhängenden Zuge verbinden fönnen, indem wir in allen 4 Rhomben je eine Seite fortnehmen und durch einen Berbindungsspringerzug ersetzen, wobei die 4 fortsgenommenen Seiten einsander parallel sind. Für die fortzunehmende Seite können offenbar in jedem Rhombus nur 2 in Betracht kommen, nämlich die nach den benachbarten Duadransten zu liegenden, und man erhält so die 4 Duadrupel A, a, A', a' auf zwei Arten

zu einem "Zuge" vereinigt, wie Fig. 41 dies angibt.

Wir bekommen alfo zwei Buge A, wie wir furg fagen wollen, zwei Züge B, zwei C und zwei E. Die Ruge A und E - wir wollen fie .. Bofalzüge" nennen - seten sich aus Rhomben zusammen, die Buge B und C, bie ,Ronso= nantenzüge", aus Quadraten. Es handelt fich jest, um einen vollständigen Rof= feliprung aufammenau= feben, nur noch barum. 4 Buge, nämlich je einen bon A, bon B, bon C unb von E, aneinanderzurei= hen. Dabei ift nur gu beachten, bag man bon einem Botalzug zu einem anderen Bofalzug, alfo bon A zu E, nicht über= geben fann und ebenfo= wenig bon einem Ronfo= nantengug zu einem an= beren folden; benn, wie der Leser aus Fig. 40 sofort erfieht, röffelt fein Feld A. a.

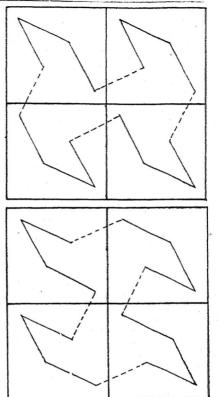
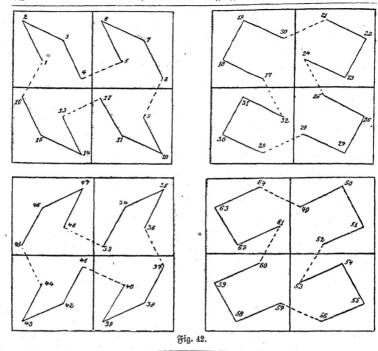


Fig. 41.

A', a' sich mit einem Felbe E, e, E', e', und das Entsprechende gilt für die durch Konsonanten bezeichneten Felder. Dagegen kann man von einem Bokalzug zu einem Konsonantenzug überspringen, also die 4 Züge von je 16 Feldern etwa in der Reihenkolge ABEC anseinanderreihen, wodurch man einen vollständigen Kösselsprung erhält, wie die umstehende Fig. 42 für diesen Fall durch die hinzugesetzten Zahlen angibt.



Natürlich lassen sich auch Rösselsprünge für andere quadratische ober rechteckige ober andersartig gesormte Bretter angeben, wenn dies auch nicht unter allen Umständen möglich ist. Auf diese Fragen kann hier jedoch nicht näher eingegangen werden, und ebensowenig auf die Rösselsprünge in dreidimensionalen Gebieten ("knbische Rösselsprünge").

§ 4. Magifche Röffelfprünge.

Eine besonders kunstvolle Form der Kösselsprünge bilden diejenisgen, bei denen die Zissern, welche die Reihenfolge der Felder angeben, in jeder horizontalen und in jeder vertikalen Reihe eine konstante Summe ergeben. Solche Rösselsprünge, die danach also die Hauptseigenschaft der im nächsten Kapitel (VIII) zu besprechenden "magischen Quadrate" ausweisen und daher "magische" resp. "semimagische"

Rösselsprünge genannt werben¹), sind von verschiedenen Liebhabern konstruiert. — Soll, wie gesagt, die Summe in allen horizontalen und vertikalen Reihen konstant sein, so ergibt sich für sie nach einer leichten Rechnung der Wert 260.

Dernebenstehende (Fig. 43), bon dem russischen Schachtheoretiker E. F. von Jaenisch herrührende Kösselsprung ist besonders kunstvoll: er besitzt nicht nur die geforderte Eigensichaft, sondern ist auch ges

| | | | | | | | | • |
|-----|-----|-----|-------------|------------|-----|-----|-----|-----|
| 50 | 11 | 24 | 63 | 14 | 37 | 26 | 35 | 260 |
| 23 | 62 | 51 | 12 | 25 | 34 | 15 | 38 | 260 |
| 10- | 49 | 64 | 21 | 40 | 13 | 36 | 27 | 260 |
| 61 | 22 | 9 | 52 | 33 | 28 | 39 | 16 | 260 |
| 48 | 7 | 60 | 1 | 20 | 41 | 54 | 29 | 260 |
| 59 | 4 | 45 | 8 | 53 | 32 | 17 | 42 | 260 |
| 6 | 47 | 2 | 57 | 44 | 19 | 30 | 55 | 260 |
| 3 | 58 | 5 | 46 | 31 | 56 | 43 | 18 | 260 |
| 260 | 260 | 260 | 260 Fig. | 260 43. | 260 | 260 | 260 | 1 |

jchlossen und zubem symmetrisch, da die erste Hälfte (1—32) durch Dreshung des Bretts um 180° in die zweite (33—64) übergeht; außerdem läßt er sich in zwei geschlossene halbe Rösselsprünge von je 32 Felsbern zerlegen, da 1 und 32 einerseits und 33 und 64 anderseits sich rösseln.

Kapitel VIII.

Magifche Quadrate.

§ 1. Ginleitung.

Auf seinem bekannten Kupserstich, Melencolia", dem Titelbilb unsseres Bändchens, hat Albrecht Dürer, selbst ein bedeutender Mathematiker und Verfasser eines geometrischen Verkes, die allegorische Figur der mathematischetechnischen Forschung, umgeben von stereomestrischen Körpern (Rugel, Volheder) und allerlei Werkzeugen zum Messen, Beichnen usw., in einer augenblicklichen Anwandlung dumpsen, melancholischen Hindrittens und Grübelns dargestellt. Neben der durch Polheder und Augel verkörperten Geometria sehlt auch deren Schwester, die Arithmetica, nicht. Erblicken wir doch zu häupten

¹⁾ Sie sind, im Sinne bes nächsten Kapitels gespochen, nicht vollkommen "magisch", ba ihre Diagonalreihen versagen. Bollkommen magische Rösselsprünge scheinen überhaupt nicht möglich zu sein und konnten bisher jedensalls trop vielsacher Bemühungen nicht hergestellt werden.

der weiblichen Gestalt ein Zahlenquadrat, das der besseren Deutlichsteit halber hier nochmals, in Fig. 44, wiedergegeben sei. Es weist in seinen 16 Zellen die Zahlen von 1 bis 16 auf, von denen wir die beiden Mittelzahlen der untersten Zeile hier in Fettbruck wiederzgeben, da sie zugleich das Jahr, dem der Lupferstich angehört, 1514, nennen. Die Anordnung der 16 Zahlen in dem Quadrat ist nun

| 16 | 3 | 2 | 13 |
|----|----|----|----|
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Fig. 44.

eine solche, daß, wenn wir die Zahlen irgendeiner Horizontalreihe oder "Zeile" — z. B. der britten: 9, 6, 7, 12 — zusammenzählen, wir stets die Summe 34 erhalten. Dieselbe Summe bekommen wir aber auch, wenn wir die Zahlen irgendeiner Bertikalreihe oder "Spalte" — z. B. die der ersten links: 16, 5, 9, 4 — addieren. Ja, selbst die beiden Diagonalreihen, nämlich 16, 10, 7, 1 und ebenso 13, 11,

6, 4, ergeben die nämliche Summe 34. — Man bezeichnet solche Zahlenquadrate, die eine konstante Summe in allen horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihen ergeben, als "magische Quadrate".1) Die in den angegebenen Reihen übereinstimmend sich ergebende Summe heißt die "Konstante" des magischen Quadrats. Sinsichtlich der in den Feldern eines folden magischen Quadrats . stehenden Bablen wollen wir hier stets voraussetzen, daß fie eine Reihe unmittelbar aufeinander folgender ganger Bahlen - in bem Dürerschen Quadrat find es 1, 2, ... 16 — bilben, und zwar soll diese Reihe, wofern nichts anderes gesagt ist, als mit 1 beginnend an= genommen werden. Oft ergibt fich übrigens die betreffende "Ronftante" nicht nur in den angegebenen Reihen, sondern auch noch auf mancherlei andere Beise; so konnen wir 3. B. das Dürersche Quabrat in vier Biertelquadrate, jedes also von 4 Felbern, zerteilen, und jedes Biertel weift alsdann für fich bie Bahlensumme 34 auf; ferner ergibt das Quadrat ber 4 inneren Zahlen 34 und ebenso die 4 Edzahlen zusammen; ferner das Quadrat des Springer-Viererzugs 2) 5, 2, 12, 15 resp. 3, 8, 14, 9 oder die entsprechenden Rhomben 16, 11, 1, 6 und 13, 10, 4, 7 ufw. Man fieht, Die Gigenschaften Dieser Zahlenquadrate find so merkwürdige, daß eine zu Moftit und

2) Bgl. Kap. VII, § 3, II, insbesondere die Figuren 38, 41, 42.

¹⁾ Bgl. auch den letzten Paragraphen des vorhergehenden Kapitels: "Magilche Köffelsprünge".

Aberglauben neigende Zeit sie wohl in Verbindung mit allerlei "magischen" Künsten bringen und fie für mancherlei berartige Zwecke verwerten zu follen glauben konnte. Bon diesem Gebrauch, ber die ge: ichichtliche Erklärung für ben Ramen "magische Quabrate" gibt werden wir in § 5 noch zu sprechen haben.

\$ 2. Das neunzellige magifche Quabrat.

Das 16-zellige Dürersche Quabrat stellt noch nicht ben einfachsten Kall magischer Quadrate bar, vielmehr gibt es auch folde von 3×3=9 Zellen, während allerdings magische Quadrate von $2 \times 2 = 4$ Zellen ausgeschlossen find, wie der Lefer leicht erkennt. Wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, ein neunzelliges magiiches Quadrat zu bilben, also die Aufgabe, die Bah-Ien 1, 2 ... 9 fo in die Zellen ber Fig. 45 einzu-



Fig. 45.

pronen, daß in den angegebenen Reihen stets eine und dieselbe tonstante Summe fich ergibt. Belche Summe wird bas fein? -- fo lautet Die Vorfrage, die wir uns zunächst vorlegen. Die Antwort erhalten wir am schnellsten, wenn wir die 9 Rablen zweimal untereinander, jedoch in verschiedener Richtung, hinschreiben, also jo:

Se zwei untereinanderstehende Bahlen ergeben ftets die Summe 10. beide Reihen zusammen also 90, jede Reihe für sich daher 45. ift somit die Summe unserer 9 Bahlen; diese sollen fich nun in unserem neunzelligen Duadrat (Fig. 45) auf 3 Zeilen resp. 3 Spalten perteilen, so daß auf jede Zeile resp. Spalte als konstante Summe 15 entfällt.

Es handelt sich also darum, die 9 Zahlen 1 bis 9 so in die Felder bes Quabrats einzuordnen, dag biefes in 8 verschiedenen Reihen -3 Reilen, 3 Spalten und 2 Diagonalen — die "Konstante" 15 aufweift. Man überzeugt fich nun leicht, daß es für die Bildung ber Summe 15 aus je 3 ber Bahlen 1-9 folgende 8 Möglichkeiten, und auch nur diese 8, gibt:

In biefen 8 "Tripeln" kommt nun die Zahl 5 häufiger als irgend= eine andere Bahl, nämlich viermal, vor, und baraus folgt sofort, bağ

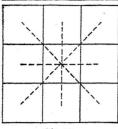


Fig. 46.

die Bahl 5 notwendig das Mittelfeld des zu bildenden magischen Quadrats einneh= men muß: benn bas Mittelfelb gehört nicht weniger als 4 solchen Reihen, die die Ronstante 15 ergeben sollen. - es find die in ber Fig. 46 markierten - an. Da nun ferner unsere 8 "Tripel" die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 je breimal, die ungeraden 1, 3, 7, 9 bagegen nur je zweimal aufweisen, so musfen die 4 Ecfelber des magischen Quadrats.

da sie 3 Reihen — einer Zeile, einer Spalte und einer Diagonale - von der Konstanten 15 angehören sollen, mit den 4 geraden Bahlen besett werden, mahrend die übrigen 4 Kelber, Die Mittelrandfelber, von den ungeraden Bahlen 1, 3, 7, 9 eingenommen werden. Denkt man sich nun etwa das Eckfeld oben links mit ber Rabl 2 beset, so muß in dem Edfeld unten rechts, damit die Diagonale die Konstante 15 ergibt, die Bahl 8 stehen. Für die beiden anderen Edfelber bleiben bann die gahlen 4 und 6. Legt man biefe fest, besetzt man also etwa das Edfeld oben rechts mit 4, so find da= mit offenbar auch die Rahlen der Mittelrandfelder bestimmt, und man bekommt so das magische Quadrat der Rig. 47.

Man erkennt so leicht, daß unsere Aufgabe 8 Lösungen besitt: Sebe ber 4 Rahlen 2, 4, 6, 8 kann bas Ecfelb oben links einnehmen, momit auch zugleich die Bahl für das Edfeld unten rechts festgelegt ift. während für die Ede oben rechts bann jedesmal noch zwei Möglich teiten bestehen. — Man tann sich aus ber Lösung Fig. 47 die übrigen 7 Lösungen auf folgende Weise hervorgebend benten: Dadurch, baß nan sich das ganze Duadrat um 90°, 180°, 270° gedreht benkt. eralt man zunächst brei weitere magische Quabrate, fo bag man alfo ibt über beren 4 im gangen verfügt. Bon diefen 4 Quabraten benen wir uns nun jedes an einer fpiegelnden Flache, die fich etwa am

| 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

Fig. 47.

unteren Rande des Quadrats befinden mag, gefpiegelt, und erhalten fo 4 weitere magische Quabrate. fo daß wir im gangen die versprochenen 8 haben. Andererseits ist damit aber auch die Bahl aller erschöpft. In der Regel pflegt man folche nur durch Drehungen ober Spiegelungen fich ergebenben Figuren nicht als wesentlich verschieben von ber Stamm=

figur anzusehen, und in diesem Sinne dürfen wir sagen, daß es nur ein

magisches Quadrat ber Bahlen 1 bis 9 gibt.

Frage 18: Un ber Billa Albani in Rom befindet fich, in Marmor hergestellt, ein magisches Quabrat von 9 × 9 Felbern, das somit die Rahlen 1 bis 81 aufweist. Welches wird die Konstante dieses magischen Quabrats fein?

§ 3. Allgemeine Methode für Bildung ungeradzelliger magifder Quabrate.

Quadrate von mehr als 4 Rellen laffen fich ftets mit den entsprechenden Bahlen so ausfüllen, daß ein magisches Quadrat entsteht, und zwar ist diese Aufgabe bei ungerader Rellenzahl wesentlich leichter als bei gerader. Wir wollen uns daher mit dem ersteren Fall näher beschäftigen und eine allgemein zur Bilbung von ungeradzelligen magischen Quadraten anwendbare Methode besprechen, wobei wir uns an ein bestimmtes Beispiel, das eines Quadrats von 5 × 5 Rellen, halten wollen. Die 25 Bahlen, die wir in die Zellen bes Quadrats ein= zuordnen haben, wollen wir zunächst in folgender Anordnung schreiben:

"Schema".

Untereinander stehen hierbei immer diejenigen Zahlen, die bei Divifion durch 5 benfelben Reft laffen: in der erften Spalte alle mit Reft 1, in der zweiten alle mit Rest 2 usw., schließlich in der letten alle mit Reft O, jedoch ift hier aus fpater erfennbaren Zweckmäßigfeitsgrunden fo geschrieben, daß 5 als Reft erscheint. In berfelben Beile fteben bagegen alle diejenigen Bahlen, die ein gleiches Bielfaches von 5 aufweisen: in der erften diejenigen ohne ein foldes Bielfaches, in der zweiten biejenigen mit einmal 5, in ber britten biejenigen mit bem Doppelten von 5. in der vierten diejenigen mit dem Dreifachen von 5, schließlich in ber letten biejenigen mit bem Bierfachen von 5. Wir werben hiernach späterhin eine weitere Erläuterung zu geben nicht nötig haben, wenn wir fury von ben "Reften" und ben "Bielfachen" unferes "Schema" fprechen.

Mis Borftufe zur Bilbung eines magischen Quadrats wollen wir uns nun zunächst einmal die folgende, fehr viel leichtere Aufgabe ftel-

Ien: Die 25 Bahlen find in die 25 Bellen fo einzureihen, daß alle Horizontalreihen (Reilen) die gleiche Summe ergeben. Diese Summe muß, wie vorwegbemerkt sei, offenbar $\frac{26 \times 25}{2 \times 5} = 65$ sein (vgl. die Berechnung auf S. 75). Unsere Teilaufgabe ift deshalb viel leichter als die Hauptaufgabe, weil über die Summen der Bertikal- und Diagonalreihen jest nichts vorgeschrieben ist und es sich also nur darum hanbelt, die 25 gahlen so auf 5 Zeilen von je 5 Pläten zu verteilen, daß fich die zwischen ben Bahlen bestehenden Größenunterschiede für bie einzelnen Zeilen gegenseitig das Gleichgewicht halten, also in jeder Beile die Summe diefelbe wird. Gine folche Berteilung erhalt man nun, wenn man aus unserer obigen Anordnung bes "Schema" immer je 5 Rahlen fo herausgreift, daß niemals zwei diefer 5 Rahlen berfelben Zeile ober Spalte bes Schema angehören. Man befommt nämlich, wenn zunächst die 5 gewählten Bahlen alle verschie= benen Spalten bes "Schema" angehören, jeden ber 5 "Refte", namlich 1, 2, 3, 4, 5, gerade einmal; die Bugehörigkeit zu den verschiebenen Zeilen bes "Schema" würde andererseits zur Folge haben, daß jedes "Bielfache" von 5: das Rullfache, Ginfache, Doppelte, Dreifache, Bierfache, gerade einmal vorkommt. Als Beispiel braucht man nur bie Bahlen ber einen Diagonalreihe bes "Schema" zu nehmen, ba biefe natür= lich alle zu verschiedenen Zeilen und Spalten bes Schema gehören, also: Alle "Bielfachen" von 5 und alle 5 "Refte" find 1 = 1

1 = 1 Alle "Bielfachen" von 5 und alle 5 "Reste" sind $7 = 1 \times 5 + 2$ in dieser Gruppe vertreten, und es lassen sich offen=

 $13 = 2 \times 5 + 3$ bar auß allen 25 Zahlen 5 solche Gruppen bilden. $19 = 3 \times 5 + 4$ In der Summe der Zahlen jeder Gruppe käme als-

25 = 4 × 5 + 5 dann jedes "Bielfache" und jeder "Reft" gerade einmal vor; die 5 Zahlen jeder Gruppe ergäben also

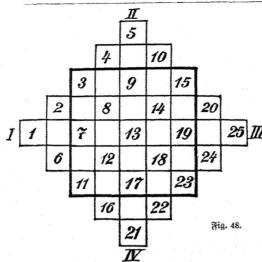
stets dieselbe Summe, nämlich die Summe aller "Bielfachen" und aller "Reste", b. h. $(1 \times 5 + 2 \times 5 + 3 \times 5 + 4 \times 5) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$; das ist aber natürlich unsere "Konstante" 65.

Eine zweite Gruppe von 5 folden Bahlen mare z. B.

Auch diese Gruppe weist alle "Vielsachen" und alle "Reste" auf ober, mit anderen Worten: von den 5 Zahlen der Gruppe gehören nie zwei derselben Zeile oder Spalte des "Schema" an. — Wir können nun leicht aus den noch übrigen 10 Zahlen 2 weitere Gruppen dieser Art bilden und erhalten so, wenn wir die Zahlen einer Gruppe immer in eine Zeile schreiben, beispielsweise solgende Anordnung unserer 25 Zahsten nach 5 Gruppen bzw. Zeilen:

13 19 25 2 8 14 20 21 3 10 12 24 16 4 6 15 18 22 5 11 9 17 23

Damit haben wir ein Quadrat erhalten, das in bezug auf die Zei-Ien der Bedingung der magischen Quabrate genügt, ftets die betreffende "Konftante" (für unseren Fall 65) zu ergeben. Daß die Bedingung in ben Zeilen erfüllt ift, folgt, wie wiederholt hervorgehoben werden mag. fofort aus ber Tatfache, bag von den in einer Reile gufammenftebenben Rahlen niemals zwei berselben Horizontalen oder Vertikalen des "Schema" angehören. In ben Spalten bagegen weift unfer Duabrat die "Konstante" natürlich nicht auf, und es wird sich dies im allaemeinen auch durch Umftellen der Bahlen jeder Zeile untereinander, tvenigstens in einfacher Beise, nicht erreichen laffen, ba wir bei Ausmabl ber Rahlen unserer 5 Gruppen ziemlich unmethobisch verfahren find. Man konnte jedoch natürlich ebenso, wie wir hier ein Quabrat gebilbet haben, bas in allen Zeilen die Konftante ergibt, ein folches bilben, bei bem bies für alle Spalten gilt, und brauchten ja übrigens Bu bem Zwecke bas obige nur um 90° zu breben. — Raber unserem ichlieklichen Ziel, bem magischen Quadrat, gelongen wir jedoch nur, wenn es uns gelingt, die 25 Zahlen so anzuordnen, daß nicht nur in jeder Beile, sondern jugleich auch in jeder Spalte alle "Refte" und alle "Bielfachen" vertreten find. Bu bem 3mede tragen wir die Bahlen bes "Schema" in ein aus einem 25-zelligen Quadrat mit 4 angesetzen "Terraffen" I—IV bestehendes Feldernet so ein, wie Fig. 48 dies veranschaulicht: Die Rahlen ber erften Zeile bes "Schema" (1, 2, 3, 4, 5) stehen in Fig. 48 in der ersten von links nach oben rechts verlaufenden schrägen Felberreihe; bann fommen entsprechend in paralleler Felberreihe die Bahlen ber zweiten Beile des "Schema" (6, 7, ... 10), und jo geht es weiter fort. Das Berfahren befteht nun barin, bag



bie Terrassen so weit in das Dua= brat hineingescho= ben werden, daß ihre Basis mit der gegenüberliegen= ben Quadratseite

zusammenfällt. Hierdurch gelangen die in den Terrassen ste= henden Zahlen in die noch leeren Felder des Quadrats und füllen dieses aus. Das entstehende Quadrat (s. Fig. 49) ift dann ein magisches.

Die Zeilen und

Spalten bes fo gebilbeten Quabrats genügen unferer Forderung beswegen, weil jede Zeile und jede Spalte des Quadrats (Fig. 49) alle "Refte" und alle "Bielfachen" aufweist. Fassen wir 3. B. in Ria. 48 die Rahlen 6, 7, 8, 9, 10 ins Auge, so gehören davon 7, 8, 9 den 3 oberften Zeilen des Quadrats der 25 Felder an, 6 kommt später bei ber Terraffenverschiebung in die bann folgen be Reile, nämlich in die vierte, während die Rahl 10 aus Terraffe II irt die lette Zeile, die fünfte, gelangt. Die Zahlen 6, 7, 8, 9, 10, die bas Gemeinsame haben, daß sie alle und sie allein in unserem "Schema" das "Einfache" von 5 enthalten, verteilen fich also auf 5 verschiedene Beilen bes fertigen Quadrats ber Fig. 49. Jede Zeile bes Quadrats erhält somit das "Einfache" von 5 gerade einmal zuerteilt. — Eben so sehen wir aus Fig. 48, daß die 5 Zahlen 6, 7, 8, 9, 10 fich auf 5 verschiedene Spalten bes Quadrats Fig. 49 verteilen (7, 8, 9 stehen in ben 3 erften, 10 gelangt in die vierte, 6 bagegen bei Berschiebung won Terraffe I in die lette Spalte). Es erhält somit auch jede Spalte das "Einfache" von 5 gerade einmal zuerteilt. — Natürlich hätten wir ebensogut auch eine andere Reihe ber Zahlen in Fig. 48 herausgreifert tonnen, 3. B. 21, 22, 23, 24, 25, also die Zahlen, die fämtlich und allein unter allen Zahlen in der Anordnung des "Schema" das "Bier=

fache" von 5 enthalten. Wir würden alsbann aus Fig. 48 erkannt haben, daß auch diese Zahlen sich über 5 verschiedene Zeilen und Spalten des Quadrats Fig. 49 verteilen, so daß jede Zeile und jede Spalte des Quadrats Fig. 49 das "Viersache" von 5 gerade einmal zuerteilt erhält. Allgemein erkennen wir so, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte unseres Quadrats jedes "Vielsache" gerade einmal vorkommt. — Was aber von den

| 3 | 16 | g | 22 | 15 |
|----|----|----|----|----|
| 20 | 8 | 21 | 14 | 2 |
| 7 | 25 | 13 | 1 | 19 |
| 24 | 12 | 5 | 18 | 6 |
| 11 | 4 | 17 | 10 | 23 |

Fig. 49.

"Vielsachen" gilt, gilt auch von den "Resten". Hätten wir z. B. in Fig. 48 die Reihe der Zahlen 2, 7, 12, 17, 22, also die Zahlen, die alle und allein den "Rest" 2 ausweisen, ins Auge gesaßt, so würden wir gesehen haben, daß sie sich gleichfalls auf die 5 verschiedenen Zeilen und die 5 verschiedenen Spalten des Quadrats Fig. 49 verteilen, so daß jede Zeile und jede Spalte den "Rest" 2 gerade einmal zuerteilt erhält. Dies gilt offenbar allgemein, d. h. nicht nur für den Rest 2, sondern für jeden Rest. Zede Zeile und jede Spalte des Quasdrats Fig. 49 weist somit sehn "Rest" und jedes "Rielsache" gerade einmal auf; die Zeilen und Spalten ergeben daher alle die gesorderte Konstante 65 als Summe.

Es bleibt zu prüfen, ob auch die beiden Diagonalen die Konftante ergeben: Die eine enthält die Jahlen 3, 8, 13, 18, 23 (j. Fig. 48) und damit alle verschiedenen "Vielfachen" je einmal. Dagegen enthält sie nicht alle "Reste", sondern immer nur den Rest 3. Nun ergibt aber die Summe aller "Reste", nämlich 1+2+3+4+5, genau daßsselbe, wie wenn die mittlere¹) Jahl, nämlich 3, sünsmal genommen wird. Diese Diagonale muß somit gleichfalls die Konstante 65 ergeben. Von der anderen Diagonale gilt mutatis mutandis daßselbe: sie enthält alle "Reste", dagegen stets daßselbe "Vielsache"; dieses ist jedoch gerade daß mittlere, so daß sich auch hier die gesorderte Summe 65 ergibt. — Daß Duadrat der Fig. 49 besitzt somit alle Eigenschaften der magischen Quadrate.

Frage 19: Bilbe nach dieser Methode ein magisches Quadrat von 49 Rellen!

¹⁾ Hierbei ist wesentlich, daß die 5 eine ungerade Zahl ist; unsere Methode ist aus diesem und anderen, übrigens leicht erkennbaren Gründen nur bei ungeradzelligen Quadraten brauchbar.

§ 4. Geradzellige Quadrate.

Die Bilbung geradzelliger magischer Quabrate ist nicht so einfach wie die der ungeradzelligen. Wir wollen uns daher hier auf ben verbaltnismäßig einfachen Unterfall beschränken, daß die Rahl ber Felber in jeder Reihe unseres Quadrates nicht bloß gerade, sondern, wie man fagt, "gerad-gerade", d. h. durch 4 teilbar, ift. Es foll fich also nur um Quadrate von 4, 8, 12, 16 ... Feldern in jeder Reihe handeln. Wir greifen als Beispiel den Fall eines Quadrats von 8 × 8 Kelbern heraus und ichreiben zunächst die Rahlen 1-64 in natürlicher Ordnung, wie Kig. 50 zeigt, in die Felder hinein. Sedem Feld refp. jeder gahl wollen wir uns alsdann ein zweites als "gegenüberliegendes" zugeordnet benten, und zwar foll, wenn z. B. bas eine Feld ber britten Reile und vierten Spalte angehört - es ift 20 -, als "gegenüberliegendes" basjenige bezeichnet werden, bas ber brittletten Reile und viertletten Spalte angehört, alfo 45. Die beiden gablen ergeben gusammen 65, und zwar ergibt sich diese Summe für jedes Baar von zwei "gegenüberliegenden" Bahlen. Tenn zwei "gegenüberliegende" Felber fteben, wenn wir alle Felder in der durch die gahlen der Fig. 50 vorgeschriebenen Reihenfolge nehmen, gleichweit von beiden Enden der Reihe ab: 20 ebensoweit von 1, wie 45 von dem anderen Ende 64. Wenn wir aber alle Zahlen in natürlicher Ordnung in eine Reihe schreiben würden, also 1, 2, 3 62, 63, 64, so würden zwei, bie gleichweit von beiden Enden abstehen, ftets zusammen 65 geben, wie wir bereits früher (S. 75) — an einem anderen Beispiel — gesehen

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----|----|----|----|----|----|-----------|----|
| | | | 12 | | | | |
| | | | 20 | | | | |
| | _ | | 28 | | | _ | |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| | | | 44 | | | | |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | <i>55</i> | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Fig. 50.

hatten, indem wir die betreffenden Zahlen zweimal, und zwar untereinander, jedoch in verschiedener Richtung, hinschrieben:

Der Zahl 1 nun liegt in Fig. 50 "gegenüber" die Zahl 64, der Zahl 10 die Zahl 55 usw.; überhaupt liegt, wenn die eine Zahl in dieser Diagonalreihe liegt, die "gegenüberliegende" auch darin. Für die andere Diagonalreihe gilt ganz dasselbe: der Jahl 8 liegt "gegenüber" 57 usw. Danach teilen sich die 8 Jahlen, die in derselben Diagonale stehen, in 4 Paare von je zwei "gegenüberliegenden". Jedes Paar gegenüberliegender Jahlen ergibt nun die Summe 65, wie wir sahen; die 8 Jahlen einer Diagonale ergeben also die Summe $4 \times 65 = 260$. Dies ist nun aber, wie der Leser leicht nachrechnet, gerade die "Konstante" des späteren magischen Quadrats. Die Diagonalen genügen somit bereits dei der natürlichen Anordnung der Jahlen, wie sie Fig. 50 gibt, der Forderung des magischen Quadrats. Dies wird der Leser auch nicht anders erwartet haben; denn, wenn wir (5. Fig. 50) die kleinste Jahl (1) und die zehntgrößte (55) usw., so müssen sich die Größenunterschiede so ausgleichen, daß wir im ganzen gerade auf den Durchschnitt, d. i. hier offenbar die "Konstante" des magischen Quadrats, kommen.

Die Zeilen und Spalten ber Fig. 50 genügen jedoch ber Forderung des magischen Quadrats keineswegs: die Rahlen der ersten Reile 3. B. ergeben eine viel zu kleine, die ber letten eine viel zu große Summe. Wir können jedoch hier leicht ausgleichend wirken; benn ebensoviel, wie der ersten Zeile an der geforderten Summe $4 \times 65 = 260$ fehlt, ebensoviel hat die lette Reile zuviel (beide Reilen zusammen geben nämlich jedenfalls $8 \times 65 = 2 \times 260$, weil sie gerade auß 8 Paaren "gegenüberliegender" Bahlen bestehen). Run beträgt ber Unterschied zwischen einer Rahl ber ersten Reile und ber gerade barunterstehenden ber letten konstant 56; ber Unterschied ber beiden ganzen Zeilen wird also ausgeglichen, wenn wir vier Rahlen der ersten Zeile mit den vier darunterstehenden der letten vertauschen, also 3. B. 1, 2, 3, 4 mit 57, 58, 59, 60 ober etwa 1, 2, 7, 8 mit 57, 58, 63, 64. Jede ber beiden Zeilen weift bann hinterher die Summe 260 auf. In gang ähnlicher Beziehung zueinander stehen nun die zweite und die vorlette Reile; auch unter ihnen beiben können wir daher in gang entsprechenber Weise eine solche Ausgleichung bewirken und erhalten dann für beide Zeilen die Konstante 260. Ebenso geht es paarweise bei den übrigen Reilen, und wir bekommen also ichlieglich ein Quadrat, das in allen 8 Reilen ber Forberung einer fonstanten Summe genügt, nicht aber in ben Spalten und im allgemeinen auch nicht mehr in ben Diagonalen, da biefe, anfänglich zwar unserer Forderung genügend (f. oben), bei den vorgenommenen Bertauschungen sich im allgemeinen geändert haben werben.

Ungeandert geblieben bei biefen Bertauschungen ift bagegen jede Spalte, als Ganges betrachtet; benn jebe Bahl blieb bei ben Bertauichungen in ihrer Spalte. Bir fonnten nun fur die Spalten gang Dieselbe Ginrichtung treffen wie soeben für die Reilen, also zunächst die erfte und lette Spalte gegeneinander ausgleichen, und fo gleichfalls bie fonftante Summe von 260 für beibe herbeiführen, ufm. Bei biefen Bertauschungen murben fich bie Beilen, als Ganges betrachtet, nicht mehr andern, da jede Rahl in ihrer Beile bliebe: unsere obige Einrichtung für die Zeilen mürde also nicht etwa wieder aufgehoben werden. - Infolge ber obigen Vertauschungen, die im Interesse ber Beilen vorgenommen murben, gelangte nun die Rahl' 1 beispielsmeife an Die Stelle 57, und infolge ber Bertauschungen, die ber Spalten wegen nötig find, rudt fie etwa von Blat 57 weiter nach 64, ist bann also im ganzen von Feld 1 gerade auf bas "gegenüberliegende" Keld 64 gewandert. Gine Verfolgung der einzelnen Rahlen bei diesen sukzessiven Umstellungen liegt jedoch nicht in unserer Absicht; es genügt uns vielmehr, an einem Beispiel zu feben, daß bei diesen Bertauschungen eine Rahl auf das dem ursprünglichen gegenüberliegende Feld gelangen fann. Anderseits miffen wir, daß es bei diesen Bertauschungen auf Folgendes antommt: Ginmal muß die Salfte ber Bahlen ber erften Zeile in die unterfte Zeile mandern und bafür aus dieser die gerade barunterstehenden in die leeren Blate der ersten Beile; dabei braucht nun nicht jede diefer ersteren Bahlen gerade in ben Blat bireft unter ihr einzuruden, sondern nur auf einen der leer werdenden Blate. Wir faben ja auch, daß 1 ohnehin infolge weiterer Umftellung an die Stelle 64 gelangen fonnte. Wir konnten alfo von vornberein bei Normierung ber Zeilen fo verfahren, bag wir zwar aus der ersten Zeile 1, 2, 7, 8 entfernen und mit 57, 58. 63, 64 vertauschen, nun aber nicht 1 gerade mit 57, 2 mit 58 usw., sondern 1 etwa mit 64, 2 mit 63, 7 mit 58, 8 mit 57, also jede Rahl mit der ihr gegenüberliegenden. Wir haben bamit bann gugleich Bertauschungen vorgenommen, die für die Ginrichtung ber Spalten bedeutsam sind. Es fragt fich hiernach: Wie ergibt sich ein einfaches Verfahren fo, daß die Salfte ber Bahlen ber ersten Zeile mit ber darunterstehenden Salfte ber letten Zeile taufcht, zugleich eine Balfte der Bahlen der zweiten Beile mit der barunterstebenben Balfte ber zweitletten Beile ufm., und ferner, bag gleichzeitig auch

für die Spalten die entsprechenden Umstellun-

gen 1) vorgenommen werden?

Diesen Effekt erzielen wir nun am einsachs sten, wenn wir die folgende Borschrift befolgen: Man teile das ganze Duadrat in 16 Teile, wie Fig. 51 dies angibt, und kann nun entweder die Zahlen aller mit a bezeichneten Gebiete oder aber die aller

| a | ъ | ь | а |
|---|---|---|---|
| b | a | a | ъ |
| ъ | a | a | ъ |
| a | ъ | b | a |
| | | | |

Fig. 51.

Gebiete b mit ben ihnen gegenüberliegenden vertausschen. Man sieht, daß so gleichzeitig jede Zeile und jede Spalte die Hälfte ihrer Zahlen mit der zugehörigen austauscht. Ferner hat der Leser gewiß bereits als sehr bedeutsam den Umstand erkannt, daß bei diesen durch Fig. 51 angezeigten Vertauschungen, bei denen immer nur gegenüberliegende Zahlen ihre Pläte wechseln, eine in einer Diagonalreihe stehende Zahl unter allen Umständen in derselben verbleibt. Die Diagonalen, die bereits in der provisorischen Anordnung der Fig. 50 die Konstante des magischen Quadrats auswiesen, bleiben also jede als Gesamtheit unverändert erhalten und genügen daher auch nach Vornahme der Zahlenumstellungen unserer Forderung. Diese ist somit in allen Zeilen, Spalten und Diagonalen erfüllt, das Quadrat also ein magisches. Es sieht für den Fall unseres Beispiels (8 × 8 Felder), wenn wir die Vertauschungen in den Gebieten a

(Fig. 51) vornehmen, so aus, wie

Fig. 52 zeigt.

Fft die Zahl der Felder jeder Reihe nicht durch 4 teilbar, so ist die gesamte Felderzahl auch nicht durch 16 teilbar, also die Einteilung des ganzen Quadrats in 16 Gebiete im Sinne der Fig. 51 nicht möglich; unsere Methode ist alsdann, also z. B. bei 10 × 10 Feldern, nicht mehr anwendbar. Wir wollen jedoch auf diesen Kall nicht

| 64 | 63 | 3 | 4 | 5 | 6 | <i>5</i> 8 | <i>57</i> |
|----|----|----|----|----|----|------------|-----------|
| 56 | 55 | 11 | 12 | 13 | 14 | 50 | 49 |
| 17 | 18 | 46 | 45 | 44 | 43 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 38 | 37 | 36 | 35 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 30 | 29 | 28 | 27 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 22 | 21 | 20 | 19 | 47 | 48 |
| 16 | 15 | 51 | 52 | 53 | 54 | 10 | 9 |
| 8 | 7 | 59 | 60 | 61 | 62 | 2 | 1 |

Fig. 52.

¹⁾ Selbstverständlich wurde hier nicht von untereinanderstehenden Zahlen, sondern von solchen in gleicher hohe zu sprechen sein.

näher eingehen, da die hier zu befolgenden Methoden weniger eins fach sind.

Frage 20: Gib ein magisches Quadrat von $12 \times 12 = 144$ Kelbern an!

§ 5. Magifde Quabrate auf Amuletten.

Wie schon am Schlusse bes § 1 angekündigt wurde, wollen wir hier noch kurz der Nachtseite der magischen Quadrate gedenken, ders jenigen, der ihr Name entsprungen ist, ihrer Verwendung im Dienste des Aberglaubens.

Sier find, zumal wenn wir in erfter Linie auf abendländische Bor= tommnisse unser Augenmerk richten, vor allem die sogenannten "Blanetensiegel" zu nennen, von denen die Aftrologie, insbesondere bes 16. und 17. Sahrhunderts, einen ausgiebigen Gebrauch gemacht hat. und auf fie wollen wir uns daher in der Sauptfache hier beschränten. 1) Bekanntlich beruht die Aftrologie, diese schon im Altertum gepflegte Afterwiffenschaft, auf bem Aberglauben, alles Geschehen auf ber Erbe, alle Schidfale ber Menschen wurden von den Sternen, ins= besondere den Planeten, die man fich als Götter vorstellte und benen man daher ja auch Götternamen beigelegt hat, bestimmt und ließen fich auch vorher aus den Sternen ablesen. Als "Blaneten" galten babei im Sinne ber vorkopernikanischen Weltanschauung biefe fieben: Mond, Merkur, Benus, Sonne, Mars, Jupiter, Saturn. Zwischen diesen 7 Planeten einerseits und ben magischen Quabraten andererseits stellte die Aftrologie nun feste Beziehungen ber: Dem Saturn, bem entferntesten ber 7 Planeten, wurde bas kleinstmögliche magische Quadrat, das der 9 Bellen, zugeordnet: es ift das Quadrat unferer Fig. 47, bas fo zur "Tabula Saturni", zur Saturnstafel, wurde. Ent» sprechend erhielt Jupiter, der nächste ber "oberen" Planeten, bas nächsteinfache magische Quabrat, bas ber 16 Bellen, und in biefer Beise ging bies fort. So entstand ein Shstem, bas uns die nachftebende tabellarische Busammenftellung veranschaulichen mag:

¹⁾ Eine eingehende Behandlung wird das Thema dieses Paragraphen, wie überhaupt die Geschichte und Theorie der magischen Quadrate, in einer Monographie ersahren, die ich z. Z. vorbereite und die vielleicht schon im nächsten Jahre (1919) erscheinen wird.

| Planet | Magisches Quadrat | | | | |
|---------|-------------------|-----------|--|--|--|
| : | Bellenzahl | Konstante | | | |
| Saturn | 3×3=9 | 15 | | | |
| Jupiter | $4 \times 4 = 16$ | 34 | | | |
| Mars | $5 \times 5 = 25$ | 65 | | | |
| Sonne | $6 \times 6 = 36$ | 111 | | | |
| Venus | $7 \times 7 = 49$ | 175 | | | |
| Merfur | 8×8=64 | 260 | | | |
| Mond | $9 \times 9 = 81$ | 369 | | | |

Diese magischen Duadrate brachte man dann auf Planetenamusetten an, denen man, je nach der Natur des betreffenden Planetengottes, die verschiedensten magischen Wirkungen zuschrieb. Unsere beiden Bilbertaseln (S. 88 u. 89) weisen einen vollständigen Sat solcher Planetenamusette, von jeder Kategorie eins, auf. Das Saturnamusett ist eine Nachbildung eines in der Wiener Münzen- und Medaillensammlung (Kunsthistorische Sammlungen des A. H. Kaiserhauses) des sindlichen Stückes; die übrigen Bilder sind zwar Werken des 17. und 18. Jahrhunderts entnommen, doch besinden sich mehrere der abgebildeten Stücke noch heute in Sammlungsbesitz, so ist z. B. ein solches Jupiteramusett im Berliner Münzkabinett (Kaiser Friedrich-Museum) vorhanden.

Über die magischen Duadrate dieser 7 Amulette sei noch solgenbes bemerkt: das Duadrat unseres Saturnamuletts hat genan die Form unserer Fig. 47 (S. 76); unser Jupiterquadrat geht aus dem Duadrat Dürers (Fig. 44, S. 74) hervor, wenn man dort die Reihenfolge der Zeilen umkehrt und die beiden inneren Spalten miteinander vertauscht; das Marsquadrat weist die Besonderheit auf, daß seine 13 ungeraden Zahlen sozusagen ein Duadrat innerhalb des ganzen Duadrats bilden, während die 12 geraden Zahlen die dreieckigen Gebiete an den 4 Ecken des ganzen Duadrats einnehmen. Das Duadrat unseres Benusamuletts ist in hebrässchen Zeichen, die auf



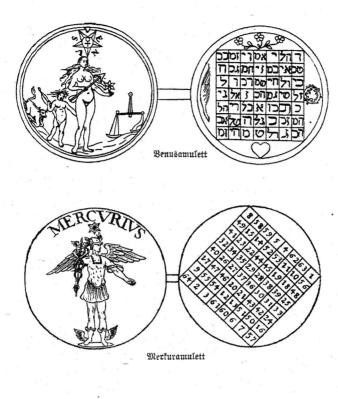
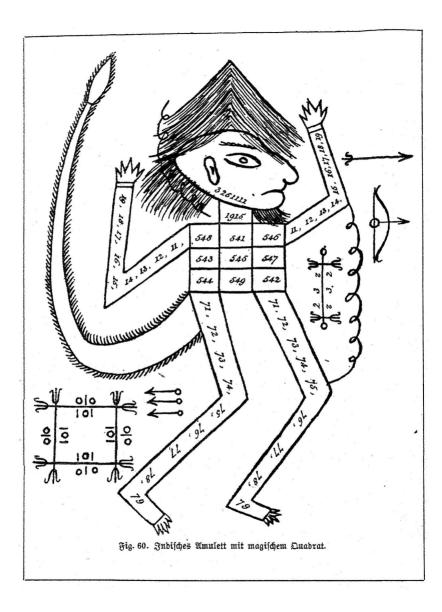




Fig. 57-59. Planetenamulette mit magischen Quabraten.



Amuletten überhaupt viel vorkommen, gegeben 1); der Leser, der je boch unsere Frage 19 (S. 81) beantwortet hat, braucht nur das dort erhaltene Quadrat um 90° im Uhrzeigersinne zu dreben, um eine Übertragung des hebräischen Rahlenguadrats in unsere Rahlzeichen zu erhalten. In genau berselben Beise ergibt sich auch bas magische Quabrat bes Mondamuletts (Fig. 59), b. h. also burch Bilbung eines magischen Quadrats von 81 Zellen nach bem Borbild ber Figuren 48, 49 und anschließende Drehung des erhaltenen um 90° im Uhrzeigersinne. - Die Bilbseiten unserer 7 Amulette, wie mir im Gegensat zu ben "Rahlenseiten" fagen, weifen alle ben betreffenben Blanetengott, sogar unter ausbrücklicher Angabe feines Namens, auf: Saturn, bargeftellt als Gartner mit bem Spaten, einem feiner viel vorkommenden Attribute; Jupiter in Gelehrtentracht mit aufgeschlagenem Buche in der Hand; Mars als Krieger mit Schwert und Schild; den Sonnengott (Sol) als König, auf dem Thron sitend, mit Krone und Szepter; Benus, unbekleidet, mit lang herabwallenden haaren, einen langen Bfeil in ber Rechten haltend, ihr zur Seite Cuvido mit bem Bogen: Merkur mit dem bekannten Schlangenstab in ber Rechten. mit großen Flügeln an den Schultern, sowie mit Flügelhut und Flügelschuhen. Die Bildseite des Mondamuletts schlieflich weist zwar in der Hauptsache eine Mondkarte auf, jedoch erkennt man in beren Innerm bei genauerem Sinsehen eine fleine weibliche Figur: es ift die Mondgöttin mit dem Halbmond in der Rechten; die Umschrift ber Bilbseite gibt in großer Schrift an: LUNA. - Auf die Erflärung ber sonstigen Bilber, Ramen und Zeichen muffen wir bier verzichten und wollen nur noch eins anführen: Auf bem Benusamulett (Bilbfeite) feben wir außer ber Göttin und dem Cupido noch eine "Wage" und einen "Stier"; gemeint find bie beiben Sternbilber bes Tierfreises, die nach einer seltsamen Lehre der Aftrologen als die beiden "Bäufer" der Benus galten. Diefelbe Bedeutung haben auf dem Marsamulett "Widder" und "Storpion", sowie auf bem Sonnenamulett ber "Löwe".

Wir verlassen damit diese Planetenamulette, und bemerken im übrigen nur noch, daß magische Quadrate auch auf Amuletten anderer Arten vielsache Berwendung gesunden haben. Unsere Abbildung auf

¹⁾ Entgegen ber sonstigen hebräischen Schreibweise stehen hier, freilich mit einer Ausnahme, die Zehner links (nicht rechts) von den Einern.

Fig. 61. Arabischer Schutbrief.

S. 90 mag ein erftes Beifpiel diefer Urt barbieten: es ift ein Amulett, bas bei den mohammedanischen Inbern gur Austreibung bofer Geifter und Teufel in neuerer Zeit gebraucht wurde und gewiß heute noch gebraucht wird. Das magische Quabrat ift bas unserer um 1800 gedreh= ten Fig. 47 (S. 76), mo: bei jedoch alle Bahlen um 540 vergrößert find. Gin zweites Beifpiel Diefer Art, ein Dofument bes Aberglaubens aus Weltkrieg, bringt Fig. 61 in verkleinerter Wiederaabe zur Anschauung: Es ist ein arabischer Schutbrief, ber auf den Schlachtfelbern Frankreichs im Sommer 1917 bei einem gefalle= nen Schwarzen, vermutlich einem Inder, gefunden wurde. Der Schutbrief, der natürlich als Talis= man gegen feindliche Beschoffe hatte bienen follen, weist neben arabischen Be= betsformeln, die hier nicht interressieren, als Inftru= mente ber Magie auch brei quadratische Anordnungen auf, von benen bas 9=zel= lige Gebilbe ein magisches Quadrat im strengen Sinne ift; in unferen Rahlzeichen würde es so aussehen:

 $egin{matrix} 4 & 9 & 2 \ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

8 1 6, ist also ein Spiegelbild bes Quabrats

unserer Fig. 47 (S. 76) resp. geht aus diesem durch Vertauschung der ersten und letzten Spalte hervor. Bon den beiden 16-zelligen Duadraten des Schuthriess weist das eine in jeder Zeile und jeder Spalte dieselben 4 Bahlen, nämlich die 4 kleinsten geraden Zahlen: 2, 4, 6, 8, die eine besondere Rolle im Aberglauben des Drients spielen, auf, ergibt also natürlich auch in allen Zeilen und Spalten dieselbe Summe (20). Daß es kein magisches Duadrat im strengen Sinne ist, sondern zu einer viel einsacheren Gattung von Zahlens Anordnungen gehört, braucht kaum gesagt zu werden. Bon genau derselben Struktur wie dieses letztgenannte ist auch das größere 16-zellige Duadrat, nur sind an die Stelle der 4 Zahlen jetzt des stimmte arabische Namen — Gottesnamen — getreten 1).

Frage 21: Bergrößere alle Zahlen des Dürerschen Duadrats (Fig. 44, S. 74) oder des Jupiterquadrats (Fig. 54, S. 88) um ein und dieselbe Zahl so, daß das neue Duadrat in jeder Zeile, Spalte und Diagonale als Summe die für die Menschheitsgeschichte beispiels los verhängnisvolle Jahreszahl 1914 aufweist! Um wieviel sind alle Zahlen des Duadrats zu diesem Zwecke zu vergrößern?

¹⁾ Auch an Bauwerken, Kirchen wie Prosandauten, sinden sich bisweisen magische Quadrate. Mitteilungen über solche und ähnliche Vorkommnisse magischer Quadrate, insbesondere solche, die bisher wenig oder gar nicht bekannt sind, nehme ich mit lebhastem Danke entgegen. Das in den großen öffentlichen und auch einigen privaten Münzsammlungen einschließlich einiger anderer Museen vorhandene Material an Amuletten mit magischen Quadraten ist mir freisich in der Hauptsache bereits bekannt insolge einer im Binter 1913/1914 veranstalteten und über die wichtigken Sammlungen von Europa erstreckten Umsrage, die, von einigen Ausnahmen, wie z. B. Rußland, abgesehen, sehr entgegenkommende Beantwortung gefunden hat.

— Die vorstehenden Worte, die auch schon in der vorigen Ausgabe dieses Buches standen, haben mir, wie ich mit Dank zu bewerken nicht unterlassen möchte, die Kenntnis des interessanten arabischen Schubvieses vermittelt. Herr Franz Buhl, Unterossizier in einem baherischen Regiment, der den Schubvies zu Gesicht bekam, hatte sogleich die richtige Vermutung, daß es sich um magische Duadrate hande, und sandte mir daraushin zu-nächst eine Kopie, sodann das Original des Talismans.

Rapitel IX.

Mathematische Trugschlüsse.

I. Die Galfte ift gleich bem Gangen.

Beweis: Es ift bekanntlich:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Da diese Formel für beliebige Werte von a und b gilt, so also auch für b=a, b. h. wenn wir für b überall a segen; wir haben dann:

$$a^2 - a^2 = (a + a) \cdot (a - a).$$

Die linke Seite der Gleichung können wir auch so schreiben: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a})$ und haben dann:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a}) = (\mathbf{a} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a}).$$

Dividiert man nun beide Seiten der Gleichung durch den Faktor (a-a), so erhält man:

a = a + a

alfo:

a = 2 a

ober:

$$\frac{a}{2} = a$$

was zu beweisen war.

II. In berfelben Weise konnen wir beweisen:

Alle Bahlen find untereinander gleich.

Beweis: Es seien a und b zwei beliebige Zahlen. Wir nehmen zunächst an, daß sie ungleich sind und daß a etwa die größere von beiden sei. Der Unterschied zwischen a und b sei gleich c, b. h.:

$$a - b = c$$

ober:

$$a = b + c$$
.

Multipliziert man diese letzte Gleichung auf beiden Seiten mit $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, so erhält man:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$$

Bringt man nun in biefer Gleichung bas Glieb a e von ber rechten

Seite nach der linken hinüber resp. subtrahiert man auf beiden Seizten a.c., so erhält man:

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

eine Gleichung, die fich auch fo schreiben läßt:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}).$$

Auf beiden Seiten kommt ber Faktor $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$ vor; dividiert man durch ihn, so erhält man:

$$a = b$$
,

b. h. zwei ganz beliebige Größen a und b find einander gleich, w. z. b. w.

III. Da der Leser vermutlich trop unseres vorstehenden Beweises noch nicht so recht an die Gleichheit aller beliedigen Zahlen glaubt, weil ihm die Konsequenzen — Ausgleich aller Unterschiede zwischen Biel und Wenig, zwischen Arm und Reich, zwischen Groß und Klein usw. — denn doch etwas ungeheuerlich erschienen mögen, so mag die Richtigkeit unseres Resultats noch durch ein zweites Beweisversfahren erhärtet werden:

$$a+b=2d$$

(für unser Beispiel: $3+11=2\cdot 7$). Aus dieser Gleichung folgt:

$$b=2d-a$$

und

$$2d - b = a$$

Multipliziert man diese beiden letzten Gleichungen miteinander, so erhält man:

$$2 d b - b^2 = 2 d a - a^2$$

Subtrahiert man nun diese letzte Gleichung von der Gleichung $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d}^2$.

jo bekommt man:

$$d^{2}-2 d b + b^{2} = d^{2}-2 d a + a^{2}$$
ober
$$(d-b)^{2} = (d-a)^{2}.$$

Bieht man sodann auf beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel, so ergibt sich:

$$d - b = d - a$$

b. h.: ob ich b von d abziehe oder a von d, bleibt sich gleich, also b = a. w. z. b. w.

Ber übrigens vorzieht, diesen Beweis, ftatt mit Buchstabengrößen

a, b, d, mit numerischen Werten zu führen, mag so verfahren:

Niemand — und sei er ber ungläubige Thomas in eigener Persion — wird die Richtigkeit der Gleichung:

$$3 - 1 = 6 - 4$$

leugnen; ebenso unzweifelhaft richtig ist die durch Multiplikation mit (-1) hieraus hervorgehende Gleichung

$$1 - 3 = 4 - 6$$

(jebe ber beiben Seiten ber Gleichung ergibt: -2). Abbiert man nun auf beiben Seiten biefer Gleichung $\frac{9}{4}$, so erhält man:

$$1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4}$$

ober, was genau basselbe ift:

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(2-\frac{3}{2}\right)^2$$
.

Bieht man sodann auf beiben Seiten die Quadratwurzel, so bekommt man:

$$1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2}$$

und, wenn man nunmehr auf beiben Seiten dieser Gleichung $\frac{3}{2}$ addiert, so ergibt sich das Resultat:

$$1 = 2$$
.

Benn aber 1=2 ift, so folgt burch Abdition von 1 auf beiden Seiten:

2 = 3, und durch weitere Abbition von 1 auf beiben Seiten:

3 = 4 uff., also:

1=2=3=4 usw., womit, wie verlangt, die Gleichheit aller Zahlen untereinander bargetan ist.

IV. Rull ift die größte aller Zahlen.

Beweis: Es sei a eine beliebige, positive, eventuell sehr große Zahl. a — 1 ist jedenfalls kleiner als a, was man in Form einer "Ungleichung" bekanntlich so ausdrückt"):

$$a-1 < a$$
.

Multiplizieren wir nun diese Ungleichung auf beiben Seiten mit (- a), so bekommen wir:

$$-a^2+a<-a^2$$

ober, nach Abbition von a2 auf beiben Seiten, ichließlich:

$$a < 0$$
.

Damit haben wir das Resultat erhalten: Jede beliebige, wenn auch noch so große Zahl a ist kleiner als Null, und das war es ja, was wir beweisen wollten.

Hit also a etwa das Bermögen eines Millionärs oder gar Milliars därs A, so zeigt uns unsere Ungleichung, daß dieses Bermögen kleiner ist als das Vermögen O eines Herrn Habenichts. Bezeichnen entsprechend die Größen b, c, d usw. die Vermögen der Millionäre oder Milliardäre B, C, D usw., so bestehen unserem Beweisversahren zusfolge die Ungleichungen:

$$a < 0$$
; $b < 0$; $c < 0$; $d < 0$;

und durch Abdition aller dieser Ungleichungen folgt:

$$a + b + c + d \dots < 0$$
.

Der Herr Habenichts besitzt also mehr als alle Millionäre und Milliars bäre zusammengenommen, ein Resultat, das freilich trot des "mathes matischen Beweises" kaum so viel Glauben sinden wird, daß es in sozialer Beziehung versöhnlich zu wirken vermöchte.

V. Wenn eine Bahltleiner ift als eine andere, jo ift auch bas Dappelte, Bierfache, . . . Behnfache, Gundertfache ber erften Bahl immer noch fleiner als die zweite.

Beweis: Es sei p eine Bahl > 0, die kleiner ist als eine zweite Bahl q; also: p < q. Durch Multiplikation mit p auf beiden Seiten

¹⁾ Die Ungleichung x < y bebeutet bekanntlich: "x kleiner als y", und umgekehrt hat y > x die Bebeutung: "y größer als x". Auch für die nächsten Abschnitte ist die Bekanntschaft mit dieser Schreibweise erforderlich.
NRus 170: Ahrens, Math Spiele. 4 Auft.

nber

der Ungleichung erhalten wir: p2 < p q, und hieraus, burch Subtrattion von ge auf beiben Seiten, wieber:

$$p^2 - q^2 $(p+q) \cdot (p-q) < q (p-q)$.$$

Die Division durch (p-q) ergibt darauf:

$$p+q < q$$
.

Abdiert man hierzu p < q, unsere ursprüngliche Ungleichung, so erhalt man: 2p+q<2q und, burch Subrraktion von q auf beiben Seiten: 2 p < q. Auch bas Doppelte ber gahl p ift also unter allen Umftanden noch kleiner als g. - Cbenfo, wie wir aus der Ungleichung p < q folgerten: p < 2 q, können wir aus p < 2 q herleis ten: p < 4 a, und hieraus wieder: p < 8 a, und so geht dies fort. Damit ift unsere Behauptung bewiesen.

VI. Gin Biertel ift mehr als ein Salbes.

Beweis1): Auch wer der vorstehenden These nicht zustimmt, wird zugeben, daß das Doppelte einer Größe mehr ift als das Einfache. Es ift somit:

 $2 \cdot \log a > \log a$

pber:

 $\log a^2 > \log a$.

Wenn nun $a = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, so haben wir also:

 $\log \frac{1}{4} > \log \frac{1}{9}$

und, da zu dem größeren Logarithmus auch der größere Numerus gehört, fo folgt:

1/4 > 1/2, m. 3. b. m.

VII. Es gibt in Wahrheit in der Mathematit feine imaginaren, fondern nur reelle Groken.

Beweiß2): Alle sogenannten imaginären Größen laffen fich barstellen in der Form a i, wo a eine reelle Große und i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ ift. Um also unsere These, daß alle imaginären Größen reell find, zu beweisen, brauchen wir diesen Beweis nur für die imagi= nare Einheit zu führen. Bu dem Ende multiplizieren wir die Gleichung:

$$\sqrt{-x} = i \cdot \sqrt{x}$$

1) Befanntichaft mit Logarithmen vorausgesett.

²⁾ Befanntichaft mit imaginaren Großen porausgefest.

auf beiben Seiten mit $\sqrt{-1}$ und erhalten fo:

$$\sqrt{x} = i \sqrt{-x}$$

$$= i (i \sqrt{x})$$

$$= i^2 \sqrt{x}.$$

Dividiert man biese Gleichung auf beiben Seiten durch Vx, fo resul= tiert: $i^2 = 1$, also $i = \sqrt{1}$; i ist mithin reell, w. z. b. w.

VIII. Es gibt Dreiede mit zwei rechten und einem ipiten Wintel.

Beweis: Fig. 62 stellt in A AEF ein Gebilde ber verlangten Art bar. Die Figur ift so entstanden, daß in zwei Rreisen, die fich in den

Bunften A und B ichneiden, bon bem einen biefer Schnitt= punkte aus, nämlich von A, die Durchmesser AMC und AND gezogen find. Darauf ist die Berbindungslinie CD gezogen, und die Buntte E und F. in benen die Linie CD die beiden Rreise ichneidet, find mit A verbunden. Alsdann find

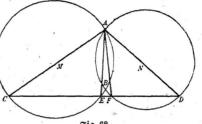


Fig. 62.

die Winkel AFD und AEC als Peripheriewinkel im Halbkreise rechte Winkel, und daher sind auch ihre Nebenwinkel AEF und AFE jeder ein Rechter, w. z. b. w.

IX. Alle Dreiede find gleichichentlig.

Beweis: Es fei (f. Fig. 63) in dem Dreieck ABC die Halbierungs= linie des Winkels bei C gezogen und ferner in der Mitte D ber gegenüberliegenden Dreiecksseite AB die Senkrechte (.. Mit= Fig. 63.

tellot") errichtet; beibe Linien mogen sich in dem Buntte N schneiben. Fällt man nun bon N bie Lote NE und NF auf die Seiten AC und BC und verbindet N mit A und B. so ergibt fich die Kongruenz folgender Drei-

B edspaare:

1) $AND \cong BND$,

weil AD = BD, ND = ND und der eingeschlossene Winkel ein Red ter ist.

Aus dieser Kongruenz folgt: AN = BN.

 $2) ECN \cong FCN,$

weil $\not\subset$ ECN = $\not\subset$ FCN, CN = CN und die Winkel bei E und Rechte find.

Aus biefer Kongruenz folgt: CE = CF und EN = FN.

3)
$$AEN \cong BFN$$
, weil $AN = BN (nach 1)$, $EN = FN (nach 2)$

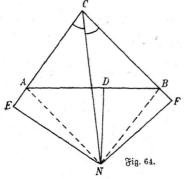
und die Winkel bei E und F Rechte sind. Aus dieser Kongruenz folgt: A E = B F.

Nach 2 sind nun die beiden (in der Figur einmal gestrichelten Stücke CE und CF gleich lang und nach 3 die beiden (zweimal gistrichelten) Stücke AE und BF ebenfalls; also sind auch die ganze Linien AC und BC gleich lang, d. h. das beliebige Dreieck ABC i gleichschenklig, w. z. b. w.

Ebenso, wie wir die Gleichseit der beiden Dreiecksseiten AC un BC bewiesen haben, läßt sich natürlich auch die Gleichseit von Ac und AB dartun, und wir erhalten also schließlich das Resultat:

Alle Dreiede find gleichseitig.

Auch wenn ber Schnittpunkt N ber Winkelhalbierenben und be Mittellots nicht innerhalb, sondern außerhalb bes Dreiecks liegen sollt



(f. Fig. 64), ergibt sich nur wiede dasselbe Resultat: Wir tönnen füben jetzigen Fall ber Fig. 64 midenselben Worten den obigen Beweisgang wiederholen, mit dem ein zigen Unterschiede, daß zum Schlu AC nicht als Summe der Stück CE und EA, sondern als dere Differenz auftritt und die entsprechende Ünderung auch für die and dere Dreiecksseite zu ersolgen har Das Resultat ist jedoch wieder

AC = BC, b. h. bas Dreied ABC ist gleichschenklig ober vielmehr, in weiterer Folge, gleichseitig.

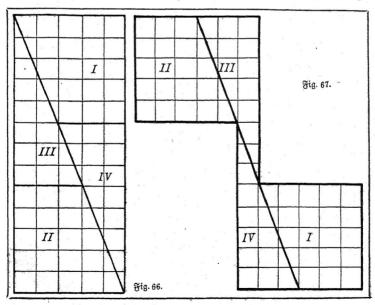
X. 65 = 64 = 63.

Jeber Schachspieler weiß, daß fein Spielbrett 64 Felber hat: 8 Reihen von je 8 Feldern. Wir werden ihm hier ein zweites Brett vorführen, beffen Felber einzeln ebenfo aroß find wie jene, das aber 65 Felder zählt und troßbem nur denfelben Flächeninhalt hat wie jenes 64 felbrige.

I IT III IV Fig. 65.

Beweis: Man zerschneibe bas

ursprüngliche Schachbrett so, wie Fig. 65 dies angibt, und lege die 4 Teile fo zusammen, wie Fig. 66-anzeigt. Alsbann haben wir ein Gebiet von 5 × 13, also von 65 Felbern, das unseren Forderungen genügt.



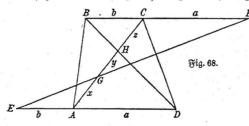
Aus der so gewonnenen Gleichung 65 = 64 folgt, durch Subtraktion von 1 auf beiden Seiten, die Gleichung 64 = 63, der zweite Teil unserer Behauptung. Die Richtigkeit dieser Behauptung: 64 = 63, läßt sich aber auch direkt ohne alle Schwierigkeit dartun: Man braucht die 4 Teile I, II, III, IV der Fig. 65 nur so hinzulegen, wie Fig. 67 angibt. Dann bilden die 4 Stücke, die ansänglich (Fig. 65) 64 kleine Duadrate maßen, nur noch 63 solcher Duadrate, und diese sind eind geben groß wie jene der ursprünglichen Figur.

Mit der Gleichheit von 65, 64, 63 ist natürlich die Gleichheit aller Zahlen überhaupt dargetan, ein Ergebnis, das für uns freilich nicht mehr den Reiz der Neuheit bietet, uns vielmehr oben — unter Nr. II

und III - bereits entgegengetreten mar.

XI. Die Summe der beiden parallelen Seiten eines Trapezes ift gleich Rull.1)

Beweis: Die beiben parallelen Seiten BC = b und AD = a des Trapezes ABCD (Fig. 68) mögen nach entgegengesetzten Richtungen



phin verlängert werden, und zwar BC um a bis F, DA um b bis E. Die Endpunkte E und F werden miteinander verbunden und zudem die beiden Diagonalen des Trapezes, BD und CA, gezogen. Die 3 Ub=

schnitte, in die die Diagonale A.C durch die sie schneidenden Linien geteilt ist, bezeichnen wir, wie in der Figur angegeben, mit x, y, z. Aus dem Proportionalsehrsah (Strahlensah), angewandt mit bezug auf G und H als Scheitelpunkte, oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus der Ühnlichkeit der beiden folgenden Dreieckspaare:

¹⁾ Rach W. Liehmann (und B. Trier), "Wo stedt ber Fehler?" (Leipzig 1913, S. 23; 2. Aufl., 1917, S. 27/28), einem Buche, das außer den "Trugsschlüssen" des ersten Teils in einem zweiten, von B. Trier verfaßten Teile eine Sammlung interessanter und lehrreicher, übrigens durchweg aus dem wirklichen Schulleben geschöpfter "Schülersehler" bietet.

1) BHC unb AHD,
2) EGA unb CGF,
folgt:
$$\frac{b}{a} = \frac{z}{x+y}$$
unb
$$\frac{b}{a} = \frac{x}{y+z}$$

oder, zusammengezogen:

$$\frac{b}{a} = \frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z}$$
 (Gleichung I).

Wendet man nun auf die Proportion $\frac{z}{z+y} = \frac{x}{y+z}$ die korresponstierende Subtraktion¹) an, so erhält man:

$$\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z} = \frac{z-x}{x-z};$$

also ist auch (s. Gleichung I):

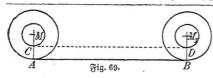
$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{x}}{\mathbf{x} - \mathbf{z}} = -1.$$

Wenn aber $\frac{b}{a} = -1$ ist, so bedeutet das: b = -a oder: b + a = 0, w. z. b. w.

XII. Alle Rreife haben gleichen Umfang.

Beweis: Wir benken uns zwei fest miteinander verbundene Areise mit gemeinsamem Mittelpunkt (M in Fig. 69) oder mit anderen Worten: eine kreisrunde Scheibe, auf der noch ein kleinerer konzentrischer Areis verzeichnet ist. Die Scheibe mag in der Ebene längs einer geraden

¹⁾ Der Leser, dem dieser Sat nicht oder nicht mehr geläufig ist, erkennt die Richtigkeit der Umwandlung leicht solgendermaßen: Wenn eine Proportion $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ besteht, so besteht zunächst auch die Proportion $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$, und aus ihr erhalten wir durch Subtraktion von 1 auf beiden Seiten, $\frac{m}{p} - 1 = \frac{n}{q} - 1$ oder $\frac{m-p}{p} = \frac{n-q}{q}$ oder $\frac{m-p}{n-q} = \frac{p}{q}$ und somit auch: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{m-p}{n-q}$. Eine gegebene Proportion $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ läßt sich also auch stets in der Form $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{m-p}{n-q}$ schreiben, und das ist genau die Umsformung, die wir oben mit der Proportion $\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z}$ vornehmen.



Linie abrollen; babei gelangt fie von A nach B, und zwar mag biefe Strecke gerabe einer vollen Umbrehung der Scheibe entsprechen, so daß also das

Stück AB gleich dem Umfang des großen Kreises ist. In dieser Zeit, von der Stellung A bis B, hat sich natürlich auch der kleine Kreis gerade einmal herumgedreht; sein jeweiliger tiefster Kunkt bewegt sich längs der Linie CD und diese ist daher gleich dem Umfang des kleinen Kreises. Da nun aber AB und CD offenbar gleich sind (ABDC ist ein Rechteck), so haben also beide Kreise denselben Umfang, w.3. b. w.

XIII. Im Innern eines Areises gibt es nur einen Punkt, ben Kreismittelpunkt. Alle übrigen, scheinbar im Innern des Kreises gelegenen Punkte liegen in Wahrheit auf der Kreisperipherie.

Beweis 1): Es sei C (Fig. 70) ein solcher, scheinbar im Innern des Kreises gelegener Punkt. Man ziehe alsdann den Durchmesser durch C, also AMB, und konstruiere zu A, C, B den 4. harmonischen Punkt:

D. Sobann errichte man in F, ber Mitte von CD, ein Lot, das den Kreis in E schneisben mag, und verbinde diesen Punkt E mit M und C. — Alsbann ist nach einem beskannten Sate²):

A M C F B D

Fig. 70.

 $MC \cdot MD = MA^2$.

Diese Gleichung nimmt, ba

$$MC = MF - CF$$

und

$$MD = MF + FD = MF + CF$$

1) Angegeben von P. Stäckel im Archiv der Math. u. Phyf. (3) XII, 1907, S. 370.

²⁾ Der Leser, dem dieser Sat nicht gegenwärtig sein sollte, überzeugt sich von der Richtigkeit der in Frage stehenden Gleichung leicht folgendermaßen: Wenn A, C, B, D vier harmonische Punkte sind, so bedeutet dies, daß folgende Proportion besteht: $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}, \text{ anders geschrieben: } \frac{AM + MC}{AM - MC} = \frac{MD + AM}{MD - AM}.$ Durch Anwendung korrespondierender Addition und Subtraktion nimmt diese Proportion die Form an: $\frac{AM}{MC} = \frac{MD}{AM}; \text{ also ist, wie oben steht: } AM^2 = MC \cdot MD.$

ift, die Form an:
$$(MF - CF) \cdot (MF + CF) = MA^2$$
 oder: $MF^2 - CF^2 = MA^2$ (Gleichung I).

Nun ist ferner:
$$M F^2 + F E^2 = M E^2$$

und $C F^2 + F E^2 = C E^2$
also: $M F^2 - C F^2 = M E^2 - C E^2$

b. h .:

ober: MF2-CF2 = MA2-CE2 (Gleichung II).

Aus den beiden Gleichungen I und II, die in ihren linken Seiten völlig ühereinstimmen, folgt:

$$M A^2 = M A^2 - C E^2,$$

 $C E = 0.$

Der Punkt C ist also mit E identisch, liegt mithin auf der Kreisperipherie, w. z. b. w.

XIV. Achilles und bie Shildfrote.

Schilbkröte, die vor ihm einen gewissen Vorsprung hat. Wird er die Schilbkröte einholen? Zenon sagt: "Nein". Denn, wenn Achilles von A aus den anfänglichen Standpunkt S der Schildkröte erreicht hat (s. Fig. 71), wird diese inzwischen bis zu einem anderen Punkte S, weiter gekrochen sein; ist Achilles auch hierhin gekommen, so ist die Schildkröte inzwischen bis S, gelangt, und so geht dies offenbar fort: Jedesmal, wenn Achilles einen von der Schildkröte zuvor eingenommenen Standpunkt erreicht hat, wird diese inzwischen um ein gewisses Stück weiter gekrochen sein, und so wird Achilles trop seiner so viel größeren Geschwindigkeit die Schildkröte nie einholen.

¹⁾ Wir hielten hier an dem historisch gegebenen Bilde von "Achilles und der Schildkröte" seit, obwohl ein moderner Zenon vermutlich ein beseres Vilozur Ilnstrierung der in dem Borgange der Bewegung liegenden Antinomien gewählt hätte. Man hört gegen das Sophiema in der Form Zenons naturgemäß in der Regel die Entgegnung: "Achilles kommt der Schildkröte immer näher und näher und schießlich tritt er mit dem nächen Schritt über sie hinweg." Wan stellt sich daher statt der Schildkröte

XV. Aus ber Wahricheinlichfeitsrechnung.

Wer nur die Anfangsgründe, die einfachsten Prinzipien, der Wahrsschwildsteitsrechnung kennt, wird begreifen, daß sie einen bevorzugten Tummelplat für Fehlschlüsse und Paradozien abgibt, und so mag wenigstens ein Beispiel dieser Art hier zum Schluß gegeben werden, eins, das Francis Galton, der berühmte Afrikareisende und vielseitige Forscher — Anthropolog, Weteorolog, Geograph, Archäolog usw.

mitgeteilt hat.1)

In einer Gesellschaft erhebt jemand folgende Frage: Drei Mungen merden perschiedene Male hingeworfen; in wieviel Prozent aller fälle werden die drei Mungen übereinstimmend dieselbe Seite, d. h. alle drei die Kopffeite oder aber alle drei die Wappenseite, zeigen? - "Db man", fo läßt fich gunächst A vernehmen, "die drei Mungen aleichzeitig ober aber nacheinander hinwirft, ift offenbar gleichgültig, und nur der größeren Unschaulichkeit halber stelle ich mir por. baß bie Münzen einzeln - hintereinander - hingeworfen werden. Bunächst die erste: sie zeigt Ropf= oder Bappenseite. Nun tommt die zweite; in wieviel Fallen wird fie biefelbe Seite zeigen wie die erfte Minge? Offenbar in der Balfte aller Falle! Wird ichlieflich auch bie dritte Munge hingeworfen, so wird fie biefelbe Seite wie die beiben erften Müngen nach oben fehren in ber Sälfte aller berjenigen Falle, bie vorher gunftig waren, b. h. in der Salfte von der Salfte aller Falle insgefamt. Go wird bas erwartete Bild, bag alle brei Münzen dieselbe Seite zeigen, in 1 ober in 25 Prozent aller Fälle eintreten." - "Ich protestiere", fo fallt jest B ein, "die Annahme, baß die Müngen hintereinander geworfen werben, entspricht nicht ber Fragestellung und führt baber, wie man fieht, zu einem Fehlichluß. Das soeben gehörte Resultat ift nämlich burchaus unrichtig, wie fehr leicht einzusehen ift. Man hat die drei Munzen gleichzeitig zu werfen,

1) Francis Galton, "A plausible paradox in chances", Nature, vol.

49, 1893/94, p. 365-366.

und Achills wohl besser etwa zwei Lokomotiven vor, die sich beide auf einem Schienenstrang, der beliedig lang sein mag, in gleicher Richtung fortbewegen und von denen die eine einen gewissen (mäßigen) Borsprung vor der anderen hat; die vordere soll eine geringe, die hintere eine große Geschwindigkeit haben. Nach dem Sophisma Zenons holt die schnelle Lokosmotive die langsame niemals ein.

und offenbar werden jedesmal, wenn dies geschehen ist, mindestens zwei der drei Münzen die gleiche Seite nach oben kehren. Die Wahrscheinlichkeit dasur nun, daß auch die dritte Münze dieselbe Seite zeigt, ist offenbar $=\frac{1}{2}$. Also in der Hälfte oder in 50 Prozent aller Fälle wird das erwartete Bild sich ergeben und nicht etwa nur in 25 Prozent!" Wer hat Recht: A, B oder keiner von beiden?

Beantwortung der Fragen.

Rapitel I.

Frage 1: B (ber zweite) springt von 1 auf 2 und schreitet sobann

in Stufen von je 11 fort.

Frage 2: B kann ben Sieg erzwingen, ba er mit bem ersten Male auf 9 gelangen und nun in Stufen von je 9 bis zu 90 fortschreiten kann.

Frage 3: A, ber zunächst auf 6, bann auf 24, 42, 60, 78, 96,

114, 132 und 150 fpringt.

Frage 4: B, indem er zunächst auf 13 gelangt und von hier in Stusen von je 13 zum Ziel. — Die letzte Etappe vor dem Siege für B ist 169, und zwar kommt nur dies allein hierfür in Betracht, nicht etwa, wie man vielleicht denken könnte, neben 169 auch wahlfrei 170 und 171. Denn, wenn B auf irgendeine Weise auf 170 oder 171 gekommen wäre, so würde zwar A das Ziel mit dem nächsten Sprunge nicht erreichen können; jedoch kann A alsdann dis 180 resp. 181 gelangen, und B muß nun — bei einer minimalen Sprungweite von 3 Fuß — über das Ziel hinausspringen. Es würde also — man achte auf die Formulierung unserer Aufgabe (S. 11) — keiner von beiden siegen.

Frage 5: Sieger ist offenbar berjenige, ber zuerst auf 98 ober 99 gelangt, da der Gegner alsdann — bei einem Minimum von 2 Fuß — das Ziel mit dem nächsten Sprunge erreichen dzw. überschreiten muß. A würde also den Sieg erzwingen können, wenn er zunächst auf 10 springen und dann in Stusen von je 11 zu 98 fortschreiten könnte. Nun ist ihm aber — bei einem maximalen Sprunge von 9 Fuß — die Stuse 10 für das erste Mal unerreichdar. Ebenso wenig kann A es erzwingen, die Stelle 99 in Stusen von je 11 zu erreichen. Wie A daher auch beginnt, B kann mit seinem ersten Sprunge

jedenfalls auf 11 gelangen, worauf er in Stufen von je 11 fortsschreitet bis 99, um so A zum Überschreiten des Ziels zu zwingen. Außer diesem Versahren, das B stets befolgen kann, gibt es für ihn noch ein zweites, das freilich nicht immer anwendbar ist: Wenn B mit dem ersten Sprunge auf 10 kommen kann, was jedoch nicht immer möglich ist, so kann er von hier ab, durch Vorrücken in Stufen von je 11 bis zu 98, den Sieg erzwingen, da A alsdann das Ziel erreichen oder überschreiten nuß. — Dies zweite Versahren ist offendar dann und nur dann nicht ausführbar, wenn A mit einem Sprunge von 9 Fuß beginnt; das erste Versahren läßt sich dagegen, wie schon gesagt, unter allen Umständen anwenden, wie auch A beginnen mag.

Rapitel II.

Frage 6: Die Anzahl der Inversionen ist 23, die Aufgabe also unlösbar.

Rapitel III.

Frage 7: Die Aufgabe ist symmetrisch zu Nr. IV in § 3 (S. 29), woraus sich das Lösungsschema leicht ergibt.

Frage 8: Die Aufgabe ist reziprof zu Nr. XIV in § 3 (S. 31). Frage 9: Die Aufgabe ist offenbar analog der Aufgabe Nr. X in § 3. In der Tat wird aus der Kombination 46; 13 durch eine Vierteldrehung im Umdrehungssinne des Uhrzeigers: 64; 37, hieraus durch Spiegelung an der Mittelvertikalen: 24; 57 und hieraus durch Vertauschung von Ansangs= und Schlußloch: 57; 24 (Nr. X). — Die gestellte Aufgabe ist also symmetrisch zu der reziprosen von Nr. X in § 3.

Rapitel IV.

Frage 10: Nein; denn bei diesem Gewichtssatz wird der scheinsbare Borteil nur auf Kosten von Lüden gewonnen, indem Wägungen von 32 g und 97 g (32 + 65) überhaupt nicht möglich sind.

Frage 11: Der angegebene Gewichtssatz ermöglicht alle Wägunsgen von 1 g bis 610 g inkl.; seine 11 Gewichte können ersetzt werden durch folgende 10 Gewichte: 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, 32 g, 64 g, 128 g, 256 g, 512 g, und diese ermöglichen Wägungen noch bis 1023 g einschließlich.

Frage 12: 127 Umsetzungen im ganzen, davon 64 mit Scheibe 1 und 4 mit Scheibe 5. Die erste Umsetzung ist: "1 von A auf C."

Rapitel V.

Frage 13: Die Anfangsstellung, bei der alle Ringe oben sind, ist natürlich durchaus noch nicht die ungünstigste für die Trennung der Ringe von der Spange. Vielmehr ist dies bei 5 Ringen 1) die Stellung ber 3 4 5 ooo, weil hier nämlich zunächst die vier letzten Ringe zu heben sind, was ebensoviele Umstellungen ersordert, als wären die Ringe ursprünglich oben und erst zu senken: also 7 Umstellungen nach unserer Tabelle (S. 50). Dazu kommen dann noch die für den Fall der normalen Anfangsstellung ersorderlichen 16 Umstellungen; indsgesamt sind es also hier 23 Umstellungen, die nötig sind.

Rapitel VI.

Frage 14: Die "Grundzahlen" find jest 1, 2, 4, 8, 16.

$$7 = 4 + 2 + 1$$

 $25 = 16 + 8 + 1$;

die dritte gahl muß daher 16+8+4+2=30 sein, und die entstehende "ausgezeichnete" Stellung ist also: 7, 25, 30.

Frage 15: Der zweite Spieler gewinnt, weil die anfängliche Stellung "ausgezeichnet" ift:

$$3 = 2 + 1$$
 $17 = 16 + 1$
 $18 = 16 + 2$

Frage 16: Wir haben hier offenbar einen Fall bes in Kap. I ("Wettspringen") besprochenen Spiels vor uns, und nach den dortigen Ausführungen muß bei richtigem Spiel in diesem besonderen Falle ber zweite Spieler siegen: nach seinem ersten Juge werden von dem Hausen insgesamt 5 Steine verschwunden sein, und nach seinen weisteren Zügen 10, 15, 20, 25 Steine.

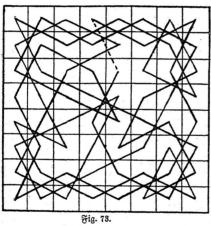
Rapitel VII.

Frage 17: Die Fortsetzung ergibt sich unter Anwendung der angegebenen Regel von Feld 37 aus zunächst unzweidentig bis Feld 46 so, wie in Fig. 72 angegeben. Von Feld 46 hatte man der

¹⁾ Bezüglich ber entsprechenden ungunftigsten Stellung für den Fall von 4 Ringen vgl. die Aussührungen auf S. 48, Beile 6 v. u. bis S. 49, 3. 7 v. v.

| 56 | 17 | 34 | 1 | 54 | 19 | 50 | 3 |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|
| 35 | 12 | 55 | 18 | 33 | 2 | 53 | 20 |
| 16 | 57 | 32 | 13 | 64 | 51 | 4 | 49 |
| 11 | 36 | 15 | 58 | 27 | 48 | 21 | 52 |
| <i>3</i> 8 | 31 | 26 | 63 | 14 | 59 | 46 | 5 |
| 25 | 10 | 37 | 28 | 47 | 22 | 43 | 60 |
| 30 | 39 | 8 | 23 | 62 | 41 | 6 | 45 |
| | 24 | | | | | | |

Fig. 72.



Regel zufolge, anftatt nach 47. ebensogut nach 49 fprin= gen können. Wählt man. wie wir getan, 47, fo er= gibt fich die weitere Fort= fetung unzweideutig bis 51: bon hier aus ftehen 52 und 54 mit gleichen Rechten gur Bahl. Enticheibet man fich für 52, so geht es un= ameidentig weiter bis 59. worauf man die Wahl zwiichen 60 und 64 hat. Hier= auf ergibt fich ber Schluß eindeutig. - Der fo ent= stehende Röffeliprung Fig. 73) weist, obwohl er ungefähr zu brei Künfteln der Fig. 35 entlehnt mar. nicht mehr die schöne Form dieses Diagramms auf, wie überhaupt die nach der ge= dachten Regel gebildeten Röf: eliprunge meift unichon find. Dafür hat unfere Regel uns allerdings biefes Mal zu einem geschloffenen Röffelfprung geführt (bie Schluß: fette ift in ber Figur geftri= chelt gezeichnet), mahrend ber bon Fig. 35 offen war.

Rapitel VIII.

Frage 18: Schreibt man die Zahlen 1 bis 81 zweimal, nämlich in zwei untereinanderstehenden Reihen entsprechend der Schreibs weise auf S. 75, hin, so sieht man sofort, daß diese zwei Zahlenzreihen die Summe 82×81 , eine Reihe allein also $\frac{82 \times 81}{2}$ ergibt;

bavon entfällt auf jebe ber 9 Reihen bes magischen Quabrats bie Summe $\frac{82\times81}{2\times9}=369$.

| 4 | 29 | 12 | 37 | 20 | 45 | 28 |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 35 | 11 | 36 | 19 | 44 | 27 | 3 |
| 10 | 42 | 18 | 43 | 26 | 2 | 34 |
| 41 | 17 | 49 | 25 | 1 | 33 | 9 |
| 16 | 48 | 24 | 7 | 32 | 8 | 40 |
| 47 | 23 | 6 | 31 | 14 | 39 | 15 |
| 22 | 5 | 30 | 13 | 38 | 21 | 46 |

Fig. 74.

Frage 20: Durch Bertauschung der Zahlen aller in Fig. 51 (S. 51) mit b bezeichneten Gebiete ergibt fich das folgende magische Quadrat:

| 1 | 2 | 3 | 141 | 140 | 139 | 138 | 137 | 136 | 10 | 11 | 12 |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 13 | 14 | 15 | 129 | 128 | 127 | 126 | 125 | 124 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 117 | 116 | 115 | 114 | 113 | 112 | 34 | 35 | 36 |
| 108 | 107 | 106 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 99 | 98 | 97 |
| 96 | 95 | 94 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 87 | 86 | 85 |
| 84 | 83 | 82 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 75 | 74 | 73 |
| 72 | 71 | 70 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 63 | 62 | 61 |
| <i>60</i> | 59 | 58 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 51 | 50 | 49 |
| 48 | 47 | 46 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 39 | 38 | 37 |
| 109 | 110 | m | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 718 | 119 | 120 |
| 121 | 122 | 123 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 130 | 137 | 132 |
| 133 | 134 | 735 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 142 | 143 | 144 |

Sig. 75

Frage 21: Um 470.

Frage 19:

Rapitel IX.

Aufdedung ber Trugichlüffe.

I. Bis gur Gleichung

$$a \cdot (a - a) = (a + a) \cdot (a - a)$$

einschließlich ist der Schluß einwandsrei. Diese Gleichung nun besagt, daß zwei Produkte, jedes aus zwei Faktoren bestehend, einander gleich sind, und zwar ist je ein Faktor in beiden Produkten derselbe, nämelich: (a-a). Wir haben also eine Gleichung von der Form:

$$x \cdot z = y \cdot z$$
.

Im allgemeinen folgt aus solcher Gleichung: x=y; denn, wenn zwei Produkte von je zwei Faktoren einander gleich sein sollen und der eine Faktor — hier z — ist bei beiden derselbe, so muß in der Regel der andere Faktor auch derselbe sein: es ist $3\cdot 7$ auch nur = $3\cdot 7$ und nicht etwa = $5\cdot 7$. Wenn wir also beispielsweise die Gleichung haben: $x\cdot 7=3\cdot 7$, so folgt daraus unbedingt: x=3. Sine Ausnahme bildet jedoch der Fall, daß der in beiden Produkten vorkommende Faktor die Rull ist: es ist $3\cdot 0=5\cdot 0$, ohne daß die Faktoren 3 und 5 einsander gleich sind. Die Gleichung

$$x \cdot z = y \cdot z$$

wird also, wenn z=0 ift, stets bestiedigt, welche Werte auch x und y haben, und, wie man aus der Gleichung $3\cdot 0=5$, 0 nicht schliesen darf: 3=5, ebensowenig darf man aus $x\cdot z=y\cdot z$, wenn z=0 ift, schließen: x=y. Diesen Trugschluß haben wir aber besgangen; denn in unserer Gleichung

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a}) = (\mathbf{a} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a})$$

war der in beiden Produkten vorkommende Faktor, nämlich a-a,=0, und wir schlossen daraus fälschlich die Gleichheit der anderen Faktoren, nämlich: a=a+a. Wir dividierten, wie man wohl kurz sagt, die beiden Seiten der Gleichung durch Null, eine Operation, die, wie wir jest sehen, nicht erlaubt ist.

II. Auch hier ift, wie in $\overline{\bf I}$, eine Gleichung "durch Null dividiert", nämlich durch a-b-c, einen Ausdruck, der infolge der Definition3= gleichung a-b=c eben den Wert Null hat.

Der Fehler, durch Null zu dividieren, ist überhaupt für die Konsstruktion arithmetischer Trugschlüsse einer der beliebtesten, und es ersscheint daher angebracht, aus einer vor mehr als einem halben Jahrshundert gedruckten und heute gewiß völlig in Vergessenheit geratenen "Mathematischen Bierzeitung" einen Abschnitt wiederzugeben, der das Verbot, eine Gleichung mit Rull zu dividieren, in ebenso tressender, wie amüsanter Beise behandelt. Unter Nachahmung der Genesis, vorzüglich des 3. Kapitels, verkündet die "Vierzeitung" uns solsgendes."):

1. Und der Herr sprach zu Adam: Siehe, ich gebe in beine Hand das

ganze mathematische Paradies.

2. Du barfft bivibieren mit allen Zahlen, die barin find.

3. Aber mit der Rull darfft du nicht dividieren, denn fie ift ein Ge-

schöpf bes Fürften ber Finfternis.

4. Die Schlange aber war listiger als alle Tiere auf bem Felbe und sprach zu der Eva: Sollt ihr nicht dividieren mit allen Zahlen des Paradieses?

5. Sprach das Weib: Mit allen Zahlen soll mein Mann dividieren, nur mit der Null nicht; denn sie ist ein Geschöpf der Finsternis.

6. Sprach die Schlange: sie ist mit nichten ein Geschöpf der Finsternis, sondern, wenn ihr mit Null dividiert, werdet ihr unterschieden kannen mas richtig und kallen ist.

scheiden lernen, was richtig und falsch ist.

7. Und das Weib schauete an, daß mit Null gut zu dividieren wäre, daß es eine lustige Zahl wäre, weil sie klug mache, und sprach zu ihrem Manne: Dividiere doch! Siehst du denn nicht, daß die Gleichung viel einsacher wird?

8. Und Adam faßte fich ein Herz und dividierte, "und die Augen gingen ihm plötzlich auf und gingen ihm gleichzeitig über."

9. Aber der Herr sprach zu Abam: Hast du nicht mein Gebot übertreten?

10. Darum eliminiere ich dich aus dem mathematischen Paradiese.

11. Im Schweiße beines Angesichts sollst du Gleichungen rechnen und Beweise suchen, und sollst nichts glauben, bis du es bewiesen hast.

¹⁾ Bir haben am Ende ein paar Verse gestrichen und entsprechend die Berszahlen geändert — Die unter Redaktion von Th. Berner in Bersin erschienene "Mathematische Bierzeitung" ist vom 28. Januar 1863 datiert.

Anue 170. Ahrens, Math. Spiele. 4. Mufl.

III. Bis zur Gleichung $(d-b)^2 = (d-a)^2$ einschließlich ist das Beweisversahren einwandfrei. Aus der Gleicheit zweier Ansdrücke folgt jedoch nicht, daß auch die Duadratwurzel aus dem einen Aussbrück gleich der aus dem anderen ist, vielmehr hat die Quadratwurzel bekanntlich zwei Werte, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden, und, wenn A und B zwei einander gleiche Größen sind; so ist also die Quadratwurzel aus A nicht schlechtweg gleich der Quadratwurzel aus B, sondern nur gleich einem der beiden Werte, die die Quadratwurzel aus B besicht. Aus unserer Gleichung $(d-b)^2 = (d-a)^2$ dursten wir daher nicht, wie wir es taten, ohne weiteres schließen: d-b=d-a, sondern nur: d-b ist entweder

$$= + (d - a)$$
$$= - (d - a).$$

ober

Welcher dieser beiden Källe besteht, erkennen wir nun leicht: benn, wenn von den beiden Größen a und b die größere etwa b ist, so ist, da d zwischen a und b liegt, d-b negativ und d-a positiv; ex kann also gar nicht, wie wir annahmen,

$$d - b = + (d - a)$$

 $d - b = - (d - a)$

sein, sondern nur:

und diese Gleichung würde uns zu keinerlei paradozem Resultat fühsren, vielmehr folgt aus ihr nur:

$$d-b=-d+a$$

und weiter:

$$2 d = a + b$$
,

d. h. wir kommen nur zu der alten Gleichung für unser d (f. S. 95) zurüd.

IV. Die Ungleichung a-1 < a, von der wir ausgingen, ist natürlich unansechtbar. Was aber ansechtbar ist und überhaupt den Trugschluß-herbeigeführt hat, das ist die Multiplikation der beiden Seiten dieser Ungleichung mit einer negativen Größe (-a). Wohld darf man eine Gleichung auf beiden Seiten mit derselben negativen Größe multiplizieren, nicht aber ist dies bei einer Ungleichung zuslässig, wie folgendes Beispiel zeigen mag: Aus der Ungleichung 1 < 2 würde durch Multiplikation mit (-2) folgen: -2 < -4, eine Ungleichung, die ofsendar unrichtig ist; denn (-2) ist nicht, wie uns

ser nämlich 2 Mt. Schulden und weiter nichts besitzt, "besitzt" immer noch "mehr" als jemand, dessen anzes "Bermögen" in 4 Mt. Schulsen und weiter nichts besitzt, "besitzt" immer noch "mehr" als jemand, dessen ganzes "Bermögen" in 4 Mt. Schulsen besteht (der Leser, dem etwa diese Auffassungsweise nicht geläussig sein sollte, braucht sich nur vorzustellen, daß die beiden gedachten Personen je 5 Mt. verdienen und nun jeder von seinem Verdienst seine Schulden abträgt; dann zeigt sich unzweiselhast, wer von beiden zuvor mehr "Vermögen" besaß). Bei der üblichen graphischen Darstellung der positiven und negativen Zahlen, die man so zu geben psiegt, daß die Zahlen von links nach rechts hin beständig wachsen, sieht demnach der uns hier interessierende Abschnitt der Zahlenreihe so aus:

(4 somit rechts von 2, aber -4 links von -2). — Wenn wir also die Ungleichung 1 < 2 auf beiden Seiten mit (-2) multiplizieren wollten, so hätten wir gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umkehren müssen und hätten alsdann die richtige Ungleichung -2 > -4 bestommen. Ebenso folgt in unserem ursprünglichen Falle aus der Unsgleichung -2 > -4 besteichung -2 > -4 besteichung -2 > -4 besteichung -2 > -4 besteichung -2 > -4 des kennen. Ebenso folgt in unserem ursprünglichen Falle aus der Unsgleichung -2 > -4 des gleichung -2 > -4 des kennen Bultiplikation mit -2 > -4 des gleichung -2 > -4 des kennen Bultiplikation mit -2 > -4 des gleichung -2 > -4 des kennen Bultiplikation mit -2 > -4 des k

$$-a^2+a>-a^2$$

oder a > 0, eine Ungleichung, die nur unsere ursprüngliche Festsetzung, daß a eine positive Größe sein soll, wiederholt, also nichts

Unerwartetes aussagt.

 ${\bf V.}$ Während in ${\bf IV}$ ber Trugschluß baburch ermöglicht wurde, daß eine Ungleichung ohne Umkehrung des Ungleichheitszeichens mit einer negativen Größe auf beiden Seiten multipliziert wurde, ist hier, was natürlich auf dasselbe hinauskommt, eine Ungleichung durch eine negative Größe, nämlich durch ${\bf p-q}$, dividiert (da ${\bf p< q}$ ist, so ist ${\bf p-q}$ negativ). Die Division an sich ist freisich zulässig, jedoch hätzten wir dabei das Ungleichheitszeichen umkehren müssen und hätten alsdann erhalten: ${\bf p+q>q}$, eine Ungleichung, die unzweiselhaft richtig ist.

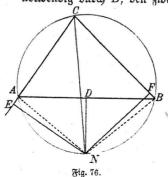
VI. Wir gingen bei unserem Schlußverfahren aus von der Beshauptung, daß das Doppelte einer Größe größer ist als das Einsfache. Dieser Satz gilt jedoch nur für positive Größen: Wenn A doppelt soviel wirkliches Vermögen besitzt als B, so ist das Vermögen des A natürlich größer als das von B. Besteht aber das "Vermögen"

beiber nur in Schulben und hat A beren doppelt so viele als B, so steht A nicht besser ba als B, sondern schlechter; das "Bermögen" von A ist dann also kleiner als das von B (vgl. die Aussührungen zu IV). Nun ist aber log a für den Wert, den wir a gaben, nämslich für 12, keine positive, sondern eine negative Größe; die Gleichung $2 \cdot \log a > \log a$

gilt also für unser $a = \frac{1}{2}$ nicht, sondern nur, wenn a > 1 ist.

VII. Der Trugschluß beruht hier, wie bei III, barauf, daß von den zwei Werten einer Quadratwurzel der unrichtige gewählt ist. Wit den richtigen Vorzeichen der Quadratwurzeln versehen, würde unsere Gleichung lauten: $-\sqrt{\mathbf{x}} = \mathbf{i}^2\sqrt{\mathbf{x}}$, woraus folgen würde: $\mathbf{i}^2 = -1$. — Überhaupt sind die imaginären Größen in besonderem Maße geeignet, um zu unrichtigen, beabsichtigten oder unbeabsichtigten Ergebnissen zu sühren. So wird z. B. auch die Gleichung $\mathbf{i}^4 = 1$, die natürlich richtig ist, benutzt, um daraus durch "Radizieren" wieder unsere falsche Gleichung $\mathbf{i}^2 = 1$ herzuleiten, während richtigerweise der andere Wert von $\sqrt{1}$, also -1, mit der Folge also: $\mathbf{i}^2 = -1$, zu nehmen wäre.

VIII. Der Leser erkennt leicht, daß die Fig. 62 gestisssentlich salsch gezeichnet ist, um den Trugschluß zu ermöglichen. Denkt man sich nämlich B mit C und D verbunden, so sieht man, daß CBA und ebenso ABD als Peripheriewinkel im Halbkreise je ein Rechter sind, CBD mithin ein Gestreckter und die Linie CBD somit eine Gerade ist. Die Berbindungslinie der Punkte C und D geht also notwendig durch B, den zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise.



IX. Der Trugschluß beruht barauf, daß sowohl Fig. 63, wie Fig. 64 falsch gezeichnet sind. Zunächst Fig. 63: Die Halbierende eines Winkels und das Mittellot zur gegenüberliegenden Dreisecksieite schneiden sich nicht, wie wir es gezeichnet haben, innerhalb, sondern außerhalb des Dreiecks. Dies ergibt sich sofort, wenn wir den Kreis durch die drei Ecken des Dreiecks, den sogenannten "Umkreis" des Dreiecks, zeichnen (f. Fig. 76). Berlängern wir nämlich die

Halbierende des Winkels bei C bis zu diesem Kreise, so muß sie biesen gerade in der Mitte des Bogens AB tressen, weil zu gleichen Peripheriewinkeln (ACN = BCN) auch gleiche Kreisbögen gehören; Bogen AN ist also = Bogen BN. Ferner muß nach bestanntem Saze das auf der Sehne AB in deren Mitte D errichtete Lot auch durch die Mitte des zugehörigen Kreisbogens, also durch N, gehen. Winkelhalbierende und Mittelsot gehen somit beide durch diesen Punkt N und zwar ist dies, da zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden, ihr einziger Schnittpunkt, so daß also ein Schnittpunkt im Innern des Preiecks, wie wir ihn in Fig. 63 ans

genommen hatten, nicht möglich ift.

Damit ist Fig. 63 erledigt. Nun Fig. 64! Da ACBN, wie soeben bereits bewiesen (\mathfrak{f} . Fig. 76), ein Sehnenviereck ist, so betragen ein Paar gegenüberliegende Winkel dieses, nämlich \prec CAN und \prec CBN, nach bekanntem Sahe zusammen 2R; mithin ist — abgesehen von dem besonderen Falle, daß jeder dieser Winkel ein Rechter und \triangle ABC wirklich gleichschenklig ist — der eine dieser beiden Winkel spitz, der andere stumpf. Somit können sie nicht beide, wie in Fig. 64 angenommen war, Nebenwinkel von rechtwinkligen Dreiecken sein. Vielmehr wird nur der eine dieser beiden Winkel, der stumpse, — in Fig. 76 \prec CAN — Nebenwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks sein, während der andere Winkel, der spitze, — in Fig. 76 \prec CBN — dem entsprechenden rechtwinkligen Dreieck FBN als Innenwinkel angehört. Von den Fußepunkten der Lote NF und NE liegt also der eine auf der betreffens den Dreiecksseite selbst, der andere aber auf deren Verlängerung.

Wendet man nun auf die richtiggezeichnete Figur, also auf Fig. 76, basselbe Schlußversahren an, wie vorher auf die unrichtigen Figuren,

so erhält man zwar ebenso wie zuvor:

CE = CF

und

AE = BF

aber ber Unterschied besteht darin, daß sich die eine Dreiecksseite, CA, als Differenz dieser Strecken CE und AE, die andere Dreiecksseite, CB, dagegen als Summe der entsprechenden Stücke (CF und FB) darstellt. Wie zuvor, würden wir also jeht die Gleichung haben:

$$CF + BF = CE + AE$$
,

aber hieraus folgt nicht: CB = CA, sondern vielmehr:

CB = CA + 2AE.

Unsere Gleichung besagt also, daß die beiden Dreiecksseiten CB und CA ungleich sind und die größere von ihnen, CB, um das doppelte Stück von AE länger ist als die kleinere. CA.

X. Der Fehler liegt barin, daß, wenn man die Stücke I und IV der Fig. 65 so aneinanderslegt, wie in Fig. 66, die so entstehende Linie ABC (f. Fig. 77) keine gerade, sondern eine gebrochene Linie ist, die in B einen Knick hat. Wäre die Linie nämlich gerade, so müßte die Proportion bestehen:

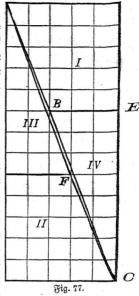
$$AD:BE = DC:EC$$

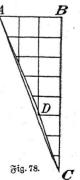
ober: 5:3 = 13:8,

eine Proportion, die falsch ist, da aus ihr durch Multiplikation der äußeren und der inneren Glieder folgen würde: 40 = 39. Ebenso wie mit den Stücken I und IV, ist es mit II und III. Die Fig. 66 ist also absichtlich falsch gezeichnet. Legt man die 4 Stücke I, II, III, IV in richtiger Wiedergabe aneinander, so entsteht vielmehr die Fig. 77, die im Innern eine Lücke, das langgestreckte Parallelogramm ABCF, ausweist. Der Flächeninhalt dieses ist gerade gleich dem eines der 64 Feldquadrate; es ist dies das 65. Feld, das

wir in unsere faliche Zeichnung (Fig. 66) unmerklich einschmuggelten, in= bem wir biese in Wirklichkeit bestehende "Lüde" verwischten.

Ühnlich steht es mit Fig. 67. Die lange schräge Linie bort würde bei richtiger Zeichnung an zwei Stellen einen Knick haben. Der in Fig. 67 mit III bezeichnete Gebietssteil hat bei richtiger Zeichnung nämlich das Aussiehen von ABCD unserer Fig. 78, und zwar ist ADC eine gesbrochene Linie. Daß ADC nicht gerade sein kann, zeigt die Unrichtigkeit der Proportion 3:2 = 8:5. Die gerade Verbindungslinie von Aund Cliegt außerhalb des Vierecks ADCB, und nicht dieses, sondern das Dreieck ACB ist kongruent dem Stück III der Fig. 65. Wenn wir also das Viereck ABCD sälfschlich für das Dreieck ABC seben, lassen wir das Dreieck ABC





zwar wird diese Unterschlagung in Fig. 67 zweimal begangen. Die beiden so sorteskamotierten Dreiecke haben zusammen den Flächenzinhalt des 64. Feldquadrats, das beim Übergang von Fig. 65 zu Fig. 67 verschwindet.

XI. Der Trugschluß kommt dadurch zustande, daß $\frac{z-x}{x-z}=-1$ gesetzt wird. Freisich ist im allgemeinen $\frac{z-x}{x-z}=-\frac{x-z}{x-z}=-1$, jedoch gilt dies nur so lange, als x-z von 0 verschieden ist. Ist aber x-z=0, also auch z-x=0, so ist unser Außbruck $\frac{z-x}{x-z}=\frac{0}{0}$, also unbestimmt (über daß Dividieren resp. "Heben" durch Null vgl. oben unter I und II). Dieser besondere Fall liegt nun aber hier vor, wie sich leicht ergibt: Es war die Proportion $\frac{z}{x+y}=\frac{x}{y+z}$ hergeleitet; auß ihr solgt $yz+z^2=x^2+xy$ ober $(x-z)\cdot(x+y+z)=0$. Diese letzte Gleichung verlangt, daß ein Produkt von zwei Faktoren — einerseits (x-z), andererseits (x+y+z) — Null wird. Dann muß einer der Faktoren den Wert 0 haben und, da x+y+z, die Linie AC unserer Figur, nicht gleich Null ist, so muß eben x-z=0 sein

XII. Der Trugschluß beruht natürlich darauf, daß nur der große Kreis abrollt und nicht der kleine. Rollte der kleine Kreis auf der Geraden CD ab, so würde er eine volle Umdrehung erheblich früher

als jett, also por der Stellung D, beendet haben.1)

XIII. Weil A, C, B, D vier harmonische Punkte sind, ist $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$. Da nun AD > AC, so ist BD > BC; F, die Witte von CD, muß also rechts von B, d. h. außerhalb des Kreises, liegen, und nur unsere unrichtige Zeichnung ermöglichte den Trugschluß.

XIV. Nehmen wir, um bequeme Verhältnisse zu haben, an, daß die Schildkröte und Achilles sich, wie es schon in Fig. 71 gezeichnet

¹⁾ Die Bahnkurve, die ein bestimmter Punkt des Scheibenumsangs bei unserer Bewegung macht. ift übrigens eine sogenannte "gemeine Zytloide", und zwar ist die Begstrecke, die dieser Scheibenpunkt von A bis B zurückzlegt, gleich dem viersachen Scheibendurchmesser. Die Bahnkurve eines bestimmten Punktes der Peripherie des kleinen Kreises ist eine sogenannte "verkurzte Zyksoide".

war, in gerader Linie bewegen, und gwar Achilles mit einer Geschilbfröte bagegen mit einer Geschwindigkeit, die nur $^{1}/_{10}$ von jener, alfo 10 m = 1 dkm (Defameter) pro Minute beträgt. Der anfängliche Borsprung der Schildfrote sei 100 m. Alsbann gelangt Achilles bereits nach 1 Minute an ben anfänglichen Standpunkt S ber Schildfröte; diese ist inzwischen um 1 dkm, bis S_1 , weiter gekrochen, und Achilles braucht $^1/_{10}$ Minute, um auch nach dort zu gekangen. Inzwischen ist die Schildkröte jedoch um 1 m weiter gekrochen bis S_2 , und Achilles braucht 1/100 Minute, um nach bort zu kommen. In dieser Beit ift die Schilbfrote um 1 dem weiter gefrochen bis Sa, wofür Achilles bann 1/1000 Minute gebrauchen würde, und so weiter. Die ganze Zeitspanne, auf die fich das Raisonnement Zenos bezieht, umfaßt also insgesamt 1 Minute $+\sqrt[4]{_{10}}$ Minute $+\sqrt[4]{_{100}}$ Minute $+\sqrt[4]{_{1000}}$ Minute + 1/10000 Minute und so weiter. Innerhalb dieser Zeitspanne ist Zenos Behauptung, daß Achilles die Schildkröte nicht einhole. unzweifelhaft richtig. Beldes ift nun aber die Große biefer Zeitspanne? Die Reihe ber Zeitelemente lautet, ein wenig anders geschrieben, so: 1 + 0,1 +0.01+0.001+0.0001+... Minuten ober 1,1111... Minuten, und nach bekannten Saken über die periodischen Dezimalbrüche find bies 11/4 Minuten. Die ganze Zeitspanne, auf die sich Zenos Raisonnement erstreckt, umfaßt also nur 11/9 Minuten: Innerhalb dieser Zeit holt Achilles die Schilbfrote nicht ein, jedoch wird im Laufe biefer Beit ber Abstand zwischen beiben kleiner und kleiner, und am Ende Diefer Zeitspanne ift ber Abstand so klein, daß er kleiner ift als jede noch fo fleine Große. Denn ber Bert unferer unendlichen Reihe ber Beitgrößen: 11/9 Minute, schließt auch die entferntesten, noch fo kleinen Beitelemente ber Reihe mit ein. Gin Abstand nun, ber fleiner ift als jede noch fo kleine Größe, ift aber offenbar geradezu Null, b. h. nach 11/9 Minuten hat Achilles die Schildfrote eingeholt und wurde nun, wenn beibe fich mit ihren bisherigen Geschwindigkeiten weiter bewegen. im nächsten fleinsten Zeitelement vorankommen1).

XV. Die Schlußweise von B ift fehlerhaft; bagegen hat A Recht:

¹⁾ Aristoteles suchte bas Sobhisma Zenons dadurch zu entkräften, daß er bemerkte, die Linie als Kontinuum durse nicht mit der Gesamtheit ihrer Punkte identissiert werden; denn bei dieser Aussassung würden alle endelichen Linien, weil sie gleich viele, nämlich unendlich viele Punkte enthalten, unter sich gleich lang sein.

Es find, wenn wir dies ausführlich angeben, folgende verschiedene Bilber nach einem Burf der drei Münzen möglich (k = Kopfseite, w = Bappenseite):

1) kkk 3) kwk 5) wkk 7) wwk 2) kkw 4) kww 6) wkw 8) www

Von diesen acht Fällen sind nur zwei günstig: der erste und der letzte; die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des erwarteten Ergebnisses beträgt also: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. — Das Schlußversahren des B nimmt an, daß die ungünstigen Fälle nur ebenso zahlreich sind wie die günstigen, und übersieht dabei solgendes: Daß beispielsweise zwei Münzen k zeigen, die dritte aber w, kommt nicht bloß in einem Falle vor, sondern in dreien, nämlich in Fall 2, 3, 5 der obigen Zusammenstellung, indem nämlich das w entweder auf der dritten oder aber auf der zweiten oder schließlich auf der ersten Münze erscheint. Ganz entsprechend ist es mit der Kombination, die aus zwei w und einem k besteht (Fall 4, 6, 7). Im Gegensaß dazu kann der günstige Fall kkk nur auf einerlei Art zustande kommen, und dasselbe gilt sür den anderen günstigen Fall, nämlich w w w. Die ungünstigen Fälle sind also dreis mal so häusig wie die günstigen.

Galton machte übrigens auch einen praktischen Versuch und benutet hierfür drei Würfel, wobei er festsetzte: Die geraden Würselzahlen bebeuten "Kopf", die ungeraden "Wappen". Er tat nun mit den drei Würfeln 120 Würfe; der Fall, daß alle drei Würfel gerade Zahlen oder aber alle drei ungerade Zahlen aufwiesen, trat dabei 28 mal

ein. Der theoretisch zu erwartende Wert wäre 30.

Mathematische Unterhaltungen.

Mathemat. Unterhaltungen u. Spiele. Von Dr. W. Ahrens in Rostock. In 2 Bänden. 2., verb. Aufl. gr. 8. I. Bd. Mit 200 Fig. [IV u. 400 S.] 1910. Geb. M. 7.50. II. Bd. Mit 128 Fig. [VI u. 455 S.] 1918. Geh. M. 13.—, geb. M. 14.—

M. 7.50. II. Bd. Mit 128 Fig. [VI u. 455 S.] 1918. Geh. M. 13.—, geb. M. 14.—
Die Darstellung ist so gehalten, daß auch der Nichtmathematiker die allgemeinen Auseinandersetzungen über die Aufgaben und Spiele verstehen und aus dem Buche nicht nur die ihnen zugrunde liegenden Regeln selbst entnehmen, sondern auch in ihre Theorie eindringen kann. Der Mathematiker findet in ihm eine wissenschaftliche Begründung der Probleme, die in historischer Entwicklung und unter Berücksichtigung der vorhandenen Literatur auch zu den allgemein wissenschaftlichen Problemen in Beziehung gebracht sind.

Scherz und Ernst in der Mathematik. Von Dr. W. Ahrens. 2. Aufl

[ca. 520 S.] gr. 8. (Unter der Presse 1919.)

Das Buch bietet eine unerschöpfliche Fülle von geflügelten und ungeflügelten Worten aus dem Munde der bedeutenderen Mathematiker, Astronomen und Physiker, die auf ihre Gewohnheiten, Anschauungen, wissenschaftlichen Bestrebungen ein helles Licht werfen.

Mathematiker-Anekdoten. Von Dr. W. Ahrens. Mit 9 Bildnissen. [IV u. 56 S.] 8. (MPhB 18.) Steif geh. M. 1.—

Das Büchlein bietet seinen Lesern eine Reihe interessanter oder amüsanter Vorfälle aus

dem Leben hervorragender Mathematiker.

Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Plaudereien für kleine und große Freunde der Rechenkunst. Von Oberrealschuldir. Dr. W. Lietzmann in Jena. Mit 18 Fig. [IV u. 56 S.] 8. 1916. (MPhB 25.) Steif geh. M. I.—

"Ob es sich ums Zählen und um Zahlsysteme, um astronomische, physikalische oder praktische Fragen handelt, ob von Schach, Kriegsentschädigung, Molekülen, Geschoßphotographien, Spaltpilzen usw. die Rede ist, immer herrscht eine federnde Leichtigkeit in der Darlegung wie im Stil."

(Frankfurter Zeitung.)

Wo steckt der Fehler? Von Oberrealschuldir. Dr. W. Lietzmann in Jena und weil. Mag. scient. V. Trier in Kopenhagen. 2. Aufl. Mit 29 Fig. [IV u. 57 S.] 8. 1913. (MPhB 10.) Steif geh. M. 1.—

"Ein famoses kleines Büchlein voll mathematischer Schnurren und Trugschlüsse, an denen man Mathematik und Logik lernen kann." (Prometheus.)

Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Oberrealschulprofessor Dr. Ph. Männchen in Gießen. 2. Aufl. [IV u. 48 S.] 8. 1913. (MPhB 13.) Steif geh. M. 1.—

"Die verblüffend schnellen Lösungen von scheinbar schwierigen Beispielen erklärt Verf. so leicht faßlich, daß es selbst ohne besondere Vorkenntnisse möglich ist, solche Beispiele selbst schnell zu lösen." (Österreichische Handelsschulzeitung.)

Anfertigung mathematischer Modelle. Von Oberlehrer Dr. K. Giebel 'n Zeitz. Mit 42 Fig. u. 3 phot. Taf. [IVu. 52 S] 8. 1915. (MPhB 16.) Steifgeh. M. 1.—

"Dieses kleine "mathematische Praktikum" dürfte den Schülern manche Freude bereitener auch für Mathematiker der pädagogischen Seminare kann es wegen seines technischiktischen Teiles empfohlen werden." (Die höh. Mädchenschulen.)

as chinesisch-japanische Go-Spiel. Eine systematische Darstellung .nd Anleitung zum Spielen desselben von Hofrat Dr. L. von Pfaundler, Prof. an der Universität Graz. Mit zahlreichen erklärenden Abbildungen. [VI u. 74 S.] 8. 1908. Geb. M. 3.—

"Es dürfte kaum eine geeignetere Einführung in dieses geistreiche Spiel möglich sein."
(Literarisches Zentralblatt für Deutschland.)

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Über das Wesen der Mathematik. Von Geh. Hofrat Dr. A. Voss, Prof. a. d. Univ. München. 2., verm. Aufl. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1913. Steif geh. M. 4.—

In dieser kleinen Schrift ist der Versuch gemacht, an der Hand der historischen Eutwicklung der Mathematik ihr Wesen in einer auch dem nicht speziell mathematisch Gebildeten zugänglichen Form zu schildern.

Über die mathematische Erkenntnis. Von Geh. Hofrat Dr. A. Voss, Prof. an der Universität München. [VI u. 148 S.] Lex.-8. 1914. Geh. M. 5.—

Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart. Von Geh. Hofrat Dr. A. Voss, Prof. an der Universität München. In einem Bande mit Die Verbreitung mathem. Wissens u. mathem. Auffassung. Von Dr. H. E. Timerding, Prof. an der Techn. Hochschule Braunschweig. [VI u. 161 S.] Lex.-8. 1914. Geh. M. 6.—. (KdG III, I Nr. 1 u. 2.)

Die drei genannten Schriften aus der "Kultur der Gegenwart" ergänzen einander: in der ersten hebt Voss die hauptsächlichsten erkenntnis-theoretischen Gesichtspunkte hervor, unter denen sich die Frage nach dem Wesen der mathematischen Erkenntnis betrachten läßt, während die zweite Abhandlung die Beziehungen der Mathematik zur technischen und wissenschaftlichen Kultur untersucht. Die Schrift Timerdings entwirft ein knappes Bild der Entwicklung der mathematischen Kenntnisse, der heutigen Formen des mathematischen Unterrichts und seiner Zukunftshoffnungen.

Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Mit vier Abhandlungen (in deutscher Übersetzung) über die Kreismessung von Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Von Dr. F. Rudio, Prof. am Polytechnikum Zürich. Mit 21 Fig. [VIII u. 166 S.] gr. 8. 1892. Geh. M. 4.—, geb. M. 4.80.

Die Quadratur des Kreises. Von Gymn.-Prof. E. Beutel in Stuttgart. Mit 15 Fig. [IV u. 75 S.] 8. 1913. (MPhB 12.) Steif geh. M. 1.—

Gedenktagebuch für Mathematiker. Von Prof. Dr. F. Müller in Dresden. 3. Aufl. Mit einem Bildnis des Verf. [IV u. 121 S.] gr. 8. 1912. Steif geh. M. 2.—

Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. Von Prof. Dr. F. Müller in Dresden. [X u. 252 S.] gr. 8. 1909. Geh. M. 7.—, geb. M. 8.—

Bildnisse bedeutender Mathematiker.

G. H. Abel (M. 1.-). Guslav Bauer (M. 1.-). E. Beltrami (M. 1.-). M. Cantor (M. 1.60).

7. Caspary (M. 1.-). A. Clebsch (M. 1.60). L. Cremona (M. 1.60). Leonhardus Euler (M. 1.-).

5. Fuchs (M. 1.-). C. F. Gauss (M. 1.-). H. Graßmann (M. 1.-). W. R. Hamitton (M. 1.60).

7. C. V. Hoffmann (M. 1.-). C. G. J. Jacobi (M. 1.20). E. de Jonquières (M. 1.-). Lord Keivin (M. 2.-). L. Kronecker (M. 2.-). P. G. Jait (M. 2.-). Franz Neumann (M. 1.-). Ernst Schröder (M. 2.-). O. Schlömilch (M. 1.60). J. Tannery (M. 2.-). P. L. Tschebyschef (M. 1.60). H. Weber (M. 1.-).

Paschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen herausg. von Hofrat Dr. F. Auerbach, Prof. in Jena, and Dr. R. Rothe, Prof. in Berlin, I. Jahrg. 1909. Mit Bildnis Lord Kelvins. XLIV u. 450 S., unbedruckt 12 S.] 8. Geb. M. 6.— II. Jahrg. 1911. Mit Bildnis H. Minkowskis. [IX u. 567 S.] 8. Geb. M. 7.— III. Jahrg. 1913. Mit Bildnis r. Kohlrauschs. [X u. 463 S.] 8. Geb. M. 6.— IV. Jahrg. [In Vorb.]

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen

Phisik und Kulturentwicklung

durch technische und wissenschaftliche Erweiterung der menschlichen Naturanlägen

Von Geh. Hofrat Brof. Dr. Otto Wiener

Mit 72 Abb. Beh. M. 4.40, geb. M. 5.50

Der bekannte Leipziger Phösiker zeigt in interessanter Weise, wie durch Erweiterung der Sinne mit Hilse von Apparaten, der Geistesanlagen durch das künstliche Gedächtnis, die Bücher, und durch abkürzende wissenschaftliche Verfahren, und der Gliedmaßen durch Werkzeuge und Maschinen die Mannigfaltigkeit und der Freiheitsumfang der menschlichen Betätigungen vergrößert wird. Das Werk gibt eine bisher noch nicht vorhandene knappe Darstellung der Leistungen der Naturwissenschaft und Technik.

Aus eigener Kraft

Bilder von deutscher Technik und Arbeit für die reifere Jugend

Von Diplom=Ingenieur C. Weihe

Mit 20 Abbildungen auf 10 Tafeln. Kart. M. 3.60, geb. M. 4.60

Der durch seine literarischen Arbeiten in Kreisen der Technif und Industrie wohlbekannte Verfasser gibt in dem vorliegenden Buche im Rahmen einer spannenden Erzählung der deutschen Jugend eine Schilderung wirklicher Technik wie sie bisher noch nicht vorhanden. An Hand von Erlebnissen und Eindrücken, die der Verfasser durch Kenntnis von Werken unserer Großeindustrie gesammelt hat, zeigt er in Wort und Vild, wie die deutsche Technik "aus eigener Kraft" auf den verschiedensten Gebieten viersähriges Ausharren ermöglicht hat, und wie sie die Wurzel ist, aus der die Wiedererstarkung unseres Wirtschaftslebens entstehen muß.

Auf famtliche Preife Teuerungszuschläge des Berlages und der Buchhandlungen

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverstandlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wiffens

Jeder Band ift einzeln täuflich

Beheftet M. 1.20.*) gebunden ML 1.50*)

in Leipzig und Berlin

Berlag B. G. Teubner

Verzeichnis der bisher erschienenen Bande innerhalb der Wiffenschaften alphabetisch geordnet Werte, die mehrere Bande umfaffen, auch in einem Band gebunden erhaltlich

I. Religion, Philosophie und Pinchologie.

Afthetit. Bon Brof. Dr. R. Samann. 2. Muff. (Bb. 345.) — Einführung in die Geschichte ber A. Bon Dr & Rohl. (Bb. 602.) Aitrologie fiehe Sternglaube. (Bb. 602.) Aufgnben u. Liebe b. Menichenlebens, Bon Brof Dr F. Unold. 4. Aufl. (Vob 12.) Bergson, Henri, der Bhitosoph moderner Mella. Bon Ligarry Dr E. Dit (Bb. 480.) Metta. Von Tiarrer Dr E. Ott (Bd. 480.) Berkelen siehe Lode, Berkelen, Hume. Buddha. Leben n. Lehre d. Auddha. Von Brof. Dr. A. Bischel. 3. Aufl., durch-gel. von Brof. Dr. S. Lüder 3. Mit I Titelbild u. 1 Tat. (Bd. 109.) Calvin, Jahann. Von Bfarrer Dr G. So-de ur. Mit 1 Vidents. 2 Aufl. (Bd. 247.) Thristentum. Aus der Werdezeit des Chr. Brof. Dr. F. Gessellen 2. A. (Bd. 54.) Down Urchristentum 3. Aacholzisenus. Brof. Dr. d. Frhr. d. Soden. (1991.) Christentum und Beltgeschichte seit der Reformation. Von Brof. D. Dr. K. Reformation. Bon Brof. D. Dr. R. Sell 2 Bbe (Bd. 297, 298.) Sell 2 Bbe (Bb. 297.29)
- fiehe Jesus, Mpstit im Christentum Ethit. Grundslige ber G. Dit bel Berud. fichtigung ber padagog. Brobleme. Bon G. Benticher. (285. 397.) – f a Aufg. u. Liele. Serualethif, Sittl. Lebensanschauungen. Willensfreiheit. Freimaurerei. Die. Gine Ginführung in ihre Anschauungswelt u. ihre Geschichte. Bon Geh. Kat Dr. L. Keller. 2. Aufl. von Geh. Archivrat Dr. G. Schuster. (463.) Gricaifde Religion fiehe Religion. Dandichriftenbeurteilung, Die Gine Gin-führung in die Pfnchol b. Sandichrift. Bon Krof Dr G. Schneibemubl.

Mit 51 Sandichriftennachbild. i T. u. 1 Taf. 2. durchges. u. erw. Aufl. (Bb. 514.) Deidentum siehe Mostik.

Selleniftifde Religion fiehe Religion. Derbarts Lehren und Leben. Bon Baftor D Glagel. 2. Mufl. Mit 1 Bilbnis Berbarts. (Bb. 164.)

Sume fiehe Lode, Bertelen, Sume Onpnotismus und Suggeftion. Bon Dr. (28b. 199.) | G. Tromner. 3. Aufl.

Beiniten, Die. Gine hiftor. Sfige. Bon Brof. Dr. S. Boehmer. 4.Aufl. (Bb.49.) Seins. Babrheit und Dichtung im Leben Jeiu. Bon Kirchenrat Biarrer D. Dr. B. Mehlhorn. 2. Aufl. (Bb. 137.) — Die Gleichnisse Feiu. Zugleich Anleitung gum quellenmäßigen Berftand-nis ber Evangelien. Bon Brof. D. Dr.

nts der Edangeiten. Von Stof. D. dr. H. Beinel. 4. Aufl. (Bd. 46.) Jiraelitische Keligion siehe Keligion. Kaut. Immanuel. Darftellung und Würdigung. Bon Broi. dr. D. Küspe. 4. Aufl. hrsg. b. Brof. dr. A. Weiser. Mit 1 Bildnis Kants. (Bd. 146.) Kirche. Erimingslich allegies i Kirchelagie d. Mer-

Kriminalhindologie f. Bindologie d. Berbrechers, handichriftenbeurteilung. Lebensanifdauungen f. Sittliche L. Lode. Berfelen, Dume. Die großen engl. Bhitol. Bon Oberlehrer Dr. P. Thore

Thor. mener Louif. Grundrif d. E. Bon Dr (Bb. 637.) Grau. Luther. Martin & u. d. deutsche Refor-mation. Bon Brof. Dr. B. Sohler. 2.Aufl. Mit 1 Bildnis Luthers. (Bb. 515.) f. auch Bon & zu Bismard Abt. IV. Dednnil d. Ceitieglebens, Die B Geb. Mebiginalrat Direftor Brof. Dr. M. Berworn. 4. Aufl. Mit Fig. (3b. 200.) Miffien. Die evangelifche. Geschichte Ar-

beitsmeife. heutiger Stand. G. Baubert. (Bb. 406.) Muftif in Deidentum u. Chriftentum. B. Brof Dr. Edv. Behmann. 2. Aufi. B. Berf. burchgef. überfes. b. Anna Grundt-

vig geb. Quittenbaum. (Bd. 217.) Muthologie, Germanische. Bon Brof Dr. I von Regelein. 2. Aufl. (Bb. 95.) Katurphiloiophie. Die moderne. B. Briv.-Doz. Dr. I W. Berweben. (Bb. 491.) Balditina und feine Geschichte. Bon Brof. Dr. H. Hlan und 6 Anischt. (Bb. 6.) 2 Kart., 1 Blan und 6 Anischt. (Bb. 6.) M. n. fehrtur in 5 Schrtanischen. - B. u. f. Ruttur in 5 Jahrtaufenben.

Mach d. neuest Ausgrabgn. u. Forschign. dargest. von Brof. Dr. B. Thomsen. bargest. von Brof. Dr. B. Thom (en. 2., neubearb. Aufl. M. 37 Abb. (260.)

Jeder Band gebeftet II. 1.20 Aus Natur und Geisteswelt Jeder Band gebunden III. 1.50 Derzeichnis ber bisber ericienenen Bande innerhalb der Wilfenschaften alphabetifch georonet

oussen. Bon Brof. Dr. B. Senfel 2. Ausl. Dit 1 Bildnis. (Bb. 1861 Baulns. Der Apstiel, n. fein Bert. Bon Brof Dr. E. Biider. (Bb. 309) Rouffean. (Bb. 309) Pillssophie, Die. Einführ. in d. Wissensichaft, ihr Wesen u. ihre Brobleme V. Oberrealschuldtr. h. Richert. 3. Aust. Shovenhauer, Geine Berfonlicht., f Lehre, f. Bedeutg. B. Oberrealfontbir. D. Ki-dert. 3. Aufl. Mit I Vildnis. (Bd. 81.) Seele des Meisten, Die. Bon Geh. Nat Brof. Dr. J. Rehmfe. 4. Aufl. (Bd. 36.) — iiehe auch Binchologie. Sernalethil. Bon Brof. Dr. D. E. Tie-Doerrealimitott. H. Richert. 3. Aufl.

(Bb. 186.)

— Einführung in die Bh. Bon Krof.
Dr. A. Kichter. 4. Aufl. von Krib.

Dr. N. Brahn. (Bb. 155.)

Hührende Tenfer. Geschicht! Einleit in die Khilosophie. Bon Brof. Dr. J.

Cohn. 3. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bb. 176.)

Die Khil. d. Segenw. in Deutschland.

B. Krof. Dr. D. Külve. 6. Aufl. (41.)

Bhilasphilder Matterhuch R. Feremerbing. (3b. 592) Sinne d. Menichen, D. Ginnesorgane und Sinnesempfindungen. Bon Sofrat Prof. Dr. 3. K. Kreibig. 3., verbesserte Aufl. Mit 30 Abb. (Bd. 27.) (Bd. 27.) Sittl. Gebensanfiganungen d. Gegenwart. Bon Geh. Kirchenrat Krof. D. D. Kirn. 3. Auft. burchges. von Brof. D. Dr. D. - Philosophifdes Borterbud. B. Cher-lehrer Dr. B. Thormener. 2. Auft. (28b. 520.) Boetil. Bon Dr. R. Müller-Freien-Stephan. (28b. 177.) 3b. 460.) - f. a. Ethit, Serualethit. fel3. fels.
Sháslagie, Einfihr. i.d. Vi. B. Brof. Dr.
E von After. Mit 4 Abb. (Bb. 492.)
— Pjudologie d. Lindes. B. Broj. Dr. R.
Gaupv. 4. Auft. W. 17 Abb. (213 214.)
— Pjudologie d. Berbreders. (Kriminal-bfuchol.) B. Strafantalisdir. Dr. med. B.
Bollis. 2 Auft. W. 5 Tiagr. (Bb. 248.) Spencer, berbert. Bon Dr. R. Comarge Dit 1 Bildnis. (Bb 245.) Staat und Rirde in ihrem gegenfeitigen Berhaltnis feit ber Reformation. Bon Paffor Dr. A. Bfanntuche. (Bb. 485.) Sternglaube und Sterndeutung. Die Ge-ichichte u. b. Befen ber Aftrologie. Unter - Einführung in die erperiment. Binds-logie. Bon Brof. Dr. R. Brauns-haufen. Mit 17Mbb. i. T. (Bb. 484.) Mitw. von Seh. Kat Brof. Dr. K. Bezold bargestellt von Geh. Hofrat Brof. Dr. Fr. Boll. Mit 1 Cternfarte - f. auch Sanbidriftenbeurteilg., Sopnou. 20 Abb. (Bb. 638.) tismus u. Sugg. Mechanit d. Geistesleb., Boetit. Seele d. Menfchen, Beranlag. u. Becerb. Willensfreiheit; Kädag. Abt. II. Reformation siehe Calvin, Luther. Suggestion f. Sponotismus. Teftament, Das Mite, feine Gefdichte und Bedeutung. Bon Brof. Dr. B. Thom -Atformation siehe Calbin, Luther. Meligian. Die Stellung der A. im Seiktesleben. Bon Konsistorialrat Lic. Dr. B. falweit. 2. Aufl. (Bd. 225.)
— Arlig. u. Bhilosophie im alten Orient. Bon Brof. Dr. E. bon After. (Bd. 521.)
— Einführung in die allg. A.-Seichichte. Bon Brof. D. Dr. R. Beth. (Bd. 658.)

At Maltisian der Meichen Ban Krof. fen. (3b. 609.) Renes. Der Tert d. R. T. nach feiner geichichtl. Entwickl. Bon Div.-Biarrer M Bott. Mit Taf. 2. Aufl. (Bb. 134.) Theologie. Ginfibrung in die Theologie. Bon Bastor M. Cornils. (Bb. 347.) Urdriftentum fiebe Chriftentum. Beranlagung u. Bererbung, Seiftige. Die Religion ber Griechen, Bon Brof Dr. phil. et med. G. Som mer. (36. 512.) Dr.G. Camter. M. Bilberanh. (Bb. 457.) Beltonidanung. Griediide. Bon Brof. - bellenitiich-rom, Religionsgeich, Bon Hofpredig. Lie U. Jacobn. (Bb. 584.) Dr. M. Bunbt. 2. Muff. (Bb. 329.) Beltanicaunngen.D., d. groß. Dhilojophen der Reugeit. Bon Brof. Dr. B. Buffe. - Die Grundzüge der ifrael. Religions-geschichte. Bon Brof. Dr. Fr. Giefe-brecht. 3. Aufl. Bon Brof. Dr. A. 6. Aufl., hreg. v. Geh. Sofrat Brof. Dr R. Saldenberg. (85.56.) Bertholet (Bd. 52.) Beltentstehung. Entsteh. d. 28. n. d. G-de nach Sage u. Bissenschaft Bon Erof. dr. M. B. Beinstein. 2. Aufl. (Bb. 28.3.) - Religion u. Raturmiffenfd. in Rampf n. Frieden. Gin geschichtl. Rudbl. Bon Riarrer Dr. M. Bfannfuche. 2. Aufl. (粉6.141.) Beituntergang. Untergang ber Belt und Der Erde nach Cage und Biffenichaft. 2 - Die relig. Strömungen der Gegen-wart. Bon Superintendent D. A. S. Brof. Dr. M. B. Wein ftein. (Bd. 470.) A. O. Braafd. 3. Anfl. (Bd. 66.)
— f. a. Bergfon, Bubdha, Calvin, Christentum, Luther. Billensfreiheit. Das Broblem der 2B. Bon Brof. Dr. G. F. Lipps. (230. 383.)

II. Padagogit und Bildungswefen.

f.a. Ethit. Mechan. b. Seiffesleb. Binchol

Amerikanisches Bildungswesen siehe Techn. Dididulen, Univerlidten.
Dochichulen, Univerlidten.
Berufswahl, Bezabung u. Arbeitsleiftung
in ihren gegenkeitigen Beziehungen. San
m ünch. M. Ribn. Baulsens. (186. 186.) in ihren gegenseitigen Beziehungen. Bon 28. J. Ruttmann. M. 7 Abb. (Bb. 522.) - f. auch Bolisbildungsmefen.

Teber Band gebeftet III. 1.20 Aus Matur und Geifteswelt Jeder Band gebunden III. 1.59 Religion u. Philosophie, Padagogit u. Bildungswefen, Sprache, Citeratur, Bildende Kunft u. Mufit

(Bb. 459.)

- Teutige & in dans n. Schule. Von Rektor J. Tews. 3. Aust. (Bb. 159.) — siehe auch Großstadtpädagogik. (Bb. 159.) Bortbildungsichulmeien, Das dentiche. Bon Dir. Dr. & Schilling. (Bd. 256.) Frödel, Friedrick. Bon Dr. Joh. Bru-fer. Mit 1 Tafel. (Bb. 82.) Brottadtpadagogit. B. Rettor 3. Tem 3. (Bb. 327.) - fiebe Erzieh., Schulfampfe b. Gegenm. Dandichriftenbeurteilung. Die. Gine Ginführ. in die Pinchol. ber Sandichrift. B. Brof. Dr. G. Schneibemühl. Mit 51 Sandidriftennachbilb. i. T. u. 1 Taf. 2., burchges. u. erm. Aufl. (Bb. 514.) Derbarts Lehren und Leben. Bon Bastor D. Flügel. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis herbarte. (285. 164.) Dilfsichalweien, Bem. Bon Rettor Dr B. Maennel. (Bb 73.) Maennel. Dochschulen f. Techn. Sochschulen u. Univ. Jugendoftege. Bon Fortbildungsschulleb-rer B. Biemann. (Bd. 434.) Leibesübungen fiehe Abt. V. Baddenidule, D. höhere, in Deutidland. Mödenichule. D. hohere, in Deurigians. B. Oberlehrerin M. Martin. (Bb. 65.) Mittelichule [. Bollse n. Mittelichule. Bödagogit. Allgemeine. Bon Brof. Dr. Th. Fiegler. 4 Aufl. (Bb. 83.) — Experimentelle B. mit bef. Rüdflicht auf die Erzich. durch die Tat. Bon Dr. W. K. Lan. 3., verb. Aufl. Mit 6 Tert-abbildungen. (Bb. 224.) - f. Ergieh., Grofifadtpad., Sanbichriftenbeurteilung. Bincol., Beranlag. u. Bererb. Abi. I. Arcitektur fiehe Baufunft und Renaif- Bildende Runft, Bau und Leben ber b. & fancearchiteftur. afthetil. Bon Brof. Dr. R. Samann. 2. Muff. (3b. 345.) - fiebe auch Boetif u. Abt. L. Bautunft. Deutsche B. im Mittelalter, Won Geh. Reg.-Nat Brof. Dr. A. Mat-thaei I. Bon d. Anf. d., Austagang d. roman. Bautunft. 4. Auft. Mit 42 Abb. i. T. n. auf 1 Doppeltaiel. II. Goti! u. "Spätgotii". 4. Aufl. Mit zahlr. Abb. (Bb. 8/9.)

Ebb. Behmann.

Britaloggi. Leben und Ideen. Bon Geh. Reg.-Rat Brof. Dr. B. Ratorp. 3. Aufl. Ergiehung. 5. jur Arbeit. Bon Brof. Dr. Mit Bildn. u. 1 Brieffatsmile. (Bb. 250.) Rouffean. Bon Brof. Dr. B. Senfel. 2. Aufl. Mit 1 Bibnis. (Bb. 180.) Shulr iebe Hortbibungs- hillsichulse in. Zechn. Hoch- Mädch.- Vollsichulse Iniv. Schulbugiene. Von Proj Dr L Bur-gerijein. **3** Aufl N. 33 Jig. (B). 96.) Soulfampfe ber Gegenwart. Bon Reftor 3. Tems. 2 Muft. (Bb. 111.) fiebe Erziehung, Großstadtpad. Student, Der Leinziger, von 1409 bis 1909. Bon Dr. 28. Bruch müller. 1909. Bon Mit 25 Abb. (296, 273.) Sindententum, Geiciate Des dentichen St. Bon Dr. 28. Bruch muller. (20. 477.) Ledn. Socidulen in Rorbamerita. Bon Seh. Reg.-Rat Brof. Dr. S. Wüller. M zahlt. Abb., Karte u. Lagepl. (190.) Universität. Aber Universitäten u. Uni-M. zahlt. Abb., Karte u. Lagenl. (190.) Iniversität. Über Universitäten u. Uni-versitätsstud. B. Broi. Dr. Th. Zieg-ler. Mit 1 Vildu. Jumb. (183. 187. 411.) — Die amerikanliche U. B. Broj. 4Ph. D. E. D. Perry. Mit 22 Ubb. (18d. 206.) Unterrichtsweien, Das deutiche, der Gegen-mart. Bon Gest. Studiencat Deerreal-jchalteit kungsmeier. Des madere. Web. 299.) Bollsbildungsweien, Das moderne. Bon Stadtbibl. Dr. G. Frip. Mit 14 Abb. (Bb. 266.) Bolls- und Mittelicule, Die preugifde, Entwidlung und Riele. Bon G h. Reg.-u. Schulrat Dr A Sachie. (Bb. 432.) Beichenfunft. Der Brg aur B. Ein Buch-lein für theoretische u. praftische Selbsi-bildung. Bon Dr. E. Beber. 2. Aufl. Mit 81 Abb. und 1 Farbiaf. (189. 430.)

III. Sprace, Literatur, Bilbende Runft und Mufit.

Deutsche Baufunft feit b. Mittelalter b. 1. Ausg. d. 18. Jahrh. Renaissance, Barod, Rototo. Bon Geb. Reg.-Rat. Prof. Dr. Matthaei. 2. Aufl. Dit Abb. u. (9b. 326.) Tafeln.

– Dentige B. im 19. Jahrh. Bon Geh. Reg.-Rat Brof. Dr. A. Matthaei. Mit (285. 453.) 35 Mbb.

- siehe auch Renaissancearchitektur. Beethoven fiebe Saubn.

Von Dir. Prof. Dr. Th. Bolbehr. 2. Aufl. Mit 44 Abb. (Bb. 68.) — liche auch Bautunft, Griech. Kunft, (Bb. 68.) Griech. Runft, Impressionismus, Runft, Maler, Dalerei, Stile.

Björnfen liebe Ibfen. Bud. Bie ein Bud entfteht fiebe Abt. VI.

- i. auch Schrift- u. Buchweien Abt IV. Deforative Runft bes Aitertums, Die. Bon Dr. Fr. Boulfen. Dit 112 2156. (23b. 454.)

Deutsch fiebe Baufunft, Drama, Franenvenich fiese Sautinn. Stanta, Frankervickinug, Gelbeniage, Kunst. Literatur. Lyrif, Maler, Malerei, Berionennamen, Komantil, Strache, Bolfslieb, Bolfsliage,
Frama, Das. Bon Dr. B. Huffe, Mit
3 Abb. 3 Bbe. I: Bon b. Antife 3, franz,
Klassimus. 2. Auft., neubearb. bon
Sherf Dr. Wieblich, Braf. Dr. W. Oberl. Dr. Riedlich, Brof. Dr. R. 3mmelmann u. Brof. Dr. Glafer. II: Bon Berfailles bis Beimar. III: Bon ber Romantit gur Gegenmart. (25b. 287/289.)

3

Teder Band geheftet III. 1.20 Aus Matur und Geifteswelt Jeder Band gebunden mr. 1.50 Derreichnis der bisher erschienenen Bande innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet

Drama. D. dische. D. d. 19. Jahrh. J. s.
Entwidl. deeft. v. Brof. Dr. G. Bitton d.
fi. 4. Aufl. M. Bildn. debbeld. (Bb. 51.)
— siehe auch Grissparzer, haudtmann,
hebbel, Ihen. Ressing, Literatur, Schiller, Shafeipeare, Theater.
Dürer, Abrecht. B. Brof. Dr. R. Buston mann. 2. Aufl. von Geh. Reg. Rat
mann. 2. Aufl. von Geh. Reg. Rat
mann. 2. Aufl. von Geh. Reg. Rat
grof. Dr. A. Matthaei. Mit Titelb.
u. zahlt. Abbildungen.
Kranialist seek Barnen. Beffing. Bon Dr. Ch. Schrempf. einem Bilbnis. (86. 403.) Literatur. Entwidl. ber beutich. Q. feit Goethes Ted. B. Dr. 23. Brecht. (595.) Luril. Ceidichte d. deutich. L. f. Claudius. B. Dr. S. Spiero. 2 Aufl. 280. 254.1 Minnejang, Bollslieb. malet. Die aldeutiden, in Süddeutsch-land. Bon H. Nemit. Mit 1 Abb. t. Lert und Bilderanhang. (Bb. 464-1 Grangolifd fiebe Roman. Grauendichtung. Gefdichte ber deutiden &. i. a. Michelangelo, Impression. feit 1800. Bon Dr. b. Spiero. Mit 3 Bildniffen auf 1 Tafel. (Bb. 390.) Blateret, Die deutsche, im 19. Jahrh. Bon Brof. Dr. R. Samann. 2 Bande Tert. 2 Bande mit 57 ganzieitigen und 200 Gremdwortfunde. Bon Dr. Eltie Rich halbseitigen Abb., auch in 1 Halbperga-mentbb. zu M. 7.—. (Bb. 448—451.) Sartenfunkt siehe Abt. VI. Sriech. Komödie, Die. B. Geh.-Rat. Prof. Dr. A. Körte. M. Titelb. u. 2 Taf. (409.) — Riederlandiige M. im 17. Jahrh. Von Brof. Dr. H. Janben. Wit 37 216b. — liebe auch Rembrandt. [(Bh 373.) Sriechijche Kunit. Die Plütezeit der g. K. im Spiegel der Reliessarchunge. Eine Einf. i. d. griech Blavit. V. Brot. Dr. d. Wachtler. 2. A. W. zahlt. Abb. (272.) fiebe auch Petvrative Kunit. Eriechijche Aragoddie, Die. Bon Brof. Dr. [(8b. 373.) Marden f. Bolfemarchen. Didelangelo. Gine Ginführung in bas Berständnis seiner Berte. B. Brof. Dr. C. Silbebrandt. Mit 44 Ubb. (392.) Minnejang. Die Liebe im Liede bes deut-3. Gefiden. Mit. 5 Abb. i. Tert u. auf 1 Tafel. (Bo. 566.) ichen Mittelalters. Bon Dr. (Bd. 404.) Bruinier. Srillparzer, Franz. Der Mann u. b. Bert. B Brof. Dr. A. Rleinberg. M. Bildn. Mozart siehe Sandn. Musik. Die Grundlagen d. Tonkunft. Ber-Subrun liebe Nibelungenlieb. [(Bb. 513.) fuch einer entwicklungegeich. Darftell. b. Schol3. Darmonielehre. Bon Dr. 5. allg. Musitlehre. Bon Brof. Rietich. 2. Aufl. (28 (Bb. 560.) Dr. (35. 178.) Sarmonium f. Tafteninftrum. Mufitalifde Rompofitionsformen. 93. Sauptmann, Serhart. B. Brof. Dr. E. Gul-ger-Gebing. Mit 1 Bildn. 2., berb. S. G. Rallenberg. Band I: 2., berb. elementar. Tonverbindungen als Grund-(28b. 283.) dage d. Harmonielehre. Bd. II: Kontra-punktif u. Formenlehre. (Bd. 412, 413.) — Geschickte der Musik. Bon Dr. A. u. berm. Mufl. u. verm. uus. (20. 25%) daudn, Wogart, Berthoven. Ben Brof. Dr. C. Erebs. 2. Nuft. M. 4 Bilon. (92.) Sebbel, Friedrich. Bon Geh. Hofrat Brof. Dr. D. Walzel. W. 1 Bildn. 2. Nuft. Ginftein. (285. 438.) - Beispielsammlung zur ölteren Musik-geschichte. B. Dr. A. Einstein. (439.) - Musikal. Komantik. Die Plütezeit d. m. K. in Deutschland. Bon Dr. E. Fiel. Wit 1 Eilhouetie. (Bb. 239.) (386, 408.) Seldeniage, Die germanische. Bon Dr. 3. B. Bruinier. (Bb. 486.) 23. Bruinier. - fiche auch Bolksfage. Somerifde Dichtung, Die. Bon Rettor Dr. G. Finster. (Bb. 496.)
Ihfen, Phörnson u. t. Leitgenossen, Bon Brot. Dr. B. Kahle. 2 Aust. v. Dr. G. Morgenstern. M 7 Bildn. (Bd. 193.)
Ampressionismus. Die Mater des J. Bon Prof. Dr. B. Lázdr. Mit 32 Abb. u. 1 farb. Tasel f. a. Sandn, Mozart, Beethoven, Oper. Orchefter, Tafteninftrumente, Bagner. Rathologie, Germanifche. Bon Brof. Dr. I. v. Negelein. 2. Aufl. (A - jiehe auch Bolksjage, Deutsche. (25b. 95.). Ribelungenlieb. Das, u. d. Gudrun. Von Prof. Dr. J. Körner. (Ib. 591.) Riederländijche Malerei f. Malerei. Suftrumente i. Taffeninftrum., Drchefter. Riavier fiebe Tafteninftrumente. Rovelle fiehe Roman. Oper. Die moderne. Vom Tode Wagners bis zum Weltfrieg (1883—1914). Von Dr. E. Jiel. Mit 3 Bildn. (Bd. 495.) — siehe auch Sahdn, Wagner. Romodie fiehe Briech. Romodie. unit. Das Bejen der deutschen bilben-ben R. Bon Geh. Rat Brof. Dr. S. . Dr. 5. (Bb. 585.)

Thode.

— Deutice A. im tagl. Leben bis jum Schlusse b. 18. Jahrh. B. Brot. Dr. B. Saenbale. Mit 63 Ubb. (Bb. 198.)

— i. a. Baut., Bilb., Defor., Griech. A.; Pompeij. Sitle; Gartent. Ubt. VI.

Lunstpslege in Daus und Deimat. Bon Superint R. Bürfner. 3. Aust. Mit 29 Ubb. (Bb. 77.) Dridefter. D. Juftrumente b. D. B. Brof. Dr. Fr. Bolbach. M.60 Ubb. (Bb.384.) — Das moderne Orcheiter in feiner Ent-midlung. B. Brof. Dr. Fr. Bolbach. M. Bartiturbeifp. u. Taf. 2. Aufl. (Bb. 308.) Orgel fiehe Tafteninftrumente.

Berionennamen, D. deutid. B. Geh. Stu-bienrat A. Bahniich. 2. A. (Bb. 296.)

Thobe.

Jeder Band geheftet II. 1.20 Aus Natur und Geisteswelt Jeder Band gebunden III. 1.58 Sprache, Literatur, Bildende Kunft und Mufil - Geschichte, Kulturgeschichte und Geographie

Berspeftive, Crundzäge der B. nehst An-wendungen. Bon Prof. Dr. A. Doehle-mann. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (516.) Phonetif. Einführ. in d. Ph. Wie mir ibrechen. Bon Dr. E. Richter. Mit 20 Abb. (Bd. 354.) Photographie, Die funftieriffe. Ihre Ent-midig., ihre Brobl., ihre Bedeutg. B. Dr. Middle Brother in the Berning & De. B. W. a ri a t. M. I Vilberanh. (VA. 410.)

— f. auch Photographie Abt. VI. VI. VI. Blatti f. Griech. Kunit. Michelangelo. Periff. Von Dr. R. Wäller-Freign-(35. 460.) fela. dmpoji. Eine bellenist. Siadt in Fia-lien. Von Brof. Dr. Fr. v. Dubn. J.Aufl. W. 62Abb. i. T. u. auf I Taf., sowie I Plan. (Bb. 114.) Bompeji. Projektionsichre. In kurzer leichtgahlicher Tarstellung f. Selbkunterr. und Schul-gebrauch. B. Zeichenl. A. Schubeisky. Mit 208 Fig. Rembrandt. Von Brof. Dr. B. Schub-ring. 2. Aufl. Mit 48 Abb. auf 28 Taf. (286. 158.) i. Anh. Kenaissancerchitestur in Stalien. Bon Dr. B. Fran il. 2 Bde. I. M. 12 Tas. u. 27 Terrabb II. M. Abb. (Bb. 381,382.) Metoril. Bon Lettor Prof. Dr. E. Geiß-ler. L. Bde. Z. Aufl. I. Richtlinien für die Lungt des Sprechens. II. Teursche (35. 455 456.) Mebefunft. Roman. Der frangofifche Roman und Die Noman. Der französsing nomma and vie Kovelle. Ihre Geschichte v. d. Aff. b. 3. Gegenw. Bon D. Flake. (Bb. 277.) Komantif. Tenticke. B. Geb. Sofrat Brof. Dr. D. H. Balzel. 4. Cuff. I. Die Weltanschauung. II. Die 232/233.) (Bb.

Sage siehe Helbensage, Muthol., Volksjage Shiller. Bon Broi. Dr. Th. Zieg ser, Mit I Kildn. 3. Aufl. Shillers Dramen. Bon Broghmunialbirettor E. Heusermann. (Bb 493.) Shafespeare und seine Zeit. Von Brof. Dr. E. Sieper. M. 3 Abb. 2. Aufl. (185.)

Sprache, Die haupttypen des menichlich. Sprachbaus, Bon Brof. Dr. F. N. Find. 2. Mufl. v. Broj. Dr. G. Rieders. (268.) Die beutide Sprace von heute. Bon Dr. 23 Fifcher. (Bb. 475.) Fremdwortfunde. Bon Dr. Elife tichter. (Bb. 570.) fiche auch Phonetif, Rhetorif; ebenso Fremdmortfunde. Bon Richter. Sprache u Stimme Abt. V

Sprachfiamme, Die, des Erdfreises. Bon Prof. Dr. F. N. F in d. 2. Aufi. (Bb. 267.) Sprachwissenschaft. Bon Bros. Dr. Er. Dr. Ar. (Bb. 472.) Canbfelb - Benfen. Stile, Die Entwidlungsgeich, b. Et. in ber bild. Kunft. Ben Dozent Dr. E. Cohn-Biener. 2 Bbe. 2 Auft. I. B. III-fertum bis zur Gottl W. 66 Abb. II. Bon der Menaissance bis zur Gegenwart. Dit 42 2166. (35 317/318.) Talteninstrumente. Rlavier, Orgel. Dar-monium. Das Wesen der Tasteninstru-mente. B. Bros. Dr. D. Bie. (Bd. 325.)

Theater, Das. Schauspielhaus u. kunst b. griech.Altert bis auf b. Gegenw. B.Brof. Dr. Chr. Gae d b. e. 2. N. 1805. (Bb. 230.) Tragsdie f. Griech. Tragsdie. Urheberrecht siebe Abt. VI.

Merkertred, der Aber Weien und Werben d. beutschen Bolfsiedunges. Bon Dr. I B. Bruinier. S.Aufi. (Bd. 7.) Bolfsmärgen. Das deutsche B. Bon Kjar-rer K. Spieß. Bollsjage, Die deutsche, übersichtl. dargest b. Dr. O. Bode I. 2. Aufl. (Bb. 262. — iiehe auch Geldensage, Muthologie. (Bb. 262.)

Bagner. Das Runftwerf Richard B.s. Bon Dr. E. Jftel. D. 1 Bildn. 2. Aufl. (330.) — fiche auch Mufital Romantit u Oper. Beidenfunft. Der Beg 3. 8. Gin Buchlein für theoretische und prattische Selbibli-bung. Bon Dr. E. Beber. 2. Aufl. Mit 81 Abb. n. 1 Farbrafel. (Bb. 430.) — f. auch Berspektibe, Brojektionslehre; Geometr. Zeichnen Abt. V. Beitungswesen. B. Dr. H. Diez. (Bb. 328.)

IV. Gefdichte, Rulturgefdichte und Geographie.

Alpen, Die. Bon H. Reishauer. 2., neub. | Aufl. von Dr. H. Slanar. Mit 26 Abb. | und 2 Rarten. (Bb. 276.) Altertum, Das, im Leben ber Segenwart.

B. Brob.-Schul- u. Geh. Reg.-Rat Brof. Dr. B. Cauer. 2. Aufl. (Bb. 356.) Dr. B. Cauer. 2. Aufl. (Bb. 356.) Amerika. Gesch. d. Berein. Staaten v. A. S. Prof. Dr. E. Daenel 1. 2. A. (Bd. 147.) Amerikaner, Die B. R. W. Butler. Dich. v. Prof. Dr. B. Taszowski. (Bd. 319.)

Technische Sochichulen, 1. Univers. Amerifas Abt. II.

Untile Birticiaftsgeidicte. B. Briv.-Doz. Dr. D. Reurath. 2. Mufi. (Bb. 258.) Antiles Leben nach den ägnvtischen Babort. Bon Geb. Bostrat Bros. Dr. Fr. Brei-sigke. Mit 1 Tasel. (Bd. 565.) (28d. 565.)

Arbeiterbewegung f. Soziale Bewegungen. Auftralien nud Reufeeland. Land, Leute und Mirtigaft. Von Brof. Dr. R. Schachner Mit 23 Abb. (18b. 366.)

Babnlanische Kultur, Die, i. Berbreit. u. i. Rachwirfungen auf b. Gegenw. B. Brof. Dr.F.C. Lehmann-Saupt. (Bb.579.) Baltiiche Brovingen. B. Dr. B. Tornius. 3. Aufl. DR. 8 Abb. u. 2 Rartenft. (9b. 542.) Bauernhaus. Rulturgeidichte bes beutiden

B. Bon Baurat Dr.-Jug. Chr. Rand. 2. Aufl. Wit 70 Abb. (Bb. 121.) Bauernitand. Geich. d. difc. B. B. Brof. Dr. H. Gerbes. 2., verb. Auft. Mit 22 Abb. i. Tert Belgien. Bon Dr. B. Okwalb. 3.20,1 Mit 5 Karten. (Bb. 501.)

IsberBand geheftet M. 1.20 Aus Natur und Geilteswelt JederBand gebunden M. 1.50 Derzeichnis der bisber erschienenen Bande innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet

4. burchgef. Auft. (Bb. 500.) Boomen. Bon Brof. Dr. R. F. Rainbl (28b. 701.) Brandenburg.spreus. Seifs. Bon Agl. Ar-chivar Dr. Fr. Firael. 2 Bde. I. B. d. ersten Anjängen b. 3. Tode König Fr. Wilhelms I. 1740. II. Bon dem Regierungeantritt Friebriche b. Gr. bis 3ur Bd. 440/441.) Gegenwart. Bulgarien. 2. Briv .- Dog. Dr. b. Grothe. (28b. 597.) öfirger im Mittelalter f. Stäbte. Bujant. Charafterföpte. Bon Dr. phil K. Dieterich. Mit ZBildn. (Bb. 244.) Salvin, Johann. Von Bfarrer Dr. E. Sobeur. Mit I Bilonis. 2 Aufl. (Bb. 247.) Striftentum n. Beltgeschichte feit ber Reformation. Bon Brof. D. Dr. R. Seil. 2 Bbe. (Bb. 297,298.) Dentich fiebe Bauernhaus, Bauernitand, Dorf, Befte, Brauenleben, Geschichte, Sanbel, Sandwert, Reich, Staat, Stabte, Berfaffung, Berfaffunger., Bolleftamme. Bolfstrachten, Birtichafteleben ufm. Deutschtum im Ausland, Das, vor dem Beltfriege, Bon Brof. Dr. R. Sveniger. Z. Aufl. (Bb. 492.) Dorf, Tas deutsche. B. Krof. R. Mielte. 2. Aufl. Mit 51 Abb. (Bb. 192.) Sizeit. Die, und der vorgeschichtliche Mensch. Bon Geb. Bergrat Brof. Dr. G. Steinmann. 2. Aufl. M. 24 Abbilbungen. (Bd. 302.) Snidedungen, Das Leitalter der E. Bon Brof. Dr. S. Sünther. 3. Aust. Mit 1 Beltfarte. Erbe fiebe Denich u. E Totunde, Allgemeine. 8 Bhe. Mit Abb. I Die Erde, ihre Bewegungen u. ihre Sigenichaften (math. Feographie u. Sco-nomie). Von Admiralitätsraf Brof. Dr. E. Kohlichätter. (Bb. 625.) II. Die Atmosphäre der Erde (Klimatologie, eamojphäre ber Erbe (Klimatologie, Meteorologie). Von Brof. D. Bafdin. (Bd. 626.) III. Geomorphologie. Von Brof. F. Machaticher Brof. &. Machatichel (Bb. 627.) IV. Bhufiogeographie bes Sugmaffers. IV. Phyliogeographie bes Sükwassers.
Bon Brof. H. Machatsche (Bb. 628.)
V. Die Weere. Von Brof. Dr. A. Merz.
(Bb. 629.) VI. Die Berbreitung ber Bssangen. Bon Dr. Brod mann-Jerrosch. (Bb. 630.) VII. Die Berbreity. b. Liere. B. Dr. B. Anopfli. (Bb. 631.)
VIII. Die Berbreitg. d. Menschen auf b. Erbobersläche (Anshropogeographie). B. Broj. Dr. R. Krebs. (Bb. 632.)
Suropa. Borgeichichte E.'s. Bon Brof. Dr. B. Edmidt.
Samiliensorichna. Bon Dr. E. De-Samilienforfdung. Mon Dr. Debrient. D. Abb. u. Taf. 2. Aufl. (350.) Beldherren, Große. Bon Major & C. Enbres. (Bb. 687 688.) Beite, Deutide, u. Bollsbraude. B. Briv. Doz.Dr.E. Febrie, M.30 Abb. (Bb.518.)

Bismard und seine Beit. Von Brosessor Finnland, Bon Better & Dhauift. (700.) Dr. B. Balentin. Mit einem Tielbild. Französische Seichichte. L.: Das franzö-4., durchges. Auft. (Bb. 500.) sijche Königstum. Bon Bros. Dr. R. Somemer. (9h) 574.) liebe auch Napoleon, Revolution. Frauenbewegung, Die moderne. Gin ge-ichichtlicher überblick. Bon Dr. R. Schir-macher. 2. Aufl. (Bb. 67.) macher. 2. Aufl.
Branenleben, Deutid., i. Bandel d. Infrhunderte. Bon Geb. Schulrat Dr. Eb.
Otto. 3. Aufl. 12Abb. i. T. (Bb. 45.)
Briedrich d. Gr. B. Brof. Dr. Th. Bitterauf. 2. E. N. 2Bithn. (Bb. 246.)
Gartenlynit. Geich. d. G. B. Baucat Dr.Ing. Thr. Rand. M. 41Abb. (274.)
Begegaphie der Vorwelt (Baldogeographie). Von Brib.-Doz. Dr. E. Dacqué.
Mit 21 Ubb.
(Bb. 619.) Seologie fiehe Mbt. V. vrologie liede Abt. V. Serman. Deldensage l. Gelbensage. Germanische Kuttar in der Urzeit. Bom Bibliothelsdir. Brof. Dr. G. Steinsbausen, S. Auft. Mit 13 Ab. 18b. 75. Seichigkte, Teutide, im 19. Jahrt. b. 3. Weichseinheit. B. Brof. Dr. R. Schwesmer. 3 Bde. I.: Bom 1800—1848. Westgurgtion und Manuferia. mer. 3 Bbe. I: Bon 1800—1848.
Reftauration und Revolution. 3. Aufl. (Bb. 37.) II.: Bon 1848—1852. Die Realtion und die neue kra. 2. Aufl. (Bb. 1911.) III.: Bon 1862—1871. K. Bund & Neich. 2. Aufl. (Bb. 102.)
Triegentum. Tas G. in feiner ge chiche lichen Enwicklung. Bon Brof. Dr. Neb. Scala. Mit 46 Abb. (Bb. 471.)
Triegische Städte. Luturbilder auf gr. S. Non Reviellung. D. R. Langenschung. Si. Bon Broieflor Dr. E. Liebarth. 2. A. M. 23 Abb. u. 2 Taicln. (Bb. 131.) Dandel. Teichichte d. Belthandels. Son Realghmnofial. Dir. Dr. M. G. Son midt. 3. Muff. (Bd. 118. 5. ungi. (B. 118.)
— Seichichte des deutschen dandels feit d. Ausgang des Mittelalters. Bon Dir. Brof. dr. B. Langen bec. 2. Auft. Mit 16 Tabellen. (B. 237.) dandmert, Das deutsche, in seiner kulturzeichicht. kentwiel. Bon Geh. Schultzahr E Otto. 4. Auft. Mit 33 Abb. auf 12 Tafeln. (Bb. 14.) - fiehe auch Deforative Runft Abt. III. Daus. Kunitoflege in Daus u. Deimat. B. Superint. R. Buriner. 3. Aufl. Mit Abb. (3b. 77.) — jiehe auch Bauernhaus, Dorf. Deldenjage, Die germanische. Bon Dr. B. Bruinier. 'Bb. 4! Dellenist. röm. Keligionsgeschichte ! Abb. L. Japaner. Die, i. d. Welmvirtichgir. B. Brof. Dr. K. Aathgen. Z. Anfl. (Bd. 72.) Zesuiten. Die. Eine hist. Stizze. Von Brof. Dr. H. Boehmer. 4. Aufl. (Bb. 49.) Judien. Bon Prof. Dr. Sten Konows Ronoma (Bb. 614.) Indogermanenfrage. Bon Dr. (9b. 594.) Mgahd. Internationale Leben, Das, ber Gegenw. Bon Dr. h. c. A. H. Fried. M. 1 Taf.

3eder Band geheftet III. 1.20 Aus Mainr und Geistes welt Jeder Band gebunden III. 150.

Derrmann. M. 9 Abb. (Bb 401.) Derrmann. M. 9 Abb. (Bb 401.) Kaifertum und Kapittum. Von Brof. Dr. (Bb. 576.) Milmd, d. Land u. b. Boll. B. Brof. Dr. B. M. Holmeister.

Sattenkunde. Bermeisungs- u. K. 6 Bbe.
Mit Abb. I. Geogr. Ortsbestimmung.

Bon Brof. Schmauber. (Bd. 606.)

U. Erdmeisung. Bon Prof. Dr. O. Eggert. (Bd. 607.) III. Landmeisung. Bon

Steuerrat Suchow. (Bd. 608.) IV. Ausgleichungsrechnung. Bon Geh. Reg.-Rat

Prof. December 19. 608. Brof. Dr. C. Degemann. (Bb. 609.) V. Bhotogrammetrie und Stereophotogrammetrie. Bon Diplom-Ing. H. Life ich er. (Bb. 610.) VI. Kartentunde. Bon Finanzrat Dr.-Ing. A. Egerer. 1. Einfubr. i. b. Rartenverffanbnis. 2. Rartenberftellung (Lanbesaufn.). (Bb. 611/612.) Rirde f. Staat u. R. Richt (State a. R. Articke and Arof. Dr. F. Kentgen 2 Bbe. (Bb.545/546.)
Relonien. Die dentichen. (Land u. Leute.)
Von Dr. A. heitbørn. 3. Auft. Mit 28. Abb. u. 8 Karten. (Bb. 98.) 28. Abb. u. 8 Karten. (Bb. 98.) Ronigstum, Frangoliices. Bon Erof Dr. R. Schwemer (285 574.) Arieg und Sieg. Gine furze Daritellung ber mob. Rriegefunft. Bon Major a. D. C. S. Endres. (Bb. 519.)
— Rulturgeicigiete b. Rrieges. Bon Brof. Dr. K. Beule, Seh. Horrat Brof. Dr. Dr. K. Beule, Seh. Horrat Brof. Dr. E. Bethe, Brof. Dr. B. Schmeid-ler, Prof. Dr. A. Doren, Brof. Dr. R. Herre. (Bb. 561.) - Der Dreigigjahrige Rrieg. Bon Dr. (Bd. 577.) f. auch Feldherren. Ariensichiffe, Uniere. Ihre Entfiehung u. Berwendung. B. Geh. Mar.-Baur. a. D. E. Rrieger. 2. Aufl. b. Geb. Mar .-Baut, Fr. Edurer. D. 60 2166. (389.) Buther. Martin & u. b.btige. Reformation. Bon Brof. Dr. 23. Robler. D. 1 Bildn. Suthers. 2., verb. Ankl. (Bd. 515.)

— f. auch Bon L. au Bismard.
Marr. Karl. Berfud einer Einführung.
Bon Krof. Dr. R. Wilbrandt. (621.)
Menich u. Erde. Stissen v. den Wechelbeziehungen zwischen beiben. Bon Geh. Rat Brof. Dr. A. Kirchhoff. 4. Aufl. — j. a. Eiszeit; Mensch Abt.V. [(Bb. 31.) Mittelalter. Mittelalterl. Aulturideale. B. stoi. Dr. B. Bedel. I.: Helbenleben. II: Mitterromantit. (Bb. 292, 293.)

— i. auch Städte u. Bürger i. M. Moltte. B. Kaiferl. Ottoman. Major a. D. F. C. Kn dres. Mit I Vilon. (Bb. 415.)
Münze. Grundriß d. Münztunde. 2. Aufl. I. Die Münze nach Veseen, Gebrauch u. Bedeutg. B. Hoftet Dr. A. Luichin v. Ebengreuth. M. 53 Abb. II. Die Wünze d. Altertum b. z. Gegend. Son Brof. Dr. H. du chen au. (Bb. 91.657) Brof. Dr. B. Bedel. I.: Selbenleben. Brof. Dr. d. Vicenau. (Bb. 91, 657.)

— f. a Finanzwiff. Geldweien Abt. VI.
Mytenische Auftur, Die. Bon Brof. Dr. F.
C. Lebmann-Haupt. (Bb. 581.)

Muthelegie f. Abt. I. Rapoleon I. Bon Brof. Dr. Th. Bitter-au f. 3. Aufl. Mit I Bildn. (Bb. 195.) Rationalbewußtfein siehe Bolf. Ratur u. Menich. B. Realgynnasial-Dir. Brof. Dr. M. G. Schmidt. M. 19 Abb. (Bb. 458.) Raturveller, Die geiftige Aultur ber R. B. Brof Dr. R. Th. Breug. DR. 92166. f. a. Bolterfunbe, alla. [(25b. 452.) Rengriedenland. Bon Brof. Dr. M. Seifenberg. (95. 613.) Reuferland f. Auftralien. Trient j. Indien, Beläffing, Türfei. Dietreich. Die innere Geschicke von 1848 bis 1895. B. A. Charmas. 3., verand. Unterficht der Keuichen. U. Der Kampf der Kaftonen. (651 (552.) - Seiglichte der auswärtigen Bolitif O.s im 19. Jahrhundert. V. R. Charmaß. 2. veränd. Auft. I. Bis zum Sturz: Web-ternichs. II. 1848—1895. (653 654.) Diterreide innere u. aukere Bolitif non 1895—1914. B. R. Charmas. (655.) Oftmart i. Abt. VI. Dimart 1. 20. VI. Diffeegbiet, Das. B. Brof. Dr. G. Braun. M. 21 Abb. u. 1 mehri. Karte. (Bb. 367.)
— I. auch Baltifche Brovingen, Finnland. Balkftina und feine Sefchichte. Bon Brof. Dr. G. Hr., von Schen. Anfl. Wit 2 Karten. 1 Slan u. 6 Anf. (Bb. 6.) B. n. j. Kultur in 5 Jahrtaufenden. Rach d. neuest. Ausgrab u. Forichungen dargest. von Erof. Dr. B. Tho mie n. 2. neubearb Aust. Mit 37Abb. (260.) Sabittum f. Kaifertum. Kappri f. Antiles Leben. Bolarforidung Geschichte ber Entbedungsreifen gum Rord- u. Gubpol v. b. alteft. Beiten bis zur Gegenw. B. Brof. Dr. R. Haffert. 3. Aufl. M. 6 Kart. (Bb. 38.) Bolcu. Mit einem geschichtl. Aberblid Ab. d.; polnisch-ruthen. Frage. B. Brof. Dr. R. F. Kain b L. 2., verb. Aufl. M. 6 Kart. (547.) Bolitik. B. Dr. A. Grabowift, (Bb. 537.)

— Umriffe ber Beltpolitik. B. Brof. Dr.
3. hashagen. 3 Bbe. I: 1871 bis 3. Hashagen. 3 Bbe. I: 1871 bis 1907. 2. Aufl. II: 1908—1914. 2. Aufl. III. D. polit. Greign. mahr. b. Rrieges. (86.553/555.) – Bolitifche Seographie. Bon Brof. Dr. E. Schone. Mit 7 Kart. (Bb. 353.) – Politifche Dauptströmungen in Europa im 19. Jahrhundert. Bon Brof. Dr. R. Th. v. Seigel. 4. Aufl. von Dr. Bb. 129.) Fr. Enbres. Bompeji, eine hellenistisse Stadt in Ita-lien. Bon Brof. Dr. Fr. v. Dubn. 3. Aufl. Mit 62Abb. i. C. u. auf I Iaf., sowie I Blam. (Bd. 114.) Brengifde Gefdiate f. Branbenb. - br. G. Realtion und neue Ara [Geich., beutsche. Reformation [Calvin, Luther. Reid. Das Deutide R. bon 1871 b. 3. Belttrieg. B. Archivar Dr. F. Firael. (575.) Meligien f. Abt. L.

Jeber Band geheftet III. 1.20 Aus Natur und Geifteswelt Jeder Band gebunden III. 1.50 Derzeichnis der bisher ericienenen Bande innerhalb der Wiffenschaften alphabetifch geeronet

Reftauration und Revolution fiehe Ge- Student, Der Leibziger, von 1409 bis ichichte. beutiche. Mevolution. Seidichte der Frangol. R. B. Brof. Dr. Th. Bitterauf. 2. Aufl. (28b. 346.) Mit 8 Bilbn. 1848. 6 Bortrage. Bon Brof. Dr. D. Beber. 3. Mufl. (36.53.) Rom. Das alte Rom. Bon Geh. Reg.-Rat Brof. Dr. D. Richter. Mit Bilberan-hang u. 4 Plänen. (Bb. 386.) - Soziale Rampfe i. alt. Rom. B. Brivat-bozent Dr & Bloch. 3. Aufl. (Bb. 22.) Roms Rampf um die Beltherridaft. B. Brof Dr. 3. Aromaner. (Bb. 368.) Romer. Gefchichte ber A. Bon Brof. Dr. R. b. Ccala. (Bb. 578.) fiebe auch Sellenist -röm. Religionsge-ichichte Abt. I: Komveit Abt. II. Aukland. Geschichte, Staat, Kultur. Von Dr. A. Luther. (Bb. 563.) Scrift- und Buchwesen in alter und neuer Beit. Bon Brof. Dr. D. Weise. 4. Aufl. Mit gabir. Abb. (Bb. 4.) (23b. 4.) - f. a. Bud. Bie ein B. entfieht. Abt. VI. Schweig, Die. Land, Roll, Staat u. Birtichaft. Bon Reg. u. Sianderat Brof. Dr. D. Wettstein. Mit 1 Karte. (Bd. 482.) Seetrieg f. Rriegsichiff. Sitten und Gebraude in alter und neuer Beit. Bon Brof. Dr. G. Samter. (682.) Soziale Bewegungen und Theorien bis gur modernen Arbeiterbewegung. Bon G. Maier. 5. Aufl. (Bb. 2 - i.a. Warr, Rom; Sozialism. Abt. VI. (Bb. 2.) Staat. St. u. Rirde in ihr. gegenf. Berhaltnis feit b. Reformation. B. Bfarrer Dr. phil. M. Bfannfuche. (Bb. 485.) Stadte, Die. Geogr. berrachtet. B. Brof. Dr. R. Saffert. M. 21 Ubb. (Bb. 163.) - Dtice. Stadte u. Burger i. Mittels alter. B. Broj. Dr.B. Seil. 3.Aufl. Mit Bablr. Abb. u. 1 Doppeltafel. (Bb.43.) - Berfasiung u. Bermaltung d. deutschen Stadte. B Dr. M. Schmib. (Bb. 466.) — Distorische Städtebilder aus Solland und Riederdeutschland. B. Reg.-Baum. a. D. A. Erbe. M. 59 Abb. (Bb. 117.) - i. a. Griech. Stabte, Lompeji, Rom. Sternglaube und Sterndentung. Die Geichichte u. b. Weien b. Airrologie. Unt. Miwirt v. Geh. Rat Brof. Dr. C. Be-zolb dargest v. Geh. Hofr. Brof. Dr. Fr. Boll. W. 1 Sternt u. 20 Abb. (Bb. 638.)

1909. Von Mit 25 Abb. (Bb. 273.) Beidicte b. beutiden Gt. Studententum. Von Dr B Bruchmüller. (Bb. 477.) Türkei, Die. B. Reg.-Rat B. R. Krause. Mit 2 Karten i. Text und auf 1 Tasel. 2. Mufl. Ungarn liebe Ofterreich. Urzeit f. german Kulfur in ber U. Berfasiung. Grundzüge der B. des Deut-ichen Neiches. Bon Geheimrat Brok. Dr. E. Loning 4 Aufi. (Bb. 34.) Berfafjungereckt. Deutsches, in geschicht-licher Entwicklung. Bon Brof. Dr. Ed. Bubrich. 2 Aufi. (Bd. 86.) geididt-Subrig. 2. Angi. (38. 88.)
Sermeilungs- n. Kartenkunde f Kartenk.
Bolf. Som denticken B. sum dt. Staat.
Eine Geich. d dt. Nationalbewüßielns.
B. Broi Dr. B. Jo ach im is n. (38. 5.511.)
Bölkerkunde. Allgemeine. I: Feuer, Raherungserwerb. Wohnung, Schinud und Kleidung. Bon Dr. A. Heiborn. M.
54 Abb. (38. 487.) II: Woifen u. Werkzeuer Anduktrie. Kandel in Eich. Verseuer Anduktrie. Kandel in Eich. Verseuer Anduktrie. Kandel in Eich. Verseuer

zeuge, Industrie, Sanbel u. Geld, Ber-tehrsmitiel. Bon Dr. A. Seilborn. M. 51 Ubb. (Bb. 488.) III: Die geiftige M. 51 Abb. (Bb. 488.) III: Die geiftige Kultur der Naturvöller. Von Brof. Dr. K. Th. Breuß. M. 9Abb. (Bd. 452.) Bollsbräuge, deutige, siehe Feste. Bollsfräume, Die deutigen, und Land-ichaiten. Bon Brof. Dr. D. Beise. 5., völlig umgearb. Aufl. Mit 30 Abb. i. Tert u. auf 20 Tas. u. einer Nielet-kerte. Tautschlond

farte Deutschlands. (38. 16.) Bolfstrachten. Deutiche. Bon Bfarrer R. (Bb. 342.) Spieg. Mit 11 21bb.

Spieß Mit 11 Abb. (Bb. 342.)

Bom Bund zum Neich siehe Geschichte.

Bon Jena bis zum Wiener Kongreß. Bon

Arof. Dr. G. Roloff. (Bb. 465.)

Bon Luther zu Bismard. 12 Charalterbild. a. beuticher Geich. B. Brof. Dr. D.

Weber. 2 Bde. 2. Aufl. (Bb. 123/124.)

Borgeschichte Europas. Bon Brof. Dr. D.

Edwicht.

(285. 571/572.) Schmibt. Beltgeidichte f. Chriftentum.

Belthandel i. Sanbel. Beltpolitif i. Bolitik.

Birtifaftsgefciate, Antife. B. Brib. Dog. Dr. D. Reurath. 2., umgearb. M. (258.) — i.a Unrites Leben n. b. äghpt. Kapnri. Birticaristeben, Teutiches. Auf geogr. Grundl. geich. B. Brof. Dr. Chr. Cru-ber. 3. Auff. B. Dr. H. Reinlein. (42.) - f. auch Abt. VI.

V. Mathematit, Raturmiffenschaften und Medigin.

Aberglaube, Der, in der Medizin u. f. Ge-fahr f. Gefundh. u. Leben. B. Brof. Dr. D. b. Saniemann. 2. Mufl. (Bb. 83.) Abstammungelehre u. Darminismus. B. Br. Dr. R. Deife. 5. M. M. 40 Mbb. (Bb. 39.) Abstammungs- und Bererbungslehre, Er-perimentelle. Bon Brof. Dr. G. Bebmann. Mit 26 2165. (28b. 379.)

Abmehrfrafte bes Rorpers, Die. Gine Ginführung in die Immunitätelehre. Bon Brof. Dr. med. h. Kämmerer. Mit 52 Abbilbungen. (Bd. 479.)

Algebra fiebe Arithmetit.

Ameijen, Die. Bon Dr. med. S. Brun. (Bb. 601.) Anatomie d. Menichen, Die. B. Brof. Dr. K. v. Bardeleben. 6 Bde. Jeder Bd. mit zahlt. Abb. (Bb. 418/423.) I. Zelle und Gewebe, Entwidlungsgeichichte. Der ganze Körder. 3. Aufl. II Das Stelett. 2. Aufl. III. Das Muskel-u. Gefässbistem. 2. Aufl. IV. Die Eingeweide (Darme, Atmungs. Sarn- und Geschlechtsorgane, Saut). 3. Aufl. V. Mervenspitem und Sinnesorgane. 2. Aufl. VI. Mechanif (Statil u. Rinetil) b. menichl. Rorpers (ber Rorper in Rube u. Bewegung). 2. Auft. - fiehe auch Birbeltiere. Manarium. Das. Bon G. B. Schmidt

Mit 15 Fig. (Bb. 335.) Arbeitsleiftungen bes Menfchen, Die. Ein-führ. in b. Arbeitsphysologie. B. Brof. gühr. in d. Arbeitsdinijologie. B. Krof. Dr.H. Boruttau. W.14 Fig. (Bb.599.) — Berufswahl, Vegabung u. Erbeitslei-ftung in i. gegenf. Beziehungen. Von B. J. Ruttmann. Wit 7Abb. (Bd. 592.)

Arithmetil und Algebra gum Selbftunter-rist. Bon Brof. B. Crant. 2 Bande. Die Rechnungsarten. Gleichungen I.: 1. Stades mit einer u. mehreren Unbe-fannten. Gleichungen 2. Grades. 5. Auft. M. 9Fig. II.: Gierdungen, Arithmet u. geometr. Reih. Zinfesains u. Menten-rechn. Kompl. Lablen. Binom. Lehrías. 4. Aufl. Mit 21 Fig. (Bd. 120, 205.) Argneimittel und Genugmittel. Bon Brof.

(Bb. 363.) Dr. D. Schmiebeberg. Arat, Der. Geine Stellung und Aufgaben im Rulturleben ber Gegenm. Gin Leitfaben ber fogialen Mebigin. med. D. Fürft. 2. Aufl. Bon Dr.

med. M. Fürft. 2. Aufl. (Bb. 265.) Aftronomie. Brobleme d. mod. A. B. Brof. Altronomie. Probleme d. nod. A. B. Prof. Dr.S. Opden heim. 11 Fig. (Bd. 255.)

Die A. in ihrer Bedeutung für das prattische Leben. Bon Brof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)

iehe auch Welfall. Welfbild, Sonne, Mond, Planeten; Sternglaube. Abt. I. Atome. Wolchite und Atome. B. Brof. Dr. G. Mie. 4. Aufl. M. Hig. (Bb. 58.)

1. a. Weltäther.

Auge. Das, und die Brille. Bon Brof. Dr. M. d. Robt. Mit 84 Whh. u. 1 Tof.

M. v. Rohr. Mit 84 Abb. u. 1 Taf. 2. Aufl. (28b. 372.)

Ausaleidungerechnung fiebe Rartentunbe Albi. IV.

Batterien, Die, im Haushalt und der Na-tur des Menschen. Von Brof. Dr. E. Gutzeit. 2 Aust. Mit 13 Abb. (242.) Die frantheiterregenden Bafterien. Brof. Dr. M. Boehlein. Mit (Bb. 307.) 33 Mbb.

– f. a. Abwehrfräfte, Desinfektion, Bilze, Schählinge.

Bau n. Tatigfeit b. menfol. Rorpers. Ginf. in die Bonitologie d. Menschen. B. Brof. Dr. H. Sachs. 4. A. M. 34 Abb. (Bb.32.) Begabung f. Arbeiteleiftung.

Befruchtungsvorgang, Der, fein Befen und f. Bebeutung. B. Dr. E. Zeichmann. 2.Aufl. M.9 Abb.u.4 Doppeltaf. (Bb. 70.)

Bewegungslehre f. Mechan., Aufg. a. b. M. I. Biochemie. Ginfahrung in die B. in elementarer Darstellung. Bon Brof. Dr. M. Löb. Mit Fig. 2. Aufl. b. Brof. H. Friedensthal. (Bd. 352.)

Diotogie, Allgemeine, Einführ, i. d. Jaupi-probleme d. organ. Natur. B. Kroj. Dr. S. Wiehe. 2. Aufl. 52 dig. (Bd. 130.) — Erperimentelle. Regeneration, Transplantat. und verwandte Gebiete. Bon Dr. C. The jing. Mit 1 Tajel und 69 Tertabbildungen. (8b. 337.)

- fiebe a Abstammungslehre, Batterien, Beiruchtungsvorgang, Foripflangung. Lebemeien, Organismen, Schadlinge, Tiere, Urtiere.

Blumen. Unfere Bl. n. Bflangen im Bon Brof. Dr. U. Dammer. Garten. Dit 69 Abb. (Bb. 360.) B. Prof.

Mit 69 U.v. Mianzen i. Zimmer. Brof. Dr. U. Dam mer. 65 Abb (Bb. 359.) lut. derz. Blutgefätze und Biut und ihre Ertranfungen. Bon Brof. Dr. H. Kofin. Mit 18 Abb. (Bb. 312.) Blut.

Rofin. Mit 18 Abb. (39b. 312.)
Botanil. B. b. praftijden Lebens. B. Brof.
Dr. B. Gifedins. M. 24 Abb. (3b. 173.)
— Jiehe Blumen, Lebeweien, Kilanzen,
Rilze, Schädlinge, Wald; Kolonialbotanit, Tabal Abt. VI.
Brille. Dus Auge und die Br. Bon Brof.
Dr. M. v. Rohr. Mit 84 Abb. und
1 Lichtbruckeiel. 2. Aufl. (3b. 372.)

Chemie. Giniuhrung in die allg. Ch. B. Studienrat Dr. B. Babint. M. 24 Fig. (35.582.)

— Einführung in die organ. Chemie: Ma-türl. u. tünstl. Bilanzen- u. Tierstoffe. Bon Studienrat Dr. B. Bavin f. M. 6 Ubb. i. Tert. 2. Aufl. (Bd. 187.) - Einführung i. d. anorganische Chemie. B. Studienrat Dr. B. Bavint. (598.) — Einführung i. b. analyt. Chemie. 2. Dr. B. Rüsberg. 2 Bbe. (Bb. 524, 525.)

- Einseigung L. v. unutgt. Egefült. K. Dr. S. Rüseberg. ZBbe. (Bb. 524, 525.) - Die fünftliche Herstellung von Ratur-ftoffen, B. Brof. Dr. E. Rüü. (Bb. 674.) - Ch. in Kiche und Daus. Bon Dr. F. Klein. 4. Aufl. (Bb. 76.) - jiebe a. Biochemie. Clettrochemie, Luff.

Bhotod.; Agrifulturd., Sprengftoffe, Technif, Chem. Abt. VI.

Chirurgie, Die, unierer Leit. Bon Arof. Dr. J. Fe hler. Mit 52 Abs. (Bb. 339.) Darwinismus. Abstammungslehre und D. Bon Brof. Dr. R. Beile. 5. Anst. Mit (3b. 39.) 40 Tertabb.

esinfestion. Sterilisation und Konser-vierung. Bon Res.- u. Med.-Rat Dr. O. Solbrig. M. 20 Abb. i. T. (Bb. 401.) Desinfettion, Sterilifation und Differentialrednung unter Berudfichtig. b. pratt. Unwendung in der Technif mit zahlr. Beispielen u. Aufgaben versehen, Bon Studienrat Dr. M. Lindow. 2.A.

M. 45 Fig. i. Text u. 161 Aufg. (387.)
— siehe a. Integralrechnung.
Dynamit s. Mechanik, Aufg. a. b. techn. M. 2. Bb., ebenjo Thermodynamit.

Teber Band geheftet III. 1.20 Rus Natur und Weilteswelt Jeber Band gebunden III. 1.50 Derzeichnis der bisher erschienenen Bande innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordne

Siegeit, Die, und der vorgeschichtliche Denich. Bon Geh. Bergrat Brof. Dr. Steinmann. 2. Mufl. Mit 24 Ciettrademie. Bon Brof. Dr. & Arnbt. 2. Aufl. Mit Abb. (Bb. 234.) tettrotechnit, Grundlagen ber E. Bon Oberingenieur A. Rotth. 2. Aufl. Mit 74 Mih Sleftrotechnit, Grundlagen ber &. (8b. 391.) 74 9166 Suergie. D. Lehre b. d. G. B. Oberlebr. M. Stein, 2. M. 13 Rig. (Bd. 257.) Entwidlungsgefdigte d. Menfchen. B. Dr. M. Seilborn. DR. 60 Abb. (Bb. 388.) Erde f. Weltentstehung u. -untergang. Cruchrang und Rahrungsmittet. 3. Auft. bon Geb. Reg.-Mat Brof. Dr. R. Z un 3. Mit 6 Ubb. i. T. u. 2 Taf. (Bb. 19.) Erperimentaldemie f. Buft ufm. Erperimentalgemie į. Luft alw.
Erperimentalgemie į. Luft alw.
Erperimentalgenili į. Luft alw.
Beitigfeitslehre į. Statil.
Bertyflangung. B. und Schalechtsuntericiede d. Menicen. Eine Einführung in bie Sexualvologie. B. Brof. Dr. S. Bo-ruttau. L. Auft. M. 30 Abb. (Bb. 540.)
Sarten. Der Aleing. Bon Redefteur Joh. Schneider. L. Auft. Mit Abb. (198.)
Ter Lausgarten. Bon Gartenarchi-iteli W. Schu bert. Mit Abb. (Bb. 502.)
iebes auch Blumen. Filancer. Sonfiebe auch Blumen, Bilangen; Gartenfunit, Garienitadtbewegung Mbt. VI. Schig. Das menichliche, f. Exfrantung u. Bliege. Bon Zannarzt Fr. Jäger. Wit 24 Abbildungen. (Bb. 229.) Seiftestrantheiten. B. Geh. Med.-Rat Ober-ftabsarzt Dr. G. 31 berg. 2. A. (151.) Senutimittel siehe Arzneimittel u. Ge-nutimittel; Tabol Abt. VI. Seographie i. Ubt. IV. Math. G. i. Astronomie u. Erdlunde Mbt. IV. Seologie,

eologie, Allgemeine. Bon Gebeimem Bergrat Brof. Dr. Fr. Frech, 6 Boe. (Bd. 207/211 u. Bd. 61.) L.: Bulfane einig und jest 3. Yust. Wit Etreibild n. 78 Abb. II.: Gebirgsbau und Erb-beben. 3., wesenst erw Anft. Wit Tiet-bild n. 57 Abb. III. Die Arbeit des fließenden Wassers. W. 56 Abb. 3. Anft. itegenden köglets. W. 50 ubb. 3. Anti-IV.: Die Bodenbildung, Mittelgebirgs-formen und Arbeit des Czeans. Wit 1 Titelbild und 68 Abb. 3., wesenst. erw. Aufl. V. Steinkohle, Wisten und Klima der Borzeit. Mit Titelbild und 49 Abb. 2. Aufl. VI. Gleischer einst u. jest. M. Titelbild u. 65 Obb. 2. Aufl. . a. Rohlen, Galgiagerstätt. Abt. VI. Seometrie. Analyt. S. d. Ebene 3. Selbit-unterricht. Bon Prof. B. Crans. Mit

55 Fig. (图3. 504.) Scometr. Beidinen. Bon Beichenlehrer A. Soubeistn. (Bb. 568.) i. a. Mathematit, Braft. M., Blanim, Brojeftionsl., Stereometr., Trigonometr. Seomorphologie I. Allgem. Erdfunde.

Beidledistrantheiten, Die, ihr Beien, ihre Berbreitg., Belampig. u. Berburg. Für Bebilbeten aller Stanbe bearb. b. Generalarst Brof. Dr. B. Schumburg. 4. A. Mit 4 Abb. u. 1 mehrfarb. Taf. (251.) Seidlesteunteridiede i. Fortvilanzung. Sejundheitsiehre. Bon Obermed -Rat Brof. D. b. Gruber. 4. Aufl. (86. 1.) roi. Dr. 26 Abbildungen.

- S. für Frauen. Bon Dir. Broi. &. Baifc. Mit 11 Abb. (Bb. 5 2. Sai (d. Mit 11 Uhb. (30. 598.)

- [. a. Abwehrträfte, Batterien, Leibesüb.

Graph. Dartiellung, Die. R. hofrat Prof.
Dr. F. Auerbach. M. 100 Uhb. (437.)

Danshalt siehe Batterien, Chemie, Desinfefrien, Rauurwilfenschaften, Bhnit. Daustiere. Die Stammesgeschichte unierer D. Bon Brof. Dr. C. Keller. R. Fig. 2. Aufl. (8b. 252.)

- f. a Rleintierzucht, Tierzüchtg. Abt. VI. Derg. Blutgefäge und Blut und ihre Erfraufungen. Son Brof. Dr. D. Rolin. Mit 18 Mbb. (Bb. 312.)

Dagiene f. Schulhngiene, Stimme. Dupunitenus und Suggestion. Bon Dr. E. Tromner. 2. Aufl. (Bb. 199.) Zumunitätslehre f. Abwehrkräfte b. Körp. (8b. 199.) Immunianstree , albertitagi v. dols. Infinitelimalreduung. Einführung in die I. Bon Beof. Dr. S. Kowalewift. 2. Aufl. Mit 18 Fig. (Bb. 197.) Integralreduung mit Aufgabenkammlung.

8 Sindienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit Fig. Ralender. Der. Bon Brof. Bislicenus. 2. Mufl. (8b. 673.) Dr. 23. 3. (35, 69.) Ratte, Die. Weien, Erzeng. Bon Dr. S. Ult. 45 Mbb. Kinematographie f. Abt. VI. Bermert. (Bb. 311.)

Ronfervierung fiebe Desinfeftion. Koralien u. and gesteinbild. Tiere. B. Brof. Dr. W. Man. Mit 45 Abb. (Bo. 231.) Lasmetik. Ein kurzer Abrif der arzetichen Berichonerungelunde. Bon Dr. 3. Sau-be l. Mit 10 Abb. im Tegt. (Bb. 489.) Lebemeien. Die Begiehungen der Tiere und Pflangen gueinander. Bon Brof. Dr. R. Rraepelin. 2. Aufl. M. 132 Abb. I. Der Liere zueinander. II. Der Bflansen zweitander i zu d. Dier. (Bh. 126/127.)

— sa. Biesonie, Organismen, Schäblinge. Leibesübungen. Die, und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Bon Bros. Dr. K. Bander. 4 Aufl. M. 27 Abb. (Bd. 13.)

— sand Turnen.

Lidt, Das, u. d. Farben. Ginführung in die Optit. Bon Brof Dr. 2. Graeb.

4. Aufl. Dit 100 Abb. (26. 17.) Buft, Baffer, Licht und Barme. Reun Enti, Baher, Rigi uns Warme. seem Borträge aus d. Gebiete d. Experimen-falchemie. Veh. Reg. Rat Dr. R. Bloch-mann. 4. Aufl. M. 115 Abb. (Bb. 5.) Entfittlätoff, D. u. f. Berwertg. B. Frof. Dr. K. Kaifer. 2. A. R. Ubb. (Bb. 313.) Dage und Deijen. Bon Dr. 28. Blod. Dit 34 Abb. Materie f. Beltather.

10

Bathematil Ginführung in Die Dathematil Bon Oberlehrer B. Menbels. fobn. Mit 42 Fig. (Bb. 503.) - Dath. Formeljammlung. Gin Biederholungsbuch ber Glementarmathematil. Bon Brof. Dr. S. Jatobi. (80.567.) - Raturmiffenia. u. R. i. flass. Alter-tum. Bon Brof. Dr. Sob. & Seiberg. mm. Son Prof. Dr. Fra. De De Seo.
Mit 2 Fig. (Bb. 370.)
— Praftische W. Bon Prof. Dr. R.
Neuendorff. I. Graphische Tariellungen. Verfürzles Rechnen. Das Mechaen mit Tabellen. Wechanische Rechnen i. ich.
Methaeitschiebeitschen des mttel. Kalimannings Actuel. I. Reben. Vandischeinlichkeitsrechnung. 2., berb. A. M. 29 Fig. i. T. u. 1 Icf II. Geom. Brichnen. Brojektionst. Flächenmeilung. Körvermeilung. M. 133 Fig. (341, 526.)
— Rathemat. Spirle. B. Dr. B. Ahren 8.
3. Auft. M. Itekb. u. 77 Fig. (38). 170.)
— f. a. Arithmeitt. Tisserentialeechnung. Babricheinlichfeiterechnung. Beometrie, Infinitesimalrechnung. Integralrechnung, Berfpettive, Planimetrie. Brojeftionslehre, Trigonometrie, Beftorrechnung, Bahricheinlichfeiterechnung. Redanit. Bon Brof. Dr. Samel. 3 Bbe. I Grundbegriffe ber M. II. DR. b. festen Rörver. III. M. b. flüss. u. lustförm. Lörver. (Bb. 684/686.) Aufgaben aus b. tean. Dechanit. B. Brof. A. Schmitt. M. zahlt. Sig. f. Bewegungst. Starik. 156 Auf. u. Löj. II. Opnamik. 140 Aufg. u. Löj. (558/559.) - fiehe auch Statik Bret. Das R., f. Erforfc. n. f. Leben. Lon Brf.Dr.D.Fanfon.3.A.M.408. (Bb.30.) Menich u. Erde. Cfirgen bon ben Bechfelbeziehungen zwischen beiben. Bon Brof. Dr. M. Rirch hoff. 4. A. (Bb. 31.) f. auch Giszeit, Entwidlungsgeichichte, Mrzeit. - Ratur u. Menich fiebe Ratur. Benicht Rorper. Bau u. Tatigfeit d.menicht. R. Einführ. i. d. Sthrifol. d. M. B. Prof. Dr. d. Sachs. 4. Auft. M. 34 Abb. (32.) L. auch Anatomie, Arbeitzleiftungen, Auge, Blut, Gehiß, derz, Fortpflänzg., Verveniphem, Bhrifol., Sinne, Verbild. Mifrostop, Das. Allgemeinverständt. dar-gestellt. Von Brof. Dr. W. Scheffer. Mit 99 Abb. 2. Aust. (Bb. 35.) Moleküle u. Atome. Bon Brof. Dr. G. Mie. 4. Aufl. Mit Fig. (Bb. 58.) - f. a. Weltather. Mond, Der. Bon Brof. Dr. J. Franz. Mit 34 Abb. 2. Aufl. (Bb. 90.) Rahrungsmittel I. Ernährung u. K. Katur u. Kenish. B. Ticett. Krof. Dr. M. G. Schmidt. Mit 19 Abb. (Bb. 458.) Raturlehre. Die Grundbegriffe der mo-dernen K. Einführung in die Phyfit. Bon Hofrat Brof. Dr. F. Auerbach. 4. Aufl. Wit 71. Fig. (Bd. 40.) Raturphilosophie, Die mod. B. Krivatog. Dr. 3. M. Bermeyen. 2. 4. (8b. 491.)

Raturmiffenfaft. Religion und R. Rampf u. Frieden. Ein geichichtl. Rud-blid. B. Biarrer Dr. A. Biannluche. 2. Muff. 728d. 141.) . R. und Tednit. Am faufenden Bebftuhl b. Beit. Aberficht ab. b. Wirfungen pugl 6. Sett. Aberlicht ib. d. Strüngen 6. Naturw 11. Lechnif a. d. gef. Aufurre leben. B. Brof. Dr. W. Launhardt. 3. Auft. Mit 3 Abb.

— R. u. Math. I. flass. Attert. B. Brof. Dr. J. E. Heib. L. flass. Attert. B. Brof. Dr. J. E. heiberg. 2 Fig. (Bb. 370.) Kerven. Som Kervenlisten, fein. Bau 11. sein. Bedeutung für Leib 11. Seefe im gefund. 11. krant. Zustande. B. Brof. Dr. R. Bander. J. Auft. W. 27 Fig. (Bb. 48.)

— Liebe auch Austamie - liche auch Anatomie. Optik. Die ovt. Justrumente. Luve, Mi-froikop, Fernrohr, photogr. Objektiv u. ihnen vermandre Justr. B. Broj. Dr. R. d. Rohr. 3. Unit. M. 89 Ubb. (38.) – f. a. Auge, Brille, Kinemat., Licht u. Farbe. Mitroft., Spekrooltopie, Strahlen. Organismen. D. Belt b. D. In Entwidl. und Busammenhang bargestellt. Bon Oberftudienrat Brof. Dr. R. Lampert. Mit 52 Abb. (Bd. 236.) — fiebe auch Lebeweien. Balanzoolsgie fiebe Tiere ber Borwelt. Berfpektive, Die, Grundzüged. B. nebft An-wendg. B. Brof. Dr. A. Doehlemann. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (Bb. 510.) Pflanzen. Die fleifcfreff, Bfl. B. Brof. Dr. M. Bagner. Dit 82 Ubb. (20. 344.) - Unf. Blumen u. Bfl. i. Garten. B.Brot. Dr. U. Dammer. M. 69 Abb. (Bb. 360.) - Uni Blumen u. Pfl. i. Zimmer. B. Brof. Dr. U. Dammer. M. 65 Abb. (26 359.) - f. auch Botanit, Sauten, Lebewefen, Bilge. Schablinge. Bflangenphuliolegie. B. Brof. Dr. S. DR o lijd. Mit 63 sig. (Bb. 569.) Bhstogemie. Bon Brof. Dr. S. Kün-mell Mit 23 Abb. i. Tert u. a. 1 Taf. 2. Aufl. (Bb. 227.) Photographie f. Abt. VI. Dugik Berdegang d. mod. Bh. B. Oberl. Dr. H. Keller. M. Fig. 2. Aufl. (343.)

— Erperimentalphylif, Eleichgewicht u. Bewegung. Bon Geh. Reg. Kat. Brof. Dr. K. Börnftein. M. 90 Abb. (371.)

— Phylif in Rücke und Hans. Bon Brof. D. Sveitlamb. M. 51Abb. (Bb. 478.)
— Große Bhysiter. Bon Brof. Dr. F. A.
— Graße 2. Aufl. Mit Gilbn. (324.)
— L. auch Energie, Raturlehre, Opiif, Relativitätstheorie, Warme; ebenjo Eleftrojechtif Abt. VI. Physiologie. Ph. d. Menichen. B. Brivatbos. Dr.A. Lip (d. il. 4 Bde. l. Allgem Khyfiologie. II: Physiologie d. Stofiwechfels. III: Ph. d. Allgem L. Arteislaufs u. d. Aussicheidung. IV: Bh. der Bewegungen und der Empfindungen. (Bd. 527—530.)

— siehe auch Arbeitsleistungen, Mensch. Rorper, Bflanzenphpfiologie.

Jeber Band geheftet M. 1.20 Aus Matur und Geisteswelt Jeber Band gebunden M. 1.50 Verzeichnis der bisher ericienenen Bande innerhalb der Wiffenschaften alphabetisch geordnet

Bilge, Die. Bon Dr. A. Gidinger. Dit Dianeten, Die. Bon Brof Dr. B. Beter. Mit Fig. 2. Auft. von Dr. S. Rau-(8b. 240.) mann. Blanimetrie 3. Gelbitunterricht. B. Brof. B. Grang M. 94 Fig. 2. Auft. (340.) Braftijde Mathematit f. Mathematit.

Brojeftionsiehre. In furzer leichtfaßlicher Darstellung f. Selbäunterr. u. Schulgebr. Bon Zeichenl. A. Schubeistn. Mit 208 Fig. im Tert. (Bb. 564.) Nadium, Das, und die Nadioafivität K. Dr. M. Centnerszwer. M. 334bb. (Bd. 405.)

Rechenmaschinen, Die, und das Maschinen-rechnen. Bon Reg.-Rat Divl.-Ing. &. Dens. Mit 43 2166. (Bb. 490.) Relativitätstheorie. Einführung in Die. (Bd. 618.) in Die. Bon Dr. B. Bloch. Rontgenitrahlen, D. A. n.ihre Anwendg, B. Dr. med. G Budh. M. 85 Uhb. i. T. u. auf 4 Taieln. (Bb. 556.) (Bb. 556.) Sauglingspflege. Bon Dr. E. Kobrak 2. Aufl Mit Abb. (Bb. 154.) (Bb. 154.)

Schachiviet. Tas, und seine ftrargischen Brinzivien. V. Dr. M. Lange. 3., veränd. Luft. Wit 2 Vidn., 1 Schachvertaiel u. 43 Larft. v. abungsbeildiet. (Vdb. 281.) - Die bauptvertreter ber Chadinielfunft u. b. Gigenart ihrer Spielffihrung.

Kon Dr. M. Lange. (Bb. 53!.) Schädlinge, Die, im Tier-u. Pflanzenreich u. i. Petämpf. B. Geb. Rog. Pat Broi. Dr. K. Edftein. 3. A. M. 36 Fig. (18.) Saulhngiene. Bon Brof. Dr. 2. Burger-

ftein 3. Aufi. Mit 43 Fig. (Bb. 96.) Sernalbiologie f. Fortvilanzung, Pilanzen. Sernatethil. B. Broj. Dr. d. E. Timer. (Bb. 592.) bing.

Sinne d. Menfch., D. Sinnesorgane u. Sinnesempfindungen. A. Hofrat Broi. Dr. 3. Areibig. 3. Aufl. R. 30 Abb. (27.) Sonne. Die. Bon Dr. A. Kraufe. Mit (Bb. 357. 64 Mbb.

Spettroffopie. Bon Dr. 2. Grebe. 2. Aufl. Mit Abbild. (285, 284.) Spiel fiebe Mathem. Spiele, Schachipiel. Sprache. Entwidlung der Spr. und Dei-lung ihrer Gebrechen bei Rormalen, Sowachlinnigen und Sowerhörigen. 2. Behrer R. Ridel. (28b. 586.)

liebe auch Rhetorit, Sprache Abt. III. Ctatit. Dit Ginichluß ber Feftigleitslehre. 2. Baugemertichuldireftor Reg.-Baum U. Schau Mit 149 Fig. i. T. (Bb. 497.)

- fiehe auch Dechanit.

erilifation liche Desinfeftion. ditaff f. Luftfitidfioff.

nme. Die menichliche St. und ihre ugiene. Bon Brof Dr. B. S. Gerber. , berand. Aufl. Mit 20 Abb. (Bb. 136.) cablen. Cichtbare u. unfichtb. 2. Brof. Dr. R. Bornftein und Brof. Dr. 29. Mardwald. 3. Aufl. von Brof. Dr. G. Regener, Dit Abb. (28b. 64.)

Suggestion. Dypnotismus und Stiggestion. B. Dr. E. Trömner. 2. Aufl. (BB.-199.) Sigwasser-Plantion. Das. B. Brof. Dr. O.Z ach arias. 2.A. 57 Abb. (Bb. 156.) Thermodynamis i. Abt. VI. (Bo. 199.) Prof. Dr.

D. Zachartas. 2.11. VI. Ihermodynamif i. Abt. VI. Liere. L. der Kormelt. Bon Brof. Dr. D. Bb. 399.) Abel. Mit 31 Abb. Brof. Brof. Brof. 39. Brof. 77 Abb. (23b. 253.)

Tierfunde. Eine Einführung in die Boologie. Bon Privatdosent Dr. K. den nings. Mit 31 Uhb. (Bb. 142.)
– Lebensebelingungen und Verereitung der Liere. Bon Broi. Dr. D. Maas. Mit 11 Karten und Abb. (Bb. 139.)
– Immeriation und Abb. (Bb. 139.)
– Immeriation und Abb. (Bb. 139.)
– Immeriation und Abb. (Bb. 139.)
– i. auch Agnarium, Balterien Daustiere, Korallen, Lebenwein, Schädlinge, Uriere, Korallen, Bebewein, Schädlinge, Uriere, Korallen, Bebewein, Echädlinge,

Urtiere, Bogeileben, Bogelaug. 2Birbeltiere.

Tierzucht fiebe Abt. VI: Rleintieraucht, Tiergüchtung. Trigonometrie, Chene, 3. Selbstunterr. B. Brof. B. Crans. 2. Aufl. M. 50 Fig.

(256. 431.) - Spharifde Er. Bon Brof. B. Crans. (Bb. 605.)

Merbreitung, Tuberfuloje, Die, Befen, Tuberfuloje, Eie. Welen, Setulutani, Von Uriache, Verhütung und Seilung. Von Generalarzi Proi. Dr. W. Schu im burg. 2. Tuil. W. 1 Taf. u. 8 Fig. (VI)-47.) Turnen. Von Oberl. F. Edarbt. Wit 1 Vildnis Jahns.

1 Bildnis Jahns. (Bd. 583.) — f. auch Leibesübungen, Anatomie b. Menichen Bb. VI.

Urtiere, Die. Einführung i.b. Wiffenschaft vom Leben. Bon Brof. Dr. R. Gold-ichmidt. 2. A. M. 44 Abb. (Bb. 160.) Urzeit. Der Menich d. U. Lier Borlesung. aus der Entwickungsgeschichte des Mensichengeschliechts. Von Dr. A. De il born.

3. Aufl Dit gahlr. Abb. (235. 62.) Bettorrechnung. Einführung in die. Von Brof. Dr. F. Jung. (Bb. 668.) Berbildungen. Körperliche, im Alndesalter u. ihre Berhütung. Von Dr. W. Davib. Mit 26 Abb.

Bererbung. Ers. Abstammgs.- u. B.- Lehre. Bon Broj. Dr. E. Lehman n. Weit 20 Abbildungen. (Bd. 379.)

- Geiftige Beranlagung u. B. Won Dr. phil. et med. G. Commer. (Bd. 512.) Bogelleben, Deutsches. Zugleich fursionsbuch für Bogeltreunde. Dr. A. Boigt. 2. Aufl. als Er-B. Brof. (Bb. 221.) Bogeling und Bogelichut. Bon Dr. 23. R. Edarbt. Mit 6 Abb. (3b. 218.)

Bahricheinlichkeitsrechnung, Die. Bon Brof. Dr. R. Einführ. in (Bb. 580.) tichitich. Bald, Ber dtiche. B. Brof. Dr. S. Saus-rath. 2. Ajl. M. Bilberanh. u. 2. Rarten.

- siehe auch Holz Abt. VI. [(28b. 153.) Jeder Band geheftet M. 1.20 Aus Natur und Geisteswelt Jeder Band gehunden M. 1.50 Mathematik. Naturmiffenschaften und Medigin - Recht, Wirtschaft und Cechnik

Barme. Die Lehre v. d. B. B. Geh. Reg.-Rat Beltuntergang. Untergang der Belt und Roof Dr R Rornte in. Dit Abb. ber Erde nad Cane und Biffenicaft. B. Brof. Dr. A. Bornstein. Mit Abb. 2. Aufl. v. Brof. Dr. A. Bigand. (172.) — i.a. Luft, Wärmetrafungid, Wärme-lehre, techn. Thermodynamif Abt. VI. Baifer, Das. Von Seh. Reg.-Rat Dr. D. Anielmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.) Beidwerf, D. dijde. B. Forinnir. G. Jebr. b. Nordenilych. M. Titelb. (Bd. 436.) Beltall. Der Ban des B. Son Erof. Dr. 3. Scheiner. 4. U. M. 26 sig. (Bb. 24.) Beltäther und Materie. Bon Erof. Dr. G. Mie. Rit Sig. 4. Aufl. (Bb. 59.) I, auch Moletüle. Belthild. Das aftronomische B. im Bau-del der Zeit. Von Brof. Dr. S. Oppen-heim. 2. Aufl. Mit 19 Abb. (Bd. 110.) - fiehe auch Aitronomie. Beltentitehung. Entitehung d. B. n. d. Erde nach Sage u. Biffenich. B. Brof. Dr. M.

B. Beinftein. 2. Aufl.

Brof. Dr. D. B. Beinftein. (80. 470.) Better. Unfer B. Gine Ginfuhr. in bie Ritmatologie Deutschl, an b. band v. Betterfatten. 2. Aufl. B. Dr. R. benvig. Mit Abb. (I) 349.)

— Einsübrung in die Betterfunde. Von Brof. Dr. L. Weber. S. Anfil von William und Wetterf. Mit 28 Fig. u. 3 Taf. (Vd. 55.) Blrbeltiere. Bergleichende Anatomie der Sinnesorgane der B. Bon Prof. Dr. B. Lubold, Wir 107 Abb. (Bb. 282.) Auchgeitfunde liefte Gebig. Bellen- und Gemebelehre siehe Anatomie des Menjaren Biologie. Boologie i. Abstammungel., Aguarium, Biologie, Schadlinge, Tiere, Urtiere, Bogefleben, Bogelaug, Weibmert, Bir-(35, 223.) beltiere.

VI. Redt, Wirtichaft und Tednit.

Agrifulturchemie. Bon Dr. B. Krische. Buch. Wie ein B. entsteht. B. Brof. A. W. Mir 21 Abb. (Bb. 314.) Unger. 4. Auft. M. 7 Taj. u. 26 Abb. Mir 21 2166. angestellte fiebe Raufmannifche U. Intife Birtichaftsgeschichte. B. Kriv. Cos.
Dr. D. Neurath. 2., umgeard. A. (258.)
— siehe auch Antiles Leven Abr. IV. und Arbeiterverficherung. Arbeiteridus, B. Geh. Hofrat Brof. Dr. C. v. 8 mie-bined - Subenhorft. 2. Auff. (78.) Arbeitsleiftungen des Menichen, Die. Gin-führ, in b. Arbeitsphysiologie. B. Brof. Dr. h Boruttau. M. 14 Sig. (Bb. 539.)
— Bernismahl, Begabung u. A. in ihren gegenleitigen Beziehungen. Bon B. J. Ruttmann. Mit 7 Uhb. (Bb. 522.) Arzneimittel und Genugmittel. Bon Krof. Dr. O. Schmiebeberg. (Bd. 363.) Dr. D. Schmiebeberg. (Bb. 363.) Apst, Der. Seine Stellung und Aufgaben Bon Dr. im Rulturleben ber Gegenm. (28b. 265.) med. M. Fürit. Automobil, Das. Gine Ginf. in b. Bau b. heut Berionen-Araitwagens. B.Db. . Ing. R. Blau. 3., überarb. Mufl. M. 98 Abb. (28b. 166.) u. 1 Titelbilb. Baufunde f. Gifenbetonbau. Baufunit fiebe Ubt. III. Belenchtungswesen, Das moderne. Bon Ing. Dr. d. Lur. M. 54 Abb. (Bb. 433.) Bergbau. Bon Bergasiessor F. B. Beb-(Bb. 467.) bing. Bewegungelehre f. Mechan., Aufg. a. b. M. Bierbrauerei. Bon Dr. A. Bau. Mit 47 21bb. (285, 333.) Bilang f. Buchhaltung u. B. Blumen. Unf. Bl. u. Bfl. i. Garten. Bon Brof. Dr. A. Dammer. Mit 69 Abb. (Bb. 360.) - Uni. Bl. u. Bfl. i. Bimmer. B. Brof. Dr.U. Dammer. M.65 Ubb. (286. 359.)

- fiehe auch Garten. Brauerei f. Bierbrauerei.

Unger. 4. Aufl. M. 7 Taj. n. 26 Abb. im Tert. (9d. 175.) – j. a. Schrifts u. Buchweien Abt. IV. Buchhaltung u. Bilang, Annfm., und ihre Beziehungen 3. buchhalter. Erganisation, Kontrolle u. Statifist. B. Dr. 3. Gerie-ner. Wit 4 ichemat. Dariest. 2. Auft. (Bd. 597.) Chemie in Rüche und Saus. Bon Dr. 3. Klein. 4. Aufl. (Bo. 76.) — i. auch Agrifulurchemie, Gleftrochemie, Farben, Sprengstoffe, Technit; ferner Egemie Abt. V. Dampffeisel liebe Feuerungsanlagen. Dampfmalchine, Die. Bon Geb Bergrat Broj. R. Bater. 2 Bde. I: Wirkungsweise des Dampies im Keisel und in der Maschine. 4. Aufl. M. 37Abb. (Bd. 393.) II: Ihre Gestaltung und Bermenbung. 2. Aufl. Mit 105 Ubb. (Bb. 394.) (35. 394) Desinfeltisn. Sterilifation und Konjer-vierung. Bon Reg. und Med.-Act Dr. D Solbrig. Wit 20 Uhb. (Bb. 401.) Deutsch. Handwerf, Landwirf-ichait. Berinjiung, Weidwerf, Wittschaftsleben, Bivilprojegrecht; Reich Abt. IV. Drafte und Rabel, ihre Unfertigung und Anwend. in d. Eleftrotechnit. B. Telegr.-Inip. S. Brid. M. 43 Ubb. (Bb. 285.) Dunamif f. Mechanit, Aufg. a. d. M. 2. Bd., ebenfo Thermodynamit. evend Lettmoshand.
Fifenbahnwefen, Das. Bon Eisenbahnbauu. Betriebsinfo. a. D. Dr.-Ing. G. Vicbermann. 2 Auft. M. 56 Abb. (144.)
Eisenbetonbau, Der. B. Diol.-Ing. E. haimovici. 2 Auft. M. Abb. u. 38 Stissen (Bb. 275.) fomie 8 Rechnungsbeifp.

Gifenhuttenmejen, Das. Bon Geh. Bergr. Brof. Dr. S. Bedbing. 5. Aufl. v. Bergaffeffor F. 28. 23 ebbing. M. Fig. (20.)

Jeder Bond geheftet II. 1.20 Aus Natur und Geisteswelt Jeder Band gebunden III. 1.50 Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet

Cleftrifde Graftübertragung, Die. B. Ing. Debezeuge. Silfsmittel zum Seben fefter. B. Röbn. Mit 137 Abb. (Bb. 424.) flüssiger und gass. Körber. Bon Geh. Bergrat Brof. A. Bater. 2. Ausl. M. Bon Beh. Gleftredemie. Bon Brof. Dr. R. Mrnbt. (28b. 234.) 67 Mbb. Mit 38 Abb. (Bb. 196.) Cleffrateduil. Grundlagen b. G. B. Ober-ing. M. Rotth 2. Aufl. M. 74 Abb. (391.) Seizung und Lüftung. Von Ingenieur 3. E. Maper Mit 40 Abb. (Bb. 241.) - f. auch Drabte u. Rabel, Telegraphie. Sols. Das D., seine Bearbeitung u. seine Berwendg. B. Insp. J. Grosmann. Mit 39 Originalabb. i. T. (Bd. 473.) Erbrecht. Teftamentserrichtung und G. Bon Brof. Dr. J. Leonhard. (Bd. 429.) Graabrung u. Nahrungsmittel f. Abt. V. Dotelmejen, Das. Von B. Damm -Farben u. Farbhoffe. S. Erzeng. u. Ber-wend. V. Dr. u. 8 art. 31 Abb. (Bb. 483.) — fiebe and Licht Abb. V. Ferniprechtechnik k. Telegraphie. Etienne. Mit 30 Mbb. (28b. 331.) Suttenmeien fiebe Gifenbuttenmeien. Japaner, Die, i.b. Weltwirtichaft. B. Brof. Dr. R. Rathgen. 2. Aufl. (Bb. 72.) Fenerungsaniagen, Indufir. u. Dampfeffel. B. Ing. J.E. Maber. 88 Ubb. (Bb. 348) Immunitatelehre f. Abmehrfrafte Abt. V. Finanzwissenschaft. Bon Brof. Dr. S. B Altmann. 2 Bde. 2. Aufl. I. Allg. Teil. II. Besond. Teil. (Bd. 549—556.) Ingenieurtednif. Cooprungen b. 3. ber Menzeit. Bon Geh. Regierungsrat M. Geitel. Dit 32 Mbb. (26b. 28.) Inftrumente fiebe Optifche A. fiebe auch Gelbwefen. Funtentelegraphie liebe Telegraphie. Rabel f. Drahte und Q. Ralte, Die, ihr Weien, ihre Erzeugung und Surforge fiehe Rriegsbeichabigtenfürforge, Rinderfürjorge. Bermertung. Bon Dr. S. Mit. Barten. Der Aleingarten. B. Sauptichriftl. 45 21bb. (Bb. 311.) Rob. Coneiber. 2. Muff. Mit Abb. Raufmann. Das Redt bes R. Gin Leitig-(28b. 498.) ben f. Raufleute, Studier. u. Juriften. B. Juftigrat Dr. D. Strauf. (Bb. 409.) - Der Sausgarten. Bon Gartenarchiteft 28. Shubert. Dit Abb. (28b. 502.) Raufmannifche Angestellte. D. Recht d. t. - liebe auch Blumen. M. Bon Justigrat Dr. M. Ctraus. Sartenfunit. Seid.d.S. B. Baurat Dr.-Ing. (255, 361.) Cbr. Rand. 20. 41 Abb. (28b. 274.) Rinderfürforge, Bon Brof. Dr. Chr. Sartenitadibewegung. Die. Bon Landes-wohnungsinspetror Dr. S. Kam pff-me ver. 2. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 259.) 'efanguiswesen i. Berbrechen. (3b. 620.) Glumfer. Rinematographie. Bon Dr. S. Behmann. Mit Abb. 2. Aufl. von Dr. 28. Merte. (Bb. 358.) eldwesen, Zahlungsverfehr u. Bermögens-verwalt. Bon G. M aier. 2. Aufl. (398.) – f. a. Finanzwissenich.; Münze Abt. IV. Rlein- u. Strafenbahnen, Die. B. Obering. a. D. Oberlohrer A. Liebmann. Mit 85 Mbb. (Bb. 322.) enuhmittel fiebe Arzneimittel und Ge-Rleintierzucht, Die. Bon Sauptichriftleiter Joh. Schneiber. Mit 59 Fig. i. Text eidute. Bon Generalmajor a. D. (3b. 604.) u. auf 6 Tafeln. Bahn. (35. 365.) — siehe auch Tierzüchtung. bewerblicher Rechtsichut i. Deutschland. Rohlen, Uniere. B. Bergalf. B. Rufut. Mit 60 Abb. i. Tert u. 3 Tai. (Bb. 396.) Batentanm. B. Tolfsborf. (Bb. 138.) fiebe auch Urbeberrecht. Kolonialbatanil. Bon Brof. Dr. F. Tob-ler Mit 21 Abb. (18b. 184.) Granhiide Darftell., Die. B. Sofrat Brof. Dr. F. Auerbach. M. 100 Ubb. (Bb. 437.) Rolonijation, Innere. Bon A. Bren-Sandel. Gefdicte b. Belth. Bon Real-(Bb. 261.) gomnafialbirettor Dr. M. G. Gd mibt. nina. Ronfervierung fiebe Desinfettion. (Bb. 118.) Muff. Ronfumgenoffenichaft, Die. Bon Brof. Dr. Geidicte des beutiden Sandels. Geit b. Ausgang bes Mittelalters. Bon Dir. &. Staubinger. (28b. 222.) Brof. Dr B. Langenbed. 2. Auil f. auch Mittelftandsbewegung, Birt-Mit 16 Tabellen. (3b. 237.) icafilide Organijationen. Dandfeuermaffen, Die. Entwidl. u. Techn. Rraftanlagen fiehe Feuerungsanlagen unb 2. Major R Beig. 69 Mbb. (3b. 364.) Dampfteifel, Dampfmaichine, Dandmert, D. deutiche, in f. fulturgeicitt. fraftmaidine, Bafferfraftmafdine. Entwidig. B Geh. Schulr. Dr. G. Dtio. Kraftübertragung, Die eleftrifde. Bon Ing. B. Rohn. Mit 137 Ubb. (Bb. 424.) Die eleftrifche. 4. Aufl. M. 33 Abb. auf 12 Taf. (Bb. 14.) Rrieg. Rulturgeicidte b. R. B Brof. Dr. R. Beule, Geh. Sofrat Brof. Dr. E. Saushalt f. Chemie, DeBinfeltion. Garten. Jurisprudeng, Bhnfit; Rahrungsmittel Abt. IV; Batterien Abt. V. Bethe, Brof. Dr. B. Schmeibler, Brof. Dr. A. Doren, Brof. D. B. Sauferban fiche Baufunbe, Beleuchtungs-

Serre.

(Bb. 561.)

wefen, beigung und Luftung.

In Berbin-Priensbeldabigtenfarforge. bung mit Ded. Rat, Oberftabsarat u. Cheiarat Dr. Rebentiich, Gemerbedulbir. S. Bad, Direttor bes Stadt. Arbeitsamts Dr. B. Schlotter herausbon Dr. G. Rraus, Beiter bes Stabt Rurforgeamts für Rriegsbinter. Wiehene in Franffurt a. Dt. Mit 2 Mb-(286. 523.) bilbungstafeln. Briegsichiffe. Unfere. Ihre Entftebung unb Berwendung. Bon Geh. Marinebeurat a. D. E. Krieger. 2. Aufl. von Marinebaurat Gr. Churer. Dit 62 Mb-(36. 389.) bilbungen. Kriminaliftik, Moderne. Bon Amtörichter Dr. A. Sellwig. M. 18 Abb. (3b. 476.) I. a. Berbrechen, Berbrecher. Kücht liehe Chemie in Küche und Haus. Landwirtfdaft, Die. B. Dr. 28. Claagen. 2. Mufl. DR. 15 Mbb. u. 1 Racte. (215.) - f. auch Agrifulturchemie, Pleintierjucht, Luitstidftoff, Tierguchtung; Saus-tiere, Tierfunde Abt. V. Landwirtidafti. Majdinentunde. 68. Brof. Dr. G. Fifcher. 2. Mufl. IR. Abb. (316.) ihre miffenichaftlichen Die. Luftfahrt, Grundlagen und ihre techniiche Entwidlung. Bon Dr. R. Rimführ. 3. Auft. b. Dr. Fr. Suth. PR. 60 Abb. (Bb. 300.) Luftfiiditoff, Der, n. f. Berm. 3. Brof. Dr. R. Raifer. 22. 13 Abb. (28b. 313.) Luftung. beigung und 2. Bon Ingenieur 3. E. Mauer. Mit 40 Abb. (Bb. 241.) Mart, Rarl. Berfuch einer Ginfilhrung. Bon Brof. Dr. R. Bilbrandt (621.) - f. auch Sozialismus. Reidinen f. bebezeuge, Dambimaidine, Landwirtich. Maschinenkunde, Barme-traitmaid., Bafferfrastmasch. Maidinenelemente. Bon Geh. Bergral Brof. R. Bater. 2. A. M. 175 Ubb. (Bb. 301.) Make und Deifen. Bon Dr. 28. 2010d. Mit 34 Abh (286. 385.) Rechanik B. Brof. Dr. G. Samel 3Bde. I. Grundbegriffe d. M. II. M. der feiten Körver. III. M. d. flüss. u. suitsörm. (28b. 684/686.) Rörper. Aufgaben aus der technifden IL f. b. Schul- n. Selbstunterr. B. Brof. R. Schmitt. M. gablr. Fig. I. Bemegungsl., Statit. 156 Aufg. u. Löfungen. II. Dunam. 140 A. u.Löf. (Bb. 558/559.) Reffen fiehe Dage und Meifen. Metalle, Die. Bon Brof. Dr. R. Scheib. 3. Aufl. Mit 11 Abb. (286, 29.) Diete. Die, nach b. 969. Gin Sandbuchlein f. Juriften, Mieter u. Bermieter. B. Juftigrat Dr. M. Straug. (194.) Mifroftop. Das. Gemeinberftanblich bargestellt von Brof. Dr. 28. Scheffer. 2. Aufl. Mit 99 Abb. (Bb. 35.) Mild, Die, und ihre Produtte. Bon Dr. A. Reis. Mit 16 Abb. (Bb. 362.)

Mittelftandsbewegung, Die mederne, Ron Dr. 2 Duffelmann. (8b. 417.) Rabrungemittel f. Abt. V. Raturmiffenfd. u. Tednit. Am fauf. Bebftubl b. Beit, fiberi. ib. b. Birfgen. b. Entin b. R. u. T. a. d. gef. Kulturleb. B. Geb. Reg.-Rat Brof. Dr. W. Laun = hardi. 3. Aufl. Mit 3 Abb. (Vd. 23.) Kantik Bon Dir. Dr. A. Möller. Mit 58 Abb. (Vd. 255.) Optischen Juhrumente, Die. Lupe, Mi-58 Abs. Onkrumente, Die. Lupe, Die froftob, Ferurobe, photogr. Dieftit u. rnite. Bon Brot. Dr. R. 881 thuen berm. Initr. Bon Brof. Dr. M. b. Robr. 3. Aufl. M. 89 Abb. (Bb. 88.) Drganifationen, Die wirtigaftlichen, Bon Brot Dr. E. Leberer. (Bb. 428.) Brot Dr. E. Lederer. (Bb. 428.) Ditmart, Die, Gine Ginführ. i. b. Brob'ems ihrer Birifchaitsgesch. Orsg. von Brof. Dr. 23 Mitscherlich. (286.351.) Dr. 23 Mitiderlich. (26b. 351.) Batente u. Batentrecht f. Gewerbl. Rechtsich. Berpetunm mobile, Das. B. Dr. &r. 3 chal Dit 38 Abb. (Bb. 462.) Photodemie. Bon Brof. Dr. 6. Rummell. 2 Mufl. Mit 23 9165. i. auf 1 Tafel. Bhotographie, Die, thre wissenschaftlichen Grundlagen u. i Amwendung. B. Dr. D. Brelinger. 2. Auft. Mit Abb. (414.) Die fünstlerische Ba. B. Dr. B. Barfrat Dit Bilberanh. (2 Tafeln). (410.) Angewandte Liebhaber-Bhotographie, ibre Tednif und ihr Arbeitefelb. Bon Dr. 28 28 ar ft at Dit 2166. (266. 535.) Phuiif in Riche und Daus, Bon Brof. Dr. b. Speitlamp. D. 51 Mbb. 08b. 478.] fiche auch Phofit in Abt. V. Boltmefen, Das. Bon Raiferl. Cherpoftrat D. Gieblift. 2. Mufl. (8d. 182) Alegramaidinen. Die, und bas Mafdinenreduen. Bon Reg.=Rat Dipl.-Ing. Leng. Dit 43 Mbb. (96b. 490.) Redt fiebe Erbrecht, Gewerbl. Rechtsichut. Raufm. Angeft., Urheberrecht, Berbreden. Kriminaliftit, Berfaffungsrecht, Bibilprozegrecht Achisprobleme, Moderne, B Geb. Justigr. Brof. Dr. J. Kobler. 3. Aust. (Bb. 128.) Salglagerfiatten, Die bentiden, Ihr Bor-tommen, ihre Entitehung und die Bervertung ihrer Brodutte in Induirrie und Landwirtschaft. Bon Dr. E. Rie-mann. Mit 27 Abb. (Bb. 407.) fiebe auch Geologie Mbt. V. Saifiban liebe Rriegsichiffe. Somueft. Die, u. b. Schmudfteinindufte. B. Dr. A. Eppler. DR.64 Abb. (Bb. 376.) Soziale Bemegungen und Theorien bis jur modernen Arbeiterbewegung. Bon G. (Bb. 2.) 5. Aufl. Maier. - f. a. Arbeiterichus u. Arbeiterberficher. Sezialismus. Crid. der fozialik. Ideen t. 19. Ird. B. Brivatdos. Dr. Fr. Mudle. 2.U. I. D. ration. Soz. II. Broudhon u.d. entwicklungsgeschichti. Soz. (Bb. 269,270.) Jeder Band geheftet M. 1.20 Aus Natur und Geisteswelt Jeder Band gebunden M. 1.50 Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet

Sazialismus fiehe aud Marr: Rom, Co-Biale Kämpfe im alten Rom. Abt. IV. Spinnerei, Die. Bon Dir. Krof. M. Leh-mann. Mit 35 Abb. (Bb. 338.) Sprengitoffe, Die, ihre Chemie n. Techno-logie, R. Geh. Reg.-Rat Brof. Dr. M. Bie-bermann 2. Aufl. M. 12 Fig. (286.) Stant fiehe Abt. IV Statit. Mit Ginichlut ber Feftigkeitslehre. Bon Reg.-Baum. Baugewerticulbireft. U. Schau. W. 149 Fig. i. X. (Bb. 497.) — siehe auch Mechanit, Aufg. a. b. W. L. Dit Ginialug ber Beitigfeitelehre. Statiftif. B. Brof. Dr. G. Schott. (442.) Strafe und Berbrechen, Geichichte u. Dr. ganil. d. Gefängnismef. B. Strafanftalis-bir. Dr. med. B. Bollig. (Bd. 323.) Stragenhahnen. Die Alein- u. Strafenb. Dhertehrer Bon Oberingenieur a. D. Obertehrer A. Liebmann. M. 82 Ubb. (Bb. 322.) Tabat, Der. Anbau, Dandel u. Berarbeit. B. Jac. Wolf. M. 17 Abb. (Bb. 416.) Tednit, Die demijde. Bon Dr. A. Mul-ler. Mit 24 Abb. (Bb. 191.) Lelegraphie. Das Telegraphen- u. Bernfprechwefen. Bon Kaiferl. Dberpostrat D. Gieblist. 2. Aufl. (Bb. 183.) — Telegraphen- und Fernsprechtechnit in ihrer Entwidlung. B. Dervoft-July. 6. Brid. 2. U. Mit 65 Abb. (Bb. 285.) — Die Funkenteieger. B. Teleger.-Juip. S. Thurn. 4. Hufl. M. 51 Ubb. (Bd. 167.) — fiebe auch Drafte und Kabel. Testamentserrichtung und Erbrecht. Bon Brof. Dr. F. Leonbard. (Bd. 429.) Thermodynamit, Praftifche. Anfgafen u. zgermoonnamt, Prattyge, Aifjaden u.
Beispiele zur mechanischen Wärmelehre.
Bon Geh. Bergrat Prof. Dr. K. Bater.
Mit 40 Abb. i. Text u. 3 Taf. (Bd. 596.)
— siehe auch Wärmelehre.
Bierzüchtung. Bon Tierzuchfbirektor Dr.
G. Wilsdorf, Mit 40 Abb. im Text und 12 Taf. 2. Aust. (Bd. 369.)
— liehe auch Bierrierzucht fiche auch Rleintierzucht. Uhr. Die. Grunblagen u. Technit b. Beitmeilg. B. Brof. Dr.-Ing. H. Bod. 2., umgearb. Aufl. Mit 55 Abb. i. T. (216.) Urbeberredt. Das Recht an Gorift- und Runftmerten. Bon Rechtsanm. Dr. Mothes. (Bb. 435.) fiebe auch gewerblich. Rechtsichut. Berbrechen. Strafe und B. Geichichte u.Drganifation b. Befängnismejens. B. Strafanst. Dir. Dr. med B. Bollit. (Bb.323.)
— Moderne Kriminglistif. B. Amtsrichter Dr.M. Dellmig.M.18 266. (Bb. 476.) Berbrecher. Die Pinstologie des B. (Ari-minalpins). V. Sprafanitalkdir. Dr. med. B. Pollis. 2.A. M.5 Diagr. (Bb. 248.) f. a. Sandichriftenbeurt. Abt. I Berfaifg. Grundg. d. B. d. Deutid. Reiches. B. Geheimrat Brof. Dr. E. Loening 4. Muff. (Bb. 34.)

Berfaifg. und Berwaltung der deutiden Stadte. Bon Dr. DR. Schmib. (466.) (466.)Dentid. Berfafiger. i. geidictt. Entmidl. B. Br. Dr. E. & ubrid. 2. A. (Bb. 80.) Bertehrsentwidlung i. Deutial. 1800 bis 1900 (forigef. b. 3. Gegenwart). Bor-träge über Deutschlands Gisenbahnen u. Binnenwasserstraßen und ihre Enwicklung und Berwaltung wie ihre Bedeu-tung f. b. heutige Bolfswirtschaft. Bon Brof. Dr. B. Los. 4. Aufl. (Bb. 15.) erlicherungswesen. Grundzüge des B. Beriiderungsmefen. (Brivatverlicher.). B. Broj. Dr. phil. et jur. A. Manes (Bb. 105.) Baffentednif fiebe Sandfeuerwafien. Bald, Der deutide. B. Brof. Dr Sausrath. 2.Mfl. Bilberanh u. Rart. (Bb. 153.) Barmefraftmaichinen, Die neueren, Von Geh. Bergraf Brof. A. Bater. 2 Hee. I. Christheung in die Theorie u. d. Bau d. Gasmaich. J. Aufl. M. 42 Uhh. (Bb 21.) N: Gaserzeuger, Großgasmaich., Dampf-u. Gasturb. 4. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 86.) fiehe auch Rraftanlagen. Barmelebre, Einführ. i. d. techn. (Ther-mobinamit). Bon Geh. Bergrat Krof. R. Bater. M. 40 Ubb. i. Text. (Bb. 516.) — j. auch Thermodinamit. Basser, Das. Bon Geh. Beg.-Rat Dr. D. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bb 291.) — s.a. Luft, Bass.. Licht, Wärme Abt. V. Bafferfraftmafdinen, Die, u. b. Musnung. b. Wafferfrafte B. Rail. Geh. Reg.-Rat 2 b. 3 hering 2. A. M. 57 Mbb (Bb. 228.) Beidmert, Das deutiche. B Forftmeift. G. Grhr. b. Mordenflncht. M. Titelbild. (36 436.) Beinban und Beinbereitung. Bon Dr. 78 Schmitthenner. 34 Abb. (Bb. 332.) Belthandel fiehe Sanbel. Birtichaftsgeographie Bon Brof Dr. F. Seiberich. (26 633.) Birticaftegeich. f. Antife 23., Oftmart. Birticaftsleben, Deutich. Auf geograph. Grundl. gelch. b. Brof. Dr. Chr. Gruber. 3. A. v. Dr. Heinlein. (42.) — Die Entwidlung des deutschen Birt-icaftelebens i. letten Jahrh. B. Geh. Reg.-Rat Brof. Dr. & Bohle. 3 U (57.) - Deutidl. Stellung i. b. Belimirtid. B. Brof. Dr. B. Urnbt. 2. U. (Bb.179.) - Die Japaner in d. Weltwirtschaft. B. Brof. Dr. R. Rathgen. 2 U. (Bb. 72.) Birtigaftligen Organisationen, Die. Bon Brof. Dr. G. Lederer. (235. 428.) f. Konfumgenoff., Mittelftanbebeweg. Reichnen, Tedn. Bon Brof. Dr. Sorft = (Bd. 548.) mann. Reitungsmefen. B. Dr. S. Dieg. (Bb. 328.) Bivilprozegrecht, Das deutiche. Bon Juftigrat Dr. M. Strauß.

DIE KULTUR DER GEGENWART IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

III. Teil. Die mathematischen, naturwissenschaftlichen und medizinischen Kulturgebiete. [10 Bände.]

(* erschienen, † unter der Presse.) In Halbfranz geb. jeder Band 6 Mark mehr. "I.Abt. Die math. Wissenschaften. (1Bd.)

Abteilungsleiter u. Bandredakteur: F. Klein. Bearb. v. P. Stäckel, H. E. Timerding, A. Voß, H. G. Zeuthen. 5 Lfgn. *I. Lfg. (Zeuthen) geh. M.3.— *IL Lfg. (Voß) Geb. M. 6.— *IL Lfg. (Voß) geh. M. 5.—

II.Abt. Die Vorgeschichte der mod. Naturwissenschaften u. d. Medizin. (1Bd.) Bandredakteure: J. Ilberg u. K. Sudhoff. III.Abt. Anorg. Naturwissenschaften.

Abteilungsleiter: E. Lecher.

*Bd. 1. Physik. Bandredakteur: E. Warburg. Bearb. v. F. Auerbach, F. Braun, E. Dorn, A. Einstein, J. Elster, F. Exner, R. Gaus, E. Gehrcke, H. Geitel, E. Gumlich, F. Hasenöhrl, F. Henning, L. Holborn, W. Jäger, W. Kaufmann, E. Lecher, H. A. Lorentz, O. Lummer, St. Meyer. M. Planck, O. Reichenheim, F. Richarz, H. Rubens, E. v. Schweidler, H. Starke, W. Voigt, E. Warburg, E. Wiechert, M. Wien, W. Wien, O. Wiener, P. Zeeman, M. 22., M. 24. *Bd. 2. Chemie. Bandredakteur: †E. v. Meyer. Allgem, Kristallographie u. Mineralogie. Bandredakteur: Fr. Rinne. Bearb.v. K. Engler, H. Immendorf, + O. Kellner, A. Kossel, M. Le Blanc, R. Luther, †E. v. Meyer, W. Nernst, Fr. Rinne, O. Wallach, †O. N. Witt, L. Wöhler. Mit

Abb. M. 18 .-- , M. 20 .-+Bd. 3. Astronomie. Bandred.: J. Hartmann. Bearb. von L. Ambronn, F. Boll, A. v. Flotow, F. K. Ginzel, K. Graff, J. Hartmann, J. v. Hepperger, H. Kobold, S. Oppenheim, E. Prings-

heim, +F. W. Ristenpart.

Bd.4. Geonomie. Bandredakteure: †I. B. Messerschmitt u. H. Beunderf.

Bd. 5. Geologie (einschl. Petrographie). Bandredakteur: A. Rothplets. Bd. 6. Physiogeographie. Bandredakteur: E. Brückner. 1. Hälfte: Allg. Physiogeographie. 2. Hälfte: Spez. Physiogeographie.

IV. Abt. Organ. Naturwissenschaften.

Abteilungsleiter: R.v. Wettstein. *Bd.1.Allgemeine Mologie. Bandredakteure: †C. Chun u. W. Johannsen, u. Mitw. v. A. Günthart. Bearbeitet v. E. Baur, P. Roysen-Jensen,

IV. Teil. Die technischen Kulturgebiete. [15 Bände.]

Abteilungsleiter: W. v. Dyck und O. Kammerer.

Bisher erschien: Technik des Kriegswesens. Bandredakteur M. Schwarte. Bearb. v. K. Becker, O. v. Eberhard, L. Glatzel, A. Kersting, O. Kretschmer, O. Poppenberg, J. Schroeter, M. Schwarts, W. Schwinning. Geheftet M. 24.—, gebunden M. 26.—. [Band 12.]

Teuerungszuschläge auf sämtliche Preise 30% einschließlich 10% Zuschlag der Buchhandlung

Probeheft mit Inhaltsübersicht des Gesamtwerkes, Probeabschnitten, Inhaltsverzeichnissen und Besprechungen umsonst und postfrei durch B. G. Taubner, Leipzig, Poststr. ;

P. Clausen, A. Fischel, E. Godlewski, M. Hartmann, W. Johannsen, E. Laqueur, † B. Lidfors, W. Ostwald, O. Porsch, H. Przibram, E. Rádl, O. Rosenberg, W. Roux, W. Schleip, G. Senn, H. Spemann, O. zur Strassen. M. 21.—, M. 23.— *Bd.2. Zellen-und Gewebelehre, Morphologie und Entwicklungsgeschichte. 1. Botan. Teil. Bandredakteur: † E. Strasburger. Bearb. v. W. Benecke u. † E. Strasburger. Mit Abb. M. 10.—, M. 12.— 2. Zoologischer Teil. Bandredakteur: O.Hertwig. Bearb.v.R.Gaupp, K. Heider, O. Hertwig, R. Hertwig, F. Keibel, H. Poll. M. 16 .- , M. 18 .-

Bd. 3. Physiologie u. Okologie. *1. Bot. T. Bandred .: G. Haberlandt. Bearb. von E. Baur, Fr. Czapek, H. v. Guttenberg. M. 11.-, M. 13.-2. Zoologischer Teil. Bandredakteur und

Mitarbeiter noch unbestimmt.

*Bd. 4. Abstammungslehre, Systematik, Paläontologie, Biogeographie. Bandredak-teure: R. Hertwig u. R. v. Wettstein. Bearb. v. O. Abel, I. E. V. Boas, A. Brauer, A. Engler, K. Heider, R. Hertwig, W. J. Jongmans, L. Plate, R. v. Wettstein. M. 20 .- , M. 22 .-

tV. Abt. Anthropologie. (1 Bd.)

Bandred .: +G. Schwalbe. Bearb. v. E. Fischer, R. F. Graebner, M. Hoernes, Th. Mollison, A. Ploetz, +G. Schwalbe, ca. M. 22.-, M. 24.-VI. Abt. Die medizin. Wissenschaften. Abteilungsleiter: Fr. v. Müller.

Bd. r. Die Geschichte der mod. Medizin. Bandred.: K. Sudhoff. Die Lehre von den

Krankheiten. Bandred.: W. His. Bd. 2. Die medizinischen Spezialfächer. Bandred.: Fr. v. Miller.

Bd. 3. Beziehungen der Medizin z. Volkswohl. Bandredakteur: M. v. Graber.

VII. Abt. Naturphilosoph. u. Psychol. *Bd. 1. Naturphilosophie. Bandredakteur: C.Stumpf. Bearb.v. E.Becher. M. 14.-, M. 16.-Bd. 2. Psychologie. Bandredaktenr und Mitarbeiter noch unbestimmt.

VIII. Abt. Organisation der Forschung und des Unterrichts. (1 Bd.) Bandredakteur: A. Gutzmer.

Tierbau und Tierleben in ihrem Rusammenhang betrachtet

Dr. Richard Deffe Dr. Kranz Doflein und Brofeffor der Boologie an der Candwirt-

Brofeffor der Boologie an der Universität icaftliden Sodidule gu Berlin Steiburg i. Br.

Mit über 1200 Abbild, fowie 40 Tafeln in Schwarzen, Buntdrud nach Originalen bekannter Runftler

1. Band: Das Tier als felb. 2. Band: Das Tier als Glied des Naturganzen ftändiger Organismus

Jeder Band in fünftl. Original-Ganzleinenband M. 21,-, in eleg. Galbfranzband M. 24,-Es ift ein fundamentales Wert, das bem Sachmann als Wegweiser und Aundarube, dem Laien als wunschenswerte Ergänzung zu seinem großen oder kleinen Grehm dienen wird. Wissenschaftlich ganz auf der Höhe der Zeit stehend, spricht es eine so klare Sprache und betührt so sessen der Tierforschung, dast es für jeden Wert und Gültigkeit hat, der fich mit Boologie beschäftigt." (Bropplaen.)

Mathemat.-Phösikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darftellungen aus der Elementarmathematik und sphifik für Schule und Leben. Unter Mitwirtung von Sachgenoffen berausgegeben von Dir. Dr. W. Liehmann und Studienrat Dr. A. Witting. Mit Jahlreichen Siguren. 21. 8. Ratt. je M. 1 .-

Bisher eridienene Bandden:

Biffern u. Biffernfofteme. I. D. Bablenzeichen d. alt.Rulturvöller. B. C. E offlet. 2.A. Bd.1. Der Begriff d. Babl in feiner log. u. hiftor. Entwidl. Von S. Wieleitner. 2. R. Bd. 2. Der pfthagoreifche Lehrfat mit einem Ausblid auf das fermatiche Problem. Bon W. Liehmann. 2. Auflage . . . Bb. 3. Wahricheinlichleitsrechnung nebft Anwen-dungen. Bon D. Meiffnet. Bd. 4. Die Sallgefete, ihre Gefchichte u. ihre Bebeu-tung. Bon B. C. Timerding. Bb. 5. Einführung in die projettive Geometrie. Bon Theorie der Blanetenbewegung. Sinsührung in die Infinitesimalrechnung. Bon A. Witting. 2. Aust. Bb. 9. Wo steat der Jehler? Bon W. Liehmann und V. Trier. 2. Ruflage . . Bb. 10. Quadratur d. Rreifes. 3. E. Beutel. Bd.12. Beheimniffe der Rechenfunftler. Bon Bh. Maennden. 2. Aufi. . . . Bd. 19. Darftellende Geometrie des Belandes. Bon Anfertigung mathematifcher Modelle. Bon R. Giebel. Bd. 16.

Drebt fich die Erde? I. W. Brunner. Bb.17. Mathematiter=Anefdoten. Bon Wilhelm Bom periodifden Dezimalbruch jur Bahlentheorie. Bon A. Leman . . Db. 19. Mathematif und Malerci. 2 Bde. in 1 Bd. Bon G. Wolff Bd. 20. 21. Soldaten-Mathematik. Bon Alexander Witting Bb. 22. Theorie und Praxis des Rechenschiebers. Von Die mathem. Grundlagen der Batiations- u. Bererbungslehre. B.B.Riebefell. Bb.24. Riefen und Zwerge im Bablenteich. Von W. Liehmann. 2. Aufl. . . Bb. 25. Methoden jur Lofung geometrifcher Aufgaben. Einführung in die Asmographic. I. Die Junktionsleiter. Von P. Eu den. Bd. 28. Wasift Geld? B. W. Liehmann. Bb. 30 .. Nichteutlidifche Geometrie in ber Rugelebene. ding . . Bb. 92. In Borber.: Doehlemann, Mathematit u. Architettur. Bfeifer, Bhotogrammetrie. Buden, Einführung in bie Nomographie. II. Die Zeichnung als Rechenmaschine. Müller, Der Begenftand d. Mathematit. Tenerungszuschläge auf famtliche Breife 30% einschlieft. 10% Bufchlag ber Buchbandlung

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Teubners Künstlersteinzeichnungen

Wohlfelle farbige Originalwerte erster deutscher Künstler sürs deutsche Haus Die Sammlung enthält jehr über 200 Bilber in den Größen 100×70 cm (M. J. 50), 75×55 cm (N. J. -), 103×41 cm u. 60×50 cm (M. J. -), 55×42 cm (M. J. 50), 41×30 cm (M. J. -) Kahmen aus eigener Wertschie in den Bildern ausgepallen Aussührungen äussert preistwürdig.

R. W Diefenbachs Schattenbilder "Per aspera ad astra" "Göttliche Jugend"

Album, die 34 Teilb. des vollft. Wandfriefes ford. wiederg. (20 ½-225 cm) M. 15.— Zeilbider als Wandfriefe (42-280 cm) je M. 5.— (35-18 cm). je M. 1.25 lehtereu.Glas m. Leinwd.-Einf.je M. 4.—

2 Mappen, I. 2. Aufl., mit je 20 Biati (25½-34 cm) . . . je M. s.— Einzelbilder . . . je M. —.75 unter Glas u. Leinwandeinf. je M. 3.—

Rarl Bauers Lederzeichnungen

Sührer und helden im Welttrieg. Einselne Blätter (28×36 cm) M.-.75, Liebhabenausgade M. 1.25, 2 Mappen, enthaltend je 12 Blätter, je . M. 3.— Charafterföpfe 3. deutschen Geschichte. Mappe, 92 Bl. (28×36 cm) M.6.95, 12 Bl. M. 3.50, Einzelblätter M.—.85. Liebhabenausgade auf Karton getlebt M. 1.25

Aus Deutschlands großer Zeit 1813. In Mappe, 16Bl. (28><36cm) A. 4.50, Einzelblätter M. — e.S. Liebzaberansgabe auf Karton geflebt . . . M. 1.25 Rahmen zu den Blätten vollend von A. 4.— bis M. 7.—

Sherenschnittevon Rolf Wintler

1. Reihe: "Aus der Kriegszeit". S Blätter, Scherenschnitte des Künstlers wiedergebend. 3. Abschied des Landwehrmannes. 2. Auf der Wacht. 3. In Zeuerstellung. 4. Schpatrouille. 5. Teuer Kamerden. 6. Am Grabe des Kamenaden.

5. Trene Kameraden. 6. Am Grabe des Kameraden.
Auf Kart. m. verschiedenfarb. Tonunterdruck: Ciny. M. 1.25, 6 Bl. in Mapre M. 5.—
Unter Glas in Leinwand-Einfassung: M. 4.—. In Mahagonirähmen: M. 7.—

Deutsche Kriegsscheiben

Scheibenbilder erfter Mundener Kunfter wie v. Defregger, J. Dies, E. Grühner, f. v. Babermann, Ih. Ih. Beine, A. Jant, v. Jügel u. a. Sie bringen töjtlich bumorvolle, zumeist auf den Krieg bezügliche Darftellungen, wie den groff-manligen Engländer, die Entente, "Aussen-Jangion", Il 2) auf der Jagd, u. a. und find zur Schieftausbildung und als Aimmerichmud gleich gerioner und mermol!

mäuligen Engländer, die Entente, "Auffen-Invofion", U 21 auf der Jagd, u. a. umd find jur Schieflausbildung und als Jimmerschmuck gleich geeignet und wettvoll. Preis ie ca. M. 1.50. Auf Pappe mit grünem Kraup je ca. M. 1.80. Auf holz mit grünem Pranz je ca. M. 5.50. — Vei größenen Bezügen ermäßigen sich die Preise. Als 22er Schalbehen (Platten) Sied 18 Ph., 12 Sied M. 1.—

Bostkartenausgaben

Jede Katte 15 Df., Reihe von 12 Karten in Umfchlag M. 1.50, jede Karte unter Glas mit schwarzer Einfassung und Schnut M. 1.

Teubuers Künftlersteinneignungen in 11 Aciben (danon Soveid. Motive and u. Glas in voulem Rahmen is M.2.—, in ecigem Hohrahmah, is M. 2.2.5). Sauers Jührer u. Helben in 2 Aciben, Winflers Scherenschnitte, o Kant. in Umfol. M. 2.25). Sauers Jührer u. Helben in 2 Aciben, Winflers Scherenschnitte, o Kant. in Umfol. M. 2.80. Kriegsscheiben-Karten in 2 Aciben (diese ui de mit Einfaß, läufl.) Denkwürdige Schätten aus Nordfrantreich. 12 Kanten nach Orig-Eithogungh. von K. Lohe. Diesenbachs Schättendilder in 6 Reihen (diese auch in vieterligen oder voulen Holzschmehen zu fe M.2.55). And den Kichen (diese auch in vieterligen oder voulen Holzschmehen zu fe M.2.55). And den Kichen Kinderleben, 6 Kanten nach Oleistisspeina. von Hela Beters. 1. Der gute Index. 2. Der b 5 se Inventer. 3, Wo drückt der Schuh? 4. Schmeichelfähren. 5. Hüppden, ausgepaßte 1. Keider Wäsche. In Umfol. M. —, so. Schattenrifftarte. von Gerda Eusse Schmidt: 1. Neibe: Spiel u. Lanz, zeit im Ganten, Volumbenvalel, Nie Leine Schäseru, Velaufder Nichter, Kattenfänger von Hameln. 2. Reihe: *Ode Steunde, *Der Beiho, Im Grünen, *Neisfenhiet, Kultenfängskrauß, *Poer Leibeschief. 3. Reihe: *Der Itele a. Ihn", *Annäherungsverluch, *Am Spinett, *Beim Wein, *Kin Näuden, *Der Gebuttstag. Iede Relhe in Umfol. M. – so. *Diese Schästenrifftarten von Gerda Luise Schmidt auch als Vilder im Jormat Volles Einfall. Vild. Beim, —. 50. In Mahagonirähmehen m. Glas einfelt. Vild. je M. 5.50
Vollst. Katt. ü. kinfiler. Wandlem. m. sach. Wiederg, v. ü. 200 Bl. geg. Einlende, v. 75 Pf. (Ausl. 85 Pf.) Auss. Werz. d. Politartenausg. umfonst. Verlag in Eeipzig, Postftx. 3.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

