Aus Natur und Geisteswelt

170

W. Ahrens

Mathematische Spiele

Vierte Auflage

B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

Die zweimalige Lohnerhöhung für Buchdrucker und Buchbinder allein im letzten Vierteljahre wie die gleichzeitige weitere Preissteigerung aller Materialien zwingt mich zu einer nochmaligen Erhöhung des Grundpreises der Sammlung ab 1. Januar 1919, und zwar für die bisherige Einbandausführung von M. 1.50 auf M. 1.90.

Um die Bändchen auch zu einem billigeren Preise bei geringeren Ansprüchen an die Ausführung des Einbandes zugänglich zu machen, liefere ich ferner zu dem
einband
schlag). –
gleich de
noch steig
und der

Leipzi

„...teswelt"

...rem Entstehen dem
...Bahn dem Tüch-
...Wissenschaft, Kunst
...ei zugleich unmittel-
...und die Einsicht
...gebiete für
...n heutigen
...rfnis, dem
...ern tragen,
...eit mit dem
...ge Über-
...s geistigen
...dem immer
...auf den
...kenswerter
...Gelegenheit
...estrebt, der
...eht als die
...bearbeitet,
...is jetzt eine
...rs geeignet,
...nen Betrag,
...pflegt, auch

für die Befriedigung geistiger anzuwenden. Durch den billigen Preis ermöglichen sie es tatsächlich jedem, auch dem wenig Begüterten, sich eine Bücherei zu schaffen, die das für ihn Wertvollste „Aus Natur und Geisteswelt" vereinigt.

Jedes der meist reich illustrierten Bändchen ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich

Jedes Bändchen geheftet M. 1.20, gebunden M. 1.50

Teuerungszuschläge 30% einschließl. 10% Zuschlag der Buchhandlung

Leipzig, im Juni 1918. B. G. Teubner

Jedes Bändchen geheftet M. 1.20, gebunden M. 1.50

Bisher sind **zur Mathematik und Astronomie** erschienen:

Einführung in die Mathematik. Von Oberlehrer W. Mendelssohn. Mit 42 Fig. (Bd. 503.) — Einführung in d. Mathematik

***Mathematische Formelsammlung.** Ein Wiederholungsbuch der Elementarmathematik. Von Prof. Dr. S. Jakobi. (Bd. 567.)

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. V. Studienrat P. Crantz. 2 Bände. (Bd. 120, 205, auch in 1 Band gebunden.) — Arithmetik, Algebra u. Analysis
I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 5. Aufl. Mit 9 Figuren. (Bd. 120.)
II. Teil: Gleichungen. Arithmetische u. geometr. Reihen. Zinseszins- u. Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 4. Aufl. Mit 21 Textfiguren. (Bd. 205.)

***Einführung i. d. Vektorrechnung.** V. Prof. Dr. F. Jung. (668.)

Einführung i. d. Infinitesimalrechnung m. einer histor. Übersicht. V. Prof. Dr. G. Kowalewski. 2. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 197.)

Differentialrechnung unter Berücksichtigung der prakt. Anwend. in der Technik mit zahlr. Beispielen u. Aufg. versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit 45 Fig. u. 161 Aufg. (Bd. 387.)

Integralrechnung mit Aufgabensammlung. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 2. Aufl. Mit Figuren. (Bd. 673.)

***Ausgleichungsrechnung.** Von Geh. Regierungsrat Prof. E. Hegemann. (Bd. 609.)

Planimetrie zum Selbstunterricht. Von Studienrat P. Crantz. 2. Aufl. Mit 94 Figuren im Text. (Bd. 340.) — Geometrie

Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht. Von Studienrat P. Crantz. 2. Aufl. Mit 50 Figuren im Text. (Bd. 431.)

***Sphärische Trigonometrie.** Von Studienrat P. Crantz. (605.)

Analytische Geometrie der Ebene zum Selbstunterricht. Von Studienrat P. Crantz. Mit 55 Figuren. (Bd. 504.)

Praktische Mathematik. Von Prof. Dr. R. Neuendorff. 2 Bde. — Angewandte Mathematik
I. Teil: Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufm. Rechnen im tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verbesserte Auflage. Mit 29 Figuren und 1 Tafel. (Bd. 341.)
II. Teil: Geometrisches Zeichnen, Projektionslehre, Flächenmessung, Körpermessung. Mit 133 Figuren. (Bd. 526.)

Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abbildungen. (Bd. 490.)

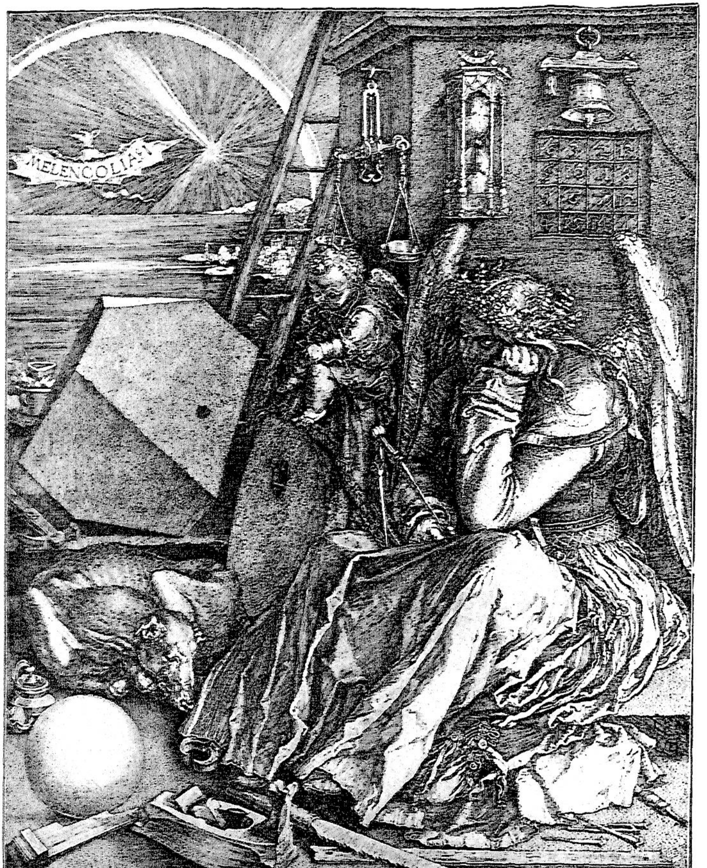
Geometrisches Zeichnen. Von Zeichenlehrer A. Schudeisky. Mit Figuren. (Bd. 568.)

Projektionslehre. Die rechtwinklige Parallelprojektion u. ihre Anwendung auf die Darstell. techn. Gebilde nebst Anhang über die schiefwinklige Parallelprojektion in kurzer leichtfaßl. Darstell. f. Selbstunterr. u. Schulgebr. V. Zeichenl. A. Schudeisky. Mit 208 Fig. (Bd. 564.)

Die Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. Von Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (Bd. 510.)

Die graphische Darstellung. Von Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. Mit 100 Abbildungen. (Bd. 437.)

Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)



Die „Melancholie“ von Dürer.

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen

170. Bändchen

Mathematische Spiele

Von

Dr. W. Ahrens
in Rostock

Vierte, verbesserte Auflage
17.–22. Tausend

Mit einem Titelbild und 78 Figuren
im Text

Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1919

Vorwort.

„Das vorliegende Büchelchen gibt eine Auswahl von mathematischen Spielen, und zwar solche, die mir einerseits besonderes Interesse zu verdienen schienen, andererseits sich für diejenige Darstellung eigneten, die ich mir für dieses Buch vorgesetzt hatte. Um nämlich niemanden, auch den der Mathematik völlig Unkundigen, von der Lektüre auszuschließen, habe ich nirgends irgendwelche mathematischen Kenntnisse beim Leser vorausgesetzt. Die durch diese Rücksicht bedingte Darstellung gestaltete sich zwar an einzelnen Stellen etwas breiter, während an anderen wenigen Stellen auf strenge Beweisführung verzichtet werden mußte. Ich hoffe jedoch, daß man diese Mängel nicht als erheblich empfinden, sondern sie mit dem gewonnenen Vorteil einer im weitesten Sinne populären Darstellung entschuldigen wird."

Mit diesen Worten wurde das Programm der ersten Auflage dieses Buches (1907) im damaligen Vorwort gekennzeichnet. Die zweite Ausgabe (1910/1911) erfuhr sodann eine Erweiterung durch ein neues Kapitel: „Mathematische Trugschlüsse", und hierfür mußte natürlich der in den übrigen Kapiteln befolgte Grundsatz, der mathematischen Kunstsprache durchaus zu entraten, preisgegeben werden. Beruhen doch diese Trugschlüsse in der Hauptsache gerade auf unrichtiger Handhabung der mathematischen Technik. Derjenige Leser, der über keinerlei mathematische Kenntnisse verfügt, wird also auf dieses Kapitel IX, das übrigens von der dritten Auflage (1916) ab noch eine Erweiterung erfahren hat, im wesentlichen verzichten müssen.

Um das Mitarbeiten des Lesers mehr zu beleben, sind dem Text einige fortlaufend durch das Buch numerierte Fragen beigegeben, die durchweg so einfach sind, daß der Leser, der mit Verständnis gefolgt ist, sie selbständig beantworten wird. Die am Schlusse gegebenen Antworten sollen daher mehr der Beruhigung des Lesers als der Befriedigung eines Bedürfnisses dienen. In höherem Grade wird vielen Lesern eine Besprechung („Aufdeckung") der Trugschlüsse erwünscht sein, und diese ist daher denn gleichfalls in jenem Schlußabschnitt „Beantwortung der Fragen" gegeben.

Gegenüber der dritten Auflage, die, obschon nahezu ebenso stark wie die beiden ersten zusammengenommen, in ziemlich kurzer Zeit verschwunden ist, konnte die jetzige, vierte Ausgabe eine nennenswerte Umfangsvermehrung schon aus äußeren Gründen nicht mehr erfahren. Vielmehr mußten sogar einige kleinere Partien, die niemand vermissen wird, gestrichen werden, um insbesondere für eine Anzahl neuer Bilder, die manchen Lesern, wie ich hoffe, nicht unerwünscht sein werden, Raum zu schaffen. Auch die aus einem anderen (äußeren) Grunde vorgenommene Neubearbeitung von Kapitel VIII, § 3, brachte erwünschten Raumgewinn.

Wer eine eingehendere und gründlichere Behandlung dieses ganzen Gebietes mit ausführlichen geschichtlichen und literarischen Angaben sucht, findet diese in meinen im gleichem Verlage erschienenen „Mathematischen Unterhaltungen und Spielen", die gegenwärtig in zweiter und zweibändiger Ausgabe vorliegen. Dort haben sämtliche in diesem kleinen Buche besprochenen Gegenstände neben zahlreichen anderen Themen eine ausführliche Behandlung erfahren mit alleiniger Ausnahme der „Trugschlüsse". Der für Dinge dieser letzteren Art besonders interessierte Leser findet übrigens manche andere, hiermit verwandte Fragen in meinem Buche „Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik" (Berlin 1918), und zwar in Kapitel VIII dort, behandelt.

Rostock (z. Zt. Arendsee) in Meckl., den 6. Juli 1918.

W. Ahrens.

Inhaltsverzeichnis.

Das, sollte ich meynen, liesse sich wohl aus der Erfahrung darthun, daß auch bey Vielen, die nie den Namen Mathematik gehört haben, eine grosse Menge von Vergnügungen mathematisch ist. Alle Spiele, die ungleich voll von Nachdenken, in langer Ordnung vom Schach bis tief unter das Bochen hinunter gehen, vergnügen, weil man bey ihnen rechnet, und Fontenelle hat sie längst für eine natürliche Algebra erklärt.

A. G. Kästner.
„Über den Werth der Mathematik, wenn man sie als einen Zeitvertreib betrachtet."
Ges. schönwissensch. Werke III,
Berlin 1841, p. 83.

Einleitung.

Mit „Spiel" pflegen wir eine Beschäftigung zu bezeichnen, die wir nicht eines bestimmten nützlichen Zweckes wegen, sondern lediglich zu unserer Unterhaltung, unserem Vergnügen, unserer Zerstreuung, unserer Erbauung entweder selbst vornehmen oder von anderen vornehmen lassen. Wir sprechen so von dem „Spiel" der Kinder, dem „Spiel" des Musikers, dem „Spiel" auf dem Theater usw.

Daß das Spiel oft auch einen bildenden Wert, selbst einen bedeutenden bildenden Wert hat, widerspricht unserer Definition durchaus nicht; man darf vielmehr, wie dies geschehen ist, in gewissem Sinne die Wissenschaft selbst als ein „Spiel" bezeichnen. — Das vorliegende Büchelchen enthält nur Spiele und erwartet vom Leser, daß er mitspielt. Ein Teil der darin behandelten Spiele erfordert, wenn dies auch keineswegs ein Erfordernis des Spiels an sich ist, bei praktischer Ausführung die Beteiligung von mindestens einer zweiten Person und kommt dann zumeist auf einen Wettstreit zwischen den beiden Spielenden hinaus.

Während dem Spielenden an sich ein bestimmtes Ziel nicht vorzuschweben braucht, ist dies bei vielen Spielen und bei den im vorliegenden Buche behandelten ausschließlich der Fall. Die Erreichung dieses Zieles kann, wie bei den reinen Glücksspielen, lediglich vom Zufall abhängen, sie kann aber auch bedingt sein durch manuelle Fertigkeiten oder durch eine geistige Leistung. Bei vielen Spielen — ich nenne als Beispiel das Billard — wird das Ergebnis durch das Zusammenwirken dieser verschiedenen Faktoren, von denen je nach Lage des Falles der eine mit größerer, der andere mit geringerer Stärke wirken wird, bestimmt werden.

Als „mathematisch" wird man ein Spiel nun dann zu bezeichnen haben, wenn es zu seiner Ausübung eine geistige Tätigkeit erfordert, bei der Methoden und Schlußweisen nach Art der in der Mathematik üblichen zur Anwendung gelangen oder doch bei verständigem Spielbetrieb gelangen müssen. Der mathematische Charakter des Spiels wird um so vollkommener sein, je mehr solche mathematischen Denkprozesse und Normen das ganze Spiel für sich allein beherrschen. Die mathematische Behandlung eines Spiels ist natürlich — ebenso wie auch die Mathematik selbst — nicht unbedingt an eine bestimmte technische Sprache, dargestellt durch Zeichen, Formeln usw., gebunden.

Diese Dinge sind vielmehr stets nur aus Rücksichten geistiger Ökonomie geschaffen und daher allerdings, insbesondere bei den schwierigeren Fragen der mathematischen Wissenschaften, dem menschlichen Geiste, der die verborgenen Wahrheiten nicht unmittelbar zu erkennen vermag, sondern zu ihnen nur unter Benutzung geistiger Krücken vorzudringen in der Lage ist, absolut unentbehrlich und sind bis zu dem Grade wichtig, daß zweckmäßige Festsetzungen in diesen Äußerlichkeiten sogar ausschlaggebend für die ganze weitere Entwickelung des betreffenden Wissenschaftsgebietes werden können. Für die hier behandelten Materien, die ausschließlich von der allerelementarsten Art sind, können wir jedoch von einer technisch-mathematischen Darstellungsweise — außer im letzten Kapitel, das überhaupt eine Sonderstellung in dem Buche einnimmt, — absehen, ohne uns einen erheblichen Zwang anzutun.

Es sei gestattet, das Wesen eines mathematischen Spiels an einem Beispiel zu erläutern, wofür wir das in Kapitel VI behandelte „Nim"-Spiel wählen wollen: Eine relativ einfache Theorie, die, wenn auch ohne die eigentliche Kunstsprache des Mathematikers darstellbar, von ausgeprägt „mathematischem" Charakter ist, lehrt, daß es ein unbedingt zum Siege führendes Verfahren gibt, durch das in der großen Mehrzahl der Fälle der anziehende Spieler sich — sogar bereits mit dem ersten Zuge — den Sieg sichern kann. Die Kenntnis dieser Theorie verschafft daher dem Spielenden gegenüber einem der Theorie unkundigen Gegner, mag dieser an sich in dergleichen Spielen nicht ungeübt und selbst scharfsinnig sein, zunächst eine Überlegenheit, die der einer mit den modernsten Feuerwaffen ausgerüsteten Truppe gegenüber einem Haufen mit Pfeil und Bogen bewaffneter Wilden gleichkommt. Falls beide Spieler die mathematische Spieltheorie kennen und fehlerfrei handhaben, hängt der Ausgang des Spiels nur noch von der Anfangsstellung ab, und, da die Spielenden die Bestimmung dieser dem Zufall überlassen werden, so würde das Spiel damit den Charakter eines *reinen Glücksspiels* annehmen, womit zugleich die praktische Durchführung der Spielpartien allen Reiz verlieren würde. Als *Spiel* vermag uns das „Nim" daher höchstens solange zu fesseln, als wir das mathematische Prinzip noch nicht erkannt haben, und das Interesse, das dieser Gegenstand unter allen Umständen verdient, liegt vorzugsweise in seiner ingeniösen mathematischen Theorie begründet.

Es sind nun durchaus nicht etwa gerade die kompliziertesten Spiele, die vom mathematischen Standpunkte das größte Interesse verdienen;

denn eine abschließende, alle überhaupt möglichen Fälle umfassende Theorie ist für solche Spiele, unter denen das Schach als das wohl komplizierteste und jedenfalls bilderreichste obenan steht, kaum denkbar, wir meinen eine Theorie, die genau für jede nur denkbare Position den absolut besten Zug angeben würde und die etwa als Resultat ergeben würde, daß der Anziehende stets siegen muß oder, was wohl wahrscheinlicher ist, die Partie stets unentschieden machen kann. Zwar ist verschiedentlich versucht worden, auch die Mathematik der Schachtheorie dienstbar zu machen, jedoch wird man diese Versuche als mißlungen ansehen dürfen, soweit es sich um die „Theorie" in dem soeben erläuterten Sinne handelt. Denn was soll man überhaupt unter einer „mathematischen" Behandlung der Schachtheorie verstehen? Eine solche müßte sich von der Schachtheorie im gewöhnlichen Sinne doch zunächst jedenfalls dadurch unterscheiden, daß sie alle bei einer gegebenen Stellung überhaupt nur möglichen Züge in den Bereich ihrer Erwägungen zöge; dies übersteigt aber wohl menschliches Können überhaupt. Ist doch, um nur ein Beispiel anzuführen, die Zahl aller verschiedenen, nach 2 Zügen (2 von jeder Seite) möglichen Positionen bereits größer als 70000, wenn auch die meisten dieser Kombinationen mehr oder minder fehlerhafte Züge enthalten werden, und vorläufig erscheint es jedenfalls ganz aussichtslos, durch Benutzung spezifisch mathematischer Hilfsmittel oder Denkprozesse für ein solches erschöpfend analytisches Verfahren eine erhebliche Abkürzung zu erreichen. Vielmehr würde, wenn man etwa an die Stelle der einfachen und übersichtlichen Gangarten der Figuren, des Mat usw. komplizierte Formeln setzen und mit diesen gewisse Rechnungs-Algorithmen ausbilden wollte in der Weise, wie dies teilweise versucht ist, Arthur Schopenhauer nur recht bekommen mit seinem bekannten Ausspruch, daß der Mathematiker einem Menschen gleiche, der sich seine gesunden Beine abschneide, um sich statt deren hölzerne ansetzen zu lassen, — so unberechtigt dies Wort des mathematikerfeindlichen und wenig mathematikverständigen Philosophen auch sonst ist. Eine vollständig erschöpfende Berücksichtigung aller nur möglichen Kombinationen würde dem praktischen Schachspieler übrigens einen unverhältnismäßigen Aufwand an Zeit und Kraft bedeuten, vielmehr scheidet sein taktischer Blick eine große Zahl offenbar fehlerhafter oder wertloser Züge von vornherein aus und läßt ihn seine ganze Kraft denjenigen zuwenden, die im Bereich des Zweckmäßigen liegen und deren Konsequenzen daher so weit wie möglich zu verfolgen sind: er gleicht einem Wanderer, der auf seiner Wanderschaft eine große Stadt passiert und sich ein Bild von dieser verschafft, indem er der Flucht der Hauptstraßen folgt, Lage und Aussehen der hervorragendsten und merkwürdigsten Gebäude sich genau einprägt und dann seine Wanderschaft fortsetzt, während ein anderer sich vornimmt, die Stadt nicht früher zu verlassen, als bis er jede, auch die offenbar unbedeutendste Straße passiert und jedes einzelne Haus betrachtet hat, wobei er allerdings vielleicht einmal eine Merkwürdigkeit entdecken wird, die dem ersteren entging, andererseits aber von Zeit zu Zeit sich in Sackgassen festrennt und einen unverhältnismäßig viel längeren Aufenthalt nehmen muß oder überhaupt ganz hängen bleibt. So ist das Schachspiel zwar, da manuelle Fertigkeiten dabei gar keine Rolle spielen und auch die Macht des Zufalls so gut wie vollständig ausgeschaltet wird, ein rein geistiges, rein logisches und doch kein mathematisches oder wenigstens nur ein recht unvollkommen mathematisches Spiel. Das „königliche Spiel" würde auch keine so große Gemeinde von Jüngern und Verehrern zählen und sich durch die vielen Jahrhunderte hindurch nicht in jugendlich-reizvoller Frische erhalten haben, wenn nicht durch die unermeßlich große Zahl von Kombinationen einer abschließenden Behandlung vorgebeugt wäre, und auch vermittelst der ihr eigenen Hilfsmittel wird es der Mathematik, wie schon gesagt wurde, wohl nie gelingen, das Schach des Reizes, den es als Spiel ausübt, zu entkleiden.

Ein Beispiel eines Spiels, das gleichfalls — wenigstens in Deutschland — auf den 64 Feldern des Schachbretts gespielt wird und für das eine abschließende Theorie resp. Analyse leicht gegeben werden kann, ist das unter dem Namen „Schaf und Wolf" bekannte. Für dieses unvergleichlich viel einfachere und nicht im entferntesten so abwechselungsvolle Spiel läßt sich unter Berücksichtigung aller überhaupt möglichen Fälle zeigen, daß und wie der Führer der als „Schafe" bezeichneten Steine stets gewinnen muß, ein Beweis, den man führt, indem man eine erschöpfende Liste aller nur möglichen Fälle in zweckmäßig systematischer Anordnung aufstellt und für jeden Fall den resp. die richtigen Züge angibt. Vom Standpunkt des Mathematikers bietet dies Verfahren übrigens kein besonderes Interesse, da keinerlei der Mathematik besonders eigentümliche Schlußweisen dabei zur Anwendung kommen, das Verfahren vielmehr fast einer Art von Statistik mehr ähnelt als einem mathematischen.

Kapitel I.

Wettspringen.

Wir beginnen mit einem ganz besonders einfachen Spiel, dem folgenden:

> Eine Person A nennt eine beliebige Zahl, jedoch höchstens 10; eine zweite Person, B, nennt darauf eine größere Zahl, die mindestens um 1 und höchstens um 10 größer ist als die von A genannte. Dann nennt wieder A eine Zahl, die mindestens um 1 und höchstens um 10 größer ist als die zuvor von B genannte, und so abwechselnd fort. Sieger ist derjenige, der gerade 100 erreicht. Läßt sich der Sieg erzwingen und gegebenenfalls: wie und von welchem der beiden Spieler?

Man kann dem Spiel natürlich auch etwa folgende, anschaulichere Einkleidung geben:

> Zwei Knaben A und B, von denen jeder höchstens 10 Fuß weit zu springen vermag, wollen in abwechselndem Sprunge eine gegebene Bahn von 100 Fuß Länge zurücklegen und dabei folgende Regeln beobachten: Jeder muß jedesmal mindestens 1 Fuß weit springen. A beginnt, und B springt alsdann von der Stelle aus, bis zu der A gekommen ist, dieser wieder von der Stelle ab, bis zu der B kam, usw. (Hierbei wird jedoch, wenn die Sprungweite sich nach Bruchteilen von Fuß mißt, nur die nächstkleinere ganze Zahl gerechnet, z. B. statt $5^3/_4$ F. nur 5 F.) Sieger ist derjenige, der gerade das Ende der Bahn erreicht.

Nach wenigen Versuchen bemerken die Spieler, daß der Zielpunkt 100 mit Sicherheit für denjenigen erreichbar ist, der zuvor auf 89 gelangt ist (s. die umstehende Fig. 1). Denn wenn der eine, sagen wir A, gerade bis 89 gekommen ist, so trennt den Gegner B vom Ziel noch eine Distanz, die seine maximale Leistungsfähigkeit noch um 1 Fuß übersteigt. B selbst kann also mit dem nächsten Sprunge das Ziel nicht erreichen; andererseits ist er aber nach der Spielregel verpflichtet, mindestens 1 Fuß weit zu springen. Mag er nun bis 90, 91, 92 . . . oder im äußersten Falle bis 99 springen: in jedem Falle kann A mit dem nächsten Sprunge das Ziel erreichen.

Ist nun das Ziel 100 von 89 aus mit Sicherheit zu erreichen, so ist 89 wieder von 78 aus unbedingt zu erreichen, und so geht dies offenbar fort durch Stufen von je 11, also durch 67, 56 ... hindurch bis zu 12 und schließlich zu 1. Hieraus folgt, daß der Sieg erzwungen werden kann, und zwar von demjenigen, der bei dem Spiel beginnt. Er muß nur zuerst 1 Fuß weit springen, beim nächsten Male auf Punkt 12 kommen, dann auf 23 usw. bis 78, 89 und schließlich 100.

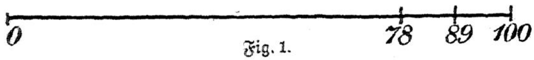


Fig. 1.

Offenbar läßt sich das Spiel auch dann, wenn für die Länge der Sprungbahn, sowie für die maximale und minimale Sprungweite der beiden Spielenden andere Zahlenwerte festgesetzt werden, entsprechend durchführen. Die Distanz der Stufen, nach denen man fortzuschreiten hat, um den Sieg zu erzwingen — in unserem Falle 11 — ist, wie leicht zu sehen, stets ebenso groß wie die maximale und minimale Sprungweite des einzelnen zusammengenommen (in unserem Falle $10 + 1 = 11$). Ist daher die Länge der Sprungbahn zufällig ein Vielfaches dieser Stufendistanz, so kann mithin der Sieg von dem beginnenden Spieler (A) nicht mehr erzwungen werden, wohl aber alsdann von dem zweiten Spieler (B). Wenn die Bahn z. B. 99 Fuß lang und im übrigen alles wie in dem obigen Falle ist, so mag A beginnen, wie er will: B kann mit seinem ersten Sprunge auf 11 gelangen, mit seinem zweiten dann auf 22, ... mit seinem neunten auf 99 und hat damit den Sieg erzwungen.

Frage 1: Die Länge der Sprungbahn beträgt 200 Fuß; im übrigen ist alles wie im ersten Falle oben. A glaubt irrtümlicherweise, zunächst wieder (wie im ersten Falle) auf 1 springen zu müssen; wie muß B fortfahren, um den Sieg zu erzwingen?

Frage 2: Wer kann den Sieg erzwingen, wenn der maximale Sprung des einzelnen 8 Fuß beträgt, als Minimum wieder 1 Fuß festgesetzt ist und die Bahn 90 Fuß lang ist, und wie ist zu verfahren?

Frage 3: Wer kann den Sieg erzwingen, wenn der maximale Sprung 17 dm, der minimale 1 dm und die Bahnlänge 150 dm beträgt?

Frage 4: Wer kann den Sieg erzwingen, wenn der maximale

Sprung 10 Fuß beträgt, das Minimum auf 3 Fuß festgesetzt wird und die Bahn 182 Fuß lang ist?

Frage 5: Der maximale Sprung sei 9 Fuß, der minimale 2 Fuß, die Bahnlänge 100 Fuß. Als Sieger gilt derjenige, der den Gegner zwingt, zuerst das Ziel zu erreichen oder auch zu überschreiten.[1]) Wer kann den Sieg erzwingen?

Kapitel II.

Das Boß Puzzle oder Fünfzehnerspiel.

§ 1. Geschichte und Beschreibung des Spiels.

In einem Spielschrein, der dem deutschen Kronprinzenpaare, dem späteren Kaiser Friedrich und seiner Gemahlin, zu ihrer am 25. Januar 1883 begangenen Silberhochzeit vom Verein für deutsches Kunstgewerbe als Ehrengabe dargebracht wurde, einem Meisterwerk deutscher Kunst, an dem mehr als 80 Künstler und Kunstgewerbler — Bildhauer, Architekten, Zeichenkünstler, Metallindustrielle usw. — unter Einsetzung ihres besten Könnens mitgewirkt hatten, befindet sich unter einer beträchtlichen Anzahl von Spielen der verschiedensten Art eins, das gerade damals in den vorhergegangenen Jahren eine außerordentlich große Verbreitung gefunden hatte und das daher in dem kronprinzlichen Spielschrein neben den mancherlei Karten-, Brett- und Gesellschaftsspielen gewiß nicht fehlen durfte. Unsere umstehende Fig. 2 gibt das prächtige Exemplar des Spielschreins, den mit Einlegearbeit geschmückten Ebenholzkasten mit den 15 kunstvoll verzierten Spielsteinen darin, in getreuer, nur verkleinerter Nachbildung wieder.

Das Spiel ist im Jahre 1878 in Amerika erfunden; sein Erfinder soll der geistvolle Sam Loyd gewesen sein, der in der Schachwelt als hervorragender Schachproblemkomponist wohlbekannt ist. Schon bald nach seiner Erfindung verbreitete das Spiel sich, in den Ländern englischer Zunge „Fifteenth Puzzle", in Deutschland „Boß Puzzle" oder auch „Fünfzehner-Spiel" und in Frankreich „jeu du taquin" (Neckspiel) genannt, über die ganze zivilisierte Erde und wurde in jenen ersten Jahren überall mit solchem Eifer gespielt, wie wohl kaum ein

1) Bei dieser Frage allein soll also zwischen dem Erreichen und Überschreiten des Ziels kein Unterschied gemacht werden, während z. B. bei Frage 4 dieser Unterschied wesentlich ins Gewicht fällt.

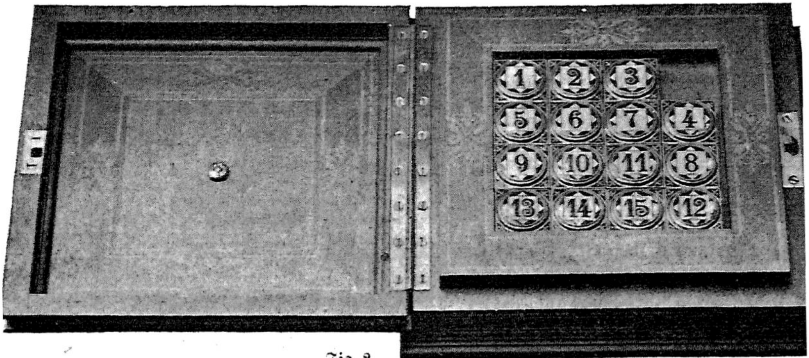


Fig. 2.

anderes Geduldspiel je zuvor. So wird beispielsweise von Hamburg erzählt, daß man dort die kleinen Kästen mit den 15 Holzklötzchen selbst in den Pferdebahnwagen erblicken und unruhige Hände darin schieben sehen konnte, daß die Prinzipale in den Handelskontoren über das Puzzlefieber ihrer Angestellten in Verzweiflung gerieten und durch Anschläge das Spielen während der Bureauzeit aufs strengste verbieten mußten, daß große Turniere veranstaltet wurden usw. Selbst im Sitzungssaale des Deutschen Reichstages, so erzählt Siegmund Günther, der hervorragende Geograph, Mathematiker und liberale Politiker, der in jenen Jahren, nämlich 1878—1884, dem hohen Hause angehörte, konnte man damals auf den Bänken an der Wand Abgeordnete aller Parteien sehen, die den Reden keinerlei Aufmerksamkeit schenkten, dafür aber um so eifriger „boß-puzzleten".

Die Aufgabe des Spiels[1]) besteht in folgendem:

> Die 15, mit den Zahlen 1—15 numerierten Steine werden in willkürlicher Reihenfolge in den Kasten hineingelegt, und nun soll lediglich durch Verschieben der Steine untereinander, wie dieses ja infolge des einen leer gebliebenen Platzes möglich ist, die in der nachstehenden Figur 3 angegebene Stellung herbeigeführt werden.

---

1) Das Spiel kann bezogen werden von den Züllchower Anstalten (Direktor: Pastor Fritz Jahn), Züllchow bei Stettin (Nr. 840/11 des Preisverzeichnisses, das u. a. eine systematisch geordnete Zusammenstellung der verschiedensten Spiele bietet).

In vielen Fällen ist es, wie wir sehen werden, unmöglich, die geforderte Stellung (Fig. 3), die wir die „normale" nennen wollen[1]), herbeizuführen; wir werden alsdann sagen, die Aufgabe sei „unlösbar". Ob eine Aufgabe lösbar oder unlösbar ist, wird lediglich von der Anfangsstellung abhängen. Wie entscheiden wir nun, ob bei irgendeiner uns gegebenen Anfangsstellung die Aufgabe lösbar oder unlösbar ist, und wie erhalten wir im ersteren Falle die Lösung?

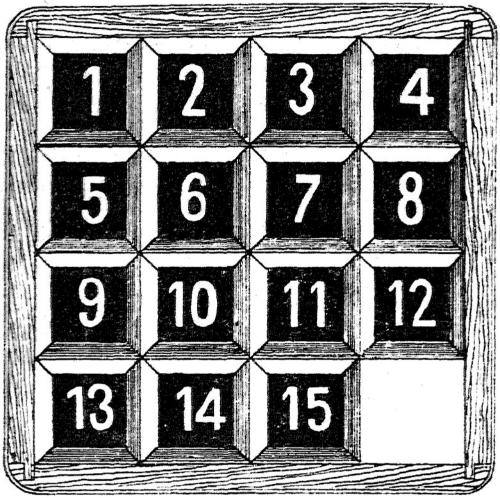


Fig. 3.

§ 2. Lösung der Aufgabe.

Bevor wir die am Ende von § 1 aufgeworfenen Fragen zu beantworten suchen, bemerken wir zunächst noch, daß wir auch die „Plätze" oder „Felder" des Brettes durch die Zahlen 1—16, entsprechend der Figur 3, unterscheiden wollen, so daß also z. B. mit „Platz 4" beständig der Platz bezeichnet wird, den in Fig. 3, also in der „normalen" Stellung, der Stein 4 einnimmt, und „Platz 16" der äußerste Platz unten rechts heißt, der in Fig. 3 gerade leer ist. Ferner wollen wir die wagerechten Reihen kurz „Zeilen", die lotrechten kurz „Spalten" nennen und erstere von oben nach unten als erste, zweite, dritte, vierte und letztere ebenso, von links nach rechts gerechnet, unterscheiden.

Wir denken uns nun eine beliebige Anfangsstellung und versuchen,

1) Daß auch unsere Fig. 2 eigentlich die „normale" Endstellung bereits zeigt und diese jedenfalls aus ihr sofort durch Verschieben der Steine 4, 8, 12 herzustellen ist, braucht nicht erst bemerkt zu werden.

ob wir aus ihr durch Verschieben der Steine die normale Stellung (Fig. 3) erhalten können. Zu dem Zweck wollen wir folgendermaßen verfahren: Zunächst bringe man den Stein 1 auf Platz 1, falls er nicht etwa schon zufällig dort steht, und sodann, ohne 1 wieder zu verschieben, den Stein 2 auf Platz 2. Dies beides ist, wie leicht erkannt wird, durch verhältnismäßig wenig Verschiebungen stets zu erreichen. — Sodann kann man, ohne an der ersten Zeile etwas zu verschieben, leicht die Steine 3 und 4 in das von der dritten und vierten Spalte eingenommene achtfeldrige Gebiet bringen, wofern die Steine nicht schon in diesem Gebiet standen. Auf jeden Fall dürfen wir also hinfort annehmen, daß die Steine 3 und 4 sich nunmehr in diesem achtfeldrigen Gebiet, und zwar auf irgendwelchen Plätzen dort, befinden und daß das leere Feld gleichfalls diesem Gebiete angehört. Wenn nun die Steine 3 und 4 nicht etwa zufällig bereits auf ihren normalen Plätzen stehen, so können wir sie leicht dahin bringen lediglich durch Verschiebungen innerhalb unseres achtfeldrigen Gebietes. Es wird nicht erforderlich sein, dies für alle möglichen Stellungen durchzuführen, sondern wir dürfen uns darauf beschränken, das Prinzip des zu beobachtenden Verfahrens an dem Beispiel eines besonders ungünstigen Falles darzulegen, nämlich desjenigen, bei dem der Stein 3 auf Platz 4 und Stein 4 auf Platz 3 steht. Unser achtfeldriges Gebiet soll also etwa so beschaffen sein, wie es Fig. 4 zeigt.

Wir werden alsdann bei allen Verschiebungen, die wir an Fig. 4 vornehmen, die Steine 6 und 14 unberührt stehen lassen, da wir ihrer nicht bedürfen, werden uns also freiwillig auf das Gebiet der oberen 6 Felder, das uns ausreichende Bewegungsfreiheit gewährt, beschränken. Wollten wir uns allerdings auf die obersten 4 Felder allein, eins davon natürlich leer vorausgesetzt, beschränken, so würde, worauf wir noch zurückkommen werden, es uns nicht gelingen, die Steine 3 und

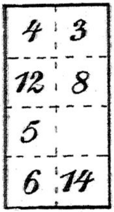


Fig. 4.

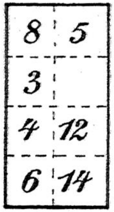


Fig. 5.

Fig. 6.

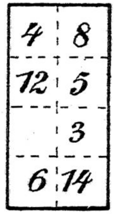


Fig. 7.

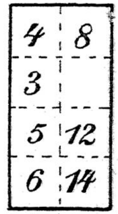


Fig. 8.

4 auf ihre normalen Plätze zu bringen. Aus Fig. 4 leiten wir nun leicht die Stellung Fig. 5 her, indem wir alle 5 Steine des sechsfeldrigen Gebietes zweimal, den Stein 5 sogar dreimal, im umgekehrten Drehungssinne des Uhrzeigers verschieben. Durch Verschieben innerhalb der 4 mittleren Felder erhält man aus Fig. 5 leicht Fig. 6. Nun verschiebt man die 5 Steine des sechsfeldrigen Gebietes im Uhrzeigersinne so, daß Stein 4 auf Platz 3 kommt; man erhält so Fig. 7 und bringt nun durch Verschiebungen innerhalb der mittleren 4 Felder den Stein 3 auf Platz 7 (Fig. 8). Die jetzige Stellung der Steine 3 und 4 (Fig. 8) ist nun eine typische; sie ist, wie aus unserem, sogar noch besonders ungünstig gewählten Falle erhellen dürfte, stets zu erreichen, und aus ihr kann man nun sofort den Stein 4 auf Platz 4 bringen und den Stein 3 nachziehen auf Platz 3. Damit ist dann auch die ganze erste Zeile des Spielkastens in Ordnung gebracht, und an ihr wird hinfort nichts mehr geändert. — Wesentlich bei diesem Verfahren war, daß wir ein sechsfeldriges Rangiergebiet mit einem leeren Felde zur Verfügung hatten: so war es uns möglich, nicht nur die 5 Steine des sechsfeldrigen Gebietes der Reihe nach zu verschieben, sondern außerdem innerhalb dieses sechsfeldrigen Gebietes wieder in einem vierfeldrigen Gebiete mit 3 Steinen und einem leeren Felde Verschiebungen vorzunehmen. Erst durch die Verbindung dieser beiden Arten von Verschiebungen wird es möglich, wesentliche Veränderungen in die Stellung hineinzubringen. Müßte man sich lediglich auf ein vierfeldriges Gebiet beschränken, so würde bei allen Verschiebungen das Bild im wesentlichen stets dasselbe bleiben.

Genau ebenso wie die erste Zeile läßt sich nun auch die zweite in Ordnung bringen, wobei man sich bei allen Verschiebungen auf das Gebiet der untersten drei Zeilen beschränkt, also die Steine der ersten Zeile nicht mehr berührt, so daß die dort hergestellte normale Ordnung nicht wieder gestört wird. Zunächst werden dabei natürlich die Steine 5 und 6 leicht auf ihre normalen Plätze gebracht, und weiter hat man dann in dem Gebiet der 6 Felder 7, 8, 11, 12, 15, 16 (s. Fig. 3) in entsprechender Weise zu operieren, wie wir dies oben an den Figuren 4—8 dargelegt haben. Wir dürfen nämlich die obigen Ausführungen ohne weiteres auf unseren jetzigen Fall übertragen: zwar steht uns jetzt nur ein sechsfeldriger Rangierplatz zur Verfügung, jedoch führten wir ja oben mit freiwilliger Selbstbeschränkung gleichfalls alle Operationen auf einem sechsfeldrigen Gebiet aus und zeigten, daß dieses zu genügen vermag. So bringen wir also jetzt die Steine 7 und 8 auf ihre normalen Plätze und haben damit die beiden ersten Zeilen in Ordnung.

In den beiden letzten Zeilen bringt man nun zunächst Stein 13 auf Platz 9 und Stein 9 auf Platz 10, und zwar geschieht dies in ganz analoger Weise, wie wir oben für die Steine 3 und 4 die entsprechende typische Stellung der Fig. 8 herbeiführten; nur haben wir jetzt in den zwei letzten **Zeilen** zu operieren, während es oben die zwei letzten **Spalten** waren. Darauf zieht man die Steine 13 und 9 auf ihre normalen Plätze. Es bleibt uns dann noch das sechsfeldrige Rangiergebiet der Plätze 10, 11, 12, 14, 15, 16; wir bringen auf ihm die Steine 10 und 14 — wieder in der dargelegten Weise — auf ihre normalen Plätze und haben dann nur noch mit einem vierfeldrigen Gebiet zu tun, auf dem die Steine 11, 12, 15 stehen. Durch Verschieben dieser drei Steine kann man natürlich erreichen, daß 15 auf seinen normalen Platz gelangt und zugleich das leere Feld rechts unten sich befindet. Die Steine 11 und 12 werden dabei dann entweder auf ihre normalen Plätze kommen oder der Stein 12 kommt auf Platz 11 und Stein 11 auf Platz 12. Im ersteren Falle ist die Aufgabe gelöst; im letzteren Falle haben wir die Stellung der Fig. 9.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	11
13	14	15	

Fig. 9.

Wir können unser Resultat so aussprechen:

Satz 1: *Aus jeder beliebigen Anfangsstellung läßt sich jedenfalls entweder die normale Stellung (Fig. 3) oder die der Fig. 9 herleiten.*

Auf die Frage, ob auch beides zugleich möglich ist, nämlich ob eine Anfangsstellung sich u. U. sowohl in die normale Stellung wie in die der Fig. 9 überführen läßt, wollen wir vorläufig noch keine abschließende Antwort geben, sondern uns jetzt damit begnügen, daß in *jedem* Falle die eine von beiden Stellungen erreichbar ist.

§ 3. Die mathematische Theorie des Spiels.

Wir wollen uns nun eine bestimmte Anfangsstellung, z. B. die der Fig. 10, denken. Wir wollen die Zahlen dieser Figur vorlesen, und zwar in der Reihenfolge, die wir beim Lesen üblicherweise stets beobachten, d. h. in jeder Zeile von links nach rechts gehend und die

Zeilen der Reihe nach von oben nach unten durchlaufend. Wir bemerken dann, daß Stein 1 bereits auf seinem normalen Platze steht; dagegen steht der nächste Stein, 4, wie wir sagen wollen, „vor" zwei anderen Steinen, die bei „normaler" Stellung vor ihm rangieren würden, nämlich vor den Steinen 3 und 2. Wir haben also bei Stein 4, wie wir sagen wollen, zwei „Verstöße gegen die Rangordnung". Entsprechend haben wir bei Stein 7, der vor den Steinen 3, 5, 2, 6 steht, vier solche Verstöße; bei Stein 13 z. B., der vor 11, 10, 2, 12, 6 steht, fünf Verstöße usw. Wir erhalten so im ganzen $0 + 2 + 4 + 5 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 5 + 3 + 2 + 0 + 1 = 38$ Verstöße gegen die Rangordnung. Aus dieser Gesamtzahl der Verstöße läßt sich nun ersehen, ob man die normale Schlußstellung der Fig. 3 erhalten kann oder nicht: ist nämlich die so erhaltene Zahl, wie in unserem Falle, eine gerade Zahl (hier 38), so ist die normale Schlußstellung der Fig. 3 zu erhalten; die Aufgabe ist also lösbar. Ist die betreffende Zahl dagegen eine ungerade, so erhält man die normale Schlußstellung nicht, und die Aufgabe ist unlösbar. Voraussetzung ist dabei stets, daß das leere Feld sich anfänglich rechts unten, also auf Platz 16, befand. Anstatt der unbequemen Bezeichnung „Verstöße gegen die Rangordnung" wollen wir, wie in der Mathematik gebräuchlich, „Inversionen" sagen. Wir sprechen alsdann das Kriterium, das wir für die Lösbarkeit der Aufgabe soeben, und zwar vorläufig ohne Begründung, angegeben haben, so aus:

1	4	7	9
3	5	8	14
15	13	11	10
2	12	6	

Fig. 10.

Kriterium: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine vorgelegte Stellung mit dem leeren Felde auf Platz 16 in die normale Schlußstellung (Fig. 3) übergeführt werden kann, ist die, daß die Anzahl aller Inversionen für die gegebene Anfangsstellung eine gerade Zahl ist.

Für die Richtigkeit dieses Kriteriums der Lösbarkeit wollen wir jetzt den Beweis erbringen und legen uns zu dem Zweck zunächst folgende Frage vor: „Wie ändert sich durch Schieben eines Steins die Anzahl der Inversionen?" Die Antwort ist sehr leicht, wenn der Stein in wagerechter Richtung geschoben wird; denn alsdann ändert sich die

Anzahl der Inversionen für die betreffende Stellung offenbar gar nicht. — Wie ist es dagegen, wenn der Stein in lotrechter Richtung geschoben wird? Diese Verschiebung bedeutet, daß der Stein in der Rangordnung um 3 Plätze vorrückt oder zurücktritt, je nachdem er lotrecht nach oben oder nach unten geschoben wird. Die 3 Steine, die er so überspringt, sei es vor-, sei es rückwärts, mögen die Nummern a, b, c tragen, während der Stein, der geschoben wird, die Nummer x haben soll. (a, b, c, x sind also Zahlen im Gebiet von 1 bis 15.) Es sind alsdann folgende Fälle zu unterscheiden:

1) x ist größer als jede der Zahlen a, b, c;
2) x ist kleiner als jede der Zahlen a, b, c;
3) x ist größer als zwei von den Zahlen a, b, c und kleiner als die dritte;
4) x ist größer als eine von den Zahlen a, b, c und kleiner als die beiden anderen.

Im ersten der 4 Fälle entstehen, wenn der Stein x vor die Steine a, b, c rückt, 3 neue Inversionen, weil die Zahlen a, b, c alle kleiner als x sind; springt x hinter a, b, c, so verschwinden dagegen 3 von den vorher vorhandenen Inversionen. Jedenfalls ändert sich also die Anzahl aller Inversionen durch die Verschiebung von x um 3: entweder sie wird um 3 größer oder um 3 kleiner.

Im zweiten der 4 Fälle ist es ganz entsprechend; auch hier ändert sich die Anzahl aller Inversionen um 3, wird um 3 kleiner oder um 3 größer.

Im dritten Falle entstehen, wenn x vor die kleineren Zahlen — es seien etwa a und b — rückt, zwar zwei neue Inversionen, jedoch verschwindet gleichzeitig von den früheren Inversionen eine, weil x ja auch vor die größere Zahl c rückt. Der Gesamteffekt ist also der, daß die Anzahl aller Inversionen um 1 größer wird. Rückt x hinter die Zahlen a, b, c, so wird die Anzahl aller Inversionen um 1 kleiner. In jedem der beiden Unterfälle ändert sich mithin die Anzahl aller Inversionen um 1.

Im vierten Falle ändert sich, wie im dritten, gleichfalls die Anzahl aller Inversionen stets um 1.

Wir sehen also, daß durch das Schieben eines Steins die Anzahl aller Inversionen sich nur um 3 oder um 1 ändern kann, sei es, daß sie um so viel größer oder um so viel kleiner wird. Dies Resultat sprechen wir so aus:

Hilfssatz: Durch das wagerechte Verschieben eines Steins ändert sich die Anzahl aller Inversionen gar nicht, durch das lotrechte Verschieben dagegen stets um eine ungerade Zahl (1 oder 3).

Wir denken uns nun den leeren Platz auch mit einem Stein besetzt, nämlich mit einem fingierten Stein 16. Alsdann können wir sagen, daß ein einzelner Zug, nämlich das Schieben eines Steins auf den leeren Nachbarplatz, immer in einer Vertauschung des **Steins 16** mit einem benachbarten Stein besteht. Stand nun, wie wir dies zunächst annehmen wollen, unser Stein 16 zu Anfang auch auf Feld 16, so muß, damit dies zu Ende wieder der Fall ist, die Anzahl solcher Vertauschungen offenbar eine gerade sein; denn jeder Zug, sei es in wagerechter, sei es in lotrechter Richtung, muß durch einen anderen, genau entgegengesetzt gerichteten gleichsam wieder annulliert werden, soll Stein 16 wieder an den alten Platz zurückkehren. Die Anzahl der Züge, die eine Stellung in eine andere mit demselben leeren Felde überführen, ist also stets gerade, und zwar ist offenbar sowohl die Anzahl aller wagerechten Züge, für sich genommen, gerade, wie auch die Anzahl aller lotrechten Züge.

Wir resümieren: Von einer Anfangsstellung zu einer Schlußstellung führt, wenn beide das leere Feld auf Platz 16 haben, eine gerade Zahl wagerechter und eine gerade Zahl lotrechter Züge. Die ersteren verändern die Anzahl der Inversionen gar nicht, die letzteren dagegen jedesmal um eine ungerade Zahl (s. Hilfssatz), insgesamt also, da diese Züge selbst in gerader Zahl vorkommen, um eine **gerade** Zahl. Eine Anfangsstellung kann daher in irgendeine andere Stellung — immer unter der Voraussetzung, daß bei beiden das leere Feld auf Platz 16 ist, — höchstens dann übergeführt werden, wenn die Anzahl der Inversionen der einen sich von der Anzahl der Inversionen der anderen um eine gerade Zahl unterscheidet, und sicher dann nicht, wenn diese Differenz der beiderseitigen Inversionen ungerade ist. Nun ist die Anzahl der Inversionen für die normale Schlußstellung (Fig. 3) = 0, für die Schlußstellung der Fig. 9 dagegen = 1 (Stein 12 steht vor 11). Hieraus folgt, beiläufig gesagt, daß sich die Stellung der Fig. 9 nie in die normale Stellung überführen läßt und daß ebensowenig das Umgekehrte möglich ist. Vor allem sehen wir aber jetzt, daß eine gegebene Stellung in die normale Schlußstellung höchstens dann übergeführt werden kann, wenn für die gegebene Stellung die Anzahl der Inversionen **gerade** ist. Diese Bedingung ist also notwendig für die Überführung in die normale Stellung; sie ist aber auch hinreichend. Denn zugleich folgt aus dem Vorstehenden, daß eine Anfangsstellung mit gerader Inversionenzahl in die Stellung Fig. 9 (mit ungerader Inversionenzahl) **nicht** übergeführt werden kann. Da nun aber jede Stellung sich entweder in die normale Schlußstellung oder in die der Fig. 9 überführen läßt, wie oben gezeigt war (Satz 1), so folgt, daß bei gerader Inversionenzahl eine gegebene Stellung **stets** in die normale Schlußstellung übergeführt werden kann. — Andererseits lassen sich alle Stellungen mit ungerader Inversionenzahl stets in die Stellung Fig. 9 überführen; denn in die normale Stellung können sie nicht gebracht werden, eine der beiden Schlußstellungen (Fig. 3 oder Fig. 9) ist aber nach Satz 1 stets erreichbar. In diesen Fällen — den „unlösbaren" — ist also die Schlußstellung der Fig 9 stets erreichbar und auch nur in diesen. — Damit ist das oben (S. 19) angegebene „Kriterium" in vollstem Umfange bewiesen und zugleich die am Ende von § 2 offen gelassene Frage dahin beantwortet, daß niemals ein und dieselbe Stellung sowohl in die normale Schlußstellung wie in die der Fig. 9 übergeführt werden kann, sondern stets nur das eine von beiden möglich ist.

Auf diesem Vorkommen von „unlösbaren" Stellungen, also von Stellungen, die allen auch noch so beharrlichen Lösungsversuchen einen unüberwindbaren Widerstand entgegensetzen, beruhte der außerordentliche Reiz, den das Spiel bei seinem ersten Auftreten auszuüben vermochte: Der Spieler, dem die Lösung so mancher anderen (lösbaren) Stellung bereits mehr oder weniger leicht gelungen sein mochte, dem aber das Vorkommen „unlösbarer" Stellungen noch unbekannt war, glaubte naturgemäß, auch diese Stellungen durch beharrlichen Eifer schließlich bewältigen zu können, und wurde so zu immer neuen Versuchen gereizt. Dieses Puzzle-Feuer erhielt dann noch weitere Nahrung, wenn etwa Inhaber von Vergnügungsetablissements Puzzle-Turniere veranstalteten und den Siegern hohe Preise aussetzten, wie sie natürlich völlig gefahrlos zu tun sich erlauben durften, falls eben die von ihnen gewählte Aufgabe zu den „unlösbaren" gehörte.

Frage 6: Ist die Aufgabe Fig. 11 lösbar oder unlösbar?

5	6	7	8
1	2	3	4
9	10	13	14
15	12	11	

Fig. 11.

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
15	14	13	

Fig. 12.

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Fig. 13.

Als Beispiel werde noch betrachtet diejenige Anfangsstellung, die sich aus der normalen Stellung ergibt, wenn man die Steine der einzelnen Zeilen in ihrer Reihenfolge umkehrt und das leere Feld wieder unten rechts annimmt (s. Fig 12). Die Anzahl der Inversionen ist ungerade (in jeder der drei oberen Zeilen = 6, in der untersten = 3), also läßt sich die Stellung Fig 12 in die normale Stellung nicht überführen, wohl aber in die Schlußstellung Fig. 9.

Voraussetzung bei allen vorstehenden Erörterungen war stets, daß das leere Feld auch bei der Anfangsstellung sich auf Platz 16 befand. Liegt uns eine andere Anfangsstellung vor und wollen wir die Frage der „Lösbarkeit" entscheiden, so werden wir durch einfache Verschiebungen zunächst bewirken, daß Platz 16 das leere Feld wird. So werden wir z. B bei der Stellung der Fig. 13 die Steine 1, 2, 3, 7, 11, 15 der Reihe nach verschieben, um Platz 16 leer zu bekommen. Für diese neue Stellung zählen wir alsdann 9 Inversionen; die Anfangsstellung Fig. 13 ist somit nicht in die normale, wohl aber in die Schlußstellung Fig. 9 überführbar.

Es läßt sich nun leicht erkennen, daß, wenn eine Stellung sich in eine zweite überführen läßt, auch umgekehrt diese in jene übergeführt werden kann. Denn wodurch wird die erstere Überführung bewirkt? Durch eine Reihe von „Zügen", d. h. durch eine Reihe von Vertauschungen des hypothetischen Steins 16 mit jeweils benachbarten Steinen. Es möge die erste Stellung in die zweite z. B. dadurch übergeführt werden, daß der Stein 16 der Reihe nach mit den Steinen a, b, c .... m, n, r, s vertauscht wird. Der Stein 16 war also der Reihe nach den Steinen a, b, c ...... und zuletzt den Steinen m, n, r, s benachbart. Offenbar können wir daher, von der zweiten Stellung ausgehend, den umgekehrten Weg gehen und den Stein 16 zuerst mit s, dann mit r und so fort vertauschen und führen so die zweite Stellung in die erste über. Daraus folgt dann z. B., daß die Stellung Fig. 9 sich sowohl in die Stellung Fig. 12 wie in die von Fig. 13, die beide ihrerseits in jene übergeführt werden konnten, überführen läßt. Da nun alle Stellungen mit ungerader Inversionenanzahl sich in die Stellung Fig. 9 überführen lassen und diese letztere wieder sowohl in die von Fig. 12 wie in die von Fig. 13, so läßt sich also jede Stellung mit ungerader Inversionenanzahl sowohl in die Stellung Fig. 12 wie in die von Fig. 13 überführen. — Ferner folgt aus diesem Prinzip der Umkehrung der Überführungen, daß jede beliebige Stellung mit gerader Inversionenanzahl sich in jede beliebige andere Stellung von gleichfalls gerader Inversionenanzahl überführen läßt und daß die Stellungen mit ungerader Inversionenanzahl untereinander sich ebenso verhalten. Wir fassen diese Resultate folgendermaßen zusammen:

Satz 2: Alle Stellungen, die — bei einem leeren Felde auf Platz 16 — eine gerade Anzahl von Inversionen aufweisen, bilden für sich eine Gruppe derart, daß von irgend zwei dieser Stellungen die eine in die andere übergeführt werden kann; sie sind alle insbesondere in die normale Stellung überführbar. Ebenso bilden alle Stellungen, die — bei einem leeren Felde auf Platz 16 — eine ungerade Anzahl von Inversionen aufweisen, eine zweite Gruppe ineinander überführbarer Stellungen; alle Stellungen dieser Gruppe lassen sich insbesondere auch in die Stellung der Fig. 12 und ebenso in die der Fig. 13 überführen. Eine Stellung der einen Gruppe kann niemals in eine der anderen übergeführt werden[1]); die Stellungen der zweiten Gruppe sind daher insbesondere niemals in die normale Stellung überzuführen.

1) Die Schranke zwischen den beiden Gruppen würde fallen, wenn man gewisse, bei unseren jetzigen Spielregeln nicht erlaubte Operationen gestatten würde. Jede „unlösbare" Stellung würde nämlich in eine „lösbare" verwandelt werden, wenn man den ganzen Spielkasten um 90^0 drehte und hinterher alle Steine auf ihren Plätzen wieder zurechtrückte (um 90^0 zurückdrehte) Dasselbe würde man ferner beispielsweise auch dann erreichen, wenn man die Steine 6 und 9 umkehrte, so daß sich 6 in 9 und 9 in 6 verwandelte. Wir gehen jedoch auf diese Spielformen, die, wie gesagt, bei unseren strengeren Spielregeln ausgeschlossen sind, nicht näher ein.

Kapitel III.

Solitär- oder Einsiedlerspiel.

§ 1. Spielregel. Rotation.

Der kronprinzliche Spielschrein, von dessen Inhalt wir bereits im vorigen Kapitel eins der Spiele abbildeten und beschrieben, birgt weiter ein Spiel in sich, das unter dem Namen „Solitär-“ oder „Einsiedler-Spiel“ recht bekannt ist. Unsere Fig. 14a zeigt uns den wesentlichen Teil des Spiels: ein Spielbrett mit 33 Löchern darin, in die Pflöcke oder ähnliche Gegenstände hineingesteckt werden können. Bei unserer kronprinzlichen Prachtausgabe des Spiels sind es kugelförmige Spielsteine, die mit durchweg verschiedenen Verzierungen kunstvoll ausgestattet sind; der mittelste Stein, dessen Loch in dem Spiel eine Art Sonderstellung einnimmt, ist dabei in besonderem Material — Blutstein — ausgeführt.

Über den Ursprung des Spiels ist Sicheres nicht bekannt. Jedenfalls besitzt es bereits ein beträchtliches Alter, wofür beispielsweise eine im Jahre 1710 veröffentlichte Abhandlung von Leibniz als Zeugnis beigebracht werden kann. Auf unserer Fig. 14b, dem Spielkastendeckel aus dem kronprinzlichen Spielschrein, führt uns das vortreffliche kleine Ölbild von Prof. Bernhard Plockhorst den angeblichen Erfinder des Spiels, den „Einsiedler“, beim Spiel vor, dem sein zah-

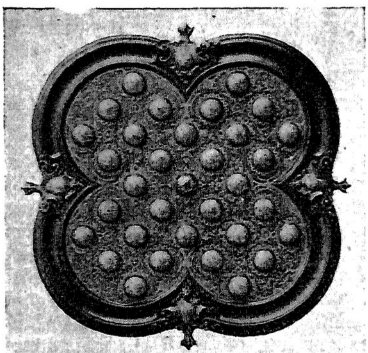


Fig. 14a.

Fig. 14b.

mes Reh neugierig zuschaut. — Unter den verschiedenen Formen, in denen unser Spiel auftritt, überwiegt in Deutschland diese der 33 Löcher, von denen mindestens eins zu Beginn des Spiels stets leer sein muß. Die Anordnung der Löcher zueinander bringen wir nochmals: durch Fig 15, zur Anschauung.[1])

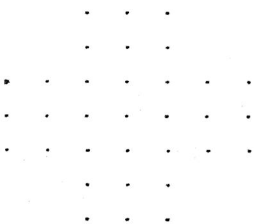


Fig. 15.

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	74
13	23	33	43	53	63	73
		32	42	52		
		31	41	51		

Fig. 16.

Die verschiedenen Löcher werden wir durch eine ähnliche Bezeichnung („Notation"), wie sie für die Felder des Schachbretts üblich ist, unterscheiden und dementsprechend auch jedes Loch fortan quadratisch darstellen, so daß wir auch beliebig von „Löchern" und „Feldern" sprechen werden. Wir tragen in jedes Loch gleich seine Notation ein (s. Fig. 16), wobei die erste Ziffer immer die Vertikalreihe oder „Spalte", und zwar von links nach rechts gerechnet, die zweite die Horizontalreihe oder „Zeile", von unten nach oben gerechnet, angibt.[2])

Die einzige Spielregel besteht darin, daß, wenn von 3 in horizontaler oder vertikaler Reihe gelegenen Löchern 2 benachbarte mit einem Pflock versehen sind, während das dritte, unmittelbar daneben liegende leer ist, alsdann der Pflock aus dem entfernteren der beiden besetzten Löcher in das leere gesteckt werden darf, wobei aus dem anderen besetzten (mittleren) Loch, das hierbei übersprungen wird, der Pflock herausgezogen und beiseite gelegt werden muß.

---

1) Außer den hier angegebenen führt das Spiel übrigens noch verschiedene andere Namen, darunter: „Nonnenspiel", „Grillenspiel". Unter diesen Namen ist es im Preisverzeichnis der S. 14, Anm. 1, genannten Züllchower Anstalten (Nr. 840/1) aufgeführt; von dort in zwei Ausführungen, mit „Zäpschen" (Holzpflöcken) oder mit Kugeln, zu beziehen; letztere Form wohl zu bevorzugen.

2) Wem ein anderes Spielexemplar nicht zur Verfügung steht, wird für die Aufgaben der folgenden Paragraphen gut tun, sich selbst ein Spielbrett in der Art der Fig. 16 herzustellen und an Stelle der Pflöcke oder Spielsteine etwa Papierschnitzelchen zu verwenden.

Diese Operation, die stets das Verschwinden eines Pflockes und für einen anderen eine Platzänderung zur Folge hat, nennen wir kurz einen „Zug", so daß also, wenn zu Anfang z. B. nur das Loch 44 leer ist, nur einer der 4 „Züge" $\frac{24}{44}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{42}{44}$ möglich ist, wo in dieser auch weiterhin stets gebrauchten Bezeichnung der Züge in Form von Brüchen der Zähler das Loch angibt, aus dem ein Pflock fortgenommen, und der Nenner dasjenige, in das er gesteckt wird. Zähler und Nenner eines solchen Bruches stimmen natürlich immer entweder in den ersten oder in den letzten Ziffern überein, während die beiden nicht übereinstimmenden Ziffern sich um 2 unterscheiden; die zwischen den beiden letzteren liegende Zahl und die im Zähler und Nenner gleicherweise vorkommende ergeben zusammen dann das Loch, über das hinweggesetzt wird, aus dem also ein Pflock verschwindet, in unserem obigen Beispiel bzw. 34; 45; 54; 43.

Die Aufgabe des Spiels besteht gewöhnlich darin, aus 32 besetzten Löchern der Reihe nach alle Pflöcke bis auf einen fortzuschaffen, wobei das zu Anfang leere Loch vielfach das mittlere (44) ist, jedoch auch ein anderes sein kann und wobei zumeist auch vorgeschrieben ist, in welchem Loch der zuletzt allein übrigbleibende Pflock sich am Ende befinden soll.

Selbstverständlich brauchen aber zu Anfang nicht alle 32 Löcher besetzt zu sein, sondern etwa nur ein Teil des Bretts, z. B. so, daß die Pflöcke eine bestimmte Figur, ein Quadrat, ein Kreuz oder dgl., bilden, wobei die Aufgabe im übrigen dieselbe ist, also in Entfernung aller Pflöcke bis auf einen besteht.

§ 2. Aufgaben bei teilweise besetztem Brett.

Um in das Wesen des Spiels etwas einzuführen, besprechen wir zunächst, auf der folgenden Seite, eine Anzahl von Aufgaben, in denen nur ein Teil des Brettes besetzt ist und die Entfernung aller Pflöcke bis auf einen verlangt wird. Die in den verschiedenen Figuren mit ihrer Notation angegebenen Felder sind zu Anfang besetzt; der übrige, leere Teil der Bretter kann nach Fig. 16 leicht hinzugedacht werden.

I. Das Kreuz aus 9 Pflöcken.

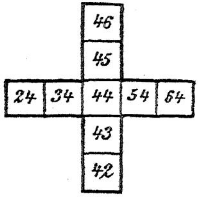


Fig. 17.

Lösung:

$\frac{43}{41}$; $\frac{45}{43}$; $\frac{24}{44}$; $\frac{44}{42}$;
$\frac{64}{44}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{43}{45}$; $\frac{46}{44}$.

II. Das Dreieck.

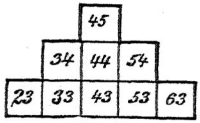


Fig. 18.

Lösung:

$\frac{53}{55}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{63}{43}$;
$\frac{44}{42}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{42}{44}$.

III. Das Kreuz.

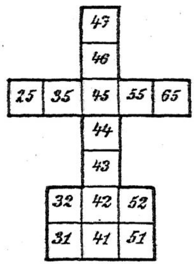


Fig. 19.

Lösung:

$\frac{31}{33}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{41}{43}$;
$\frac{33}{53}$; $\frac{63}{43}$,

jetzt die Figur der Aufgabe I, nur parallel auf dem Spielbrett verschoben.

IV. Die Pyramide.

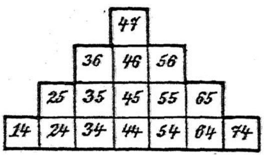


Fig. 20.

Lösung:

$\frac{55}{53}$; $\frac{74}{54}$; $\frac{53}{55}$; $\frac{55}{57}$; $\frac{57}{37}$;
$\frac{35}{33}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{33}{35}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{44}{46}$;
$\frac{56}{36}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{35}{55}$; $\frac{65}{45}$.

Selbstverständlich sind aber keineswegs alle Aufgaben dieser Art lösbar; wir beschränken uns in dieser Hinsicht auf ein einfaches Beispiel, nämlich den Fall, daß anfänglich nur 3 Felder von der in Fig. 21 angegebenen gegenseitigen Lage besetzt sind. Der Leser erkennt bei einem Versuch sofort, daß man, gleichgültig wo auf dem Brett diese Figur liegt, einen und nur einen Pflock fortbringen kann, also zwei übrigbleiben müssen.

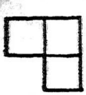


Fig. 21.

§ 3. Vollbesetztes Brett.

Gewöhnlich besteht die Aufgabe bei unserem Spiel jedoch, wie schon in § 1 gesagt wurde, darin, daß zu Anfang alle 32 Pflöcke in den Löchern stecken, während ein beliebig vorgeschriebenes Loch, von uns weiterhin als das „Anfangsloch" bezeichnet, leer ist, und daß nun der Reihe nach alle Pflöcke bis auf einen entfernt werden sollen, welch letzterer dann in einem gleichfalls vorgeschriebenen Loch, weiterhin kurz „Schlußloch" genannt, stecken bleiben soll.

Es sollen für diese Aufgabe — wir wollen sie die „Hauptaufgabe des Spiels" nennen — hier jetzt eine Reihe von speziellen Fällen, unterschieden nach „Anfangs-" und „Schlußloch", besprochen werden. Diese Aufgaben mag der Leser hier *vorläufig* nur als willkürlich aus einer großen Zahl herausgegriffene *Beispiele* ansehen; die Folge (§ 4) wird jedoch zeigen, daß unsere Auswahl keine willkürliche, sondern vielmehr so getroffen war, daß mit den jetzt folgenden 16 Fällen im Grunde genommen die Gesamtheit aller überhaupt lösbaren Fälle der „Hauptaufgabe des Spiels" erschöpft ist.

I. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 44.

$\frac{64}{44}$; $\frac{56}{54}$; $\frac{44}{64}$; $\frac{52}{54}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{75}{73}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{54}{52}$; $\frac{35}{55}$; $\frac{65}{45}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{45}{25}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{57}{37}$;

$\frac{34}{36}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{51}{31}$; $\frac{52}{32}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{32}{34}$; $\frac{34}{54}$; $\frac{64}{44}$.

II. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 74.

Wie I, nur statt des letzten Zuges: $\frac{54}{74}$.

III. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 74.

Der erste Zug von II ist durch $\frac{54}{74}$ zu ersetzen.

IV. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 47.

$\frac{54}{74}$; $\frac{52}{54}$; $\frac{44}{64}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{74}{54}$; $\frac{54}{52}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{31}{51}$; $\frac{32}{52}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{15}{13}$;

$\frac{43}{23}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{32}{34}$; $\frac{56}{54}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{54}{56}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{37}{57}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{45}{65}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{65}{45}$; $\frac{24}{44}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{45}{47}$.

V. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 14.

Zunächst die ersten 24 Züge von IV, dann $\frac{34}{36}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{36}{34}$; $\frac{34}{14}$.

VI. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 54.

$\frac{56}{54}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{54}{56}$; $\frac{74}{54}$; $\frac{53}{55}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{53}{33}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{15}{13}$; $\frac{25}{23}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{32}{34}$; $\frac{45}{25}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{57}{37}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{56}{36}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{56}{54}$.

VII. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 57.

Der letzte Zug von VI ist durch $\frac{55}{57}$ zu ersetzen.

VIII. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 57.

Der erste Zug von VII ist durch $\frac{55}{57}$ zu ersetzen.

IX. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 24.

Die ersten 27 Züge von VI, alsdann $\frac{56}{54}$; $\frac{54}{34}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{44}{24}$.

X. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 24.

Der erste Zug von IX ist zu ersetzen durch $\frac{55}{57}$.

XI. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 51.

Zunächst die ersten 6 Züge von X; die 24 folgenden leiten sich aus den entsprechenden von VI durch Spiegelung an der horizontalen Mittellinie her; der letzte Zug ist $\frac{53}{51}$.

XII. Anfangsloch: 24; Schlußloch: 24.

$\frac{44}{24}$; $\frac{36}{34}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{57}{37}$; $\frac{56}{36}$; $\frac{45}{25}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{32}{34}$; $\frac{13}{33}$; $\frac{34}{32}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{51}{31}$; $\frac{52}{32}$; $\frac{43}{23}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{54}{56}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{73}{75}$; $\frac{45}{65}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{56}{54}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{42}{44}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{44}{24}$.

XIII. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 55.

$\frac{53}{55}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{75}{73}$; $\frac{65}{63}$; $\frac{52}{54}$; $\frac{73}{53}$; $\frac{54}{52}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{31}{51}$; $\frac{32}{52}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{45}{65}$; $\frac{57}{55}$; $\frac{65}{45}$; $\frac{35}{55}$; $\frac{47}{45}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{25}{45}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{45}{25}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{13}{15}$; $\frac{23}{25}$; $\frac{34}{36}$; $\frac{15}{35}$; $\frac{36}{34}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{34}{54}$; $\frac{53}{55}$.

XIV. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 52.

Der letzte Zug von XIII ist zu ersetzen durch $\frac{54}{52}$.

XV. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 52.

Der erste Zug von XIV ist zu ersetzen durch $\frac{54}{52}$.

XVI. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 25.

Die 28 ersten Züge von XV, dann $\frac{43}{23}$; $\frac{44}{24}$; $\frac{23}{25}$.

Selbstverständlich kann es für jede der vorstehenden Aufgaben noch andere und wird zumeist sogar recht viele andere Lösungen geben. Die von uns angegebenen erheben keinen Anspruch darauf, einen Vorzug vor jenen anderen zu besitzen. Ihre Auswahl war nur durch Rücksichten der Systematik bestimmt, und unter den sonst existierenden Lösungen werden sich gewiß manche viel elegantere vorfinden. Sehr viel besser gegliedert und daher übersichtlicher ist z. B. folgende Lösung für Aufgabe I:

$$\frac{42}{44}; \frac{63}{43}; \frac{51}{53}; \frac{43}{63}; \frac{23}{43}; \frac{44}{42}; \frac{31}{33}; \frac{41}{43}; \frac{43}{23} \;\|\; \frac{13}{33}; \frac{34}{32}; \frac{15}{13}; \frac{25}{23}; \frac{13}{33}; \frac{32}{34}$$

$$\frac{73}{53}; \frac{54}{52}; \frac{75}{73}; \frac{65}{63}; \frac{73}{53}; \frac{52}{54} \;\|\; \frac{45}{65}; \frac{57}{55}; \frac{37}{57}; \frac{54}{56}; \frac{57}{55}; \frac{65}{45}; \frac{46}{44}; \frac{44}{24}; \frac{36}{34}; \frac{24}{44},$$

wobei die durch 2 vertikale Striche markierten Stellen sich den jeweiligen Konfigurationen nach als natürliche Einschnitte in dem Gange der Lösung darstellen.

§ 4. Theorie des Spiels.

Auf die Theorie des Spiels soll hier nicht weiter eingegangen werden, als daß wir ihre wichtigsten Resultate — ohne mathematische Begründung — angeben. Zu dem Zwecke definieren wir zunächst als „kongruente" Felder zwei Felder von der Art, daß von dem einen zu dem andern ein Übergang möglich ist durch ein- oder mehrmaliges Überspringen von je zwei in horizontaler oder vertikaler Linie liegenden Feldern. Kongruent sind so z. B. die Felder 15 und 45, da man von 15 zu 45 durch Überspringen von zwei zwischengelegenen Feldern (25 und 35) gelangt; ebenso ist 42 zu 45 kongruent und desgleichen 42 zu 15 (45 ist Zwischenstufe für diesen letzteren Übergang). Ferner soll jedes Feld auch als mit sich selbst kongruent angesehen werden. —

Die mathematische Untersuchung lehrt nun, daß auf unserem Brett der 33 Felder eine Lösung für die im vorigen Paragraphen erörterte „Hauptaufgabe“ des Spiels höchstens dann möglich ist, wenn Anfangs- und Schlußloch so vorgeschrieben wurden, daß sie „kongruent“ in dem angegebenen Sinne sind.

Die soeben angegebene Vorbedingung für die Lösbarkeit der Hauptaufgabe, nämlich die Kongruenz von Anfangs- und Schlußfeld, ist aber nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Lösbarkeit, d. h. immer, wenn diese Bedingung erfüllt ist, ist die Hauptaufgabe lösbar. Das System der 16 in § 3 gegebenen Beispiele birgt sogar bereits für alle möglichen Fälle, in denen die Hauptaufgabe überhaupt lösbar ist, wenigstens je eine Lösung in sich. Dies erkennt man folgendermaßen: Man beachte zunächst, daß die Figur des Bretts (Fig. 15) bei Drehung um einen oder mehrere rechte Winkel mit sich selbst zur Deckung kommt, und ferner, daß sie in bezug auf die horizontale und die vertikale Mittellinie symmetrisch ist, so daß also bei Spiegelung an einer dieser beiden Mittellinien die eine Hälfte der Figur mit der anderen zur Deckung kommen würde. Offenbar sind nun die bei diesen Spiegelungen und Drehungen zusammenfallenden Felder für unsere Aufgabe äquivalent, wonach sich folgende Gruppen von untereinander äquivalenten Feldern ergeben:

1) 13; 15; 37; 57; 75; 73; 51; 31.	4) 24; 46; 64; 42.
2) 14; 47; 74; 41.	5) 35; 55; 53; 33.
3) 25; 36; 56; 65; 63; 52; 32; 23.	6) 34; 45; 54; 43.

7) 44.

Gibt also z. B. Nr. II in § 3 (S. 29) eine Lösung für 44 als Anfangs- und 74 als Schlußloch, so läßt sich danach sofort eine Lösung für die Aufgabe: „44 Anfangsloch, 14 Schlußloch“ angeben, da die Änderung nur einer Spiegelung an der vertikalen Mittellinie entspricht. Ebenso ergibt sich z. B. aus Nr. VII (54 Anfangsloch, 57 Schlußloch) sofort eine Lösung für „45 Anfangs- und 75 Schlußloch“, da die Änderung einer Viertelkreisdrehung in der umgekehrten Drehungsrichtung des Uhrzeigers, verbunden mit nachfolgender Spiegelung an der vertikalen Mittellinie, entspricht.

Sodann erhält man aus der Lösung für Anfangsloch a und Schlußloch b sofort eine Lösung für Anfangsloch b und Schlußloch a, indem man das Lösungsschema der ersteren Aufgabe umkehrt, d. h. die Brüche in umgekehrter Reihenfolge (vom hinteren zum vorderen Ende) liest. Daß in der Tat diese Beziehung stattfindet, soll hier unter Verzicht auf einen allgemeinen Beweis nur an dem Beispiel eines besonders einfachen Spielbrettes plausibel gemacht werden, nämlich an dem der Fig. 22, das wir, um eben einen möglichst einfachen Fall zu haben, einmal für einen Moment unserem gewöhnlichen Spielbrett substituieren wollen. Es sei A als Anfangs-, E als Schlußloch vorgeschrieben; die

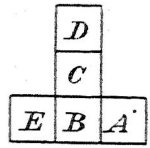


Fig. 22.

Lösung der Hauptaufgabe ist alsdann: $\frac{E}{A}$; $\frac{D}{B}$; $\frac{A}{E}$. Kehren wir nun die Reihenfolge der 3 Brüche um, schreiben also: $\frac{A}{E}$; $\frac{D}{B}$; $\frac{E}{A}$, so ist dies die Lösung der Hauptaufgabe für den Fall: E Anfangs- und A Schlußloch. Zwei Aufgaben, die in dieser Beziehung der reziproken Vertauschung von Anfangs- und Schlußloch zueinander stehen, wollen wir „reziproke" nennen.

Man sieht nun zunächst, daß unter den 16 Lösungen des § 3 sieben enthalten sind, in denen das Anfangsloch zugleich Schlußloch ist, und zwar sind diese 7 so gewählt, daß jede der obigen 7 Gruppen von Feldern (S. 32) einen Repräsentanten hierfür gestellt hat, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

Nr. der Gruppe von Feldern	Das aus der Gruppe ausgewählte Feld	Nr. der betr. Aufgabe in § 3
1	57	VIII
2	74	III
3.	52	XV
4	24	XII
5	55	XIII
6	54	VI
7	44	I

Die Hauptaufgabe bei gleichem Anfangs- und Schlußloch ist somit durch die Lösungen des § 3 für alle 33 Felder erschöpfend gelöst. So bleiben also nur die Fälle, in denen Anfangs- und Schlußloch verschieden sind, wobei wir zunächst wiederholen, daß Anfangs- und Schlußloch stets, damit überhaupt Lösungen existieren, „kongruent" in dem angegebenen Sinne sein müssen. Wir haben also jetzt alle möglichen Kombinationen von zwei verschiedenen, aber einander kongruenten Feldern in Betracht zu ziehen, und fassen beispielsweise zunächst das Mittelfeld des Brettes, d. h. 44, ins Auge, das zugleich in unserer Einteilung der Felder auf S. 32 eine Gruppe für sich, nämlich die 7., bildet. Man sieht nun, daß sämtliche zu Feld 44 kongruenten Felder gerade die Gruppe 2 bilden, und diese Felder von Gruppe 2 sind auch unter sich kongruent und besitzen kongruente Felder in den anderen 5 Gruppen nicht. Die Gruppen 2 und 7 bilden also eine gewisse Gemeinschaft in der Art, daß, wenn das Anfangsloch dieser Gemeinschaft entnommen wird, auch das Schlußloch ihr entnommen werden muß, wenn die Hauptaufgabe überhaupt irgendwelche Aussicht auf Lösbarkeit bieten soll. Offenbar ergeben sich innerhalb dieser Gemeinschaft nur folgende wesentlich verschiedene Fälle von Aufgaben (bei ungleichem Anfangs- und Schlußloch):

Anfangsloch	Schlußloch
44	74
74	47
74	14

Diese Aufgaben sind aber in § 3 unter II, IV, V behandelt. Rechnet man dazu noch die Nummern I und III für die Fälle eines gleichen Anfangs- und Schlußloches, so umfassen mithin die Nummern I—V alle wesentlich verschiedenen Fälle, die innerhalb der von den Feldergruppen 2 und 7 gebildeten Gemeinschaft vorkommen können. Für jeden anderen Fall läßt sich aus einem dieser 5 die Lösung sofort herleiten durch die Beziehungen der Symmetrie (Drehungen und Spiegelungen) und der Reziprozität (Vertauschung von Anfangs- und Schlußloch). — Entsprechend bilden die Gruppen 1, 4 und 6 eine Gemeinschaft: zwar ist nicht jedes Feld dieser Gemeinschaft jedem anderen kongruent, aber jedes einem Felde dieser Gemeinschaft kongruente Feld gehört wieder der Gemeinschaft an. Die verschiedenen Fälle, die sich innerhalb dieses Gebietes ergeben können, sind in § 3 durch die Nummern VI—XII erledigt. Schließlich bilden die Gruppen 3 und 5 eine dritte Gemeinschaft, der in § 3 die Lösungen XIII—XVI in erschöpfender Weise zugehören.

Frage 7: Gib eine Lösung an für den Fall: 14 Anfangsloch, 41 Schlußloch.

Frage 8: Gib eine Lösung an für den Fall: 52 Anfangsloch, 55 Schlußloch.

Frage 9: Gib eine Lösung an für den Fall: 46 Anfangsloch, 13 Schlußloch.

Kapitel IV.

Dyadische Spiele.

§ 1. Die Reihe der Potenzen der Zahl 2.

Von der Erfindung des Schachspiels erzählen ältere arabische Quellen, der Erfinder habe das geistvolle Spiel zur Unterhaltung eines indischen Königs erdacht und dieser sei darüber von so lebhafter Bewunderung und Freude ergriffen worden, daß er dem Erfinder ein Ehrengeschenk zu gewähren wünschte. „Dann bitte ich" so soll dieser nun auf des Königs Frage erklärt haben, „daß ein Weizenkorn auf das erste Feld des Schachbretts, zwei auf das zweite gelegt und die Zahl der Körner fortwährend verdoppelt werde, bis das letzte Feld erreicht sei: welches dies Quantum auch sein möge, ich wünsche, es zu bekommen." Hierbei stellte sich nun heraus, daß das Getreide aller königlichen Speicher und selbst des ganzen Landes nicht ausreichen würde, dies Verlangen, das dem Könige ursprünglich außerordentlich bescheiden vorgekommen war, zu befriedigen. Als dem König dies gemeldet wurde, sprach er zu dem Erfinder: „Dein Scharfsinn, einen solchen Wunsch auszudenken, ist noch bewundernswerter als dein Talent im Erfinden des Schachspiels."

In der Tat würde sich, da das Schachbrett 64 Felder (8×8) hat, eine ungeheuer große Zahl von Weizenkörnern ergeben, nämlich für alle 64 Felder zusammen die 20stellige Zahl

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615,$$

eine Körnermenge, die genügen würde, um das ganze feste Land der Erde bis zu einer Höhe von fast 1 cm zu bedecken. Die Zahlen wachsen, durch die Verdoppelung von Feld zu Feld, natürlich sehr schnell und nehmen schließlich ungeheuer große Werte an. — Diese Tatsache des enormen Wachstums bei fortgesetzter Verdoppelung benutzte einmal eine in München erscheinende Zeitung der vormärzlichen Zeit, „Die deutsche Tribüne", zu einem seinerzeit vielbelachten Witze[1]): Das Blatt wußte sich gegenüber den beständigen Zensurplackereien nicht anders zu helfen, als daß es die vom Zensor gestrichenen Ar-

1) Ludwig Salomon, „Geschichte des Deutschen Zeitungswesens", Bd. III, S. 450.

tikel trotzdem abdruckte. Natürlich wurde es nun mit Geldstrafe belegt, und zwar wurde, da die Zeitung dies Verfahren fortsetzte, die Geldbuße von Fall zu Fall verdoppelt. Da brachte die „Tribüne" eines schönen Tages einen Artikel, in dem genauer dargelegt wurde, daß das Ministerium ein Mittel erfunden habe, um die bayerischen Staatsschulden in Jahr und Tag zu tilgen: Es brauche nur mit der angeordneten jedesmaligen Verdoppelung der Geldstrafen in der begonnenen Weise fortzufahren. Die Heiterkeit war allgemein, und die bayerische Regierung sah sich veranlaßt, zu anderen Mitteln zu greifen, verzichtete sogar auf den Versuch, die Geldstrafen, die bereits eine unerschwingliche Höhe erreicht hatten, einzutreiben, — und der bayerische Staat hat so seine Staatsschulden bis zum heutigen Tage behalten.

Kehren wir zu dem Fall der Weizenkörner auf dem Schachbrett zurück und schreiben wir für die einzelnen Felder die Zahlen der Körner hin, so erhalten wir eine Reihe von Zahlen, die so beginnt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, womit wir nur erst für ein Viertel aller Felder des Schachbretts die betreffenden Zahlen angegeben haben. Die Zahlen dieser Reihe, von denen jede sich aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit 2 ergibt (z. B. $2 \times 8 = 16$), nennt man die „Potenzen" der Zahl 2, und zwar bezeichnet man die Zahl 2 selbst als die erste Potenz von 2, die Zahl $4 = 2 \times 2$ als die zweite, die Zahl $8 = 2 \times 2 \times 2$ als die dritte Potenz der 2 usw. Man schreibt dies auch folgendermaßen:

$$2^1 = 2;\ 2^2 = 4;\ 2^3 = 8;\ 2^4 = 16;\ 2^5 = 32 \text{ usw.}$$

Aus Gründen der Analogie wird man alsdann die erste Zahl der obigen Reihe, nämlich 1, die „nullte Potenz der 2" nennen und entsprechend: $2^0 = 1$ schreiben müssen.

Vor diese Reihe der Potenzen der Zahl 2, d. h. vor die Zahl 1, mit der die Reihe ja anfängt, wollen wir nun aus einem besonderen Grunde noch eine zweite 1 schreiben, so daß die Reihe nunmehr so beginnt: 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32 ..... In dieser neuen Reihe ist nun jede Zahl genau ebenso groß wie alle in der Reihe vorhergehenden Zahlen zusammengenommen, z. B. $1 + 1 + 2 = 4$, sodann $1 + 1 + 2 + 4 = 8$. Gilt dies aber für den Anfang, also z. B. bis 8, so gilt es auch stets weiterhin, wie der Leser sofort aus der Schreibweise

$$\underbrace{1,\ 1,\ 2,\ 4,}_{8}\ 8,\ 16$$

sieht, wenn er bedenkt, daß nach dem Bildungsgesetz resp. der Definition der Reihe auf 8 die Zahl $2 \times 8 = 16$, auf 16 wieder $2 \times 16 = 32$ usw. folgt. Lassen wir nun die zur Aushilfe hinzugenommene erste Eins wieder fort, so ist die Summe der Zahlen bis zur 8 (mit Ausschluß dieser) natürlich nicht mehr $= 8$, sondern nur $= 7$, also um 1 kleiner als die in der Reihe folgende Zahl 8, und wir haben daher das Resultat:

Satz 1: In der Reihe der Potenzen der Zahl 2 ist jede Zahl um 1 größer als alle vorhergehenden Zahlen zusammengenommen.

Aus diesem Grunde würden auf das 64. Feld des Schachbretts ebensoviel Weizenkörner resp. genau gesprochen: noch ein Korn mehr als auf die ersten 63 Felder zusammengenommen kommen. Wir würden daher, wenn wir die Gesamtzahl der Weizenkörner aller 64 Felder ausrechnen wollten, diese Addition aller 64 Zahlen nicht einzeln ausführen, sondern natürlich nur die Zahl der Körner des letzten Feldes berechnen. Diese Zahl, vermindert um 1, ist dann zugleich die Summe der Körner von den übrigen 63 Feldern.

§ 2. Eine besondere Anwendung der Reihe der Potenzen von 2.

Die Gewichtssätze unserer gleicharmigen Wagen bestehen gewöhnlich aus folgenden Stücken:

1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g

und setzen sich nach diesem Prinzip, eventuell nach beiden Seiten hin, fort. Der Gewichtssatz, den wir hier betrachten wollen, mag auf die angegebenen 8 Gewichte beschränkt sein und ermöglicht alsdann jedenfalls alle Wägungen von 1 g bis einschließlich 110 g und zwar von g zu g.

Wir wollen nun die Frage erheben, ob sich dieselben Wägungen, wie mit diesen 8 Gewichten, auch mit einer geringeren Anzahl von Gewichten ausführen ließen, resp. wie viele Gewichte mindestens und welche hierzu erforderlich sind.

Dabei wollen wir voraussetzen, daß die eine Schale der Wage ausschließlich dem zu wägenden Gegenstande verbleibt, also nicht etwa auch mit Gewichten unseres Gewichtssatzes (Gegengewichten) belastet wird. Dann muß zunächst, will man ein Gewicht von 1 g abwägen können, in dem Gewichtssatz jedenfalls das Gewicht 1 g vertreten sein.[1]) Will man auch 2 g abwägen, so muß entweder zu dem Gewicht von 1 g noch ein gleiches hinzutreten oder aber ein Gewicht von 2 g vertreten sein. Die letztere Annahme führt uns jedoch weiter als die erstere, indem sie nämlich außer den Abwägungen von 1 g und 2 g auch zugleich eine solche von 3 g = 1 g + 2 g ermöglicht. Wir werden daher die beiden ersten Stücke unseres gesuchten Gewichtssatzes so wählen: 1 g, 2 g. Um nun auch 4 g abwägen zu können, brauchen wir entweder ein weiteres Gewicht von 1 g oder ein zweites von 2 g oder eins von 3 g oder schließlich eins von 4 g. Der Leser ist keinen Moment darüber im Zweifel, wofür wir uns zu entscheiden haben werden; denn, während z. B. ein Gewichtssatz von 1 g, 2 g, 2 g uns nur alle Wägungen von 1 g bis 5 g ermöglicht, können wir mit 1 g, 2 g, 4 g alle Wägnngen von 1 g bis 7 g einschließlich ausführen ($5 = 4 + 1$; $6 = 4 + 2$; $7 = 4 + 2 + 1$). Um nun hierüber hinauszukommen, werden wir offenbar ein Gewicht von 8 g hinzunehmen und können alsdann mit den 4 Gewichten von 1 g, 2 g, 4 g, 8 g bereits alle Wägungen von 1 g bis 15 g inkl. ausführen, indem

$$\begin{aligned} 9 &= 8 + 1 \\ 10 &= 8 + 2 \\ 11 &= 8 + 2 + 1 \\ 12 &= 8 + 4 \\ 13 &= 8 + 4 + 1 \\ 14 &= 8 + 4 + 2 \\ 15 &= 8 + 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

ist. Man sieht sofort, daß man jetzt ein Gewicht von 16 g wird hinzunehmen müssen, und wir erkennen in der Reihe von Zahlen: 1, 2, 4, 8, 16, auf die wir hier kommen, die aus dem vorigen Paragraphen uns wohlbekannte Reihe der Potenzen der Zahl 2 wieder. In der Tat würden wir bei weiterer Fortsetzung unseres Verfahrens stets nach den Zahlen dieser Reihe fortschreiten müssen, so daß also jetzt 32, 64, 128 usw. kommen würden. Man erkennt diese Notwendigkeit leicht folgendermaßen: Die Gewichte 1 g, 2 g, 4 g, 8 g

---

1) Würden die Gewichte auf beide Schalen verteilt, so ließe sich 1 g ja auch ohne das Eingrammsgewicht abwägen, etwa als Differenz von 3 g und 2 g. Läßt man auch diese Art Wägungen (durch Gegengewichte) zu, so kommt man tatsächlich mit noch weniger Gewichten aus, als sich für unsere obige Fragestellung ergeben werden, doch soll dieser Fall, wie gesagt, hier ganz außer Betracht bleiben; s. jedoch meine „Math. Unterh. u. Spiele", Bd. I (2. Aufl.), S. 88 ff.

ermöglichen alle Wägungen von 1 g bis 15 g einschließlich, wie wir gezeigt haben. Ich denke mir diese 15 Wägungen nun der Reihe nach ausgeführt und lege jedesmal das neu hinzugetretene Gewicht 16 g dazu; alsdann erhalte ich statt der Wägungen von 1 g bis 15 g alle Wägungen von 17 g bis 31 g einschließlich, insgesamt also alle Wägungen von 1 g bis 31 g einschließlich. Zu der Abwägung von 31 g brauche ich alle 5 Gewichtsstücke (1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g), vermag aber eine Wägung von 32 g mit ihnen offenbar nicht mehr zu leisten. Wie wir nämlich aus dem vorigen § (Satz 1) wissen, ist es eine allgemeine Eigenschaft der Reihe der Potenzen der Zahl 2, daß die Summe der Zahlen dieser Reihe, bis zu einer gewissen Grenze genommen, um 1 kleiner ist als die nächstfolgende Zahl der Reihe. Hiernach ist es begreiflich, daß wir mit unseren 5 Gewichtsstücken 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g nur bis zu Wägungen von 31 g einschließlich zu reichen vermögen, also unmittelbar vor 32, der nächstfolgenden Potenz der 2, halt machen müssen. Wollen wir weiter gehen, so müssen wir also ein Gewicht von 32 g hinzunehmen und vermögen mit den jetzt zur Verfügung stehenden Gewichten offenbar alle Wägungen bis 63 g, und zwar lückenlos von g zu g, auszuführen. Das weiter hinzutretende Gewicht muß dann 64 g sein, und dieser Gewichtssatz von jetzt 7 Gewichten: 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, 32 g, 64 g ermöglicht uns alle Wägungen bis einschließlich 127 g; er leistet somit, obwohl nur aus 7 Gewichten bestehend, mehr als die im Verkehrsleben üblichen mit ihren ersten 8 Gewichten, die nur Wägungen bis 110 g gestatten, wie schon oben gesagt wurde. — Um übrigens einem etwaigen Mißverständnis vorzubeugen, sei noch ausdrücklich bemerkt, daß solche nach den Potenzen der Zahl 2 fortschreitenden („dyadischen") Gewichtssätze für den *praktischen* Gebrauch gewiß nicht empfehlenswert sind, eine Frage, die jedoch hier nicht zur Erörterung steht.

Bei Gelegenheit dieser besonderen Aufgabe gewannen wir zugleich ein wichtiges allgemeines Resultat, von dem wir noch weiterhin Gebrauch machen werden und das wir daher für sich gesondert aussprechen wollen als:

Satz 2: *Jede beliebige Zahl läßt sich darstellen als Summe von Zahlen aus der Reihe der Potenzen der 2 und zwar so, daß jede dieser Potenzen höchstens einmal in der Summe vorkommt.*

Frage 10: Leistet nicht ein Gewichtssatz, bestehend aus den Gewichten 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, 33 g, 65 g noch mehr als der soeben (S. 39) angegebene, indem er auch noch Abwägungen von 128 g und 129 g ermöglicht?

Frage 11: Durch wieviel Gewichte (Mindestzahl) kann ein Gewichtssatz, bestehend aus Gewichten von 1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 200 g, ersetzt werden?

§ 3. Erraten gedachter Zahlen und Gegenstände.

Die in dem Satz 2 des vorigen Paragraphen ausgesprochene Möglichkeit der Darstellung jeder Zahl als Summe von lauter verschiedenen Potenzen der 2 findet bei zahlreichen Spielen und Aufgaben Anwendung, die wir daher, wie in der Überschrift dieses Kapitels geschehen, „dyadische" nennen und von denen wir in diesem und dem nächsten Paragraphen einige Proben geben wollen.[1]) Dabei wollen wir die Zahlen der gedachten Reihe, also 1, 2, 4, 8 . . ., der einfacheren Unterscheidung halber als unsere „Grundzahlen" bezeichnen.

I. Das Erraten einer gedachten Zahl.

> In einer Gesellschaft denkt man sich eine Zahl, die der vorher hinausgesandte A sich anheischig macht zu erraten, falls der mit ihm unter einer Decke spielende B ihn durch einige aneinandergelegte Münzen „auf die richtige Fährte führen" darf,

wobei es, wie A und B etwa geheimnisvoll behaupten, auf die Winkel ankomme, unter denen die Münzen aneinandergelegt werden. Die Verabredung zwischen A und B geht einfach dahin, daß die Kehrseite (Wappenseite, Revers) einer Münze immer eine Null, die Kopfseite (Avers) dagegen die verschiedenen Potenzen von 2, und zwar von links anfangend sukzessive 1, 2, 4, 8 . . ., bedeuten soll. B stellt die gedachte Zahl dann einfach als Summe unserer, wie wir ja sagen wollten, „Grundzahlen" 1, 2, 4, 8 . . . dar.

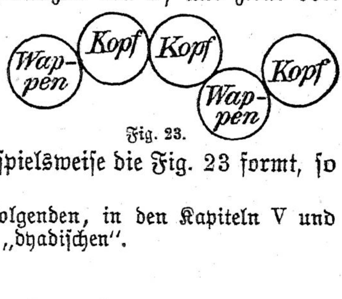


Fig. 23.

Wenn B also aus seinen Münzen beispielsweise die Fig. 23 formt, so

1) Übrigens gehören auch noch die folgenden, in den Kapiteln V und VI gesondert behandelten Spiele zu den „dyadischen".

bedeutet dies: Da die erste Münze links die Wappenseite zeigt, so ist die erste „Grundzahl", also 1, fortzulassen; dagegen hat A wegen der Kopfseite der zweiten und dritten Münze die zweite und dritte Grundzahl, also 2 und 4, zu nehmen; die vierte Grundzahl (8) ist wieder auszulassen, die fünfte (16) dagegen zu nehmen. Die **gedachte** Zahl ist somit $2 + 4 + 16 = 22$, die A nun der staunenden Menge verkünden darf.

II. Das Erraten eines gedachten Bildes.

Auf einer Karte sind 32 verschiedene Bilder dargestellt, etwa in 4 Reihen zu je 8. Irgend jemand, sagen wir Z, wird von A aufgefordert, sich eins dieser Bilder zu denken; A will dann erraten, welches Bild Z sich gedacht hat.

Außer der großen Karte mit allen 32 Bildern, der „Hauptkarte" besitzt A noch 5 weitere Karten („Teilkarten"), auf deren jeder 16 der 32 Bilder (etwa in 2 Reihen zu 8) wiedergegeben sind. A hält nun dem Z jede dieser 5 Karten der Reihe nach hin und läßt sich jedesmal von ihm angeben, ob das gedachte Bild auf der betreffenden Karte vorkommt oder nicht. Nach den Antworten, die Z hierauf gibt, kann A dann das gedachte Bild eindeutig bestimmen.

Es ändert offenbar an dem Spiel nichts, wenn wir statt der 32 Bilder 32 Zahlen, am einfachsten die Zahlen 1—32, annehmen: das erste Bild der Hauptkarte wird eben durch die Zahl 1 ersetzt, das zweite durch 2, das letzte durch 32, wobei wir in der Numerierung der Bilder in jeder Reihe von links nach rechts gehen und die 4 Reihen von oben nach unten durchlaufen. Jede der Zahlen 1—31 läßt sich nun als Summe der Grundzahlen 1, 2, 4, 8, 16 darstellen (die letzte Zahl, 32, die selbst eine Grundzahl ist, lassen wir vorläufig außer Betracht). Wir denken uns diese Darstellung nun für alle 31 Zahlen durchgeführt, also z. B für die Zahl 23 in der Form: $1 + 2 + 4 + 16$. Wie oft, meint der Leser wohl, wird bei diesen 31 Darstellungen rechts die Grundzahl 1 vorkommen? Offenbar tritt sie auf bei allen ungeraden Zahlen, also bei 1, 3, 5, ... 31. Es sind deren im ganzen 16. Diese 16 Zahlen resp. die ihnen entsprechenden Bilder sind nun auf der einen der 5 Teilkarten abgebildet. Aber nicht nur die 1 tritt bei diesen 31 Darstellungen gerade 16 mal auf, sondern, wie eine einfache Überlegung zeigen würde, kommt jede der übrigen Grundzahlen, also die 2, die 4, die 8, die 16, hierbei ebenso oft vor, die Grundzahl 16

z. B. in den Darstellungen der Zahlen 16—31. Man hat daher die 16 Zahlen, in deren Darstellung die Grundzahl 2 auftritt, resp. die ihnen zugeordneten 16 Bilder auf die zweite Teilkarte gebracht und entsprechend den Grundzahlen 4, 8 und 16 die drei weiteren Teilkarten angefertigt. Die Zahl 32 resp. das 32. Bild kommt so offenbar auf keiner der Teilkarten vor. Die 5 Teilkarten sind also, wenn wir auf jeder die Zahlen der Größe nach ordnen, so beschaffen, wie Fig. 24

I.	II.	III.	IV.	V.
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Fig. 24.

zeigt, wobei wir uns nur statt der Zahlen die betreffenden Bilder, diese etwa in zwei wagerechten Reihen zu je 8 angeordnet, gesetzt denken müssen. Gibt nun Z beispielsweise an, daß das von ihm gedachte Bild auf den Teilkarten II, III, V vertreten ist, auf den Teilkarten I und IV aber fehlt, so sagt dies dem A folgendes: Die Teilkarten I, II, III, IV, V entsprechen den Grundzahlen 1, 2, 4, 8, 16 (in unserer Fig. 24 ist die oberste Zahl jeder Teilkarte zugleich die betreffende Grundzahl); von diesen Grundzahlen sind im vorliegenden Falle die zweite, dritte und fünfte, d. h. 2, 4, 16 zu nehmen, die erste und vierte (1 und 8) dagegen fortzulassen. Das gedachte Bild hat mithin auf der Hauptkarte den Platz $2 + 4 + 16 = 22$ und ist damit eindeutig bestimmt.

Kommt das gedachte Bild auf keiner der 5 Teilkarten vor, so ist es das 32., das letzte der Hauptkarte.

§ 4. Der Lucassche Turm.

Dieses von dem französischen Mathematiker E. Lucas erfundene Spiel besteht aus einem Brett mit 3 Pflöcken; auf einem der Pflöcke befindet sich eine Anzahl (bei uns 8) in der Mitte durchbohrter Scheiben (oder etwa Münzen verschiedener Größe) pyramidenartig übereinander und nach der Größe geordnet.[1])

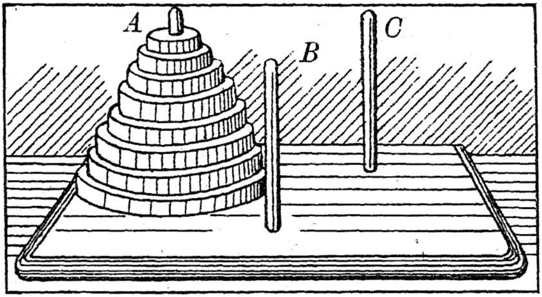


Fig. 25.

Das Spiel besteht darin, die Scheiben alle auf einen der beiden anderen Pflöcke zu bringen, wenn man zur Zeit immer nur eine Scheibe umsetzen und bei allen Umsetzungen stets nur eine kleinere Scheibe auf eine größere, niemals umgekehrt, setzen darf.

Natürlich soll das Ziel durch möglichst wenig Operationen erreicht, unnötige Umsetzungen also vermieden werden.

Es sei C der Pflock, auf den die Scheiben gebracht werden sollen, und A der, auf dem sie ursprünglich sitzen, wie in Fig. 25 angegeben. Man beginne das Spiel zunächst mit nur 2 Scheiben, denke sich also die übrigen 6 unserer Figur fort. Man sieht, daß man alsdann die obere Scheibe auf B zu stecken hat, dann die untere (größere) auf C und nun die von B auf C. Bei 2 Scheiben sind also 3 Umsetzungen zur Erreichung des Ziels erforderlich. — Nimmt man jetzt 3 Scheiben — wir wollen sie von oben nach unten 1, 2, 3 nennen —, so wird man, bevor die Scheibe 3 von A heruntergenommen werden kann, erst 1 und 2 auf einen anderen Pflock bringen müssen und zwar wird man dies so einzurichten haben, daß 3 darauf sofort auf C kommt. C muß also dann leer sein; d. h. man hat zunächst 1 und

1) Das Spiel kann von den Züllchower Anstalten (s. S. 14, Anm. 1) bezogen werden (Nr. 840/4 des Preisverzeichnisses: „Die Ringe des Braminen").

2 auf B zu bringen. Dies erfordert, mit Vertauschung von B und C, unser voriges Verfahren bei nur 2 Scheiben, beansprucht also 3 Umsetzungen (Scheibe 1 von A auf C, 2 von A auf B, 1 von C auf B). Alsdann kommt nun 3 auf C, und darauf müssen 1 und 2 von B auf C gebracht werden, was wieder 3 Umsetzungen erfordert (1 von B auf A, 2 von B auf C, 1 von A auf C). Bei 3 Scheiben sind also 7 Umsetzungen erforderlich. — Man sieht sofort, daß dies ganz analog so weiter geht: Um 4 Scheiben von A auf C zu bringen, hat man zunächst die 3 Scheiben 1, 2, 3 von A auf B zu bringen (7 Umsetzungen), darauf Scheibe 4 von A auf C, dann die Scheiben 1, 2, 3 von B auf C (7 Umsetzungen); zusammen 15 Umsetzungen. Wir hätten hierbei also zunächst die Umsetzungen des vorigen Falles der 3 Scheiben zu wiederholen, jedoch mit Vertauschung der Pflöcke B und C. Begannen wir im vorigen Falle mit: „1 von A auf C", so würden wir daher jetzt zu beginnen haben: „1 von A auf B". Zurückblickend sehen wir so, daß die erste Umsetzung lautete:

bei 2	Scheiben:	„1 von A auf B"
„ 3	„	„1 von A auf C"
„ 4	„	„1 von A auf B".

Da nun jedesmal, wenn wir zu einer um 1 größeren Scheibenzahl fortschreiten, wieder eine solche Vertauschung von B und C stattfinden wird, so wird der Anfang offenbar abwechselnd lauten: „1 von A auf B" und „1 von A auf C", und zwar gilt das erstere bei gerader Scheibenzahl, das letztere bei ungerader. Nennen wir C den „Endpflock" und B den „Übergangspflock", so können wir also sagen:

Bei ungerader Scheibenzahl hat man damit zu beginnen, die kleinste Scheibe auf den Endpflock zu bringen, bei gerader Scheibenzahl dagegen auf den Übergangspflock.

Diese für das praktische Spiel sehr wichtige Regel ist leicht zu behalten und eine Verwechselung der beiden Fälle völlig ausgeschlossen, wenn man dabei nur an den allereinfachsten Fall, *eine* Scheibe, denkt, für den sich die Regel von selbst versteht.

Für die Zahl der erforderlichen Umsetzungen hatten wir gefunden:

bei 1	Scheibe	1	Umsetzung
„ 2	Scheiben	3	Umsetzungen
„ 3	„	7	„
„ 4	„	15	„

Wenn der Leser auch bereits hiernach das Gesetz dieser Zahlen errät, so werden wir doch noch eine bessere Einsicht in die Art, wie die Zahlen 1, 3, 7, 15 usw. zustandekommen, gewinnen, wenn wir die Frage aufwerfen: Wie viele der 15 Umsetzungen, die bei 4 Scheiben erforderlich sind, werden vorgenommen mit Scheibe 1, wie viele mit Scheibe 2 usw.? — Nun, von den 3 Umsetzungen, die bei 2 Scheiben erforderlich sind, erfolgen zwei mit Scheibe 1 und eine mit Scheibe 2. Wir schreiben dies kurz so:

	2 Scheiben
Scheibe	1 . . . . 2 Ums.
"	2 . . . . 1 Ums.
	zus. 3 Ums.

Bei 3 Scheiben gliedert sich das Verfahren in folgende 3 Stufen: Umsetzen der Scheiben 1 und 2 von A auf B, Umsetzen der Scheibe 3 von A auf C, Umsetzen der Scheiben 1 und 2 von B auf C. Hieraus sieht man, da das Verfahren der 2 Scheiben (1 und 2) zweimal auszuführen ist, daß die Umsetzungen für diese beiden Scheiben sich verdoppeln gegenüber dem vorigen Fall, und wir erhalten also:

	3 Scheiben
Scheibe	1 . . . . 4 Ums.
"	2 . . . . 2 Ums.
"	3 . . . . 1 Ums.
	zus. 7 Ums.

und hiernach entsprechend:

	4 Scheiben
Scheibe	1 . . . . 8 Ums.
"	2 . . . . 4 Ums.
"	3 . . . . 2 Ums.
"	4 . . . . 1 Ums.
	zus. 15 Ums.

Die Zahlen der Umsetzungen für die einzelnen Scheiben, von unten nach oben gelesen (1, 2, 4, 8 im letzten Falle), sind die Potenzen von 2 und zwar nicht nur hier in diesen einfachsten Fällen, sondern dies gilt, da sich beim Fortschreiten von Fall zu Fall die Zahlen verdoppeln und unten stets eine 1 hinzutritt, ganz allgemein. Die Gesamtzahl der Umsetzungen für jeden Fall ist dann nach unserem Satz 1 (S. 37) um 1 kleiner als die nächstfolgende Potenz von 2; so würde sich also bei 5 Scheiben als Gesamtzahl aller Umsetzungen 31 (= 32 — 1) ergeben.

Frage 12: Wie viele Umsetzungen sind bei 7 Scheiben im ganzen erforderlich? Wie viele Umsetzungen hiervon werden mit Scheibe 1, wie viele mit Scheibe 5 vorgenommen? Welches ist die allererste Umsetzung in diesem Falle?

Kapitel V.

Das Zankeisen.

Das Museum für Völkerkunde in Leipzig besitzt in seinen Sammlungen ein merkwürdiges, aus China, und zwar der Provinz Schantung, stammendes Spielzeug, das unsere Fig. 26 in verkleinerter Wiedergabe zur Anschauung bringt: Auf einer in einen Griff auslaufen-

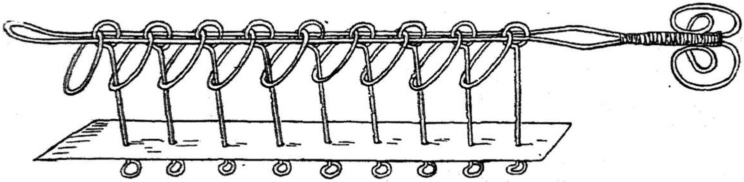


Fig. 26.

den Gabel oder Spange sitzen, wenn wir uns zunächst auf den oberen Teil des Instruments beschränken, 9 Ringe; das Ganze ist, mit Ausnahme der Bindfadenumwickelung am Griff, in Messing ausgeführt. Wenn auch die chinesische Herkunft dieses Exemplars unzweifelhaft festzustehen scheint, so ist doch kaum anzunehmen, daß das geistreiche Spielzeug eine Erfindung der Chinesen überhaupt sei, und jedenfalls ist es in Europa, gering veranschlagt, seit vier Jahrhunderten bekannt. Von den verschiedenen Namen, unter denen es in Deutschland seit längerer Zeit umläuft, haben wir hier den des „Zankeisens" bevorzugt. — Für die Besprechung des Spielzeugs ist es bequemer, an Stelle des chinesischen Exemplars mit seinen 9 Ringen eins mit weniger Ringen zugrunde zu legen, und so geben wir denn in Fig. 27 eine schematische Zeichnung mit 5 Ringen, die unseren weiteren Ausführungen als Grundlage dienen mag. Mit Bezug auf sie können wir dann Einrichtung und Zweck des Spielzeugs so beschreiben[1]):

1) Für die Beschäftigung mit diesem höchst reizvollen Spiel, die ich dem Leser nicht dringend genug anraten kann, ist die Benutzung eines Modells kaum zu entbehren oder wenigstens sehr zu empfehlen. Wer nicht vorzieht, sich selbst ein solches anzufertigen, kann es von den Züllchower Anstalten (s. hier S. 14, Anm. 1) beziehen (Nr. 842/4 des Preisverzeichnisses). Augenblicklich ist dort freilich nur die Spielform mit 9 Ringen vorrätig, doch ist für später (nach dem Kriege) daneben auch die Ausführung mit weniger, etwa 5, 7 und 8 Ringen, in Aussicht genommen.

Jeder der 5 Ringe ist durch einen an ihm befestigten Faden, der, außer bei einem Ring (Nr. 1 unserer Figur), durch das Innere des benachbarten Ringes und — bei allen Ringen — zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurchgeht, mit einer kleinen Stange (a in unserer Figur) fest verbunden. Das Spiel besteht nun darin, die Spange von dem System der Ringe zu trennen.

Der Anfänger versucht die Lösung gewöhnlich in der Weise, daß er, den Griff etwa in die linke Hand nehmend, die Ringe nach rechts

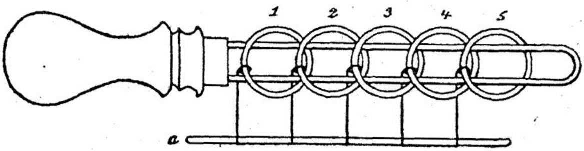


Fig. 27.

bis über das Ende der Spange zieht und nun — irrtümlicherweise — die Ringe über einen der beiden Bügel der Spange wirft, muß dann aber erkennen, daß dies zur Lösung der Aufgabe nicht nur nichts beiträgt, vielmehr nur eine Verwirrung der Fäden herbeiführt. Man erkennt in der Tat sehr leicht, daß man die einzelnen Ringe zwar nach rechts (im Sinne der Fig. 27) von der Spange herunterzuziehen haben wird, daß sie darauf jedoch nicht auf die eine Seite der Spange, sondern zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurch nach unten geworfen werden müssen, und es entsteht jetzt nur die Frage, in welcher Reihenfolge man diese Manipulationen mit den verschiedenen Ringen vorzunehmen hat, um auf die schnellste Art eine Trennung von Spange und Ringen zu erzielen. In der ursprünglichen Stellung (s. Fig. 27) können nur die Ringe 4 und 5 nach unten gelangen — ohne daß einer der betreffenden Fäden über einen Bügel der Spange greift, was natürlich zu vermeiden ist —, und zwar 5 in der bereits angegebenen Weise, und 4, indem man 4 und 5 gleichzeitig nach rechts über die Spange hinausführt und dann 4 von oben zwischen den Bügeln hindurch nach unten wirft, 5 dagegen wieder auf die Spange setzt oder gleichzeitig mit 4 nach unten wirft. Bezeichnen wir nun das Lostrennen eines Ringes von der Spange kurz als das „Senken" eines Ringes und die umgekehrte Operation als das „Heben" und rechnen wir die Ringe in der Reihenfolge der Nummern in der Fig. 27, also z. B. 3 als den auf 2 „folgenden" Ring, so erkennt man leicht folgendes:

Ein Ring kann nur dann gehoben resp. gesenkt werden, wenn der folgende Ring oben ist, alle weiteren folgenden Ringe jedoch unten sind; der letzte Ring (5) kann jederzeit gehoben resp. gesenkt werden.

Hätten wir z. B. die durch das Schema $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ \circ&&\circ&&\\ \hline &\circ&&\circ&\circ\end{array}$ angedeutete Stellung — in der die Gerade die Spange und die kleinen Kreise oberhalb derselben die auf ihr sitzenden Ringe, die unteren Kreise die gesenkten Ringe bedeuten — auf irgendeine Weise herbeigeführt, so würde der Ring 2 jetzt gehoben werden können, weil der folgende Ring (3) oben ist, alle weiteren folgenden Ringe (4 und 5) dagegen unten. Dagegen würden die Ringe 1 und 3 nicht gesenkt und 4 nicht gehoben werden können; wohl aber könnte 5 gehoben werden und mit ihm zugleich allerdings auch 4.

Hiernach erkennt man, daß es bei unserer Aufgabe, das System der Ringe von der Spange zu trennen, vor allem darauf ankommen wird, den Ring 1 zu senken, und daß, nachdem dies geschehen, dieser Ring völlig aus der Betrachtung ausscheidet und man dann nur noch mit einem Spiel von 4 Ringen zu tun hat. Damit aber 1 gesenkt werden kann, muß nach unserer obigen Vorschrift Ring 2 oben und müssen 3, 4, 5 unten sein. Es ist also vorher 3 zu senken, und dies erfordert, daß 4 oben und 5 unten ist. Hiernach ergibt sich folgende Disposition: Es ist zunächst 5 zu senken, darauf kann dann auch 3 gesenkt werden, und wir erhalten somit die Stellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ \circ&\circ&&\circ&\\ \hline &&\circ&&\circ\end{array}$. Um nun auch 4 senken zu können, müssen wir 5 wieder heben und können darauf 4 und 5 — gleichzeitig, wie schon oben bemerkt war, — senken. Wir erhalten so die Stellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ \circ&\circ&&&\\ \hline &&\circ&\circ&\circ\end{array}$, die nun, wie schon gesagt, die Vorbedingung für das Senken von 1 darstellt. Aus ihr resultiert daher $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&&&\\ \hline \circ&&\circ&\circ&\circ\end{array}$. Damit scheidet 1 ganz aus der Betrachtung aus, und, damit nun 2 gesenkt werden kann, muß zuvor 3 gehoben werden. Dies bedingt aber, daß 4 gehoben wird, und dies wieder dasselbe für 5. Wir heben daher zunächst 4 und 5, was bei diesen beiden zu-leich geschehen kann, erhalten also $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&&\circ&\circ\\ \hline \circ&&\circ&&\end{array}$. Soll 3 gehoben wer-n, so muß erst wieder 5 gesenkt werden, so daß wir sukzessive die

Stellungen $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&&\circ&\\ \hline \circ&&\circ&&\circ\end{array}$ und $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&\circ&\circ&\\ \hline \circ&&&&\circ\end{array}$ erhalten. Damit nun 2 gesenkt werden kann, muß nicht nur 3 oben, sondern zugleich 4 und 5 unten sein, und, um 4 senken zu können, müssen wir zuvor 5 heben, so daß wir zunächst die Stellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&\circ&\circ&\circ\\ \hline \circ&&&&\end{array}$ bekommen. Dies ist aber die Anfangsstellung für ein Spiel mit 4 Ringen, und die weiteren Operationen sind genau dieselben, als ob wir von Anfang an nur 4 Ringe gehabt hätten. Durch die jetzt zunächst erreichbare Zwischenstellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &\circ&\circ&&\\ \hline \circ&&&\circ&\circ\end{array}$ gelangen wir zu $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &&\circ&&\\ \hline \circ&\circ&&\circ&\circ\end{array}$, womit auch der Ring 2 aus der Betrachtung ausscheidet. Damit nun 3 gesenkt werden kann, muß zuvor 4 gehoben werden, und dies bedingt wieder, daß 5 zuvor resp. gleichzeitig gehoben wird, so daß folgende sukzessive Stellungen notwendig werden: $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &&\circ&\circ&\circ\\ \hline \circ&\circ&&&\end{array}$ (Anfangsstellung für ein Spiel mit 3 Ringen), $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &&\circ&\circ&\\ \hline \circ&\circ&&&\circ\end{array}$, $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ &&&\circ&\\ \hline \circ&\circ&\circ&&\circ\end{array}$. Heben wir nun noch 5 und senken dann 4 und 5 gleichzeitig, so ist das ganze System der Ringe von der Spange getrennt, wie verlangt war.

Umgekehrt bringt man die Ringe wieder auf die Spange zurück, indem man genau die umgekehrten Operationen wie zuvor, und zwar in umgekehrter Reihenfolge, ausgeführt, also:

1. Heben von 4 und 5
2. Senken von 5
3. Heben von 3
4. Heben von 5
5. Senken von 4 und 5
6. Heben von 2
7. Heben von 4 und 5
8. Senken von 5
9. Senken von 3
10. Heben von 5
11. Senken von 4 und 5
12. Heben von 1
13. Heben von 4 und 5
14. Senken von 5
15. Heben von 3
16. Heben von 5.

Auf die mathematische Theorie des Spiels, für die — beiläufig bemerkt — die im vorigen Kapitel besprochene Reihe der Potenzen der 2 eine grundlegende Bedeutung besitzt (vgl. S. 40, Anm. 1), dürfen wir nach den obigen Ausführungen verzichten. Die Theorie würde uns im Grunde genommen nur eine Bestätigung unserer Darstellung liefern und insbesondere den Beweis dafür geben, daß das von uns oben angewandte Verfahren auch wirklich das kürzeste ist, um die gestellte Aufgabe zu lösen. Bei diesem unserem Verfahren waren für den von uns hier zugrunde gelegten Spezialfall von 5 Ringen 16 Operationen erforderlich, wenn wir ein gleichzeitiges Heben und Senken der beiden letzten Ringe (4 und 5) für **eine** Operation zählen. Wir wollen nun wenigstens bei der mathematischen Theorie unseres Spiels die Anleihe machen, daß wir noch die Anzahl der erforderlichen einzelnen Umstellungen für verschiedene Anzahlen von Ringen in einer Tabelle, wie folgt, zusammenstellen:

Anzahl der Ringe	Anzahl der Umstellungen
2	1
3	4
4	7
5	16
6	31
7	64
8	127
9	256
10	511
11	1024
12	2047
20	524287

Bei 65 Ringen würde die Minimalzahl der erforderlichen Umstellungen bereits eine 20stellige Zahl und gerade um 1 größer sein als die Anzahl aller Weizenkörner auf dem Schachbrette in dem oben (S. 35 f.) besprochenen Falle.

Frage 13: Welche anfängliche Stellung wäre bei 5 Ringen die ungünstigste, d. h. diejenige, von der aus am meisten Operationen erforderlich sind, um das System der 5 Ringe von der Spange zu trennen? Wie viele Operationen erfordert dieser ungünstigste Fall?

Kapitel VI.

Nim.

§ 1. Beschreibung des Spiels und Skizzierung seiner Theorie.

Der Ursprung dieses Spiels ist unbekannt. Auf einigen amerikanischen Schulen, bisweilen auch auf Jahrmärkten, wird es gespielt; es soll aber auch in Deutschland schon seit Jahrzehnten bekannt sein. Genannt wird es zumeist „Fan-Tan". Da man jedoch mit demselben Namen auch ein ganz anderes, bei Chinesen beliebtes Spiel bezeichnet, das ein reines Glücksspiel ist, so haben wir hier den obigen englischen, von einem amerikanischen Mathematiker vorgeschlagenen Namen akzeptiert.

> Man benutzt zu dem von zwei Personen gespielten Spiel eine Anzahl von irgendwelchen Objekten, etwa Zündhölzern oder kleinen Steinen. Es wird damit begonnen, daß 3 „Haufen" von „Steinen" gebildet werden, und zwar so, daß jeder Haufen, wie wir vorläufig der Einfachheit halber annehmen wollen, höchstens 7, andererseits aber auch wenigstens 1 Stein[1]) enthalten mag. Das Spiel besteht nun darin, daß zunächst einer der Spielenden eine beliebige Anzahl von Steinen von einem Haufen fortnimmt, d. h. also wenigstens einen Stein und eventuell auch den ganzen Haufen. Innerhalb und mit Einschluß dieser Grenzen darf der Spielende also beliebig wählen, ebenso wie ihm auch die Wahl des Haufens überlassen bleibt; nur dürfen nicht gleichzeitig Steine verschiedener 22 Haufen fortgenommen werden. Darauf kommt der andere Spieler an die Reihe, um nun seinerseits nach denselben Bestimmungen, wie der erstere, zu verfahren, und zwar darf er denselben Haufen wie sein Gegner oder auch einen anderen wählen. So geht dies abwechselnd fort, solange Steine vorhanden sind. Wer den letzten Stein bekommt, ist Sieger.

Wir wollen der Einfachheit halber die einzelnen Operationen der Spieler als ersten, zweiten usw. „Zug" unterscheiden. — Die mathematische Theorie lehrt nun, daß einer der beiden Spieler stets den Sieg erzwingen kann; welcher von beiden sich in dieser günstigen Lage befindet, ob derjenige, der den ersten oder der den zweiten Zug tut, hängt lediglich von der Anfangsstellung ab.

Eine bestimmte Phase des Spiels ist offenbar durch die Anzahlen der Steine in den Haufen völlig charakterisiert. Wir werden sie daher etwa durch 1, 4, 6 bezeichnen, wenn der eine Haufen 1, ein anderer 4 und der dritte 6 Steine enthält, und wollen solche Spielphasen „Stellungen" nennen. Dabei wollen wir aus später zu erkennenden Gründen die Stellungen

1) Wir sprechen also aus Zweckmäßigkeitsgründen auch von einem „Haufen" von *einem* Stein und überlassen den Logikern die Erörterung der berühmten Streitfrage, bei welcher Mindestzahl von Objekten der vulgäre Begriff des „Haufens" beginnt.

1, 2, 3   2, 4, 6   3, 4, 7
1, 4, 5   2, 5, 7   3, 5, 6   **(System I)**
1, 6, 7

„ausgezeichnete" und die übrigen mit gleichfalls 3 Haufen, also z. B. 1, 4, 6 oder 3, 4, 4, „gewöhnliche" nennen. Der Leser erkennt unschwer, daß die Zahl der „gewöhnlichen" Stellungen sehr viel größer ist als die der „ausgezeichneten". Befinden sich z. B. in dem einen Haufen 2 Steine und in einem zweiten 4, so haben wir eine „ausgezeichnete" Stellung nur dann, wenn in dem dritten Haufen 6 Steine liegen. In allen anderen Fällen, d. h. also, wenn in dem dritten Haufen 1, 2, 3, 4, 5 oder 7 Steine liegen, würde die Stellung eine „gewöhnliche" sein; denn nur 2, 4, 6 findet sich in unserem „System I", nicht aber 2, 4, 1 oder 2, 4, 2 oder 2, 4, 3 usw. — Ist ein Haufen ganz verschwunden, so mögen „ausgezeichnet" diejenigen Stellungen heißen, bei denen die beiden übriggebliebenen Haufen gleich viele Steine enthalten; alle übrigen Stellungen mit nur zwei Haufen, also alle mit zwei ungleichen Haufen, sollen „gewöhnlich" heißen. Stellungen mit nur einem Haufen werden stets „gewöhnlich" genannt. Zu den oben angegebenen „ausgezeichneten" Stellungen des „Systems I" kommen also als gleichfalls „ausgezeichnet" noch hinzu:

0, 1, 1   0, 4, 4   0, 6, 6
0, 2, 2   0, 5, 5   0, 7, 7   **(System II)**
0, 3, 3

und schließlich noch 0, 0, 0, also diejenige Stellung, die dem Spieler, der sie erreicht, die Siegespalme einträgt. Einschließlich dieser letzten Stellung haben wir somit im ganzen 15 „ausgezeichnete" Stellungen, während eine einfache Rechnung lehren würde, daß die Zahl der „gewöhnlichen" Stellungen 105 beträgt. Die „ausgezeichneten" Stellungen sind nun so ausgewählt, daß folgendes gilt:

Satz 1: Eine „ausgezeichnete" Stellung kann durch den nächsten Zug nie wieder in eine „ausgezeichnete", sondern immer nur in eine „gewöhnliche" Stellung übergeführt werden.

Satz 2: Eine „gewöhnliche" Stellung läßt sich durch den nächsten Zug zwar stets in zahlreiche „gewöhnliche", jedoch auch stets in mindestens **eine** „ausgezeichnete" Stellung überführen.

Wir werden in den nächsten Paragraphen sehen, daß die „ausgezeichneten" Stellungen den Spieler zum Siege führen. Hiernach und nach den soeben — vorläufig freilich ohne Begründung — angegebenen Sätzen läßt sich das Prinzip des praktischen Spiels bereits jetzt folgendermaßen formulieren: Der Spieler muß danach trachten, durch seinen Zug eine „ausgezeichnete" Stellung herzustellen. Ist dies z. B. dem Spieler A gelungen, so wird B, da er ziehen muß und eine „ausgezeichnete" Stellung nur in eine „gewöhnliche" übergeht (Satz 1), die „ausgezeichnete" Stellung wieder zerstören, also eine „gewöhnliche" herstellen müssen. A kann diese jedoch wieder in eine „ausgezeichnete" umwandeln (Satz 2) und kann so von einer „ausgezeichneten" Stellung zur anderen und schließlich zum Siege fortschreiten.

§ 2. Begründung der Theorie des Spiels.

Die Überzeugung von der Richtigkeit der im vorhergehenden § 1 ausgesprochenen Sätze gewinnt der Leser leicht an der Hand bestimmter Beispiele. Zunächst **Satz 1**: Greifen wir zuerst von den „ausgezeichneten" Stellungen des **Systems II** eine, etwa 0, 5, 5, heraus, so sehen wir, daß durch den nächsten Zug notwendig eine „gewöhnliche" Stellung daraus wird; denn entweder der eine der beiden Haufen verschwindet beim nächsten Zuge ganz oder er verringert sich und wird damit dem anderen ungleich. Das Resultat des nächsten Zuges ist also entweder 0, 0, 5 oder etwa 0, 2, 5; beides sind aber nach unseren Definitionen „gewöhnliche" Stellungen. Die „ausgezeichneten" Stellungen des Systems II lassen sich somit durch je einen Zug sicher sämtlich nur in „gewöhnliche" überführen, wie Satz 1 es will. — Aber auch für die Stellungen des **Systems I** gilt der Satz; wir betrachten zu dem Zweck ein Beispiel, etwa 2, 5, 7. Lassen wir durch den nächsten Zug einen Haufen ganz verschwinden, so wird die Stellung, da die beiden übrigbleibenden Haufen ungleich sind, unbedingt „gewöhnlich". Wir haben also nur noch die Fälle zu betrachten, in denen einer der Haufen verringert wird, ohne zu verschwinden. Nehmen wir nun von dem ersten Haufen einen Stein fort, so daß 1, 5, 7 bleibt, so haben wir eine „gewöhnliche" Stellung; denn in denjenigen „ausgezeichneten" Stellungen, in denen die 1 vorkommt, kommen niemals zugleich 5 und 7 vor (s. System I, erste Spalte). Verringern wir den zweiten Haufen, so bleiben jedenfalls in dem ersten Haufen 2 und in dem dritten 7 Steine. Nun finden wir aber in dem ganzen System I nur eine Stellung, die zugleich 2 und 7 enthält; das ist unsere anfängliche Stellung 2, 5, 7. Wird also der Haufen 5 verringert, so ergibt sich zweifellos eine „gewöhnliche" Stellung. Bei Verringerung des dritten Haufens ist es ganz entsprechend.

Der Leser hat unschwer erkannt, daß wesentlich hierbei folgender Umstand ist: das System I der „ausgezeichneten" Stellungen ist so eingerichtet, daß irgend zwei Zahlen, z B. 3 und 7, nur einmal zusammen in einer „Stellung" vorkommen, nämlich in 3, 4, 7. Andererseits kommt aber jedes Paar von zwei Zahlen auch einmal zusammen in einer Stellung des Systems I vor. Wir werden zwar hierauf zurückkommen und diese Angabe, die wir hier nur provisorisch machten, noch näher begründen müssen, wollen jedoch zur besseren Veranschaulichung dieser Einrichtung des Systems I jetzt noch folgendes hinzufügen: Wir denken uns, die Zahlen 1, 2, . . . 7 bezeichneten die Mitglieder eines Skatklubs; nennen wir sie der Reihe nach etwa: Schulze, Müller, Schmidt, Meyer, Lehmann, Krause, Fischer. Die Kombinationen zu je 3 in unserem System I bezeichnen dann immer gerade eine Skatpartie. Das System I erhält nun 7 „Stellungen"; diese mögen den 7 Tagen der Woche entsprechen, d. h. es mag in dem Klublokal an jedem Abend der Woche sich ein Trio zu einer Spielpartie einfinden. Nehmen wir alsdann die Stellungen des Systems I in jeder Zeile von links nach rechts, so liefert uns unser System I folgenden Wochenspielplan für den Klub:

Sonntag:	Schulze, Müller, Schmidt.
Montag:	Müller, Meyer, Krause.
Dienstag:	Schmidt, Meyer, Fischer.
Mittwoch:	Schulze, Meyer, Lehmann.
Donnerstag:	Müller, Lehmann, Fischer.
Freitag:	Schmidt, Lehmann, Krause.
Sonnabend:	Schulze, Krause, Fischer.

Wir bemerken alsdann folgendes: Jedes Klubmitglied kommt gleich oft zum Spiel, nämlich dreimal in der Woche. Dabei spielt jedes der 7 Mitglieder gerade einmal in der Woche mit jedem anderen zusammen: an seinem ersten Abend mit zwei Mitgliedern, an seinem zweiten Abend nicht wieder mit einem des ersten Abends, sondern mit zwei anderen Mitgliedern und an seinem dritten Spielabend mit den noch übrigen zwei.[1]) So spielt Schmidt z. B. am Sonntag, Dienstag und Freitag, und zwar am Sonntag mit Schulze und Müller, am Dienstag mit Meyer und Fischer, am Freitag mit Lehmann und Krause, also mit jedem gerade einmal in der Woche. — Dies mag zur Veranschaulichung der Art, wie die Zahlen des Systems I miteinander kombiniert sind, vorläufig genügen.

Wir versuchen nun, uns den **Satz 2** plausibel zu machen: Der erste Teil, daß eine „gewöhnliche" Stellung sich auf mannigfache Weise durch einen Zug in andere „gewöhnliche" überführen läßt, z. B. 1, 2, 5 in 1, 2, 4 oder in 1, 2, 2 oder in 1, 2, 1 oder in 1, 2, 0 oder in 0, 2, 5 usw., bedarf keiner weiteren Begründung. Es läßt sich aber, wie der Satz 2 weiter will, jede „gewöhnliche" Stellung durch einen Zug auch in mindestens **eine** „ausgezeichnete" überführen. Am leichtesten erkennt man dies bei nur zwei Haufen: hat man z. B. die „gewöhnliche" Stellung 0, 4, 7, so erhält man daraus eine „ausgezeichnete", wenn die beiden Haufen gleich gemacht werden, was nur durch Verringerung des größeren möglich ist, so daß man also 0, 4, 4 bekommen würde. Wäre in der „gewöhnlichen" Stellung nur noch ein Haufen vertreten, hätten wir also z. B. 0, 0, 4, so müßte, wie selbstverständlich, dieser Haufen ganz zum Verschwinden gebracht werden, um die „ausgezeichnete" Stellung 0, 0, 0, die zugleich das Spiel mit dem Siege des Ziehenden beendet, zu erhalten.[2]) — Hat man eine „gewöhnliche" Stellung mit drei Haufen, z. B. 3, 6, 7, so darf man keinesfalls, will man eine „ausgezeichnete" erhalten, einen Haufen ganz verschwinden lassen. Man darf also einen Haufen nur verringern. Will man den ersten Haufen verringern, so bleiben also jedenfalls die Zahlen 6 und 7 des zweiten und dritten Haufens unverändert. Die einzige „ausgezeichnete" Stellung, in der 6 und 7 zusammen vorkommen, ist nun 1, 6, 7 (s. System I); es muß also der erste Haufen von 3 auf 1 verringert werden. Entsprechend findet man, daß

---

1) Darauf, ob eventuell alle 3 Spielabende des einzelnen Mitglieds unmittelbar aufeinander folgen resp. wie sie sich sonst auf die Woche verteilen, ist hier keine Rücksicht genommen.

2) Der Leser sieht also schon hier, daß es nicht willkürlich war, wenn wir die Stellung 0, 0, 0 zu den „ausgezeichneten" rechneten (S. 52), sondern daß vielmehr innere Gründe hierzu zwingen.

man den zweiten Haufen von 6 auf 4 oder den dritten von 7 auf 5 zu verringern hätte, mit dem Resultat, daß man so eine der „ausgezeichneten" Stellungen 3, 4, 7 und 3, 6, 5 erhalten würde. In dem Falle dieses Beispiels läßt sich die „gewöhnliche" Stellung also durch den nächsten Zug auf 3 Arten in eine „ausgezeichnete" überführen. Im allgemeinen wird es drei Möglichkeiten für diese Überführung zwar nicht geben, und es genügt uns auch vollkommen, wenn es nur **eine** gibt. Es entsteht aber die Frage, ob **eine** solche Möglichkeit auch stets statt hat. Wollten wir an dieser Frage vorübergehen, so würden wir in unserer Beweisführung eine erhebliche Lücke lassen; andererseits zwingt uns diese Erörterung, ein wenig in die mathematische Theorie des Spiels einzudringen. Der Leser, der hierauf verzichten will, möge daher den Rest dieses Paragraphen überschlagen und alsdann gleich bei § 3 fortfahren.

Es hätten schon oben die Fragen aufgeworfen werden können, durch welche wesentlichen Eigenschaften sich die „ausgezeichneten" Stellungen von den „gewöhnlichen" unterscheiden und auf welche Weise die „ausgezeichneten" Stellungen, insbesondere die des Systems I, erhalten wurden. Zur Beantwortung dieser Fragen erinnern wir den Leser zunächst an die schon S. 36 f. betrachtete Reihe der Potenzen der Zahl 2, also an jene mit 1 beginnende Zahlenreihe, in der jede Zahl das Doppelte der vorhergehenden ist: 1, 2, 4, 8, 16 ..... Wir brauchen augenblicklich von dieser Reihe nur den Anfang: 1, 2, 4. Wir erinnern uns weiter daran, daß jede beliebige Zahl sich als Summe von Zahlen dieser Reihe darstellen läßt (Satz 2, S. 39), nämlich die uns hier allein interessierenden Zahlen bis 7 einschließlich in nebenstehender Weise:

	4	2	1
1 =			1
2 =		2	
3 =		2	+ 1
4 =	4		
5 =	4		+ 1
6 =	4	+ 2	
7 =	4	+ 2	+ 1.

Wir wollen daher 4, 2, 1 der Kürze halber jetzt wieder, wie schon auf S. 40, unsere „Grundzahlen" nennen. Greifen wir nun irgendeine „Stellung" aus dem System I, etwa 3, 4, 7, heraus und schreiben die drei darin vorkommenden Zahlen in der soeben angegebenen Weise untereinander, also

$$\begin{aligned} 3 &= \phantom{4 + {}} 2 + 1 \\ 4 &= 4 \\ 7 &= 4 + 2 + 1, \end{aligned}$$

so sehen wir, daß auf der rechten Seite an Grundzahlen untereinander stehen zwei 1, zwei 2 und zwei 4. Würden wir diese Darstellung der Zahlen nun für alle „Stellungen" des Systems I vornehmen, so würden wir finden, daß von den Grundzahlen 1, 2 und 4 **stets** jede **entweder zweimal oder gar nicht** in einer „Stellung" vorkommt, wie dies letztere z. B. bei der Stellung 2, 4, 6:

$$
\begin{aligned}
2 &= \phantom{4+{}} 2 \\
4 &= 4 \\
6 &= 4 + 2
\end{aligned}
$$

bezüglich der Grundzahl 1 der Fall ist. **Niemals** aber kommt eine der Grundzahlen bei dieser Darstellung in den Stellungen des Systems I **ein- oder dreimal** vor; vielmehr würde alsdann die Stellung zu den „gewöhnlichen" gehören. Daß auch die Stellungen von System II dieselbe Eigenschaft zeigen, bedarf kaum der Erwähnung, da diese Stellungen, abgesehen von der 0, immer nur zwei gleiche Zahlen aufweisen, wobei unsere Bedingung bezüglich der Grundzahlen selbstverständlich erfüllt ist. Doch nicht nur besitzen alle Stellungen von System I und II, also alle „ausgezeichneten" Stellungen, die betreffende Eigenschaft, sondern sie sind auch die **einzigen** Stellungen, denen diese Eigenschaft zukommt. Wenn wir nämlich irgendwelche Stellungen, die außerhalb der Systeme I und II stehen, also „gewöhnlich" sind, hieraufhin prüfen würden, so würden wir stets finden, daß ihnen diese Eigenschaft abgeht. Wir greifen als Beispiele etwa die Stellungen 1, 2, 4 und 3, 6, 7 heraus, die nicht zu den „ausgezeichneten" des Systems I gehören und für die wir folgende Darstellungen in den Grundzahlen erhalten:

$$
\begin{aligned}
1 &= \phantom{4+2+{}} 1 \qquad & 3 &= \phantom{4+{}} 2 + 1 \\
2 &= \phantom{4+{}} 2 & 6 &= 4 + 2 \\
4 &= 4 & 7 &= 4 + 2 + 1.
\end{aligned}
$$

Bei der ersteren kommen die Grundzahlen 4, 2 und 1 nur je einmal vor, bei der letzteren die Grundzahlen 4 und 1 allerdings je zweimal, dagegen die Grundzahl 2 dreimal; die verlangte Bedingung wird also durch keins der beiden Beispiele erfüllt. — Der Vollständigkeit halber sei nur noch bemerkt, daß die Stellung 0, 0, 0 natürlich der gestellten Bedingung genügt, also mit Recht den „ausgezeichneten" Stellungen zugerechnet wird (vgl. die Anm. 2 S. 55).

Damit haben wir eine bestimmte **Definition** für die „ausgezeichneten" Stellungen gewonnen, nämlich die, daß bei Darstellung ihrer 3 Zahlen durch die Grundzahlen jede Grundzahl gar nicht oder zweimal vorkommt, und haben an speziellen Beispielen die Überzeugung gewonnen, daß alle „ausgezeichneten" Stellungen die angegebene charakteristische Eigenschaft besitzen, alle „gewöhnlichen" Stellungen dagegen nicht. Wir wollen jedoch dieser Definition jetzt eine genetische Form geben, indem wir in Beantwortung einer oben (S. 56) bereits aufgeworfenen Frage ein Verfahren angeben, um die Gesamtheit aller „ausgezeichneten" Stellungen zu bilden. Suchen wir beispielsweise eine nach unserer jetzigen Definition „ausgezeichnete" Stellung, in der die Zahlen 3 und 5 vorkommen, so würde man so sagen müssen:

$$\begin{aligned} 3 &= \quad 2 + 1 \\ 5 &= 4 + 1. \end{aligned}$$

Da nun hierin die Grundzahlen 4 und 2 nur je einmal, 1 jedoch zweimal vorkommt, so muß die dritte Zahl der gesuchten „Stellung" die Grundzahl 4 einmal, die Grundzahl 2 einmal, die Grundzahl 1 gar nicht enthalten, also $4 + 2 = 6$ sein; die so erhaltene Stellung besitzt dann die Eigenschaft, die wir unserer jetzigen Definition gemäß von den „ausgezeichneten" Stellungen verlangen. Danach muß also 3, 5, 6 eine „ausgezeichnete" Stellung sein, und in der Tat finden wir sie im System I. In dieser Weise findet man zu zwei gegebenen Zahlen stets eine und **nur eine** dritte Zahl, die mit den beiden ersten eine „ausgezeichnete" Stellung bildet, oder mit anderen Worten: 3, 5, 6 ist die *einzige* „ausgezeichnete" Stellung, in der die Zahlen 3 und 5 zusammen vorkommen. Damit dürfen wir zunächst eine auf S. 54 in unseren Darlegungen gebliebene Lücke als ausgefüllt ansehen: Wir antizipierten dort, jedoch ohne Begründung, die charakteristische Eigenschaft des Systems I, daß es in ihm für je zwei Zahlen stets eine, aber auch nur eine „Stellung" gibt, in der diese beiden Zahlen zusammen vorkommen[1]), eine Eigenschaft, für die wir hier nun den inneren Grund erkennen. — Wir können uns nun denken, daß man, wie in unserm Beispiel: 3, 5, so alle Kombinationen der Zahlen 1, 2, .. 7 zu je zweien vornimmt, und jedesmal die zugehörige „ausgezeichnete" Stellung bildet. So muß man jedenfalls zu allen Stellungen des Systems I und damit, da System II sofort hingeschrieben werden kann, zu allen „ausgezeichneten" Stellungen überhaupt kommen. Man braucht nicht einmal alle Kombinationen der Zahlen 1, 2, .. 7 zu je zweien

---

[1]) Ebenso wie entsprechend in dem oben betrachteten Analogon des Skat: die Spielordnung eine solche war, daß irgend zwei Mitglieder jeden- an einem Abend der Woche, aber auch nicht öfter, zusammen spielen.

zu wählen, sondern kann das Verfahren entsprechend abkürzen; wir wollen dies jedoch nur andeuten, indem wir darauf hinweisen, daß, wenn wir, wie oben von 3, 5, jetzt von 3, 6 ausgehen würden, wir als dritte Zahl natürlich 5 finden, also zu derselben „ausgezeichneten" Stellung 3, 6, 5, die wir bereits gebildet hatten, kommen würden, so daß wir also, ohne eine Einbuße zu erleiden, die Kombination 3, 6 ganz ignorieren dürfen, nachdem eine „ausgezeichnete" Stellung mit 3 und 6, nämlich 3, 5, 6, schon gefunden war. Jedenfalls erschöpfen wir durch ein solches Verfahren die Gesamtheit aller Stellungen des Systems I leicht und erkennen so, daß es außerhalb der Stellungen von System I und II einschließlich 0, 0, 0 keine weitere Stellung geben kann, die die verlangte Eigenschaft der „ausgezeichneten" Stellungen besitzt.

Aus dem Vorhergehenden erhellt nun weiter leicht, wie wir eine „gewöhnliche" Stellung in eine „ausgezeichnete" überzuführen haben. Wenn die Stellung, um die es sich handelt, „gewöhnlich" sein soll, so wird mindestens eine der Grundzahlen 4, 2, 1 ein- oder dreimal vorkommen; denn andernfalls wäre die Stellung ja bereits „ausgezeichnet". Wir sehen uns also hieraufhin jedesmal die Grundzahlen 4, 2, 1 von links nach rechts an. Beispielsweise in unserem oben (S. 57) an zweiter Stelle betrachteten Spezialfall

$$\begin{aligned}3 &= \phantom{4+{}} 2 + 1\\ 6 &= 4 + 2\\ 7 &= 4 + 2 + 1\end{aligned}$$

kommt zunächst die Grundzahl 4 zweimal vor. Daran darf also nichts geändert werden. Sodann kommt jedoch die Grundzahl 2 dreimal vor, die Grundzahl 1 dagegen wieder zweimal; es ist also nur eine 2 zu beseitigen. Man verringert somit entweder den ersten Haufen von 3 auf 1 oder den zweiten von 6 auf 4 oder den dritten von 7 auf 5. In jedem Falle fällt eine 2 fort. Genau dieselben drei Möglichkeiten hatten wir schon oben (S. 55/56) für diesen Fall, und zwar lediglich auf Grund der Betrachtung des Systems I, angegeben. — Wir nehmen auch das erste der obigen (S. 57) Beispiele vor:

$$\begin{aligned}1 &= \phantom{4+2+{}} 1\\ 2 &= \phantom{4+{}} 2\\ 4 &= 4.\end{aligned}$$

Die erste Grundzahl, bei der die Bedingung für die „ausgezeichnete" Stellung nicht erfüllt ist, ist die nur einmal vorkommende 4; man wird also diese, da auch die Grundzahlen 2 und 1 nur je einmal vorkommen, ersetzen müssen durch 2 + 1. Alsdann kommt die 4 gar nicht mehr und die 2 und 1 je zweimal vor. Praktisch bedeutet dies: der Haufen 4 wird auf 3 verringert, und man gelangt so zu der „ausgezeichneten" Stellung 1, 2, 3. In dem Falle dieses Beispiels gibt es nur diese eine Möglichkeit, zu einer „ausgezeichneten" Stellung zu gelangen; denn es darf nur verringert, nicht hinzugefügt, und es darf in einem Zuge auch nur **ein** Haufen, nicht etwa mehrere zugleich, verringert werden. Deshalb mußte die größte nur einmal vorkommende Grundzahl, nämlich 4, ganz beseitigt und zu den anderen nur einmal vorkommenden, nämlich 2 und 1, je eine gleiche hinzugefügt werden. Man erkennt so leicht, daß die Möglichkeit der Überführung einer „gewöhnlichen" in eine „ausgezeichnete" Stellung stets vorhanden sein muß[1]), womit die im Beweise des Satzes 2 oben (S. 56, Ende des ersten Absatzes) gebliebene Lücke ausgefüllt ist.

§ 3. Das praktische Spiel.

Aus den vorstehenden Erörterungen ergeben sich für das praktische Spiel nun folgende im wesentlichen schon am Ende von § 1 (S. 53) antizipierte Konsequenzen: Da die „gewöhnlichen" Stellungen sehr viel zahlreicher sind als die „ausgezeichneten", so wird die willkürlich[2]) gewählte Anfangsstellung zumeist eine „gewöhnliche" sein. Der beginnende Spieler A wird diese dann durch seinen Zug in eine „ausgezeichnete" umwandeln; der zweite Spieler B kann aus dieser „ausgezeichneten" Stellung jedoch nur wieder eine „gewöhnliche" machen, die alsdann von A wieder in eine „ausgezeichnete" übergeführt wird. A schreitet so von einer „ausgezeichneten" Stellung zu einer anderen fort und gewinnt schließlich[3]). Ist also die willkürlich gewählte Anfangs-

1) Das Verfahren, die größte ein- oder dreimal vorkommende Grundzahl einmal zu subtrahieren und dafür alle nachfolgenden (kleineren), einmal vorkommenden Grundzahlen je einmal zu addieren, ist stets ausführbar, weil jede dieser „Grundzahlen" größer ist als die Summe aller kleineren Grundzahlen (s. Satz 1, S. 37).

2) Die Bestimmung der Anfangsstellung werden die Spieler, etwa vermittelst des Loses oder nach irgendeinem anderen Verfahren, dem Zufall — oder auch einer am Spiel unbeteiligten und der Spieltheorie unkundigen dritten Person überlassen.

3) Man hat daher unsere „ausgezeichneten" Stellungen als diejenigen, die herzustellen jeder Spieler bestrebt sein muß, die „richtigen" und die „gewöhnlichen" die „unrichtigen" genannt.

stellung „gewöhnlich“, was, wie gesagt, zumeist der Fall sein wird, so gewinnt bei richtigem Spiel der Anziehende; ist die Anfangsstellung eine „ausgezeichnete“, so gewinnt bei richtigem Spiel der Nachziehende.

Die Art, wie sich hiernach das Spiel gestaltet, mag auch noch durch ein Beispiel veranschaulicht werden, wobei wir die Züge numerieren und bei jedem Spieler diejenige Stellung angeben, die er durch den betreffenden Zug herstellt:

Anfangsstellung: 4, 5, 6.

	A		B
1)	3, 5, 6	— etwa	3, 5, 4
2)	1, 5, 4	— „	1, 4, 4.

A muß jetzt, um richtig zu spielen, den letzten Stein des ersten Haufens nehmen und schafft so eine „ausgezeichnete“ Stellung mit nur zwei und zwar gleichen Haufen (System II) also:

3)	0, 4, 4	— etwa	0, 2, 4.

A nimmt jetzt stets ebenso viele Steine von dem anderen (größeren) Haufen, damit die Gleichheit der beiden Haufen wiederhergestellt wird, also:

4)	0, 2, 2	— etwa	0, 1, 2
5)	0, 1, 1	— „	0, 1, 0
6)	0, 0, 0.		

Selbstverständlich ist man keineswegs an die Maximalzahl 7 für die Objekte des einzelnen Haufens gebunden, vielmehr hatten wir diese nur aus Bequemlichkeitsgründen vorläufig angenommen. Der Leser wird auch, wenn er darüber hinausgehen will, das System der „ausgezeichneten“ Stellungen nach den Ausführungen des § 2 leicht selbst erweitern können. Enthält z. B. ein Haufen 7, der zweite 9 Steine, so werden wir diese Stellung zu einer „ausgezeichneten“ ergänzen, indem wir 7 und 9 in den Grundzahlen darstellen, wobei zu 1, 2 und 4 jetzt als nächste Grundzahl 8 hinzutritt. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned} 7 &= \phantom{8 + {}} 4 + 2 + 1 \\ 9 &= 8 \phantom{{}+ 4 + 2} + 1. \end{aligned}$$

Die dritte Zahl muß also sein: $8 + 4 + 2 = 14$ und die „ausgezeichnete“ Stellung ist mithin 7, 9, 14. Will man so beim Spiel beispielsweise bis zu 15 Steinen einschließlich gehen, so erhält man als Erweiterung des früheren Systems I das folgende:

1, 2, 3	2, 4, 6	3, 4, 7	4, 8, 12
1, 4, 5	2, 5, 7	3, 5, 6	4, 9, 13
1, 6, 7	2, 8, 10	3, 8, 11	4, 10, 14
1, 8, 9	2, 9, 11	3, 9, 10	4, 11, 15
1, 10, 11	2, 12, 14	3, 12, 15	
1, 12, 13	2, 13, 15	3, 13, 14	
1, 14, 15			

5, 8, 13	6, 8, 14	7, 8, 15
5, 9, 12	6, 9, 15	7, 9, 14
5, 10, 15	6, 10, 12	7, 10, 13
5, 11, 14	6, 11, 13	7, 11, 12.

Hierzu kommt dann natürlich wieder noch das System aller der Stellungen mit nur noch zwei und zwar einander gleichen Haufen.

Das Spiel kann auch mit mehr als 3, ja beliebig vielen Haufen gespielt werden, doch soll darauf hier nicht eingegangen werden, obwohl die Theorie des Spiels sich alsdann nur unwesentlich ändert. — Man kann auch festsetzen, daß derjenige, der den letzten Stein nehmen muß, als Verlierer gilt. Auch für diese Spielregel bleibt die obige Theorie in der Hauptsache bestehen; immerhin tritt eine kleine Erschwerung ein, so daß wir deshalb auf diese Variante unseres Spiels nicht näher eingehen, obwohl sie die verbreitetere sein soll.

Frage 14: Ein Haufen enthält 7, ein zweiter 25 Steine; wie viele muß der dritte enthalten, wenn die Stellung „ausgezeichnet" sein soll?

Frage 15: Wer gewinnt bei der Anfangsstellung 3, 17, 18 bei richtigem Spiel?

Frage 16: Liegt nur ein Haufen, und zwar von 25 Steinen, vor und wird die Spielregel dahin abgeändert, daß jeder der Spielenden mindestens einen und höchstens 4 Steine mit jedem Zuge fortnimmt, wer kann alsdann den Sieg erzwingen?

Kapitel VII.

Der Rösselsprung.

§ 1. Definition. Geschichte. Vorbemerkungen.

Das gewöhnliche Schachbrett weist bekanntlich 64 Felder auf und fordert zum Spiel 32 Figuren. Die Zahl der Figuren würde also rade ausreichen, um alle Felder der einen Bretthälfte zu besetzen.

Verschiedene Schachautoren des Mittelalters machen von diesem Umstande Gebrauch, um folgende Aufgabe zu stellen: Man denke sich die eine Hälfte des Brettes mit den Figuren in beliebiger Ordnung vollbesetzt und schlage nun mit einem der Springer in beliebiger, aber ununterbrochener Reihenfolge alle Figuren fort. Bekanntlich „schlägt" man im Schach eine Figur mit einer zweiten, wenn man die letztere auf das Feld der ersteren bringt. Der betreffende Springer, der alle Figuren sukzessive schlagen soll und selbst auf einem der 32 Felder steht, hat also die Aufgabe, von seinem Felde aus hintereinander auf alle 31 anderen Felder, und zwar auf jedes nur einmal, zu springen und dabei Felder der anderen Bretthälfte nicht zu betreten.

Hieraus hat sich nun die weitere Aufgabe entwickelt, nicht nur das halbe, sondern das ganze Schachbrett in beliebiger, aber ununterbrochener Folge der 64 Felder mit dem Springer zu durchlaufen, eine Aufgabe, die heute unter dem Namen „Rösselsprung" allgemein bekannt ist und in dem Rätselrepertoire zahlreicher Familienjournale einen ständigen Platz einnimmt, die aber um die Mitte des 18. Jahrhunderts noch wenig bekannt gewesen sein muß, da Leonhard Euler, der große Mathematiker, von ihr bis dahin noch nicht gehört hatte, als sie ihm eines Tages in einer Gesellschaft entgegentrat. Allerdings muß die Aufgabe bald darauf und vielleicht zum Teil infolge der Abhandlung, die Euler nun hierüber verfaßte, weite Verbreitung gefunden haben, so daß beispielsweise ein jüngerer Zeitgenosse Eulers, von Kempelen (1734—1804), durch seinen berühmten Schachautomaten bereits Rösselsprünge ausführen ließ.

Ein „Springerzug" besteht bekanntlich darin, daß die Figur von ihrem Felde nach einer der beiden Seiten um zwei Felder in horizontaler und dann von hier um eins in vertikaler Richtung resp. zuerst um zwei in vertikaler und dann um eins in horizontaler Richtung fortschreitet. Von zwei Feldern, zwischen denen ein Übergang vermittels eines solchen Springerzuges möglich ist, sagt man: „sie rösseln sich". Die Maximalzahl der mit einem gegebenen Felde sich rösselnden Felder ist offenbar 8, wie Fig. 28 darstellt, wenn wir unter dem schraffierten Feld das Feld des Springers verstehen, und die 8 Felder, die sich mit dem schraffierten Felde „rösseln", durch Kreuze bezeichnen.

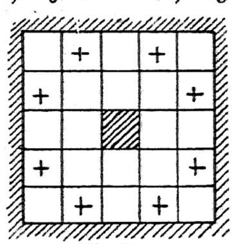


Fig. 28.

Die ganze Figur stellt natürlich nur einen Teil des ganzen, 64=feldrigen Schachbretts dar. Würden wir den Springer mehr nach dem Rande des Brettes zu aufstellen, so würde sein Feld sich eventuell nur mit 6, 4 oder 3 und, wenn wir ihn auf einem Eckfeld aufstellten, gar nur mit 2 anderen Feldern rösseln. — Wir haben in unserer Figur den auf dem Schachbrett üblichen Unterschied zwischen schwarzen und weißen Feldern nicht gemacht und werden auch in den weiteren Figuren hiervon absehen; der Leser erkennt jedoch auch so, daß, wenn unser in Fig. 28 schraffiertes Feld auf dem Schachbrett etwa schwarz ist, alle 8 Felder, die sich damit rösseln, weiß sind und umgekehrt. Der Springer wechselt also mit jedem Zuge die Farbe des Feldes: steht er jetzt auf einem weißen Felde, so gelangt er durch den nächsten Zug, den er tut, sicher auf ein schwarzes, von dort wieder auf ein weißes usw.

Das erste Feld eines Rösselsprungs nennen wir „Anfangs=“ oder „Ausgangsfeld“, das letzte „Schlußfeld“, beide gemeinsam die „Endfelder“. Rösseln sich Ausgangs= und Schlußfeld, so daß man also von dem Schlußfeld durch einen Springerzug wieder zu dem Ausgangsfeld zurückkehren kann, so nennt man den Rösselsprung „geschlossen“, anderenfalls „ungeschlossen“ oder „offen“.

§ 2. Beispiele von Rösselsprüngen.

Die Anzahl aller überhaupt möglichen verschiedenen Rösselsprünge ist bisher nicht ermittelt; jedenfalls ist sie aber ganz außerordentlich groß. Wir können hier natürlich nur einzelne wenige Beispiele herausgreifen, und zwar wollen wir mit dem ersten Beispiel, das wir geben, der im vorigen Paragraphen angegebenen historischen Entwicklung unseres Problems insofern Rechnung tragen, als wir fordern, daß bei unserem Rösselsprung zunächst die eine Bretthälfte für sich allein ganz abgelaufen werde und dann erst die andere an die Reihe komme. Ein solcher „zweiteiliger“ Rösselsprung, wie man sagt, ist der von Euler herrührende der Fig. 29. Die Felder werden dabei

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Fig. 29.

in der Reihenfolge vom Springer durchlaufen, wie die hineingeschriebenen Zahlen dies angeben, also zunächst die ganze untere Bretthälfte und dann erst die obere.

Unser Rösselsprung ist übrigens auch „geschlossen", d. h. ermöglicht einen Übergang von dem Schlußfeld zum Ausgangsfeld zurück, da die Felder 64 und 1 sich rösseln. Mit der Existenz eines geschlossenen Rösselsprungs ist zugleich der Nachweis erbracht, daß auch bei beliebigem Ausgangsfeld stets ein Rösselsprung, und zwar sogar ein geschlossener, existiert. Um z. B. einen solchen mit 19 als Anfangsfeld zu erhalten, braucht man ja in Fig. 29 nur die Felder 19—64 in alter Weise zu durchlaufen, von 64 zu 1 zu gehen und dann die Felder 1—19 wieder in alter Weise zu durchlaufen. Es ist damit sogar gezeigt, daß es bei beliebigem Ausgangsfeld sogar mindestens 2 Rösselsprünge gibt, da jeder geschlossene Rösselsprung natürlich eine Durchlaufung der Felder in zwiefacher Reihenfolge gestattet, z. B. unser ursprünglicher (Fig. 29) neben der Durchlaufung im angegebenen Sinne (1, 2, 3 ... 64, 1) auch die in umgekehrtem Sinne (1, 64, 63 . . . 2, 1).

Die Diagramme der weitaus meisten Rösselsprünge bieten natürlich ein durchaus unregelmäßiges Aussehen, und eine vollständige Symmetrie ist aus Gründen, die in der Natur der Aufgabe liegen, überhaupt nicht zu erreichen. Die Rösselsprungkomponisten haben jedoch vielfach auch den ästhetischen Rücksichten soweit wie möglich Rechnung getragen und sind hierbei zu hübschen Resultaten gelangt. Einige der bemerkenswertesten Beispiele dieser Art geben die umstehenden Figuren 30—35 wieder, von denen Fig. 30 ein Kreuz, Fig. 31 ein N (Napoléon), Fig. 32 ein vierfaches W (Wij Willen Wilhelmus Wederom), Fig. 33 ein doppeltes V (Vivat Victoria) im Wappen führt, während Fig. 34 als Ganzes eine Art Vase darstellt und Fig. 35 im Innern eine Art Blume und auch sonst schöne Symmetrie zeigt. Alle diese Rösselsprünge sind „geschlossen", nur der letzte ist „offen".

§ 3. Einige Methoden zur Bildung von Rösselsprüngen.

I.

Eine für praktische Zwecke sehr geeignete Vorschrift zur Bildung von Rösselsprüngen ist die folgende:

„Bei jedem Springerzuge wähle man unter den verschiedenen Feldern, die durch diesen Zug überhaupt zu errei-

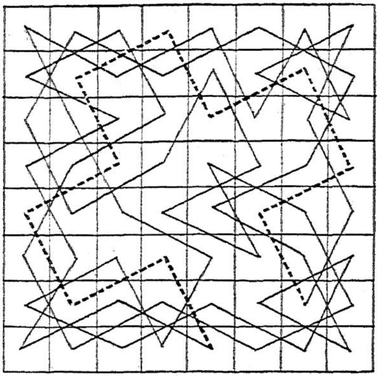


Fig. 30.

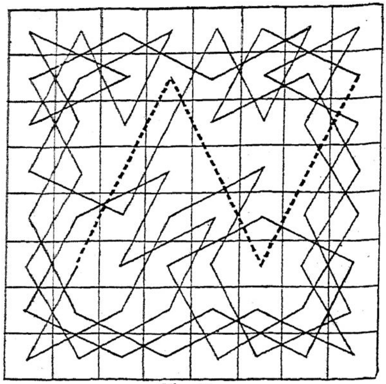


Fig. 31.

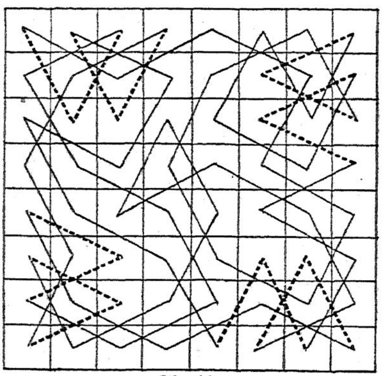


Fig. 32.

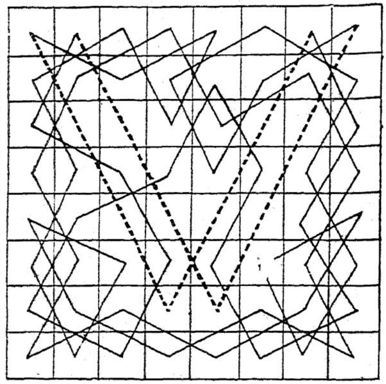


Fig. 33.

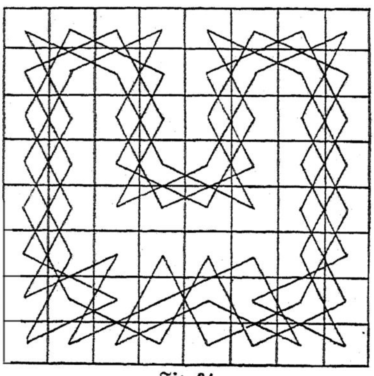


Fig. 34.

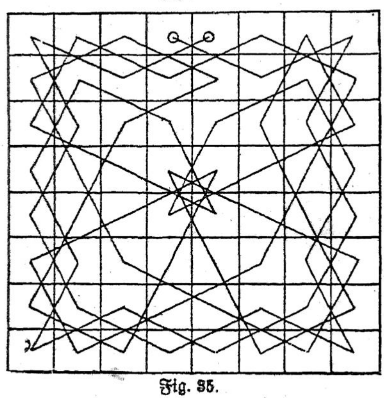


Fig. 35.

chen sind, dasjenige, von dem am wenigsten Springerzüge nach unbesetzten Feldern hin noch möglich sind, da hier die Gefahr, das betreffende Feld nicht wieder zu erreichen und es somit ganz auszulassen, verhältnismäßig am größten ist, während natürlich diejenigen Felder, die noch mit einer größeren Zahl von freien Feldern sich rösseln, eher von einem dieser aus später noch erreicht werden können. Stehen hiernach mehrere Felder (mit einer gleichen Mindestzahl von freien Ausgängen) zur Wahl, so wähle man unter ihnen beliebig."

Die praktische Brauchbarkeit dieser Regel ist so groß, daß sie selbst bei ganz willkürlich angefangenen und schon ziemlich weit ohne Beachtung der Regel fortgesetzten Rösselsprüngen noch zum Ziele führt. Es möge z. B. der Rösselsprung über 40 Felder bereits willkürlich und mehrfach im Widerspruch zu unserer Regel so, wie Fig. 36 angibt, geführt sein; die Beachtung unserer Regel für die weitere Fortsetzung liefert uns alsdann dennoch eine Vervollständigung des Rösselsprungs, wie die umstehende Fig. 37 dies angibt.

Die Art, wie der Rösselsprung der Fig. 37 aus Fig. 36 unter Anwendung unserer Regel entstanden ist, mag noch durch folgende Ausführungen näher erläutert werden, wobei wir die Felder des Schachbretts der Einfachheit wegen mit den Zahlen der Fig. 37 bezeichnen wollen: Von Feld 40, dem Endpunkt unserer anfänglichen planlosen Wanderung (Fig. 36), sind außer dem Feld 41 noch folgende bisher leer gebliebene Felder erreichbar: 43, 45, 59 und 49. Von diesen besitzt das Feld 43 noch drei offene Ausgänge, nämlich nach 42, 44 und 60; Feld 45 hat gleichfalls drei solcher Ausgänge, nämlich nach 44, 58 und 46, und ebensoviel Ausgänge besitzt auch jedes der Felder 59 und 49. Dagegen

	21	34	9		19	32	7
35	10		20	33	8		18
22						6	31
11	36					17	
	23			40		30	5
37	12	25		27			16
24		2	39	14		4	29
1	38	13	26	3	28	15	

Fig. 36.

54	21	34	9	58	19	32	7
35	10	55	20	33	8	57	18
22	53	64	59	56	45	6	31
11	36	49	46	63	60	17	44
50	23	52	61	40	47	30	5
37	12	25	48	27	62	43	16
24	51	2	39	14	41	4	29
1	38	13	26	3	28	15	42

Fig. 37.

hat Feld 41 nur noch zwei offene Ausgänge, nämlich nach 42 und 48. Wir erhalten also in unzweideutiger Weise 41 als dasjenige aller in Betracht kommenden Felder, das am wenigsten freie Ausgänge besitzt, und müssen daher nach unserer Regel von 40 auf 41 springen. — Für den nächsten Zug kommen in Frage die Felder 42 und 48. Von diesen hat das zweite jetzt noch vier freie Ausgänge, nämlich nach 47, 63, 49 und 51; dagegen hat 42 nur einen Ausgang, nämlich nach 43. Wir müssen also unbedingt 42 wählen. Würden wir dies nicht tun, sondern von 41 zu 48 gehen so könnten wir späterhin zu 42 nur noch von 43 aus gelangen, aber 42 nicht mehr verlassen. Feld 42 würde also entweder ganz ausfallen oder es könnte höchstens noch Schlußfeld des Rösselsprungs werden. — Von 43 aus kann man zu 44 und 60 gelangen, und zwar haben diese beiden Felder je drei freie Ausgänge; man kann also der Regel gemäß zwischen 44 und 60 beliebig wählen. Entscheidet man sich, wie wir tun wollen, für 44, so führt die weitere Wanderung notwendig zu Feld 45, da dieses nur zwei freie Ausgänge hat, während die daneben zur Wahl stehenden Felder 47 und 57 deren je drei besitzen. In dieser Weise setzt sich das Verfahren fort.

Frage 17: Gehe von dem linken der beiden Endfelder der Fig. 35 aus, wähle auch die nächsten 36 Felder ebenso wie in dieser Figur und setze die Wanderung von da ab nach der eben besprochenen Regel fort!

II.

Während die soeben angegebene Methode, so wertvoll sie für Vervollständigung bereits angefangener Rösselsprünge ist, der strengen theoretischen Begründung entbehrt und daher auch nicht notwendig

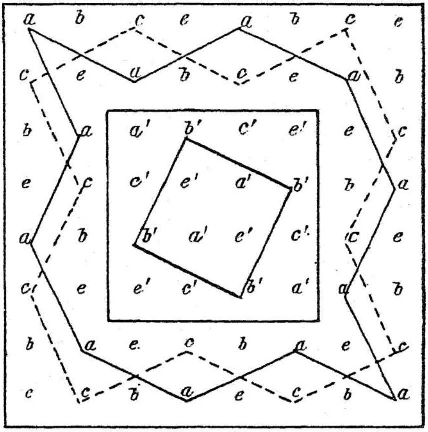


Fig. 38.

zum Ziele zu führen braucht, wenn dies im allgemeinen auch der Fall sein wird, mögen jetzt noch zwei andere Methoden besprochen werden, die sich zwar nicht einem beliebigen Anfang anpassen, dafür aber die Bildung eines Rösselsprungs von Anfang an in recht übersichtlicher Weise lehren. Bei der einen Methode denkt man sich das Schachbrett geteilt in ein inneres Quadrat von 16 und ein Randgebiet von 48 Feldern (s. Fig. 38), und weiter die Felder jedes dieser 2 Teile wieder in 4 Klassen, und zwar so, daß sich die Felder derselben Klasse stets hintereinander mit dem Springer durchlaufen lassen. In Fig. 38 ist diese Einteilung so veranschaulicht, daß die Felder derselben Klasse dieselbe Bezeichnung tragen und für einige Klassen die betreffenden Ketten von Springerzügen gezeichnet sind. Wir haben im ganzen 8 Ketten von Springerzügen: 4 innere (wir nennen sie kurz: a′, b′, c′, e′) von je 4 Feldern und 4 äußere (a, b, c, e) von je 12 Feldern.

Die Methode besteht nun darin, die 8 Ketten aneinanderzureihen in der Weise, daß immer eine innere Kette mit einer äußeren abwechselt, wobei alle Folgen zulässig sind außer solchen von gleichen Buchstaben, also außer aa′, bb′, cc′, ee′, zwischen denen eben ein Übergang nicht möglich ist. So erhält man einen brauchbaren Rösselsprung beispielsweise aus dem Schema ae′cb′ea′bc′, nämlich den umstehend in Fig. 39 angegebenen.

Bei der eben besprochenen Methode faßten wir die 16 Felder des inneren Quadrats zu Gruppen von je 4 oder „Quadrupeln“, wie wir sagen wollen, zusammen. Zwei dieser Quadrupel bildeten die Figur eines Quadrats (b′ und c′), die beiden anderen (a′ und e′) die eines Rhombus. Diese selbe Einteilung wollen wir nun für das ganze Schachbrett durchführen, indem wir dieses zunächst in 4 gleiche

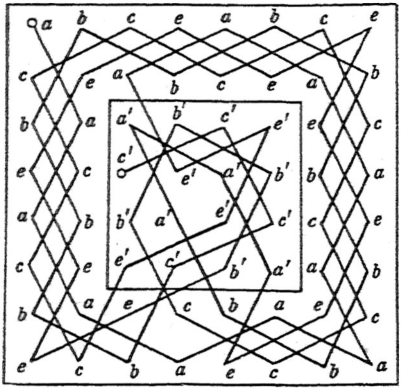


Fig. 39.

Teile (Quadranten), jeden aus 16 Feldern bestehend, teilen und darauf in jedem dieser Quadranten die Felder zu Quadrupeln zusammenfassen. Die 4 Felder, die zu demselben Quadrupel gehören, sollen dieselbe Bezeichnung erhalten, z. B. alle vier ein a oder ein C oder ein E′ usw. (s. Fig. 40). Die entsprechend gelegenen Quadrupel in den 4 Quadranten mögen durch dieselbe Buchstabenart bezeichnet, jedoch untereinander durch kleine und große Buchstaben und Strichelung dieser unterschieden werden, also z. B. als A, a, A′, a′. Dabei mögen die Quadrupel, die die Figur eines Rhombus bilden, durch Vokale (A und E), die von der Figur eines Quadrats durch Konsonanten (B und C) bezeichnet werden.

Man kann nun die Quadrupel desselben Buchstabens aneinanderreihen. Zeichnen wir z. B. die 4 Rhomben A, a, A′, a′, so sehen wir, daß wir diese zu einem zusammenhängenden Zuge verbinden können, indem wir in allen 4 Rhomben je eine Seite fortnehmen und durch einen Verbindungsspringerzug ersetzen, wobei die 4 fortgenommenen Seiten einander parallel sind. Für die fortzunehmende Seite können offenbar in jedem Rhombus nur 2 in Betracht kommen, nämlich die nach den benachbarten Quadranten zu liegenden, und man erhält so die 4 Quadrupel A, a, A′, a′ auf zwei Arten

A	B	C	E	a	b	c	e
C	E	A	B	c	e	a	b
B	A	E	C	b	a	e	c
E	C	B	A	e	c	b	a
a′	b′	c′	e′	A′	B′	C′	E′
c′	e′	a′	b′	C′	E′	A′	B′
b′	a′	e′	c′	B′	A′	E′	C′
e′	c′	b′	a′	E′	C′	B′	A′

Fig. 40.

zu einem „Zuge“ vereinigt, wie Fig. 41 dies angibt.

Wir bekommen also zwei Züge A, wie wir kurz sagen wollen, zwei Züge B, zwei C und zwei E. Die Züge A und E — wir wollen sie „Vokalzüge“ nennen — setzen sich aus Rhomben zusammen, die Züge B und C, die „Konsonantenzüge“, aus Quadraten. Es handelt sich jetzt, um einen vollständigen Rösselsprung zusammenzusetzen, nur noch darum, 4 Züge, nämlich je einen von A, von B, von C und von E, aneinanderzureihen. Dabei ist nur zu beachten, daß man von einem Vokalzug zu einem anderen Vokalzug, also von A zu E, nicht übergehen kann und ebensowenig von einem Konsonantenzug zu einem anderen solchen; denn, wie der Leser aus Fig. 40 sofort ersieht, rösselt kein Feld A, a, A′, a′ sich mit einem Felde E, e, E′, e′, und das Entsprechende gilt für die durch Konsonanten bezeichneten Felder. Dagegen kann man von einem Vokalzug zu einem Konsonantenzug überspringen, also die 4 Züge von je 16 Feldern etwa in der Reihenfolge ABEC aneinanderreihen, wodurch man einen vollständigen Rösselsprung erhält, wie die umstehende Fig. 42 für diesen Fall durch die hinzugesetzten Zahlen angibt.

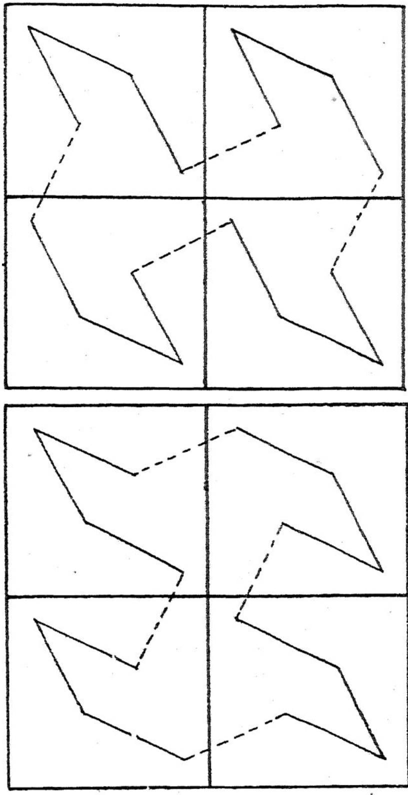


Fig. 41.

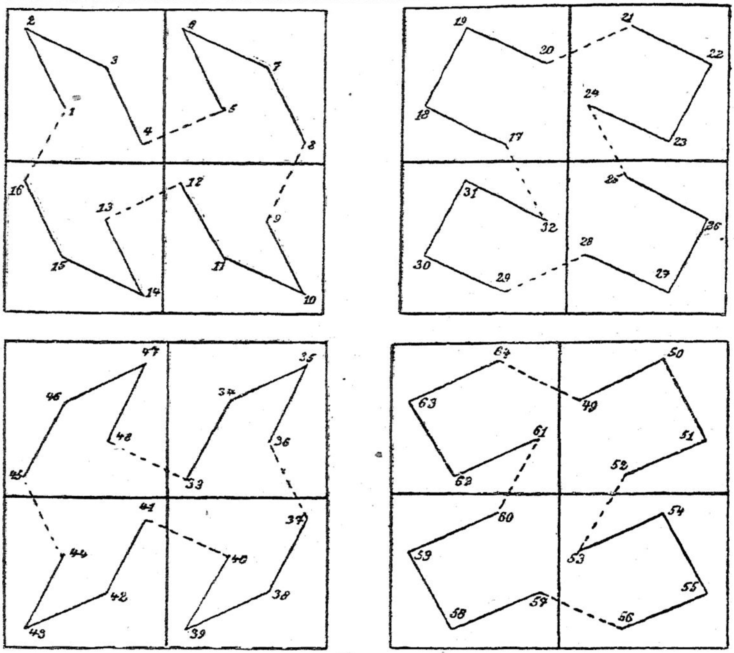


Fig. 42.

Natürlich lassen sich auch Rösselsprünge für andere quadratische oder rechteckige oder andersartig geformte Bretter angeben, wenn dies auch nicht unter allen Umständen möglich ist. Auf diese Fragen kann hier jedoch nicht näher eingegangen werden, und ebensowenig auf die Rösselsprünge in dreidimensionalen Gebieten („kubische Rösselsprünge").

§ 4. Magische Rösselsprünge.

Eine besonders kunstvolle Form der Rösselsprünge bilden diejenigen, bei denen die Ziffern, welche die Reihenfolge der Felder angeben, in jeder horizontalen und in jeder vertikalen Reihe eine konstante Summe ergeben. Solche Rösselsprünge, die danach also die Haupteigenschaft der im nächsten Kapitel (VIII) zu besprechenden „magischen Quadrate" aufweisen und daher „magische" resp. „semimagische"

Rösselsprünge genannt werden[1]), sind von verschiedenen Liebhabern konstruiert. — Soll, wie gesagt, die Summe in allen horizontalen und vertikalen Reihen konstant sein, so ergibt sich für sie nach einer leichten Rechnung der Wert 260.

Der nebenstehende (Fig. 43), von dem russischen Schachtheoretiker C. F. von Jaenisch herrührende Rösselsprung ist besonders kunstvoll: er besitzt nicht nur die geforderte Eigenschaft, sondern ist auch geschlossen und zudem symmetrisch, da die erste Hälfte (1—32) durch Drehung des Bretts um 180° in die zweite (33—64) übergeht; außerdem läßt er sich in zwei geschlossene halbe Rösselsprünge von je 32 Feldern zerlegen, da 1 und 32 einerseits und 33 und 64 anderseits sich rösseln.

50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38	260
10	49	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Fig. 43.

Kapitel VIII.

Magische Quadrate.

§ 1. Einleitung.

Auf seinem bekannten Kupferstich „Melencolia", dem Titelbild unseres Bändchens, hat Albrecht Dürer, selbst ein bedeutender Mathematiker und Verfasser eines geometrischen Werkes, die allegorische Figur der mathematisch-technischen Forschung, umgeben von stereometrischen Körpern (Kugel, Polyeder) und allerlei Werkzeugen zum Messen, Wägen, Zeichnen usw., in einer augenblicklichen Anwandlung dumpfen, melancholischen Hinbrütens und Grübelns dargestellt. Neben der durch Polyeder und Kugel verkörperten Geometria fehlt auch deren Schwester, die Arithmetica, nicht. Erblicken wir doch zu Häupten

1) Sie sind, im Sinne des nächsten Kapitels gespochen, nicht vollkommen „magisch", da ihre Diagonalreihen versagen. Vollkommen magische Rösselsprünge scheinen überhaupt nicht möglich zu sein und konnten bisher jedenfalls trotz vielfacher Bemühungen nicht hergestellt werden.

der weiblichen Gestalt ein Zahlenquadrat, das der besseren Deutlichkeit halber hier nochmals, in Fig. 44, wiedergegeben sei. Es weist in seinen 16 Zellen die Zahlen von 1 bis 16 auf, von denen wir die beiden Mittelzahlen der untersten Zeile hier in Fettdruck wiedergeben, da sie zugleich das Jahr, dem der Kupferstich angehört, 1514, nennen. Die Anordnung der 16 Zahlen in dem Quadrat ist nun eine solche, daß, wenn wir die Zahlen irgendeiner Horizontalreihe oder „Zeile" — z. B. der dritten: 9, 6, 7, 12 — zusammenzählen, wir stets die Summe 34 erhalten. Dieselbe Summe bekommen wir aber auch, wenn wir die Zahlen irgendeiner Vertikalreihe oder „Spalte" — z. B. die der ersten links: 16, 5, 9, 4 — addieren. Ja, selbst die beiden Diagonalreihen, nämlich 16, 10, 7, 1 und ebenso 13, 11, 6, 4, ergeben die nämliche Summe 34. — Man bezeichnet solche Zahlenquadrate, die eine konstante Summe in allen horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihen ergeben, als „magische Quadrate".[1]) Die in den angegebenen Reihen übereinstimmend sich ergebende Summe heißt die „Konstante" des magischen Quadrats. Hinsichtlich der in den Feldern eines solchen magischen Quadrats stehenden Zahlen wollen wir hier stets voraussetzen, daß sie eine Reihe unmittelbar aufeinander folgender ganzer Zahlen — in dem Dürerschen Quadrat sind es 1, 2, . . . 16 — bilden, und zwar soll diese Reihe, wofern nichts anderes gesagt ist, als mit 1 beginnend angenommen werden. Oft ergibt sich übrigens die betreffende „Konstante" nicht nur in den angegebenen Reihen, sondern auch noch auf mancherlei andere Weise; so können wir z. B. das Dürersche Quadrat in vier Viertelquadrate, jedes also von 4 Feldern, zerteilen, und jedes Viertel weist alsdann für sich die Zahlensumme 34 auf; ferner ergibt das Quadrat der 4 inneren Zahlen 34 und ebenso die 4 Eckzahlen zusammen; ferner das Quadrat des Springer-Viererzugs[2]) 5, 2, 12, 15 resp. 3, 8, 14, 9 oder die entsprechenden Rhomben 16, 11, 1, 6 und 13, 10, 4, 7 usw. Man sieht, die Eigenschaften dieser Zahlenquadrate sind so merkwürdige, daß eine zu Mystik und

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

Fig. 44.

1) Vgl. auch den letzten Paragraphen des vorhergehenden Kapitels: „Magische Rösselsprünge".

2) Vgl. Kap. VII, § 3, II, insbesondere die Figuren 38, 41, 42.

Aberglauben neigende Zeit sie wohl in Verbindung mit allerlei „magischen" Künsten bringen und sie für mancherlei derartige Zwecke verwerten zu sollen glauben konnte. Von diesem Gebrauch, der die geschichtliche Erklärung für den Namen „magische Quadrate" gibt werden wir in § 5 noch zu sprechen haben.

§ 2. Das neunzellige magische Quadrat.

Das 16-zellige Dürersche Quadrat stellt noch nicht den einfachsten Fall magischer Quadrate dar, vielmehr gibt es auch solche von $3 \times 3 = 9$ Zellen, während allerdings magische Quadrate von $2 \times 2 = 4$ Zellen ausgeschlossen sind, wie der Leser leicht erkennt. Wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, ein neunzelliges magisches Quadrat zu bilden, also die Aufgabe, die Zahlen 1, 2 ... 9 so in die Zellen der Fig. 45 einzuordnen, daß in den angegebenen Reihen stets eine und dieselbe konstante Summe sich ergibt. Welche Summe wird das sein? — so lautet die Vorfrage, die wir uns zunächst vorlegen. Die Antwort erhalten wir am schnellsten, wenn wir die 9 Zahlen zweimal untereinander, jedoch in verschiedener Richtung, hinschreiben, also so:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fig. 45.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Je zwei untereinanderstehende Zahlen ergeben stets die Summe 10, beide Reihen zusammen also 90, jede Reihe für sich daher 45. 45 ist somit die Summe unserer 9 Zahlen; diese sollen sich nun in unserem neunzelligen Quadrat (Fig. 45) auf 3 Zeilen resp. 3 Spalten verteilen, so daß auf jede Zeile resp. Spalte als konstante Summe 15 entfällt.

Es handelt sich also darum, die 9 Zahlen 1 bis 9 so in die Felder des Quadrats einzuordnen, daß dieses in 8 verschiedenen Reihen — 3 Zeilen, 3 Spalten und 2 Diagonalen — die „Konstante" 15 aufweist. Man überzeugt sich nun leicht, daß es für die Bildung der Summe 15 aus je 3 der Zahlen 1—9 folgende 8 Möglichkeiten, und auch nur diese 8, gibt:

$$\begin{array}{llll} 1, 5, 9; & 1, 6, 8; & 2, 4, 9; & 2, 5, 8; \\ 2, 6, 7; & 3, 4, 8; & 3, 5, 7; & 4, 5, 6. \end{array}$$

In diesen 8 „Tripeln" kommt nun die Zahl 5 häufiger als irgendeine andere Zahl, nämlich viermal, vor, und daraus folgt sofort, daß

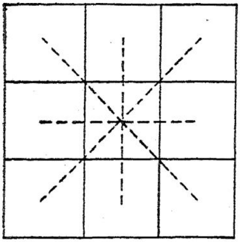


Fig. 46.

die Zahl 5 notwendig das Mittelfeld des zu bildenden magischen Quadrats einnehmen muß; denn das Mittelfeld gehört nicht weniger als 4 solchen Reihen, die die Konstante 15 ergeben sollen, — es sind die in der Fig. 46 markierten — an. Da nun ferner unsere 8 „Tripel“ die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 je dreimal, die ungeraden 1, 3, 7, 9 dagegen nur je zweimal aufweisen, so müssen die 4 Eckfelder des magischen Quadrats, da sie 3 Reihen — einer Zeile, einer Spalte und einer Diagonale — von der Konstanten 15 angehören sollen, mit den 4 geraden Zahlen besetzt werden, während die übrigen 4 Felder, die Mittelrandfelder, von den ungeraden Zahlen 1, 3, 7, 9 eingenommen werden. Denkt man sich nun etwa das Eckfeld oben links mit der Zahl 2 besetzt, so muß in dem Eckfeld unten rechts, damit die Diagonale die Konstante 15 ergibt, die Zahl 8 stehen. Für die beiden anderen Eckfelder bleiben dann die Zahlen 4 und 6. Legt man diese fest, besetzt man also etwa das Eckfeld oben rechts mit 4, so sind damit offenbar auch die Zahlen der Mittelrandfelder bestimmt, und man bekommt so das magische Quadrat der Fig. 47.

Man erkennt so leicht, daß unsere Aufgabe 8 Lösungen besitzt: Jede der 4 Zahlen 2, 4, 6, 8 kann das Eckfeld oben links einnehmen, womit auch zugleich die Zahl für das Eckfeld unten rechts festgelegt ist, während für die Ecke oben rechts dann jedesmal noch zwei Möglichkeiten bestehen. — Man kann sich aus der Lösung Fig. 47 die übrigen 7 Lösungen auf folgende Weise hervorgehend denken: Dadurch, daß man sich das ganze Quadrat um 90°, 180°, 270° gedreht denkt, erhält man zunächst drei weitere magische Quadrate, so daß man also jetzt über deren 4 im ganzen verfügt. Von diesen 4 Quadraten denken wir uns nun jedes an einer spiegelnden Fläche, die sich etwa am unteren Rande des Quadrats befinden mag, gespiegelt, und erhalten so 4 weitere magische Quadrate, so daß wir im ganzen die versprochenen 8 haben. Andererseits ist damit aber auch die Zahl aller erschöpft. In der Regel pflegt man solche nur durch Drehungen oder Spiegelungen sich ergebenden Figuren nicht als wesentlich verschieden von der Stamm-

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Fig. 47.

figur anzusehen, und in diesem Sinne dürfen wir sagen, daß es nur ein magisches Quadrat der Zahlen 1 bis 9 gibt.

Frage 18: An der Villa Albani in Rom befindet sich, in Marmor hergestellt, ein magisches Quadrat von 9×9 Feldern, das somit die Zahlen 1 bis 81 aufweist. Welches wird die Konstante dieses magischen Quadrats sein?

§ 3. Allgemeine Methode für Bildung ungeradzelliger magischer Quadrate.

Quadrate von mehr als 4 Zellen lassen sich stets mit den entsprechenden Zahlen so ausfüllen, daß ein magisches Quadrat entsteht, und zwar ist diese Aufgabe bei ungerader Zellenzahl wesentlich leichter als bei gerader. Wir wollen uns daher mit dem ersteren Fall näher beschäftigen und eine allgemein zur Bildung von ungeradzelligen magischen Quadraten anwendbare Methode besprechen, wobei wir uns an ein bestimmtes Beispiel, das eines Quadrats von 5×5 Zellen, halten wollen. Die 25 Zahlen, die wir in die Zellen des Quadrats einzuordnen haben, wollen wir zunächst in folgender Anordnung schreiben:

„Schema".

$1 = \qquad 1$	$2 = \qquad 2$	$3 = \qquad 3$	$4 = \qquad 4$	$5 = \qquad 5$
$6 = 1 \times 5 + 1$	$7 = 1 \times 5 + 2$	$8 = 1 \times 5 + 3$	$9 = 1 \times 5 + 4$	$10 = 1 \times 5 + 5$
$11 = 2 \times 5 + 1$	$12 = 2 \times 5 + 2$	$13 = 2 \times 5 + 3$	$14 = 2 \times 5 + 4$	$15 = 2 \times 5 + 5$
$16 = 3 \times 5 + 1$	$17 = 3 \times 5 + 2$	$18 = 3 \times 5 + 3$	$19 = 3 \times 5 + 4$	$20 = 3 \times 5 + 5$
$21 = 4 \times 5 + 1$	$22 = 4 \times 5 + 2$	$23 = 4 \times 5 + 3$	$24 = 4 \times 5 + 4$	$25 = 4 \times 5 + 5$

Untereinander stehen hierbei immer diejenigen Zahlen, die bei Division durch 5 denselben Rest lassen: in der ersten Spalte alle mit Rest 1, in der zweiten alle mit Rest 2 usw., schließlich in der letzten alle mit Rest 0, jedoch ist hier aus später erkennbaren Zweckmäßigkeitsgründen so geschrieben, daß 5 als Rest erscheint. In derselben Zeile stehen dagegen alle diejenigen Zahlen, die ein gleiches Vielfaches von 5 aufweisen: in der ersten diejenigen ohne ein solches Vielfaches, in der zweiten diejenigen mit einmal 5, in der dritten diejenigen mit dem Doppelten von 5, in der vierten diejenigen mit dem Dreifachen von 5, schließlich in der letzten diejenigen mit dem Vierfachen von 5. Wir werden hiernach späterhin eine weitere Erläuterung zu geben nicht nötig haben, wenn wir kurz von den „Resten" und den „Vielfachen" unseres „Schema" sprechen.

Als Vorstufe zur Bildung eines magischen Quadrats wollen wir uns nun zunächst einmal die folgende, sehr viel leichtere Aufgabe stellen: Die 25 Zahlen sind in die 25 Zellen so einzureihen, daß alle Horizontalreihen (Zeilen) die gleiche Summe ergeben. Diese Summe muß, wie vorwegbemerkt sei, offenbar $\frac{26 \times 25}{2 \times 5} = 65$ sein (vgl. die Berechnung auf S. 75). Unsere Teilaufgabe ist deshalb viel leichter als die Hauptaufgabe, weil über die Summen der Vertikal- und Diagonalreihen jetzt nichts vorgeschrieben ist und es sich also nur darum handelt, die 25 Zahlen so auf 5 Zeilen von je 5 Plätzen zu verteilen, daß sich die zwischen den Zahlen bestehenden Größenunterschiede für die einzelnen Zeilen gegenseitig das Gleichgewicht halten, also in jeder Zeile die Summe dieselbe wird. Eine solche Verteilung erhält man nun, wenn man aus unserer obigen Anordnung des „Schema“ immer je 5 Zahlen so herausgreift, daß *niemals zwei dieser 5 Zahlen derselben Zeile oder Spalte* des Schema angehören. Man bekommt nämlich, wenn zunächst die 5 gewählten Zahlen alle verschiedenen Spalten des „Schema“ angehören, jeden der 5 „Reste“, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, gerade einmal; die Zugehörigkeit zu den verschiedenen *Zeilen* des „Schema“ würde andererseits zur Folge haben, daß jedes „Vielfache“ von 5: das Nullfache, Einfache, Doppelte, Dreifache, Vierfache, gerade einmal vorkommt. Als Beispiel braucht man nur die Zahlen der einen Diagonalreihe des „Schema“ zu nehmen, da diese natürlich alle zu verschiedenen Zeilen und Spalten des Schema gehören, also:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 7 &= 1 \times 5 + 2 \\ 13 &= 2 \times 5 + 3 \\ 19 &= 3 \times 5 + 4 \\ 25 &= 4 \times 5 + 5 \end{aligned}$$

Alle „Vielfachen“ von 5 und alle 5 „Reste“ sind in dieser Gruppe vertreten, und es lassen sich offenbar aus allen 25 Zahlen 5 solche Gruppen bilden. In der Summe der Zahlen jeder Gruppe käme alsdann jedes „Vielfache“ und jeder „Rest“ gerade einmal vor; die 5 Zahlen jeder Gruppe ergäben also stets dieselbe Summe, nämlich die Summe aller „Vielfachen“ und aller „Reste“, d. h. $(1 \times 5 + 2 \times 5 + 3 \times 5 + 4 \times 5) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$; das ist aber natürlich unsere „Konstante“ 65.

Eine zweite Gruppe von 5 solchen Zahlen wäre z. B.

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 8 &= 1 \times 5 + 3 \\ 14 &= 2 \times 5 + 4 \\ 20 &= 3 \times 5 + 5 \\ 21 &= 4 \times 5 + 1 \end{aligned}$$

Diese Zahlen enthalten jeden „Rest“ gerade einmal und ebenso jedes „Vielfache“, und ihre Summe ist daher wieder 65.

Eine dritte, weniger übersichtlich ausgewählte Gruppe wäre z. B.

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ 10 &= 1 \times 5 + 5 \\ 12 &= 2 \times 5 + 2 \\ 16 &= 3 \times 5 + 1 \\ 24 &= 4 \times 5 + 4 \end{aligned}$$

Auch diese Gruppe weist alle „Vielfachen" und alle „Reste" auf oder, mit anderen Worten: von den 5 Zahlen der Gruppe gehören nie zwei derselben Zeile oder Spalte des „Schema" an. — Wir können nun leicht aus den noch übrigen 10 Zahlen 2 weitere Gruppen dieser Art bilden und erhalten so, wenn wir die Zahlen einer Gruppe immer in eine Zeile schreiben, beispielsweise folgende Anordnung unserer 25 Zahlen nach 5 Gruppen bzw. Zeilen:

1	7	13	19	25
2	8	14	20	21
3	10	12	16	24
4	6	15	18	22
5	9	11	17	23

Damit haben wir ein Quadrat erhalten, das in bezug auf die Zeilen der Bedingung der magischen Quadrate genügt, stets die betreffende „Konstante" (für unseren Fall 65) zu ergeben. Daß die Bedingung in den Zeilen erfüllt ist, folgt, wie wiederholt hervorgehoben werden mag, sofort aus der Tatsache, daß von den in einer Zeile zusammenstehenden Zahlen niemals zwei derselben Horizontalen oder Vertikalen des „Schema" angehören. In den Spalten dagegen weist unser Quadrat die „Konstante" natürlich nicht auf, und es wird sich dies im allgemeinen auch durch Umstellen der Zahlen jeder Zeile untereinander, wenigstens in einfacher Weise, nicht erreichen lassen, da wir bei Auswahl der Zahlen unserer 5 Gruppen ziemlich unmethodisch verfahren sind. Man könnte jedoch natürlich ebenso, wie wir hier ein Quadrat gebildet haben, das in allen Zeilen die Konstante ergibt, ein solches bilden, bei dem dies für alle Spalten gilt, und brauchten ja übrigens zu dem Zwecke das obige nur um 90° zu drehen. — Näher unserem schließlichen Ziel, dem magischen Quadrat, gelangen wir jedoch nur, wenn es uns gelingt, die 25 Zahlen so anzuordnen, daß nicht nur in jeder Zeile, sondern zugleich auch in jeder Spalte alle „Reste" und alle „Vielfachen" vertreten sind. Zu dem Zwecke tragen wir die Zahlen des „Schema" in ein aus einem 25-zelligen Quadrat mit 4 angesetzten „Terrassen" I—IV bestehendes Feldernetz so ein, wie Fig. 48 dies veranschaulicht: Die Zahlen der ersten Zeile des „Schema" (1, 2, 3, 4, 5) stehen in Fig. 48 in der ersten von links nach oben rechts verlaufenden schrägen Felderreihe; dann kommen entsprechend in paralleler Felderreihe die Zahlen der zweiten Zeile des „Schema" (6, 7, ... 10), und so geht es weiter fort. Das Verfahren besteht nun darin, daß

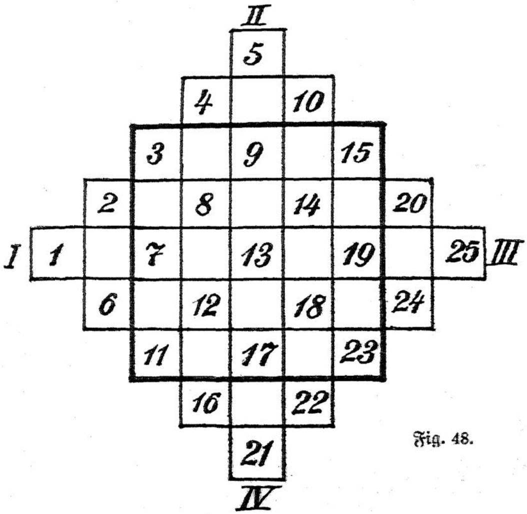


Fig. 48.

die Terrassen so weit in das Quadrat hineingeschoben werden, daß ihre Basis mit der gegenüberliegenden Quadratseite zusammenfällt. Hierdurch gelangen die in den Terrassen stehenden Zahlen in die noch leeren Felder des Quadrats und füllen dieses aus. Das entstehende Quadrat (s. Fig. 49) ist dann ein magisches.

Die Zeilen und Spalten des so gebildeten Quadrats genügen unserer Forderung deswegen, weil jede Zeile und jede Spalte des Quadrats (Fig. 49) alle „Reste" und alle „Vielfachen" aufweist. Fassen wir z. B. in Fig. 48 die Zahlen 6, 7, 8, 9, 10 ins Auge, so gehören davon 7, 8, 9 den 3 obersten Zeilen des Quadrats der 25 Felder an, 6 kommt später bei der Terrassenverschiebung in die dann folgende Zeile, nämlich in die vierte, während die Zahl 10 aus Terrasse II in die letzte Zeile, die fünfte, gelangt. Die Zahlen 6, 7, 8, 9, 10, die das Gemeinsame haben, daß sie alle und sie allein in unserem „Schema" das „Einfache" von 5 enthalten, verteilen sich also auf 5 verschiedene Zeilen des fertigen Quadrats der Fig. 49. Jede Zeile des Quadrats erhält somit das „Einfache" von 5 gerade einmal zuerteilt. — Ebenso sehen wir aus Fig. 48, daß die 5 Zahlen 6, 7, 8, 9, 10 sich auf 5 verschiedene Spalten des Quadrats Fig. 49 verteilen (7, 8, 9 stehen in den 3 ersten, 10 gelangt in die vierte, 6 dagegen bei Verschiebung von Terrasse I in die letzte Spalte). Es erhält somit auch jede Spalte das „Einfache" von 5 gerade einmal zuerteilt. — Natürlich hätten wir ebensogut auch eine andere Reihe der Zahlen in Fig. 48 herausgreifen können, z. B. 21, 22, 23, 24, 25, also die Zahlen, die sämtlich und allein unter allen Zahlen in der Anordnung des „Schema" das „Vier=

fache“ von 5 enthalten. Wir würden alsdann aus Fig. 48 erkannt haben, daß auch diese Zahlen sich über 5 verschiedene Zeilen und Spalten des Quadrats Fig. 49 verteilen, so daß jede Zeile und jede Spalte des Quadrats Fig. 49 das „Vierfache“ von 5 gerade einmal zuerteilt erhält. Allgemein erkennen wir so, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte unseres Quadrats jedes „Vielfache“ gerade einmal vorkommt. — Was aber von den „Vielfachen“ gilt, gilt auch von den „Resten“. Hätten wir z. B. in Fig. 48 die Reihe der Zahlen 2, 7, 12, 17, 22, also die Zahlen, die alle und allein den „Rest“ 2 aufweisen, ins Auge gefaßt, so würden wir gesehen haben, daß sie sich gleichfalls auf die 5 verschiedenen Zeilen und die 5 verschiedenen Spalten des Quadrats Fig. 49 verteilen, so daß jede Zeile und jede Spalte den „Rest“ 2 gerade einmal zuerteilt erhält. Dies gilt offenbar allgemein, d. h. nicht nur für den Rest 2, sondern für jeden Rest. Jede Zeile und jede Spalte des Quadrats Fig. 49 weist somit jeden „Rest“ und jedes „Vielfache“ gerade einmal auf; die Zeilen und Spalten ergeben daher alle die geforderte Konstante 65 als Summe.

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Fig. 49.

Es bleibt zu prüfen, ob auch die beiden Diagonalen die Konstante ergeben: Die eine enthält die Zahlen 3, 8, 13, 18, 23 (s. Fig. 48) und damit alle verschiedenen „Vielfachen“ je einmal. Dagegen enthält sie nicht alle „Reste“, sondern immer nur den Rest 3. Nun ergibt aber die Summe aller „Reste“, nämlich $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, genau dasselbe, wie wenn die mittlere[1]) Zahl, nämlich 3, fünfmal genommen wird. Diese Diagonale muß somit gleichfalls die Konstante 65 ergeben. Von der anderen Diagonale gilt mutatis mutandis dasselbe: sie enthält alle „Reste“, dagegen stets dasselbe „Vielfache“; dieses ist jedoch gerade das mittlere, so daß sich auch hier die geforderte Summe 65 ergibt. — Das Quadrat der Fig. 49 besitzt somit alle Eigenschaften der magischen Quadrate.

Frage 19: Bilde nach dieser Methode ein magisches Quadrat von 49 Zellen!

1) Hierbei ist wesentlich, daß die 5 eine ungerade Zahl ist; unsere Methode ist aus diesem und anderen, übrigens leicht erkennbaren Gründen nur bei ungeradzelligen Quadraten brauchbar.

§ 4. Geradzellige Quadrate.

Die Bildung geradzelliger magischer Quadrate ist nicht so einfach wie die der ungeradzelligen. Wir wollen uns daher hier auf den verhältnismäßig einfachen Unterfall beschränken, daß die Zahl der Felder in jeder Reihe unseres Quadrates nicht bloß gerade, sondern, wie man sagt, „gerad-gerade", d. h. durch 4 teilbar, ist. Es soll sich also nur um Quadrate von 4, 8, 12, 16 ... Feldern in jeder Reihe handeln. Wir greifen als Beispiel den Fall eines Quadrats von 8 $\times$ 8 Feldern heraus und schreiben zunächst die Zahlen 1—64 in natürlicher Ordnung, wie Fig. 50 zeigt, in die Felder hinein. Jedem Feld resp. jeder Zahl wollen wir uns alsdann ein zweites als „gegenüberliegendes" zugeordnet denken, und zwar soll, wenn z. B. das eine Feld der dritten Zeile und vierten Spalte angehört — es ist 20 —, als „gegenüberliegendes" dasjenige bezeichnet werden, das der drittletzten Zeile und viertletzten Spalte angehört, also 45. Die beiden Zahlen ergeben zusammen 65, und zwar ergibt sich diese Summe für jedes Paar von zwei „gegenüberliegenden" Zahlen. Denn zwei „gegenüberliegende" Felder stehen, wenn wir alle Felder in der durch die Zahlen der Fig. 50 vorgeschriebenen Reihenfolge nehmen, gleichweit von beiden Enden der Reihe ab: 20 ebensoweit von 1, wie 45 von dem anderen Ende 64. Wenn wir aber alle Zahlen in natürlicher Ordnung in eine Reihe schreiben würden, also 1, 2, 3 ...... 62, 63, 64, so würden zwei, die gleichweit von beiden Enden abstehen, stets zusammen 65 geben, wie wir bereits früher (S. 75) — an einem anderen Beispiel — gesehen hatten, indem wir die betreffenden Zahlen zweimal, und zwar untereinander, jedoch in verschiedener Richtung, hinschrieben:

1, 2, 3, ... 62, 63, 64
64, 63, 62, ... 3, 2, 1.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Fig. 50.

Der Zahl 1 nun liegt in Fig. 50 „gegenüber" die Zahl 64, der Zahl 10 die Zahl 55 usw.; überhaupt liegt, wenn die eine Zahl in dieser Diagonalreihe liegt, die „gegenüberliegende" auch darin. Für die andere Diagonalreihe gilt ganz dasselbe: der Zahl 8 liegt „gegenüber" 57 usw. Danach teilen sich die 8 Zahlen, die in derselben Diagonale stehen, in 4 Paare von je zwei „gegenüberliegenden". Jedes Paar gegenüberliegender Zahlen ergibt nun die Summe 65, wie wir sahen; die 8 Zahlen einer Diagonale ergeben also die Summe $4 \times 65 = 260$. Dies ist nun aber, wie der Leser leicht nachrechnet, gerade die „Konstante" des späteren magischen Quadrats. Die Diagonalen genügen somit bereits bei der natürlichen Anordnung der Zahlen, wie sie Fig. 50 gibt, der Forderung des magischen Quadrats. Dies wird der Leser auch nicht anders erwartet haben; denn, wenn wir (s. Fig. 50) die kleinste Zahl (1) und die größte (64) zusammennehmen, dann wieder die zehntkleinste (10) und die zehntgrößte (55) usw., so müssen sich die Größenunterschiede so ausgleichen, daß wir im ganzen gerade auf den Durchschnitt, d. i. hier offenbar die „Konstante" des magischen Quadrats, kommen.

Die **Zeilen und Spalten** der Fig. 50 genügen jedoch der Forderung des magischen Quadrats keineswegs: die Zahlen der ersten Zeile z. B. ergeben eine viel zu kleine, die der letzten eine viel zu große Summe. Wir können jedoch hier leicht ausgleichend wirken; denn ebensoviel, wie der ersten Zeile an der geforderten Summe $4 \times 65 = 260$ fehlt, ebensoviel hat die letzte Zeile zuviel (beide Zeilen zusammen geben nämlich jedenfalls $8 \times 65 = 2 \times 260$, weil sie gerade aus 8 Paaren „gegenüberliegender" Zahlen bestehen). Nun beträgt der Unterschied zwischen einer Zahl der ersten Zeile und der gerade darunterstehenden der letzten konstant 56; der Unterschied der beiden ganzen Zeilen wird also ausgeglichen, wenn wir vier Zahlen der ersten Zeile mit den vier darunterstehenden der letzten vertauschen, also z. B. 1, 2, 3, 4 mit 57, 58, 59, 60 oder etwa 1, 2, 7, 8 mit 57, 58, 63, 64. Jede der beiden Zeilen weist dann hinterher die Summe 260 auf. In ganz ähnlicher Beziehung zueinander stehen nun die zweite und die vorletzte Zeile; auch unter ihnen beiden können wir daher in ganz entsprechender Weise eine solche Ausgleichung bewirken und erhalten dann für beide Zeilen die Konstante 260. Ebenso geht es paarweise bei den übrigen Zeilen, und wir bekommen also schließlich ein Quadrat, das in allen 8 Zeilen der Forderung einer konstanten Summe genügt, nicht aber in den Spalten und im allgemeinen auch nicht mehr in den Diagonalen, da diese, anfänglich zwar unserer Forderung genügend (s. oben), bei den vorgenommenen Vertauschungen sich im allgemeinen geändert haben werden.

Ungeändert geblieben bei diesen Vertauschungen ist dagegen jede Spalte, als Ganzes betrachtet; denn jede Zahl blieb bei den Vertauschungen in ihrer Spalte. Wir könnten nun für die Spalten ganz dieselbe Einrichtung treffen wie soeben für die Zeilen, also zunächst die erste und letzte Spalte gegeneinander ausgleichen, und so gleichfalls die konstante Summe von 260 für beide herbeiführen, usw. Bei diesen Vertauschungen würden sich die Zeilen, als Ganzes betrachtet, nicht mehr ändern, da jede Zahl in ihrer Zeile bliebe; unsere obige Einrichtung für die Zeilen würde also nicht etwa wieder aufgehoben werden. — Infolge der obigen Vertauschungen, die im Interesse der Zeilen vorgenommen wurden, gelangte nun die Zahl 1 beispielsweise an die Stelle 57, und infolge der Vertauschungen, die der Spalten wegen nötig sind, rückt sie etwa von Platz 57 weiter nach 64, ist dann also im ganzen von Feld 1 gerade auf das „gegenüberliegende" Feld 64 gewandert. Eine Verfolgung der einzelnen Zahlen bei diesen sukzessiven Umstellungen liegt jedoch nicht in unserer Absicht; es genügt uns vielmehr, an einem Beispiel zu sehen, daß bei diesen Vertauschungen eine Zahl auf das dem ursprünglichen gegenüberliegende Feld gelangen kann. Anderseits wissen wir, daß es bei diesen Vertauschungen auf Folgendes ankommt: Einmal muß die Hälfte der Zahlen der ersten Zeile in die unterste Zeile wandern und dafür aus dieser die gerade darunterstehenden in die leeren Plätze der ersten Zeile; dabei braucht nun nicht jede dieser ersteren Zahlen gerade in den Platz direkt unter ihr einzurücken, sondern nur auf einen der leer werdenden Plätze. Wir sahen ja auch, daß 1 ohnehin infolge weiterer Umstellung an die Stelle 64 gelangen konnte. Wir könnten also von vornherein bei Normierung der Zeilen so verfahren, daß wir zwar aus der ersten Zeile 1, 2, 7, 8 entfernen und mit 57, 58, 63, 64 vertauschen, nun aber nicht 1 gerade mit 57, 2 mit 58 usw., sondern 1 etwa mit 64, 2 mit 63, 7 mit 58, 8 mit 57, also jede Zahl mit der ihr gegenüberliegenden. Wir haben damit dann zugleich Vertauschungen vorgenommen, die für die Einrichtung der Spalten bedeutsam sind. Es fragt sich hiernach: Wie ergibt sich ein einfaches Verfahren so, daß die Hälfte der Zahlen der ersten Zeile mit der darunterstehenden Hälfte der letzten Zeile tauscht, zugleich eine Hälfte der Zahlen der zweiten Zeile mit der darunterstehenden Hälfte der zweitletzten Zeile usw., und ferner, daß gleichzeitig auch für die Spalten die entsprechenden Umstellungen [1]) vorgenommen werden?

Diesen Effekt erzielen wir nun am einfachsten, wenn wir die folgende Vorschrift befolgen: Man teile das ganze Quadrat in 16 Teile, wie Fig. 51 dies angibt, und kann nun entweder die Zahlen aller mit a bezeichneten Gebiete oder aber die aller Gebiete b mit den ihnen gegenüberliegenden vertauschen. Man sieht, daß so gleichzeitig jede Zeile und jede Spalte die Hälfte ihrer Zahlen mit der zugehörigen austauscht. Ferner hat der Leser gewiß bereits als sehr bedeutsam den Umstand erkannt, daß bei diesen durch Fig. 51 angezeigten Vertauschungen, bei denen immer nur gegenüberliegende Zahlen ihre Plätze wechseln, eine in einer Diagonalreihe stehende Zahl unter allen Umständen in derselben verbleibt. Die Diagonalen, die bereits in der provisorischen Anordnung der Fig. 50 die Konstante des magischen Quadrats aufwiesen, bleiben also jede als Gesamtheit unverändert erhalten und genügen daher auch nach Vornahme der Zahlenumstellungen unserer Forderung. Diese ist somit in allen Zeilen, Spalten und Diagonalen erfüllt, das Quadrat also ein magisches. Es sieht für den Fall unseres Beispiels (8 × 8 Felder), wenn wir die Vertauschungen in den Gebieten a (Fig. 51) vornehmen, so aus, wie Fig. 52 zeigt.

a	b	b	a
b	a	a	b
b	a	a	b
a	b	b	a

Fig. 51.

Ist die Zahl der Felder jeder Reihe nicht durch 4 teilbar, so ist die gesamte Felderzahl auch nicht durch 16 teilbar, also die Einteilung des ganzen Quadrats in 16 Gebiete im Sinne der Fig. 51 nicht möglich; unsere Methode ist alsdann, also z. B. bei 10 × 10 Feldern, nicht mehr anwendbar. Wir wollen jedoch auf diesen Fall nicht

64	63	3	4	5	6	58	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	7	59	60	61	62	2	1

Fig. 52.

1) Selbstverständlich würde hier nicht von untereinanderstehenden Zahlen, sondern von solchen in gleicher Höhe zu sprechen sein.

näher eingehen, da die hier zu befolgenden Methoden weniger einfach sind.

Frage 20: Gib ein magisches Quadrat von $12 \times 12 = 144$ Feldern an!

§ 5. Magische Quadrate auf Amuletten.

Wie schon am Schlusse des § 1 angekündigt wurde, wollen wir hier noch kurz der Nachtseite der magischen Quadrate gedenken, derjenigen, der ihr Name entsprungen ist, ihrer Verwendung im Dienste des Aberglaubens.

Hier sind, zumal wenn wir in erster Linie auf abendländische Vorkommnisse unser Augenmerk richten, vor allem die sogenannten „Planetensiegel" zu nennen, von denen die Astrologie, insbesondere des 16. und 17. Jahrhunderts, einen ausgiebigen Gebrauch gemacht hat, und auf sie wollen wir uns daher in der Hauptsache hier beschränken.[1]) Bekanntlich beruht die Astrologie, diese schon im Altertum gepflegte Afterwissenschaft, auf dem Aberglauben, alles Geschehen auf der Erde, alle Schicksale der Menschen würden von den Sternen, insbesondere den Planeten, die man sich als Götter vorstellte und denen man daher ja auch Götternamen beigelegt hat, bestimmt und ließen sich auch vorher aus den Sternen ablesen. Als „Planeten" galten dabei im Sinne der vorkopernikanischen Weltanschauung diese sieben: Mond, Merkur, Venus, Sonne, Mars, Jupiter, Saturn. Zwischen diesen 7 Planeten einerseits und den magischen Quadraten andererseits stellte die Astrologie nun feste Beziehungen her: Dem Saturn, dem entferntesten der 7 Planeten, wurde das kleinstmögliche magische Quadrat, das der 9 Zellen, zugeordnet: es ist das Quadrat unserer Fig. 47, das so zur „Tabula Saturni", zur Saturnstafel, wurde. Entsprechend erhielt Jupiter, der nächste der „oberen" Planeten, das nächsteinfache magische Quadrat, das der 16 Zellen, und in dieser Weise ging dies fort. So entstand ein System, das uns die nachstehende tabellarische Zusammenstellung veranschaulichen mag:

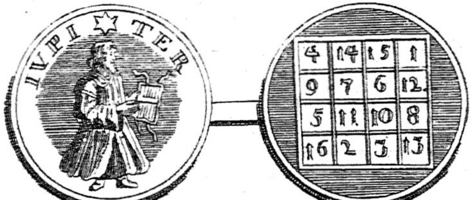
1) Eine eingehende Behandlung wird das Thema dieses Paragraphen, wie überhaupt die Geschichte und Theorie der magischen Quadrate, in einer Monographie erfahren, die ich z. B. vorbereite und die vielleicht schon im nächsten Jahre (1919) erscheinen wird.

Planet	Magisches Quadrat	
	Zellenzahl	Konstante
Saturn	$3 \times 3 = 9$	15
Jupiter	$4 \times 4 = 16$	34
Mars	$5 \times 5 = 25$	65
Sonne	$6 \times 6 = 36$	111
Venus	$7 \times 7 = 49$	175
Merkur	$8 \times 8 = 64$	260
Mond	$9 \times 9 = 81$	369

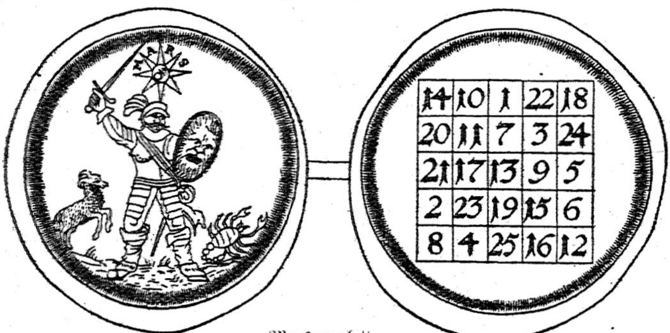
Diese magischen Quadrate brachte man dann auf Planetenamuletten an, denen man, je nach der Natur des betreffenden Planetengottes, die verschiedensten magischen Wirkungen zuschrieb. Unsere beiden Bildertafeln (S. 88 u. 89) weisen einen vollständigen Satz solcher Planetenamulette, von jeder Kategorie eins, auf. Das Saturnamulett ist eine Nachbildung eines in der Wiener Münzen- und Medaillensammlung (Kunsthistorische Sammlungen des A. H. Kaiserhauses) befindlichen Stückes; die übrigen Bilder sind zwar Werken des 17. und 18. Jahrhunderts entnommen, doch befinden sich mehrere der abgebildeten Stücke noch heute in Sammlungsbesitz, so ist z. B. ein solches Jupiteramulett im Berliner Münzkabinett (Kaiser Friedrich-Museum) vorhanden.

Über die magischen Quadrate dieser 7 Amulette sei noch folgendes bemerkt: das Quadrat unseres Saturnamuletts hat genau die Form unserer Fig. 47 (S. 76); unser Jupiterquadrat geht aus dem Quadrat Dürers (Fig. 44, S. 74) hervor, wenn man dort die Reihenfolge der Zeilen umkehrt und die beiden inneren Spalten miteinander vertauscht; das Marsquadrat weist die Besonderheit auf, daß seine 13 ungeraden Zahlen sozusagen ein Quadrat innerhalb des ganzen Quadrats bilden, während die 12 geraden Zahlen die dreieckigen Gebiete an den 4 Ecken des ganzen Quadrats einnehmen. Das Quadrat unseres Venusamuletts ist in hebräischen Zeichen, die auf

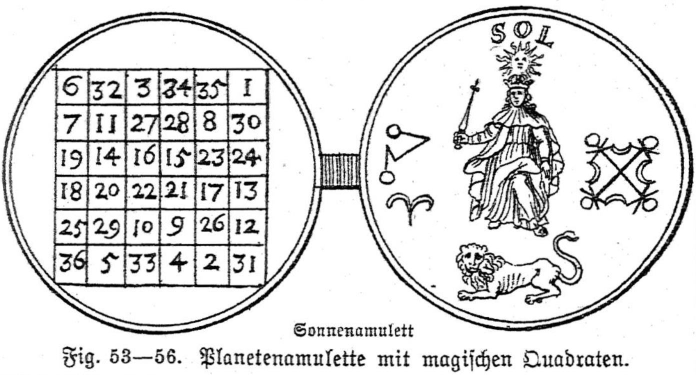
Saturnamulett



Jupiteramulett

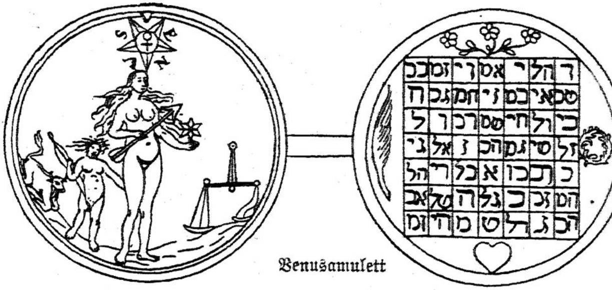


Marsamulett

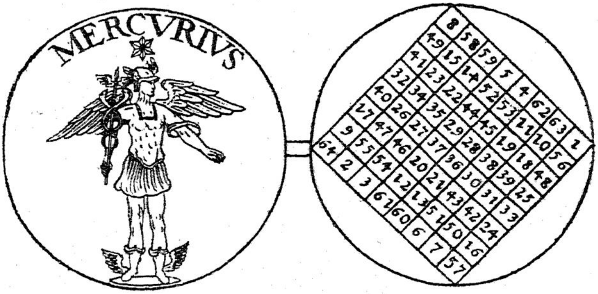


Sonnenamulett

Fig. 53—56. Planetenamulette mit magischen Quadraten.



Venusamulett



Merkuramulett

Mondamulett

Fig. 57—59. Planetenamulette mit magischen Quadraten.

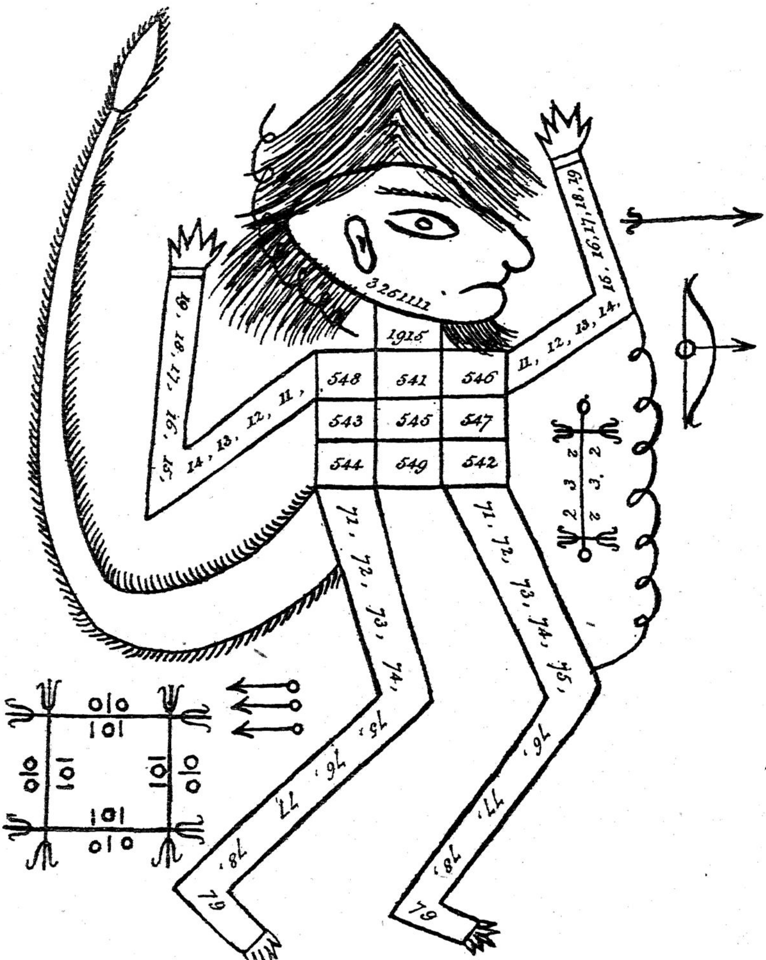


Fig. 60. Indisches Amulett mit magischem Quadrat.

Amuletten überhaupt viel vorkommen, gegeben[1]); der Leser, der jedoch unsere Frage 19 (S. 81) beantwortet hat, braucht nur das dort erhaltene Quadrat um 90° im Uhrzeigersinne zu drehen, um eine Übertragung des hebräischen Zahlenquadrats in unsere Zahlzeichen zu erhalten. In genau derselben Weise ergibt sich auch das magische Quadrat des Mondamuletts (Fig. 59), d. h. also durch Bildung eines magischen Quadrats von 81 Zellen nach dem Vorbild der Figuren 48, 49 und anschließende Drehung des erhaltenen um 90° im Uhrzeigersinne. — Die Bildseiten unserer 7 Amulette, wie wir im Gegensatz zu den „Zahlenseiten" sagen, weisen alle den betreffenden Planetengott, sogar unter ausdrücklicher Angabe seines Namens, auf: Saturn, dargestellt als Gärtner mit dem Spaten, einem seiner viel vorkommenden Attribute; Jupiter in Gelehrtentracht mit aufgeschlagenem Buche in der Hand; Mars als Krieger mit Schwert und Schild; den Sonnengott (Sol) als König, auf dem Thron sitzend, mit Krone und Szepter; Venus, unbekleidet, mit lang herabwallenden Haaren, einen langen Pfeil in der Rechten haltend, ihr zur Seite Cupido mit dem Bogen; Merkur mit dem bekannten Schlangenstab in der Rechten, mit großen Flügeln an den Schultern, sowie mit Flügelhut und Flügelschuhen. Die Bildseite des Mondamuletts schließlich weist zwar in der Hauptsache eine Mondkarte auf, jedoch erkennt man in deren Innerm bei genauerem Hinsehen eine kleine weibliche Figur: es ist die Mondgöttin mit dem Halbmond in der Rechten; die Umschrift der Bildseite gibt in großer Schrift an: LUNA. — Auf die Erklärung der sonstigen Bilder, Namen und Zeichen müssen wir hier verzichten und wollen nur noch eins anführen: Auf dem Venusamulett (Bildseite) sehen wir außer der Göttin und dem Cupido noch eine „Wage" und einen „Stier"; gemeint sind die beiden Sternbilder des Tierkreises, die nach einer seltsamen Lehre der Astrologen als die beiden „Häuser" der Venus galten. Dieselbe Bedeutung haben auf dem Marsamulett „Widder" und „Skorpion", sowie auf dem Sonnenamulett der „Löwe".

Wir verlassen damit diese Planetenamulette, und bemerken im übrigen nur noch, daß magische Quadrate auch auf Amuletten anderer Arten vielfache Verwendung gefunden haben. Unsere Abbildung auf

---

1) Entgegen der sonstigen hebräischen Schreibweise stehen hier, freilich mit einer Ausnahme, die Zehner links (nicht rechts) von den Einern.

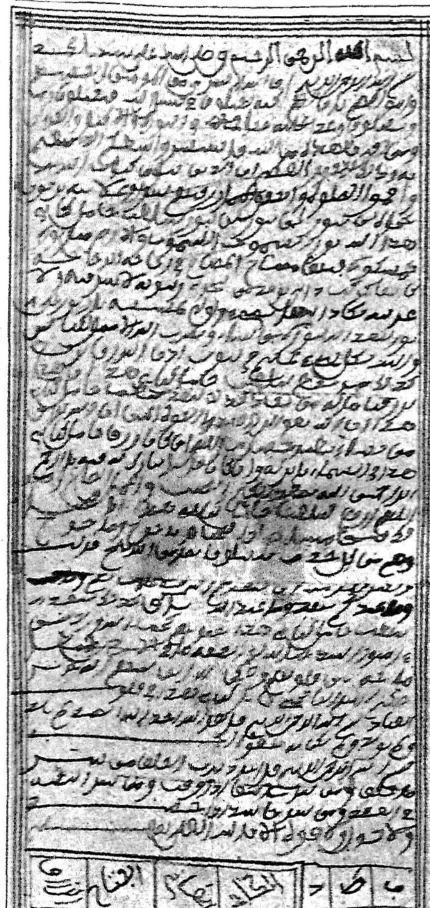


Fig. 61. Arabischer Schutzbrief.

S. 90 mag ein erstes Beispiel dieser Art darbieten: es ist ein Amulett, das bei den mohammedanischen Indern zur Austreibung böser Geister und Teufel in neuerer Zeit gebraucht wurde und gewiß heute noch gebraucht wird. Das magische Quadrat ist das unserer um 180⁰ gedrehten Fig. 47 (S. 76), wobei jedoch alle Zahlen um 540 vergrößert sind. — Ein zweites Beispiel dieser Art, ein Dokument des Aberglaubens aus dem Weltkrieg, bringt Fig. 61 in verkleinerter Wiedergabe zur Anschauung: Es ist ein arabischer Schutzbrief, der auf den Schlachtfeldern Frankreichs im Sommer 1917 bei einem gefallenen Schwarzen, vermutlich einem Inder, gefunden wurde. Der Schutzbrief, der natürlich als Talisman gegen feindliche Geschosse hatte dienen sollen, weist neben arabischen Gebetsformeln, die hier nicht interressieren, als Instrumente der Magie auch drei quadratische Anordnungen auf, von denen das 9-zellige Gebilde ein magisches Quadrat im strengen Sinne ist; in unseren Zahlzeichen würde es so aussehen:

4	9	2
3	5	7
8	1	6,

ist also ein Spiegelbild des Quadrats unserer Fig. 47 (S. 76) resp. geht aus diesem durch Vertauschung der ersten und letzten Spalte hervor. Von den beiden 16=zelligen Quadraten des Schutzbriefs weist das eine in jeder Zeile und jeder Spalte dieselben 4 Zahlen, nämlich die 4 kleinsten geraden Zahlen: 2, 4, 6, 8, die eine besondere Rolle im Aberglauben des Orients spielen, auf, ergibt also natürlich auch in allen Zeilen und Spalten dieselbe Summe (20). Daß es kein magisches Quadrat im strengen Sinne ist, sondern zu einer viel einfacheren Gattung von Zahlen=Anordnungen gehört, braucht kaum gesagt zu werden. Von genau derselben Struktur wie dieses letztgenannte ist auch das größere 16=zellige Quadrat, nur sind an die Stelle der 4 Zahlen jetzt bestimmte arabische Namen — Gottesnamen — getreten[1]).

Frage 21: Vergrößere alle Zahlen des Dürerschen Quadrats (Fig. 44, S. 74) oder des Jupiterquadrats (Fig. 54, S. 88) um ein und dieselbe Zahl so, daß das neue Quadrat in jeder Zeile, Spalte und Diagonale als Summe die für die Menschheitsgeschichte beispiellos verhängnisvolle Jahreszahl 1914 aufweist! Um wieviel sind alle Zahlen des Quadrats zu diesem Zwecke zu vergrößern?

---

1) Auch an Bauwerken, Kirchen wie Profanbauten, finden sich bisweilen magische Quadrate. Mitteilungen über solche und ähnliche Vorkommnisse magischer Quadrate, insbesondere solche, die bisher wenig oder gar nicht bekannt sind, nehme ich mit lebhaftem Danke entgegen. Das in den großen öffentlichen und auch einigen privaten Münzsammlungen einschließlich einiger anderer Museen vorhandene Material an Amuletten mit magischen Quadraten ist mir freilich in der Hauptsache bereits bekannt infolge einer im Winter 1913/1914 veranstalteten und über die wichtigsten Sammlungen von Europa erstreckten Umfrage, die, von einigen Ausnahmen, wie z. B. Rußland, abgesehen, sehr entgegenkommende Beantwortung gefunden hat. — Die vorstehenden Worte, die auch schon in der vorigen Ausgabe dieses Buches standen, haben mir, wie ich mit Dank zu bemerken nicht unterlassen möchte, die Kenntnis des interessanten arabischen Schutzbriefes vermittelt. Herr Franz Buhl, Unteroffizier in einem bayerischen Regiment, der den Schutzbrief zu Gesicht bekam, hatte sogleich die richtige Vermutung, daß es sich um magische Quadrate handle, und sandte mir daraufhin zunächst eine Kopie, sodann das Original des Talismans.

Kapitel IX.

Mathematische Trugschlüsse.

I. Die Hälfte ist gleich dem Ganzen.

Beweis: Es ist bekanntlich:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Da diese Formel für beliebige Werte von a und b gilt, so also auch für $b = a$, d. h. wenn wir für b überall a setzen; wir haben dann:

$$a^2 - a^2 = (a + a) \cdot (a - a).$$

Die linke Seite der Gleichung können wir auch so schreiben: $a \cdot (a - a)$ und haben dann:

$$a \cdot (a - a) = (a + a) \cdot (a - a).$$

Dividiert man nun beide Seiten der Gleichung durch den Faktor $(a - a)$, so erhält man:

$$a = a + a,$$

also:

$$a = 2\,a$$

oder:

$$\frac{a}{2} = a,$$

was zu beweisen war.

II. In derselben Weise können wir beweisen:

Alle Zahlen sind untereinander gleich.

Beweis: Es seien a und b zwei beliebige Zahlen. Wir nehmen zunächst an, daß sie ungleich sind und daß a etwa die größere von beiden sei. Der Unterschied zwischen a und b sei gleich c, d. h.:

$$a - b = c$$

oder:

$$a = b + c.$$

Multipliziert man diese letzte Gleichung auf beiden Seiten mit $a - b$, so erhält man:

$$a^2 - a\,b = a\,b + a\,c - b^2 - b\,c.$$

Bringt man nun in dieser Gleichung das Glied $a\,c$ von der rechten

Seite nach der linken hinüber resp. subtrahiert man auf beiden Seiten a c, so erhält man:

$$a^2 - a\,b - a\,c = a\,b - b^2 - b\,c,$$

eine Gleichung, die sich auch so schreiben läßt:

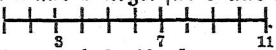
$$a \cdot (a - b - c) = b \cdot (a - b - c).$$

Auf beiden Seiten kommt der Faktor $a - b - c$ vor; dividiert man durch ihn, so erhält man:

$$a = b,$$

d. h. zwei ganz beliebige Größen a und b sind einander gleich, w. z. b. w.

III. Da der Leser vermutlich trotz unseres vorstehenden Beweises noch nicht so recht an die Gleichheit aller beliebigen Zahlen glaubt, weil ihm die Konsequenzen — Ausgleich aller Unterschiede zwischen Viel- und Wenig, zwischen Arm und Reich, zwischen Groß und Klein usw. — denn doch etwas ungeheuerlich erscheinen mögen, so mag die Richtigkeit unseres Resultats noch durch ein zweites Beweisverfahren erhärtet werden:

Es seien a und b zwei beliebige Größen; wir nehmen zunächst wieder an, sie seien ungleich. Alsdann gibt es jedenfalls eine Größe, die genau in der Mitte zwischen a und b liegt: für 3 und 11 beispielsweise wäre dies die Zahl 7: 

. Bezeichnen wir die entsprechende Größe für a und b, ihr sogenanntes „arithmetisches Mittel", mit d, so ist:

$$a + b = 2\,d$$

(für unser Beispiel: $3 + 11 = 2 \cdot 7$).

Aus dieser Gleichung folgt:

$$b = 2\,d - a$$

und $$2\,d - b = a.$$

Multipliziert man diese beiden letzten Gleichungen miteinander, so erhält man:

$$2\,d\,b - b^2 = 2\,d\,a - a^2.$$

Subtrahiert man nun diese letzte Gleichung von der Gleichung

$$d^2 = d^2,$$

so bekommt man:

$$d^2 - 2\,d\,b + b^2 = d^2 - 2\,d\,a + a^2$$

oder
$$(d - b)^2 = (d - a)^2.$$

Zieht man sodann auf beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel, so ergibt sich:

$$d - b = d - a,$$

d. h.: ob ich b von d abziehe oder a von d, bleibt sich gleich, also $b = a$, w. z. b. w.

Wer übrigens vorzieht, diesen Beweis, statt mit Buchstabengrößen a, b, d, mit numerischen Werten zu führen, mag so verfahren:

Niemand — und sei er der ungläubige Thomas in eigener Person — wird die Richtigkeit der Gleichung:

$$3 - 1 = 6 - 4$$

leugnen; ebenso unzweifelhaft richtig ist die durch Multiplikation mit (-1) hieraus hervorgehende Gleichung

$$1 - 3 = 4 - 6$$

(jede der beiden Seiten der Gleichung ergibt: -2). Addiert man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung $\frac{9}{4}$, so erhält man:

$$1 - 3 + \frac{9}{4} = 4 - 6 + \frac{9}{4},$$

oder, was genau dasselbe ist:

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2.$$

Zieht man sodann auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so bekommt man:

$$1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2}$$

und, wenn man nunmehr auf beiden Seiten dieser Gleichung $\frac{3}{2}$ addiert, so ergibt sich das Resultat:

$$1 = 2.$$

Wenn aber $1 = 2$ ist, so folgt durch Addition von 1 auf beiden Seiten:
$2 = 3$, und durch weitere Addition von 1 auf beiden Seiten:
$3 = 4$ usf., also:
$1 = 2 = 3 = 4$ usw., womit, wie verlangt, die Gleichheit aller Zahlen untereinander dargetan ist.

IV. Null ist die größte aller Zahlen.

Beweis: Es sei a eine beliebige, positive, eventuell sehr große Zahl. $a - 1$ ist jedenfalls kleiner als a, was man in Form einer „Ungleichung" bekanntlich so ausdrückt[1]):

$$a - 1 < a.$$

Multiplizieren wir nun diese Ungleichung auf beiden Seiten mit $(-a)$, so bekommen wir:

$$-a^2 + a < -a^2$$

oder, nach Addition von a^2 auf beiden Seiten, schließlich:

$$a < 0.$$

Damit haben wir das Resultat erhalten: Jede beliebige, wenn auch noch so große Zahl a ist kleiner als Null, und das war es ja, was wir beweisen wollten.

Ist also a etwa das Vermögen eines Millionärs oder gar Milliardärs A, so zeigt uns unsere Ungleichung, daß dieses Vermögen kleiner ist als das Vermögen 0 eines Herrn Habenichts. Bezeichnen entsprechend die Größen b, c, d usw. die Vermögen der Millionäre oder Milliardäre B, C, D usw., so bestehen unserem Beweisverfahren zufolge die Ungleichungen:

$$a < 0;\ b < 0;\ c < 0;\ d < 0;\ \ldots.$$

und durch Addition aller dieser Ungleichungen folgt:

$$a + b + c + d \ldots. < 0.$$

Der Herr Habenichts besitzt also mehr als alle Millionäre und Milliardäre zusammengenommen, ein Resultat, das freilich trotz des „mathematischen Beweises" kaum so viel Glauben finden wird, daß es in sozialer Beziehung versöhnlich zu wirken vermöchte.

V. Wenn eine Zahl kleiner ist als eine andere, so ist auch das Doppelte, Vierfache, ... Zehnfache, Hundertfache der ersten Zahl immer noch kleiner als die zweite.

Beweis: Es sei p eine Zahl > 0, die kleiner ist als eine zweite Zahl q; also: $p < q$. Durch Multiplikation mit p auf beiden Seiten

1) Die Ungleichung $x < y$ bedeutet bekanntlich: „x kleiner als y", und umgekehrt hat $y > x$ die Bedeutung: „y größer als x". Auch für die nächsten Abschnitte ist die Bekanntschaft mit dieser Schreibweise erforderlich.

der Ungleichung erhalten wir: $p^2 < pq$, und hieraus, durch Subtraktion von q^2 auf beiden Seiten, wieder:

$$p^2 - q^2 < pq - q^2$$

oder $$(p+q)\cdot(p-q) < q(p-q).$$

Die Division durch $(p-q)$ ergibt darauf:

$$p + q < q.$$

Addiert man hierzu $p < q$, unsere ursprüngliche Ungleichung, so erhält man: $2p + q < 2q$ und, durch Subtraktion von q auf beiden Seiten: $2p < q$. Auch das Doppelte der Zahl p ist also unter allen Umständen noch kleiner als q. — Ebenso, wie wir aus der Ungleichung $p < q$ folgerten: $p < 2q$, können wir aus $p < 2q$ herleiten: $p < 4q$, und hieraus wieder: $p < 8q$, und so geht dies fort. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

VI. Ein Viertel ist mehr als ein Halbes.

Beweis[1]): Auch wer der vorstehenden These nicht zustimmt, wird zugeben, daß das Doppelte einer Größe mehr ist als das Einfache. Es ist somit:

$$2 \cdot \log a > \log a$$

oder: $$\log a^2 > \log a.$$

Wenn nun $a = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, so haben wir also:

$$\log \tfrac{1}{4} > \log \tfrac{1}{2}$$

und, da zu dem größeren Logarithmus auch der größere Numerus gehört, so folgt:

$$\tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{2}, \text{ w. z. b. w.}$$

VII. Es gibt in Wahrheit in der Mathematik keine imaginären, sondern nur reelle Größen.

Beweis[2]): Alle sogenannten imaginären Größen lassen sich darstellen in der Form $a \cdot i$, wo a eine reelle Größe und i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ ist. Um also unsere These, daß alle imaginären Größen reell sind, zu beweisen, brauchen wir diesen Beweis nur für die imaginäre Einheit zu führen. Zu dem Ende multiplizieren wir die Gleichung:

$$\sqrt{-x} = i \cdot \sqrt{x}$$

1) Bekanntschaft mit Logarithmen vorausgesetzt.

2) Bekanntschaft mit imaginären Größen vorausgesetzt.

auf beiden Seiten mit $\sqrt{-1}$ und erhalten so:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= i\sqrt{-x}\\ &= i\left(i\sqrt{x}\right)\\ &= i^2\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Dividiert man diese Gleichung auf beiden Seiten durch $\sqrt{x}$, so resultiert: $i^2 = 1$, also $i = \sqrt{1}$; i ist mithin reell, w. z. b. w.

VIII. Es gibt Dreiecke mit zwei rechten und einem spitzen Winkel.

Beweis: Fig. 62 stellt in $\triangle$ AEF ein Gebilde der verlangten Art dar. Die Figur ist so entstanden, daß in zwei Kreisen, die sich in den Punkten A und B schneiden, von dem einen dieser Schnittpunkte aus, nämlich von A, die Durchmesser AMC und AND gezogen sind. Darauf ist die Verbindungslinie CD gezogen, und die Punkte E und F, in denen die Linie CD die beiden Kreise schneidet, sind mit A verbunden. Alsdann sind die Winkel AFD und AEC als Peripheriewinkel im Halbkreise rechte Winkel, und daher sind auch ihre Nebenwinkel AEF und AFE jeder ein Rechter, w. z. b. w.

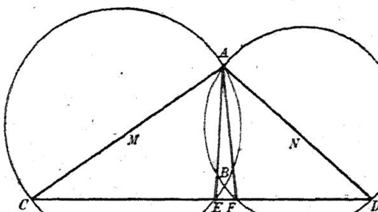
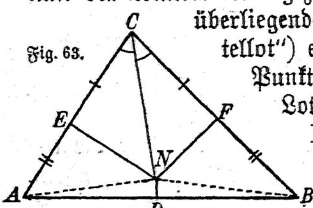


Fig. 62.

IX. Alle Dreiecke sind gleichschenklig.

Beweis: Es sei (s. Fig. 63) in dem Dreieck ABC die Halbierungslinie des Winkels bei C gezogen und ferner in der Mitte D der gegenüberliegenden Dreiecksseite AB die Senkrechte („Mittellot") errichtet; beide Linien mögen sich in dem Punkte N schneiden. Fällt man nun von N die Lote NE und NF auf die Seiten AC und BC und verbindet N mit A und B, so ergibt sich die Kongruenz folgender Dreieckspaare:

Fig. 63.


1) $AND \cong BND$,

weil $AD = BD$, $ND = ND$ und der eingeschlossene Winkel ein Rechter ist.

Aus dieser Kongruenz folgt: $AN = BN$.

2) $ECN \cong FCN$,

weil $\sphericalangle ECN = \sphericalangle FCN$, $CN = CN$ und die Winkel bei E und F Rechte sind.

Aus dieser Kongruenz folgt: $CE = CF$ und $EN = FN$.

3) $AEN \cong BFN$,

weil $AN = BN$ (nach 1),

$EN = FN$ (nach 2)

und die Winkel bei E und F Rechte sind.

Aus dieser Kongruenz folgt: $AE = BF$.

Nach 2 sind nun die beiden (in der Figur einmal gestrichelten) Stücke CE und CF gleich lang und nach 3 die beiden (zweimal gestrichelten) Stücke AE und BF ebenfalls; also sind auch die ganzen Linien AC und BC gleich lang, d. h. das beliebige Dreieck ABC ist gleichschenklig, w. z. b. w.

Ebenso, wie wir die Gleichheit der beiden Dreiecksseiten AC und BC bewiesen haben, läßt sich natürlich auch die Gleichheit von AC und AB dartun, und wir erhalten also schließlich das Resultat:

Alle Dreiecke sind gleichseitig.

Auch wenn der Schnittpunkt N der Winkelhalbierenden und des Mittellots nicht innerhalb, sondern außerhalb des Dreiecks liegen sollte (s. Fig. 64), ergibt sich nur wieder dasselbe Resultat: Wir können für den jetzigen Fall der Fig. 64 mit denselben Worten den obigen Beweisgang wiederholen, mit dem einzigen Unterschiede, daß zum Schluß AC nicht als Summe der Stücke CE und EA, sondern als deren Differenz auftritt und die entsprechende Änderung auch für die andere Dreiecksseite zu erfolgen hat. Das Resultat ist jedoch wieder

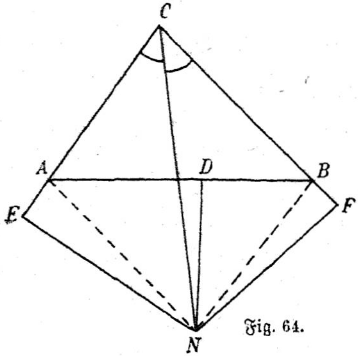


Fig. 64.

AC = BC, d. h. das Dreieck ABC ist gleichschenklig oder vielmehr, in weiterer Folge, gleichseitig.

X. 65 = 64 = 63.

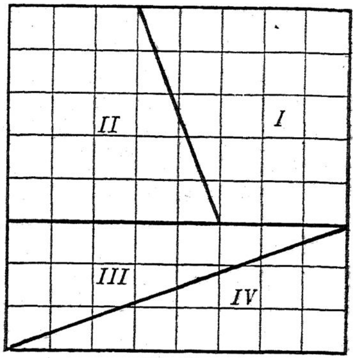


Fig. 65.

Jeder Schachspieler weiß, daß sein Spielbrett 64 Felder hat: 8 Reihen von je 8 Feldern. Wir werden ihm hier ein zweites Brett vorführen, dessen Felder einzeln ebenso groß sind wie jene, das aber 65 Felder zählt und trotzdem nur denselben Flächeninhalt hat wie jenes 64feldrige.

Beweis: Man zerschneide das ursprüngliche Schachbrett so, wie Fig. 65 dies angibt, und lege die 4 Teile so zusammen, wie Fig. 66 anzeigt. Alsdann haben wir ein Gebiet von 5 × 13, also von 65 Feldern, das unseren Forderungen genügt.

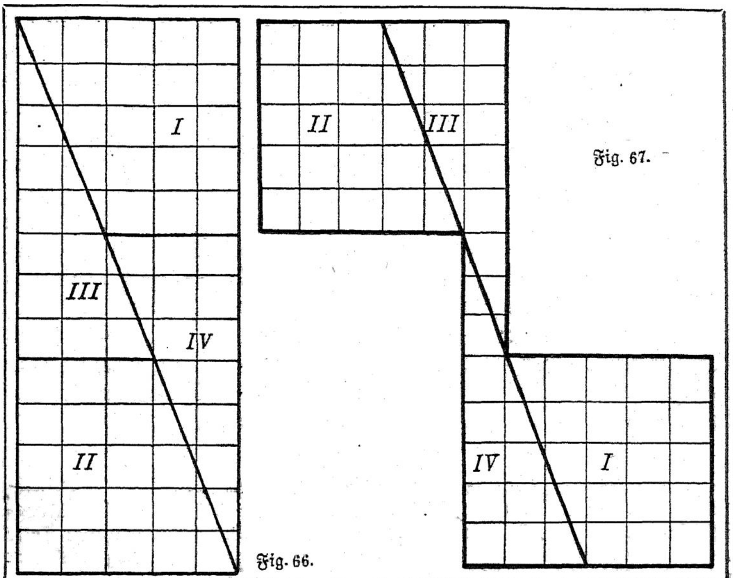


Fig. 66.

Fig. 67.

Aus der so gewonnenen Gleichung 65 = 64 folgt, durch Subtraktion von 1 auf beiden Seiten, die Gleichung 64 = 63, der zweite Teil unserer Behauptung. Die Richtigkeit dieser Behauptung: 64 = 63, läßt sich aber auch direkt ohne alle Schwierigkeit dartun: Man braucht die 4 Teile I, II, III, IV der Fig. 65 nur so hinzulegen, wie Fig. 67 angibt. Dann bilden die 4 Stücke, die anfänglich (Fig. 65) 64 kleine Quadrate maßen, nur noch 63 solcher Quadrate, und diese sind einzeln ebenso groß wie jene der ursprünglichen Figur.

Mit der Gleichheit von 65, 64, 63 ist natürlich die Gleichheit aller Zahlen überhaupt dargetan, ein Ergebnis, das für uns freilich nicht mehr den Reiz der Neuheit bietet, uns vielmehr oben — unter Nr. **II** und **III** — bereits entgegengetreten war.

XI. Die Summe der beiden parallelen Seiten eines Trapezes ist gleich Null.[1])

Beweis: Die beiden parallelen Seiten BC = b und AD = a des Trapezes ABCD (Fig. 68) mögen nach entgegengesetzten Richtungen hin verlängert werden, und zwar BC um a bis F, DA um b bis E. Die Endpunkte E und F werden miteinander verbunden und zudem die beiden Diagonalen des Trapezes, BD und CA, gezogen. Die 3 Abschnitte, in die die Diagonale AC durch die sie schneidenden Linien geteilt ist, bezeichnen wir, wie in der Figur angegeben, mit x, y, z. Aus dem Proportionallehrsatz (Strahlensatz), angewandt mit bezug auf G und H als Scheitelpunkte, oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus der Ähnlichkeit der beiden folgenden Dreieckspaare:

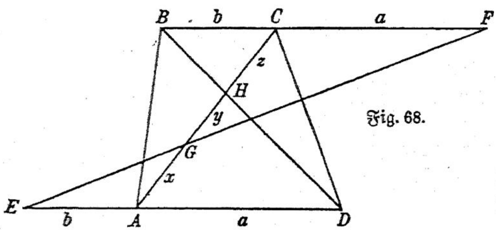


Fig. 68.

1) Nach W. Lietzmann (und V. Trier), „Wo steckt der Fehler?" (Leipzig 1913, S. 23; 2. Aufl., 1917, S. 27/28), einem Buche, das außer den „Trugschlüssen" des ersten Teils in einem zweiten, von V. Trier verfaßten Teile eine Sammlung interessanter und lehrreicher, übrigens durchweg aus dem wirklichen Schulleben geschöpfter „Schülerfehler" bietet.

1) BHC und AHD,

2) EGA und CGF,

folgt:
$$\frac{b}{a} = \frac{z}{x+y}$$
und
$$\frac{b}{a} = \frac{x}{y+z}$$
oder, zusammengezogen:
$$\frac{b}{a} = \frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z} \quad \text{(Gleichung I)}.$$
Wendet man nun auf die Proportion $\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z}$ die korrespondierende Subtraktion[1]) an, so erhält man:
$$\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z} = \frac{z-x}{x-z};$$
also ist auch (s. Gleichung I):
$$\frac{b}{a} = \frac{z-x}{x-z} = -1.$$
Wenn aber $\frac{b}{a} = -1$ ist, so bedeutet das: $b = -a$ oder: $b + a = 0$, w. z. b. w.

XII. Alle Kreise haben gleichen Umfang.

Beweis: Wir denken uns zwei fest miteinander verbundene Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt (M in Fig. 69) oder mit anderen Worten: eine kreisrunde Scheibe, auf der noch ein kleinerer konzentrischer Kreis verzeichnet ist. Die Scheibe mag in der Ebene längs einer geraden

1) Der Leser, dem dieser Satz nicht oder nicht mehr geläufig ist, erkennt die Richtigkeit der Umwandlung leicht folgendermaßen: Wenn eine Proportion $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ besteht, so besteht zunächst auch die Proportion $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$, und aus ihr erhalten wir durch Subtraktion von 1 auf beiden Seiten, $\frac{m}{p} - 1 = \frac{n}{q} - 1$ oder $\frac{m-p}{p} = \frac{n-q}{q}$ oder $\frac{m-p}{n-q} = \frac{p}{q}$ und somit auch: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{m-p}{n-q}$. Eine gegebene Proportion $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ läßt sich also auch stets in der Form $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{m-p}{n-q}$ schreiben, und das ist genau die Umformung, die wir oben mit der Proportion $\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z}$ vornehmen.

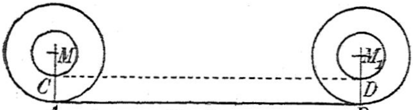


Fig. 69.

Linie abrollen; dabei gelangt sie von A nach B, und zwar mag diese Strecke gerade einer vollen Umdrehung der Scheibe entsprechen, so daß also das Stück AB gleich dem Umfang des großen Kreises ist. In dieser Zeit, von der Stellung A bis B, hat sich natürlich auch der kleine Kreis gerade einmal herumgedreht; sein jeweiliger tiefster Punkt bewegt sich längs der Linie CD und diese ist daher gleich dem Umfang des kleinen Kreises. Da nun aber AB und CD offenbar gleich sind (ABDC ist ein Rechteck), so haben also beide Kreise denselben Umfang, w. z. b. w.

XIII. Im Innern eines Kreises gibt es nur einen Punkt, den Kreismittelpunkt. Alle übrigen, scheinbar im Innern des Kreises gelegenen Punkte liegen in Wahrheit auf der Kreisperipherie.

Beweis[1]**:** Es sei C (Fig. 70) ein solcher, scheinbar im Innern des Kreises gelegener Punkt. Man ziehe alsdann den Durchmesser durch C, also AMB, und konstruiere zu A, C, B den 4. harmonischen Punkt: D. Sodann errichte man in F, der Mitte von CD, ein Lot, das den Kreis in E schneiden mag, und verbinde diesen Punkt E mit M und C. — Alsdann ist nach einem bekannten Satze[2]:

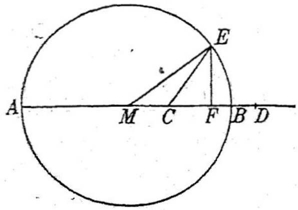


Fig. 70.

$$MC \cdot MD = MA^2.$$

Diese Gleichung nimmt, da

$$MC = MF - CF$$

und

$$MD = MF + FD = MF + CF$$

1) Angegeben von P. Stäckel im Archiv der Math. u. Phys. (3) XII, 1907, S. 370.

2) Der Leser, dem dieser Satz nicht gegenwärtig sein sollte, überzeugt sich von der Richtigkeit der in Frage stehenden Gleichung leicht folgendermaßen: Wenn A, C, B, D vier harmonische Punkte sind, so bedeutet dies, daß folgende Proportion besteht: $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$, anders geschrieben: $\frac{AM + MC}{AM - MC} = \frac{MD + AM}{MD - AM}$. Durch Anwendung korrespondierender Addition und Subtraktion nimmt diese Proportion die Form an: $\frac{AM}{MC} = \frac{MD}{AM}$; also ist, wie oben steht: $AM^2 = MC \cdot MD$.

ist, die Form an: $(MF - CF) \cdot (MF + CF) = MA^2$

oder:

$$MF^2 - CF^2 = MA^2 \quad \text{(Gleichung I).}$$

Nun ist ferner:

$$MF^2 + FE^2 = ME^2$$

$$\text{und } CF^2 + FE^2 = CE^2$$

$$\text{also: } MF^2 - CF^2 = ME^2 - CE^2$$

oder:

$$MF^2 - CF^2 = MA^2 - CE^2 \quad \text{(Gleichung II).}$$

Aus den beiden Gleichungen I und II, die in ihren linken Seiten völlig übereinstimmen, folgt:

$$MA^2 = MA^2 - CE^2,$$

d. h.:

$$CE = 0.$$

Der Punkt C ist also mit E identisch, liegt mithin auf der Kreisperipherie, w. z. b. w.

XIV. Achilles und die Schildkröte.

Von dem griechischen Philosophen Zenon von Elea rühren eine Anzahl berühmter Sophismen her, deren bekanntestes so lautet: Der schnellfüßige Achilles verfolgt eine sehr viel langsamer sich bewegende Schildkröte, die vor ihm einen gewissen Vorsprung hat. Wird er die Schildkröte einholen? Zenon sagt: „Nein". Denn, wenn Achilles von A aus den anfänglichen Standpunkt S der Schildkröte erreicht hat (s. Fig. 71), wird diese inzwischen bis zu einem anderen Punkte S_1 weiter gekrochen sein; ist Achilles auch hierhin gekommen, so ist die Schildkröte inzwischen bis S_2 gelangt, und so geht dies offenbar fort: Jedesmal, wenn Achilles einen von der Schildkröte zuvor eingenommenen Standpunkt erreicht hat, wird diese inzwischen um ein gewisses Stück weiter gekrochen sein, und so wird Achilles trotz seiner so viel größeren Geschwindigkeit die Schildkröte nie einholen.[1])

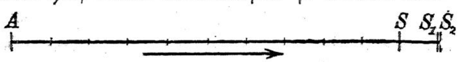


Fig. 71.

---

1) Wir hielten hier an dem historisch gegebenen Bilde von „Achilles und der Schildkröte" fest, obwohl ein moderner Zenon vermutlich ein besseres Bild zur Illustrierung der in dem Vorgange der Bewegung liegenden Antinomien gewählt hätte. Man hört gegen das Sophisma in der Form Zenons naturgemäß in der Regel die Entgegnung: „Achilles kommt der Schildkröte immer näher und näher und schließlich tritt er mit dem nächsten Schritt über sie hinweg." Man stellt sich daher statt der Schildkröte

XV. Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wer nur die Anfangsgründe, die einfachsten Prinzipien, der Wahrscheinlichkeitsrechnung kennt, wird begreifen, daß sie einen bevorzugten Tummelplatz für Fehlschlüsse und Paradoxien abgibt, und so mag wenigstens ein Beispiel dieser Art hier zum Schluß gegeben werden, eins, das Francis Galton, der berühmte Afrikareisende und vielseitige Forscher — Anthropolog, Meteorolog, Geograph, Archäolog usw. — mitgeteilt hat.[1])

In einer Gesellschaft erhebt jemand folgende Frage: Drei Münzen werden verschiedene Male hingeworfen; in wieviel Prozent aller Fälle werden die drei Münzen übereinstimmend dieselbe Seite, d. h. alle drei die Kopfseite oder aber alle drei die Wappenseite, zeigen? — „Ob man", so läßt sich zunächst A vernehmen, „die drei Münzen gleichzeitig oder aber nacheinander hinwirft, ist offenbar gleichgültig, und nur der größeren Anschaulichkeit halber stelle ich mir vor, daß die Münzen einzeln — hintereinander — hingeworfen werden. Zunächst die erste: sie zeigt Kopf- oder Wappenseite. Nun kommt die zweite; in wieviel Fällen wird sie dieselbe Seite zeigen wie die erste Münze? Offenbar in der Hälfte aller Fälle! Wird schließlich auch die dritte Münze hingeworfen, so wird sie dieselbe Seite wie die beiden ersten Münzen nach oben kehren in der Hälfte aller derjenigen Fälle, die vorher günstig waren, d. h. in der Hälfte von der Hälfte aller Fälle insgesamt. So wird das erwartete Bild, daß alle drei Münzen dieselbe Seite zeigen, in $\frac{1}{4}$ oder in 25 Prozent aller Fälle eintreten." — „Ich protestiere", so fällt jetzt B ein, „die Annahme, daß die Münzen hintereinander geworfen werden, entspricht nicht der Fragestellung und führt daher, wie man sieht, zu einem Fehlschluß. Das soeben gehörte Resultat ist nämlich durchaus unrichtig, wie sehr leicht einzusehen ist. Man hat die drei Münzen gleichzeitig zu werfen,

---

und Achills wohl besser etwa zwei Lokomotiven vor, die sich beide auf einem Schienenstrang, der beliebig lang sein mag, in gleicher Richtung fortbewegen und von denen die eine einen gewissen (mäßigen) Vorsprung vor der anderen hat; die vordere soll eine geringe, die hintere eine große Geschwindigkeit haben. Nach dem Sophisma Zenons holt die schnelle Lokomotive die langsame niemals ein.

1) Francis Galton, „A plausible paradox in chances", Nature, vol. 49, 1893/94, p. 365—366.

und offenbar werden jedesmal, wenn dies geschehen ist, mindestens zwei der drei Münzen die gleiche Seite nach oben kehren. Die Wahrscheinlichkeit dafür nun, daß auch die dritte Münze dieselbe Seite zeigt, ist offenbar $= \frac{1}{2}$. Also in der Hälfte oder in 50 Prozent aller Fälle wird das erwartete Bild sich ergeben und nicht etwa nur in 25 Prozent!"

Wer hat Recht: A, B oder keiner von beiden?

Beantwortung der Fragen.

Kapitel I.

Frage 1: B (der zweite) springt von 1 auf 2 und schreitet sodann in Stufen von je 11 fort.

Frage 2: B kann den Sieg erzwingen, da er mit dem ersten Male auf 9 gelangen und nun in Stufen von je 9 bis zu 90 fortschreiten kann.

Frage 3: A, der zunächst auf 6, dann auf 24, 42, 60, 78, 96, 114, 132 und 150 springt.

Frage 4: B, indem er zunächst auf 13 gelangt und von hier in Stufen von je 13 zum Ziel. — Die letzte Etappe vor dem Siege für B ist 169, und zwar kommt nur dies allein hierfür in Betracht, nicht etwa, wie man vielleicht denken könnte, neben 169 auch wahlfrei 170 und 171. Denn, wenn B auf irgendeine Weise auf 170 oder 171 gekommen wäre, so würde zwar A das Ziel mit dem nächsten Sprunge nicht erreichen können; jedoch kann A alsdann bis 180 resp. 181 gelangen, und B muß nun — bei einer minimalen Sprungweite von 3 Fuß — über das Ziel hinausspringen. Es würde also — man achte auf die Formulierung unserer Aufgabe (S. 11) — keiner von beiden siegen.

Frage 5: Sieger ist offenbar derjenige, der zuerst auf 98 oder 99 gelangt, da der Gegner alsdann — bei einem Minimum von 2 Fuß — das Ziel mit dem nächsten Sprunge erreichen bzw. überschreiten muß. A würde also den Sieg erzwingen können, wenn er zunächst auf 10 springen und dann in Stufen von je 11 zu 98 fortschreiten könnte. Nun ist ihm aber — bei einem maximalen Sprunge von 9 Fuß — die Stufe 10 für das erste Mal unerreichbar. Ebensowenig kann A es erzwingen, die Stelle 99 in Stufen von je 11 zu erreichen. Wie A daher auch beginnt, B kann mit seinem ersten Sprunge jedenfalls auf 11 gelangen, worauf er in Stufen von je 11 fortschreitet bis 99, um so A zum Überschreiten des Ziels zu zwingen. Außer diesem Verfahren, das B stets befolgen kann, gibt es für ihn noch ein zweites, das freilich nicht immer anwendbar ist: Wenn B mit dem ersten Sprunge auf 10 kommen kann, was jedoch nicht immer möglich ist, so kann er von hier ab, durch Vorrücken in Stufen von je 11 bis zu 98, den Sieg erzwingen, da A alsdann das Ziel erreichen oder überschreiten muß. — Dies zweite Verfahren ist offenbar dann und nur dann nicht ausführbar, wenn A mit einem Sprunge von 9 Fuß beginnt; das erste Verfahren läßt sich dagegen, wie schon gesagt, unter allen Umständen anwenden, wie auch A beginnen mag.

Kapitel II.

Frage 6: Die Anzahl der Inversionen ist 23, die Aufgabe also unlösbar.

Kapitel III.

Frage 7: Die Aufgabe ist symmetrisch zu Nr. IV in § 3 (S. 29), woraus sich das Lösungsschema leicht ergibt.

Frage 8: Die Aufgabe ist reziprok zu Nr. XIV in § 3 (S. 31).

Frage 9: Die Aufgabe ist offenbar analog der Aufgabe Nr. X in § 3. In der Tat wird aus der Kombination 46; 13 durch eine Vierteldrehung im Umdrehungssinne des Uhrzeigers: 64; 37, hieraus durch Spiegelung an der Mittelvertikalen: 24; 57 und hieraus durch Vertauschung von Anfangs- und Schlußloch: 57; 24 (Nr. X). — Die gestellte Aufgabe ist also symmetrisch zu der reziproken von Nr. X in § 3.

Kapitel IV.

Frage 10: Nein; denn bei diesem Gewichtssatz wird der scheinbare Vorteil nur auf Kosten von Lücken gewonnen, indem Wägungen von 32 g und 97 g (32 + 65) überhaupt nicht möglich sind.

Frage 11: Der angegebene Gewichtssatz ermöglicht alle Wägungen von 1 g bis 610 g inkl.; seine 11 Gewichte können ersetzt werden durch folgende 10 Gewichte: 1 g, 2 g, 4 g, 8 g, 16 g, 32 g, 64 g, 128 g, 256 g, 512 g, und diese ermöglichen Wägungen noch bis 1023 g einschließlich.

Frage 12: 127 Umsetzungen im ganzen, davon 64 mit Scheibe 1 und 4 mit Scheibe 5. Die erste Umsetzung ist: „1 von A auf C.“

Kapitel V.

Frage 13: Die Anfangsstellung, bei der alle Ringe oben sind, ist natürlich durchaus noch nicht die ungünstigste für die Trennung der Ringe von der Spange. Vielmehr ist dies bei 5 Ringen[1]) die Stellung $\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ \circ&&&&\\ \hline &\circ&\circ&\circ&\circ\end{array}$, weil hier nämlich zunächst die vier letzten Ringe zu heben sind, was ebensoviele Umstellungen erfordert, als wären die Ringe ursprünglich oben und erst zu senken: also 7 Umstellungen nach unserer Tabelle (S. 50). Dazu kommen dann noch die für den Fall der normalen Anfangsstellung erforderlichen 16 Umstellungen; insgesamt sind es also hier 23 Umstellungen, die nötig sind.

Kapitel VI.

Frage 14: Die „Grundzahlen" sind jetzt 1, 2, 4, 8, 16.

$$\begin{array}{rcccccc} 7 = & & & 4 & + 2 & + 1 \\ 25 = & 16 & + 8 & & & + 1; \end{array}$$

die dritte Zahl muß daher $16 + 8 + 4 + 2 = 30$ sein, und die entstehende „ausgezeichnete" Stellung ist also: 7, 25, 30.

Frage 15: Der zweite Spieler gewinnt, weil die anfängliche Stellung „ausgezeichnet" ist:

$$\begin{array}{rccc} 3 = & & 2 & + 1 \\ 17 = & 16 & & + 1 \\ 18 = & 16 & + 2 & \end{array}$$

Frage 16: Wir haben hier offenbar einen Fall des in Kap. I („Wettspringen") besprochenen Spiels vor uns, und nach den dortigen Ausführungen muß bei richtigem Spiel in diesem besonderen Falle der zweite Spieler siegen: nach seinem ersten Zuge werden von dem Haufen insgesamt 5 Steine verschwunden sein, und nach seinen weiteren Zügen 10, 15, 20, 25 Steine.

Kapitel VII.

Frage 17: Die Fortsetzung ergibt sich unter Anwendung der angegebenen Regel von Feld 37 aus zunächst unzweideutig bis Feld 46 so, wie in Fig. 72 angegeben. Von Feld 46 hätte man der

1) Bezüglich der entsprechenden ungünstigsten Stellung für den Fall von 4 Ringen vgl. die Ausführungen auf S. 48, Zeile 6 v. u. bis S. 49, Z. 7 v. o.

56	17	34	1	54	19	50	3
35	12	55	18	33	2	53	20
16	57	32	13	64	51	4	49
11	36	15	58	27	48	21	52
38	31	26	63	14	59	46	5
25	10	37	28	47	22	43	60
30	39	8	23	62	41	6	45
9	24	29	40	7	44	61	42

Fig. 72.

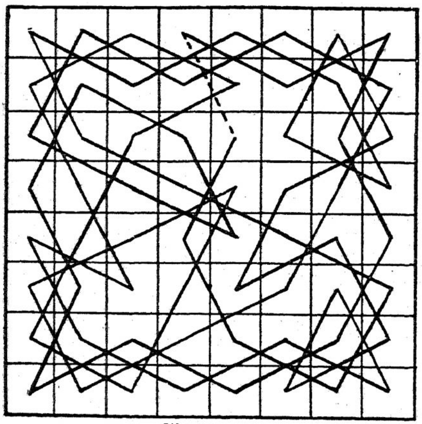


Fig. 73.

Regel zufolge, anstatt nach 47, ebensogut nach 49 springen können. Wählt man, wie wir getan, 47, so ergibt sich die weitere Fortsetzung unzweideutig bis 51; von hier aus stehen 52 und 54 mit gleichen Rechten zur Wahl. Entscheidet man sich für 52, so geht es unzweideutig weiter bis 59, worauf man die Wahl zwischen 60 und 64 hat. Hierauf ergibt sich der Schluß eindeutig. — Der so entstehende Rösselsprung (s. Fig. 73) weist, obwohl er ungefähr zu drei Fünfteln der Fig. 35 entlehnt war, nicht mehr die schöne Form dieses Diagramms auf, wie überhaupt die nach der gedachten Regel gebildeten Rösselsprünge meist unschön sind. Dafür hat unsere Regel uns allerdings dieses Mal zu einem geschlossenen Rösselsprung geführt (die Schlußkette ist in der Figur gestrichelt gezeichnet), während der von Fig. 35 offen war.

Kapitel VIII.

Frage 18: Schreibt man die Zahlen 1 bis 81 zweimal, nämlich in zwei untereinanderstehenden Reihen entsprechend der Schreibweise auf S. 75, hin, so sieht man sofort, daß diese zwei Zahlenreihen die Summe 82×81, eine Reihe allein also $\frac{82 \times 81}{2}$ ergibt;

davon entfällt auf jede der 9 Reihen des magischen Quadrats die Summe $\frac{82 \times 81}{2 \times 9} = 369$.

Frage 19:

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

Fig. 74.

Frage 20: Durch Vertauschung der Zahlen aller in Fig. 51 (S. 51) mit b bezeichneten Gebiete ergibt sich das folgende magische Quadrat:

1	2	3	141	140	139	138	137	136	10	11	12
13	14	15	129	128	127	126	125	124	22	23	24
25	26	27	117	116	115	114	113	112	34	35	36
108	107	106	40	41	42	43	44	45	99	98	97
96	95	94	52	53	54	55	56	57	87	86	85
84	83	82	64	65	66	67	68	69	75	74	73
72	71	70	76	77	78	79	80	81	63	62	61
60	59	58	88	89	90	91	92	93	51	50	49
48	47	46	100	101	102	103	104	105	39	38	37
109	110	111	33	32	31	30	29	28	118	119	120
121	122	123	21	20	19	18	17	16	130	131	132
133	134	135	9	8	7	6	5	4	142	143	144

Fig. 75.

Frage 21: Um 470.

Kapitel IX.

Aufdeckung der Trugschlüsse.

I. Bis zur Gleichung

$$a \cdot (a - a) = (a + a) \cdot (a - a)$$

einschließlich ist der Schluß einwandfrei. Diese Gleichung nun besagt, daß zwei Produkte, jedes aus zwei Faktoren bestehend, einander gleich sind, und zwar ist je ein Faktor in beiden Produkten derselbe, nämlich: $(a - a)$. Wir haben also eine Gleichung von der Form:

$$x \cdot z = y \cdot z.$$

Im allgemeinen folgt aus solcher Gleichung: $x = y$; denn, wenn zwei Produkte von je zwei Faktoren einander gleich sein sollen und der eine Faktor — hier z — ist bei beiden derselbe, so muß in der Regel der andere Faktor auch derselbe sein: es ist $3 \cdot 7$ auch nur $= \mathbf{3} \cdot 7$ und nicht etwa $= \mathbf{5} \cdot \mathbf{7}$. Wenn wir also beispielsweise die Gleichung haben: $x \cdot 7 = 3 \cdot 7$, so folgt daraus unbedingt: $x = 3$. Eine Ausnahme bildet jedoch der Fall, daß der in beiden Produkten vorkommende Faktor die Null ist: es ist $3 \cdot 0 = 5 \cdot 0$, ohne daß die Faktoren 3 und 5 einander gleich sind. Die Gleichung

$$x \cdot z = y \cdot z$$

wird also, wenn $z = 0$ ist, stets befriedigt, welche Werte auch x und y haben, und, wie man aus der Gleichung $3 \cdot 0 = 5 \cdot 0$ nicht schließen darf: $3 = 5$, ebensowenig darf man aus $x \cdot z = y \cdot z$, wenn $z = 0$ ist, schließen: $x = y$. Diesen Trugschluß haben wir aber begangen; denn in unserer Gleichung

$$a \cdot (a - a) = (a + a) \cdot (a - a)$$

war der in beiden Produkten vorkommende Faktor, nämlich $a - a$, $= 0$, und wir schlossen daraus fälschlich die Gleichheit der anderen Faktoren, nämlich: $a = a + a$. Wir dividierten, wie man wohl kurz sagt, die beiden Seiten der Gleichung durch Null, eine Operation, die, wie wir jetzt sehen, nicht erlaubt ist.

II. Auch hier ist, wie in **I**, eine Gleichung „durch Null dividiert", nämlich durch $a - b - c$, einen Ausdruck, der infolge der Definitionsgleichung $a - b = c$ eben den Wert Null hat.

Der Fehler, durch Null zu dividieren, ist überhaupt für die Konstruktion arithmetischer Trugschlüsse einer der beliebtesten, und es erscheint daher angebracht, aus einer vor mehr als einem halben Jahrhundert gedruckten und heute gewiß völlig in Vergessenheit geratenen „Mathematischen Bierzeitung" einen Abschnitt wiederzugeben, der das Verbot, eine Gleichung mit Null zu dividieren, in ebenso treffender, wie amüsanter Weise behandelt. Unter Nachahmung der Genesis, vorzüglich des 3. Kapitels, verkündet die „Bierzeitung" uns folgendes[1]):

1. Und der Herr sprach zu Adam: Siehe, ich gebe in deine Hand das ganze mathematische Paradies.
2. Du darfst dividieren mit allen Zahlen, die darin sind.
3. Aber mit der Null darfst du nicht dividieren, denn sie ist ein Geschöpf des Fürsten der Finsternis.
4. Die Schlange aber war listiger als alle Tiere auf dem Felde und sprach zu der Eva: Sollt ihr nicht dividieren mit allen Zahlen des Paradieses?
5. Sprach das Weib: Mit allen Zahlen soll mein Mann dividieren, nur mit der Null nicht; denn sie ist ein Geschöpf der Finsternis.
6. Sprach die Schlange: sie ist mit nichten ein Geschöpf der Finsternis, sondern, wenn ihr mit Null dividiert, werdet ihr unterscheiden lernen, was richtig und falsch ist.
7. Und das Weib schauete an, daß mit Null gut zu dividieren wäre, daß es eine lustige Zahl wäre, weil sie klug mache, und sprach zu ihrem Manne: Dividiere doch! Siehst du denn nicht, daß die Gleichung viel einfacher wird?
8. Und Adam faßte sich ein Herz und dividierte, „und die Augen gingen ihm plötzlich auf und gingen ihm gleichzeitig über."
9. Aber der Herr sprach zu Adam: Hast du nicht mein Gebot übertreten?
10. Darum eliminiere ich dich aus dem mathematischen Paradiese.
11. Im Schweiße deines Angesichts sollst du Gleichungen rechnen und Beweise suchen, und sollst nichts glauben, bis du es bewiesen hast.

1) Wir haben am Ende ein paar Verse gestrichen und entsprechend die Verszahlen geändert — Die unter Redaktion von Th. Berner in Berlin erschienene „Mathematische Bierzeitung" ist vom 28. Januar 1863 datiert.

III. Bis zur Gleichung $(d-b)^2 = (d-a)^2$ einschließlich ist das Beweisverfahren einwandfrei. Aus der Gleichheit zweier Ausdrücke folgt jedoch nicht, daß auch die Quadratwurzel aus dem einen Ausdruck gleich der aus dem anderen ist, vielmehr hat die Quadratwurzel bekanntlich zwei Werte, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden, und, wenn A und B zwei einander gleiche Größen sind, so ist also die Quadratwurzel aus A nicht schlechtweg gleich der Quadratwurzel aus B, sondern nur gleich einem der beiden Werte, die die Quadratwurzel aus B besitzt. Aus unserer Gleichung $(d-b)^2 = (d-a)^2$ durften wir daher nicht, wie wir es taten, ohne weiteres schließen: $d-b = d-a$, sondern nur: $d-b$ ist entweder

$$= + (d-a)$$

oder

$$= - (d-a).$$

Welcher dieser beiden Fälle besteht, erkennen wir nun leicht: denn, wenn von den beiden Größen a und b die größere etwa b ist, so ist, da d zwischen a und b liegt, $d-b$ negativ und $d-a$ positiv; es kann also gar nicht, wie wir annahmen,

$$d - b = + (d-a)$$

sein, sondern nur:

$$d - b = - (d-a),$$

und diese Gleichung würde uns zu keinerlei paradoxem Resultat führen, vielmehr folgt aus ihr nur:

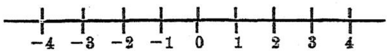
$$d - b = - d + a$$

und weiter:

$$2d = a + b,$$

d. h. wir kommen nur zu der alten Gleichung für unser d (s. S. 95) zurück.

IV. Die Ungleichung $a - 1 < a$, von der wir ausgingen, ist natürlich unanfechtbar. Was aber anfechtbar ist und überhaupt den Trugschluß herbeigeführt hat, das ist die Multiplikation der beiden Seiten dieser Ungleichung mit einer negativen Größe $(-a)$. Wohl darf man eine Gleichung auf beiden Seiten mit derselben negativen Größe multiplizieren, nicht aber ist dies bei einer Ungleichung zulässig, wie folgendes Beispiel zeigen mag: Aus der Ungleichung $1 < 2$ würde durch Multiplikation mit (-2) folgen: $-2 < -4$, eine Ungleichung, die offenbar unrichtig ist; denn (-2) ist nicht, wie unsere Ungleichung will, kleiner, sondern vielmehr größer als (-4). Wer nämlich 2 Mk. Schulden und weiter nichts besitzt, „besitzt“ immer noch „mehr“ als jemand, dessen ganzes „Vermögen“ in 4 Mk. Schulden besteht (der Leser, dem etwa diese Auffassungsweise nicht geläufig sein sollte, braucht sich nur vorzustellen, daß die beiden gedachten Personen je 5 Mk. verdienen und nun jeder von seinem Verdienst seine Schulden abträgt; dann zeigt sich unzweifelhaft, wer von beiden zuvor mehr „Vermögen“ besaß). Bei der üblichen graphischen Darstellung der positiven und negativen Zahlen, die man so zu geben pflegt, daß die Zahlen von links nach rechts hin beständig wachsen, sieht demnach der uns hier interessierende Abschnitt der Zahlenreihe so aus:



(4 somit rechts von 2, aber -4 links von -2). — Wenn wir also die Ungleichung $1 < 2$ auf beiden Seiten mit (-2) multiplizieren wollten, so hätten wir gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umkehren müssen und hätten alsdann die richtige Ungleichung $-2 > -4$ bekommen. Ebenso folgt in unserem ursprünglichen Falle aus der Ungleichung $a - 1 < a$ durch Multiplikation mit $(-a)$ nur:

$$-a^2 + a > -a^2$$

oder $a > 0$, eine Ungleichung, die nur unsere ursprüngliche Festsetzung, daß a eine positive Größe sein soll, wiederholt, also nichts Unerwartetes aussagt.

V. Während in **IV** der Trugschluß dadurch ermöglicht wurde, daß eine Ungleichung ohne Umkehrung des Ungleichheitszeichens mit einer negativen Größe auf beiden Seiten multipliziert wurde, ist hier, was natürlich auf dasselbe hinauskommt, eine Ungleichung durch eine negative Größe, nämlich durch $p - q$, dividiert (da $p < q$ ist, so ist $p - q$ negativ). Die Division an sich ist freilich zulässig, jedoch hätten wir dabei das Ungleichheitszeichen umkehren müssen und hätten alsdann erhalten: $p + q > q$, eine Ungleichung, die unzweifelhaft richtig ist.

VI. Wir gingen bei unserem Schlußverfahren aus von der Behauptung, daß das Doppelte einer Größe größer ist als das Einfache. Dieser Satz gilt jedoch nur für p o s i t i v e Größen: Wenn A doppelt soviel wirkliches Vermögen besitzt als B, so ist das Vermögen des A natürlich größer als das von B. Besteht aber das „Vermögen“

beider nur in Schulden und hat A deren doppelt so viele als B, so steht A nicht besser da als B, sondern schlechter; das „Vermögen" von A ist dann also **kleiner** als das von B (vgl. die Ausführungen zu **IV**). Nun ist aber log a für den Wert, den wir a gaben, nämlich für $^1/_2$, keine positive, sondern eine negative Größe; die Gleichung

$$2 \cdot \log a > \log a$$

gilt also für unser $a = {}^1/_2$ nicht, sondern nur, wenn $a > 1$ ist.

VII. Der Trugschluß beruht hier, wie bei **III**, darauf, daß von den zwei Werten einer Quadratwurzel der unrichtige gewählt ist. Mit den richtigen Vorzeichen der Quadratwurzeln versehen, würde unsere Gleichung lauten: $-\sqrt{x} = i^2\sqrt{x}$, woraus folgen würde: $i^2 = -1$. — Überhaupt sind die imaginären Größen in besonderem Maße geeignet, um zu unrichtigen, beabsichtigten oder unbeabsichtigten Ergebnissen zu führen. So wird z. B. auch die Gleichung $i^4 = 1$, die natürlich richtig ist, benutzt, um daraus durch „Radizieren" wieder unsere falsche Gleichung $i^2 = 1$ herzuleiten, während richtigerweise der andere Wert von $\sqrt{1}$, also -1, mit der Folge also: $i^2 = -1$, zu nehmen wäre.

VIII. Der Leser erkennt leicht, daß die Fig. 62 geflissentlich falsch gezeichnet ist, um den Trugschluß zu ermöglichen. Denkt man sich nämlich B mit C und D verbunden, so sieht man, daß $\sphericalangle$ C B A und ebenso $\sphericalangle$ A B D als Peripheriewinkel im Halbkreise je ein Rechter sind, $\sphericalangle$ C B D mithin ein Gestreckter und die Linie C B D somit eine Gerade ist. Die Verbindungslinie der Punkte C und D geht also notwendig durch B, den zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise.

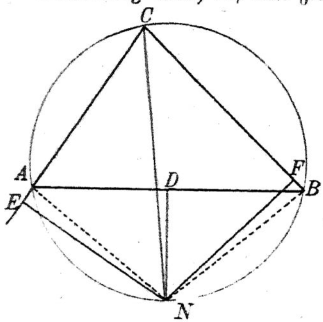


Fig. 76.

IX. Der Trugschluß beruht darauf, daß sowohl Fig. 63, wie Fig. 64 falsch gezeichnet sind. Zunächst Fig. 63: Die Halbierende eines Winkels und das Mittellot zur gegenüberliegenden Dreiecksseite schneiden sich nicht, wie wir es gezeichnet haben, **innerhalb**, sondern **außerhalb** des Dreiecks. Dies ergibt sich sofort, wenn wir den Kreis durch die drei Ecken des Dreiecks, den sogenannten „Umkreis" des Dreiecks, zeichnen (s. Fig. 76). Verlängern wir nämlich die

Halbierende des Winkels bei C bis zu diesem Kreise, so muß sie diesen gerade in der Mitte des Bogens A B treffen, weil zu gleichen Peripheriewinkeln ($\sphericalangle$ A C N = $\sphericalangle$ B C N) auch gleiche Kreisbögen gehören; Bogen A N ist also = Bogen B N. Ferner muß nach bekanntem Satze das auf der Sehne A B in deren Mitte D errichtete Lot auch durch die Mitte des zugehörigen Kreisbogens, also durch N, gehen. Winkelhalbierende und Mittellot gehen somit beide durch diesen Punkt N und zwar ist dies, da zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden, ihr einziger Schnittpunkt, so daß also ein Schnittpunkt im Innern des Dreiecks, wie wir ihn in Fig. 63 angenommen hatten, nicht möglich ist.

Damit ist Fig. 63 erledigt. Nun Fig. 64! Da ACBN, wie soeben bereits bewiesen (s. Fig. 76), ein Sehnenviereck ist, so betragen ein Paar gegenüberliegende Winkel dieses, nämlich $\sphericalangle$ CAN und $\sphericalangle$ CBN, nach bekanntem Satze zusammen 2 R; mithin ist — abgesehen von dem besonderen Falle, daß jeder dieser Winkel ein Rechter und $\triangle$ ABC wirklich gleichschenklig ist — der eine dieser beiden Winkel spitz, der andere stumpf. Somit können sie nicht beide, wie in Fig. 64 angenommen war, Nebenwinkel von rechtwinkligen Dreiecken sein. Vielmehr wird nur der eine dieser beiden Winkel, der stumpfe, — in Fig. 76 $\sphericalangle$ CAN — Nebenwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks sein, während der andere Winkel, der spitze, — in Fig. 76 $\sphericalangle$ CBN — dem entsprechenden rechtwinkligen Dreieck FBN als Innenwinkel angehört. Von den Fußpunkten der Lote NF und NE liegt also der eine auf der betreffenden Dreiecksseite selbst, der andere aber auf deren Verlängerung.

Wendet man nun auf die richtiggezeichnete Figur, also auf Fig. 76, dasselbe Schlußverfahren an, wie vorher auf die unrichtigen Figuren, so erhält man zwar ebenso wie zuvor:

$$CE = CF$$

und

$$AE = BF,$$

aber der Unterschied besteht darin, daß sich die eine Dreiecksseite, CA, als Differenz dieser Strecken CE und AE, die andere Dreiecksseite, CB, dagegen als Summe der entsprechenden Stücke (CF und FB) darstellt. Wie zuvor, würden wir also jetzt die Gleichung haben:

$$CF + BF = CE + AE,$$

aber hieraus folgt nicht: CB = CA, sondern vielmehr:

$$CB = CA + 2\,AE.$$

Unsere Gleichung besagt also, daß die beiden Dreiecksseiten CB und CA ungleich sind und die größere von ihnen, CB, um das doppelte Stück von AE länger ist als die kleinere, CA.

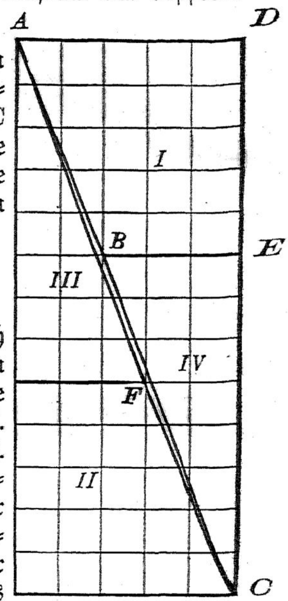


Fig. 77.

X. Der Fehler liegt darin, daß, wenn man die Stücke I und IV der Fig. 65 so aneinanderlegt, wie in Fig. 66, die so entstehende Linie ABC (s. Fig. 77) keine gerade, sondern eine gebrochene Linie ist, die in B einen Knick hat. Wäre die Linie nämlich gerade, so müßte die Proportion bestehen:

$$AD:BE = DC:EC$$

oder: $$5:3 = 13:8,$$

eine Proportion, die falsch ist, da aus ihr durch Multiplikation der äußeren und der inneren Glieder folgen würde: $40 = 39$. Ebenso wie mit den Stücken I und IV, ist es mit II und III. Die Fig. 66 ist also absichtlich falsch gezeichnet. Legt man die 4 Stücke I, II, III, IV in richtiger Wiedergabe aneinander, so entsteht vielmehr die Fig. 77, die im Innern eine Lücke, das langgestreckte Parallelogramm ABCF, aufweist. Der Flächeninhalt dieses ist gerade gleich dem eines der 64 Feldquadrate; es ist dies das 65. Feld, das wir in unsere falsche Zeichnung (Fig. 66) unmerklich einschmuggelten, indem wir diese in Wirklichkeit bestehende „Lücke" verwischten.

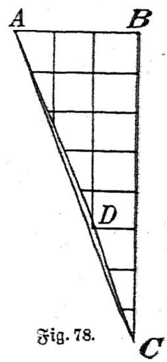


Fig. 78.

Ähnlich steht es mit Fig. 67. Die lange schräge Linie dort würde bei richtiger Zeichnung an zwei Stellen einen Knick haben. Der in Fig. 67 mit III bezeichnete Gebietsteil hat bei richtiger Zeichnung nämlich das Aussehen von ABCD unserer Fig. 78, und zwar ist ADC eine gebrochene Linie. Daß ADC nicht gerade sein kann, zeigt die Unrichtigkeit der Proportion $3:2 = 8:5$. Die gerade Verbindungslinie von A und C liegt außerhalb des Vierecks ADCB, und nicht dieses, sondern das Dreieck ACB ist kongruent dem Stück III der Fig. 65. Wenn wir also das Viereck ABCD fälschlich für das Dreieck ABC setzen, lassen wir das Dreieck ADC verschwinden, und zwar wird diese Unterschlagung in Fig. 67 zweimal begangen. Die beiden so forteskamotierten Dreiecke haben zusammen den Flächeninhalt des 64. Feldquadrats, das beim Übergang von Fig. 65 zu Fig. 67 verschwindet.

XI. Der Trugschluß kommt dadurch zustande, daß $\frac{z-x}{x-z} = -1$ gesetzt wird. Freilich ist im allgemeinen $\frac{z-x}{x-z} = -\frac{x-z}{x-z} = -1$, jedoch gilt dies nur so lange, als $x-z$ von 0 verschieden ist. Ist aber $x-z=0$, also auch $z-x=0$, so ist unser Ausdruck $\frac{z-x}{x-z} = \frac{0}{0}$, also unbestimmt (über das Dividieren resp. „Heben" durch Null vgl. oben unter **I** und **II**). Dieser besondere Fall liegt nun aber hier vor, wie sich leicht ergibt: Es war die Proportion $\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z}$ hergeleitet; aus ihr folgt $yz + z^2 = x^2 + xy$ oder $x^2 - z^2 + xy - yz = 0$ oder $(x+z)(x-z) + y(x-z) = 0$ oder $(x-z) \cdot (x+y+z) = 0$. Diese letzte Gleichung verlangt, daß ein Produkt von zwei Faktoren — einerseits $(x-z)$, andererseits $(x+y+z)$ — Null wird. Dann muß einer der Faktoren den Wert 0 haben und, da $x+y+z$, die Linie AC unserer Figur, nicht gleich Null ist, so muß eben $x-z=0$ sein

XII. Der Trugschluß beruht natürlich darauf, daß nur der große Kreis abrollt und nicht der kleine. Rollte der kleine Kreis auf der Geraden CD ab, so würde er eine volle Umdrehung erheblich früher als jetzt, also vor der Stellung D, beendet haben.[1])

XIII. Weil A, C, B, D vier harmonische Punkte sind, ist $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$. Da nun $AD > AC$, so ist $BD > BC$; F, die Mitte von CD, muß also rechts von B, d. h. außerhalb des Kreises, liegen, und nur unsere unrichtige Zeichnung ermöglichte den Trugschluß.

XIV. Nehmen wir, um bequeme Verhältnisse zu haben, an, daß die Schildkröte und Achilles sich, wie es schon in Fig. 71 gezeichnet

1) Die Bahnkurve, die ein bestimmter Punkt des Scheibenumfangs bei unserer Bewegung macht. ist übrigens eine sogenannte „gemeine Zykloide", und zwar ist die Wegstrecke, die dieser Scheibenpunkt von A bis B zurücklegt, gleich dem vierfachen Scheibendurchmesser. Die Bahnkurve eines bestimmten Punktes der Peripherie des kleinen Kreises ist eine sogenannte „verkürzte Zykloide".

war, in gerader Linie bewegen, und zwar Achilles mit einer Geschwindigkeit von 100 m = 1 hm (Hektometer) in der Minute, die Schildkröte dagegen mit einer Geschwindigkeit, die nur $^1/_{10}$ von jener, also 10 m = 1 dkm (Dekameter) pro Minute beträgt. Der anfängliche Vorsprung der Schildkröte sei 100 m. Alsdann gelangt Achilles bereits nach 1 Minute an den anfänglichen Standpunkt S der Schildkröte; diese ist inzwischen um 1 dkm, bis S_1, weiter gekrochen, und Achilles braucht $^1/_{10}$ Minute, um auch nach dort zu gelangen. Inzwischen ist die Schildkröte jedoch um 1 m weiter gekrochen bis S_2, und Achilles braucht $^1/_{100}$ Minute, um nach dort zu kommen. In dieser Zeit ist die Schildkröte um 1 dcm weiter gekrochen bis S_3, wofür Achilles dann $^1/_{1000}$ Minute gebrauchen würde, und so weiter. Die ganze Zeitspanne, auf die sich das Raisonnement Zenos bezieht, umfaßt also insgesamt 1 Minute + $^1/_{10}$ Minute + $^1/_{100}$ Minute + $^1/_{1000}$ Minute + $^1/_{10000}$ Minute und so weiter. Innerhalb dieser Zeitspanne ist Zenos Behauptung, daß Achilles die Schildkröte nicht einhole, unzweifelhaft richtig. Welches ist nun aber die Größe dieser Zeitspanne? Die Reihe der Zeitelemente lautet, ein wenig anders geschrieben, so: 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + ... Minuten oder 1,1111 ... Minuten, und nach bekannten Sätzen über die periodischen Dezimalbrüche sind dies $1^1/_9$ Minuten. Die ganze Zeitspanne, auf die sich Zenos Raisonnement erstreckt, umfaßt also nur $1^1/_9$ Minuten: Innerhalb dieser Zeit holt Achilles die Schildkröte nicht ein, jedoch wird im Laufe dieser Zeit der Abstand zwischen beiden kleiner und kleiner, und am Ende dieser Zeitspanne ist der Abstand so klein, daß er kleiner ist als jede noch so kleine Größe. Denn der Wert unserer unendlichen Reihe der Zeitgrößen: $1^1/_9$ Minute, schließt auch die entferntesten, noch so kleinen Zeitelemente der Reihe mit ein. Ein Abstand nun, der kleiner ist als jede noch so kleine Größe, ist aber offenbar geradezu Null, d. h. nach $1^1/_9$ Minuten hat Achilles die Schildkröte eingeholt und würde nun, wenn beide sich mit ihren bisherigen Geschwindigkeiten weiter bewegen, im nächsten kleinsten Zeitelement vorankommen[1]).

XV. Die Schlußweise von B ist fehlerhaft; dagegen hat A Recht:

---

1) Aristoteles suchte das Sophisma Zenons dadurch zu entkräften, daß er bemerkte, die Linie als Kontinuum dürfe nicht mit der Gesamtheit ihrer Punkte identifiziert werden; denn bei dieser Auffassung würden alle endlichen Linien, weil sie gleich viele, nämlich unendlich viele Punkte enthalten, unter sich gleich lang sein.

Es sind, wenn wir dies ausführlich angeben, folgende verschiedene Bilder nach einem Wurf der drei Münzen möglich (k = Kopfseite, w = Wappenseite):

1) k k k	3) k w k	5) w k k	7) w w k
2) k k w	4) k w w	6) w k w	8) w w w

Von diesen acht Fällen sind nur zwei günstig: der erste und der letzte; die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des erwarteten Ergebnisses beträgt also: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. — Das Schlußverfahren des B nimmt an, daß die ungünstigen Fälle nur ebenso zahlreich sind wie die günstigen, und übersieht dabei folgendes: Daß beispielsweise zwei Münzen k zeigen, die dritte aber w, kommt nicht bloß in einem Falle vor, sondern in dreien, nämlich in Fall 2, 3, 5 der obigen Zusammenstellung, indem nämlich das w entweder auf der dritten oder aber auf der zweiten oder schließlich auf der ersten Münze erscheint. Ganz entsprechend ist es mit der Kombination, die aus zwei w und einem k besteht (Fall 4, 6, 7). Im Gegensatz dazu kann der günstige Fall k k k nur auf einerlei Art zustande kommen, und dasselbe gilt für den anderen günstigen Fall, nämlich w w w. Die ungünstigen Fälle sind also dreimal so häufig wie die günstigen.

Galton machte übrigens auch einen praktischen Versuch und benutzte hierfür drei Würfel, wobei er festsetzte: Die geraden Würfelzahlen bedeuten „Kopf", die ungeraden „Wappen". Er tat nun mit den drei Würfeln 120 Würfe; der Fall, daß alle drei Würfel gerade Zahlen oder aber alle drei ungerade Zahlen aufwiesen, trat dabei 28 mal ein. Der theoretisch zu erwartende Wert wäre 30.

II. Pädagogik und Bildungswesen.

III. Sprache, Literatur, Bildende Kunst und Musik.

Drama. D. dtsche. D. d. 19. Jahrh. J. s. Entwickl. dargest. v. Prof. Dr. G. Witkowski. 4. Aufl. M. Bildn. Hebbels. (Bd. 51.)
— siehe auch Grillparzer, Hauptmann, Hebbel, Ibsen, Lessing, Literatur, Schiller, Shakespeare, Theater.

Dürer, Albrecht. V. Prof. Dr. R. Wustmann. 2. Aufl. von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. Mit Titelb. u. zahlr. Abbildungen. (Bd. 97.)

Französisch siehe Roman.

Frauendichtung. Geschichte der deutschen F. seit 1800. Von Dr. H. Spiero. Mit 3 Bildnissen auf 1 Tafel. (Bd. 390.)

Fremdwortkunde. Von Dr. Elise Richter. (Bd. 570.)

Gartenkunst siehe Abt. VI.

Griech. Komödie, Die. V. Geh.-Rat. Prof. Dr. A. Körte. M. Titelb. u. 2 Taf. (400.)

Griechische Kunst. Die Blütezeit der g. K. im Spiegel der Reliefsarkophage. Eine Einf. i. d. griech. Plastik. V. Prof. Dr. H. Wachtler. 2. A. M. zahlr. Abb. (272.)
— siehe auch Dekorative Kunst.

Griechische Tragödie, Die. Von Prof. Dr. J. Geffcken. Mit 5 Abb. i. Text u. auf 1 Tafel. (Bd. 566.)

Grillparzer, Franz. Der Mann u. d. Werk. V. Prof. Dr. A. Kleinberg. M. Bildn.

Gudrun siehe Nibelungenlied. [(Bd. 513.)

Harmonielehre. Von Dr. H. Scholz. (Bd. 560.)

Harmonium s. Tasteninstrum.

Hauptmann, Gerhart. V. Prof. Dr. E. Sulger-Gebing. Mit 1 Bildn. 2., verb. u. verm. Aufl. (Bd. 283.)

Haydn, Mozart, Beethoven. Von Prof. Dr. C. Krebs. 2. Aufl. M. 4 Bildn. (92.)

Hebbel, Friedrich. Von Geh. Hofrat Prof. Dr. O. Walzel. M. 1 Bildn. 2. Aufl. (Bd. 408.)

Heldensage, Die germanische. Von Dr. J. W. Bruinier. (Bd. 486.)
— siehe auch Volkssage.

Homerische Dichtung, Die. Von Rektor Dr. G. Finsler. (Bd. 496.)

Ibsen, Björnson u. i. Zeitgenossen. Von Prof. Dr. B. Kahle. 2. Aufl. v. Dr. G. Morgenstern. M. 7 Bildn. (Bd. 193.)

Impressionismus. Die Maler des J. Von Prof. Dr. B. Lázár. Mit 32 Abb. u. 1 farb. Tafel (Bd. 395.)

Instrumente s. Tasteninstrum., Orchester.

Klavier siehe Tasteninstrumente.

Komödie siehe Griech. Komödie.

Kunst. Das Wesen der deutschen bildenden K. Von Geh. Rat Prof. Dr. H. Thode. (Bd. 585.)
— **Deutsche K. im tägl. Leben bis zum Schlusse d. 18. Jahrh.** V. Prof. Dr. B. Haendcke. Mit 63 Abb. (Bd. 198.)
— s. a. Bauk., Bild., Dekor., Griech. K.; Pompeji, Stile; Gartenk. Abt. VI.

Kunstpflege in Haus und Heimat. Von Superint. R. Bürkner. 3. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 77.)

Lessing. Von Dr. Ch. Schrempf. Mit einem Bildnis. (Bd. 403.)

Literatur. Entwickl. der deutsch. L. seit Goethes Tod. V. Dr. W. Brecht. (595.)

Lyrik. Geschichte d. deutsch. L. s. Claudius. V. Dr. H. Spiero. 2. Aufl. (Bd. 254.)
— siehe auch Frauendichtung, Literatur, Minnesang, Volkslied.

Maler, Die altdeutschen, in Süddeutschland. Von H. Nemitz. Mit 1 Abb. i. Text und Bilderanhang. (Bd. 464.)
— s. a. Michelangelo, Impression.

Malerei, Die deutsche, im 19. Jahrh. Von Prof. Dr. R. Hamann. 2 Bände Text, 2 Bände mit 57 ganzseitigen und 200 halbseitigen Abb., auch in 1 Halbpergamentbd. zu M. 7.—. (Bd. 448—451.)
— **Niederländische M. im 17. Jahrh.** Von Prof. Dr. H. Jantzen. Mit 37 Abb.
— siehe auch Rembrandt. [(Bd. 373.)

Märchen s. Volksmärchen.

Michelangelo. Eine Einführung in das Verständnis seiner Werke. V. Prof. Dr. E. Hildebrandt. Mit 44 Abb. (392.)

Minnesang. Die Liebe im Liede des deutschen Mittelalters. Von Dr. J. W. Bruinier. (Bd. 404.)

Mozart siehe Haydn.

Musik. Die Grundlagen d. Tonkunst. Versuch einer entwicklungsgesch. Darstell. d. allg. Musiklehre. Von Prof. Dr. H. Rietsch. 2. Aufl. (Bd. 178.)
— **Musikalische Kompositionsformen.** V. S. G. Kallenberg. Band I: Die elementar. Tonverbindungen als Grundlage d. Harmonielehre. Bd. II: Kontrapunktik u. Formenlehre. (Bd. 412. 413.)
— **Geschichte der Musik.** Von Dr. A. Einstein. (Bd. 438.)
— **Beispielsammlung zur älteren Musikgeschichte.** V. Dr. A. Einstein. (439.)
— **Musikal. Romantik. Die Blütezeit d. m. R. in Deutschland.** Von Dr. E. Istel. Mit 1 Silhouette. (Bd. 239.)
— s. a. Haydn, Mozart, Beethoven, Oper, Orchester, Tasteninstrumente, Wagner.

Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr. J. v. Negelein. 2. Aufl. (Bd. 95.)
— siehe auch Volkssage, Deutsche.

Nibelungenlied, Das, u. d. Gudrun. Von Prof. Dr. F. Körner. (Bd. 591.)

Niederländische Malerei s. Malerei.

Novelle siehe Roman.

Oper, Die moderne. Vom Tode Wagners bis zum Weltkrieg (1883—1914). Von Dr. E. Istel. Mit 3 Bildn. (Bd. 495.)
— siehe auch Haydn, Wagner.

Orchester. D. Instrumente d. O. V. Prof. Dr. Fr. Volbach. M. 60 Abb. (Bd. 384.)
— **Das moderne Orchester in seiner Entwicklung.** V. Prof. Dr. Fr. Volbach. M. Partiturbeisp. u. Taf. 2. Aufl. (Bd. 308.)

Orgel siehe Tasteninstrumente.

Personennamen, D. deutsch. V. Geh. Studienrat A. Bähnisch. 2. A. (Bd. 296.)

IV. Geschichte, Kulturgeschichte und Geographie.

Bismarck und seine Zeit. Von Professor Dr. V. Valentin. Mit einem Titelbild. 4., durchges. Aufl. (Bd. 500.)

Böhmen. Von Prof. Dr. R. F. Kaindl. (Bd. 701.)

Brandenburg.-preuß. Gesch. Von Kgl. Archivar Dr. Fr. Israel. 2 Bde. I. V. d. ersten Anfängen b. z. Tode König Fr. Wilhelms I. 1740. II. Von dem Regierungsantritt Friedrichs d. Gr. bis zur Gegenwart. Bd. 440/441.)

Bulgarien. V. Priv.-Doz. Dr. H. Grothe. (Bd. 597.)

Bürger im Mittelalter s. Städte.

Byzant. Charakterköpfe. Von Dr. phil. K. Dieterich. Mit 2 Bildn. (Bd. 244.)

Calvin, Johann. Von Pfarrer Dr. G. Sodeur. Mit 1 Bildnis. 2 Aufl. (Bd. 247.)

Christentum u. Weltgeschichte seit der Reformation. Von Prof. D. Dr. K. Sell. 2 Bde. (Bd. 297/298.)

Deutsch siehe Bauernhaus, Bauernstand, Dorf, Feste, Frauenleben, Geschichte, Handel, Handwerk, Reich, Staat, Städte, Verfassung, Verfassungsr., Volksstämme, Volkstrachten, Wirtschaftsleben usw.

Deutschtum im Ausland, Das, vor dem Weltkriege. Von Prof. Dr. R. Hoeniger. 2. Aufl. (Bd. 402.)

Dorf, Das deutsche. V. Prof. R. Mielke. 2. Aufl. Mit 51 Abb. (Bd. 192.)

Eiszeit, Die, und der vorgeschichtliche Mensch. Von Geh. Bergrat Prof. Dr. G. Steinmann. 2. Aufl. M. 24 Abbildungen. (Bd. 302.)

Entdeckungen, Das Zeitalter der E. Von Prof. Dr. S. Günther. 3. Aufl. Mit 1 Weltkarte. (Bd. 26.)

Erde siehe Mensch u. E.

Erdkunde, Allgemeine. 8 Bde. Mit Abb. I. Die Erde, ihre Bewegungen u. ihre Eigenschaften (math. Geographie u. Geonomie). Von Admiralitätsrat Prof. Dr. E. Kohlschütter. (Bd. 625.) II. Die Atmosphäre der Erde (Klimatologie, Meteorologie). Von Prof. D. Baschin. (Bd. 626.) III. Geomorphologie. Von Prof. F. Machatschek. (Bd. 627.) IV. Physiogeographie des Süßwassers. Von Prof. F. Machatschek. (Bd. 628.) V. Die Meere. Von Prof. Dr. A. Merz. (Bd. 629.) VI. Die Verbreitung der Pflanzen. Von Dr. Brockmann-Jerosch. (Bd. 630.) VII. Die Verbreitg. d. Tiere. V. Dr. W. Knopfli. (Bd. 631.) VIII. Die Verbreitg. d. Menschen auf d. Erdoberfläche (Anthropogeographie). V. Prof. Dr. N. Krebs. (Bd. 632.)

Europa. Vorgeschichte E.'s. Von Prof. Dr. H. Schmidt. (Bd. 571/572.)

Familienforschung. Von Dr. E. Devrient. M. Abb. u. Taf. 2. Aufl. (350.)

Feldherren, Große. Von Major F. C. Endres. (Bd. 687/688.)

Feste, Deutsche, u. Volksbräuche. V. Priv.-Doz. Dr. E. Fehrle. M. 30 Abb. (Bd. 518.)

Finnland. Von Lektor F. Öhquist. (700.)

Französische Geschichte. I.: Das französische Königstum. Von Prof. Dr. R. Schwemer. (Bd. 574.)

— siehe auch Napoleon, Revolution.

Frauenbewegung, Die moderne. Ein geschichtlicher Überblick. Von Dr. K. Schirmacher. 2. Aufl. (Bd. 67.)

Frauenleben, Deutsch., i. Wandel d. Jahrhunderte. Von Geh. Schulrat Dr. Ed. Otto. 3. Aufl. 12 Abb. i. T. (Bd. 45.)

Friedrich d. Gr. V. Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. A. M. 2 Bildn. (Bd. 246.)

Gartenkunst. Gesch. d. G. V. Baurat Dr.-Ing. Chr. Ranck. M. 41 Abb. (274.)

Geographie der Vorwelt (Paläogeographie). Von Priv.-Doz. Dr. E. Dacqué. Mit 21 Abb. (Bd. 619.)

Geologie siehe Abt. V.

German. Heldensage s. Heldensage.

Germanische Kultur in der Urzeit. Von Bibliotheksdir. Prof. Dr. G. Steinhausen. 3. Aufl. Mit 13 Abb. (Bd. 75.)

Geschichte, Deutsche, im 19. Jahrh. b. z. Reichseinheit. V. Prof. Dr. R. Schwemer. 3 Bde. I.: Von 1800—1848. Restauration und Revolution. 3. Aufl. (Bd. 37.) II.: Von 1848—1862. Die Reaktion und die neue Ära. 2. Aufl. (Bd. 101.) III.: Von 1862—1871. V. Bund z. Reich. 2. Aufl. (Bd. 102.)

Griechentum. Das G. in seiner geschichtlichen Entwicklung. Von Prof. Dr. R. v. Scala. Mit 46 Abb. (Bd. 471.)

Griechische Städte. Kulturbilder aus gr. St. Von Professor Dr. E. Ziebarth. 2. A. M. 23 Abb. u. 2 Tafeln. (Bd. 131.)

Handel. Geschichte d. Welthandels. Von Realgymnasial-Dir. Dr. M. G. Schmidt. 3. Aufl. (Bd. 118.)

— **Geschichte des deutschen Handels seit d. Ausgang des Mittelalters.** Von Dir. Prof. Dr. W. Langenbeck. 2. Aufl. Mit 16 Tabellen. (Bd. 237.)

Handwerk, Das deutsche, in seiner kulturgeschichtl. Entwickl. Von Geh. Schulrat Dr. E. Otto. 4. Aufl. Mit 33 Abb. auf 12 Tafeln. (Bd. 14.)

— siehe auch Dekorative Kunst Abt. III.

Haus. Kunstpflege in Haus u. Heimat. V. Superint. R. Bürkner. 3. Aufl. Mit Abb. (Bd. 77.)

— siehe auch Bauernhaus, Dorf.

Heldensage, Die germanische. Von Dr. J. W. Bruinier. (Bd. 486.)

Hellenist.-röm. Religionsgeschichte s. Abt. I.

Japaner, Die, i. d. Weltwirtschaft. V. Prof. Dr. K. Rathgen. 2. Aufl. (Bd. 72.)

Jesuiten, Die. Eine hist. Skizze. Von Prof. Dr. H. Boehmer. 4. Aufl. (Bd. 49.)

Indien. Von Prof. Dr. Sten Konow. (Bd. 614.)

Indogermanenfrage. Von Dir. Dr. R. Agahd. (Bd. 594.)

Internationale Leben, Das, der Gegenw. Von Dr. h. c. A. H. Fried. M. 1 Taf. (Bd. 226.)

Island, d. Land u. d. Volk. V. Prof. Dr. P. Herrmann. M. 9 Abb. (Bd 461.)
Kaisertum und Papsttum. Von Prof. Dr. A. Hofmeister. (Bd. 576.)
Kartenkunde. **Vermessungs- u. K.** 6 Bde. Mit Abb. I. Geogr. Ortsbestimmung. Von Prof. Schmauder. (Bd. 606.) II. Erdmessung. Von Prof. Dr. O. Eggert. (Bd. 607.) III. Landmessung. Von Steuerrat Suckow. (Bd. 608.) IV. Ausgleichungsrechnung. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. E. Hegemann. (Bd. 609.) V. Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie. Von Diplom-Ing. H. Lüscher. (Bd. 610.) VI. Kartenkunde. Von Finanzrat Dr.-Ing. A. Egerer. 1. Einführ. i. d. Kartenverständnis. 2. Kartenherstellung (Landesaufn.). (Bd. 611/612.)
Kirche s. Staat u. K.
Kolonialgeschichte, Allgemeine. Von Prof. Dr. F. Keutgen. 2 Bde. (Bd. 545/546.)
Kolonien. Die deutschen. (Land u. Leute.) Von Dr. A. Heilborn. 3. Aufl. Mit 28. Abb. u. 8 Karten. (Bd. 98.)
Königstum, Französisches. Von Prof. Dr. R. Schwemer (Bd. 574.)
Krieg und Sieg. Eine kurze Darstellung der mod. Kriegskunst. Von Major a. D. C. F. Endres. (Bd. 519.)
— **Kulturgeschichte d. Krieges.** Von Prof. Dr. K. Weule, Geh. Hofrat Prof. Dr. E. Bethe, Prof. Dr. B. Schmeidler, Prof. Dr. A. Doren, Prof. Dr. P. Herre. (Bd. 561.)
— **Der Dreißigjährige Krieg.** Von Dr. Fritz Endres. (Bd. 577.)
— s. auch Feldherren.
Kriegsschiffe, Unsere. Ihre Entstehung u. Verwendung. V. Geh. Mar.-Baur. a. D. E. Krieger. 2. Aufl. v. Geh. Mar.-Baur. Fr. Schürer. M. 60 Abb. (389.)
Luther. Martin L. u. d. dtsche. Reformation. Von Prof. Dr. W. Köhler. M. 1 Bildn. Luthers. 2., verb. Aufl. (Bd. 515.)
— s. auch Von L. zu Bismarck.
Marx, Karl. Versuch einer Einführung. Von Prof. Dr. R. Wilbrandt. (621.)
Mensch u. Erde. Skizzen v. den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von Geh. Rat Prof. Dr. A. Kirchhoff. 4. Aufl.
— s. a. Eiszeit; Mensch Abt. V. [(Bd. 31.)
Mittelalter. Mittelalterl. Kulturideale. V. Prof. Dr. V. Vedel. I.: Heldenleben. II: Ritterromantik. (Bd. 292, 293.)
— s. auch Städte u. Bürger i. M.
Moltke. V. Kaiserl. Ottoman. Major a. D. F. C. Endres. Mit 1 Bildn. (Bd. 415.)
Münze. Grundriß d. Münzkunde. 2. Aufl. I. Die Münze nach Wesen, Gebrauch u. Bedeutg. V. Hofrat Dr. A. Luschin v. Ebengreuth. M. 53 Abb. II. Die Münze v. Altertum b. z. Gegenw. Von Prof. Dr. H. Buchenau. (Bd. 91, 657.)
— s. a. Finanzwiss., Geldwesen Abt. VI.
Mykenische Kultur, Die. Von Prof. Dr. F. C. Lehmann-Haupt. (Bd. 581.)
Mythologie s. Abt. I.
Napoleon I. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. 3. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 195.)
Nationalbewußtsein siehe Volk.
Natur u. Mensch. V. Realgymnasial-Dir. Prof. Dr. M. G. Schmidt. M. 19 Abb. (Bd. 458.)
Naturvölker, Die geistige Kultur der N. V. Prof. Dr. K. Th. Preuß. M. 9 Abb.
— s. a. Völkerkunde, allg. [(Bd. 452.)
Neugriechenland. Von Prof. Dr. A. Heisenberg. (Bd. 613.)
Neuseeland s. Australien.
Orient s. Indien, Palästina, Türkei.
Österreich. Ö.s innere Geschichte von 1848 bis 1895. V. R. Charmatz. 3., veränd. Aufl. I. Die Vorherrschaft der Deutschen. II. Der Kampf der Nationen. (651/652.)
— **Geschichte der auswärtigen Politik Ö.s** im 19. Jahrhundert. V. R. Charmatz. 2., veränd. Aufl. I. Bis zum Sturze Metternichs. II. 1848—1895. (653/654.)
— **Österreichs** innere u. äußere Politik von 1895—1914. V. R. Charmatz. (655.)
Ostmark s. Abt. VI.
Ostseegebiet, Das. V. Prof. Dr. G. Braun. M. 21 Abb. u. 1 mehrf. Karte. (Bd. 367.)
— s. auch Baltische Provinzen, Finnland.
Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Frh. von Soden. 3. Aufl. Mit 2 Karten, 1 Plan u. 6 Ans. (Bd. 6.)
— **P. u. s. Kultur in 5 Jahrtausenden.** Nach d. neuest. Ausgrab. u. Forschungen dargest. von Prof. Dr. P. Thomsen. 2., neubearb. Aufl. Mit 37 Abb. (260.)
Papsttum s. Kaisertum.
Papyri s. Antikes Leben.
Polarforschung. Geschichte der Entdeckungsreisen zum Nord- u. Südpol v. d. ältest. Zeiten bis zur Gegenw. V. Prof. Dr. K. Hassert. 3. Aufl. M. 6 Kart. (Bd. 38.)
Polen. Mit einem geschichtl. Überblick üb. d. polnisch-ruthen. Frage. V. Prof. Dr. R. F. Kaindl. 2., verb. Aufl. M. 6 Kart. (547.)
Politik. V. Dr. A. Grabowsky. (Bd. 537.)
— **Umrisse der Weltpolitik.** V. Prof. Dr. J. Hashagen. 3 Bde. I: 1871 bis 1907. 2. Aufl. II: 1908—1914. 2. Aufl. III. D. polit. Ereign. währ. d. Krieges. (Bd. 553/555.)
— **Politische Geographie.** Von Prof. Dr. E. Schöne. Mit 7 Kart. (Bd. 353.)
— **Politische Hauptströmungen in Europa** im 19. Jahrhundert. Von Prof. Dr. K. Th. v. Heigel. 4. Aufl. von Dr. Fr. Endres. (Bd. 129.)
Pompeji, eine hellenistische Stadt in Italien. Von Prof. Dr. Fr. v. Duhn. 3. Aufl. Mit 62 Abb. i. T. u. auf 1 Taf., sowie 1 Plan. (Bd. 114.)
Preußische Geschichte s. Brandenb.-pr. G.
Reaktion und neue Ära s. Gesch., deutsche.
Reformation s. Calvin, Luther.
Reich. Das Deutsche R. von 1871 b. z. Weltkrieg. V. Archivar Dr. F. Israel. (575.)
Religion s. Abt. I.

V. Mathematik, Naturwissenschaften und Medizin.

Anatomie d. Menschen, Die. V. Prof. Dr. K. v. Bardeleben. 6 Bde. Jeder Bd. mit zahlr. Abb. (Bd. 418/423.) I. Zelle und Gewebe. Entwicklungsgeschichte. Der ganze Körper. 3. Aufl. II. Das Skelett. 2. Aufl. III. Das Muskel- u. Gefäßsystem. 2. Aufl. IV. Die Eingeweide (Darm-, Atmungs-, Harn- und Geschlechtsorgane, Haut). 3. Aufl. V. Nervensystem und Sinnesorgane. 2. Aufl. VI. Mechanik (Statik u. Kinetik) d. menschl. Körpers (der Körper in Ruhe u. Bewegung). 2. Aufl.
— siehe auch Wirbeltiere.
Aquarium, Das. Von E. W. Schmidt. Mit 15 Fig. (Bd. 335.)
Arbeitsleistungen des Menschen, Die. Einführ. in d. Arbeitsphysiologie. V. Prof. Dr. H. Boruttau. M. 14 Fig. (Bd. 539.)
— **Berufswahl, Begabung u. Arbeitsleistung** in i. gegens. Beziehungen. Von W. J. Ruttmann. Mit 7 Abb. (Bd. 522.)
Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Prof. P. Crantz. 2 Bände. I.: Die Rechnungsarten. Gleichungen 1. Grades mit einer u. mehreren Unbekannten. Gleichungen 2. Grades. 5. Aufl. M. 9 Fig. II.: Gleichungen, Arithmet. u. geometr. Reih. Zinseszins- u. Rentenrechn. Kompl. Zahlen. Binom. Lehrsatz. 4. Aufl. Mit 21 Fig. (Bd. 120, 205.)
Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)
Arzt, Der. Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenw. Ein Leitfaden der sozialen Medizin. Von Dr. med. M. Fürst. 2. Aufl. (Bd. 265.)
Astronomie. Probleme d. mod. A. V. Prof. Dr. S. Oppenheim. 11 Fig. (Bd. 355.)
— **Die A. in ihrer Bedeutung für das praktische Leben.** Von Prof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)
— siehe auch Weltall, Weltbild, Sonne, Mond, Planeten; Sternglaube. Abt. I.
Atome. Moleküle und Atome. V. Prof. Dr. G. Mie. 4. Aufl. M. Fig. (Bd. 58.)
— s. a. Weltäther.
Auge, Das, und die Brille. Von Prof. Dr. M. v. Rohr. Mit 84 Abb. u. 1 Taf. 2. Aufl. (Bd. 372.)
Ausgleichungsrechnung siehe Kartenkunde Abt. IV.
Bakterien, Die, im Haushalt und der Natur des Menschen. Von Prof. Dr. E. Gutzeit. 2. Aufl. Mit 13 Abb. (242.)
— **Die krankheiterregenden Bakterien.** Von Prof. Dr. M. Loehlein. Mit 33 Abb. (Bd. 307.)
— s. a. Abwehrkräfte, Desinfektion, Pilze, Schädlinge.
Bau u. Tätigkeit d. menschl. Körpers. Einf. in die Physiologie d. Menschen. V. Prof. Dr. H. Sachs. 4. A. M. 34 Abb. (Bd. 32.)
Begabung s. Arbeitsleistung.
Befruchtungsvorgang, Der, sein Wesen und s. Bedeutung. V. Dr. E. Teichmann. 2. Aufl. M. 9 Abb. u. 4 Doppeltaf. (Bd. 70.)

Bewegungslehre s. Mechan., Aufg. a. d. M. I.
Biochemie. Einführung in die B. in elementarer Darstellung. Von Prof. Dr. W. Löb. Mit Fig. 2. Aufl. v. Prof. H. Friedenthal. (Bd. 352.)
Biologie, Allgemeine. Einführ. i. d. Hauptprobleme d. organ. Natur. V. Prof. Dr. H. Miehe. 2. Aufl. 52 Fig. (Bd. 130.)
—, **Experimentelle.** Regeneration, Transplantat. und verwandte Gebiete. Von Dr. C. Thesing. Mit 1 Tafel und 69 Textabbildungen. (Bd. 337.)
— siehe a. Abstammungslehre, Bakterien, Befruchtungsvorgang, Fortpflanzung, Lebewesen, Organismen, Schädlinge, Tiere, Urtiere.
Blumen. Unsere Bl. u. Pflanzen im Garten. Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd. 360.)
— **Uns. Bl. u. Pflanzen i. Zimmer.** V. Prof. Dr. U. Dammer. 65 Abb. (Bd. 359.)
Blut. Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)
Botanik. B. d. praktischen Lebens. V. Prof. Dr. P. Gisevius. M. 24 Abb. (Bd. 173.)
— siehe Blumen, Lebewesen, Pflanzen, Pilze, Schädlinge, Wald; Kolonialbotanik, Tabak Abt. VI.
Brille. Das Auge und die Br. Von Prof. Dr. M. v. Rohr. Mit 84 Abb. und 1 Lichtdrucktafel. 2. Aufl. (Bd. 372.)
Chemie. Einführung in die allg. Ch. V. Studienrat Dr. B. Bavink. M. 24 Fig. (Bd. 582.)
— **Einführung in die organ. Chemie:** Natürl. u. künstl. Pflanzen- u. Tierstoffe. Von Studienrat Dr. B. Bavink. M. 6 Abb. i. Text. 2. Aufl. (Bd. 187.)
— **Einführung i. d. anorganische Chemie.** V. Studienrat Dr. B. Bavink. (598.)
— **Einführung i. d. analyt. Chemie.** V. Dr. F. Rüsberg. 2 Bde. (Bd. 524, 525.)
— **Die künstliche Herstellung von Naturstoffen.** V. Prof. Dr. E. Rüst. (Bd. 674.)
— **Ch. in Küche und Haus.** Von Dr. J. Klein. 4. Aufl. (Bd. 76.)
— siehe a. Biochemie, Elektrochemie, Luft, Photoch.; Agrikulturch., Sprengstoffe, Technik, Chem. Abt. VI.
Chirurgie, Die, unserer Zeit. Von Prof. Dr. J. Feßler. Mit 52 Abb. (Bd. 339.)
Darwinismus. Abstammungslehre und D. Von Prof. Dr. R. Hesse. 5. Aufl. Mit 40 Textabb. (Bd. 39.)
Desinfektion, Sterilisation und Konservierung. Von Reg.- u. Med.-Rat Dr. O. Solbrig. M. 20 Abb. i. T. (Bd. 401.)
Differentialrechnung unter Berücksichtig. d. prakt. Anwendung in der Technik mit zahlr. Beispielen u. Aufgaben versehen. Von Studienrat Dr. M. Lindow. 2. A. M. 45 Fig. i. Text u. 161 Aufg. (387.)
— siehe a. Integralrechnung.
Dynamik s. Mechanik, Aufg. a. d. techn. M. 2. Bd., ebenso Thermodynamik.

Mathematik. Einführung in die Mathematik. Von Oberlehrer W. Mendelssohn. Mit 42 Fig. (Bd. 503.)
— **Math. Formelsammlung.** Ein Wiederholungsbuch der Elementarmathematik. Von Prof. Dr. S. Jakobi. (Bd. 567.)
— **Naturwissensch. u. M. i. klass. Altertum.** Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. Mit 2 Fig. (Bd. 370.)
— **Praktische M.** Von Prof. Dr. R. Neuendorff. I. Graphische Darstellungen. Verkürztes Rechnen. Das Rechnen mit Tabellen. Mechanische Rechenhilfsmittel. Kaufmännisches Rechnen i. tägl. Leben. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2., verb. A. M. 29 Fig. i. T. u. 1 Taf. II. Geom. Zeichnen. Projektionsl. Flächenmessung. Körpermessung. M. 133 Fig. (341. 526.)
— **Mathemat. Spiele.** V. Dr. W. Ahrens. 3. Aufl. M. Titelb. u. 77 Fig. (Bd. 170.)
— s. a. Arithmetik, Differentialrechnung, Geometrie, Infinitesimalrechnung, Integralrechnung, Perspektive, Planimetrie, Projektionslehre, Trigonometrie, Vektorrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Mechanik. Von Prof. Dr. Hamel. 3 Bde. I. Grundbegriffe der M. II. M. d. festen Körper. III. M. d. flüss. u. luftförm. Körper. (Bd. 684/686.)
— **Aufgaben aus d. techn. Mechanik.** V. Prof. R. Schmitt. M. zahlr. Fig. I. Bewegungsl., Statik. 156 Auf. u. Lös. II. Dynamik. 140 Aufg. u. Lös. (558/559.)
— siehe auch Statik.
Meer. Das M., s. Erforsch. u. s. Leben. Von Prf. Dr. O. Janson. 3. A. M. 40 F. (Bd. 30.)
Mensch u. Erde. Skizzen von den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von Prof. Dr. A. Kirchhoff. 4. A. (Bd. 31.)
— s. auch Eiszeit, Entwicklungsgeschichte, Urzeit.
— **Natur u. Mensch** siehe Natur.
Menschl. Körper. Bau u. Tätigkeit d. menschl. K. Einführ. i. d. Physiol. d. M. V. Prof. Dr. H. Sachs. 4. Aufl. M. 34 Abb. (32.)
— s. auch Anatomie, Arbeitsleistungen, Auge, Blut, Gebiß, Herz, Fortpflanzg., Nervensystem, Physiol., Sinne, Verbild.
Mikroskop, Das. Allgemeinverständl. dargestellt. Von Prof. Dr. W. Scheffer. Mit 99 Abb. 2. Aufl. (Bd. 35.)
Moleküle u. Atome. Von Prof. Dr. G. Mie. 4. Aufl. Mit Fig. (Bd. 58.)
— s. a. Weltäther.
Mond, Der. Von Prof. Dr. J. Franz. Mit 34 Abb. 2. Aufl. (Bd. 90.)
Nahrungsmittel s. Ernährung u. N.
Natur u. Mensch. V. Direkt. Prof. Dr. M. G. Schmidt. Mit 19 Abb. (Bd. 458.)
Naturlehre. Die Grundbegriffe der modernen N. Einführung in die Physik. Von Hofrat Prof. Dr. F. Auerbach. 4. Aufl. Mit 71 Fig. (Bd. 40.)
Naturphilosophie, Die mod. V. Privatdoz. Dr. J. M. Verweyen. 2. A. (Bd. 491.)

Naturwissenschaft. Religion und N. in Kampf u. Frieden. Ein geschichtl. Rückblick. V. Pfarrer Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
— **N. und Technik. Am sausenden Webstuhl d. Zeit.** Übersicht üb. d. Wirkungen d. Naturw. u. Technik a. d. ges. Kulturleben. V. Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 3 Abb. (Bd. 23.)
— **N. u. Math. i. klass. Altert.** V. Prof. Dr. J. L. Heiberg. 2 Fig. (Bd. 370.)
Nerven. Vom Nervensystem, sein. Bau u. sein. Bedeutung für Leib u. Seele im gesund. u. krank. Zustande. V. Prof. Dr. R. Zander. 3. Aufl. M. 27 Fig. (Bd. 48.)
— siehe auch Anatomie.
Optik. Die opt. Instrumente. Lupe, Mikroskop, Fernrohr, photogr. Objektiv u. ihnen verwandte Instr. V. Prof. Dr. M. v. Rohr. 3. Aufl. M. 89 Abb. (88.)
— s. a. Auge, Brille, Kinemat., Licht u. Farbe, Mikrosk., Spektroskopie, Strahlen.
Organismen. D. Welt d. O. In Entwickl. und Zusammenhang dargestellt. Von Oberstudienrat Prof. Dr. K. Lampert. Mit 52 Abb. (Bd. 236.)
— siehe auch Lebewesen.
Paläozoologie siehe Tiere der Vorwelt.
Perspektive, Die, Grundzüge d. P. nebst Anwendg. V. Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit 91 Fig. u. 11 Abb. (Bd. 510.)
Pflanzen. Die fleischfress. Pfl. V. Prof. Dr. A. Wagner. Mit 82 Abb. (Bd. 344.)
— **Uns. Blumen u. Pfl. i. Garten.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 69 Abb. (Bd. 360.)
— **Uns. Blumen u. Pfl. i. Zimmer.** V. Prof. Dr. U. Dammer. M. 65 Abb. (Bd 359.)
— s. auch Botanik, Garten, Lebewesen, Pilze, Schädlinge.
Pflanzenphysiologie. V. Prof. Dr. H. Molisch. Mit 63 Fig. (Bd. 569.)
Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. Mit 23 Abb. i. Text u. a. 1 Taf. 2. Aufl. (Bd. 227.)
Photographie s. Abt. VI.
Physik. Werdegang d. mod. Ph. V. Oberl. Dr. H. Keller. M. Fig. 2. Aufl. (343.)
— **Experimentalphysik, Gleichgewicht u. Bewegung.** Von Geh. Reg.-Rat. Prof. Dr. R. Börnstein. M. 90 Abb. (371.)
— **Physik in Küche und Haus.** Von Prof. H. Speitkamp. M. 51 Abb. (Bd. 478.)
— **Große Physiker.** Von Prof. Dr. J. A. Schulze. 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (324.)
— s. auch Energie, Naturlehre, Optik, Relativitätstheorie, Wärme; ebenso Elektrotechnik Abt. VI.
Physiologie. Ph. d. Menschen. V. Privatdoz. Dr. A. Lipschütz. 4 Bde. I: Allgem. Physiologie. II: Physiologie d. Stoffwechsels. III: Ph. d. Atmung, d. Kreislaufs u. d. Ausscheidung. IV: Ph. der Bewegungen und der Empfindungen. (Bd. 527—530.)
— siehe auch Arbeitsleistungen, Menschl. Körper, Pflanzenphysiologie.

VI. Recht, Wirtschaft und Technik.

Jeder Band geheftet M. 1.20 **Aus Natur und Geisteswelt** Jeder Band gebunden M. 1.50

Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet

Sozialismus siehe auch Marx; Rom, Soziale Kämpfe im alten Rom. Abt. IV.

Spinnerei, Die. Von Dir. Prof. M. Lehmann. Mit 35 Abb. (Bd. 338.)

Sprengstoffe, Die, ihre Chemie u. Technologie. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. R. Biedermann. 2. Aufl. M. 12 Fig. (286.)

Staat siehe Abt. IV.

Statik. Mit Einschluß der Festigkeitslehre. Von Reg.-Baum. Baugewerkschuldirekt. A. Schau. M. 149 Fig. i. T. (Bd. 497.)

— siehe auch Mechanik, Aufg. a. d. M. I.

Statistik. V. Prof. Dr. S. Schott. (442.)

Strafe und Verbrechen. Geschichte u. Organis. d. Gefängniswes. V. Strafanstaltsdir. Dr. med. P. Pollitz. (Bd. 323.)

Straßenbahnen. Die Klein- u. Straßenb. Von Oberingenieur a. D. Oberlehrer A. Liebmann. M. 82 Abb. (Bd. 322.)

Tabak, Der. Anbau, Handel u. Verarbeit. V. Jac. Wolf. M. 17 Abb. (Bd. 416.)

Technik, Die chemische. Von Dr. A. Müller. Mit 24 Abb. (Bd. 191.)

Telegraphie. Das Telegraphen- u. Fernsprechwesen. Von Kaiserl. Oberpostrat O. Sieblist. 2. Aufl. (Bd. 183.)

— Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. V. Oberpost-Insp. H. Brick. 2. A. Mit 65 Abb. (Bd. 235.)

— Die Funkentelegr. V. Telegr.-Insp. H. Thurn. 4. Aufl. M. 51 Abb. (Bd. 167.)

— siehe auch Drähte und Kabel.

Testamentserrichtung und Erbrecht. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)

Thermodynamik, Praktische. Aufgaben u. Beispiele zur mechanischen Wärmelehre. Von Geh. Bergrat Prof. Dr. R. Vater. Mit 40 Abb. i. Text u. 3 Taf. (Bd. 596.)

— siehe auch Wärmelehre.

Tierzüchtung. Von Tierzuchtdirektor Dr. G. Wilsdorf. Mit 40 Abb. im Text und 12 Taf. 2. Aufl. (Bd. 369.)

— siehe auch Kleintierzucht.

Uhr, Die. Grundlagen u. Technik d. Zeitmessg. V. Prof. Dr.-Ing. H. Bock. 2., umgearb. Aufl. Mit 55 Abb. i. T. (216.)

Urheberrecht. Das Recht an Schrift- und Kunstwerken. Von Rechtsanw. Dr. R. Mothes. (Bd. 435.)

— siehe auch gewerblich. Rechtsschutz.

Verbrechen. Strafe und V. Geschichte u. Organisation d. Gefängniswesens. V. Strafanst.-Dir. Dr. med. P. Pollitz. (Bd. 323.)

— Moderne Kriminalistik. V. Amtsrichter Dr. A. Hellwig. M. 18 Abb. (Bd. 476.)

Verbrecher. Die Psychologie des V. (Kriminalpsych.) V. Strafanstaltsdir. Dr. med. P. Pollitz. 2. A. M. 5 Diagr. (Bd. 248.)

— s. a. Handschriftenbeurt. Abt. I.

Verfassg. Grundz. d. V. d. Deutsch. Reiches. V. Geheimrat Prof. Dr. E. Loening. 4. Aufl. (Bd. 34.)

Verfassg. und Verwaltung der deutschen Städte. Von Dr. M. Schmid. (466.)

— Deutsch. Verfassgsr. i. geschichtl. Entwickl. V. Pr. Dr. E. Hubrich. 2. A. (Bd. 80.)

Verkehrsentwicklung i. Deutschl. 1800 bis 1900 (fortgef. b. z. Gegenwart). Vorträge über Deutschlands Eisenbahnen u. Binnenwasserstraßen und ihre Entwicklung und Verwaltung wie ihre Bedeutung f. d. heutige Volkswirtschaft. Von Prof. Dr. W. Lotz. 4. Aufl. (Bd. 15.)

Versicherungswesen. Grundzüge des V. (Privatversicher.). V. Prof. Dr. phil. et jur. A. Manes. 3. Aufl. (Bd. 105.)

Waffentechnik siehe Handfeuerwaffen.

Wald, Der deutsche. V. Prof. Dr. Hausrath. 2. Afl. Bilderanh. u. Kart. (Bd. 153.)

Wärmekraftmaschinen, Die neueren. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I: Einführung in die Theorie u. d. Bau d. Gasmasch. 5. Aufl. M. 42 Abb. (Bd. 21.) II: Gaserzeuger, Großgasmasch., Dampf- u. Gasturb. 4. Aufl. M. 43 Abb. (Bd. 86.)

— siehe auch Kraftanlagen.

Wärmelehre, Einführ. i. d. techn. (Thermodynamik). Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. M. 40 Abb. i. Text. (Bd. 516.)

— s. auch Thermodynamik.

Wasser, Das. Von Geh. Reg.-Rat Dr. O. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)

— s. a. Luft, Wass., Licht, Wärme Abt. V.

Wasserkraftmaschinen, Die, u. d. Ausnützg. d. Wasserkräfte. V. Kais. Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. 2. A. M. 57 Abb. (Bd. 228.)

Weidwerk, Das deutsche. V. Forstmeist. G. Frhr. v. Nordenflycht. M. Titelbild. (Bd. 436.)

Weinbau und Weinbereitung. Von Dr. F. Schmitthenner. 34 Abb. (Bd. 332.)

Welthandel siehe Handel.

Wirtschaftsgeographie. Von Prof. Dr. F. Heiderich. (Bd. 633.)

Wirtschaftsgesch. s. Antike W., Ostmark.

Wirtschaftsleben, Deutsch. Auf geograph. Grundl. gesch. v. Prof. Dr. Chr. Gruber. 3. A. v. Dr. H. Reinlein. (42.)

— Die Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens i. letzten Jahrh. V. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. L. Pohle. 3. A. (57.)

— Deutschl. Stellung i. d. Weltwirtsch. V. Prof. Dr. P. Arndt. 2. A. (Bd. 179.)

— Die Japaner in d. Weltwirtschaft. V. Prof. Dr. K. Rathgen. 2. A. (Bd. 72.)

Wirtschaftlichen Organisationen, Die. Von Prof. Dr. E. Lederer. (Bd. 428.)

— s. Konsumgenoss., Mittelstandsbeweg.

Zeichnen, Techn. Von Prof. Dr. Horstmann. (Bd. 548.)

Zeitungswesen. V. Dr. H. Diez. (Bd. 328.)

Zivilprozeßrecht, Das deutsche. Von Justizrat Dr. M. Strauß. (Bd. 315.)

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Druck von B. G. Teubner in Dresden

DIE KULTUR DER GEGENWART
IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE
HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

III. Teil. Die mathematischen, naturwissenschaftlichen und medizinischen Kulturgebiete. [19 Bände.]

(* erschienen, † unter der Presse.) In Halbfranz geb. jeder Band 6 Mark mehr.

***I. Abt. Die math. Wissenschaften. (1 Bd.)** Abteilungsleiter u. Bandredakteur: F. Klein. Bearb. v. P. Stäckel, H. E. Timerding, A. Voß, H. G. Zeuthen. 5 Lfgn. *I. Lfg. (Zeuthen) geh. M. 3.— *II. Lfg. (Voß u. Timerding). geh. M. 6.— *III. Lfg. (Voß) geh. M 5.—

II. Abt. Die Vorgeschichte der mod. Naturwissenschaften u. d. Medizin. (1 Bd.) Bandredakteure: J. Ilberg u. K. Sudhoff.

III. Abt. Anorg. Naturwissenschaften. Abteilungsleiter: E. Lecher.

*Bd. 1. **Physik.** Bandredakteur: E. Warburg. Bearb. v. F. Auerbach, F. Braun, E. Dorn, A. Einstein, J. Elster, F. Exner, R. Gans, E. Gehrcke, H. Geitel, E. Gumlich, F. Hasenöhrl, F. Henning, L. Holborn, W. Jäger, W. Kaufmann, E. Lecher, H. A. Lorentz, O. Lummer, St. Meyer, M. Planck, O. Reichenheim, F. Richarz, H. Rubens, E. v. Schweidler, H. Starke, W. Voigt, E. Warburg, E. Wiechert, M. Wien, W. Wien, O. Wiener, P. Zeeman. M. 22.-, M. 24.-

*Bd. 2. **Chemie.** Bandredakteur: †E. v. Meyer. **Allgem. Kristallographie u. Mineralogie.** Bandredakteur: Fr. Rinne. Bearb. v. K. Engler, H. Immendorf, †O. Kellner, A. Kossel, M. Le Blanc, R. Luther, †E. v. Meyer, W. Nernst, Fr. Rinne, O. Wallach, †O. N. Witt, L. Wöhler. Mit Abb. M. 18.—, M. 20.—

†Bd. 3. **Astronomie.** Bandred.: J. Hartmann. Bearb. von L. Ambronn, F. Boll, A. v. Flotow, F. K. Ginzel, K. Graff, J. Hartmann, J. v. Hepperger, H. Kobold, S. Oppenheim, E. Pringsheim, †F. W. Ristenpart.

Bd. 4. **Geonomie.** Bandredakteure: †I. B. Messerschmitt u. H. Benndorf.

Bd. 5. **Geologie (einschl. Petrographie).** Bandredakteur: A. Rothpletz.

Bd. 6. **Physiogeographie.** Bandredakteur: E. Brückner. 1. Hälfte: Allg. Physiogeographie. 2. Hälfte: Spez. Physiogeographie.

IV. Abt. Organ. Naturwissenschaften. Abteilungsleiter: R. v. Wettstein.

*Bd. 1. **Allgemeine Biologie.** Bandredakteure: †C. Chun u. W. Johannsen, u. Mitw. v. A. Günthart. Bearbeitet v. E. Baur, P. Boysen-Jensen, P. Claußen, A. Fischel, E. Godlewski, M. Hartmann, W. Johannsen, E. Laqueur, †B. Lidforß, W. Ostwald, O. Porsch, H. Przibram, E. Rádl, O. Rosenberg, W. Roux, W. Schleip, G. Senn, H. Spemann, O. zur Strassen. M. 21.—, M. 23.—

*Bd. 2. **Zellen- und Gewebelehre, Morphologie und Entwicklungsgeschichte. 1. Botan. Teil.** Bandredakteur: †E. Strasburger. Bearb. v. W. Benecke u. †E. Strasburger. Mit Abb. M. 10.—, M. 12.— **2. Zoologischer Teil.** Bandredakteur: O. Hertwig. Bearb. v. E. Gaupp, K. Heider, O. Hertwig, R. Hertwig, F. Keibel, H. Poll. M. 16.—, M. 18.—

Bd. 3. **Physiologie u. Okologie.** *1. Bot. T. Bandred.: G. Haberlandt. Bearb. von E. Baur, Fr. Czapek, H. v. Guttenberg. M. 11.—, M. 13.— **2. Zoologischer Teil.** Bandredakteur und Mitarbeiter noch unbestimmt.

*Bd. 4. **Abstammungslehre, Systematik, Paläontologie, Biogeographie.** Bandredakteure: R. Hertwig u. R. v. Wettstein. Bearb. v. O. Abel, I. E. V. Boas, A. Brauer, A. Engler, K. Heider, R. Hertwig, W. J. Jongmans, L. Plate, R. v. Wettstein. M. 20.—, M. 22.—

†V. Abt. Anthropologie. (1 Bd.) Bandred.: †G. Schwalbe. Bearb. v. E. Fischer, R. F. Graebner, M. Hoernes, Th. Mollison, A. Ploetz, †G. Schwalbe. ca. M. 22.-, M. 24.-

VI. Abt. Die medizin. Wissenschaften. Abteilungsleiter: Fr. v. Müller.

Bd. 1. **Die Geschichte der mod. Medizin.** Bandred.: K. Sudhoff. **Die Lehre von den Krankheiten.** Bandred.: W. His.

Bd. 2. **Die medizinischen Spezialfächer.** Bandred.: Fr. v. Müller.

Bd. 3. **Beziehungen der Medizin z. Volkswohl.** Bandredakteur: M. v. Gruber.

VII. Abt. Naturphilosoph. u. Psychol.

*Bd. 1. **Naturphilosophie.** Bandredakteur: C. Stumpf. Bearb. v. E. Becher. M. 14.—, M. 16.—

Bd. 2. **Psychologie.** Bandredakteur und Mitarbeiter noch unbestimmt.

VIII. Abt. Organisation der Forschung und des Unterrichts. (1 Bd.) Bandredakteur: A. Gutzmer.

IV. Teil. Die technischen Kulturgebiete. [15 Bände.]

Abteilungsleiter: W. v. Dyck und O. Kammerer.

Bisher erschien:

Technik des Kriegswesens. Bandredakteur M. Schwarte. Bearb. v. K. Becker, O. v. Eberhard, L. Glatzel, A. Kersting, O. Kretschmer, O. Poppenberg, J. Schroeter, M. Schwarte, W. Schwinning. Geheftet M. 24.—, gebunden M. 26.—. [Band 12.]

Teuerungszuschläge auf sämtliche Preise 30% einschließlich 10% Zuschlag der Buchhandlung

Probeheft mit Inhaltsübersicht des Gesamtwerkes, Probeabschnitten, Inhaltsverzeichnissen und Besprechungen umsonst und postfrei durch B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3

M