

Reinhardt-Zeisberg
Mathematisches Unterrichts-
werk für höhere Schulen

Detlefs
Darstellende
Geometrie

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

Archiwum

II D 1998

Drittes
Heft

Verlag Moritz Diesterweg
Frankfurt am Main

Biblioteka
Politechniki Wrocławskiej

D 1998 III

Archiwum

Reinhardt=Zeisberg D 1998 II
Mathematisches Unterrichtswerk
für höhere Schulen

~~Mathematische Bücherei~~
Die Anfangsgründe
der darstellenden Geometrie
in drei Hefen

Von

Prof. Hermann Detlefs †
Studienrat in Frankfurt a. M.

*

Drittes Heft

Durchdringungen

und Schattenkonstruktionen in Grund- und Aufsicht,
Perspektive, Kartenprojektionen.

Von

Dr. Walther Brand
Oberstudiendirektor in Marburg a. d. L.

~~Hilfsbücherei~~
~~Magdalenen-Gymnasium~~

1929

Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main

Bestell-Nr. 8373

A l l e R e c h t e v o r b e h a l t e n



Inu. 5054.



aku. 5054/49 R.

Pierersche Hofbuchdruckerei Stephan Wetzel & Co., Altenburg, Thür.

V o r w o r t

Als Abschluß des im zweiten Heft behandelten Grund- und Aufrißverfahrens bringt das vorliegende für Prima bestimmte Heft zunächst die noch von Professor Detlefs († 18. 12. 1927) begonnenen Anwendungen der Zweitafelprojektion auf Durchdringungen und Schattenkonstruktionen.

Den Hauptteil bildet die Einführung in die Perspektive. Die Perspektive nimmt mehr als die übrigen Abbildungsarten eine vermittelnde Stellung zwischen Mathematik und Zeichnen ein. Ihre Bedeutung besteht nicht nur in den rein mathematischen Werten, die in ihr zur Geltung kommen: Stärkung des Raumgefühls, der Fähigkeit, das räumlich Gegebene in seinen Verhältnissen zu erkennen, sondern ein weiterer Wert für den Schüler liegt darin, daß er hier die zu einer genauen zeichnerischen Darstellung nötigen mathematischen Gesetze kennen lernt, die er bisher unbewußt oder bloß auf Grund der Erfahrung im Freihandzeichnen angewendet hat, und daß er damit in stand gesetzt wird, seine Zeichnungen auch verstandesmäßig zu behandeln.

Die Perspektive steht weiter in sehr enger Beziehung zur Geschichte der Kunst. Die kritische Untersuchung, wieweit der Künstler bei seinem Werk die grundlegenden geometrischen Gesetze beachtet hat, ist ein wertvoller Beitrag zur Kunsterziehung. Da durch die Umkehrung der Perspektive, die Photogrammetrie, Säden zur Physik und durch die Anwendung der Zentralprojektion auf die Herstellung von Karten auch zur Erdkunde gestritten werden, bildet die Behandlung der Perspektive im mathematischen Unterricht ein wichtiges Mittel der Konzentration für eine ganze Reihe von Fächern. Sie sollte daher in Prima mehr, als es bis jetzt vielleicht der Fall war, getrieben werden, zumal man in der Perspektive leichter als bei den übrigen Abbildungsarten in verhältnismäßig kurzer Zeit zu einem befriedigenden Abschluß kommen kann.

Marburg a. d. L., im August 1928.

Walther Brand.

Inhaltsverzeichnis

Anwendungen der senkrechten Projektion auf mehrere Tafeln

	Seite
S. Durchdringungen	1
T. Schattenkonstruktionen	10

III. Abschnitt. Perspektive (Zentralprojektion).

A. Linearperspektive	18
B. Schattenperspektive	45
C. Perspektive und Malerei	48
D. Photogrammetrie	56
E. Kartenprojektionen	61

S. Durchdringungen.

Erklärung.

Die tägliche Erfahrung lehrt uns, daß die Körper undurchdringlich sind. Wo ein Körper ist, kann nicht gleichzeitig ein zweiter sein. Dieser Satz verliert seine Gültigkeit für die bloß in der Vorstellung bestehenden stofflosen mathematischen Körper. Wirkliche Körper können sich nur scheinbar gegenseitig durchdringen; in Wahrheit geht stets nur der eine Körper durch den anderen hindurch. Er durchbohrt ihn daher entweder ganz oder dringt nur mehr oder weniger in ihn ein.

Beispiele.

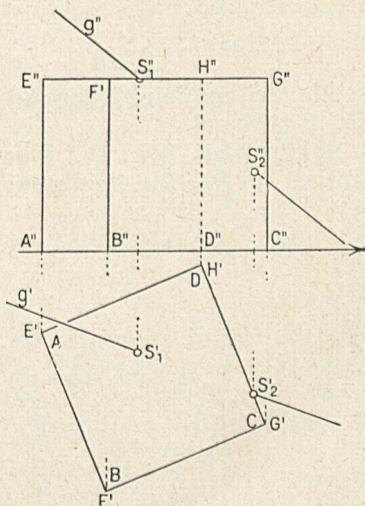
Einige Beispiele sollen uns in die oft recht verwickelten Durchdringungsaufgaben einführen und uns mit den wichtigsten Lösungsmethoden bekannt machen.

Beispiel 1. Eine Gerade g durchsticht einen Würfel. Ein- und Austritt der Geraden sind in Grund- und Aufsicht zu zeichnen.

Lösung. (Fig. 1.) Die von links oben hinten kommende Gerade g durchsticht in S_1 die Deckfläche des Würfels und tritt aus der rechten hinteren Seitenfläche in S_2 wieder aus. Der Aufsicht S_1' des Eintrittspunktes ist der Schnittpunkt von g'' mit $E''G''$, der Grundriß S_1 liegt senkrecht darunter auf g' . Entsprechend ist der Grundriß S_2' des Austrittspunktes der Schnittpunkt von g' und CD , der Aufsicht liegt lotrecht darüber auf g'' . Das innerhalb des Würfels liegende Stück S_1S_2 der Geraden ist nicht ausgezogen.

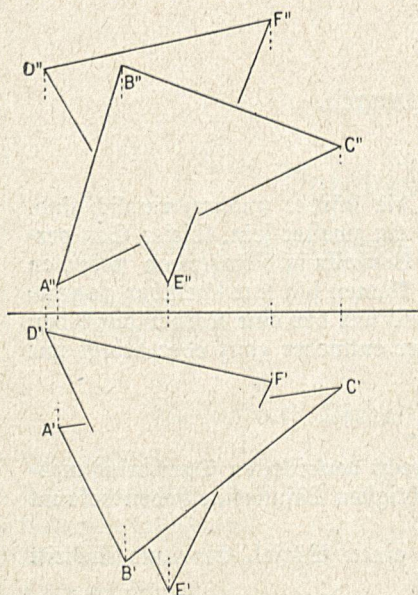
Beispiel 2. Die Ebene eines Dreiecks durchdringt ein zweites Dreieck. Zeichne Grund- und Aufsicht.

Analysis. In Fig. 2a verläuft DE zuerst über und hinter $\triangle ABC$, zuletzt unter und vor $\triangle ABC$; DE muß also die Ebene dieses Dreiecks irgendwo durchsetzen. Dasselbe gilt für FE . Dagegen liegt DF in beiden Rissen außerhalb der Dreiecksfläche ABC , kann sie also nicht schneiden. (Dies könnte auch nicht geschehen, wenn nur einer der Risse außerhalb des gleichnamigen Risses der

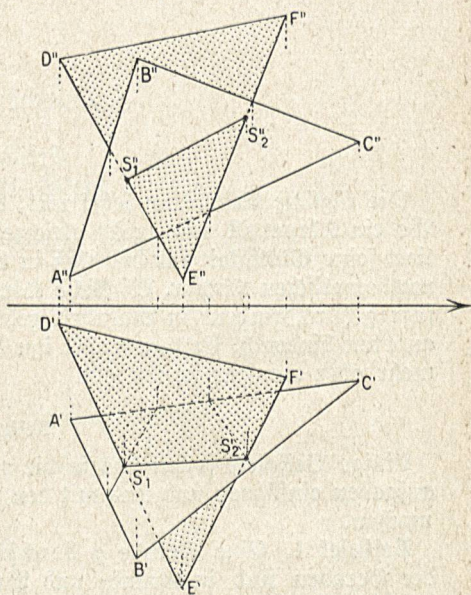


Figur 1.

Dreiecksfläche läge; deshalb kann z. B. AB das Dreieck DEF nicht schneiden). Verwende ein Modell.



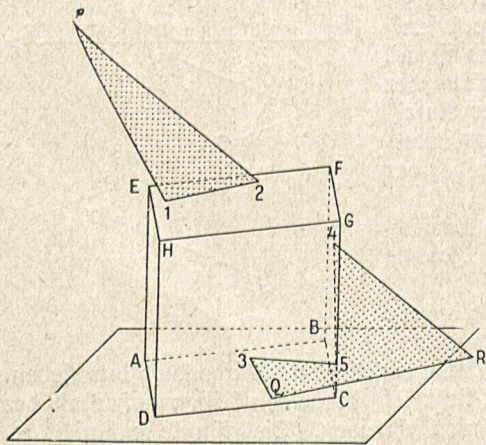
Figur 2 a.



Figur 2 b.

Die beiden Durchstoßpunkte werden nach Grundaufgabe 13, Heft 2, S. 40 bestimmt.

Konstruktion. (Fig. 2 b.) Man legt durch DE und FE die projizierenden Ebenen $\perp \Pi_2$. Die Konstruktion ist aus den angedeuteten Hilfsloten zur Achse ersichtlich. Man erhält so die Projektionen der Durchstoßpunkte S_1 und S_2 . Da die beiden Dreiecksebenen sich nur in einer Geraden schneiden können, so ist $S_1 S_2$ die Durchdringungslinie. Sie ist in beiden Rissen sichtbar.



Figur 3.

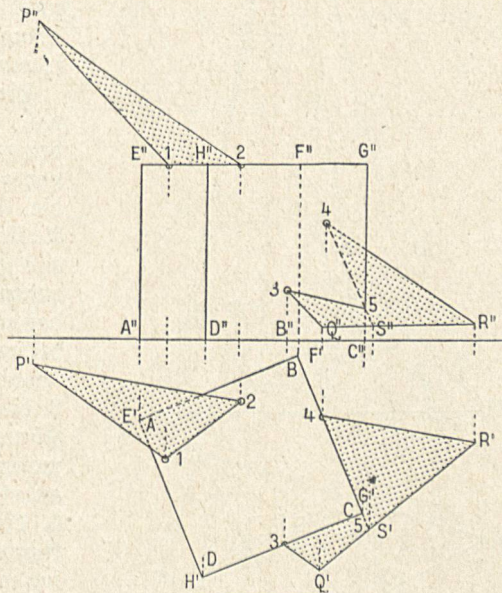
Beispiel 3. Eine Dreiecksfläche PQR durchdringt einen Würfel. Zeichne die Durchdringungslinie, d. h. die Ebene des Dreiecks die Flächen des Würfels schneidet.

Analys. Fig. 3 zeigt ein Schrägbild der Durchdringung.

Die Seiten PQ und PR dringen in 1 und 2 durch die Deckfläche in den Würfel ein, PQ tritt bei 3 aus der rechten vorderen, PR bei 4 aus der rechten hinteren Seitenfläche aus. Seite QR liegt ganz außerhalb des Würfels. Die Punkte 1, 2, 3, 4 lassen sich wie in Beispiel 1 ermitteln. Es bleibt noch der Punkt zu bestimmen, in welchem die Würfelkante CG die Dreiecksfläche durchsticht. Dieser Punkt 5 läßt sich nach Grundaufgabe 13 (Heft 2, S. 40) ermitteln. Die Durchdringungslinien sind 1. die Verbindungsstrecke 1 2, 2. die gebrochene Linie 3 5 4.

Konstruktion. (Fig. 4.) Die Bestimmung von 1, 2, 3, 4 erfolgt wie in Beispiel 1. Um 5 zu finden, benutzen wir als Hilfsebene eine der durch CG gehenden vertikalen Seitenebenen, z. B. die erweiterte Ebene $CGBF$.

Sie schneidet PR in dem schon bekannten Punkte 4 und QR in einem Punkte S , dessen Grundriß S' der Schnitt von $F'G'$ mit $Q'R'$ ist, und dessen Aufriß S'' durch Hinausloten auf $Q''R''$ gefunden wird. Die Gerade $4S$ ist dann die Schnittgerade der Dreiecksebene mit der Seitenfläche und 5 (im Aufriß) der gesuchte Punkt. Sein Grundriß fällt mit C und G' zusammen. Dann ziehen wir die Durchdringungslinien 1 2 und 3 5 4, wobei vor dem Ausziehen der Zeichnung zu überlegen ist, welche Linien sichtbar und welche verdeckt sind. Den innerhalb des Würfels liegenden Teil des Dreiecks lassen wir in der Zeichnung fort.

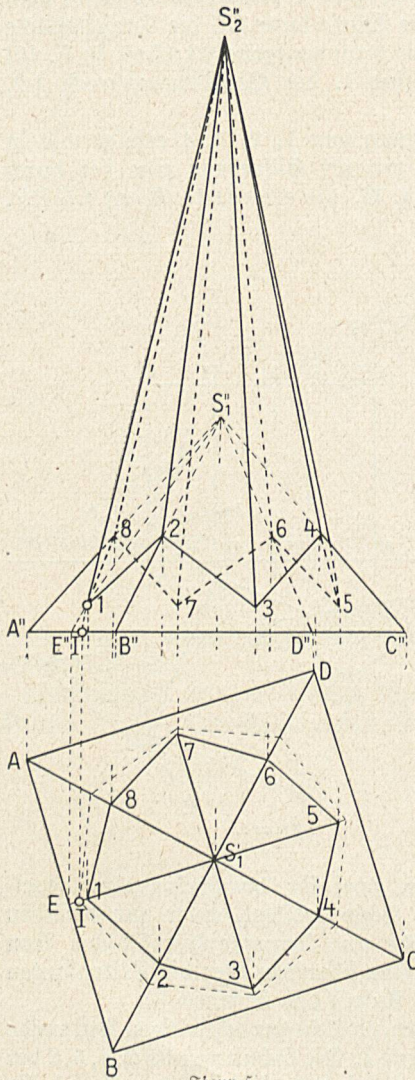


Figur 4.

Beispiel 4. Ein Turmdach wird von zwei sich durchdringenden regelmäßigen Pyramiden mit gemeinsamer Achse gebildet, einer quadratischen und einer achteitigen von größerer Höhe und kleinerer Grundfläche. Von den Seitenkanten der achteitigen Pyramide schneiden vier die Seitenkanten der quadratischen. Zeichne Grund- und Aufriß des Turmes.

Lösung. (Fig. 5.) Im Grundriß ist die Grundfläche der achteitigen Pyramide gestrichelt; bezeichnet ist von ihr nur die Ecke 1. Die Schnittpunkte 2, 4, 6, 8 der Kanten beider Pyramiden sind im Aufriß sofort zu finden; ihre Grundrisse ergeben sich durch Herabloten. Zwischen ihnen liegen die Schnittpunkte 1, 3, 5, 7 der übrigen Seitenkanten der achteitigen Pyramide mit den Seitenflächen der vierseitigen. Da diese vier Punkte in gleicher Höhe liegen, genügt es, zunächst einen von ihnen, z. B. 1, den Schnittpunkt von S_2I mit der Fläche

S_1AB , zu ermitteln. Als Hilfsebene dient der vertikale Achsenschnitt S_2S_1I , der das Dreieck S_1AB in seiner Symmetralen S_1E schneidet. E ist die Mitte von AB . So ergibt sich zuerst der Aufriß von 1 als Schnittpunkt von $S_1''E''$



Figur 5.

mit $S_2''I$, dann der Grundriß durch Herabloten. Die Aufriße von 3, 5, 7 werden durch die Parallele durch 1 zur Bildachse, die Grundrisse durch Herabloten gefunden. Die Durchdringungslinie 1 2 3 4 5 6 7 8 1 erscheint im Aufriß als geschlossene Zickzacklinie, im Grundriß als ein nicht ganz regelmäßiges, aber in bezug auf eine beliebige Diagonale symmetrisches Achteck.

Die vorstehenden Beispiele zeigen, daß die Ermittlung der Durchdrungsfiguren ebenflächiger Körper zurückgeführt werden kann auf die Bestimmung von Eintritt und Austritt einer Geraden in einen bzw. aus einem Körper. Das darauf beruhende Verfahren besteht also darin, daß man 1. die Grund- und Aufrisse beider Körper zeichnet, ohne auf eine etwaige Durchdringung zu achten, 2. diejenigen Kanten jedes der beiden Körper herausucht, welche eine oder mehrere Flächen (auch Kanten) des andern Körpers treffen könnten, 3. die Durchdringungspunkte dieser Kanten ermittelt und 4. die gefundenen Punkte richtig verbindet. Diese Methode wird das Kantenverfahren genannt.

Eine andere Methode, das Flächenverfahren, besteht darin, daß man die Schnittgeraden der Flächen des einen Körpers mit den Flächen des anderen bestimmt. Soweit diese Schnittgeraden innerhalb beider einander schneidenden Flächen liegen, gehören sie der Durchdringungslinie der beiden Körper an (z. B. 1 2, 3 5,

5 4 in Fig. 4, 1 2 in Fig. 5). Ihre Schnittpunkte sind die Ecken der meistens gebrochenen Durchdringungslinien.

Das folgende Beispiel soll die Anwendung des Flächenverfahrens zeigen:

Höhenlinien bestimmen die gesuchte Schnittgerade der beiden Ebenen. Als Horizontalebene kommen in unserem Falle 1. Π_1 , 2. die Ebene SS_1QQ_1 , 3. die Horizontalebene durch RR_1 in Betracht. Π_1 schneidet AA_1CC_1 in AA_1 , PP_1QQ_1 in PP_1 und TT_1SS_1 in TT_1 , also sind die Schnittpunkte 1 und 5 Punkte der gesuchten Durchdringungslinie. Ihre Aufrisse liegen auf der Achse. Die zweite Horizontalebene schneidet AA_1CC_1 in der Spurparallelen UU_1 , deren Aufriß $U''U_1''$ ist und deren Grundriß $U'U_1'$ durch Herabloten gefunden wird. Durch den Schnitt von UU_1 mit QQ_1 und SS_1 ergeben sich die Punkte 2 und 4 zuerst im Grundriß und durch Hinaufloten auch im Aufriß. Die dritte Horizontalebene liefert in derselben Weise in AA_1CC_1 die Spurparallele VV_1 und durch sie den Punkt 3. Die gebrochene Linie 1 2 3 4 5 ist die eine Durchdringungslinie. Die andere auf der verdeckten Seite des Satteldaches wird ganz entsprechend gefunden.

Probe: Die beiden Durchdringungslinien müssen im Grundrisse symmetrisch zum Dachfirst CC_1 liegen.

Die folgenden Beispiele zeigen, wie man häufig bei Durchdringungen ebenflächiger und krummflächiger sowie zweier krummflächigen Körper verfährt.

Beispiel 6. Ein Kirchturm von quadratischem Grundriß hat ein kegelförmiges Dach. Der Grundkreis des Kegels ist gleich dem Umkreis des Quadrates, und die vier Seitenflächen des Turmes erstrecken sich bis an den Kegelmantel. Zeichne Grund- und Aufriß.

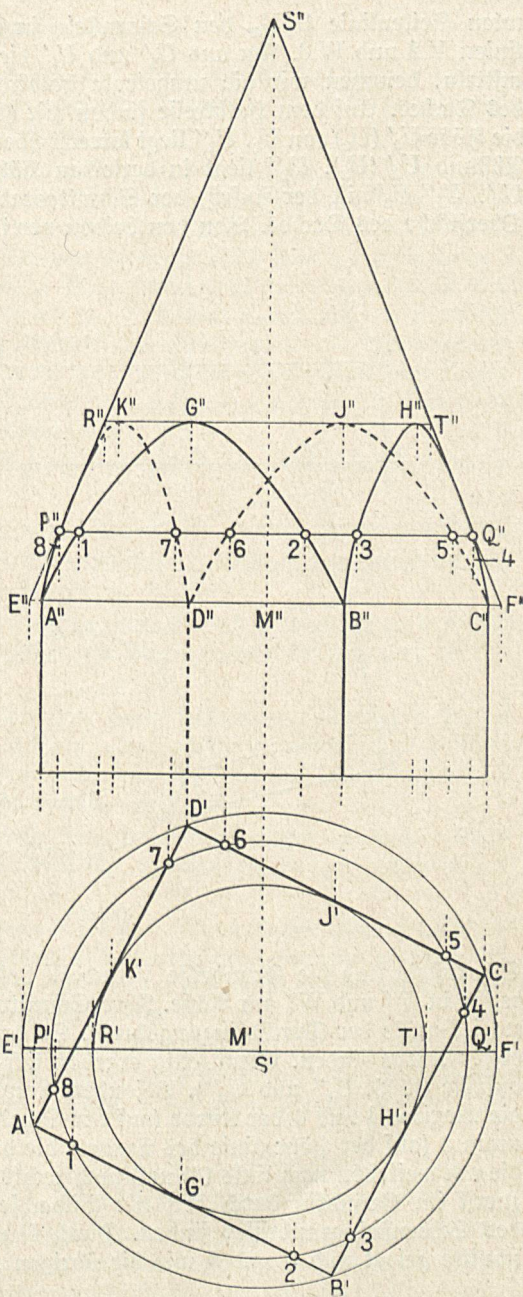
Lösung. $ABCD$ in Fig. 7 ist die Grundfläche des Daches, EFS ein Achsenschnitt des Kegels. Um Punkte der hier krummen Durchdringungslinie, d. h. der Schnittkurven der nach oben erweiterten Seitenflächen des Turmes mit dem Kegelmantel zu erhalten, benutzen wir Horizontalschnitte, die sowohl den Kegelmantel als auch die erweiterten Seitenflächen schneiden. Der unterste dieser Horizontalschnitte ist die Grundfläche des Daches. Auf ihr liegen die tiefsten Punkte $ABCD$ der Durchdringungslinie. Ein zweiter solcher Horizontalschnitt ist PQ . Er schneidet den Kegelmantel in einem Kreise mit dem Durchmesser PQ , dessen Aufriß die Strecke $P''Q''$ der Aufrißfigur ist. Der Grundriß ist ein Kreis um M' mit dem Durchmesser $P'Q'$. Die erweiterten Seitenflächen des Turmes werden von dem Horizontalschnitt in einem Quadrat geschnitten, dessen Grundriß sich mit $A'B'C'D'$ deckt. Die Schnittpunkte 1, 2, 8 des Kreises mit den Seiten des Quadrates gehören sowohl dem Kegeldach als den erweiterten Turmflächen an, sind also Punkte der Durchdringungskurve. Zeichnet man so eine Reihe von Horizontalschnitten, so kann man eine hinreichende Zahl von Punkten der Durchdringungslinie erhalten. Ihre höchsten Punkte (Scheitel) $GHJK$ liegen in gleicher Höhe lotrecht über den Mitten der Seiten des Grundflächenquadrates auf dem Horizontalkreis, dessen Grundriß der Inkreis des Grundrißquadrates ist, und dessen geradliniger Aufriß durch Heraufloten gefunden werden kann.

Die im vorhergehenden Beispiel benutzte Methode kann allgemein als das Schnittverfahren bezeichnet werden: Man legt durch die Körper eine hinreichende Anzahl von Ebenen, welche beide schneiden. Die ge-

meinschaftlichen Punkte der beiden Schnittlinien gehören den Oberflächen beider Körper an und sind somit Punkte der Durchdringungslinie. Die Schnitte sind so zu wählen, daß die Schnittlinien beider Oberflächen leicht gezeichnet werden können, also nach Möglichkeit Geraden oder Kreise sind. Es brauchen durchaus nicht immer Horizontalschnitte zu sein, auch vertikale oder gar schiefe Schnitte können in Betracht kommen. Im folgenden Beispiele wollen wir Vertikalschnitte benutzen.

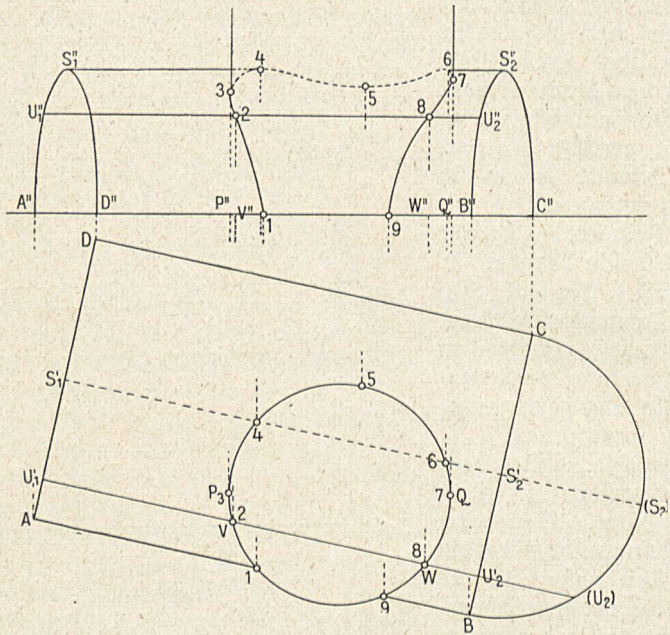
Beispiel 7. Ein halbzylindrisches Tonnendach wird von einem dicken zylindrischen Fabrikshornstein durchdrungen. Die Durchdringungskurve zu konstruieren.

Lösung. Fig. 8 zeigt Dach und Hornstein in allgemeiner Lage. Von dem Hornsteingrundriß liegt ein kleiner Teil außerhalb des Daches, das also vom Hornstein nicht völlig durchdrungen, sondern nur „angeschnitten“ wird. Infolgedessen ist die Durchdringungskurve nicht geschlossen. Sie beginnt in 1 und endet in 9 an der vorderen Dachtraufe. Um weitere ihrer Punkte zu finden, verwenden wir vertikale Schnitte parallel zur Streichrichtung des Daches (parallel zu den Achsen beider Zylinder). Ein solcher Schnitt ist z. B. die Vertikalebene durch $U_1 U_2$. Sie schneidet das Dach in der horizon-



Figur 7.

talen Seitenlinie $U_1 U_2$, den Schornstein in den beiden vertikalen Seitenlinien $V 2$ und $W 8$. Um aus U_1' und U_2' die Aufsrisse U_1'' und U_2'' zu ermitteln, benutzen wir die umgelegte halbkreisförmige rechte Giebelfläche des Daches. Auf dem Halbkreise finden wir (U_2) [$U_2' U_2 \perp BC$] und damit die Höhe U_2' (U_2) von U_2 . U_2'' liegt lotrecht über U_2' und hat von der Achse den Abstand U_2' (U_2). U_1'' liegt in derselben Höhe wie U_2'' und lotrecht über U_1' . $U_1'' U_2''$ ist der Aufsriß der Schnittgeraden der Vertikalebene mit der Oberfläche des Daches. Von den beiden vertikalen Schnittgeraden mit dem



Figur 8.

Schornstein sind die Grundrisse V und W bekannt. Die Aufsrisse sind Senkrechte in V'' und W'' zur Achse. Ihre Schnittpunkte 2 und 8 mit $U_1 U_2$ sind zwei Punkte der Durchdringungskurve. So kann man beliebig viele Punkte dieser Kurve finden. Gleichzeitig ergeben sich jedesmal Punkte der Giebelaufsrisse (z. B. U_1'' und U_2''). Besonders hervorzuheben sind außer 1 und 9 die Maxima 4 und 6 der Kurve (auf der Scheitellinie des Daches), das Minimum 5 (auf der Höhenlinie des Daches, die der Schornstein berührt), sowie die am weitesten nach links (3) und nach rechts (7) liegenden Punkte, die wir zuerst im Grundriß durch den zur Bildachse parallelen Durchmesser PQ des Schornsteingrundrißes finden. Durch P und Q werden dann Vertikalschnitte gelegt und 3 und 7 wie die übrigen Kurvenpunkte bestimmt.

Übungsaufgaben.

1. Eine gegebene Gerade g durchsticht a) ein senkrecht�es vierseitiges Prisma; b) einen senkrechtlen Zylindermantel; c) eine dreiseitige Pyramide; d) einen Kegelmantel; e) eine Kugel. Zeichne Grund- und Aufsriß.

Anleitung. Lege durch g eine Hilfsebene, die mit dem durchstochenen Körper einen leicht zu zeichnenden Schnitt ergibt. Die Schnittpunkte der Geraden mit der Schnittfigur sind die gesuchten Stichpunkte. Als Hilfsebene benutze bei a), b) und e) die horizontal projizierende Ebene der Geraden, bei c) und d) die durch g und die Spitze S der Pyramide oder des Kegels gelegte Ebene. Man erhält ihre Grundspur als Verbindungslinie der Grundspur von g mit der Grundspur irgendeiner von S durch g gezogenen Geraden. Durch die Schnittpunkte der Grundspur der Hilfsebene mit den Grundkanten des Körpers findet man die Schnittfigur der Hilfsebene mit dem Körper. Bei e) lege die Hilfsebene mit g und die Schnittfigur in Π_1 um, wobei die Stichpunkte in der Umlegung unmittelbar zu erkennen sind.

2. Zeichne die Durchdringung a) eines Dreiecks und eines Parallelogramms, b) zweier Parallelogramme.

3. Ein Dreieck bringt in eine vierseitige Pyramide ein. Zeichne Grund- und Aufsriß.

4. Ein prismatischer Schornstein von rechteckigem Querschnitt durchdringt die eine Fläche eines Satteldaches. Zeichne Grund- und Aufsriß.

5. Ein sattelförmiges Kirchendach wird von einem Turm (sog. Dachreiter) in Gestalt eines regelmäÙigen sechsseitigen Prismas mit Pyramidendach durchdrungen. Zeichne Grund- und Aufsriß.

6. Eine quadratische Pyramide wird von einem senkrechtlen quadratischen Prisma durchbohrt. Die Achsen beider Körper fallen zusammen, die Grundkanten des Prismas bilden mit den Grundkanten der Pyramide Winkel von 45° und sind halb so lang wie die Grundkanten der Pyramide. Zeichne Grund- und Aufsriß.

7. Zeichne die Durchdringung zweier kongruenter regelmäÙiger sechsseitiger Pyramiden mit gemeinschaftlicher Achse, deren Grundflächen um 30° gegeneinander verdreht sind.

8. Auf einer quadratischen Grundfläche liegen zwei horizontale Halbzylinder (Tonnen-dächer), deren Achsen die Mittelparallelen des Quadrates sind. Zeichne die Durchdringung ihrer Mäntel. (Kreuzgewölbe.) Anl.: Es sei keine der Zylinderachsen der Bildachse parallel. Als Hilfsebenen dienen Horizontalschnitte.

9. Ein Zylinder mit senkrechtler Achse wird von einem andern mit wagerechter Achse durchdrungen. Zeichne die Durchdringungslinie, wenn die Achsen beider Zylinder sich schneiden und a) beide Zylinder gleich dick sind; b) der zweite Zylinder dünner ist als der erste.

10. Zeichne die Durchdringungskurve zweier Sandkegel von a) gleicher, b) ungleicher Höhe. Böschungswinkel $\alpha = 45^\circ$. Anl. Als Hilfsebene benutze Horizontalebene.

11. Um einen zylindrischen Schornstein herum wird Koks aufgeschüttet, dessen Böschungswinkel ($\alpha = 50^\circ$) abgesehen von der Durchdringung durch den Schornstein nicht verändert wird. Zeichne die Durchdringungskurve, wenn die Achsen beider Körper nicht zusammenfallen.

12. Ein halbkugeliges Kuppeldach wird von einem zylindrischen Schornstein durchdrungen, dessen Achse nicht durch den Kugelmittelpunkt geht. Zeichne die Durchdringungskurve.

13. Durch einen Böschungsegel aus Sand ($\alpha = 45^\circ$) ist ein zylindrisches wagrechtes Rohr gesteckt, so daß die Rohrachse die Regelaehse schneidet. Zeichne die Durchdringungskurve.

14. Eine auf dem Boden liegende Kugel ist teilweise durch einen höheren kegelförmigen Sandhaufen (Böschungswinkel 45°) verschüttet. Zeichne die Durchdringung.

15. Durch ein halbkugelförmiges Kuppeldach geht ein horizontales Rohr. Zeichne die Durchdringung.

16. Um eine quadratische Säule ist Sand aufgeschüttet, dessen Böschungsegel dieselbe Achse hat wie die Säule.

17. Zeichne die Durchdringung eines senkrechten regelmäßigen Prismas und eines sehr spitzen Kegels von größerem Durchmesser, wenn die Achsen beider Körper zusammenfallen und der Kegel der durchdringende Körper ist. (Zugspitzter Bleistift.)

18. Zeichne ein sattelförmiges Kirchendach mit darauffitzendem zylindrischen Turm (sog. Dachreiter).

T. I. Schattenkonstruktionen.

Einleitung.

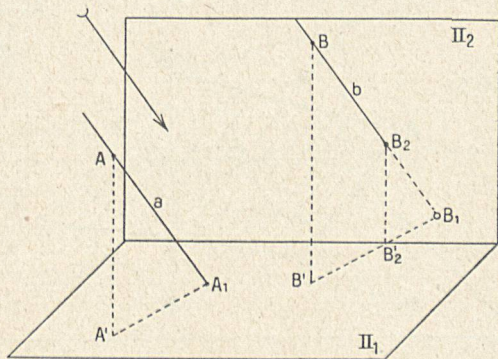
Die Anschaulichkeit einer Rißzeichnung wird durch die Hinzufügung der Schatten der gezeichneten Körper sehr erhöht. Die Zeichnung erscheint dadurch plastischer (körperlicher). Bei Grund- und Aufrissen nimmt man dabei der Einfachheit wegen gewöhnlich an, daß die Beleuchtung durch die als parallele Geraden betrachteten Sonnenstrahlen geschieht, und daß diese in einer bestimmten Richtung von vorn oben links auf die gezeichneten Körper fallen. Es werden dann die der Sonne zugekehrten Flächen des Körpers mehr oder weniger hell, während die anderen dunkel erscheinen (Eigenschatten). Die Grenzlinie zwischen dem beleuchteten und dem unbeleuchteten Teil der Körperfläche heißt die Lichtgrenze. Sie ist identisch mit dem in Heft I S. 45 besprochenen wahren Umriß des Körpers für ein Auge, das den Körper aus unendlicher Entfernung in der Richtung der Lichtstrahlen erblickt. Der dunkle Raum hinter der Lichtgrenze heißt der Schattenraum. Der Schnitt dieses Schattenraumes mit den undurchsichtig gedachten Bildebenen wird Schlag Schatten genannt. Dieser entspricht dem auch Heft I S. 45 erwähnten „scheinbaren Umriß“ des Körpers. Bei der Zeichnung des Eigenschattens und des Schlag Schattens eines Körpers verzichten wir auf die Wiedergabe der verschiedenen, durch die verschiedenen Einfallswinkel der Lichtstrahlen bedingten Helligkeitsgrade der beleuchteten Körperseite, sowie der ebenfalls verschiedenen Schattentöne, die gewöhnlich durch fremdes, von verschiedenen Seiten kommendes zerstreutes Tageslicht entstehen. Wir zeichnen also die vom Licht getroffenen Flächen gleichmäßig hell, die beschatteten gleichmäßig dunkel.

Schlagschatten eines Punktes und einer Geraden.

Beispiele.

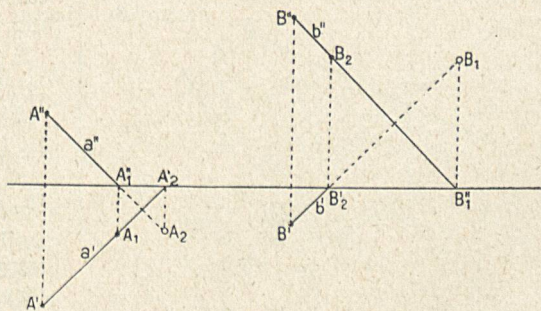
Beispiel 1. (Grundaufgabe.) Der Schatten materieller Punkte ist zu konstruieren. Die Richtung der Lichtstrahlen sei durch Grund- und Aufriß eines Strahles gegeben.

Analysis. Fig. 9a zeigt im Schrägbilde zwei Punkte A und B , die in verschiedenen Abständen von den (undurchsichtigen) Bildebenen liegen. Der Pfeil deutet die Richtung der parallel von vorn links oben kommenden Lichtstrahlen an. Die durch A und B parallel zum Pfeil gehenden Strahlen a und b treffen die Bildebene in A_1 und B_2 . Diese Punkte sind die Schlagschatten der gegebenen Punkte, und zwar liegt A_1 in Π_1 , B_2 in Π_2 . A_1 ist ein „Bodenschatten“, B_2 ein höher gelegener „Wandschatten“. Wäre die Aufsebene durchsichtig, so würde in B_1 ein Bodenschatten von B entstehen. Man erkennt,



Figur 9 a.

daß die Schlagschatten schiefe Parallelprojektionen der gegebenen Punkte auf Π_1 oder Π_2 oder mit anderen Worten die Grund- oder Aufrisse der durch die gegebenen Punkte gezogenen Lichtstrahlen sind. Sind nun Grund- und Aufriß eines Lichtstrahles gegeben, so kann man die Risse des durch jeden Punkt gehenden Strahles zeichnen nach dem Satz, daß parallele Geraden parallele Risse haben. Die Spuren findet man sodann nach Grundaufgabe 3 (Heft 2 S. 16).



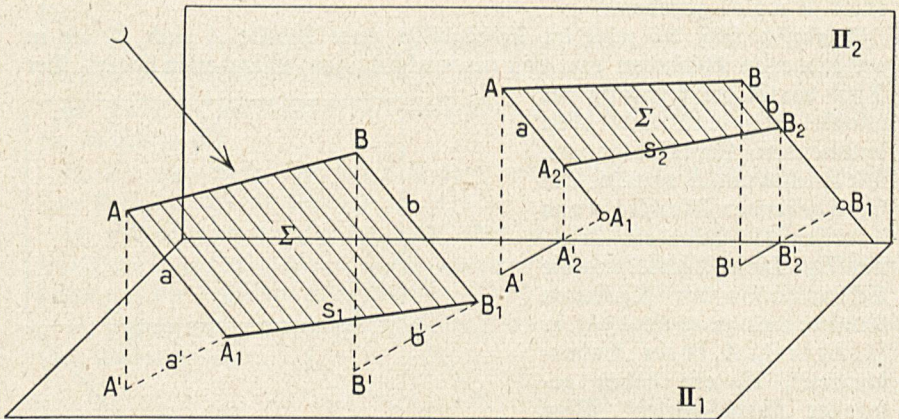
Figur 9 b.

Konstruktion. Fig. 9b.

Der Einfachheit wegen werde stets die an sich

beliebige Richtung der Lichtstrahlen so festgelegt, daß ihre Risse mit der Bildachse nach links Winkel von 45° bilden. Man ziehe also durch A' und A_1 die Geraden a' und a'' unter 45° Neigung gegen die Achse. Sie sind die Risse des durch A gehenden Lichtstrahles. Seine Grundspur A_1 liegt 1. auf dem Grundriß a' , 2. auf der Vertikalen im Achsenschnittpunkte von a'' . A_1 ist der Schlagschatten von A . Die ebenfalls konstruierte Aufriss A_2 liegt in dem unteren, durch Π_1 verdeckten Teil von Π_2 . Sie würde nur dann

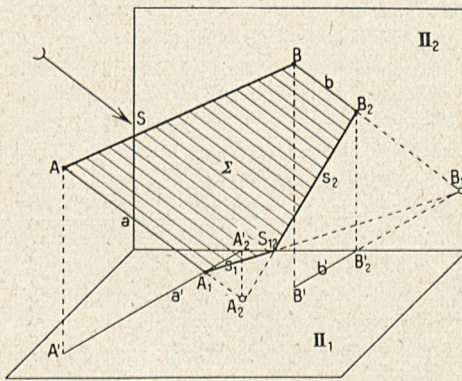
der Schlagsschatten sein, wenn Π_1 vollkommen durchsichtig und Π_2 undurchsichtig wäre, und kann als scheinbarer Schatten im Gegensatz zum wirklichen Schatten A_1 bezeichnet werden. Beim zweiten Punkt B findet man durch dieselbe Konstruktion wie bei A , daß der wirkliche Schatten B_2 in Π_2 liegt.



Figur 10 a.

Figur 10 b.

Beispiel 2. (Grundaufgabe.) Den Schatten einer gegebenen materiellen Strecke AB zu konstruieren.



Figur 10 c.

Analysis. In Fig. 10a—c sind die drei möglichen Fälle in Schrägbild gezeichnet:

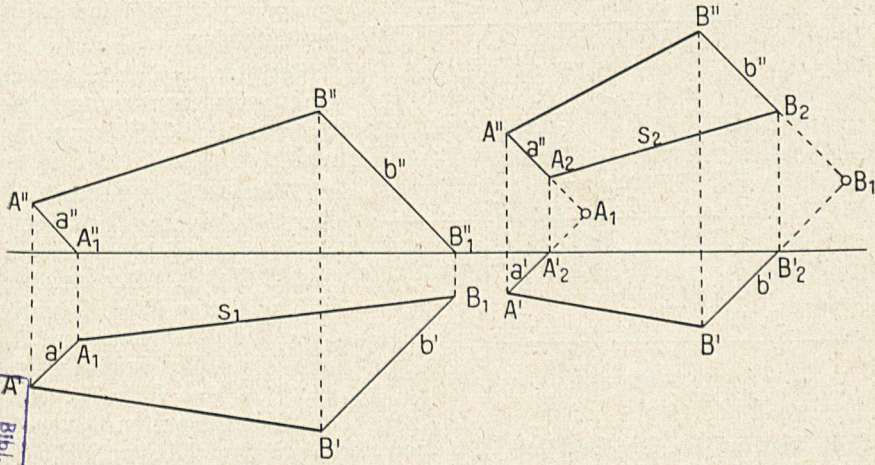
- Der Schatten fällt ganz in Π_1 (Grundschaten);
- der Schatten fällt ganz in Π_2 (Wandschatten);
- der Schatten fällt teils in Π_1 , teils in Π_2 .

a) Der Schatten einer Geraden muß als Parallelprojektion der Geraden wieder eine Gerade sein. Es genügt daher, nach Beispiel 1 die Schatten A_1 und B_1 der Endpunkte A und B zu konstruieren, so ist A_1B_1 der gesuchte

Schatten. Er ist die Grundspur der durch AB und die AB schneidenden Strahlen bestimmten „Schattenebene“ $AB A_1B_1$.

b) Auch hier genügt es, die Schatten A_2 und B_2 der Endpunkte zu konstruieren und zu verbinden. Der Schatten A_2B_2 ist die Aufspur der Schattenebene $AB A_2B_2$.

c) Hier besteht der Schatten aus beiden Spuren der Schattenebene, die sich in einem Punkte S_{12} der Achse schneiden müssen. Es sind also die Spuren $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ der durch die Parallelen a und b bestimmten Schattenebene zu konstruieren.



Figur 11 a.

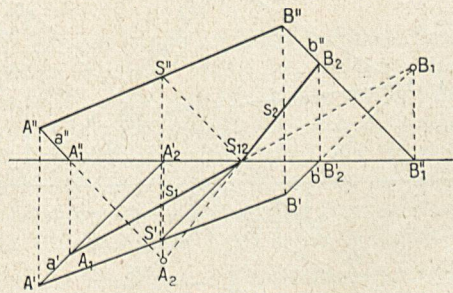
Figur 11 b.

Konstruktion. Die Figuren 11a—c entsprechen den drei in der Analysis angegebenen Fällen.

a) Konstruiere wie in Beispiel 1 die Grundspuren A_1 und B_1 der durch A und B gehenden Strahlen a und b , so ist $A_1 B_1$ die Grundspur der Schattenebene und somit der gesuchte Schatten.

b) Konstruiere wie in Beispiel 1 die Aufspuren A_2 und B_2 der Strahlen a und b . $A_2 B_2$ ist der gesuchte Schatten.

c) Konstruiere beide Spuren s_1 und s_2 der Schattenebene. Ihr Schnittpunkt S_{12} muß auf der Achse liegen. $A_1 S_{12}$ ist der Grundschatten, $B_2 S_{12}$ der Wandschatten. Die Verlängerungen $B_1 S_{12}$ und $A_2 S_{12}$ sind scheinbare Schatten.

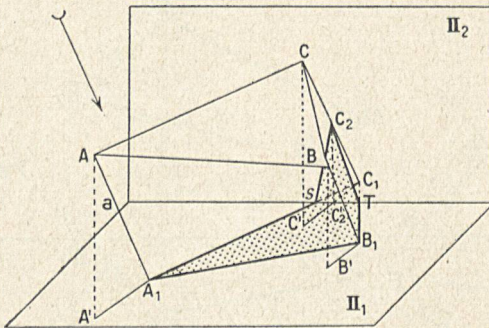


Figur 11 c.

Affinität des Grund- und Aufschattens.

Ist S (Fig. 10c) der Punkt der Strecke AB , dessen Schatten S_{12} ist, so ist $A_1 S_{12} : B_1 S_{12} = A_2 S_{12} : B_2 S_{12}$. Diese Proportion bleibt bestehen, wenn Π_1 heruntergeklappt wird (Fig. 11c). Es ist also $\triangle A_1 S_{12} A_2 \sim \triangle B_1 S_{12} B_2$, woraus folgt, daß $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$ sein muß. Betrachten wir A_1 und A_2 sowie B_1 und B_2 als entsprechende Punkte des Grund- und Aufschattens,

so sind also die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Schatten parallel. Da ferner die entsprechenden Geraden A_1B_1 und A_2B_2 sich auf der Bildachse (in S_{12}) schneiden, so sind die beiden Schatten der Strecke AB affin. Die Affinitätsrichtung ist durch die Richtung der Lichtstrahlen bestimmt. Affinitätsachse ist die Bildachse.

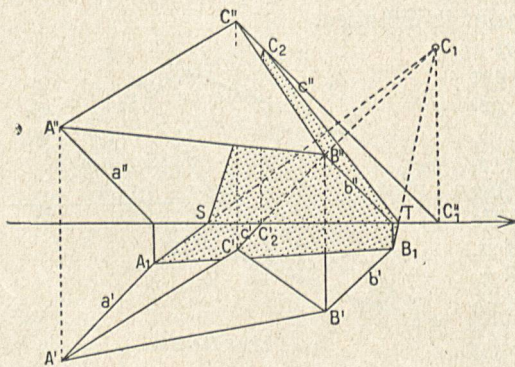


Figur 12 a.

Beispiel 3. Den Schatten eines gegebenen undurchsichtigen Dreiecks ABC zu zeichnen.

Lösung. Fig. 12a und b. Der Schattenraum des Dreiecks ist ein dreiseitiges Prisma $AA_1BB_1CC_1$. Der gesuchte Schlagschatten ist die Schnittfigur dieses Prismas mit Π_1 und Π_2 . Man bestimmt zunächst A_1 und B_1 in Π_1 . Der (wirkliche) Schatten C_2 von C fällt hier auf Π_2 . Die Schatten A_1B_1 von AB , A_1SC_2 von AC und B_1TC_2 von BC werden wie in Beispiel 2 ermittelt und begrenzen den Schlagschatten der Dreiecksfläche. Ein Teil des Schattens wird hier durch die Dreiecksfläche verdeckt.

Aus der Bemerkung zum vorigen Beispiel folgt, daß die (vollständigen) Grund- und Aufschatten des Dreiecks ($A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$), wie überhaupt jeder ebenen oder windschiefen Figur, affin sind. Diese Beziehung ist für Proben und verwickelte Schattenkonstruktionen von großem Nutzen. Mache die Probe an Fig. 12b nach Ermittlung der dort noch fehlenden Aufschatten A_2 und B_2 . Ist das schattenwerfende Vieleck eben, so sind nach Heft 2 S. 31 auch Grundriß und Grundschatten sowie Aufriß und Aufschatten des Vielecks affin. Affinitätsachsen sind die Grund- und Aufspur der Vielecksebene.



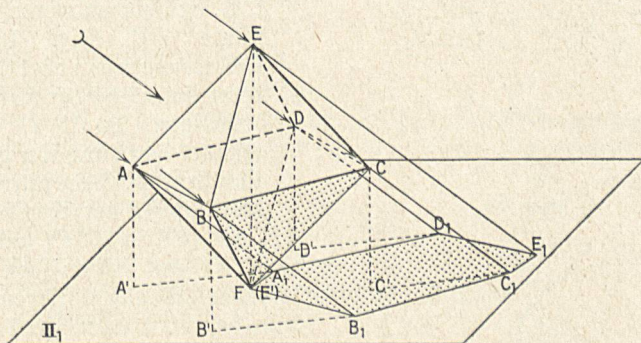
Figur 12 b.

Schatten von Körpern.

Bei einer ebenen Figur ist in der Regel die eine Seite hell, die andere beschattet (Ausnahme?). Der Umriss der Figur bildet die Lichtgrenze. Etwas verwickelter werden nun die Verhältnisse bei Körpern.

Beispiel 4. Bestimme Eigen- und Schlagshatten eines mit einer seiner Achsen senkrecht auf der Grundebene stehenden regelmäßigen Oktaeders.

Analysis. In Fig. 13a ist das schattenwerfende Oktaeder im Schrägbilde dargestellt. Der Schlagshatten möge ganz auf die Grundebene fallen. Von allen sechs Ecken sind die Schatten konstruiert. Der Schatten von F fällt mit F zusammen. Durch Verbindung der aufeinanderfolgenden Punkte $FB_1 C_1 E_1 D_1 A_1 F$ entsteht der Umriß des Schlagshattens. Dieser ist aufzufassen als der Schnitt des „Schattenprismas“, — d. h. des zwischen Oktaeder und Π_1 liegenden prismatischen Schattenraumes, welcher von den den Körper nur streifenden Lichtstrahlen begrenzt ist, — mit der Grundebene Π_1 . Die den Umriß bildenden Kanten $FB_1, B_1 C_1$ usw. sind die Schatten der Oktaederkanten FB, BC usw. Diese Kanten begrenzen nun den Eigenschatten des Körpers. Die Eigenschattengrenze wird demnach, ganz entsprechend der Schlagshattengrenze $FB_1 C_1 E_1 D_1 A_1 F$, von dem gebrochenen

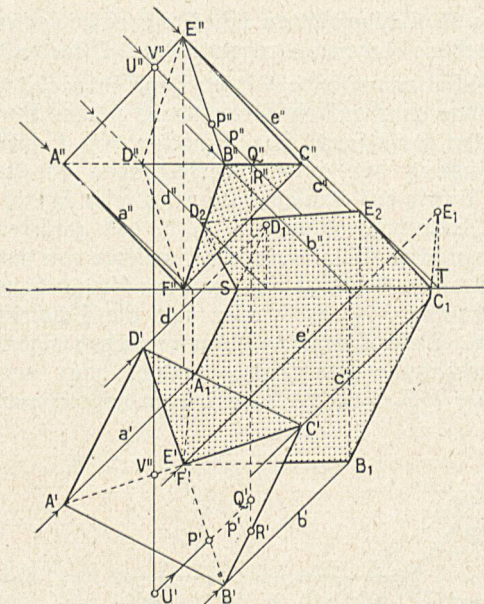


Figur 13 a.

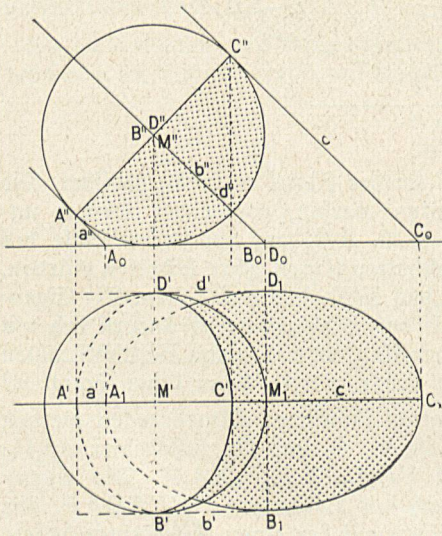
windschiefen Linienzuge $FBCEDAF$ (in der Figur verstärkt) gebildet. Die übrigen Kanten können keine Schatten werfen, wenn der Körper undurchsichtig ist, da sie entweder, wie z. B. AE , auf der hellen Seite des Körpers, oder wie FC in seinem Eigenschatten liegen. Ihre Schatten würden, wenn sie vorhanden wären, innerhalb des Schlagshattens fallen. Die Eigenschattengrenze und mit ihr die Gestalt des Schlagshattens ändern sich mit der Richtung der Lichtstrahlen. Wie sehen sie z. B. aus, wenn die Lichtstrahlen senkrecht von oben kommen? Welche Ecken werfen dann keine Schatten?

Konstruktion. (Fig. 13b). Die Schatten sämtlicher Oktaederedern werden nach Beispiel 1 ermittelt. Zwei von ihnen, E_2 und D_2 , fallen hier auf Π_2 . Der Schlagshatten des Körpers ist $FB_1 C_1 T E_2 D_2 S A_1 F$. Die Eigenschattengrenze des Körpers ist demnach der Kantenzug $FBCEDAF$. Die in diesem vorkommenden Kanten gehören auf der einen Seite einer hellen, auf der anderen einer dunklen Fläche an. Sie begrenzen also den Eigenschatten des Oktaeders.

Bemerkung. Anstatt, wie wir es soeben gemacht haben, zuerst den Schlagshatten und aus ihm den Eigenschatten eines Körpers zu bestimmen, ist es oft



Figur 13 b.



Figur 14.

Lösung. (Fig. 14.) Die den Schatten begrenzenden Lichtstrahlen sind sämtlich Tangenten an die Kugel. Der Schattenraum (vgl. Heft I Fig. 68) ist ein Zylinder, der die Kugel in einem Großkreise $ABCD$ berührt, dessen

vorteilhafter, mit der Eigenschattengrenze anzufangen, da man in der Regel ja nur die Schlagschatten der ihm angehörenden Ecken und Kanten zu ermitteln hat. In vielen Fällen läßt sich aus der Anschauung ohne weiteres entscheiden, welche Kanten zur Eigenschattengrenze gehören, d. h. von den Lichtstrahlen nur noch gestreift werden. Ist man dabei über irgendeine Kante im Zweifel, so hilft folgendes Verfahren: Es soll z. B. entschieden werden, ob die Kante BE (Fig. 13b) zur Schattengrenze gehört oder nicht. Man nimmt auf der Kante einen beliebigen Punkt P an und zeichnet den durch ihn gehenden Lichtstrahl p . Sein Aufriß kreuzt die Aufrisse der Nachbaranten

AE und BC in U'' V'' und Q'' R'' , wobei V'' und R'' auf den Kanten, U'' und Q'' auf p liegen mögen. Nun bestimmt man die Grundrisse dieser Punkte und untersucht, welche Lagen die Punkte U und Q sowie V und R im Raum zueinander haben. In Fig. 13b liegt U vor V und Q hinter R . Der Strahl p geht demnach vor der Kante AE , also auch vor der Fläche EAB vorbei und würde, wenn der Körper durchsichtig wäre, hinter BC und der Fläche EBC weiterlaufen. Beide Flächen sind demnach hell und BE gehört nicht zur Eigenschattengrenze.

Beispiel 5. Zeichne Eigen- und Schlagschatten einer auf Π_1 liegenden Kugel, wenn die Lichtstrahlen unter 45° Neigung gegen Π_1 und parallel Π_2 auffallen.

Ebene senkrecht zu den Lichtstrahlen steht. Dieser Großkreis bildet die Grenze des Eigenschattens. Sein Aufriß ist der Durchmesser $A''M''C''$, sein Grundriß die Ellipse $A'B'C'D'$, deren Mittelpunkt M' und Achsen $A'C'$ und $B'D'$ sich aus dem Aufriß ergeben. Die Schlagschattengrenze ist der Schnitt des Schattenzylinders mit Π_1 , also ebenfalls eine Ellipse, von der beliebig viele Punkte als Grundschatten von Punkten der Eigenschattengrenze ermittelt werden können. Es genügt aber, die Grundschatten $A_1B_1C_1D_1$ der Punkte $A B C D$ zu bestimmen, da sie die Scheitel der Schlagschattenellipse sind.

Übungsaufgaben.

1. Konstruiere den Schlagschatten:
 - a) einer auf Π_1 stehenden senkrechten Strecke;
 - b) eines zu Π_2 parallelen Dreiecks;
 - c) eines zu Π_1 parallelen Vielecks;
 - d) eines zu Π_1 parallelen Kreises;
 - e) eines zu Π_2 parallelen Kreises.
2. Konstruiere Eigen- und Schlagschatten:
 - a) eines über Π_1 befindlichen Würfels mit horizontaler Grundfläche;
 - b) eines auf Π_1 stehenden Würfels (die Grundfläche gehört sowohl dem Eigen- als dem Schlagschatten an);
 - c) einer stehenden Pyramide;
 - d) eines senkrechten Kegels;
 - e) eines stehenden dreiseitigen Prismas;
 - f) eines liegenden regelmäßigen sechsseitigen Prismas;
 - g) eines Kegels;
 - h) eines Kegelstumpfes;
 - i) eines stehenden Zylinders;
 - k) eines liegenden Zylinders, dessen Achse $\perp \Pi_2$ ist;
 - l) eines zylindrischen Turmes mit Kegeldach;
 - m) eines einfachen Hauses mit Satteldach;
 - n) eines Hauses mit holländischem Dach;
 - o) eines Turmes von quadratischem Grundriß mit Pyramidendach;
 - p) eines zylindrischen Turmes mit halbkugelförmigem Kuppeldach;
 - q) eines Obelisken mit quadratischem Sockel;
 - r) eines einfachen Grabkreuzes (ein Teil des Schlagschattens fällt auf das Kreuz selbst).

Dritter Abschnitt.

Perspektive (Zentralprojektion).

A. Linearperspektive.

Entstehung eines perspektivischen Bildes. Elemente des Bildes.

Die wesentliche Aufgabe der senkrechten Zweitafelprojektion (Rißlehre) besteht nach ihrem Begründer Monge (vgl. 2. Heft S. 57) darin, auf der



Abb. 1.

zweidimensionalen Zeichenfläche solche Raumgebilde abzubilden, die streng definiert werden können. Sie ist wegen ihrer Maßtreue von besonderer Bedeutung für die Technik und reicht als Werkzeichnung, auf Grund deren Gegenstände wirklich hergestellt werden sollen, bis ins Altertum (Vitruv).

Dagegen liegen die ersten erfolgreichen Versuche, Gegenstände bewußt so zu zeichnen, wie sie dem Auge eines Beschauers von einem festen Punkte aus erscheinen, wie es also heute der Schüler im Freihandzeichnen lernt, erst ungefähr 400 Jahre zurück. Erst dem Abendlande gelang die Lösung des Problems, bildtreue Gemälde, denen dann allerdings die unmittelbare Maßtreue fehlt, zu schaffen. Albrecht Dürer hat in verschiedenen Stichen veranschaulicht, wie man zu einem solchen Bilde gelangen kann: Perspektive der Laute, der Vase, des Mannes (s. Abb. 1); die Glastafelmethode (Abb. 2). Die Glastafel ist nämlich eine mechanische Hilfe zur Herstellung derartiger Bilder und hat dem ganzen Verfahren den Namen Perspektive (*perspicere* = hindurchsehen) gegeben. Sie ist auch am besten geeignet, eine Vorstellung von dem Entstehen perspektivischer Bilder zu geben.

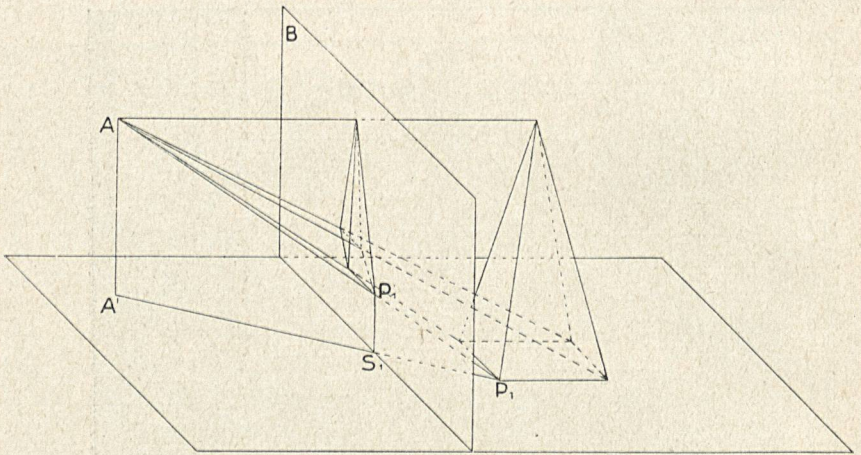


Abb. 2.

Wir stellen (Fig. 15) zwischen den Zeichner, der einen festen Standort dem zu zeichnenden Körper gegenüber eingenommen hat, und den Gegenstand die als durchsichtig angenommene Glasplatte (Fensterscheibe), die zur Bildebene, Zeichenebene wird. Sie wurde von den Begründern der Perspektive mit Lack überzogen. Zur Vereinfachung möge der Gegenstand nur mit einem Auge betrachtet werden, welches unverändert an einem Punkte bleibt, der Augpunkt oder das Auge heißt. Dies läßt sich praktisch durch eine Visiereinrichtung erreichen: man bringt unmittelbar vor dem Auge ein „Absehen“ an, wie es früher hieß, eine kleine Öffnung in einer undurchsichtigen, von einem Stativ gehaltenen Platte oder noch einfacher in einem Stück Papier. Zeichnet man nun auf der Lackschicht bzw. der matt angehauchten oder mit einem feidigen Schwamm getriebenen Fensterscheibe den Umriß eines Dinges, so wie er auf der Scheibe erscheint, mit einem geeigneten Stift nach, so daß sich für das beobachtende Auge die gezeichneten Linien und der wirkliche

Umriß des Gegenstandes decken, so erhält man ein Bild des Gegenstandes, das auf den Beschauer einen ähnlichen Eindruck macht wie der Gegenstand selbst.

Wenn sich aber von unserem Auge aus gesehen ein Punkt des zu zeichnenden Gegenstandes und sein „Bild“ decken, so liegen der Punkt, sein Bild und das Auge auf einer Geraden, einem „Sehstrahl“. Denken wir uns alle Sehstrahlen gezogen, d. h. das Auge mit sämtlichen Punkten des zu zeichnenden Gegenstandes verbunden, so schneiden diese Sehstrahlen sämtlich die Glastafel (Bildebene) in Punkten, die die Bilder entsprechender Punkte des Gegenstandes sind. Vom mathematischen Standpunkt aus ist also die Perspektive eine Zentralprojektion, deren Projektionszentrum das Auge ist. Das perspektivische Bild oder kurz die „Perspektive“ eines Gegenstandes ist der Schnitt



Figur 15.

der nach den Punkten des Körpers gezogenen Projektionsstrahlen mit der Zeichenebene.

Diese „Linienperspektive“ reicht in den meisten Fällen schon aus, um durch die Gesamtwirkung aller Linien ein Bild zu erzeugen, das von dem Gegenstand eine klare Vorstellung gibt. Für eine stärkere Wirkung des Bildes muß allerdings außer der Raumwirkung noch der Einfluß der Beleuchtung und der Farbe, gegebenenfalls auch der Spiegelung berücksichtigt werden. Die Erforschung ihrer Gesetze gehört in die Schattenperspektive bzw. die Luft- oder Ton- oder Farbenperspektive und der Spiegelperspektive. Wir werden uns im folgenden auf die Grundlagen der Linien- (Linear-) und der Schattenperspektive beschränken.

Das Bild eines Gegenstandes ist außer von seiner eigenen Lage zur Bildebene B noch abhängig von der Lage des Auges zur Bildebene (Fig. 16). Die Entfernung des Auges von der Zeichenebene heißt (Aug-) Distanz oder Augweite d ; der Fußpunkt des Lotes vom Auge auf die Bildebene

Dagegen gehören zu jedem Punkt der Bildebene unendlich viele Punkte des Raumes, nämlich alle diejenigen, deren Bilder in diesem Punkt zusammenfallen. Gehört der abzubildende Punkt der Bildebene an, so fällt sein Bild mit ihm zusammen. Dies gilt insbesondere für die Punkte der Grundlinie.

Liegt der Punkt in Augenhöhe über der Grundebene (P der Fig. 16), so verläuft der nach ihm gezogene Sehstrahl parallel der Grundebene. Legt man durch ihn die der Grundebene parallele Ebene, so schneidet diese die Bildebene in einer Geraden, die parallel der Grundlinie ist und als Horizont h bezeichnet wird. Die Bilder aller Punkte in Augenhöhe liegen also auf dem Horizont. Auf dem Horizont liegt auch der Hauptpunkt (warum?).

Punkte des hinter der Bildebene liegenden Teiles der Grundebene, z. B. die Punkte P_1 und P_2 , haben ihr Bild zwischen Grundlinie und Horizont. Je weiter sich der Punkt von der Grundlinie entfernt, um so mehr nähert sich sein Bild dem Horizont. (Grenzfall?) Der Horizont unserer Zeichnung ist also das Bild aller unendlich fernen Punkte der Grundebene; praktisch ist er das Bild der Grenzlinie einer weitausgedehnten Ebene, etwa des Meeres, also das Bild dessen, was wir sonst gewöhnlich als Horizont bezeichnen. Punkte über der durch Horizont und Auge gelegten Horizontalebene R haben ihr Bild über dem Horizont. Über dem Horizont der Bildebene darf daher keine ausgedehnte Wasserfläche sichtbar sein, unter dem Horizont entsprechend keine Luft.

Um nun das perspektivische Bild eines beliebigen Punktes zu konstruieren, denken wir uns den Punkt gegeben als Schnittpunkt zweier geeigneter Geraden. (In der analytischen Geometrie der Ebene ist ein Punkt in der Regel bestimmt als Schnittpunkt der beiden senkrechten Geraden $x = a$, $y = b$.) Wir müssen also das perspektivische Bild einer Geraden untersuchen.

Perspektivisches Bild einer Geraden. Fluchtpunkt.

Das perspektivische Bild einer Geraden g ist, falls sie nicht durch das Auge hindurchgeht, wieder eine Gerade g' (Fig. 17). Denkt man sich nämlich nach allen Punkten der Geraden die Sehstrahlen gezogen, so liegen diese sämtlich in einer Ebene, der projizierenden Ebene (Ausnahme?). Diese schneidet die Bildebene in einer Geraden g' , welche der geometrische Ort der Bildpunkte aller Punkte der Geraden ist. Man bezeichnet sie als das Bild der Geraden. Wann ist das Bild einer Geraden ein Punkt?

Aber auch jede andere Gerade und jede ebene Kurve, welche in dieser projizierenden Ebene liegt, hat dieselbe Gerade g' als Bild. Jeder Geraden g entspricht also zwar eindeutig eine Gerade g' als Bild (Ausnahme?); aber zu einer in der Bildebene liegenden Geraden g' gehören unendlich viele Geraden und Kurven, deren Bild sie ist.

In der zu der Geraden g gehörigen projizierenden Ebene liegt auch derjenige Sehstrahl, der der Geraden parallel läuft. Ist F sein Schnittpunkt mit der Bildebene, so ist F ein Punkt des Bildes der Geraden, da er der Schnittlinie der projizierenden Ebene mit der Zeichenebene angehört. Ein zweiter Punkt des Bildes der Geraden g ist der Punkt S_1 , den die Gerade mit der

Die perspektivischen Bilder paralleler Geraden gehen bei hinreichender Verlängerung durch denselben Fluchtpunkt. Oder: parallele Geraden haben denselben Fluchtpunkt. Denn den Fluchtpunkt einer Geraden erhält man, indem man durch das Auge die Parallele zu der Geraden zieht. Durch einen Punkt im Raume ist aber eine und nur eine Parallele zu einer Schar von parallelen Geraden möglich; also gibt es nur einen Fluchtpunkt. Umgekehrt gilt: Gerade, welche denselben Fluchtpunkt haben, sind parallel.

Der Fluchtpunkt ist für das Zeichnen von parallelen Geraden wichtig und wertvoll. Von besonderer Bedeutung sind die Fluchtpunkte horizontaler Geraden, die bei mathematischen Körpern und bei Bauwerken häufig sind. Der Fluchtpunkt einer Schar von wagerechten Parallelen liegt auf dem Horizont, da die durch das Auge zu einer Wagerechten gezogenen Parallele durch den Horizont geht. Insbesondere ist der Hauptpunkt der Fluchtpunkt für alle zur Bildebene senkrecht verlaufenden Geraden, sogenannte Tafellote oder Tiefenlinien.

Zusatz. Auch Ebenen haben eine Flucht (Fluchtlinie). Eine der Bildebene B nicht parallele Ebene E schneidet B in einer Geraden s , der Spur der Ebene. Legt man durch das Auge die zu E parallele Ebene, so schneidet diese die Bildebene in einer zweiten Geraden f , die die Flucht von E heißt. Alle parallelen Ebenen haben dieselbe Fluchtlinie; insbesondere ist für alle wagerechten Ebenen der Horizont die Fluchtlinie. ¹⁾

Denken wir uns den Punkt P auf der Geraden g_1 über die Bildspur hinaus auf das Auge zu bewegt, so verschiebt sich P' auf g'_1 auf der Verlängerung von $F S_1$ über S_1 hinaus. Für denjenigen Punkt V der Geraden g_1 , in welchem sie die durch das Auge parallel zur Bildebene gelegte Ebene J durchsticht, wird der Sehstrahl der Bildebene parallel. Das Bild von V rückt also über alle Grenzen hinaus fort, es verschwindet gewissermaßen. V heißt daher der Verschwindungspunkt, die Ebene J die Verschwindungsebene. Wie F das Bild des unendlich fernen Punktes der Geraden g_1 ist, so entspricht dem Punkte V der unendlich ferne Punkt von g_1 . Geht P auch über den Verschwindungspunkt V hinaus, so wandert P' aus dem Unendlichen auf der Verlängerung von $S_1 F$ auf F zu, bis im Grenzfall das Bild wieder nach F fällt.

Die Zuordnung je zweier Punkte, wie sie hier vorliegt, heißt perspektiv; sie ist eindeutig. Die Geraden heißen Träger von perspektiven Punktreihen. Die einfachen Teilverhältnisse werden bei dieser Zuordnung verändert: die Projektionen gleicher Strecken, z. B. $S_1 P_1, P_1 P_2 \dots$ sind verschieden lang; die unendlich lange Strecke $S_1 P_{\infty}$ wird durch die endliche Strecke $S_1 F$ abgebildet usf. Wohl aber bleibt bei dieser Abbildung das Doppelverhältnis für vier Punkte auf g_1 und den ihnen entsprechenden auf g'_1 erhalten¹⁾. Es ist also z. B.

$$\frac{P_4 P_3}{P_2 P_3} : \frac{P_4 P_1}{P_2 P_1} = \frac{P'_4 P'_3}{P'_2 P'_3} : \frac{P'_4 P'_1}{P'_2 P'_1}.$$

¹⁾ Beweis siehe dieses Unterrichtswerk, Ausgabe A und C, Geometrie 2. Teil II. Abschnitt B.

Das einfache Teilungsverhältnis bleibt dagegen erhalten, wenn die gegebene Gerade der Bildebene parallel ist. Die Gerade hat dann im Endlichen weder eine Bildspur (nach Vor.) noch einen Fluchtpunkt, da der durch das Auge gezogene Parallelstrahl die Bildebene nicht schneidet. Man sagt: Bildspur und Fluchtpunkt sind beide unendlich fern. Da das Bild einer Geraden g_1 die Schnittgerade der durch g_1 und das Auge gehenden Ebene mit der Bildebene ist, ist in diesem Fall $g_1' \parallel g_1$. Beweis: Angenommen g_1' wäre nicht parallel g_1 , so müßten sie sich, da sie in einer Ebene, der projizierenden Ebene, liegen, schneiden. Der Schnittpunkt müßte also auch in der Bildebene liegen. Dann müßte g_1 einen Punkt mit der Bildebene gemeinsam haben, was der Voraussetzung widerspricht.

Unter sich parallele Geraden, die außerdem der Bildebene parallel sind, sogenannte Tafelparallelen, haben demnach als Bilder Geraden, die

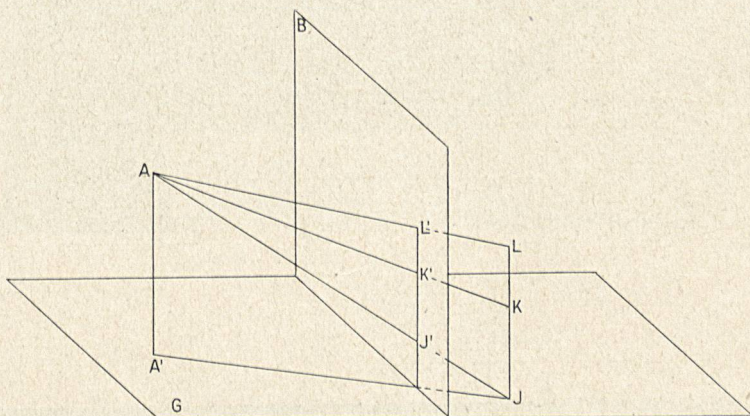
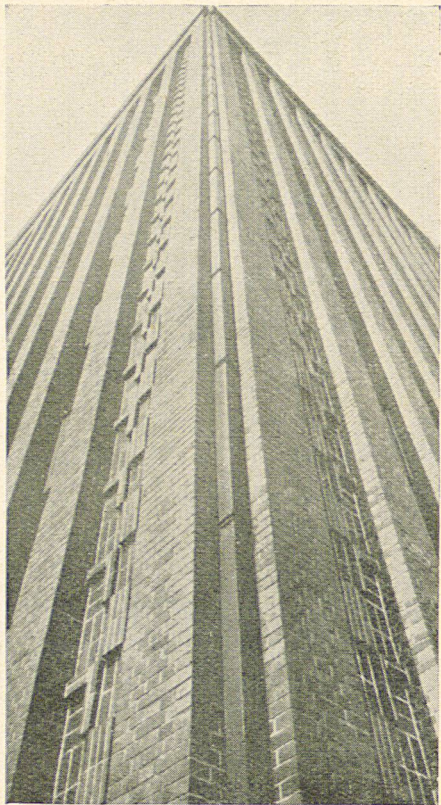


Figure 18.

der ursprünglichen Richtung parallel und damit auch untereinander parallel sind. Die Projektionen von Geraden, die der Bildebene parallel sind, bleiben also geometrisch parallel. Insbesondere erscheinen also Senkrechte auf der Grundebene, sogenannte Höhenlinien, wieder als Senkrechte in der Zeichnung (senkrechte Kanten von Körpern). Wagerechte Parallelen zur Bildebene, sogenannte Breitenlinien, erscheinen im Bilde wieder als wagerechte Geraden, nämlich als Parallelen zur Grundlinie.

Vgl. dazu die Abb. 3 und 4. Wie erklärt sich die Konvergenz der senkrechten Kanten des Gebäudes in Abb. 4?

Da (Fig. 18) nach dem Strahlensatz der Geometrie $JK : KL = J'K' : K'L'$ ist, erfahren gleiche Strecken einer Parallelen zur Bildebene in perspektivischen Bilde dieselbe Verjüngung. Das Bild einer der Bildebene parallelen Figur ist demnach der Originalfigur ähnlich. Das Auge ist dabei der Ähnlichkeitspunkt. Ein der Bildebene paralleles Geviert (Quadrat) z. B. bildet sich wieder als Geviert ab.

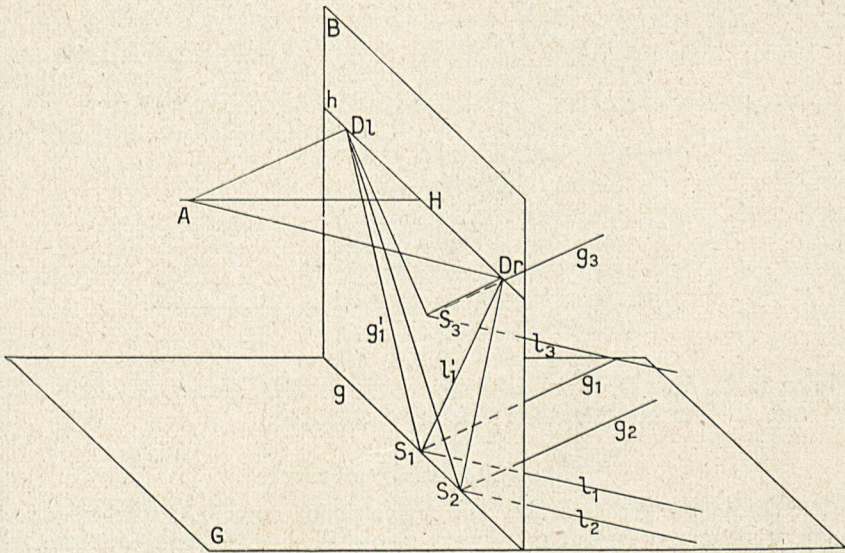


256. 4.



256. 3.

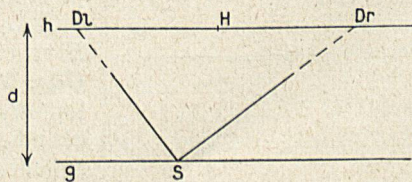
Außer für die Tafelparallelen und die Tiefenlinien lassen sich auch für diejenigen Scharen von wagerechten Geraden, die die Bildebene unter 45° schneiden, leicht die Bilder finden. Zieht man (Fig. 19) zu jeder der beiden Scharen durch A die Parallele, die den Horizont in den Punkten D_l und D_r treffen, so sind D_l und D_r die Fluchtpunkte dieser 45° -Linien. Da AD_l und AD_r ebenfalls Winkel von 45° mit der Bildebene bilden, ist Dreieck D_lAD_r rechtwinklig-gleichschenkelig, also $HD_l = HD_r = AH$, d. h. gleich der



Figur 19.

Augdistanz. Daher heißen D_l und D_r linker und rechter Distanzpunkt. Das Bild einer 45° -Linie ist dann die Verbindungslinie ihrer Bildspur mit dem zugehörigen Distanzpunkt. (Fig. 20.)

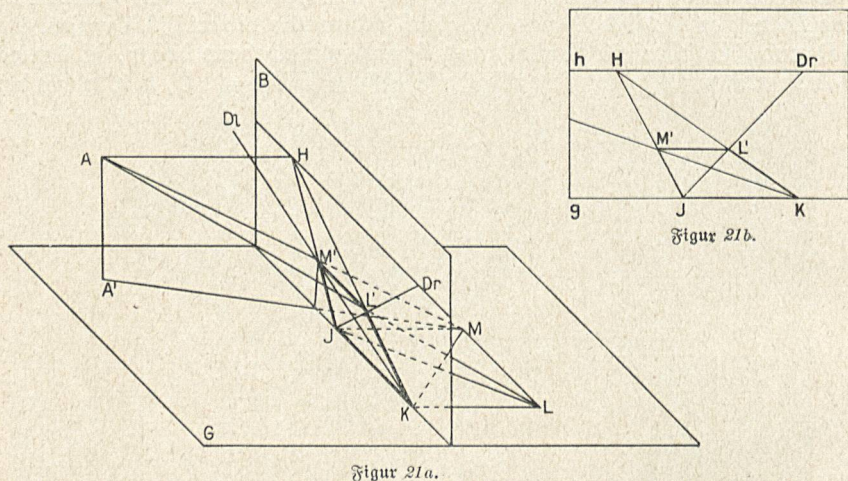
Zusammenfassung. Alle horizontalen Geraden haben, soweit sie nicht der Bildebene parallel sind, ihre Flucht im Horizont. Für jede Tiefenlinie ist der Hauptpunkt Fluchtpunkt, für jede 45° -Linie einer der beiden Distanzpunkte, das Bild einer Tafelparallelen bleibt der Raumgeraden geometrisch parallel.



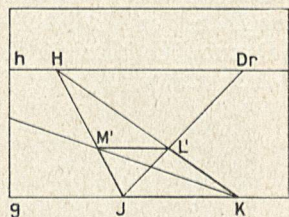
Figur 20.

Aufgabe. Das Bild eines in der Grundebene liegenden Gevierts (Quadrats) zu zeichnen, von dem eine Seite in die Grundlinie fällt. Horizont, Augweite und Aughöhe sind gegeben.

Fig. 21a zeigt die Konstruktion im Schrägbild, Fig. 21b die perspektivische Zeichnung: JK ist gleich der gegebenen Gevierteite. Die Tiefenlinien JM und KL haben ihre Flucht in H , die Diagonalen (Gehren) als 45°



Figur 21a.



Figur 21b.

Linien in D , bzw. D_i . Man zieht also JH und KH , ferner JD_i und KD_i . M' und L' sind die fehlenden Ecken des Gevierts.

Umlegung der Grundebene.

Da häufig die Gegenstände, die perspektivisch dargestellt werden sollen, nach ihrer wahren Gestalt und ihrer wahren Lage zeichnerisch im Grundriß gegeben sind, legt man die Grundebene so um, daß sie mit der Zeichenebene in eine Ebene fällt, aber ohne daß die Grundrißfigur sich mit dem perspektivischen Bilde mischt. Zu dem Zweck dreht man den hinter der Bildebene liegenden Teil der Grundebene um die Grundlinie um 90° auf das Auge zu und verschiebt sie dann so weit nach unten, bis der Grundriß vollständig unterhalb der Grundlinie erscheint. Man erhält dann das nebenstehende Schema (Fig. 22). g_0 fällt in Wirklichkeit mit g zusammen; die wahre Lage der Grundebene ist räumlich senkrecht hinter der Zeichenebene vorzustellen.

h	Bild-	Grundebene
Horizont	ebene	
g	Grundlinie	Grundebene
hinter der Bildebene		
g_0	(Grundlinie)	Grundebene
vor der Bildebene		

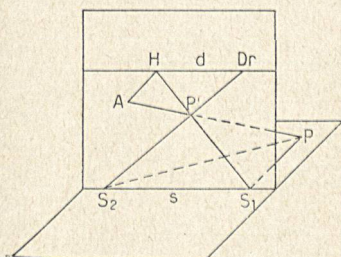
Figur 22.

Anmerkung: Man kann auch den hinteren Teil der Grundebene nach unten drehen; dann treten aber die Grundrißfiguren nicht so auf, wie sie von oben gesehen erscheinen, sondern so, wie sie von unten gesehen werden.

Konstruktion der Perspektive von Punkten der Grundebene. Anwendungen.

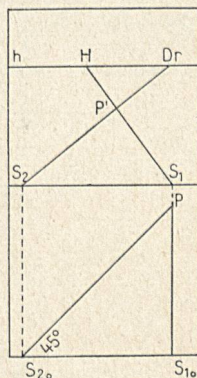
Nach diesen Erörterungen über die perspektivischen Bilder von Geraden wenden wir uns wieder unserem Ausgangspunkte zu: das perspektive Bild eines beliebigen gegebenen Punktes zu finden.

Wir nehmen zunächst an, der Punkt liege in der Grundebene. Da wir den Punkt als Schnittpunkt zweier beliebigen Geraden auffassen wollen, wählen wir zwei Gerade, deren perspektivische Bilder leicht zu konstruieren sind. Wir ziehen also durch P die Tiefenlinie PS_1 und eine 45° -Linie PS_2 , wie es die Figur 23a in schräger Parallelprojektion zeigt. Die Tiefenlinie hat als Spur S_1 , als Fluchtpunkt H ; ihr perspektivisches Bild ist also S_1H . Die Spur der 45° -Linie ist S_2 , ihr Fluchtpunkt D_r (der rechte Distanzpunkt), ihr Bild S_2D_r . Das Bild des Punktes P ist also der Schnittpunkt P' von S_1H und S_2D_r .



Figur 23a.

Der Sehstrahl AP wird also bei dieser Konstruktion gar nicht mehr gebraucht. Es ist aber vorher nachzuweisen, daß $AP'P$ eine Gerade ist: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $HP'D_r$ und $S_1P'S_2$ folgt: $d : s = HP' : P'S_1$. Nun ist $AH = d$; $PS_1 = s$ (PS_1S_2 rechtwinklig-gleichschenkelig); also $AH : PS_1 = HP' :$



Figur 23b.

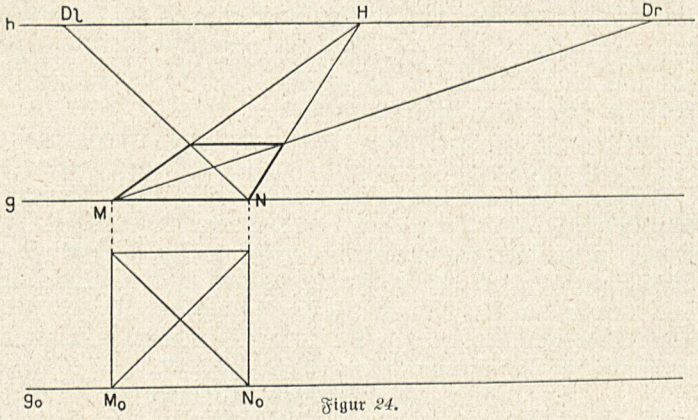
$P'S_1$. Da ferner $AH \parallel PS_1$, so Dreieck $AP'H \sim PP'S$; da $HP'S_1$ eine Gerade, so auch $AP'P$.

In der Zeichenebene ergibt sich also folgende Konstruktion (Fig. 23b): man macht $S_{10}S_{20} = PS_{10}$, projiziert S_{10} und S_{20} auf g , zieht S_1H und S_2D_r ; ihr Schnittpunkt ist P' .

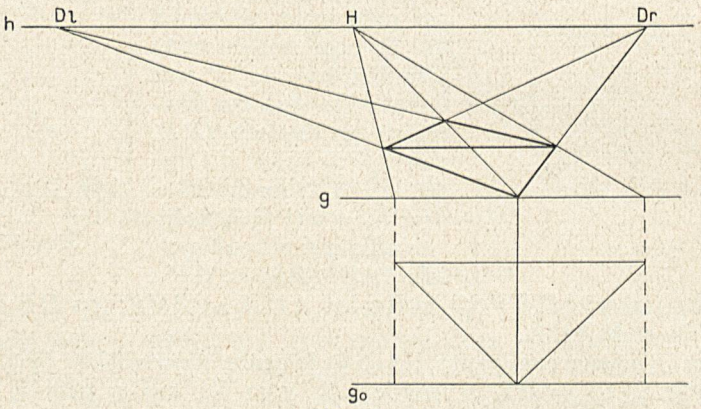
Anmerkung: Trägt man PS_{10} nach rechts auf g_0 ab, so hat man den linken Distanzpunkt zu benutzen.

Mit der Lösung dieser grundlegenden Aufgabe, die versteht schon bei der Zeichnung eines Gebiets verwandt wurde, sind wir in der Lage, das perspektivische Bild einer beliebigen in der Grundebene gelegenen Figur zu zeichnen. Man braucht nur für jeden Punkt (bzw. möglichst viele Punkte) der Originalfigur den Bildpunkt nach dem angegebenen Verfahren zu zeichnen. Bei geradlinigen Figuren wird man berücksichtigen, daß sich Gerade wieder als Gerade abbilden und daß parallele Geraden der Originalfigur in der perspektiven Zeichnung denselben Fluchtpunkt haben.

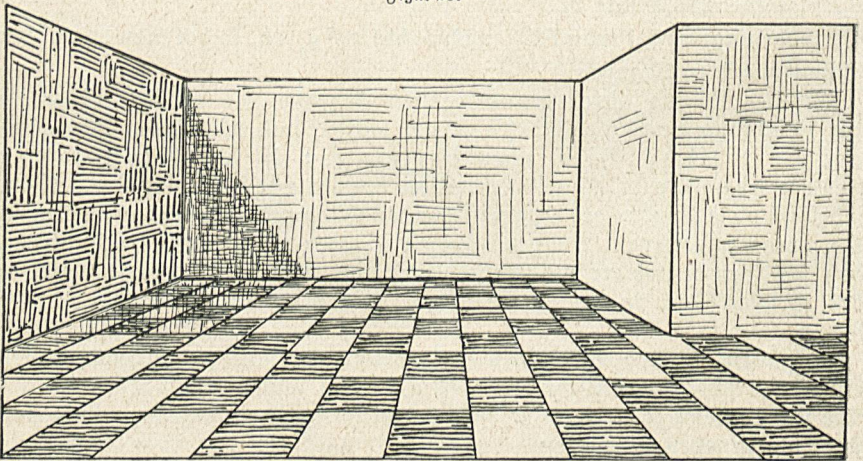
Aufgaben. 1. Das Bild eines horizontalen Gebiets zu zeichnen, dessen eine Seite a in der Grundlinie liegt. (Fig. 24; vgl. auch die Aufgabe Seite 28.) Die Konstanten der Perspektive sind bei dieser und den folgenden Aufgaben stets als gegeben anzusehen.



Figur 24.



Figur 25.



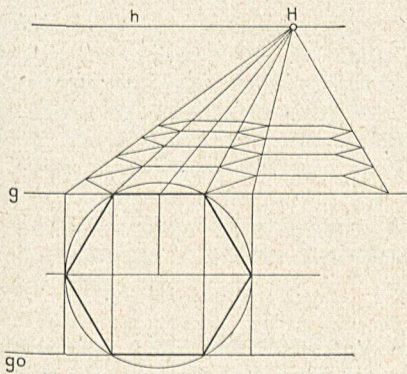
Figur 26.

Lösung. Man überträgt M_0 und N_0 auf die Grundlinie g und zieht die Tiefenlinien und 45° -Linien. Die fehlenden Ecken ergeben sich als deren Schnittpunkte.

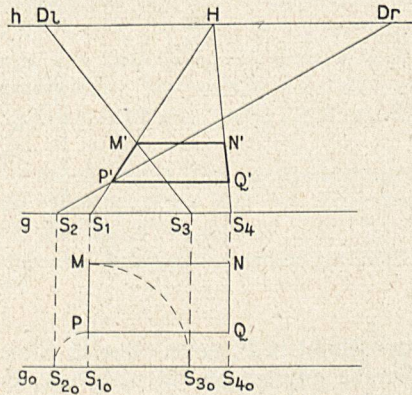
2. Das Bild eines wagerechten Gevierts in Übereckstellung zu zeichnen, wenn eine Ecke in der Grundlinie liegt. (Fig. 25.)

3. Das perspektivische Bild eines quadratischen Fußbodens zu zeichnen. (Fig. 26.)

Lösung. Die erste Reihe der Gevierte liege mit einer Seite in der Grundlinie. Man trägt die Geviertseite wiederholt auf der Grundlinie g von einem Punkte aus ab; die übrigen Geviertseiten haben teils als Tiefenlinien ihren Fluchtpunkt in H , teils laufen sie der Grundlinie parallel. Die eine



Figur 27.



Figur 28.

Schar der Diagonalen flieht nach D_l , die andere nach D_r . Man zieht also von den auf der Grundlinie liegenden Ecken der Gevierte die Geraden nach H und den beiden Distanzpunkten; ihre Schnittpunkte liefern die fehlenden Ecken der Gevierte.

4. Das Bild eines wagerechten regelmäßigen Sechsecks zu zeichnen, dessen eine Seite in der Grundlinie liegt.

5. Eine Sechseckäfelung zu zeichnen; die vordere Reihe der Sechsecke liege mit einer Seite in der Grundlinie. — Man erhält drei Scharen von parallelen Geraden (Fig. 27).

6. Das Bild eines in der Grundebene liegenden Rechtecks zu zeichnen, wenn zwei Seiten der Grundlinie parallel sind (Fig. 28).

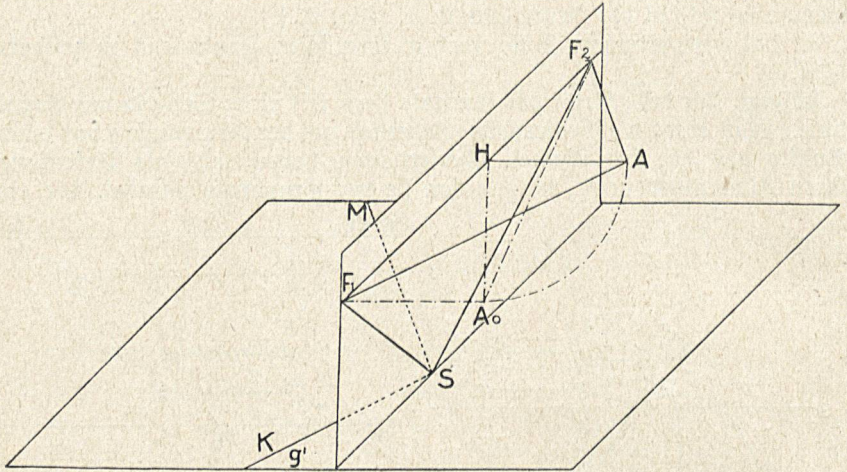
7. Das Bild eines in der Grundebene liegenden Gevierts in beliebiger Lage zu zeichnen.

Winkel zweier wagerechten Geraden. Umlegung des Auges.

Die Aufgabe 7 läßt sich einfacher nach einem Verfahren lösen, welches die Spuren der Quadratseiten und das sogenannte „umgelegte Auge“ benutzt.

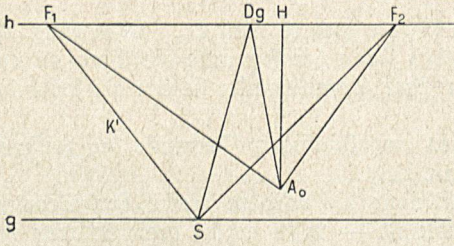
Da die vom Auge aus nach den Fluchtpunkten zweier horizontalen Raumgeraden gezogenen Geraden diesen Geraden parallel sind, so schließen sie

auch denselben Winkel ein wie die beiden Geraden. Jeder perspektivisch zu zeichnende Winkel kann demnach am Auge geometrisch angetragen werden.
Es sei (Fig. 29) SK eine horizontale Gerade, die ihre Spur in S und

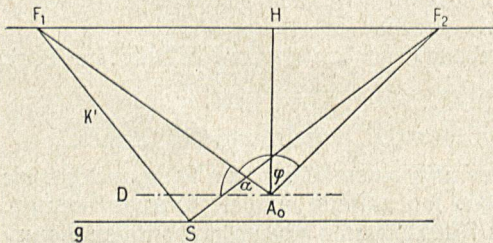


Figur 29.

ihre Flucht in F_1 habe. Um in S die SK unter 90° schneidende wagerechte Gerade anzutragen, ist nach dem Vorhergehenden das Auge A mit F_1 zu verbinden, in A an F_1A ein rechter Winkel anzulegen, dessen freier Schenkel den Horizont in F_2 schneidet; F_2S ist dann das perspektivische Bild der gesuchten Geraden.



Figur 30.



Figur 31.

Zur Durchführung der Konstruktion denken wir uns das in Wirklichkeit senkrecht zur Bildebene liegende Dreieck F_1AF_2 um F_1F_2 als Achse in die Ebene der Zeichnung umgelegt, gleichgültig, ob nach oben oder nach unten. Ist A_0 das „umgelegte“ Auge, so ist F_1A_0 der umgelegte Parallelstrahl durch A zu SK ; HA_0 die Augweite. Die in A_0 an A_0F_1 unter 90° angetragene Gerade A_0F_2 liefert den Fluchtpunkt F_2 für die Horizontale SF_2 , die perspektiv rechtwinklig zu F_1S steht (Fig. 30). An der Größe des Winkels wird

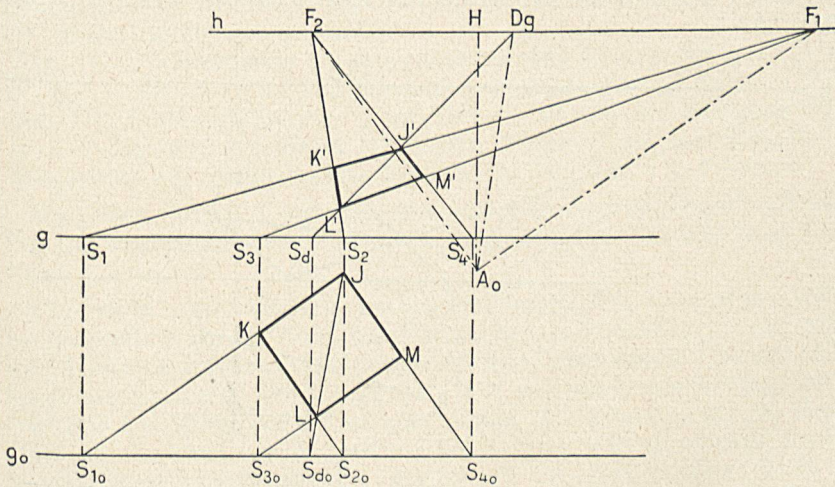
durch das Herab schlagen des Dreiecks nichts geändert; d. h. die am umgelegten Auge nach den Fluchtpunkten wagerechter Geraden gezogenen Strahlen schließen denselben Winkel ein wie die ihnen entsprechenden Geraden selbst.

Soll die Gerade SK (Fig. 31) den Winkel α mit der Grundlinie bilden, so zieht man $DA_0 \parallel g$, macht $DA_0F_1 = \alpha$ und, wenn der Winkel der beiden Geraden φ ist, $F_1A_0F_2 = \varphi$. Die Verbindungsgeraden der Fluchtpunkte F_1 und F_2 mit S ergeben die Bilder der beiden Geraden.

Auch die perspektivische Teilung eines Winkels erfolgt durch geometrische Teilung am umgelegten Auge. Um zum Beispiel den perspektivisch rechten Winkel F_1SF_2 der Fig. 30 zu halbieren, halbiert man $F_1A_0F_2$ und verbindet den Fluchtpunkt dieser Halbierungslinie Dg mit S ; dann ist SDg die perspektivische Halbierende des Winkels F_1SF_2 . Dg führt in diesem Falle den Namen Diagonalepunkt, weil, wenn SF_1 und SF_2 als Seiten eines Quadrats aufgefaßt werden, die Halbierungslinie des rechten Winkels und die Diagonale zusammenfallen. Der Diagonalepunkt dient häufig als Kontrollpunkt für die Richtigkeit der Zeichnung.

Sind umgekehrt zwei horizontale Geraden durch ihre perspektivischen Bilder gegeben, so kann man aus ihren Fluchtpunkten und der Lage des umgelegten Auges ihren wahren Winkel finden. (Lösung?).

Die Aufgabe 7 des vorigen Abschnitts läßt sich nun in folgender Weise lösen (Fig. 32):



Figur 32.

Der Fluchtpunkt der beiden parallelen Seiten KJ und LM ist der Punkt F_1 des Horizonts, in welchem die durch das umgelegte Auge A_0 zu KJ gezogene Parallele den Horizont schneidet. Entsprechend erhält man den Fluchtpunkt für die Richtung JM mit Hilfe der Parallelen durch A_0 zu JM .

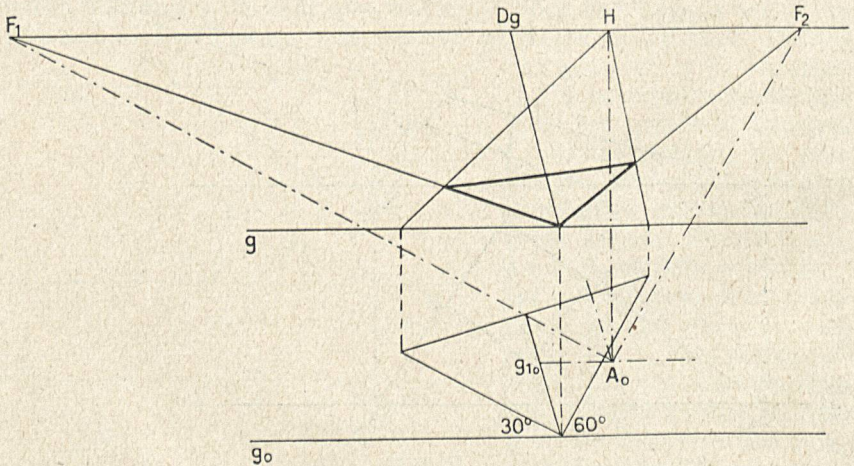
Die Spurpunkte der Geviertseiten, d. h. ihre Schnittpunkte S_{1_0} , S_{2_0} mit der Grundlinie g_0 werden durch Senkrechte auf g übertragen. Die Bildgeraden, auf denen die Geviertseiten liegen, sind dann S_1F_1 , S_2F_2 , S_3F_1 , S_4F_2 . Sie bestimmen in $K'L'M'J'$ das Bild des Gevierts.

Die Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung läßt sich mit Hilfe des Diagonalspunktes durchführen, indem man entweder durch A_0 die Parallele etwa zu JL zieht oder den Winkel $F_2A_0F_1$ halbiert; in beiden Fällen erhält man den Diagonalspunkt Dg . Lotet man Sd_0 nach Sd auf g hinauf, so ist $SdDg$ die Bildgerade, auf welcher das Bild der Diagonale JL liegt. $SdDg$ muß also bei richtiger Zeichnung durch L' und J' hindurchgehen.

Diese Prüfung durch Diagonalsfluchtpunkte, soweit sie zugänglich sind, ist sehr einfach; man braucht in unserem Beispiel nur zu prüfen, ob SdL' oder SdJ' durch Dg geht.

Die Durchführung der Konstruktion ist ein Beispiel dafür, daß das oben beschriebene Verfahren der Konstruktion einzelner Bildpunkte durch eine Tiefenlinie und eine 45° -Linie in der Zeichenpraxis nicht so wichtig ist, wie es zunächst scheint. Vorteilhafter ist es, die Spurpunkte und Fluchtpunkte von Geraden zu verwenden, wo es irgend geht. Die Bilder etwa der Ecken ergeben sich dann aus den Bildern dieser betreffenden Geraden.

Aufgaben. 1. Zeichne das Bild eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit seiner Höhe zur Hypotenuse, dessen Spitze in der Grundlinie liegt und dessen Katheten mit der Grundlinie Winkel von 30° bzw. 60° bilden. (Fig. 33.)



Figur 33.

2. Zeichne das Bild a) eines regelmäßigen Achtecks, b) eines Rhombus in beliebiger Lage in der Grundebene.

3. Entwirf eine rechteckige Fußbodentafelung.

Bilder von Kurven. Das perspektive Bild eines Kreises.

Auch die Bilder von Kurven, die in der Grundebene liegen, lassen sich jetzt zeichnen. Für eine Näherungskonstruktion reicht es aus, die Bilder einer genügenden Anzahl von Punkten der Kurve zu bestimmen und diese durch einen Linienzug zu verbinden.

Häufig wird die Konstruktion erleichtert durch Bestimmung der Tangenten in verschiedenen Punkten und ihrer perspektivischen Bilder. So beschreibt man um einen in der Grundebene liegenden nicht zu großen Kreis das Geviert, von dem zwei Seiten der Grundlinie parallel sind; um einen größeren Kreis zwei geeignet liegende symmetrische Gevierte (regelmäßiges Achteck), so daß die Geviertseiten Berührende des Kreises sind. Als Beispiel diene (Fig. 34), das perspektive Bild eines in der Grundebene liegenden Halbkreises zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf der Grundlinie liegt.

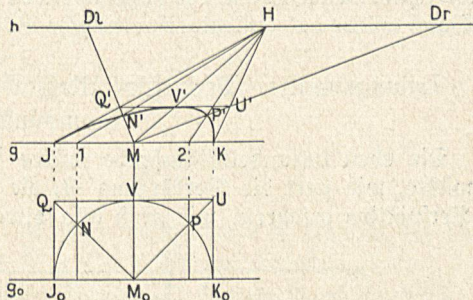
Das Bild des Mittelpunktes M fällt in die Grundlinie; die Bilder der Tiefenlinien J_0Q , K_0U , M_0V sind die Geraden JH , KH , MH ; M_0Q und M_0U als 45° -Linien haben ihre Fluchtpunkte in D_l und D_r und als Bilder demnach MD_l und

MD_r . Ihre Schnittpunkte mit den entsprechenden Tiefenlinien geben Q' und U' . $Q'U'$, $J'Q'$, $K'U'$ werden Tangenten der zu zeichnenden Kurve. J , V' , K sind die Berührungspunkte. Zwei weitere Punkte der Bildkurve erhält man, indem man die Bilder der Punkte N und P als Schnittpunkte der Diagonalen und entsprechender Tiefenlinien $1H$ und $2H$ bestimmt.

Aufgaben. Zeichne 1. das Bild eines in der Grundebene liegenden Kreises, der a) die Grundlinie berührt; b) beliebige Lage hat; 2. das Bild eines Kreisrings.

Lösung zu 1: Man beschreibe um den Kreis das Geviert, von dem zwei Seiten der Grundlinie parallel sind, und ein zweites in Überdeckung, so daß dessen eine Diagonale zur Grundlinie parallel ist. Die Seiten und Diagonalen beider Quadrate haben teils ihre Fluchtpunkte in H und den beiden Distanzpunkten, teils sind ihre Bilder der Grundlinie parallel. Die Schnittpunkte der Seiten eines Gevierts mit den Diagonalen des anderen sind Punkte des Kreises, nämlich Berührungspunkte des Kreises mit den Geviertseiten. Durch die so gefundenen 8 Punkte mit ihren Berührenden läßt sich die perspektivische Kurve des Kreises im allgemeinen hinreichend genau zeichnen.

Das perspektivische Bild des Kreises in der Lage, wie wir sie angenommen haben, ist eine Ellipse. Denn die vom Auge nach allen Punkten des Kreises gezogenen Sehstrahlen bilden einen Kreiskegel, dessen sämtliche Mantellinien von der Bildebene schräg geschnitten werden.

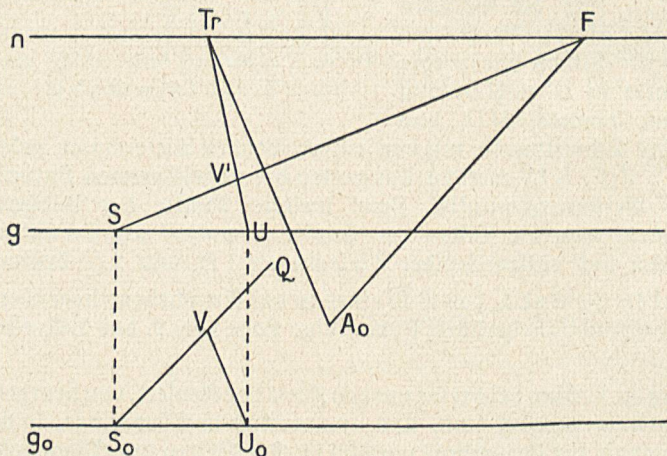


Figur 34.

Bei beliebiger Lage des Kreises kann das Bild auch ein anderer Kegelschnitt sein. Wenn ein Kreis sich als Parabel abbilden soll, muß das Bild eines einzigen Punktes des Kreises ins Unendliche fallen. Aber nur Punkte der Verschwindungsebene haben ihre Bilder im Unendlichen. Bringt man daher die Verschwindungsebene mit der Ebene des Kreises zum Schnitt, so muß der Kreis die Schnittgerade (Verschwindungslinie) berühren, wenn er als Parabel abgebildet werden soll. Schneidet der Kreis die Verschwindungslinie nicht, so ist das Bild eine Ellipse, da sämtliche Punkte sich im Endlichen abbilden. Schneidet er dagegen die Verschwindungslinie, so fallen die Bilder von 2 Punkten des Kreises ins Unendliche; die Bildkurve ist dann eine Hyperbel. Das Bild eines Kreises ist dagegen wieder ein Kreis, wenn die Ebene des abzubildenden Kreises der Bildebene parallel ist. Wann würde das zentralperspektivische Bild eines Kreises eine Gerade sein? ¹⁾

Teilungspunkte. Perspektive Maßstäbe. Das Bild eines beliebigen Raumpunktes.

Die eben behandelte Aufgabe würde sich auch lösen lassen, wenn man wüßte, wie stark die Verkürzung ist, die die horizontalen Strecken bei der Perspektive erfahren, wie groß also etwa IQ' der Fig. 34 im Verhältnis



Figur 35.

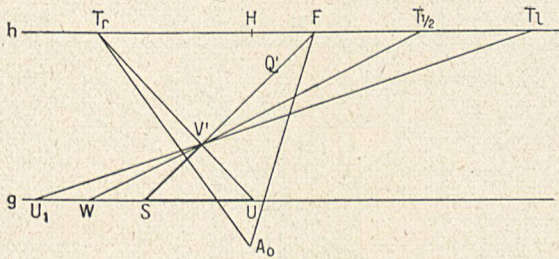
zu I_0Q ist, KU' im Verhältnis zu K_0U , $Q'U'$ im Verhältnis zu QU . Tatsächlich ist ja in der durchgeführten Konstruktion die Verkürzung schon gefunden. Wir wollen aber die Aufgabe jetzt allgemein fassen und fragen: Wie kann man auf einer perspektivisch gegebenen Geraden eine gegebene Strecke a einmal bzw. öfters abtragen?

In Fig. 35 sei die Strecke S_0V der Geraden S_0Q der Grundebene $= a = S_0U_0$, das Dreieck VS_0U_0 also gleichschenkelig. Zieht man durch A_0 die

¹⁾ Siehe auch dieses Unterrichtswerk. Ausg. A. 4. Teil. II. Abschnitt.

Parallele zu S_0Q , so ist F der Fluchtpunkt der Geraden S_0Q , ihr Bild also SF . Ebenso ist, wenn A_0T_r parallel U_0V , T_r der Fluchtpunkt der Geraden U_0V und UT_r , also ihr Bild. Also ist SV' das Bild der Strecke S_0V , also perspektivisch $= a$. Da A_0F parallel S_0V , $A_0T_r \parallel U_0V$, $FT_r \parallel S_0U_0$, so ist auch $\triangle A_0FT_r$ gleichschenkelig (Spitze F); T_r wird also gefunden, indem man FA_0 auf dem Horizont von F aus abträgt.

Für das Abtragen einer Strecke a auf einer Geraden der Grundebene (Bildspur S , Flucht F) ergibt sich daraus folgendes Verfahren (Fig. 36): Man macht $SU = a$, $FT_r = FA_0$ und zieht UT_r ; dann ist SV' die gesuchte Strecke.



Figur 36.

Trägt man a als Einheit wiederholt auf g ab und wendet auf die Teilstrecken das eben beschriebene Verfahren an, so erhält man einen perspektiven Maßstab für die Gerade.

T_r heißt der Teilungspunkt für die Gerade SF . Der Kreis um F mit FA_0 liefert noch einen zweiten Schnittpunkt T_1 mit dem Horizont. Auch dieser kann als Teilungspunkt dienen, wenn man die Strecke a von S aus nach links auf g abträgt (Fig. 36).

Will man umgekehrt aus dem Bilde SV' einer Strecke die wahre Länge der Strecke finden, so verbindet man einen der Teilungspunkte, etwa T_r , mit V' ; dann ist SU die gesuchte wahre Länge.

Fallen die Teilungspunkte außerhalb der Zeichensfläche, so kann man auch den sog. halben Teilungspunkt $T_{1/2}$ benutzen, wenn man entsprechend $1/2 SU$ auf g abträgt; ebenso $T^{1/3}$, $T^{1/4}$, $T^{2/3}$ usw. (reduzierte Teilungspunkte). (Fig. 36.)

Eine Schar von parallelen Geraden der Grundebene hat dieselben Teilungspunkte. Warum?

Für Tiefenlinien (Fluchtpunkt H) sind die Distanzpunkte (bzw. die Halbdistanzen, Dritteldistanzen usw.) Teilungspunkte. Warum?

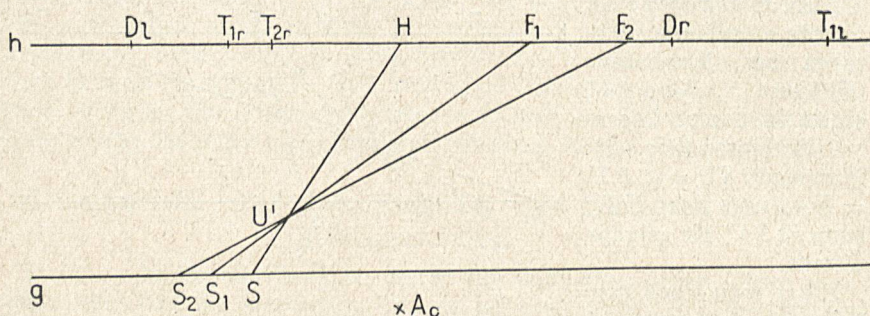
Aufgaben. 1. Trage auf einer Geraden der Grundebene von einem gegebenen Punkte P aus die Strecke a ab.

2. Stelle einen perspektiven Maßstab her a) für Tiefenlinien (vgl. quadratisches Fußbodenmuster); b) für eine beliebige wagerechte Gerade.

3. Zeichne das perspektivische Bild eines in der Grundebene liegenden Kreises unter Verwendung des Teilungspunktes.

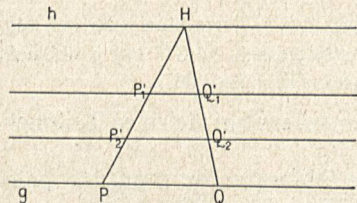
4. Bestimme a) die wahre Länge einer beliebigen Strecke auf dem Bilde einer Geraden der Grundebene; b) das Verhältnis, in welchem eine perspektivisch gegebene Strecke einer Geraden der Grundebene in einem Punkte geteilt wird.

Unsere Überlegungen für Teilungspunkte gelten auch für solche wagerechten Geraden, deren Spuren nicht auf der Grundlinie liegen. Es läßt sich dann die Horizontalebene einer solchen Geraden als Grundebene ansehen; ihre Spur — die Wagerechte durch die Bildspur der gegebenen Geraden — dient dann als neue Grundlinie. Der Teilungspunkt bleibt derselbe; nur wird die wahre Länge nicht auf der Grundlinie, sondern auf der Spur der wagerechten Hilfsebene abgetragen.



Figur 37.

Läßt man (Fig. 37) eine Tiefenlinie (Fluchtpunkt H , Teilungspunkte D_r und D_l) sich im Sinne des Uhrzeigers um U' drehen, so rückt die Spur S auf der Grundlinie nach links, der Fluchtpunkt auf dem Horizont nach rechts. Infolgedessen entfernt sich mit Abnahme des Winkels, den die Gerade mit der Grundlinie bildet, der eine ihrer beiden Teilungspunkte von D aus von H , während der andere von D_l aus an H heranrückt. Im Grenzfall,



Figur 38.

d. h. wenn die Gerade der Bildebene parallel läuft, rücken Fluchtpunkt und Bildspur über alle Grenzen hinaus fort; der Kreis um F mit A_0F wird zur Geraden A_0H . Der eine der beiden Teilungspunkte fällt also nach H , der andere ist der uneigentliche Punkt des Horizonts.

Soll also (Fig. 38) auf einer Breitenlinie eine Strecke PQ abgetragen werden, so zieht man PH und QH ; $P'Q'$ ist dann perspektivisch = PQ (parallele

Strecken zwischen parallelen Geraden sind gleich). Vgl. das perspektivische Bild eines Gevierts.

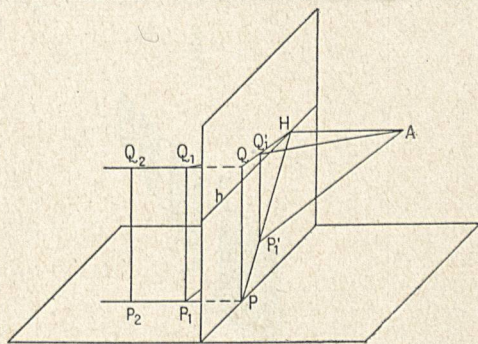
Wir haben also in dieser Konstruktion einen Breitenmaßstab.

Zur Zeichnung eines Höhenmaßstabes, d. h. eines Maßstabes für senkrechte Strecken, machen wir folgende Überlegung.

Auf einer Tiefenlinie der Grundebene mit der Bildspur P (Fig. 39a) seien in gleichen Abständen gleichlange auf der Grundebene senkrechtstehende Strecken errichtet, deren eine PQ in die Bildebene fällt. Die Endpunkte $Q, Q_1, Q_2 \dots$ dieser Strecken liegen dann auf einer zweiten Tiefenlinie mit

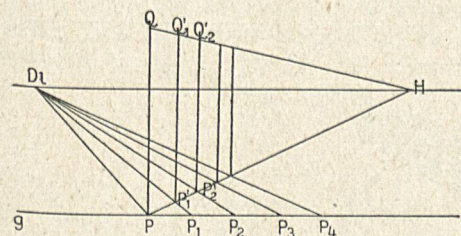
der Spur Q . Die perspektivischen Bilder der beiden Tiefenlinien sind die beiden Geraden PH und QH . Die Strecken $PP_1, P_1 P_2 \dots$ lassen sich mittels des Tiefenmaßstabes auf der Geraden PH abtragen (Fig. 39b). Da die Bilder von Tafelparallelen der Bildebene selbst und unter sich parallel bleiben, erhält man sie, indem man in den Punkten $P_1', P_2' \dots$ die Senkrechten bis zum Schnitt mit QH errichtet.

Wir sind damit in der Lage, in einem beliebigen Punkte der Grundebene eine senkrechte Strecke von gegebener Länge a zu zeichnen, oder mit anderen Worten, das Bild eines Raumpunktes zu finden, dessen Grundriß und Höhe a über der Grundebene gegeben sind. Ist nämlich (Fig. 40) P' das Bild des in der Grundebene liegenden Punktes P , so zieht man durch P' die Tiefenlinie HS , errichtet in S auf g die Senkrechte $= a$, zieht UH , welche die in P' errichtete Senkrechte in Q schneidet; dann ist $P'Q$ perspektivisch $= a$. Trägt man auf SU einen Maßstab ab, so ergeben die Tiefenlinien durch die Teilpunkte einen Höhenmaßstab für $P'Q$.

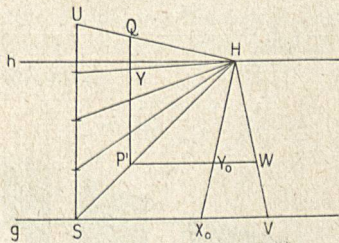


Figur 39a.

Da ein der Bildebene paralleles Geviert sich wieder als Geviert abbildet, sind Höhen- und Breitenmaßstab in jeder Tiefe einander gleich. In Fig. 40 ist z. B. $P'Y = P'Y_0$.



Figur 39b.



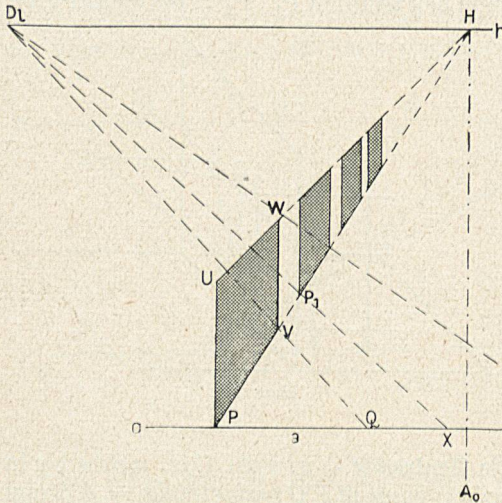
Figur 40.

Aufgaben. 1. Eine Reihe auf einer Tiefenlinie der Grundebene senkrecht stehender gleichgroßer Gevierte a^2 zu zeichnen, die in gleichen Abständen $\frac{1}{2} a$ aufeinander folgen.

Lösung. (Fig. 41.) Man macht $PQ = a$, zieht PH und QD_1 , welche V bestimmen, dann PU und $VW \perp g$, wobei $PU = a$ ist. Durch UH erhält man W . Dann verlängert man PQ um $\frac{1}{2} a$, zieht XD_1 und erhält in P_1 eine Ecke des zweiten Gevierts uff.

2. Eine eben solche Reihe auf einer beliebigen Geraden der Grundlinie zu zeichnen (Fig. 42).

3. Zeichne eine senkrecht zur Bildebene verlaufende Mauer aus gleichgroßen Quadratern.



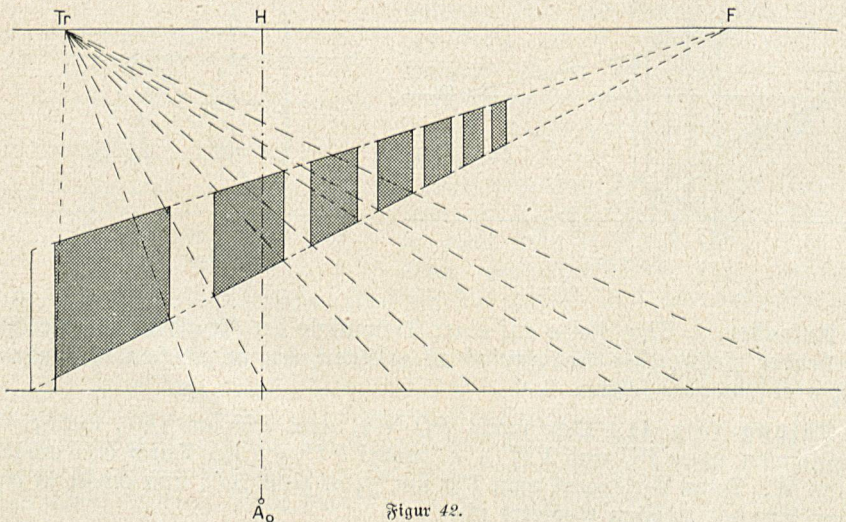
Figur 41.

4. Zeichne eine Reihe von senkrechten Strecken von der Länge s , die in gleichen Abständen, etwa $\frac{1}{3} s$, in einer parallel der Bildebene verlaufenden Ebene liegen. Ein Fußpunkt P sei gegeben. — Bemerkung: Die Bilder der Senkrechten werden gleichgroß, obwohl sie vom Auge verschieden weit entfernt sind.

5. Zeichne zwei parallele Reihen von gleichlangen senkrechtstehenden Strecken in verschiedener Tiefe der Grundebene.

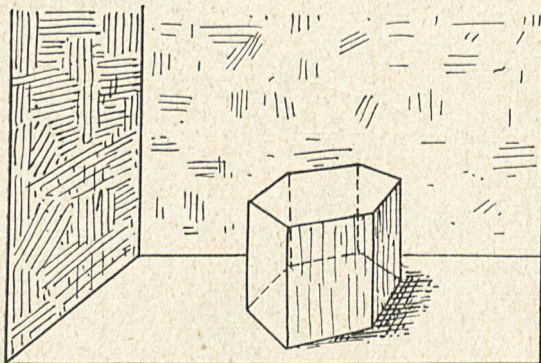
6. Darstellung von Personen in verschiedenen Tiefen eines Bildes (Fig. 43).

Es sei eine Person an einer Stelle des Bildes in der richtigen Größe BC gezeichnet. Dann läßt sich die Höhe einer gleichgroßen Figur an der Stelle E unter Benutzung des in der Grundebene liegenden Breitenmaßstabes finden.



Figur 42.

In der Praxis, namentlich bei geometrischen und architektonischen Gebilden, ist es allerdings nicht nötig, jeden Punkt abzubilden; sondern es reicht aus, die Bilder der Ecken festzulegen und diese dann in derselben Weise wie beim



Figur 45.

Gegenstand zu verbinden. Sobald parallele Geraden dabei auftreten, wird man zweckmäßig immer die Fluchtpunkte dieser Geraden verwenden.

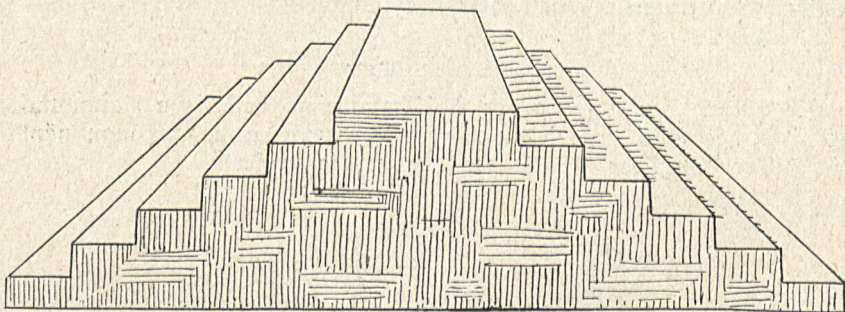
Aufgaben. 1. Zeichne zwei gleichgroße auf der Grundebene senkrecht stehende Würfel in Überdeckung mit gleichgroßen aufgesetzten Pyramiden (Eckegeln). (Fig. 44.)

2. Zeichne zwei gleichgroße Würfel auf dem

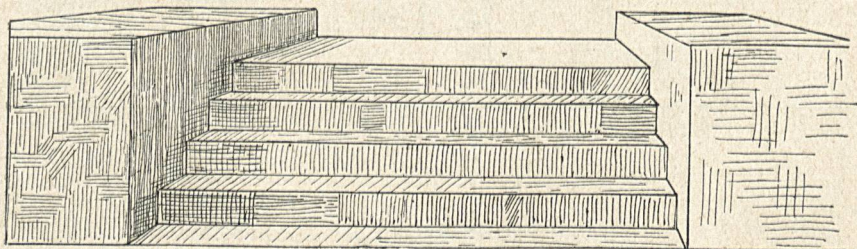
Boden eines rechteckigen Raumes, den einen in Schrägstellung, den anderen in Stirnstellung.

3. Zeichne eine sechsseitige regelmäßige Ecksäule (Prisma) in einem rechteckigen Raum, welche auf der Grundebene senkrecht steht (Fig. 45).

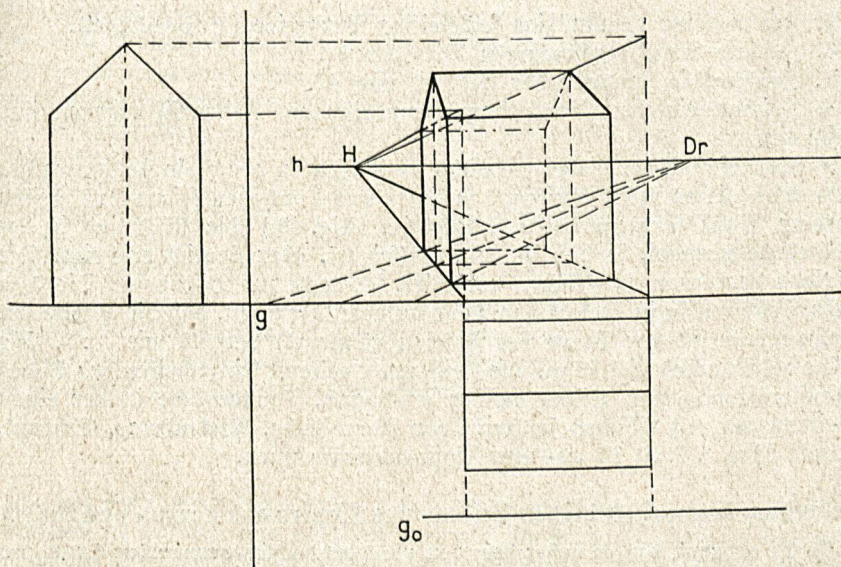
4. Zeichne a) eine auf der Grundebene senkrecht stehende Walze, b) einen Kreisegel.



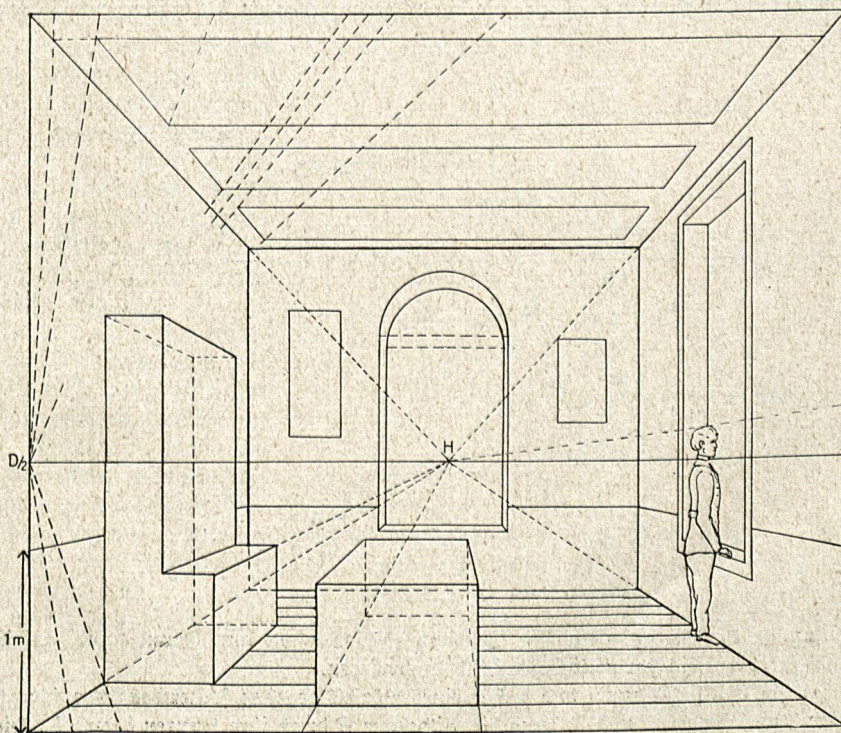
Figur 46.



Figur 47.



Figur 48.



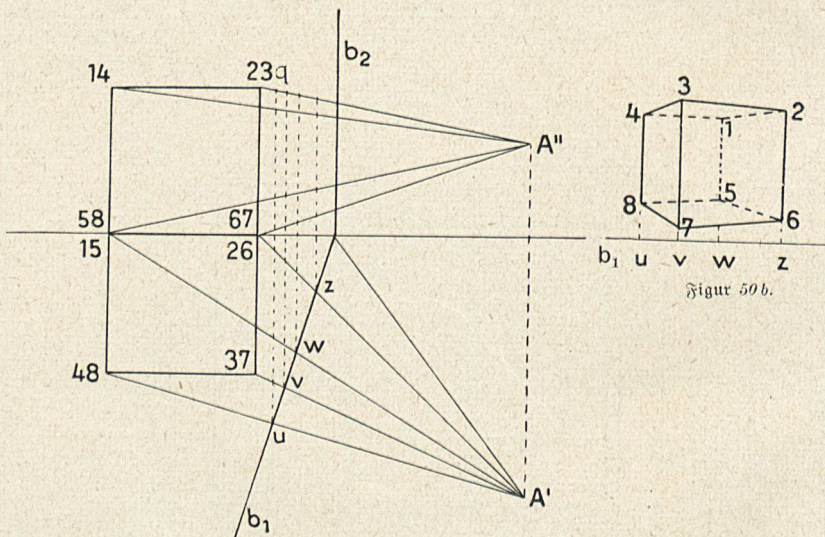
Figur 49.

5. Zeichne eine regelmäßige sechsseitige Pyramide (Sechseckfel).
6. Zeichne einen regelmäßigen Vierflächner.
7. Zeichne die Treppen der Fig. 46 und 47.
8. Zeichne ein Haus, von dem Grundriß und Seitenriß gegeben sind (Fig. 48).

9. Als Abschluß der bisher entwickelten Verfahren diene die Zeichnung des Inneren eines 6,5 m breiten, 5 m tiefen und 4 m hohen Zimmers, dessen vordere Wand fortgenommen gedacht ist. (Fig. 49.) Die Rückwand ist der Bildebene parallel, so daß sie nur verkleinert, aber ähnlich erscheint. Die übrigen begrenzenden Flächen verlaufen senkrecht zur Bildebene. Die 5 m tiefe Decke soll so in drei gleiche Teile aufgeteilt werden, daß die Breite der Rahmenteile sich zur Breite der Flächen (Spiegel) verhält wie 1 : 3. Die Höhe des Mannes sei 1,75 m. Die Zeichnung weiterer Einzelheiten des Bildes (Fensteröffnung und Bilder an der Rückwand, Fensternische in der einen Seitenwand mit Flächen senkrecht zur Wandfläche, Dielenbelag, Schrank, Truhe (3 m \times 1 m) ist aus der Figur zu entnehmen.

Zeichnung des perspektivischen Bildes eines Körpers aus Grund- und Aufriß.

Es sei erwähnt, daß es außer dem von uns hauptsächlich verwandten Spur- und Fluchtpunktverfahren noch andere Verfahren zur Herstellung von perspektivischen Bildern gibt. Man kann auch ohne die in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten



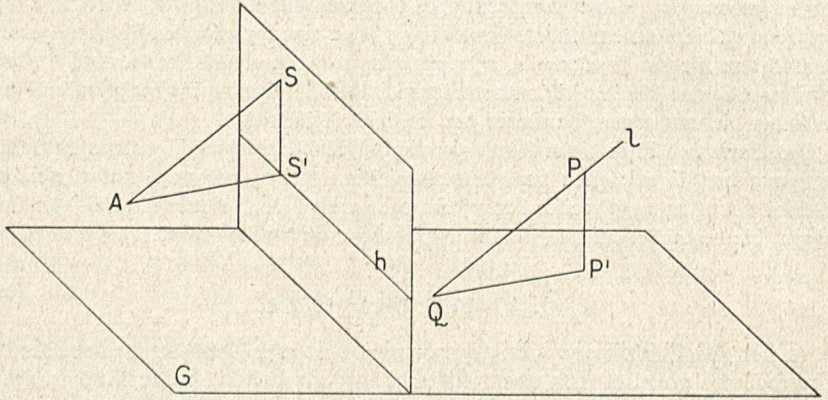
Figur 50 a.

Figur 50 b.

Kenntnisse der Eigenschaften der Zentralprojektion etwa aus Grund- und Aufriß eines Körpers sein perspektivisches Bild konstruieren.

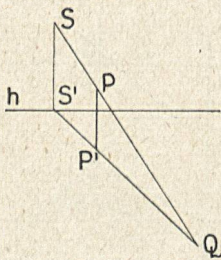
In Fig. 50a sind Grund- und Aufriß eines Würfels gegeben, ferner das Auge A durch seine Projektionen A' und A'' und die Bildebene B durch ihre Spuren b_1 und b_2 . Die

als punktförmig angenommenen Sonne, ist dann der Punkt F . Ist F gegeben — er soll im folgenden stets als gegeben angesehen und mit S bezeichnet werden —, so erhält man, wenn man ihn auf den Horizont projiziert, in S' den Fluchtpunkt für die Grundrisse aller parallelen Lichtstrahlen. S' heißt der Fußpunkt der Sonne, S selbst der Sonnenpunkt.



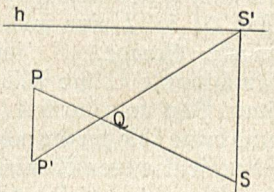
Figur 52a.

Wir sind damit in der Lage, den (Schlag-)Schatten, den ein beliebiger Punkt auf die Grundebene wirft, zu bestimmen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Schatten einer senkrechten Strecke auf die Grundebene zu zeichnen. Ist nämlich P (Fig. 52a) der gegebene Punkt, P' sein Grundriß, so ist sein Schatten da, wo der durch P gehende Lichtstrahl die Grundebene trifft, also in Q ; der Schlagschatten der senkrechten Strecke PP' ist $P'Q$. Q kann



Figur 52b.

also auch aufgefaßt werden als Schnittpunkt des Lichtstrahls durch P mit seinem Grundriß. In der perspektivischen Zeichnung hat man also die Bilder der Geraden l und ihres Grundrisses zu konstruieren. Der Fluchtpunkt für l (wie für jeden ihr parallelen Lichtstrahl) ist S , der Fluchtpunkt für den zugehörigen Grundriß S' . Man zieht also (Fig. 52b) $SS' \perp h$, fer-



Figur 53.

ner $S'P'$ und SP , die sich in Q schneiden. Q ist dann der Schlagschatten des Punktes P ; $P'Q$ der Schlagschatten der senkrechten Strecke PP' auf die Grundebene.

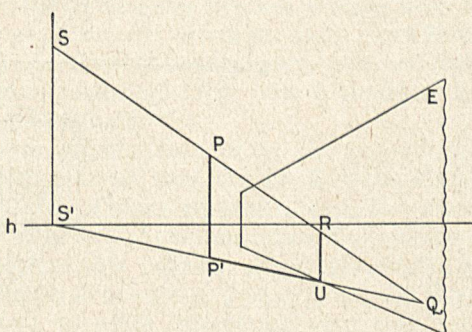
Die Schlagschatten aller senkrechten Strecken schneiden sich in S' . (Warum?)

Steht die Sonne nicht dem Zeichner gegenüber, also hinter der Bildfläche, wie in den Fig. 51 und 52, sondern im Rücken des Zeichners, also vor der Bildfläche, so fällt der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen unter den Horizont. Im übrigen ändert sich aber nichts Wesentliches an der Konstruktion (Fig. 53).

Wann verlaufen die Schatten senkrechter Strecken parallel der Bildebene?

Die Bestimmung des Schattens eines beliebigen Punktes gestattet nun, den Schlagschatten, den ein Körper auf die Grundebene wirft, zu finden. Bei einem ebenslächigen Körper denkt man sich alle auftretenden Kanten schattenwerfend, wie dünne materielle Stäbe, den Körper selbst aber durchsichtig und ordnet jedem Endpunkt einer Kante einen Schattenpunkt zu, jeder Kante eine Schattenstrecke. Die Gesamtheit aller Kanten ergibt dann ein Netz von Schattenlinien auf der Grundebene, dessen äußerer Umriß die gesuchte Schattenfläche ist.

Häufig fällt dabei der Schatten eines Punktes auf eine senkrechte oder wagerechte Ebene E , oder der Schlagschatten einer senkrechten Strecke

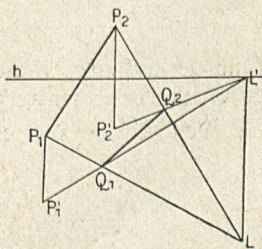


Figur 54.

wird durch eine senkrechte Ebene geknickt (Fig. 54). Die durch PP' und den Lichtstrahl durch P gelegte Ebene schneidet die Grundebene in der Geraden $S'P'Q$, die senkrechte Ebene in der Senkrechten UR . Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem Lichtstrahl durch P ist der gesuchte Schatten von P auf E ; oder der Schatten der Strecke PP' ist die geknickte Linie $P'UR$.

Zu dem Schlagschatten tritt noch der Selbst- oder Eigenschatten des Körpers. Im Selbstschatten sind die Teile, die dem Licht abgewandt sind, so daß sie kein Licht erhalten. Schlagschatten erhalten diejenigen Teile der Oberfläche, die zwar dem Licht zugekehrt sind, aber durch andere Teile des Körpers oder durch andere Körper beschattet werden. Ein allgemeines Verfahren zur Zeichnung des Selbstschattens, der durch die sogenannte Lichtgrenze (Schattengrenze) bestimmt ist, läßt sich nicht geben. Der Verlauf der Lichtgrenze hängt natürlich eng mit dem Schattenriß am Boden zusammen.

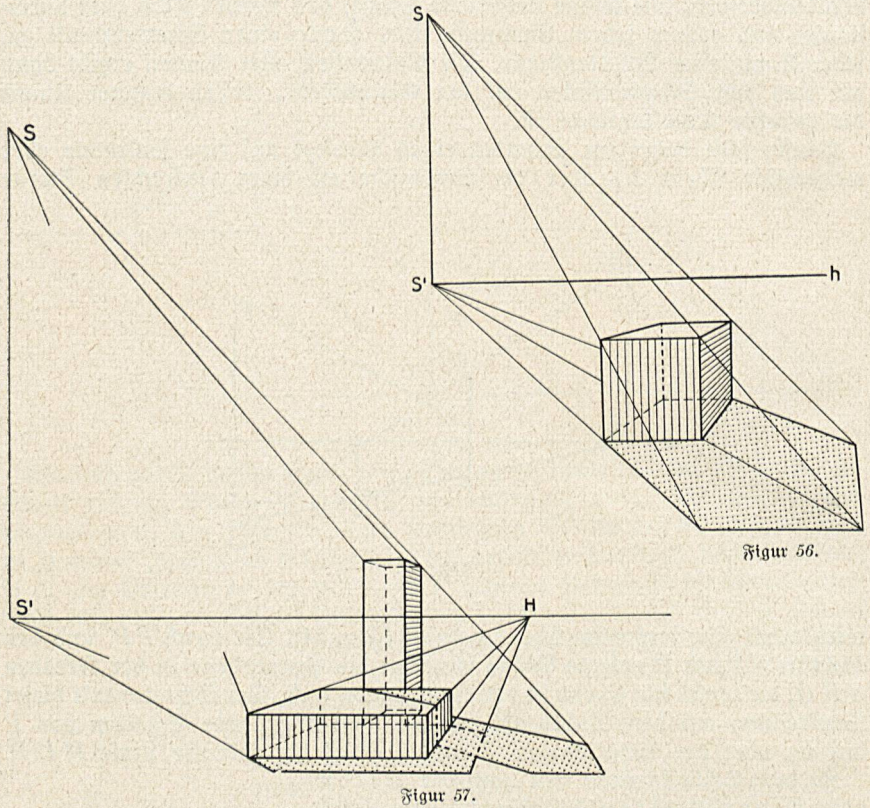
Aufgaben. 1. Den Schatten, den eine Strecke auf die Grundebene wirft, zu zeichnen: Man bestimmt die Schatten Q_1 und Q_2 ihrer Endpunkte (Fig. 55).



Figur 55.

2. Den Schatten eines in der Grundebene in Hauptstellung stehenden Würfels zu zeichnen (Fig. 56).

3. Den Schlagschatten zu zeichnen, den a) eine senkrecht gegen die Bild-



ebene verlaufende Mauer, b) eine gerade quadratische Pyramide, die auf der Grundebene senkrecht steht, auf die Grundebene wirft.

4. Den Schatten zweier Quader zu zeichnen (Fig. 57).

C. Perspektive und Malerei.

Wenn eine perspektivische Zeichnung (ein realistisches Gemälde) ein möglichst treues Abbild der Wirklichkeit sein soll, so hängt das wesentlich von der Wahl der Konstanten des Bildes ab. Vor allem muß die „perspektivische Einheit“ einer Zeichnung vorhanden sein; d. h. es darf nur einen Horizont,

einen Hauptpunkt, eine Distanz geben. Aber diese formale Anwendung der Gesetze der Perspektive genügt allein noch nicht, um einen wirklichkeitstreuen Eindruck auf den Beschauer zu machen. Es muß nämlich ferner das Auge und damit der Horizont in der richtigen Höhe gewählt werden. Ein zu hoch liegender Hauptpunkt (Kavalier- [Kavelier] bzw. Vogelperspektive) beeinträchtigt im allgemeinen ebenso wie ein zu tief gewählter Horizont (Froschperspektive) die Raumwirkung. Trotzdem wird man gelegentlich auch eine ungewöhnliche Lage des Auges annehmen, z. B. wenn man einen großen Stadtteil, eine Landschaft übersichtlich darstellen will (Vogelperspektive). Am günstigsten aber ist in der Regel die Höhe, die das natürliche Auge beim Beschauen eines Raumes hat¹⁾. Ob man den Hauptpunkt genau in die Mitte des Bildes legt (Leonardo da Vincis Abendmahl) oder seitlich (Dürers Erster Tempelgang, Abb. 4), hängt von der beabsichtigten Wirkung ab. Auch der Bildebene wird man unter Umständen eine von der üblichen abweichende Lage geben, z. B. bei Deckengemälden, bei denen die Decke eines Raumes als wagerechte oder auch gekrümmte Bildebene angenommen ist, auf welcher die Architektur der Seiten bildlich fortgesetzt wird; alle senkrechten Kanten haben dabei ihre Flucht im Hauptpunkt.

Entsprechend der zwischen etwa 10 cm und 50 cm schwankenden Sehweite des menschlichen Auges wird man auch die Distanz innerhalb dieser Grenzen wählen. Bei zu kurzer Distanz erscheinen die Bilder unverhältnismäßig tief; man findet sie wohl bei photographischen Aufnahmen von Fabrikanlagen und Geschäftshäusern, die dadurch ausgedehnt wirken sollen. Andererseits wird man die Distanz auch nicht zu groß nehmen, um Einzelheiten des Bildes nicht verschwinden zu lassen. Wiederum aber wird auch gelegentlich eine große Distanz gewählt, beispielsweise von Architekten, die einen Innenraum gefälliger darstellen wollen, als es bei normaler Distanz möglich sein würde. Da die Deutlichkeit der Wahrnehmung seitlich zur Blickrichtung verhältnismäßig schnell abnimmt, darf der Winkel der äußersten Sehstrahlen mit dem Hauptstrahl für ein unbewegtes Auge 30° nicht überschreiten (bei sehr flachen Körpern). Das würde bedeuten, daß die seitliche Ausdehnung des Bildes weit innerhalb des um den Hauptpunkt mit der Augweite beschriebenen Kreises, des sog. Distanzkreises, liegen muß.

Es ist eine anziehende Aufgabe, zu verfolgen, wie weit die Malerei die auf mathematischer Grundlage beruhenden Gesetze der Perspektive beachtet hat. Dies gelingt verhältnismäßig leicht, wenn es sich um Bilder mit Architekturdarstellungen handelt, bei denen man von vornherein bestimmte Aussagen über die Lage von Geraden, das Verhältnis von Strecken, die Größe von Winkeln machen kann:

Parallele Geraden müssen ein und denselben Fluchtpunkt haben; das menschliche Auge empfindet es sofort als störend auf einem Bilde, wenn das nicht der Fall ist. Eine Schar wagerechter Parallelen hat ihren Fluchtpunkt F_1 auf dem Horizont. Findet man noch eine zweite solche Schar auf

¹⁾ Man verwende für das Folgende irgendeine Kunstgeschichte oder: Wolff, Mathematik und Malerei. Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Teubner.



Abb. 5.

Die älteste und ältere Kunst, etwa die babylonische und ägyptische Kunst, kennt noch keine Perspektive. Alles ist flächenhaft nebeneinander gestellt. Die Bilder erwecken mit ihrer großen Masse von Personen den Eindruck von Landarten; der Künstler will viel darstellen. Die Griechen besaßen zwar ein bereits fein ausgebildetes perspektivisches Gefühl, wie Untersuchungen der Konstruktion der dorischen Säulen beweisen. Doch kannten sie noch nicht das, was wir heute unter perspektivischen Gesetzen verstehen. Immerhin finden sich schon auf Wandgemälden aus Pompeji Ansätze perspektivischen Zeichnens zur Erzielung von Tiefenwirkung, die vermutlich auf dem Wege der Erfahrung gewonnen wurden¹⁾.

An dem eigentlichen Ausbau der Perspektive ist erst die italienische Malerei beteiligt. Gemälde aus der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts lassen bereits einen Fluchtpunkt erkennen [Giotto, Lorenzetti]. Auf einem Bilde „Die Verkündigung“ von Lorenzetti kann man zum ersten Male einen Hauptpunkt feststellen. Im allgemeinen haben wohl die Maler dieser Zeit unbewußt einen Hauptpunkt angenommen. Als eigentlicher Begründer der Perspektive gilt erst Brunelleschi um 1400. Er erkannte als erster die Bedeutung der perspektivischen Elemente Horizont, Fluchtpunkt und auch Distanzpunkt und gab praktische Regeln für das perspektivische Zeichnen. Auf einem Bilde „Maria mit dem Kind“ von Botticelli um 1500 findet man zum ersten Male eine Anwendung der perspektivischen Gesetze auf das Bild eines Kreises (im Vordergrund des Gemäldes), das offenbar exakt geometrisch konstruiert ist.

Es bilden sich um diese Zeit perspektivische Schulen in Italien aus; Mantegna, Piero de' Francisci, Donatello u. a. suchen ihre Schüler gründlich mit der Perspektive vertraut zu machen.

Die Bilder niederländischer Kunst aus der Zeit um 1400 (van Eyck) zeigen noch keine Vertrautheit mit den Gesetzen der Perspektive. Z. B. findet man auf einem Bilde drei verschiedene Fluchtpunkte für die Tiefenlinien des Fußbodens, der Decke und für seitliche Tiefenlinien, die zudem auf verschiedenen Horizonten liegen.

Dagegen sind die italienischen Gemälde der Hochrenaissance (Raffaell und Michelangelo, Leonardo da Vinci, Tizian) schon meisterhaft perspektivisch durchkonstruiert. Das bekannte „Abendmahl“ von Leonardo da Vinci zeigt völlige perspektivische Einheit und ist bis auf kleine, durch künstlerische Rücksichten bedingte Ausnahmen (Teller vor Jesus) exakt perspektivisch entworfen. In seinem „Trattato della pittura“ behandelt L. auch die Perspektive und gibt praktische Ratschläge über perspektivische Zeichnungen, z. B. über die Höhe des Augpunktes, über die perspektivische Verkürzung von Senkrechten zwischen Parallelen usw.

Nach Deutschland gelangte die Kenntnis der Perspektive durch Albrecht Dürer. Vor ihm fehlte es dort gänzlich an der Berücksichtigung mathematischer Konstruktion bei Gemälden. Dürers Bilder sind mit bewußter und betonter mathematischer Genauigkeit entworfen, namentlich die Bilder seiner späteren

¹⁾ Es ist interessant zu lesen, was Lessing in Kap. 9 ff. der antiquarischen Briefe über die Perspektive der Alten sagt.

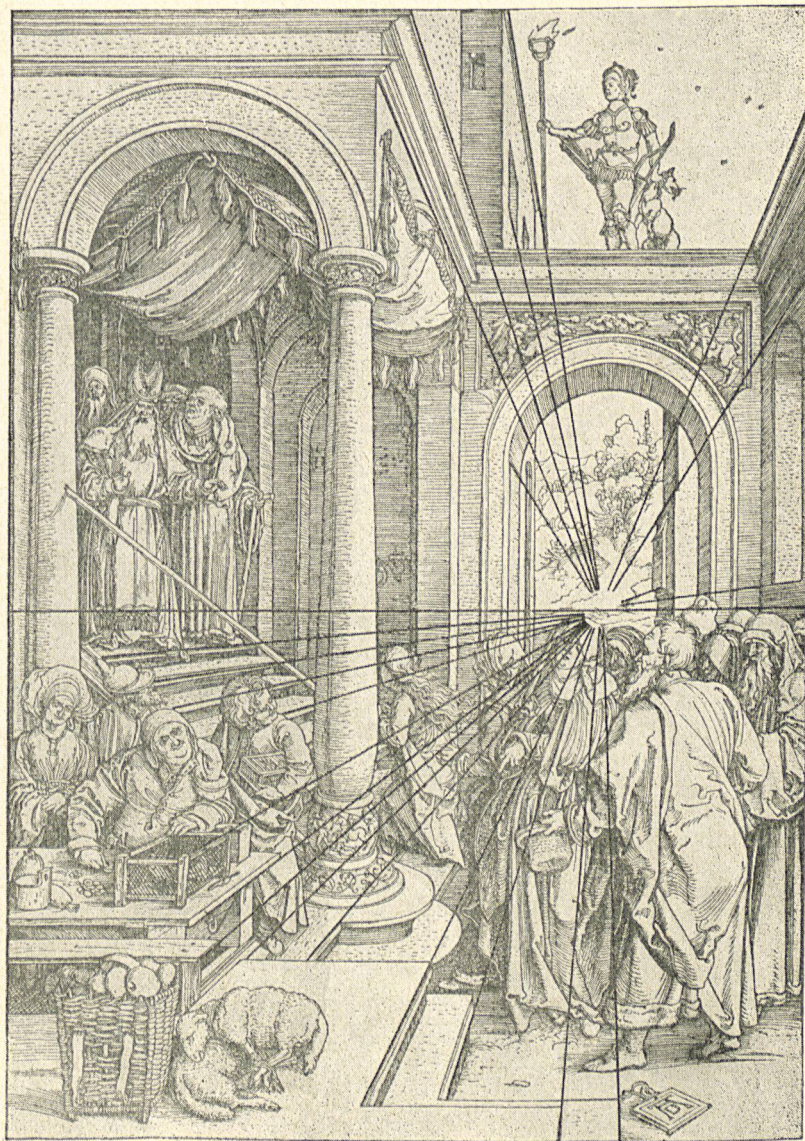


Abb. 6.



Zeit, so daß er als Meister der Perspektive anzusehen ist. (Siehe die Abbildungen 6 und 7: Marias erster Tempelgang und Ruhe in Ägypten [Marienleben].) Allerdings sind auch bei ihm in einzelnen Abweichungen von den perspektivischen Gesetzen nachzuweisen, die durch die künstlerische Freiheit gefordert werden. So zeigt sich auf dem bekannten Bilde „Hieronymus im Gehäuse“ bei mathematischer Nachprüfung die Gestalt des Hieronymus durchaus unproportioniert, sein Hut viel zu weit usw. (Siehe auch den Abschnitt Photogrammetrie.)

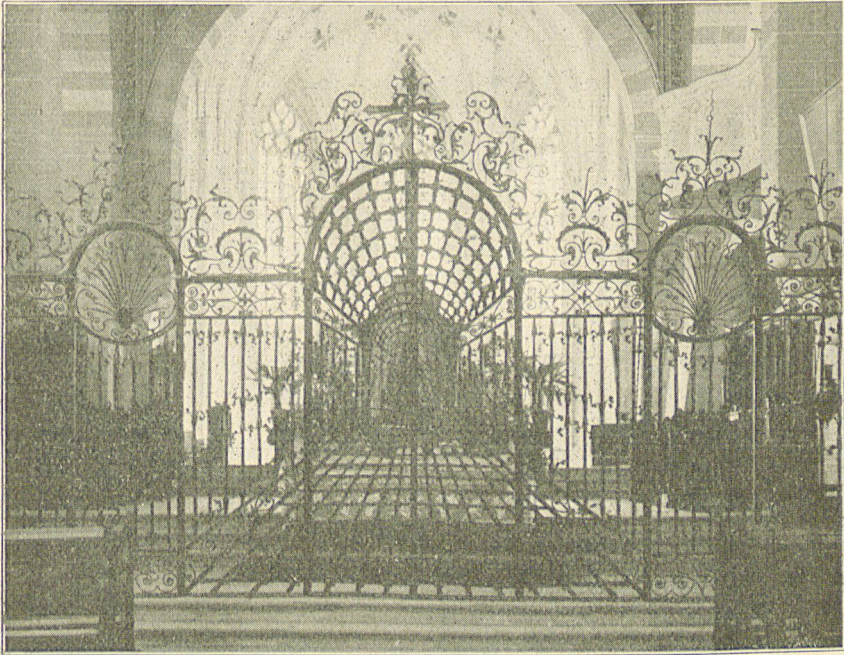


Abb. 8.

Es ist ja auch klar, daß nicht nur die strenge Anwendung der perspektivischen Gesetze und die geeignete Wahl der perspektivischen Elemente es sind, die eine ästhetische Wirkung auf den Beschauer hervorrufen. Ganz abgesehen davon, daß der Ausführung eines Bildes die schöpferische Erfindung des Künstlers vorausgehen muß, die auch durch die größte Vertrautheit mit den Gesetzen der Perspektive nicht ersetzt werden kann, so ist auch künstlerische Freiheit im Interesse der gesamten künstlerischen Wirkung bei der Ausführung eines Gemäldes unbedingt notwendig, wenn es sich darum handelt, das wesentliche Ziel eines Bildes, Schönheit, zu erreichen.

Freilich, die Richtung des Kubismus und des Futurismus geht wohl in dieser künstlerischen Freiheit zu weit, wenn sie bewußt die Perspektive ver-

leugnet und außer acht läßt. Sie erinnert wieder an die chinesische und japanische Malerei, welche ebenfalls die Perspektive nicht kennt. Indes scheint es, als ob nach Überwindung dieser Kunststrichtungen die Malerei wieder zu größerer Sachlichkeit zurückkehrt und bewußt wieder auf Dürer zurückgreift.

Wie auch das Kunsthandwerk die Gesetze der Perspektive in seinen Dienst stellt, zeigt die Abb. 8, die den barocken schmiedeeisernen Chorabschluß des Münsters in Mittelzell auf der Insel Reichenau darstellt. Die anscheinend schräg nach hinten ziehenden, in Wirklichkeit sämtlich in einer vertikalen Ebene liegenden Stäbe des Gitters sind so angebracht, daß der Blick des Beschauers auf den Mittelpunkt der ganzen Kirche, das Allerheiligste, gezwungen wi.d.

D. Photogrammetrie.

Die Lösung der weitergehenden Aufgabe, aus einer (oder mehreren) gegebenen mathematischen Perspektive nicht nur ihre Elemente zu finden, sondern auch die wahre Lage und die wahre Gestalt des dargestellten räumlichen Gebildes etwa durch Zeichnung von Grund- und Aufsriß zu bestimmen, beruht auf den Methoden der sogenannten Photogrammetrie (Lichtmeßkunst, Lichtbildausmessung), die heute eine außerordentlich große praktische Bedeutung hat.

Diese Umkehrung der Perspektive kommt weniger für Gemälde als vielmehr in der Geodäsie und in der Architektur in Betracht. Ausgangspunkt ist entweder eine mathematische perspektivische Zeichnung oder, in der Regel, ein Lichtbild. Denn eine Photographie kann unter bestimmten Voraussetzungen als ein genaues perspektivisches Bild eines Gegenstandes angesehen werden. Allerdings liegt hier das „Auge“, das Projektionszentrum (nämlich der optische Mittelpunkt des Linsensystems), zwischen Gegenstand und Bildebene. Denkt man sich aber die photographische Platte in dieselbe Entfernung vor das Objektiv gebracht und dabei den oberen und unteren Rand, die rechte und die linke Seite vertauscht, oder stellt man statt der Platte das photographische Positiv in dieselbe Entfernung vor das Objektiv, so tritt dieselbe perspektive Zuordnung zwischen Gegenstand und Bild ein, die wir bisher behandelten.

Anm.: Im Abschnitt Perspektive und Malerei haben wir stillschweigend angenommen, daß die eigentlich sich auf das Original beziehenden Betrachtungen auch auf die Photographie des Gemäldes übertragen werden können.

Wir setzen bei den folgenden Überlegungen wieder voraus, daß die Bildebene senkrecht im Raum steht, was bei photographischen Aufnahmen meistens der Fall sein wird. (Ausnahme: Fliegerphotographien.)

Es sei (Fig. 59) das perspektivische Bild eines Rechtecks mit wagerechten und senkrechten Ranten gegeben. Gesucht sind Grundriß und Aufsriß.

Zunächst sind wieder die Elemente der Perspektive zu finden. Durch Verlängerung je zweier parallelen wagerechten Ranten des Rechtecks erhält man die Fluchtpunkte F_1 und F_2 , die den Horizont bestimmen. Erster geometrischer Ort für A_0 ist wieder der Kreis über F_1F_2 als Durchmesser.

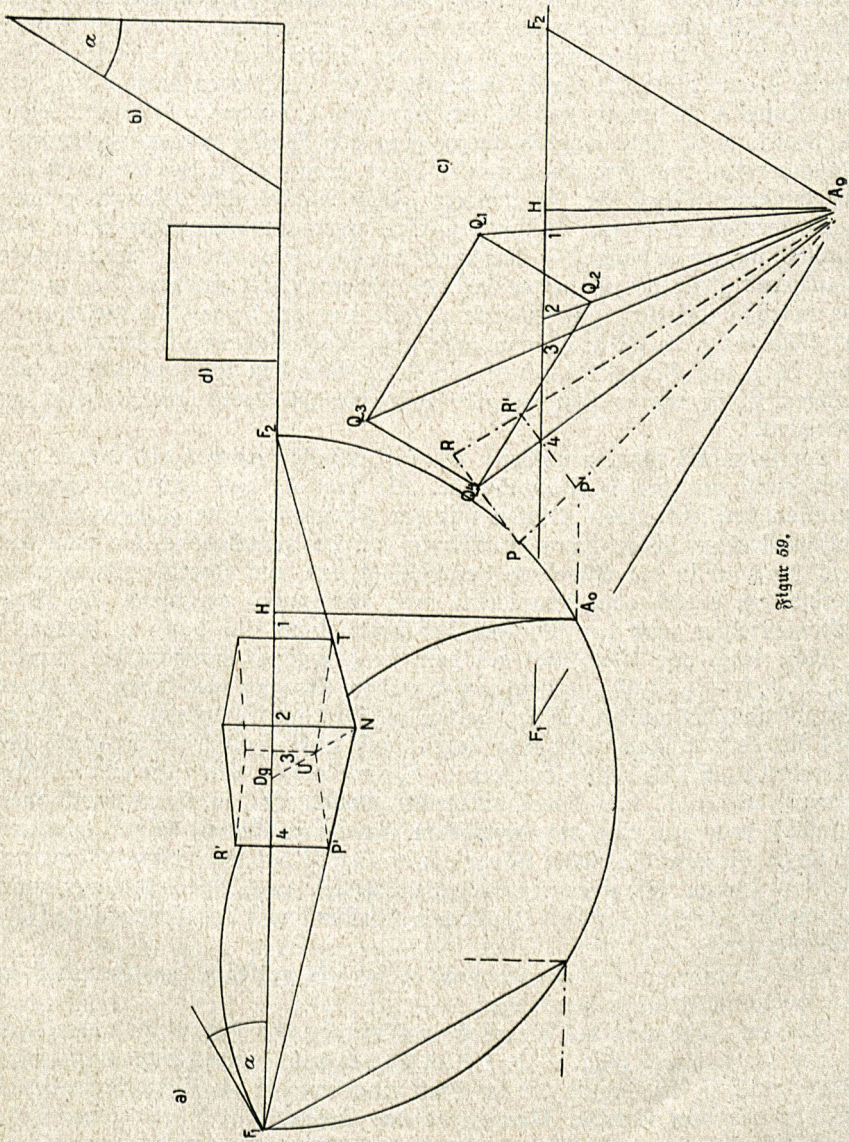


Figure 59.

Kennt man, wie wir hier einmal annehmen wollen, das Verhältnis zweier anstoßenden Seiten der Grundfläche, so sind damit die Winkel bestimmt, die eine Diagonale mit diesen beiden Seiten bildet (Fig. 59 b). Bestimmt man also den Fluchtpunkt Dg einer der beiden Diagonalen, so ist der Winkel F_1NDg perspektiv $= \alpha$, also muß auch der Winkel $F_1A_0Dg = \alpha$ sein. Der zweite geometrische Ort für A_0 ist demnach der Kreisbogen durch F_1Dg , der den Winkel α als Umfangswinkel hat. Damit ist A_0 eindeutig bestimmt. Diese Konstruktion ist stets möglich, wenn man den Winkel zweier wagerechten Raumgeraden und ihre Fluchtpunkte kennt (wenn z. B. der Grundriß ein regelmäßiges Vieleck ist). Ist aber ein solcher Winkel nicht bekannt, so kann man, wenigstens wenn es sich um eine photographische Aufnahme mit Einstellung auf ∞ handelt — was meist der Fall sein wird —, die Augweite annähernd gleich der Brennweite f des Linsensystems ansehen. Der zweite geometrische Ort für A_0 ist in diesem Falle eine der beiden Parallelen zu h im Abstände f . A_0 ist in diesem Falle nicht mehr eindeutig bestimmt. Man muß dann auf Grund der Form der Perspektive den richtigen Punkt auswählen. H ist wieder bestimmt als Fußpunkt des Lotes von A_0 auf den Horizont.

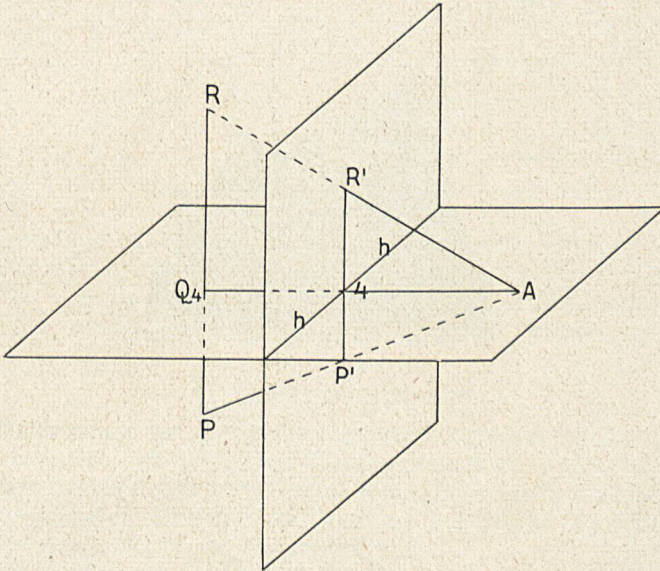
Der Grundriß kann in unserem Beispiel erhalten werden als Schnitt des Rechtankts mit der Horizontalebene. Die von A_0 aus nach den Schnittpunkten der senkrechten Kanten mit der Horizontalebene gezogenen Projektionsstrahlen liegen dann sämtlich in der Horizontalebene, die man um den Horizont in die Bildebene herabschlägt und, um Überschneidungen zu vermeiden, seitlich oder hinreichend weit nach unten verschiebt. Die Projektionsstrahlen nach den Punkten der Schnittfigur sind dann zu finden.

Man trägt also (Fig. 59 c) auf dem neugezogenen Horizont die Punkte $F_1, H, 1, 2, 3, 4, F_2$ ab und zieht von A_0 aus die Strahlen nach ihnen. In dieses Strahlenbüschel müssen sich die Seiten des Grundrisses einpassen. Die Ecken des Rechtecks müssen nämlich so liegen, daß zwei Seiten des Rechtecks der Geraden A_0F_1 , die beiden anderen A_0F_2 parallel sind. Einer der vier Punkte, etwa Q_1 auf A_01 , kann dabei willkürlich gewählt werden. Denn wir können zunächst doch nur eine dem wirklichen Grundriß ähnliche Figur erhalten, so lange wir nicht die wahre Länge einer Strecke der Perspektive (Meßlatte, Person) kennen. Wir ziehen durch Q_1 die Parallele zu A_0F_2 bis Q_2 , dann durch Q_2 die Parallele zu A_0F_1 bis Q_3 uff. und erhalten damit das Rechteck $Q_1Q_2Q_3Q_4$ als Grundriß.

Auch in anderen Aufgaben erweist es sich als praktisch, den Grundriß in die Horizontalebene zu übertragen.

Für die Zeichnung des Aufrisses im Maßstabe des Grundrisses dient folgende Betrachtung (Fig. 60 a): Es sei PQ_4R eine senkrechte Kante unseres Rechtankts, Q_4 ihr Schnitt mit der Horizontalebene, $P', 4, R'$ die perspektiven Bilder der drei Punkte. Man dreht das Dreieck $RA P$ um seine Höhe AQ_4 (Winkel $PQ_4A = 90^\circ$, ebenso $P'4A$), bis es in die Horizontalebene zu liegen kommt, die wieder in die Bildebene umgelegt und seitlich verschoben wird (Fig. 60 b). Nun zieht man $4P' \perp A_04$ und gleich $4P'$ der perspektiven Zeichnung, verbindet A_0 mit P' , zieht durch Q_4 die Parallele zu

$P'4$ und erhält damit die wahre Länge PQ_4 . Entsprechend findet man die wahre Länge Q_4R , indem man $4R'$ aus der Perspektive entnimmt. PQ_4R ist dann die Höhe des Aufrißes.

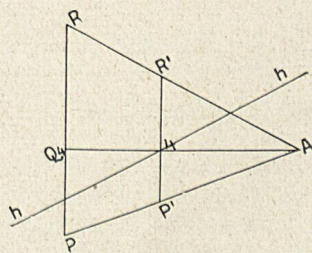


Figur 60a.

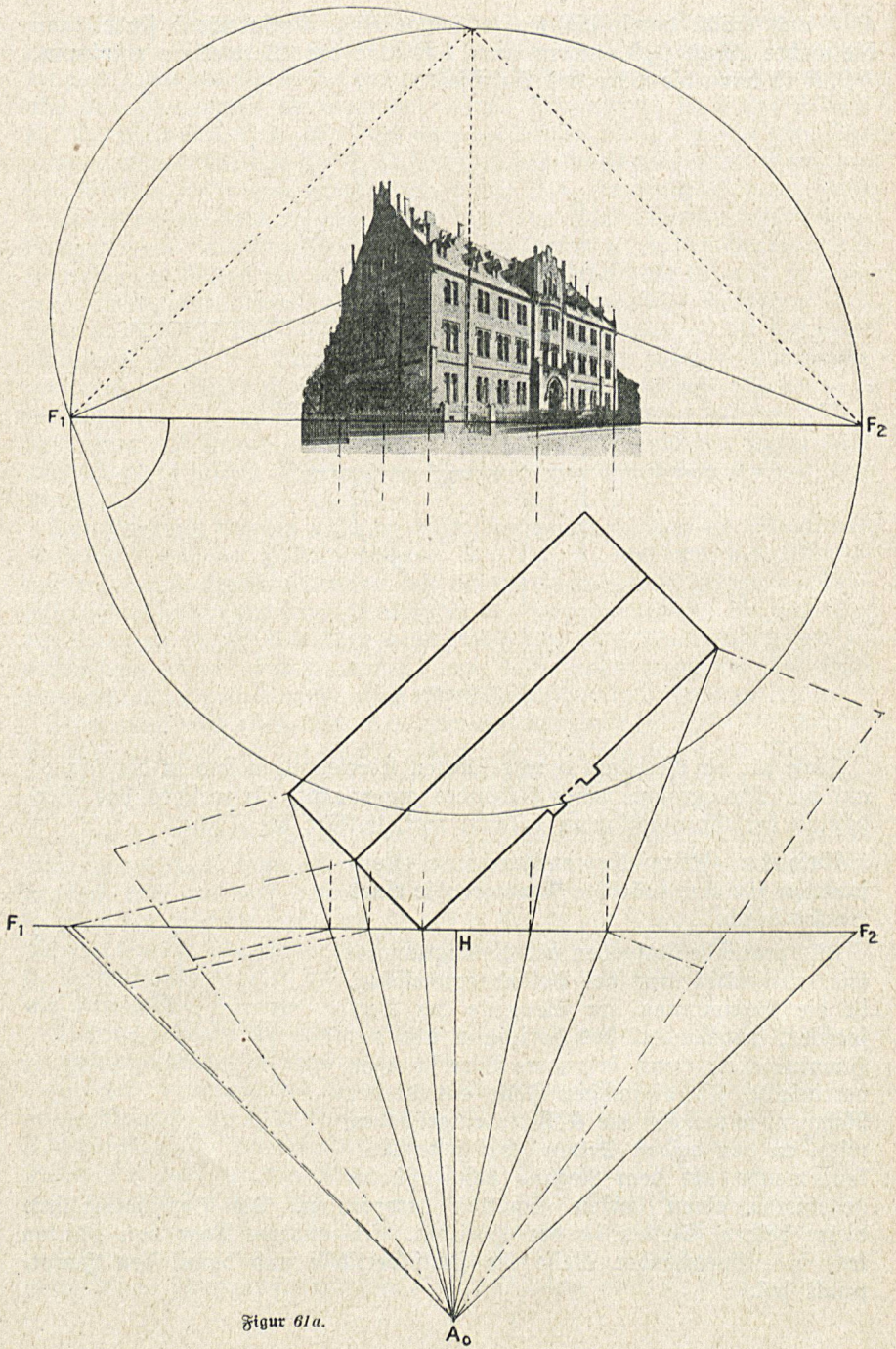
Diese für ein Rechteck durchgeführten Überlegungen sind in der Fig. 61 auf die Photographie eines Gebäudes angewandt, für welches das Verhältnis der Grundrißanten bekannt war. Erkläre die Figur.

Aufgabe. Führe die entsprechende Konstruktion für eine beliebige Photographie eines Hauses durch.

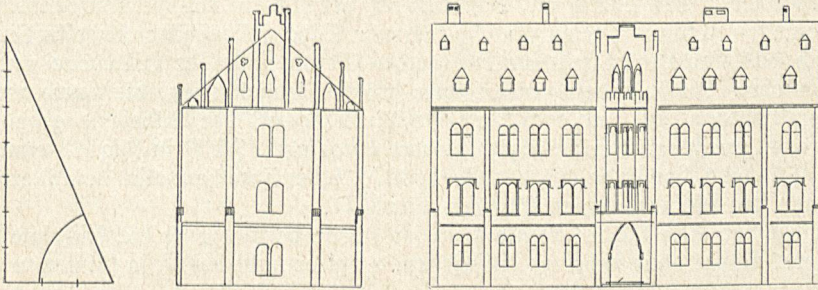
Für praktische Aufgaben der Photogrammetrie, namentlich aus der Geländevermessung, ist die Bestimmung der Elemente der Perspektive, insbesondere des Horizontes und des Hauptpunktes, durch besondere Vorrichtungen vereinfacht. Im einfachsten Falle enthält der Rahmen, in welchen die Kassette eingeschoben wird, an den beiden Seiten zwei feste Marken, welche auf dem Negativ beim Photographieren einen starken Schatten hervorrufen. Die Verbindungslinie dieser beiden Stellen ist der Horizont. Ein anderes Paar von Marken legt in entsprechender Weise die Hauptvertikale und damit den Hauptpunkt fest.



Figur 60b.



Figur 61a.



Figur 61b.

Figur 61c.

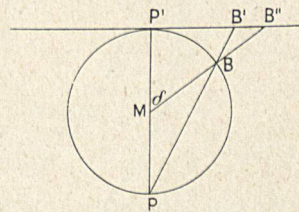
Figur 61d.

Die Technik hat darüber hinaus besondere Apparate konstruiert, die z. B. automatisch photographische Geländeaufnahmen umsetzen in Karten mit Höhenlinien usw., so daß Karten, deren Anfertigung früher Wochen in Anspruch nahm, innerhalb einiger Stunden hergestellt werden können.

E. Kartenprojektionen.

Eine Anwendung der Perspektive (Zentralprojektion) ist die zuerst von Hipparch versuchte, von Ptolemäus übernommene stereographische Projektion der Erdoberfläche. Man erhält eine solche, indem man von einem Punkte der Erdoberfläche als Projektionszentrum aus die Punkte der Erdoberfläche etwa auf die Tangentialebene im Gegenpunkte abbildet. B' ist das Bild von B (Fig. 62). Der Punkt P' (Hauptort) wird zum Kartenmittelpunkt.

Die durch stereographische Projektion entstandenen Karten können, wie auch alle anderen ebenen Kartenentwürfe, niemals richtig sein, weil die gekrümmten Flächenelemente der Erde als ebene Flächenstücke abgebildet werden. Dagegen ist die Abbildung der Erdoberfläche auf eine konzentrisch gedachte Kugel (Globus) nicht verzerrt. Sie ist nämlich 1. längentreu; d. h.



Figur 62.

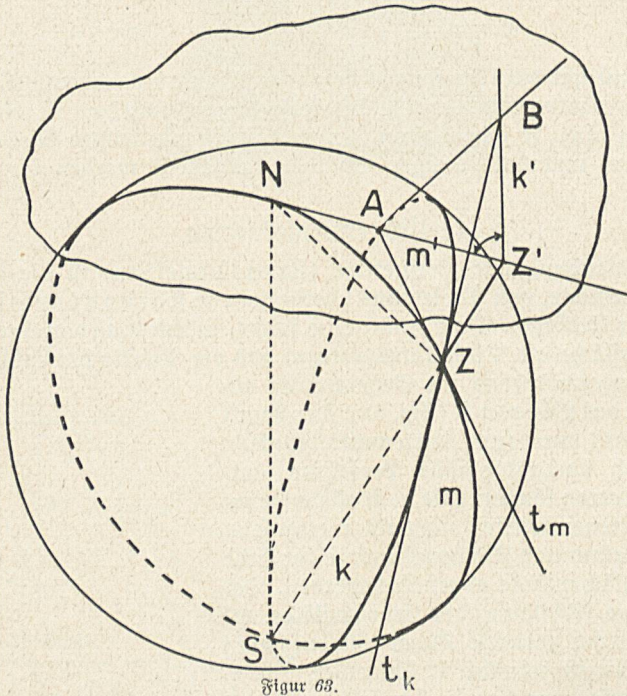
gleiche Strecken werden in demselben Verhältnis gekürzt, Meridiane und Breitengrade also in demselben Maßstab verkleinert; 2. winkeltreu: die Projektionen von Linien schneiden sich unter demselben Winkel wie die Linien selbst; die Figuren sind also den entsprechenden Flächen der Erdoberfläche ähnlich; insolgedessen ist 3. die Abbildung auch flächentreu. (Warum?)

Bei jeder Abbildung auf eine Ebene geht mindestens eine dieser drei Eigenschaften verloren. Flächentreue läßt sich z. B. nur erhalten bei Verzicht auf Winkeltreue und umgekehrt. Allseitige Längentreue ist überhaupt nicht erreichbar.

Die eben beschriebene stereographische Projektion ist nun streng winkeltreu oder konform, d. h. entsprechende Winkel auf der Kugel und in der Bildebene sind gleich. Unter dem Winkel zweier Kurven wird dabei der

Winkel ihrer Tangenten im Schnittpunkt verstanden. Um die Konformität nachweisen zu können, seien zunächst folgende Sätze festgestellt: Kugelfreie durch das Projektionszentrum entsprechen Geraden in der Bildebene und umgekehrt. Insbesondere entsprechen größten Kugelfreie, die durch das Projektionszentrum und damit den Berührungspunkt der Bildebene gehen, Geraden durch den Berührungspunkt und umgekehrt. Ist P in Fig. 62 etwa der Südpol S der Erde, P' der Nordpol N , so entsprechen also den Meridianen die Geraden eines Büschels durch P' .

Liegt der Scheitel des Winkels zweier Kreise bei N , so ist die Richtigkeit unseres Satzes ohne weiteres einzusehen. Liegt er nicht bei N , so können wir



Figur 63.

für die Beweisführung doch einen Winkel zugrunde legen, dessen einer Schenkel durch N geht, da jeder beliebige Winkel als Summe oder Differenz zweier Winkel dargestellt werden kann, deren einer Schenkel durch N geht.

In der Figur 63 sei S das Projektionszentrum, N der Berührungspunkt der Bildebene. m' und k' seien die Schenkel eines Winkels mit dem Scheitel Z' ; m' gehe durch N . Dem Punkte Z' der Bildebene entspricht der Punkt Z der Kugel, der Geraden m' der größte Kugelfreis (Meridian) m , der Geraden k' der Kreis k durch S . Um den Winkel der beiden Kreise zu erhalten, zieht man die Tangenten t_m und t_k in Z an m und k .

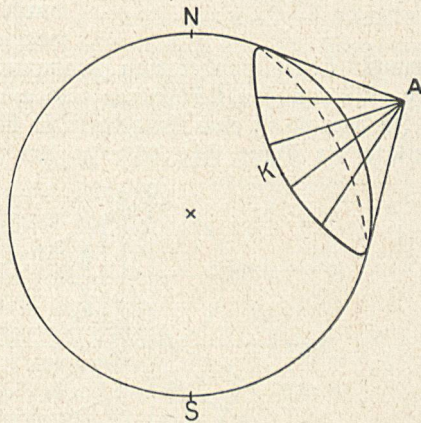
Die Tangente t_m und die Gerade m' liegen beide in der Ebene des Meridians

m ; sie schneiden sich also; der Schnittpunkt sei A . Ebenso schneiden sich die Tangente t_k und der Schenkel k' in einem Punkte B , da sie beide in der Ebene von k liegen. Infolgedessen schneidet die Ebene der beiden Tangenten, d. h. die Tangentialebene in Z an die Kugel, die Vi ebene in der Geraden AB . Es läßt sich nun beweisen, daß $\triangle ABZ' \cong \triangle ABZ$ ist (s, w, s). 1. ist $AB = AB$. 2. Die beiden Tangentialebenen in Z und N an die Kugel stehen auf der Ebene des Meridians m senkrecht, also steht ihre Schnittlinie auch $\perp m$, also auch $\perp NZ'$; d. h. $\sphericalangle BAZ' = 90^\circ = \sphericalangle BAZ$. 3. $Z'ZA$ ist als Scheitelwinkel eines Sehrentangentenwinkels $= \sphericalangle SNZ$. — $ZZ'A$ ist ebenfalls $= \sphericalangle SNZ$, da das rechtwinklige Dreieck $Z'NS$ dem ebenfalls rechtwinkligen Dreieck SZN ähnlich ist. ZAZ' ist also gleichschenkelig, $AZ = AZ'$. — Also ist $\sphericalangle (l_m, t_k) = \sphericalangle (m'k')$.

Einem sehr kleinen Dreieck der Kugel entspricht dann ein sehr kleines Dreieck der Bildebene, dessen Winkel denen des Urdreiecks gleich sind. Urbild und Abbild sehr kleiner Dreiecke sind also bei der stereographischen Projektion ähnlich, so daß überall die Projektion als dem U.bild in den kleinsten Teilen ähnlich angesehen werden kann.

Eine weitere Eigenschaft der stereographischen Projektion besteht darin, daß jeder Kreis der Kugel mit Ausnahme der durch den Projektionsmittelpunkt gehenden (s. o.) als Kreis der Ebene abgebildet wird.

Es sei (Fig. 64) K der abzubildende Kreis, A die Spitze des die Kugel längs K berührenden Kreiskegels. Die Erzeugenden dieses Kreiskegels werden von S aus auf die



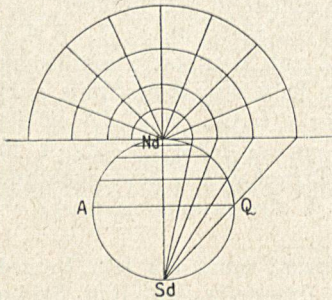
Figur 64.

Berührungsebene in N als Strahlenbüschel abgebildet. K schneidet nun alle Erzeugenden senkrecht. Da jede Erzeugende des Kegels gleichzeitig Kreistangente ist, bleibt diese Eigenschaft wegen der Konformität der stereographischen Abbildung auch für das Bild von K und die Bilder der Kegelerzeugenden richtig. Also ist das Bild von K eine Kurve, die alle Strahlen eines Strahlenbüschels senkrecht durchsetzt. Das kann aber nur ein Kreis sein.

Bei der stereographischen Projektion (Fig. 62) werden also auch die Breitenkreise wieder zu Kreisen, welche die Längskreise rechtwinklig schneiden. Der Äquator erscheint als Kreis mit dem Radius $2r$ (warum?), die Radien der Breitenkreise haben die Länge $P'B' = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$, wenn δ das Komplement der geographischen Breite bedeutet.

Die Abstände der Bilder gleichweit entfernter Breitenkreise nehmen also, wenn man etwa die nördliche Halbkugel vom Südpol aus abbildet, vom

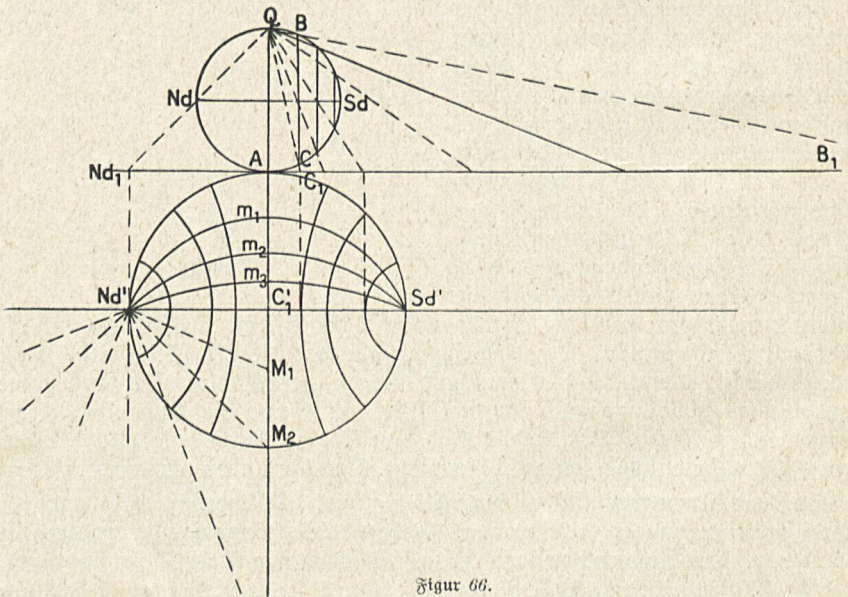
Pol aus nach dem Aquator hin zu. Hier tritt also eine starke Verzerrung (Vergrößerung) bis zum Vierfachen einer Fläche im Kartenhauptort ein. Die stereographische Projektion ist also nicht flächentreu. Ein Bild der gesamten Erdoberfläche würde die ganze Berührungsebene erfüllen. Man beschränkt sich deshalb bei diesem Verfahren auf die Darstellung einer Halbkugel oder noch kleinerer Teile.



Figur 65.

Die stereographische Projektion wurde schon im Altertum verwandt und zwar zur Darstellung von Sternkarten. Man denkt sich dazu das Auge im Nadir und projiziert von diesem aus das Himmelsgewölbe auf die Tangentialebene im Zenit. Auch später wurden die stereographischen Projektionen wegen der Winkeltreue im Kleinen viel benutzt. Heute wendet man sogenannte vermittelnde Projektionsformen an, die einigermaßen flächentreu und einigermaßen winkeltreu sind.

In Fig. 65 ist eine Polarkarte in stereographischer Projektion entworfen; erkläre die Figur. Fig. 66 zeigt das Gradnetz für die westliche oder östliche



Figur 66.

Halbkugel: Die Meridiane sind durch Nd' und Sd' gehende Kreise und schneiden sich hier unter denselben Winkeln wie auf der Erdfugel. Ihren Mittelpunkt kann man also folgenderm.ßen finden: Man trägt in Nd' an $Nd' Sd'$ etwa Winkel von $22\frac{1}{2}^\circ$, 45° , $67\frac{1}{2}^\circ$ an, deren freie Schenkel die

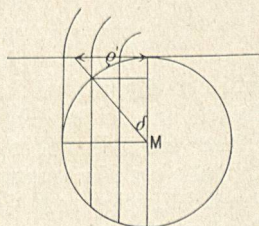
Tangenten an die zu zeichnenden Meridiane werden. Die Mittelpunkte $M_1, M_2 \dots$ dieser Kreise $m_1, m_2 \dots$ liegen dann 1. auf der Senkrechten in Nd' auf dem freien Schenkel des jeweiligen Winkels; 2. auf der Projektion des Äquators. Der Durchmesser eines Breitenkreises, etwa des Kreises BC , wird erhalten als Abstand der Projektionen von B und C auf die Berührungsebene; es ist also $= B_1C_1$. Da das Bild C_1 nach C_1' fällt und die Mittelpunkte der Breitenkreise auf $Nd' Sd'$ liegen, läßt sich das Bild des Breitenkreises zeichnen.

Zu den perspektivischen Kartenprojektionen rechnen noch die zentrale (gnomonische) und die orthographische, weil auch bei ihnen die Punkte des Netzes durch Projektion von einem Punkte aus auf die Projektionsebene erhalten werden. Bei der zentralen Projektion (Fig. 62) ist das Auge im Mittelpunkt der Erdkugel bzw. der Himmelkugel gedacht. Die Abstände der horizontalen Kreise nehmen bedeutend schneller nach außen hin zu als bei der stereographischen Projektion. ($\rho' = r \cdot \operatorname{tg} \delta$.) Sie wird besonders verwandt in der Astronomie, um das Himmelsgewölbe von unserem Standpunkt aus auf die im Zenit gedachte Tangentialebene zu projizieren; aber auch zu Seekarten, weil größte Kreise, die die kürzeste Verbindung zweier Punkte der Erdkugel darstellen (Orthodrome), bei dieser Projektion als Geraden erscheinen. Denn die Sehstrahlen nach den Punkten eines größten Kreises sind gleichzeitig die Radien dieses Kreises und liegen als solche in einer Ebene, welche die Bildebene in einer Geraden schneidet.

Die orthographische Projektion ist eigentlich eine Parallelprojektion, da hierbei der Augpunkt als der unendliche ferne Punkt eines Durchmessers angenommen wird. Bei der orthographischen Polarprojektion (Fig. 67) z. B. werden die Meridiane zu geraden Linien (Radien); die Breitenkreise werden zwar als Kreise und auch längentreu abgebildet, doch findet eine starke Verzerrung in den Randgebieten statt.

Diese drei beschriebenen perspektivischen Entwürfe gehören zur Gruppe der azimutalen Projektionen, so genannt, weil das Azimut bei der Abbildung sich nicht ändert. Bei allen azimutalen Karten wird das Bild auf eine Berührungsebene entworfen.

Andere Karten werden erhalten durch Abbildung auf einen Kegelmantel. Bei diesem sogenannten Kegeltentwurf bezieht man einen Streifen der Kugeloberfläche auf den Mantel eines Kegels, der die Erdkugel längs eines Kreises berührt, Projektionszentrum ist dabei der Mittelpunkt der Erde. Als Berührungskreis wählt man gewöhnlich den mittleren Parallelkreis des abzubildenden Gebietes; man erhält dann die normale oder rechteckige Kegelpjektion, bei welcher die Kegelspitze in die Verlängerung der Erdachse fällt. Je näher das Gebiet dem Pol liegt, um so flacher wird der Kegel. Im Grenzfall, am Pol selbst, entartet er zu einer Ebene, der Berührungsebene; man erhält dann also eine azimutale Projektion als Sonderfall des

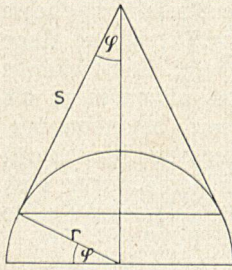


Figur 67.

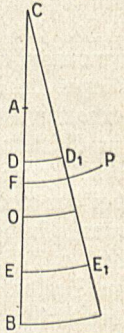
Kegelelntwurf. Liegt das darzustellende Gebiet dagegen in der Nähe des Äquators, so ist der entsprechende Ke gel steil, bis er im Grenzfall in einen Zylinder übergeht: Zylinderprojektion.

In beiden Fällen, der normalen Ke gel- wie der normalen Zylinderprojektion, entsprechen den Meridianen gerade Linien, nämlich Seitenlinien des Ke gels bzw. des Zylinders, den Breitenkreisen Parallellkreise des Ke gels bzw. des Zylinders. Wickelt man den Ke gel- bzw. Zylinder-mantel ab, so erhält man den Ke gel- bzw. Zylinderentwurf.

Die Zone, von der ein Kegelelntwurf hergestellt werden soll (Fig. 68), habe den mittleren Breitenkreis φ , der zum Berührungskreis wird. Die Mittelparallele erscheint dann in wahrer Länge als Bogen eines Kreises, der als Radius die Seitenlänge des Ke gels bis zum Mittelkreis hat. $s = r \cdot \cotg \varphi$. Auch die übrigen Breitenkreise erscheinen als Bogen von Kreisen, deren Mittelpunkt auf dem als gerade Linie erscheinenden Mittelmeridian liegt. Bei der Abwicklung des Ke gelmantels entsteht also ein Kreisabschnitt, dessen Radien die Projektionen der Längengrade



Figur 68.



Figur 69.

sind; der Schnittpunkt der Längengrade ist der Mittelpunkt der konzentrischen Kreise. Die beiden Systeme von Linien schneiden sich also senkrecht.

Aber diese Projektion ist weder winkeltreu noch flächentreu. Denn die Abstände der Längengrade werden nur auf einem Parallellkreis, dem Mittelparallel, richtig; nach N werden sie zu klein, nach S zu groß. Daher wird die Ke gelprojektion nur zur Abbildung von Zonen geringer nord-südlicher Breite benutzt, während die Ost-West-Ausdehnung beliebig groß sein kann.

Die Gerade AB der Fig. 69 stelle den Mittelmeridian des abzubildenden Gebietes dar. O sei der Punkt, durch den die Mittelparallele geht. Der Mittelpunkt C der konzentrischen Kreise läßt sich folgendermaßen finden: Angenommen, die Punkte D und E hätten die Breiten φ_1 und φ_2 , und es sei DD_1 bzw. $EE_1 = 1^\circ$. Dann ist

$$DE = \frac{\pi r}{180} (\varphi_1 - \varphi_2); \quad DD_1 = \frac{\pi r}{180} \cdot \cos \varphi_1; \quad EE_1 = \frac{\pi r}{180} \cdot \cos \varphi_2.$$

Es verhält sich

$$\frac{CE}{CD} = \frac{EE_1}{DD_1}; \quad \frac{CE}{DE} = \frac{EE_1}{EE_1 - DD_1} = \frac{\frac{\pi r}{180} \cdot \cos \varphi_2}{\frac{\pi r}{180} \cdot (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)};$$

$$CE = \frac{\pi r}{180} \cdot \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}.$$

CE läßt sich also konstruieren.

Um C beschreibt man jetzt mit CD , CO , CE , CB die Kreise, die die Breitenkreise vorstellen. Die Bilder der Meridiane werden erhalten, wenn man den

Abstand zweier Längengrade $l = \frac{\pi r \cdot \cos \varphi}{180}$ auf dem Kreise durch O wieder-

holt abträgt und die dadurch erhaltenen Punkte mit C verbunden. Einzelne Punkte werden dann auf Grund ihrer Koordinaten eingetragen. Hat z. B. der Punkt P die Breite φ_3 , so berechnet man den zugehörigen Halbmesser

$CP = CF$ zu $\frac{\pi r}{180} \cdot \frac{(\varphi_3 - \varphi_2) \cdot \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_3}$. Auf dem mit CF um C beschriebenen Kreisbogen trägt man $FP = \frac{\pi r}{180} \cos \varphi_3 \cdot \lambda$ ab, wenn λ den

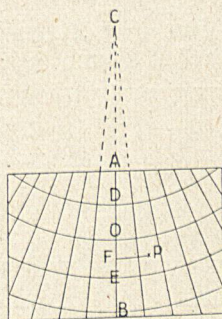
Längenunterschied von P gegen B bedeutet (Fig. 70).

In der Praxis wird der Kegeltwurf in einer etwas abgeänderten Form benutzt, bei der die Meridianabstände auf zwei Breitenkreisen abgetragen werden, so daß die Längengrade nicht mehr im Pol zusammenlaufen, sondern in einem anderen Punkte konvergieren. (Karten der europäischen Länder, außer Rußland).

Bei der normalen Zylinderprojektion — der Zylinder möge längs des Äquators berühren, Mittelpunkt ist der Mittelpunkt der Kugel — erscheinen die Längengrade nach der Abwicklung als parallele Geraden von der Richtung der Erdachse, die Breitenkreise als parallele Geraden senkrecht dazu. Bei der Abwicklung erhält man also eine Ebene, in der die Projektionen der Längen- und Breitengrade sich rechtwinklig schneiden. Der Abstand zweier Breitengrade wächst dabei mit der geographischen Breite.

Die Breitenkreise selbst werden sämtlich vergrößert zu Kreisen mit dem Radius r des Zylinders; auf der Karte herrscht also in der Richtung eines Breitenkreises eine Längenverzerrung $\frac{1}{\cos \varphi}$, da er in Wirklichkeit die

Länge $2\pi r \cdot \cos \varphi$ hat; d. h. der Abstand der Meridiane wird umgekehrt proportional dem \cos der geographischen Breite vergrößert. Zonen zu beiden Seiten des Äquators kann man also nach dieser Projektion gut abbilden (warum?). Je weiter man sich aber vom Äquator entfernt, um so stärker ist die Abweichung zwischen wahrer Gestalt und Projektion, weil die Längengrade in Wirklichkeit nach dem Pol zu konvergieren, während sie auf der Karte dieselbe Entfernung wie am Äquator haben. Man muß infolgedessen entweder das darzustellende Gebiet beschränken, oder aber man stellt für einen Ort dieselbe Verzerrung wie in der Querrichtung auch in der Richtung des Meridians her. Man vergrößert also den Abstand zweier Parallelkreise in demselben Maße, wie die Erdoberfläche an dieser Stelle in der Richtung eines Breitenkreises erweitert erscheint. Da die Breitenverzerrung $\frac{1}{\cos \varphi}$ ist, muß auch der Abstand zweier Parallelkreise im umgekehrten Verhältnis des \cos der geographischen Breite vergrößert werden.



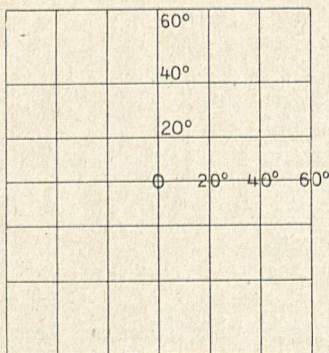
Figur 70.

Die Meridiane sind bei dieser Darstellung gleichabständige Geraden, die senkrecht zum Äquator, der als Strecke von der Länge $2\pi r$ gezeichnet wird, verlaufen. (Fig. 71.)

Zu einer angenäherten Bestimmung des Abstandes eines Breitenkreises vom Äquator gelangt man, wenn man vom Äquator aus jeden Grad des Meridians mit dem reziproken Wert des \cos der zugehörigen mittleren Breite multipliziert und die Summen der so erhaltenen Werte addiert. Das Ergebnis wird um so genauer, je kleiner man die Abstände der Breitenkreise wählt, wenn man also statt in Breitengraden etwa in Breitenminuten fortschreitet. Die exakte Lösung ist folgerichtig gegeben durch die unendliche

$$\text{Summe } r \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi = r \cdot \lg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Eine erste Karte dieser Art ist von dem in Duisburg lebenden Geographen Kremer gen. Mercator († 1594) gezeichnet, natürlich nicht unter



Figur 71.

Verwendung der damals noch unbekanntenen Integralrechnung und des Begriffs des natürlichen Logarithmus. Nach Mercator heißen alle nach der oben angegebenen Formel hergestellten Karten Mercatorarten oder Mercatorprojektionen, obwohl es sich dabei um keine Projektion im eigentlichen Sinne handelt. Die Mercatorarten sind winkeltreu, da jedes kleine Flächenstück im gleichen Verhältnis in der N=S-Richtung wie in der O=W-Richtung gedehnt wird.

Die Flächentreue ist dagegen nicht erfüllt,

da die Flächen im Verhältnis $\frac{1}{\cos^2 \varphi}$ zunehmen.

Besonders stark vergrößert werden bei dem Mercatorwurf die polwärts liegenden Gebiete. Die Polargebiete selbst werden niemals in Mercatorprojektion dargestellt, da der Wert des Integrals mit unbegrenzter Annäherung an die Erdpole über alle Grenzen wächst.

Die Bedeutung des Mercatorwurfs liegt zunächst darin, daß er Karten von großen Teilen der Erdoberfläche ermöglicht, besonders Klima-, Verkehrskarten usw., bei denen es auf die Größenverhältnisse nicht sehr ankommt. Ferner stellt die Mercatorarte Loxodromen, das sind Linien, die die Meridiane unter gleichen Winkeln schneiden, als Geraden dar. Da auch heute noch die Schiffe oft mit einem festen Kurs fahren, eine solche Bahn aber auf der Mercatorkarte als Gerade erscheint, hat sie noch immer in der Seefahrt ihre besondere Verwendung.

Es gibt noch eine ganze Reihe von Kartenprojektionen (z. B. die Preussische Polyederprojektion der Generalstabskarten und Messtischblätter), die je nach dem Umfang des abzubildenden Gebietes und nach dem Zweck der Karte verschieden sind. Die (angewandte) Mathematik hat für jeden einzelnen Fall die meist sehr verwickelten Gesetze der Abbildung aufgestellt.





Bierersche Hofbuchdruckerei
Stephan Weibel & Co.
Altenburg, Thür.