

Biblioteka Główna i OINT  
Politechniki Wrocławskiej



100100143334







1/2 inw. 62

~~II 1 15~~

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA — TOM XXXI.

~~F.1~~

# TEORYA ŻELBETU

OPRACOWAŁ

Dr. MAKSYMILIAN THULLIE

RADCA DWORU, PROFESOR SZKOŁY  
-- POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE --

BI-2

ZE 125 RYSUNKAMI W TEKŚCIE

Archiwum

POLITECHNIKA WROCLAWSKA  
Instytut Inżynierii Budowlanej i Dobrej



LWÓW 1915

NAKŁADEM KOMISJI BIBLIOTEKI POLITECHNICZNEJ

I ZWIĄZKOWA DRUKARNIA WE LWOWIE, LINDEGO 4.



*Inv. 1944.*

~~Archiwum~~



100149N/1







## PRZEDMOWA.



Oprócz małej książeczki p. Jurkowskiego niema w polskiej literaturze technicznej żadnego dzieła, omawiającego teorię żelbetu. Pracując w tym dziale nauki dość dawno i wykładawszy przez lat parę ten przedmiot w szkole politechnicznej lwowskiej, postanowiłem tę lukę w naszej literaturze wypełnić.

Przedmiot starałem się wyłożyć wedle obecnego stanu nauki, uwzględniając jednak zawsze sposób obliczenia przepisany rozporządzeniami ministeryalnemi w Austrii, Prusiech i Rosyi. Dziełko to wykończyłem i oddałem do druku w czasie wojny. Czytelnik zechce wybaczyć tę okolicznością papier nie zupełnie jednolity.

Pracę tę oddaję do użytku inżynierom polskim i proszę o tak przychylnie przyjęcie, jakiem cieszyły się inne me dzieła.

We Lwowie, w maju 1915.

*Dr. Maksymilian Thullie.*





# Teoria żelbetu.

## A. Własności mechaniczne betonu i żelaza.

### § 1. Wstęp.

W ostatnich czasach nowe horyzonty dla techniki stworzyło zastosowanie żelaza wspólnie z betonem do budowli. Te dwa materiały, odpowiednio razem użyte, tworzą nowy materiał budowlany, żelbet<sup>1)</sup> (n. *Eisenbeton*, fr. *béton armé*, a. *reinforced concrete*). Chociaż ten materiał budowlany jest od niedawna znanym, mimo to zastosowanie jego w praktyce jest jak najobszerniejsze i coraz to nowe zdobywa sobie dziedziny. Dzisiaj budowle żelbetowe współzawodniczą skutecznie z budowlami kamiennymi i żelazniami, a nawet z drewnianymi. Ten szybki rozwój i tak obszerne zastosowanie tego materiału umożliwił także szybki postęp teorii, poparty bardzo wieloma doświadczeniami.

W podręczniku tym ograniczymy się tylko do teorii żelbetu, gdyż ustrój zeskładów żelbetowych należy do budownictwa żelbetowego, osobnego działu nauki.

### § 2. Beton.

Wiadomo, że beton (n. *Beton*, fr. *béton*, a. *concrete*, wł. *calcestruzzo*) jest mieszaniną cementu, piasku, żwiru, która w połączeniu z pewną ilością wody twardnieje i staje się podobną do kamienia. Mieszaninę tę wykonywamy w różnych stosunkach, zależnie od celu do którego ma być użyta. Jeżeli mamy więcej cementu, to zapełnia on otwory między ziarnkami

---

<sup>1)</sup> Dla oznaczenia tego materiału używa się od dawna w formie przymiotnikowej wyrazu „żelaznobetonowy“. W formie rzeczownikowej używają wprawdzie żelazobeton, beton wzmocniony, ale pierwszy wyraz jest przeciwny duchowi języka polskiego, drugi za długi. Dlatego przyjąłem wyraz „żelbet“, używany w Warszawie, jako najodpowiedniejszy.



piasku, a zatem beton będzie mniej porowatym i przemakalnym a więcej wytrzymałym. Beton taki nazywamy „tłustym“, (n. *fette Mischung*, a. *rich mixture*, fr. *mélange gras*, wł. *impasto grasso*), w przeciwieństwie do „chudego“, (n. *magere Mischung*, a. *poor mixture*, fr. *mélange maigre*, wł. *impasto magro*), który ma mniejszą zawartość cementu. W zeskładach żelbetowych części cienkie, silnie obciążone, przylegające do żelaza, robimy z betonu tłustego, o mniejszej zawartości żwiru, mniej obciążone wykonywamy z betonu chudego. Tam gdzie chodzi o lekkość, używamy niekiedy betonu żużlowego, (n. *Schlackenbeton*, a. *slag concrete*, fr. *béton de laitier*), t. j. betonu, w którym zamiast żwiru dajemy żużel.

Stosunek mieszanki (n. *Mischungsverhältniss*, a. *proportion of mixture*, fr. *proportion de mélange*) wyrażamy albo wedle objętości, albo wedle ciężaru. Stosunek 1 : 3 oznacza 1 część cementu na 3 części mieszanki piasku i żwiru. Jeżeli wyrażamy stosunek mieszanki wedle ciężaru, to podajemy ciężar cementu na  $1\text{ m}^3$  betonu. Mniej więcej stosunek mieszanki 1:2 jest to 650 *kg* cementu na  $1\text{ m}^3$  betonu, czyli 400 *kg* piasku i 800 *kg* żwiru, 1:3 jest to 440—470 *kg*, 1:4 jest to 340—350 *kg*, 1:5 jest to 280—300 *kg*, 1:6 to 230 *kg*, 1:9 to 160 *kg*, 1:12 to 120 *kg* na  $1\text{ m}^3$  betonu.

Dla zeskładów żelbetowych nie używamy mieszanki chudszej niż 1:5, czyli 280 *kg* na  $1\text{ m}^3$  betonu.

Własności betonu zależą w znacznej mierze od jakości użytego cementu. Cement powinien być portlandzki i wolnowiązący; szybko wiążącego używamy jedynie przy naprawkach lub szczegółach. Grubość żwiru jest zawisłą od użycia betonu. Drobną żwir dajemy w częściach bardziej pracujących, grubszy tam, gdzie mamy większe ilości materiału, w ogóle wielkość ziarenek piasku i żwiru stosuje się do tego, aby ubicie betonu między wkładkami a opierzeniem było możliwem.

Beton ubijamy w warstwach najwyżej 20 *cm* grubych (rozp. austr.), w Rosyi 10 *cm*.

### § 3. Żelazo.

Zwykle jako wkładki używamy prętów okrągłych, jednak czasami używane są także i kształtówki. Żelazo okrągłe o tyle jest lepszem, że łatwiej uzyskać można przyleganie betonu do

żelaza. Najmniejszy odstęp powierzchni wkładki żelaznej od powierzchni betonu wynosić musi dla płyt najmniej 1 *cm*, dla belek 2 *cm*. Najmniejszy odstęp między wkładkami ma wynosić 2 *cm*, przy grubszych wkładkach musi być co najmniej równy średnicy pręta.

Dawniej używano dla wkładek żelaza spawalnego, dzisiaj używa się wyłącznie zlewnego, jako wytrzymalszego, a nawet czasem stali zwłaszcza w Ameryce, gdzie jest tańszą. Żelazo musi być czyste od rdzy. Unikać należy spawania w miejscach niebezpiecznych. Pręt ciągnięty należy zakończyć hakiem (rys.1.).



Rys. 1.

#### § 4. Wytrzymałość betonu na ciśnienie i ciągnięcie.

Wiadomo ogólnie, że wytrzymałość betonu na ciśnienie jest znacznie większą, niż na ciągnięcie. Wytrzymałość betonu zależy od bardzo wielu czynników jako to: stosunku mieszanki, dobroci cementu, jakości piasku i żwiru, sposobu wykonania i mieszania, ilości wody i wieku.

a) Wpływ wysokości. Wytrzymałość na ciśnienie kostek jest większą, niż wytrzymałość słupów. Przy zgnieceniu powstają bowiem zazwyczaj ostrosłupy, których wysokość jest większą od szerokości słupa. Przy kostkach nie mogą się te ostrosłupy regularnie uformować, dlatego wytrzymałość jest większą. I tak otrzymał F e r e t dla graniastosłupów o szerokości boku 2 *cm*.

T a b l i c z k a I.

Wytrzymałość na ciśnienie w *kg/cm<sup>2</sup>*.

Wysokość w <i>cm</i>	2	4	6	8	10
Cement	6 dni 126	104	107	103·5	104
Zaprawa cementowa 1:1, 13 dni	121	115·5	112·5	111·5	111

A. Schüle (Mitt. d. Materialprüfungsanstalt Zürich, zeszyt 13) otrzymuje w procentach dla przekroju 7×7 *cm*

dla *h* = 3·5 7 10·5 14 21 28 *cm*

średnią 123 100 67 64 54 59 *kg/cm<sup>2</sup>*.

Widzimy więc, że w słupach wytrzymałość na ciśnienie wynosi około 60% wytrzymałości kostki.

b) Wpływ stosunku mieszanki i wieku betonu. Wytrzymałość betonu wzrasta znacznie z biegiem czasu, a zwiększa się też z ilością cementu, co widzimy z następczej tabliczki według doświadczeń amerykańskich (Kimballa):

Tabliczka II.

Wytrzymałość na ciśnienie w  $kg/cm^2$ .

Stosunek mieszanki	7 dni	1 mies.	3 mies.	6 mies.
1:1:3	112	193	235	301
1:2:4	98	168	203	259
1:2 $\frac{1}{2}$ :5	91	155	187	238
1:3:6	84	144	171	217
1:3 $\frac{1}{2}$ :7	77	132	154	196
1:4:8	70	119	140	175
1:5:10	56	94	105	133
1:4:12	42	70	74	91

Doświadczenia Considère'a okazały że wytrzymałość względna betonu jest po 7 28 90 dniach 1 r.

$\frac{1}{3}$   $\frac{2}{3}$  1 1·5

Probst otrzymał po 70 90 150 dniach  
wytrzymałość na ciśnienie 205 252 268  $kg/cm^2$

Bach otrzymał: (*Versuche mit Eisenbetonbalken* tom I. str. 44)

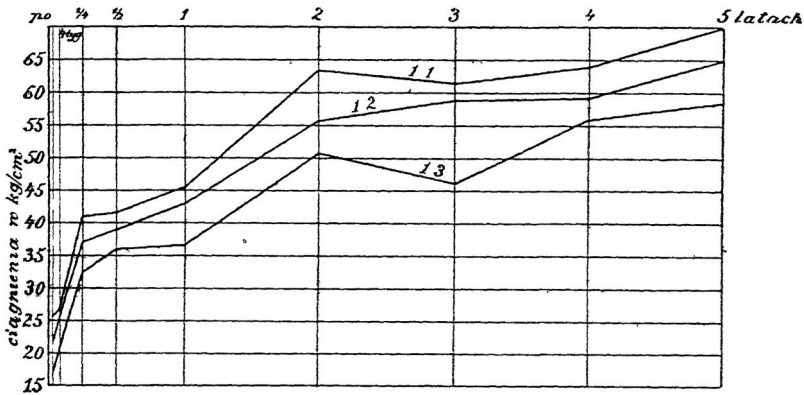
po	7	28	90 dniach
			pod wodą w mokrem przechowaniu
ciśnienie	203	263	331 339 $kg/cm^2$
ciągnienie	24·2	31·6	37·6 36·1 $kg/cm^2$ .

Doświadczenia Dyckerhoffa co do wytrzymałości na ciągnienie dały następujące wyniki:

Tabliczka III.

mieszanka	tygodnie				lata					
	1	4	13	26	1	2	3	4	5	
1:1	25·5	27·4	41·4	41·9	45·5	63·3	61·5	63·3	69·1	$kg/cm^2$
1:2	22·2	26·5	38·3	39·1	42·4	55·2	58·1	59·3	64·3	$kg/cm^2$
1:3	18·6	23·4	34·5	35·4	36·6	50·9	46·2	56·3	57·9	$kg/cm^2$

Rysunek 2. przedstawia wykresnie wzrost wytrzymałości.

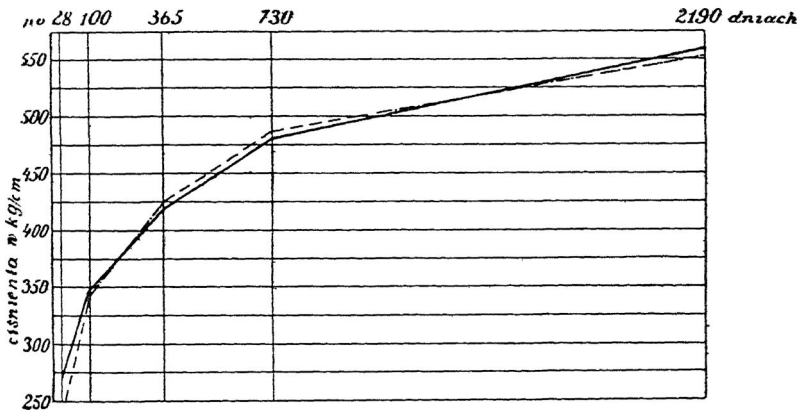


Rys. 2.

Bach otrzymał z doświadczeń (*Beton und Eisen* 1909 str. 129.)

	po dniach		latach		
	28	100	1	2	6
$\mu =$	268	348	418	478	561 kg/cm <sup>2</sup>

Przedstawiliśmy ten stosunek wykresnie na rys. 3.



Rys. 3.

Analitycznie da on się wyrazić  $n = 874 \left( 1 - \sqrt[6]{\frac{1}{6m+1}} \right)$ , jeżeli „ $m$ ” oznacza liczbę miesięcy.



Doświadczenia wydziału żelbetowego austriackiego (Mitteil. Heft 1. Druckfestigkeit) okazały:

Tabliczka IV.

cementu na 1 m <sup>3</sup> mieszanki	4 tyg.	6 tyg.	5 mies.
420	231 (1)	255 (1.10)	312 (1.35)
320	246 (1)	281 (1.14)	313 (1.27)
250	165 (1)	188 (1.14)	241 (1.46)

Wpływ stosunku mieszanki betonu jest tak znaczny, że rozporządzenie austriackie z r. 1911 wedle niego normuje natężenia dopuszczalne, przepisując pewną najmniejszą wytrzymałość.

Rozp. min. austr. z 1911. § 10.7. Beton musi po sześciotygodniowym tężeniu na powietrzu wykazać przynajmniej następne wytrzymałości na ciśnienie w kostkach w kg na 1 cm<sup>2</sup> prostopadle do kierunku ubijania:

Przy stosunku mieszanki:

na 1 m<sup>3</sup> mieszanki piasku i żwiru:

a) 470 kg cementu portlandzkiego . . . . .	170
b) 350 " " " . . . . .	150
c) 280 " " " . . . . .	130

Rozp. minist. rosyjskie z 1911 § 12. Beton winien mieć taki skład i winien być wykonany z takich materiałów i takim sposobem, ażeby szkielety, wykonane z betonu na miejscu robót o wymiarze 30×30×30 cm, po 28 dniach leżenia w wilgotnym piasku przy temperaturze pokojowej wytrzymały chwilowo na ściskanie nie mniej, niż 150 kg/cm<sup>2</sup>.

c) Wpływ ilości wody. Beton może być wilgotny (n. *erdfeucht*), lub plastyczny (n. *plastisch*). Plastyczny beton posiada około 50% więcej wody i ubija się go w grubszych warstwach. Bach robił pod tym względem liczne doświadczenia i okazało się, że po 28 dniach, beton wilgotny miał większą wytrzymałość od plastycznego, lecz już po 100 dniach różnica wytrzymałości malała, a w końcu całkiem znikła. Do zeskładów żelbetowych lepiej używać betonu plastycznego, który szczelnie wypełnia formy i dobrze przylega do żelaza.

Probst otrzymał po 70 dniach:

dla dodatku wody	7.9	9	10.1%
wytrzymałość na ciśnienie	300	220	215 kg/cm <sup>2</sup> .

Wytrzymałość betonu na ciągnięcie nie jest dokładnie poznana, gdyż zazwyczaj mierzymy tylko wytrzymałość zaprawy cementowej.

Doświadczenia z ciągnięciem betonu robił M ö r s c h i okazało się, że dla mieszanki 1: 3 po 3 mies. otrzymał  $12.6 \text{ kg/cm}^2$ ; dla 1:3 po 2 latach średnio (3 doświadczenia)  $\frac{8.8+15.8+22.0}{3} = 15.5 \text{ kg/cm}^2$ ; zaś dla 1:4 po 3 mies.  $9.2 \text{ kg/cm}^2$ .

Reid otrzymał z doświadczeń:

	1 miesiąc	3 miesiące
dla mieszanki 1:2:4	21	28 do 35 $\text{kg/cm}^2$
" " 1:2:5	10 do 14	14 do 25 "

Probst otrzymał na podstawie doświadczeń na złamanie dla mieszanki 1:2:4 po 70 90 150 170 dniach wytrzymałość 14.8 19.5 23.6 25.9  $\text{kg/cm}^2$ .

Zazwyczaj wytrzymałość na ciągnięcie równa się  $\frac{1}{10}$  wytrzymałości na ciśnienie, chociaż czasem jest mniejszą i tak otrzymał Bach (Forscherarbeiten zeszyt 95.)

Tabliczka V.

	dodatek wody %	22 dni	45 dni	6 mies.	1 rok
wytrzymałość na ciągnięcie	7.8	12.4	13.7	19.5	23.7
" " "	9.0	12.0	11.8	15.3	23.1
" " ciśnienie	7.8	225	253	337	371
" " "	9.0	191	209	297	329.

Tu więc wynosi wytrzymałość na ciągnięcie  $\frac{1}{14}$  do  $\frac{1}{8}$  wytrzymałości na ciśnienie.

d) Wpływ wielkości kostek. Doświadczenia okazały, że wytrzymałość małych kostek jest większą, niż wielkich i tak Bach otrzymał (Mitt. über Forscherarbeiten zesz. 90 i 91), wytrzymałość na ciśnienie, podaną w tabl. VI.

Tabliczka VI.

wiek dni	długości krawędzi kostki 7 cm	30 cm	stosunek
14	208	156	1.33:1
28	260	183	1.42:1
45	293	203	1.44:1.

Doświadczalnia w Gross-Lichterfelde (Berlin) otrzymała w r. 1907 wytrzymałość betonu na ciśnienie po 28 dniach:

Tabliczka VII.

mieszanina	długość krawędzi kostki	
	20 <i>cm</i>	30 <i>cm</i>
1:3	131 do 461	170 do 272
1:4	118 do 400	126 do 232
1:4.5	141 do 262	—
1:5	91 do 346	106 do 310
1:6	87 do 251	103 do 249
1:7	183	—
1:8	—	93 do 102

Burchartz podaje wyniki doświadczeń w Gross-Lichterfelde (Arm. Beton 1912 str. 288).

Tabliczka VIII.

wiek		wielkość krawędzi kostek						
		7.1	10	20	25	30	40	50 <i>cm</i>
		475	450	422	373	375	328	—
13 t.	w %	100	97	89	79	79	66	—
15 t.		—	—	—	—	—	—	367
	w %							77

W Austrii przyjmuje się kostki o krawędzi 20 *cm*. w Rosyi i Prusiech 30 *cm*.

e) Wpływ mieszania. Na wytrzymałość betonu ma wpływ także mieszanie. Przy mieszaniu maszynowem wytrzymałość jest wedle Taylora i Thomsona większą o 10% do 20%, niż przy mieszaniu ręcznem.

f) Wpływ zmian natężenia. Feret pierwszy stwierdził zmniejszenie się wytrzymałości wskutek powtarzania się zmian w natężeniu. Van Orumne licznymi bardzo doświadczeniami stwierdził, że beton wytrzymuje przy powtarzanych natężeniach na ciśnienie względnie zginanie około połowy natężenia przy granicy wytrzymałości, a wielkość natężenia przy złamaniu i ilość zmian natężenia stoją w odwrotnym stosunku.

Jeżeli natężenia nie przekraczają połowy współczynnika wytrzymałości, wytrzymałość tych belek, jak to stwierdził Berry (Engineering Record 1908 str. 90.), nie zmniejsza się o wiele nawet przy powtarzaniach obciążenia, dochodzących do miliona.

Natężenie dopuszczalne jest tylko *n*tą częścią spólczynnika wytrzymałości, przyczem *n* oznacza spólczynnik pewności.

Związek towarzystw niemieckich (Betonverein) w r. 1904 dopuszcza ciśnienia przy zginaniu  $40 \text{ kg/cm}^2$ ; zaś przy ciśnieniu środkowem  $35 \text{ kg/cm}^2$ .

Pruskie rozporządzenie dopuszcza na zginanie  $\frac{1}{5}$  część, a w słupach  $\frac{1}{10}$  część wytrzymałości na ciśnienie.

Francuskie rozporządzenie przyjmuje 0.28 część wytrzymałości betonu po 90 dniach.

Rozporządzenie ministeryalne dla austr. kolei państwowych przyjmuje:

dla rozpiętości $l \leq 2.0 \text{ m}$	$35 \text{ kg/cm}^2$
" $2 > l > 5$	30 "
" $5 > l$	25 "

Austr. przepisy z roku 1911 przyjmują dla zeskładów żelbetowych w razie zginania i przy ciśnieniu mimośrodkowem

	ciśnienie		ciągnięcie		
	budown.	mosty	budown.	mosty	
470 kg cem. na $1 \text{ m}^3$	42	$33+0.2 \text{ l}$	25	$19+0.1 \text{ l}$	najw 22
350 " "	37	$29+0.2 \text{ l}$	24	$18+0.1 \text{ l}$	" 21
280 " "	32	$25+0.2 \text{ l}$	22	$16.5+0.1 \text{ l}$	" 19.5

dla zeskładów betonowych:

	ciśnienie		ciągnięcie	
	bud.	mosty	bud.	mosty
470 kg cem. na $1 \text{ m}^3$	33	$28+0.2 \text{ l}$	2.5	2
350 " "	30	$25+0.2 \text{ l}$	2.5	2
280 " "	26	$22+0.2 \text{ l}$	2.0	1.5
230 " "	21	$18+0.2 \text{ l}$	2.0	1.5
160 " "	13	13	—	—
120 " "	9	9	—	—

Przy ciśnieniu środkowem dopuszcza się

dla zeskładów żelbetowych

	budown.	mosty
dla mieszaniny		
470 kg cem. na $1 \text{ m}^3$	28	25
350 " "	25	22
280 " "	22	19

dla zeskładów betonowych

	budown.	mosty
dla mieszaniny		
470 kg cem. na $1 \text{ m}^3$	22	20
350 " "	20	18
280 " "	17	16
230 " "	14	13
160 " "	9	9
120 " "	6	6

Rosyjskie rozporz. min. z r. 1911. 5. Najwyższe dopuszczalne natężenia żelaza i betonu w częściach ściskanych, przy zupełnem wyłączeniu zginania i przy zawartości przekroju uzbrojenia podłużnego nie mniejszej, niż 0.80% przekroju betonu, nie powinny przekraczać dla betonu  $\frac{1}{6}$  wytrzymałości na ściskanie w terminie 28 dniowym.

W częściach, na które nie działają wstrząśnienia lub siły często zmieniające się, powyższe natężenia dopuszczalne mogą być podniesione, ale nie więcej, niż o 20%.

6. W częściach zginanych najwyższe natężenie dopuszczalne oznacza się w następujący sposób: dla betonu: ściskanie jako  $\frac{1}{4.5}$  część wytrzymałości betonu na zmiżdżenie w terminie 28 dniowym.

W częściach, znoszących silne wstrząśnienia lub gwałtownie zmieniające się siły, należy wyżej wspomnianą normę zmniejszyć o 10%, w częściach, znoszących silne uderzenia, o 20%.

### § 5. Sprężystość betonu.

Doświadczenia B a c h a wykazały, że sprężystość betonu jest zmienną, wedle równania:  $\frac{dl}{l} = a \nu^m$  (Statyka budow. wyd.

II. str. 194), gdzie  $a = \frac{1}{\epsilon}$  i  $m$  są zmienne, zależne od stosunku mieszanki. Dla mieszanki w stosunku: cem. piasek żwir

$$1 : 2\frac{1}{2} : 5 \quad (\text{żwir tłuczony}) \quad \frac{dl}{l} = \frac{1}{298000} \cdot \nu^{1.14}$$

$$1 : 2\frac{1}{2} : 5 \quad (\text{żwir rzeczny}) \quad \frac{dl}{l} = \frac{1}{457000} \cdot \nu^{1.16}$$

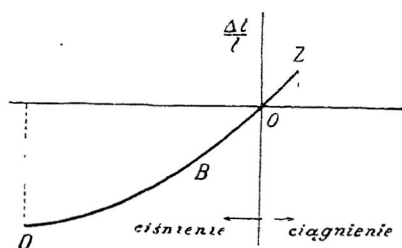
$$1 : 3 : 0 \quad \frac{dl}{l} = \frac{1}{315000} \cdot \nu^{1.15}$$

$$1 : 1\frac{1}{2} : 0 \quad \frac{dl}{l} = \frac{1}{356000} \cdot \nu^{1.11}$$

Krzywą odkształceń przedstawia rys. 4. Dla małych natężeń możemy przyjąć stosunek  $\Delta l : l$  jako stały, a  $\epsilon =$  od 200.000 do 300.000  $kg/cm^2$ ; dla większych ciśnień  $\epsilon$  zmniejsza się do 150.000, a nawet do 50000  $kg/cm^2$ .

Ciekawe wyniki otrzymał Considère dla żelbetu, pracującego na ciągnięcie. Znalazł on, że gdy beton sam pracuje na ciągnięcie, okazuje najw. wydłużenie, przy którym się już przerywa, 0.1—0.2  $mm/m$ , zaś beton z wkładkami żelaznymi przerywa się dopiero przy przedłużeniu od 0.545 do 1.25  $mm/m$ .

Przy drugim doświadczeniu otrzymał jednak Considère nieco mniej, a to dla betonu samego od 0·10 do 0·22, z wkładkami zaś od 0·56 do 1·07 *mm/m*. Inni inżynierowie, jak Kleinogelrobili doświadczenia podobne, lecz nie otrzymali takich wyników.



Rys. 4.

Dopiero doświadczenia Ba-cha wyświetliły sprawę. Jeżeli belki były trzymane w wilgoci, to nim powstały pęknięcia belki, okazały się naprzód w tych miejscach plamy wodne, które są dowodem, że miejsca te były już osłabione. Przy belkach betonowych następuje wtedy pęknięcie, przy żelbetowych w tych miejscach ciągnienie przenosi się po części na żelazo i przedłużenie może być wprawdzie większem, ale nie tak wielkiem, jak mniema Considère.

Na wielkość współczynnika sprężystości ma też wpływ wiek betonu i tak otrzymał Hartig (Le Ciment 1906 str. 11.).

Tabliczka IX.

dni	cement czysty	1:3
50	$\epsilon = 313500 \text{ kg/cm}^2$	366600 $\text{kg/cm}^2$
100	$\epsilon = 353100$ „	394700 „
200	$\epsilon = 389900$ „	430200 „
300	$\epsilon = 407200$ „	450800 „
400	$\epsilon = 417300$ „	464800 „

Taylor i Thomson wyznaczyli linie odkształceń dla betonu różnego wieku i otrzymali wyniki, uwidocznione na rys. 5.

Woolson otrzymał dla betonu 1:2:4

dla małych natężeń  $\epsilon = 350000 \text{ kg/cm}^2$

dla  $\nu \lesssim 9.5 \text{ kg/cm}^2$   $\epsilon = 281000$  „

Granica sprężystości dla ciśnienia leży w  $\frac{\mu}{2}$  do  $\frac{2}{3} \mu$ ,

jeżeli  $\mu$  jest współczynnikiem wytrzymałości.

Zwrócić uwagę należy, że oprócz odkształceń sprężystych mamy też odkształcenia stałe, które jednak zwykle tylko przy pierwszym obciążeniu występują.

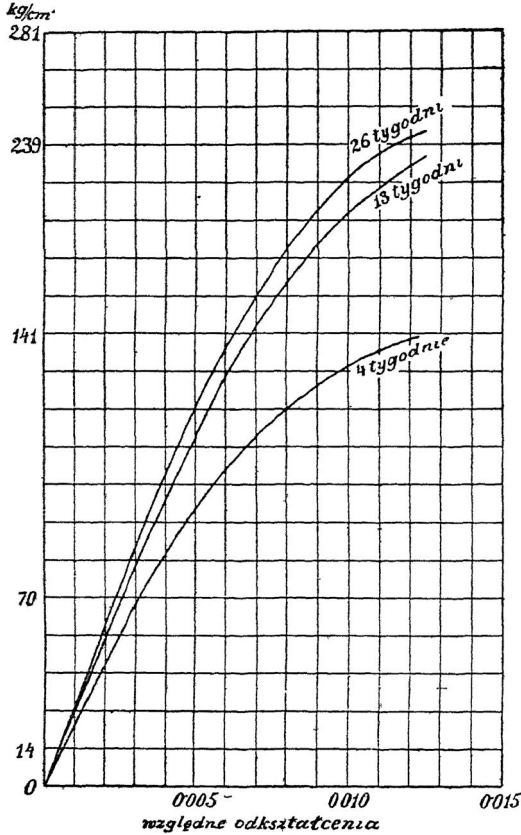


Spółczynniki sprężystości dla ciągnięcia otrzymał Szytkiewicz dla

$\nu=1.6$	3.1	4.6	6.2	7.9	9.2	$kg/cm^2$
$\varepsilon=267000,$	238000,	230000,	221000,	203000,	196000	"

### § 6. Wytrzymałość na ścinanie.

Zależnie od stosunku mieszanki betonu i innych okoliczności, wytrzymałość betonu na ścinanie jest zmienną.



Rys. 5.

Mörsch <sup>1)</sup> udowadnia teoretycznie, że wytrzymałość na ścinanie  $\mu_1 = \sqrt{\mu \cdot \mu'}$ , to znaczy, że jestto średnio geometrycznie proporcjonalna wytrzymałości na ciągnięcie i ciśnienie.

<sup>1)</sup> Der Eisenbetonbau IV. wyd. str. 55.

Dla betonu 1:3 dwuletniego otrzymał on doświadczalnie  $\mu = 65.9 \text{ kg/cm}^2$ ; zaś teoretycznie  $\mu_1 = \sqrt{\mu \cdot \mu'} = \sqrt{15.5 \cdot 308} = 69 \text{ kg/cm}^2$ . Jest to jednak wyjątkowo wielka wartość. Inni inżynierowie przyjmują znacznie mniejszą wytrzymałość, i tak: Dr. Saliger przyjmuje 20 do 35  $\text{kg/cm}^2$ , Feret 24 do 36  $\text{kg/cm}^2$ . Feret otrzymał  $\mu_1 = 7.9$  do 97.4  $\text{kg/cm}^2$  i wykazał doświadczalnie proporcjonalność  $\mu_1$  i  $\mu'$  (wytrzymałość na ciągnięcie). Mesnager otrzymał  $\mu_1 = 1.25 \mu'$  do  $1.3 \mu'$ . Bauschinger otrzymał po 4 miesiącach  $\mu_1 = 1.25 \mu'$ , po 2 latach  $\mu_1 = 1.5 \mu'$ , Luigi 20—25  $\text{kg/cm}^2$ .

Doświadczenia Wajsssa i Freytaga wykazały

Tabliczka X.

stosunek mieszanki dodatek wody	1:3		1:4		1:5	
	8%	14%	8%	14%	8%	14%
wytrzymałość na ścinanie	36	30	31	28	26	19
„ „ ciśnienie	280	195	220	153	127	88
„ „ ciągnięcie	12.6	10.5	9.2	8.8	4.4	5.5

Niemiecki Betonverein przyjmuje natężenie dopuszczalne 4.5  $\text{kg/cm}^2$ , podobnie też przepisuje pruskie rozporządzenie najczęściej 4.5  $\text{kg/cm}^2$ . Czasami jednak i te natężenia mogą być za wielkie n. p. dla betonu chudego lub bardzo młodego.

Austr. rozporządzenie kolejowe przyjmuje 4.5  $\text{kg/cm}^2$ , francuskie 10% natężenia dopuszczalnego dla ciśnienia.

Austr. przepisy ministerjalne z r. 1911 przyjmują:

dla zeskładów żelbetowych				betonowych			
mieszanka		bud. mosty		mieszanka		bud. mosty	
470 $\text{kg}$ cem. na $1 \text{ m}^3$	4.5	4	$\text{kg/cm}^2$	470 $\text{kg}$ cem. na $1 \text{ m}^3$	3.5	3	$\text{kg/cm}^2$
350 „ „ „ „	4.0	4	„	350 „ „ „ „	3.5	3	„
280 „ „ „ „	3.5	3	„	280 „ „ „ „	2.5	2	„
				230 „ „ „ „	2.0	1.5	„

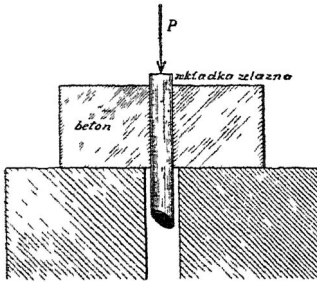
Rosyjskie rozporząd. min. z r. 1911. 6. W częściach zginanych, najwyższe natężenia dopuszczalne... dla betonu... ścinanie betonu 4.5  $\text{kg/cm}^2$ .

W częściach, znoszących silne wstrząśnienia lub gwałtownie zmieniające się siły... należy zmniejszyć natężenie o 10%, w częściach znoszących silne uderzenia... o 20%.

## § 7. Przyczepność do żelaza.

Na tej przyczepności (n. *Haftfestigkeit*, *Gleitwiderstand*, fr. *adhérence du beton*, a. *adhesion*, wł. *resistenza all'adesione*) polega cała teoria, bo tylko wskutek niej działa be-

ton i żelazo, jako jedna belka. Z początku wątpiono o tę wytrzymałość, dopiero Bauschinger otrzymał z doświadczeń, że wytrzymałość ta wynosi  $45 \text{ kg/cm}^2$  na  $1 \text{ cm}^2$  powierzchni. Długi czas uważano tę cyfrę jako stałą. Z dawniejszych doświadczeń wspomniemy tu o doświadczeniach Service français des phares et balises, w których otrzymano przyczepność od 20 do  $48 \text{ kg/cm}^2$ ,



Rys. 6.

zależnie od wielkości przekroju. Nowsze doświadczenia okazały, że przyczepność może być znacznie mniejszą. I tak naprzód doświadczenia (Wayssa i Freytaga) Mörscha, wykonane w r. 1904, jak to wskazuje rys. 6., okazały przeciskaniem żelaza przez beton, że dla betonu 1:4 czterotygodniowego przy dodatku wody 10%, wynosiła przyczepność  $48.8 \text{ kg/cm}^2$ , po zniszczeniu przyczepności pozostałe tarcie wynosiło już tylko  $32.1 \text{ kg/cm}^2$ . Dla innej ilości wody otrzymano przyczepność wedle tabliczki XI.

Tabliczka XI.

Dodatek wody %	Przyczepność $\text{kg/cm}^2$	Tarcie po zniszczeniu przyczepności w $\text{kg/cm}^2$
10	48.8	32.1
12.5	31.2	24.8
15	28.1	23.5

Doświadczenia Bacha, wykonane w Stuttgarcie 1905 r., okazały, że przyczepność zależy w wielkim stopniu od powierzchni pręta, a mianowicie, czy posiada on naskórek, czy też go nie ma. Pręty walcowane mają naskórek czyli wierzchnią warstwę twardszą, i dla nich wyniki są inne niż dla prętów bez naskórka. Dla praktyki to zresztą niema znaczenia, bo używamy zawsze prętów walcowanych z naskórkiem. Ważniejszym jest wpływ długości wkładki na przyczepność. W kilku doświadczeniach Bach otrzymał przyczepność  $K$

przy długości  $l=150 \text{ cm}$ .  $K=18.4, 21.0, 18.4, 18.9, 15.8 \text{ kg/cm}^2$   
 " "  $l=300 \text{ cm}$ .  $K=18.5, 14.5, 17.7, 12.5, 17.2 \text{ kg/cm}^2$

Wpływ ilości wody widzimy w zestawieniu następującem :

Pierwsze doświadczenie	% wody	12	15	18
	$K=$	38·1	24·5	14·9 $kg/cm^2$
Drugie doświadczenie	% wody	13	15	18
	$K=$	32·6	26·4	15·0 $kg/cm^2$

Jeżeli  $l=150\text{ cm}$  a średnica wkładki  $d=10\text{ mm}$ .  $20\text{ mm}$ .  $40\text{ mm}$   
wówczas przyczepność  $K=14·1, 18·5, 27·7\text{ kg/cm}^2$

Meyer otrzymał następujące wyniki:

Tabliczka XII.

Stosunek mieszaniny	Grubość pręta w mm	Opór przeciw przesunięciu w $kg/cm^2$		
		I. pow. pręta obrobionego	II. pow. pręta z naskórkciem	stosunek II/I
1 : 3	25	10·2	49·8	4·88
1 : 4	12	27·7	63·4	2·29
	25	24·0	36·2	1·51
1 : 6	12	15·2	52·1	3·43
	25	(9·36)	(16·0)	1·71
1 : 8	25	12·5	30·0	2·40

Komisja francuska otrzymała  
dla prętów odosobnionych 6 do 29·7  $kg/cm^2$   
" " ze strzemiionami 16 do 39 " "

Doświadczenia Bacha z 1906 wykazały dla betonu  
po 6 miesiącach w belkach zginanych 19·1 do 22·0  $kg/cm^2$   
po 50 dniach 17·9  $kg/cm^2$

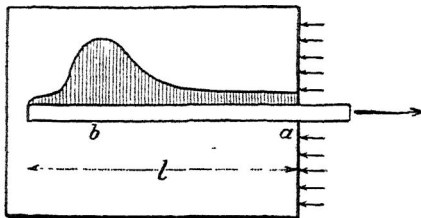
Kirsch badał wpływ powtarzanych natężeń w przyczepności. Dla liczby zmian 50 nie stwierdził żadnego wpływu powtarzanych natężeń na opór przeciw przesunięciu.

Wpływ wielkości i kształtu przekroju widzimy z doświadczeń Bacha, średnio otrzymał on

przekrój	koło	kwadrat	prostokąt
$d=10$	20 40;	$a=20$	4/10 10/40
wytrzymałość	14·1 18·5 27·7;	26·2	22·6 19·6 $kg/cm^2$

Że przyczepność zmniejsza się z długością pręta, zdaje się, że przyczyny należy szukać w nierównym rozdziale natężeń z powodu odkształceń pręta.

Gdy wyciągamy pręt żelazny, to w punkcie  $a$  (rys. 7.) żelazo pracuje na ciągnięcie, a równocześnie beton jest ciśnionym, odkształcenia są więc



Rys. 7.

wprost przeciwne i następuje przesunięcie. Natężenie w żelazie zmniejsza się jednak w dalszym ciągu pręta; tak samo i ciśnienie betonu. Tam gdzie te natężenia są najmniejsze tj. w  $b$ , tam występuje największy opór. Średni opór

przeciw wyciągnięciu będzie więc tem mniejszym, im większe jest  $l$ .

Ponieważ z doświadczeń otrzymano tak różne wyniki, przyjmuje Dr. Emperger jako średnią przyczepność w zginanej belce  $16 \text{ kg/cm}^2$ .

Natężenie dopuszczalne musi być  $n$  razy mniejsze.

Niemiecki Betonverein przyjmuje natężenie dopuszczalne  $K=7.5 \text{ kg/cm}^2$ ; pruskie rozporządzenie zaś  $4.5 \text{ kg/cm}^2$ , tak wielkie, jak na ścinanie.

Takie samo natężenie dopuszcza austr. rozporządzenie kolejowe, francuskie zaś 10% natężenia dopuszczalnego na ciśnienie.

Rozporządzenie austr. minist. z r. 1911 nakazuje przyjmować średnią przyczepność przy zeskładach żelbetowych dla

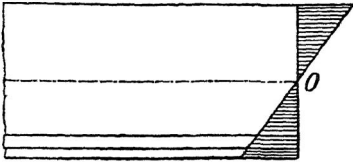
mieszaniny betonu	budown.	mosty
470 $\text{kg}$ na $1 \text{ m}^3$ miesz.	5.5	5.0
340 " " " "	5.0	5.0
280 " " " "	4.5	4.0

Rosyjskie rozporz. minist. z r. 1911 przyjmuje przyczepność  $4.5 \text{ kg/cm}^2$ . W częściach, znoszących silne wstrząśnienie lub gwałtownie zmieniające się siły, o 10%, znoszących silne uderzenie, o 20%.

## § 8. Zasady obliczenia belek żelbetowych na zginanie.

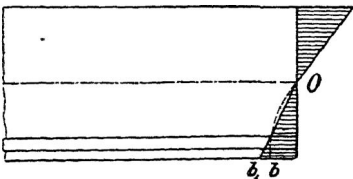
Przy obliczeniu belek żelbetowych na zginanie robimy najpierw założenie, że żelazo i beton są tak ze sobą połączone czy to zapomocą przyczepności, czy też w inny sposób (haki, strzemiona), że się względem siebie nie przesuwają. Doświadczenia okazały, że założenie to jest aż do pewnej granicy prawdziwym. W chwili zaś, gdy nastąpi przesunięcie względne żelaza

i betonu belka przestaje być złożoną, działa zupełnie inaczej i jestto zwykle początkiem złamania belki.



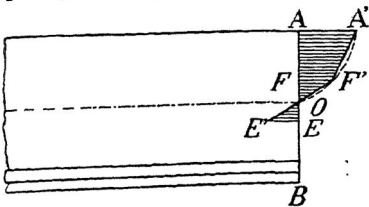
Rys. 8.

Jeżeli belkę żelbetową obciążamy, to dopóki natężenia są małe, możemy przyjąć, że współczynniki sprężystości betonu na ciągnięcie i ciśnienie są równe, a wtedy natężenia są proporcjonalne w betonie do odstępów od osi obojętnej (rys. 8.), jak to pierwszy podał Neumann.



Rys. 9.

Belka znajduje się w fazie I. Dla nieco większych natężeń możnaby uwzględnić zmienność współczynnika sprężystości na ciągnięcie (rys. 9.), otrzymalibyśmy wtedy dla natężeń na



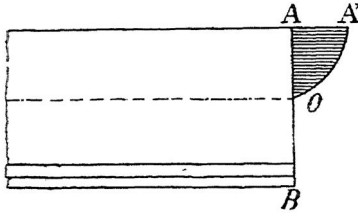
Rys. 10.

ciągnięcie krzywą *ob*, zamiast której Melan przyjmuje prostą *ob*<sub>1</sub>, a zatem przyjmuje on inny współczynnik sprężystości betonu na ciśnienie *E*<sub>ś</sub>, inny na ciągnięcie *E*<sub>z</sub>. Nazwijmy to fazą *Ib*.

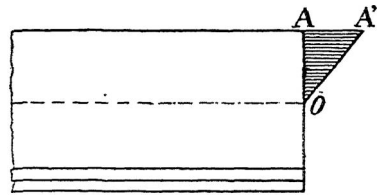
Gdy belkę dalej obciążać będziemy, to ciągnięcie dosięgnie wreszcie współczynnika wytrzymałości, beton pęknie, a wtedy zaczyna się faza II. W tej fazie nie uwzględniamy już ciągnięcia betonu, o ile nastąpiło pęknięcie (rys. 10.). Ponieważ linia ciśnień jest krzywą, dlatego przyjmuję zamiast niej dwie proste *A'F'* i *F'O*, którą przedłużamy do *E'* aż do współczynnika wytrzymałości na ciągnięcie. Considère,

uwzględniając zdolność betonu uzbrojonego do większych od-

kształceń (§ 5.), przyjmuje linię natężeń wedle rys. 9. Nazwiemy to fazą  $\Pi a$ , w przeciwstawieniu do fazy  $\Pi b$ , w której przypuszczamy pęknięcie. Zwykle jednak nie uwzględniamy małych ciągnięć wcale i tak Ritter przyjmuje linię ciśnień paraboliczną,



Rys. 12.

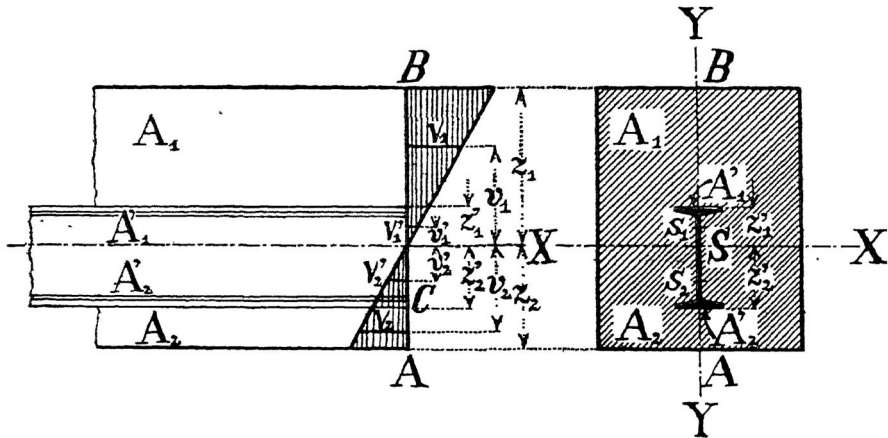


Rys. 13.

(rys. 12.) zaś Christoph i Emperger linię prostą (rys. 13.). Po przekroczeniu granicy płynności żelaza występuje wreszcie faza trzecia i belka się łamie.

### § 9. Faza pierwsza. Belka prostokątna.

Mamy tu do czynienia z belką, złożoną z dwu materiałów, betonu i żelaza, przyczem, jak stwierdziły doświadczenia, przyczepność między tymi materiałami jest dość wielką, aby przeszkodzić przesunięciu wzajemnemu tych materiałów.



Rys. 14.

Na rysunku 14. widzimy belkę betonową o przekroju  $A_1$  i  $A_2$ , wewnątrz której jest wkładka żelazna o przekroju  $A'_1$  i  $A'_2$ .

Niechaj  $XX$  będzie osią obojętną dla obciążenia pionowego, nazwijmy dalej natężenie w betonie  $\nu_1$  i  $\nu_2$  w warstwach odległych od osi obojętnej o  $\nu_1$  i  $\nu_2$ , w żelazie  $\nu'_1$ ,  $\nu'_2$  w odstępach  $\nu'_1$  i  $\nu'_2$ , to ponieważ wydłużenie i skrócenie włókien jest proporcjonalnym do odstępów od osi obojętnej, a natężenie proporcjonalne do współczynników sprężystości, więc jeżeli współczynnik sprężystości betonu nazwiemy  $E_b$  a żelaza  $E_e$ , to

$$\frac{\nu_1}{E_b} = \frac{\nu_1}{r}, \quad \frac{\nu_2}{E_b} = \frac{\nu_2}{r}, \quad \frac{\nu'_1}{E_e} = \frac{\nu'_1}{r}, \quad \frac{\nu'_2}{E_e} = \frac{\nu'_2}{r} \quad \dots \quad (1)$$

jeżeli  $r$  oznacza promień krzywizny.

Suma natężeń normalnych musi być równą zeru, więc

$$-\int_0^{z_1} \nu_1 dA_1 - \int_0^{z'_1} \nu'_1 dA'_1 + \int_0^{z_2} \nu_2 dA_2 + \int_0^{z'_2} \nu'_2 dA'_2 = 0$$

a stąd po wstawieniu wartości z (1)

$$-\varepsilon \int_0^{z_1} \nu_1 dA_1 - \varepsilon' \int_0^{z'_1} \nu_1 dA'_1 + \varepsilon \int_0^{z_2} \nu_2 dA_2 + \varepsilon' \int_0^{z'_2} \nu_2 dA'_2 = 0 \quad (2)$$

Podobnie otrzymamy drugi warunek równowagi

$$M = \frac{E_b}{r} \int_0^{z_1} \nu_1^2 dA_1 + \frac{E_e}{r} \int_0^{z'_1} \nu_1^2 dA'_1 + \frac{E_b}{r} \int_0^{z_2} \nu_2^2 dA_2 + \frac{E_e}{r} \int_0^{z'_2} \nu_2^2 dA'_2 \quad \dots \quad (3)$$

Te same równania otrzymalibyśmy, gdybyśmy, przyjmawszy

$$\frac{E_b}{E_e} = n, \quad \dots \quad (4)$$

uważali przekrój jako jednolity betonowy, powiększyli jednak elementy przekroju wkładki żelaznej „ $n$ ” razy. Obliczamy więc belkę żelbetową w pierwszej fazie tak, jakby była jednolicie betonowa, przyczem jednak elementy przekroju wkładki żelaznej powiększamy „ $n$ ” razy.

## § 10. Belka prostokątna o wkładkach gibkich.

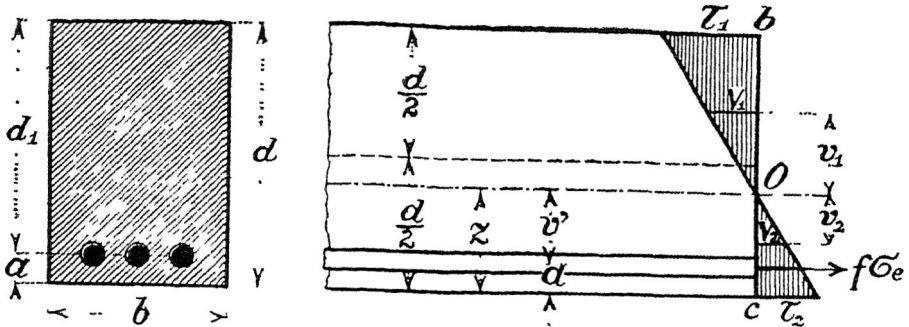
Przypuścimy, że wkładki gibkie umieszczone są tylko po stronie ciągnionej belki. Nazwijmy  $F$  przekrój wkładek żelaznych, a  $t = \frac{F}{b}$  grubość warstwy żelaza, rozdzielonej na całą szerokość, to otrzymamy w pierwszej fazie (rys. 15.):



$$-\frac{\tau_1(d-z)}{2} + \frac{\tau_2 z}{2} + nf \frac{z-a}{2} \tau_2 = 0$$

a że  $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{d-z}{z}$ , więc  $(d-z)^2 + z^2 + 2nf(z-a) = 0$

$$z = \frac{d^2 + 2afn}{2(d+fn)} \dots \dots \dots (5)$$



Rys. 15.

Dalej musi być suma momentów sił zewnętrznych i wewnętrznych równa, więc ze względu na oś obojętną

$$M = \frac{\tau_1(d-z)}{2} \cdot \frac{2}{3} (d-z) + \frac{\tau_2 z}{2} \cdot \frac{2}{3} z + nf \frac{z-a}{2} \tau_2 (z-a),$$

a wstawivszy wartości za  $\tau_1$ ,

$$\frac{3}{\tau_2} M = (d-z)^3 + z^3 + 3nf(z-a)^2.$$

Otrzymamy więc natężenia we włóknach skrajnych  $\tau_1$  (ciśnienie) i  $\tau_2$  (ciągnięcie):

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon z}{r} = \frac{3Mz}{b \{z^3 + (d-z)^3 + 3nf(z-a)^2\}} \dots \dots \dots (6)$$

$$\tau_1 = -\frac{\varepsilon(d-z)}{r} = -\frac{3M(d-z)}{b \{z^3 + (d-z)^3 + 3nf(z-a)^2\}} = -\tau_2 \frac{(d-z)}{z} \dots \dots \dots (7)$$

$$\sigma_e = \frac{\varepsilon(z-a)}{r} = \frac{3M(z-a)n}{b \{z^3 + (d-z)^3 + 3nf(z-a)^2\}} = \tau_2 \frac{z-a}{z} n \dots \dots \dots (8)$$

Moglibyśmy te wzory napisać też inaczej, a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{Mz}{I} \\ \tau_1 &= -\frac{M(d-z)}{I} \\ \sigma_e &= \frac{nM \cdot (z-a)}{I} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{przyczem } I = \frac{b}{3} \left[ z^2 + (d-z)^2 + 3n \frac{F}{b} (z-a^2) \right]. \quad (10)$$

oznacza moment bezwładności przekroju idealnego ze względu na oś ciężkości.

Przykład. Dana płyta żelbetowa o wymiarach:  $d=20 \text{ cm}$ ,  $d_1=17 \text{ cm}$ ,  $a=3 \text{ cm}$ ,  $F=8.55 \text{ cm}^2$  (9 *gf* 11 *mm* na 1 *m* szerokości płyty),  $M=124000 \text{ kgcm}$ . Obliczyć natężenia.

$$\text{Mamy tu } f = \frac{8.55}{100} = 0.0855 \text{ cm}, \quad n = 10.$$

Odległość osi obojętnej według wzoru (5):

$$z = \frac{20^2 + 2 \times 3 \times 0.0855 \times 10}{2(20 + 0.0855 \times 10)} = 9.75 \text{ cm}$$

Według wzoru (10):

$$I = \frac{100}{3} [9.75^3 + (20 - 9.75)^3 + 3 \times 10 \times 0.0855 (9.55 - 3)^2] = 70600 \text{ cm}^4$$

Nakonec natężenia według wzoru (9):

$$\tau_2 = \frac{124000 \times 9.75}{70600} = 17.1 \text{ kg/cm}^2, \quad \tau_1 = -\frac{124000(20 - 9.75)}{70600} = -18 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{10 \times 124000(20 - 3)}{70600} = 298 \text{ kg/cm}^2.$$

Z rysunku 4. widzimy, że  $E_b$  nie jest stałym, lecz dla większych ciśnień zmniejsza się, a zatem przedłużenia względne stają się stosunkowo coraz większe. Możemy zatem dla małych natężeń przyjąć mniej więcej  $E_{bz} = E_{bd} = 210000 \text{ kg/cm}^2$ , a więc gdy dla żelaza zlewnego  $E_e = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ , będzie  $n = \frac{2100000}{210000} = 10$ . Dla większych ciśnień jednak  $E_b$  zmniejsza się, dla drugiej fazy należy więc przyjąć  $n$  większe, o czym później będziemy mówić. W równania (1), (6), (7), (8), dla fazy pierwszej należy więc wstawić  $n=10$ , bo równania te ważne są tylko do czasu wyczerpania wytrzymałości betonu na ciągnięcie, a więc dla małych jeszcze natężeń.

Rozporządzenie pruskie każe w pewnych wypadkach obliczać belki wedle fazy pierwszej i przyjmować  $n=15$ .

## § 11. Belka prostokątna podwójnie uzbrojona.

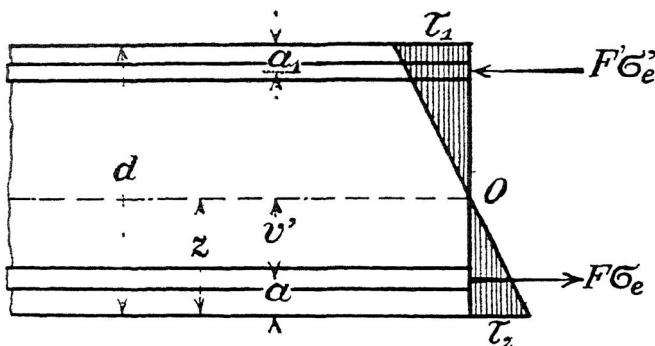
Czasem umieszczamy wkładki żelazne nie tylko w ciągniętej, ale i w ciśnionej części belki. W tym wypadku (rys. 16.) suma natężeń dodatnich ze względu na oś obojętną, równa się sumie natężeń ujemnych. Zatem

$$\frac{b}{2} (d-z) \tau_1 + F' \sigma'_e = \frac{b}{2} z \tau_2 + F \sigma_e, \quad \text{a że}$$

$$\tau_1 : \tau_2 : \sigma'_e : \sigma_e = (d-z) : z : 10(d-z-a_1) : 10(z-a)$$

więc  $b(d-z)^2 + 20 F'(d-z-a_1) = bz^2 + 20 F(z-a)$ .

Stąd otrzymamy  $z = \frac{bd^2 + 20(aF + [d-a_1]F')}{2[bd + 10(F + F')]}$  (11)



Rys. 16.

Dalej otrzymamy

$$I = \frac{b}{3} [z^3 + (d-z)^3] + 10 F(z-a)^2 + 10 F'(d-z-a)^2 \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{Mz}{I}, & \sigma'_e &= \frac{10 M(z-a)}{I} \\ \tau_1 &= -\frac{M(d-z)}{I}, & \sigma_e &= \frac{10 M(d-z-a_1)}{I} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Przykład. Płyta o wymiarach, jak poprzednio, z dodaną wkładką górną, taką samą i w takim samym odstępnie od górnej krawędzi, jak dolna. Należy obliczyć natężenia.

Odległość osi obojętnej według wzoru (11):

$$z = \frac{100 \times 20^2 + 20[3 \times 8.55 + (20-3) \times 8.55]}{2[100 \times 20 + 10(8.55 + 8.55)]} = 10 \text{ cm}$$

Według wzoru (12):

$$= \frac{100}{3} [10^3 + (20-10)^3] + 10 \times 8.55(10-3)^2 + 10 \times 8.55 \times (20-10-3)^2 = 75040 \text{ cm}^4$$

Natężenia według wzoru (13):

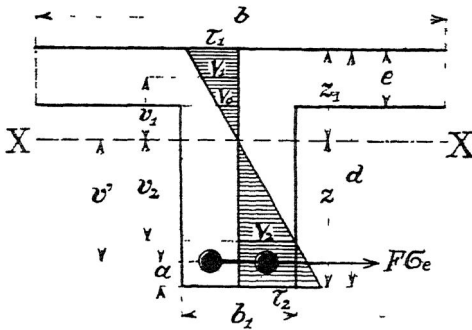
$$\tau_2 = \frac{124000 \times 10}{75040} = 16.5 \text{ kg/cm}^2, \quad \tau_1 = -\frac{124000(20-10)}{75040} = -16.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_e = \frac{10 \times 124000(10-3)}{75040} = 115.5 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_e = \frac{10 \times 124000(20-10-3)}{75040} = 115.5 \text{ kg/cm}^2.$$

## § 12. Belki o przekroju teowym.

Często wzmacniamy płytę żelbetową żebrami, a przez to powiększamy jej wysokość, wkładkę zaś żelazną umieszczamy

w żebrach. Belkę taką nazywamy żebrową lub teową (n. *Rippenplatte, Plattenbalken*). Belka taka jest więc ekonomiczniejszą od płyty lub belki o przekroju prostokątnym, bo materiał jest bardziej oddalony od osi obojętnej, a tę część przekroju, która jako ciągniona w fazie II*b* i tak nie działa, zmniejszamy ile możliwości.



Rys. 17.

Jeżeli chodzi o wzory szczegółowe, to nazwijmy szerokość belki  $b$  (rys. 17.), grubość płyty  $e$ , całą wysokość  $d$ , szerokość żebra  $b_1$ , odstęp osi obojętnej od dolnej krawędzi  $z$ , warstwy żelaznej  $a$ , grubość tej warstwy równomiernie na całą szerokość belki rozłożoną  $f = \frac{F}{b}$ .

Tu musimy rozróżnić dwa wypadki, wedle tego czy oś obojętna przecina płytę czy nie.

a) Oś obojętna nie przecina płyty.

Suma nateżeń poziomych musi być równa zeru, więc

$$\frac{b(x_1 - v_0)e}{2} + \frac{b_1 v_0}{2} (z_1 - e) - \frac{b_1 x_2 z}{2} - F \sigma_e = 0$$

a stąd dla  $n=10$

$$-\frac{b}{2} (d-z)^2 + \frac{b}{2} (d-z-e)^2 - \frac{b_1}{2} (d-z-e)^2 + \frac{b_1}{2} z^2 + 10F(z-a) = 0,$$

więc gdy nazwiemy  $\beta = \frac{b_1}{b}$ , to

$$z = \frac{1}{2} \frac{e(2d-e) + \beta(d-e)^2 + 20af}{e + \beta(d-e) + 10f} \quad (14)$$

Dalej jeśli  $M$  oznacza moment zginający belki, otrzymamy:  $I = \frac{1}{3} b z_1^3 - \frac{1}{3} (z_1 - e)^3 (b - b_1) + \frac{1}{3} b_1 z^3 + 10F(z-a)^2$  . (15)

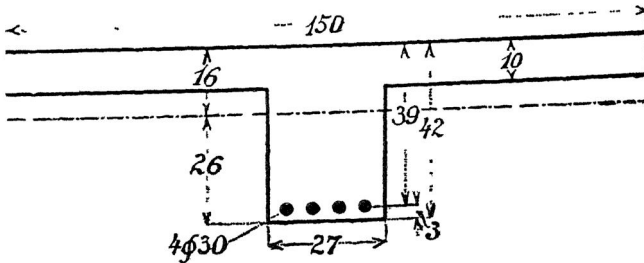
a że  $\tau_2 = \frac{Mz}{I}$ , więc

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{3Mz}{b[z_1^3 - (z_1 - e)^3(1 - \beta) + \beta z^3] + 30 F(z - a)^2} \\ \sigma_1 &= -\frac{3Mz_1}{b[z_1^3 - (z_1 - e)^3(1 - \beta) + \beta z^3] + 30 F(z - a)^2} \\ \sigma_e &= \frac{30M(z - a)}{b[z_1^3 - (z_1 - e)^3(1 - \beta) + \beta z^3] + 30 F(z - a)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (16)$$

Dla wkładki obustronnej otrzymamy podobnie:

$$z = \frac{1}{2} \frac{e(2d - e) + \beta(d - e)^2 + 20[af + (d - a_1)f']}{e + \beta(d - e) + 10(f + f')} \quad (17)$$

$$a) \quad I = \frac{b}{3}(d - z)^3 - \frac{1}{3}(d - z - e)^3(b - b_1) + \frac{1}{3}b_1z^3 + 10[F(z - a)^2 + F'(d - z - a_1)^2] \quad (18)$$



Rys. 18.

Przykład. Dany moment  $M = 800000 \text{ kgcm}$ , wymiary jak na rys. 18. Obliczyć natężenia.

$$F = 28 \cdot 28 \text{ cm}^2 \quad (4 \text{ } \phi \text{ } 30 \text{ mm}), \quad f = \frac{28 \cdot 28}{150} = 0.188, \quad \beta = \frac{27}{150} = 0.186$$

Według wzoru (14):

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{10(2 \times 42 - 10) + 0.186(42 - 10)^2 + 20 \times 3 \times 0.188}{10 + 0.186(42 - 10) + 10 \times 0.188} = 26 \text{ cm}$$

$$z_1 = 42 - 26 = 16 \text{ cm}$$

Natężenia według wzoru (16):

$$\sigma_2 = \frac{3 \times 800000 \times 26}{150[16^3 - (16 - 10)^3(1 - 0.186) + 0.186 \times 26^3] + 30 \times 28 \cdot 28(26 - 3)^2} = 40.8 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{3 \times 800000 \times 16}{150[16^3 - (16 - 10)^3(1 - 0.186) + 0.186 \times 26^3] + 30 \times 28 \cdot 28(26 - 3)^2} = -25 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{30 \times 800000(26 - 3)}{150[16^3 - (16 - 10)^3(1 - 0.186) + 0.186 \times 26^3] + 30 \times 28 \cdot 28(26 - 3)^2} = 361 \text{ kg/cm}^2$$

b) Oś obojętna przecina płytę.

Suma natężeń poziomych równa się zeru, więc

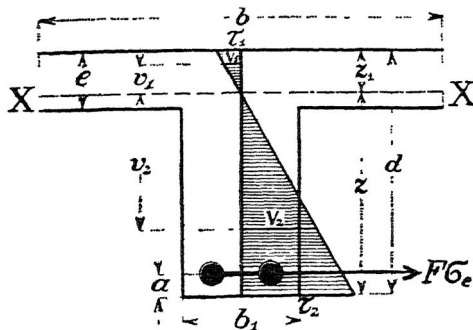
$$-b \int_0^{z_1} \nu_1 d\nu_1 + b \int_0^{e - z_1} \nu_2 d\nu_2 + b_1 \int_{e - z_1}^{d - z_1} \nu_2 d\nu_2 + bf\sigma_e = 0,$$

a stąd

$$-z_1^2 + (e - z_1)^2 + \beta[(d - z_1)^2 - (e - z_1)^2] + 20f(d - z_1 - a) = 0,$$

zatem

$$z_1 = \frac{1}{2} \frac{e^2 + \beta(d^2 - e^2) + 20f(d - a)}{e + \beta(d - e) + 10f} \quad (19)$$



Rys. 19.

Dalej otrzymamy:

$$I = \frac{b}{3} z_1^3 + \frac{b}{3} (e - z_1)^3 + \frac{b_1}{3} [d - z_1]^3 - (e - z_1)^3 + 10F(z - a)^2 \quad (20)$$

a

$$\tau_2 = \frac{Mz}{I}, \quad \tau_1 = \frac{Mz_1}{I}, \quad \sigma_e = \frac{10M(z - a)}{I} \quad (21)$$

Jeżeli we wzorach (14), (15), (16), (19), (20), (21) wstawimy  $b_1 = b$  czyli  $\beta = 1$ , to otrzymamy wzory (5), (6), (7) i (8). Czy oś obojętna przecina płytę, czy nie, należy zawsze najprzód zbadać z równań (14) i (19).

Dla wkładki obustronnej otrzymamy podobnie:

$$z_1 = \frac{1}{2} \frac{e^2 + \beta(d^2 - e^2) + 20[f(d - a) + f'a_1]}{e + \beta[d - e] + 10[f + f']} \quad (22)$$

$$I = \frac{b}{3} z_1^3 + \frac{b}{3} (e - z_1)^3 + \frac{b_1}{3} \left[ (d - z_1)^3 - (e - z_1)^3 \right] + 10\{F(z - a)^2 + F'(z_1 - a_1)^2\} \quad (23)$$

Przykład. Dany moment zgięcia  $M = 250000 \text{ kgcm}$ , przekrój według rysunku 20. Obliczyć nateżenia.

$$F = 13 \cdot 57 \text{ cm}^2 \text{ (} \beta \text{ } 24 \text{ mm)}; \quad f = \frac{13 \cdot 57}{160} = 0 \cdot 085$$

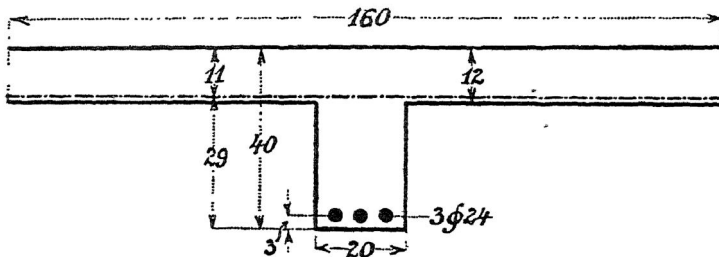
$$\beta = \frac{20}{160} = 0 \cdot 125$$

Odległość osi obojętnej według wzoru (19):

$$z_1 = \frac{1}{2} \frac{12^2 + 0 \cdot 125(40^2 - 12^2) + 20 \times 0 \cdot 085(40 - 3)}{12 + 0 \cdot 125(40 - 12) + 10 \times 0 \cdot 085} = 11 \text{ cm}$$

Moment bezwładności według wzoru (20):

$$I = \frac{160}{3} [11^3 + (12-11)^3] + \frac{20}{3} [(40-11)^3 - (12-11)^3] + 10 \times 13 \cdot 57 (11-3)^2 = 242320 \text{ cm}^4$$



Rys. 20.

A nateżenia podług wzoru (21):

$$\tau_2 = \frac{250000 \times 29}{242320} = 29.9 \text{ kg/cm}^2; \quad \tau_1 = \frac{250000 \times 11}{242320} = 11.3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{10 \times 250000 (29-3)}{242320} = 268 \text{ kg/cm}^2$$

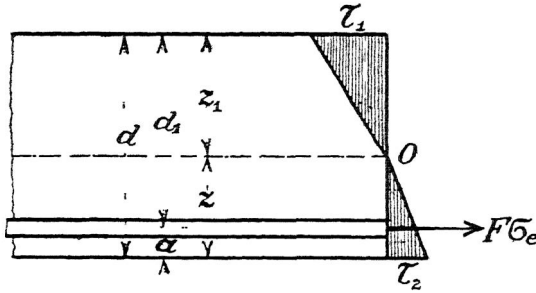
### § 13. Faza Ib, belka prostokątna.

Jeżeli obliczać będziemy nateżenia wedle fazy I, to pokaże się, że ciągnięcia, obliczone w betonie w chwili powstania pierwszych pęknięć, są znacznie większe od współczynnika wytrzymałości na ciągnięcie i wynoszą często  $40 \text{ kg/cm}^2$  i więcej. Aby przy obliczeniu ciągnięć w tej chwili otrzymać nateżenia, zbliżone do współczynnika wytrzymałości na ciągnięcie, nakazuje rozporządzenie austriackie w tych wypadkach, gdy chodzi o niedopuszczenie pęknięć, obliczenie wedle fazy Ib, przyczem należy przyjąć  $n=15$ , a współczynnik sprężystości betonu na ciągnięcie  $E_{bz}=0.4 E_{bd}$ .

Rozporządzenie minister. austr. z 1911 dla budownictwa § 5. ust. 9. Przy takich dźwigarach, które pracują na zginanie, a które narażone są na wpływy atmosfery, na wilgoć, parę, dym albo na gazy, szkodliwe dla żelaza, należy także wykazać największe ciągnięcie betonu, które otrzymujemy dla współczynnika sprężystości betonu na ciągnięcie  $56000 \text{ kg/cm}^2$ , a zresztą dla założeń, podanych w ustępie 8 a i b.

Rozporządzenie minister. austr. z 1911 dla mostów drogowych § 4 ust. d. Przy zeskładach niosących, pracujących na zginanie, należy także udowodnić największe ciągnięcie w betonie, a to przyjmując współczynnik sprężystości betonu na ciągnięcie  $56000 \text{ kg/cm}^2$ , równy 0.4 razy wielkości współczynnika sprężystości (ustęp 7 d).

Wedle założenia otrzymamy (rys. 21.).



Rys. 21.

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{z_1}{0.4(d-z_1)} \quad \text{i} \quad \frac{\tau_1}{\sigma_e} = \frac{z_1}{15[d_1-z_1]}$$

dalej

$$\frac{b \tau_1 z_1}{2} = \frac{b \tau_2 (d_1 - z_1)}{2} + F \sigma_e$$

Wstawiwszy wartości za  $\tau_2$  i  $\sigma_e$ , otrzymamy równanie kwadratowe, a stąd  $z_1 = -A + \sqrt{A^2 + B}$  . . . . . (24)

$$\left. \begin{aligned} \text{przyczem } A &= \frac{0.4 b d + 15 F}{b(1-0.4)} \\ \text{a } B &= \frac{0.4 b d^2 + 30 F d_1}{b(1-0.4)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

Tu chodzi nam tylko o ciągnięcie w betonie  $\tau_2$ ,

$$\text{otrzymamy więc } \tau_2 = \frac{0.4 M (d - z_1)}{I'} \dots \dots \dots (26)$$

$$\text{przyczem } I' = \frac{1}{3} b [z_1^3 + 0.4(d - z_1)^3] + 15 F (d_1 - z_1)^2 \dots \dots (27)$$

Przykład. Dana płyta o wymiarach, jak poprzednio. Zatem  $d = 20 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 17 \text{ cm}$ ,  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $F = 8.55 \text{ cm}^2$ ,  $M = 124000 \text{ kgcm}$ . Obliczyć ciągnięcie w betonie w fazie Ib.

Według wzoru (25):

$$A = \frac{0.4 \times 100 \times 20 + 15 \times 8.55}{100(1-0.4)} = 15.50, \quad B = \frac{0.4 \times 100 \times 20^2 + 30 \times 8.55 \times 17}{100(1-0.4)} = 339$$

$$\text{Według wzoru (24)} \quad z_1 = -15.50 + \sqrt{15.50^2 + 339} = 8.50 \text{ cm}$$

Według (27) jest moment bezwładności:

$$I' = \frac{1}{3} 100 \{8.50^3 + 0.4(20 - 8.50)^3\} + 15 \times 8.55(17 - 8.50)^2 = 49960 \text{ cm}^4,$$

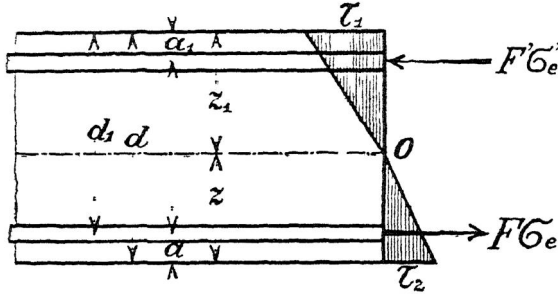
a ciągnięcie w betonie podług (26):

$$\tau_2 = \frac{0.4 \times 124000(20 - 8.50)}{49960} = 11.4 \text{ kg/cm}^2$$



## § 14. Belka prostokątna obustronnie wzmocniona, faza Ib.

Dla warunku pierwszego: suma natężeń = 0 (rys. 22.) mamy:



Rys. 22.

$$\frac{b}{2} \tau_1 z_1 + F'_e \cdot \sigma'_e = \frac{b}{2} (d - z_1) \tau_2 + F \sigma_e$$

Dalej mamy:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{z_1}{0.4(d - z_1)}, \quad \frac{\tau_1}{\sigma_e} = \frac{z_1}{15(d_1 - z_1)}, \quad \frac{\tau_1}{\sigma'_e} = \frac{z_1}{15(z_1 - a_1)}$$

Jeżeli w poprzednie równanie wstawimy wartości za  $\tau_1$ ,  $\sigma_e$  i  $\sigma'_e$ , otrzymamy równanie kwadratowe, a stąd

$$z_1 = -A_1 + \sqrt{A_1^2 + B_1} \quad \dots \quad (28)$$

$$\text{jeżeli } A_1 = \frac{0.4bd\bar{d} + 15(F + F')}{b(1 - 0.4)}, \quad B_1 = \frac{0.4bd^2 + 30(Fd_1 + Fa_1)}{b(1 - 0.4)} \quad (29)$$

$$\text{Dalej mamy } \tau_2 = \frac{0.4M(d - z_1)}{I_1} \quad \dots \quad (30)$$

$$\text{przyczem } I_1 = \frac{1}{3} b [z_1^3 + 0.4(d - z_1)^3] + 15F(d_1 - z_1)^2 + 15F'(z_1 - a_1)^2 \quad \dots \quad (31)$$

Przykład. Płyta o wymiarach, jak poprzednio, z dodaną wkładką górną o przekroju równym przekrojowi wkładki dolnej i w takim odstępie od krawędzi górnej, jak wkładka dolna. Należy obliczyć ciągnięcie w betonie.

Według wzoru (29):

$$A_1 = \frac{0.4 \times 100 \times 20 + 15(8.55 + 8.55)}{100(1 - 0.4)} = 17.6,$$

$$B_1 = \frac{0.4 \times 100 \times 20^2 + 30(8.55 \times 17 + 8.55 \times 3)}{100(1 - 0.4)} = 352$$

Według wzoru (28):  $z_1 = -17.6 + \sqrt{17.6^2 + 352} = 8.20 \text{ cm.}$

Według (31):

$$I_1 = \frac{1}{3} 100 \{ 8 \cdot 20^3 + 0 \cdot 4 (30 - 8 \cdot 20)^3 \} + 15 \times 8 \cdot 55 (17 - 8 \cdot 20)^2 + 15 \times 8 \cdot 55 (8 \cdot 2 - 3)^2 =$$

$$= 53780 \text{ cm}^4,$$

ciągnięcie w betonie podług (30):

$$\tau_2 = \frac{0 \cdot 4 \times 124000 (20 - 8 \cdot 20)}{53780} = 10 \cdot 9 \text{ kg/cm}^2$$

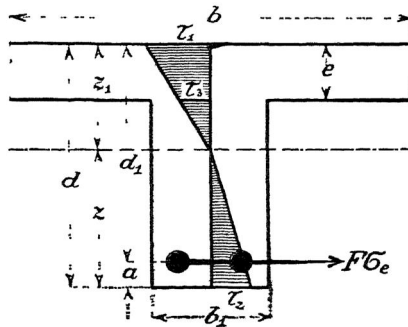
### § 15. Belka teowa, faza Ib.

Tu znowu rozróżnić musimy dwa wypadki.

a) Oś obojętna nie przecina płyty.

Z rys. 23. otrzymamy:

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{z_1 - e}{z_1}, \quad \sigma_e = 15 \frac{d - z_1 - a}{z_1} \tau_1, \quad \tau_2 = 0 \cdot 4 \tau_1 \frac{d - z_1}{z_1}$$



Rys. 23.

Dla pierwszego warunku równowagi otrzymamy:

$$\frac{1}{2} b z_1^2 - \frac{1}{2} (b - b_1) (z_1 - e)^2 = 15 F (d_1 - z_1)^2 + 0 \cdot 4 \frac{1}{2} b_1 (d - z_1)^2,$$

a stąd:

$$z_1 = -A_2 + \sqrt{A_2^2 + B_2} \quad \dots \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{0 \cdot 4 b_1 d + (b - b_1) e + 15 F}{(1 - 0 \cdot 4) b} \\ B_2 &= \frac{0 \cdot 4 b_1 d^2 + (b - b_1) e^2 + 30 F d_1}{(1 - 0 \cdot 4) b} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (33)$$

$$\text{Dalej mamy } \tau_2 = \frac{0 \cdot 4 M (d - z_1)}{I_2} \quad \dots \quad (34)$$

przyczem

$$I_2 = \frac{1}{3} [b z_1^3 - (b - b_1) (z_2 - e)^3 + 0 \cdot 4 b (d - z_1)^3] + 15 F (d_1 - z_1)^2 \quad (35)$$

Przykład: Dane:  $b=150$  cm,  $b_1=27$  cm,  $d=42$  cm,  $d_1=39$  cm,  $e=10$  cm,  $F=28 \cdot 28$  cm<sup>2</sup> (4  $\phi$  30 mm),  $M=800000$  kgcm. Obliczyć ciągnięcie w betonie.

$$\text{Podług wzoru (33) jest: } A_2 = \frac{0.4 \times 27 \times 42 + (150 - 27)10 + 15 \times 28 \cdot 28}{(1 - 0.4)150} = 22.3$$

$$B_2 = \frac{0.4 \times 27 \times 42^2 + (150 - 27)10^2 + 30 \times 28 \cdot 28 \times 39}{(1 - 0.4)150} = 716$$

Według (32) jest:  $z_1 = -22.3 + \sqrt{22.3^2 + 716} = 12.5$  cm

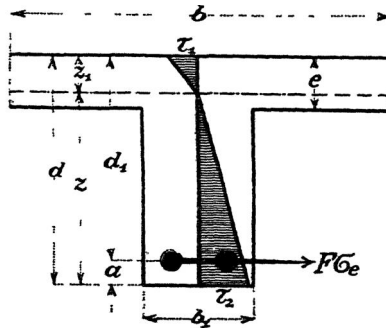
$$\text{Według (35): } I_3 = \frac{1}{3} [150 \times 12.5^3 - (150 - 27)(12.5 - 10)^3 + 0.4 \times \\ \times 150(42 - 12.5)^3] + 15 \times 28 \cdot 28(39 - 12.5)^2 = 908030 \text{ cm}^4.$$

Nakoniec ciągnięcie w betonie według wzoru (34):

$$\tau_2 = \frac{0.4 \times 800000(42 - 12.5)}{908030} = 10.4 \text{ kg/cm}^2$$

b) Oś obojętna przecina płytę.

Moment statyczny powierzchni idealnej ze względu na oś obojętną równa się zeru, więc (rys. 24.)



Rys. 24.

$$\frac{bz_1^2}{2} = 15F(d_1 - z_1)^2 + \frac{0.4b_1(d_1 - z_1)^2}{2} + \frac{0.4(b - b_1)(e - z)^2}{2}$$

Stąd otrzymamy  $z_1 = -A_3 \sqrt{A_3^2 + B_3}$  . . . . . (36)

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= \frac{0.4[b_1 d + (b - b_1)e] + 15F}{(1 - 0.4)b}, \\ B_3 &= \frac{0.4[b_1 d^2 + (b - b_1)e^2] + 30Fd_1}{(1 - 0.4)b} \end{aligned} \right\} \text{ . . . . . (37)}$$

Dalej otrzymamy  $\tau_2 = \frac{0.4M(d - z_1)}{I_3}$  . . . . . (38)

$$I_3 = \frac{1}{3} [bz_1^3 + 0.4b_1(d - z_1)^3 + 0.4(b - b_1)(e - z_1)^3] + \\ + 15F(d_1 - z_1)^2 \text{ . . . . . (39)}$$

Przykład. Dane:  $b=160$  cm,  $b_1=20$  cm,  $d=40$  cm,  $d_1=37$  cm,  $e=12$  cm,  $F=13\cdot57$  cm<sup>2</sup> (3  $\phi$  24 mm),  $M=250000$  kgcm. Obliczyć ciągnięcie w betonie.

$$\text{Według wzoru (37): } A_3 = \frac{0\cdot4[20 \times 40 + (160 - 20)12] + 15 \times 13\cdot57}{(1 - 0\cdot4)160} = 12\cdot48$$

$$B_3 = \frac{0\cdot4[20 \times 40^2 + (160 - 20)12^2] + 30 \times 13\cdot57 \times 37}{(1 - 0\cdot4)160} = 374$$

$$\text{Według (36): } z_1 = -12\cdot48 + \sqrt{12\cdot48^2 + 374} = 10\cdot52 \text{ cm.}$$

Moment bezwładności według (39):

$$I_3 = \frac{1}{3} [160 \times 10\cdot52^3 + 0\cdot4 \times 20(40 - 10\cdot52)^3 + 0\cdot4(160 - 20)(12 - 10\cdot52)^3] + \\ + 15 \times 13\cdot57(37 - 10\cdot52)^2 = 273510 \text{ cm}^4.$$

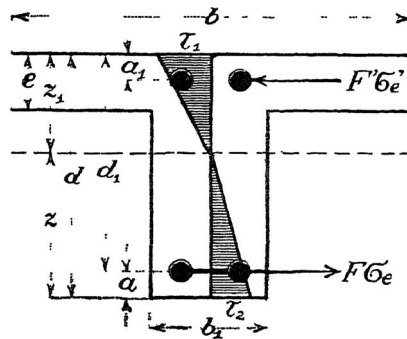
Ciągnięcie w betonie według wzoru (38):

$$\tau_2 = \frac{0\cdot4 \times 250000(40 - 10\cdot52)}{273510} = 10\cdot8 \text{ kg/cm}^2$$

### § 16. Belka teowa obustronnie uzbrojona.

a) Oś obojętna nie przecina płyty.

Tu otrzymamy podobnie dla odstępów osi obojętnej (rys. 25.).



Rys. 25.

$$\frac{1}{2} b z_1^2 - \frac{1}{2} (b - b_1)(z_1 - e)^2 + 15 F'(z_1 - a_1) = 15 F(d_1 - z_1)^2 + \\ + 0\cdot4 \frac{1}{2} b_1(d - z_1)^2$$

a stąd

$$z_1 = -A_4 + \sqrt{A_4^2 + B_4} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} A_4 &= \frac{0\cdot4 b_1 d + (b - b_1)e + 15(F + F')}{0\cdot6 b} \\ B_4 &= \frac{0\cdot4 b_1 d^2 + (b - b_1)e^2 + 30(F d_1 + F' a_1)}{0\cdot6 b} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\text{Wreszcie } \tau_2 = \frac{0.4M(\bar{d}z_1 - 1)}{I_4} \quad (42)$$

$$I_4 = \frac{1}{3} [bz_1^3 - (b-b_1)(z_1 - e)^3 + 0.4b_1(\bar{d} - z_1)^3] + 15[F(\bar{d}_1 - z_1)^2 + F''(z_1 - a_1)^2] \quad (43)$$

Przykład. Dane:  $b=150\text{ cm}$ ,  $b_1=27\text{ cm}$ ,  $\bar{d}=42\text{ cm}$ ,  $\bar{d}_1=39\text{ cm}$ ,  $e=10\text{ cm}$ ,  $F=F''=28.28\text{ cm}^2$  (4 g 30 mm),  $a=a_1=3\text{ cm}$ ,  $M=800000\text{ kgcm}$ .

Należy obliczyć natężenie w betonie na ciągnięcie.

Podług wzoru (41) jest:

$$A_4 = \frac{0.4 \times 27 \times 42 + (150 - 27)10 + 15(28.28 + 28.28)}{0.6 \times 150} = 28$$

$$B_4 = \frac{0.4 \times 27 \times 42^2 + (150 - 27)10^2 + 30(28.28 \times 39 + 28.28 \times 3)}{0.6 \times 150} = 722$$

Według (40):  $z_1 = -28 + \sqrt{28^2 + 722} = 10.8\text{ cm}$ .

Moment bezwładności według (43):

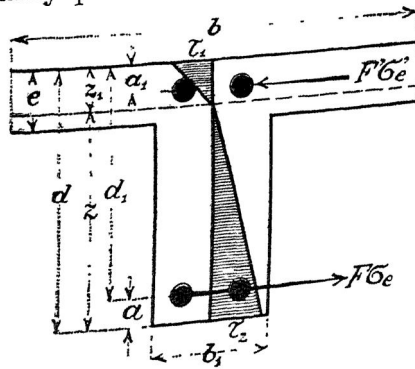
$$I_4 = \frac{1}{3} [150 \times 10.8^3 - (150 - 27)(10.8 - 10)^3 + 0.4 \times 27(42 - 10.8)^3] + 15[28.28(39 - 10.8)^2 + 28.28(10.8 - 3)^2] = 535950\text{ cm}^4.$$

Ciągnięcie w betonie według wzoru (42):

$$\tau_2 = \frac{0.4 \times 800000(42 - 10.8)}{535950} = 17.4\text{ kg/cm}^2.$$

b) Oś obojętna przecina płytę.

Tu otrzymamy podobnie (rys. 26.)



Rys. 26.

$$\frac{bz_1^2}{2} + 15F''(z_1 - a_1) = 15F(\bar{d}_1 - z_1) + \frac{0.4b_1(\bar{d}_1 - z_1)^2}{2} + \frac{0.4(b - b_1)(e - z_1)^2}{2} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{a stąd } z_1 &= -A_5 + \sqrt{A_5^2 + B_5} \\ A_5 &= \frac{0.4[b_1\bar{d}_1 + (b - b_1)e] + 15(F + F'')}{0.6b} \\ B_5 &= \frac{0.4[b_1\bar{d}_1^2 + (b - b_1)e^2] + 30(F\bar{d}_1 + F''a_1)}{0.6b} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\text{Wreszcie } \tau_2 = \frac{0.4 M(d-z_1)}{I_5} \dots \dots \dots (46)$$

$$I_5 = \frac{1}{3} [b z_1^3 + 0.4 b_1 (d - z_1)^3 + 0.4 (b - b_1) (e - z_1)^3] + \\ + 15 [F (d_1 - z_1)^2 + F' (z_1 - a_1)^2] \dots \dots \dots (47)$$

Przykład. Dane:  $b=160$  cm,  $b_1=20$  cm,  $d=40$  cm,  $d_1=37$  cm,  $e=12$  cm,  $F=F'=13.57$  cm<sup>2</sup>,  $a=a_1=3$  cm,  $M=250000$  kgcm. Obliczyć ciągnięcie w betonie.

Według wzoru (45):

$$A_5 = \frac{0.4 [20 \times 40 + (160 - 20) 12] + 15 (13.57 + 13.57)}{0.6 \times 160} = 14.6$$

$$B_5 = \frac{0.4 [20 \times 40^2 + (160 - 20) 12^2] + 30 (13.57 \times 37 + 13.57 \times 3)}{0.6 \times 160} = 387$$

Odległość osi obojętnej według (44):

$$z_1 = -14.6 + \sqrt{14.6^2 + 387} = 9.9 \text{ cm.}$$

Według (47):

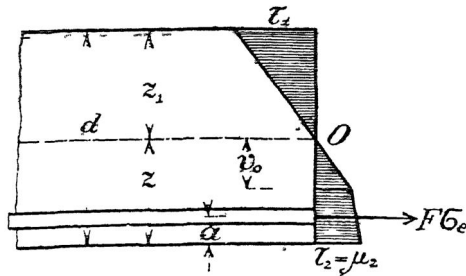
$$I_5 = \frac{1}{3} [160 \times 9.9^3 + 0.4 \times 20 (40 - 9.9)^3 + 0.4 (160 - 20) (12 - 9.9)^3] + \\ + 15 [13.57 (37 - 9.9)^2 + 13.57 (9.9 - 3)^2] = 288410 \text{ cm}^4.$$

Ciągnięcie w betonie podług wzoru (46):

$$\tau_2 = \frac{0.4 \times 250000 (40 - 9.9)}{288410} = 10.6 \text{ kg/cm}^2.$$

## § 17. Faza IIa.

Faza ta ma obecnie chyba historyczną wartość, od kiedy się przekonano, że doświadczenia Considère'a, które stwierdzały, że beton uzbrojony żelazem nie pęka, osiągnąwszy spójczynnik wytrzymałości na ciągnięcie, ale rozciąga się dalej, a natężenie



Rys. 27.

wtedy nie wzrasta, — nie były zupełnie pewne. Obliczenie natężeń w tej fazie jest dość trudnym, bo tutaj  $\tau_2 = \mu_2$  stałe (rys. 27.), zaś  $v_0$  zmienne. Powołując się na mój artykuł: Beitrag zur Berechnung der Monierplatten [Zeitschr. d. östr. Ing. Arch. Vereines 1903 str. 13.] podam tu tylko wyniki.

Otrzymujemy mianowicie dla  $n=10$  i  $f=\frac{F}{b}$

$$z=d+v_0+10f-\sqrt{(d+v_0+10f)^2-(20af+d^2+v_0^2)} \quad (48)$$

W tym wzorze  $v_0$  jest niewiadomem i zmiennem. Dalej mamy

$$\tau_1=\frac{M(d-z)}{I_6}, \quad \tau_2=\mu_2=\frac{Mv_0}{I_6}, \quad \sigma_e=\frac{10M(z-a)}{I_6} \quad (49)$$

$$\text{zaś} \quad I_6=\frac{b}{3}\left[(d-z)^3-\frac{v_0^3}{z}+\frac{3}{2}v_0z^2\right]+10F(z-a)^2 \quad (50)$$

Jeżeli  $\mu_2$  jest wiadomem, n. p.  $\mu_2=12\frac{kg}{cm^2}$ , to z równań (48), (49), (50) dadzą się  $z$  i  $v_0$  obliczyć. Trzeba wstawiać wartości za  $z$  lub  $v_0$  i dopiero po kilku próbach można natężenia obliczyć.

Przykład. Dana jest płyta Moniera 100cm długa, 60cm szeroka a 4.5cm gruba. Uzbrojenie stanowi 7 wkładek  $\phi$  6mm; zatem:

Moment  $M=14640 kgcm$ .

$$f=7 \cdot \frac{0.6^2 \cdot \pi}{60 \cdot 4} = 0.033 cm, \quad a=1.3 cm.$$

Przyjmijmy n. p.  $v_0=0.20 cm$ , to według (48):

$$z=4.5+0.20+0.033 \cdot 10 - \sqrt{(4.5+0.20+0.33)^2 - (20 \cdot 1.3 \cdot 0.033 + 4.5^2 + 0.2^2)} = 3.0 cm$$

następnie z wzoru (50):

$$I_6 = \frac{60}{3} \left[ (4.5-3.0)^3 - \frac{0.2^3}{2} + \frac{3}{2} \cdot 0.20 \cdot 3.0^2 \right] + 10 \cdot 1.98 [3.0-1.3]^2 = 178.6 cm^4,$$

$$\text{więc z (49)} \quad \mu_2 = \frac{14640 \cdot 0.20}{178.6} = 16.4 kg/cm^2 > 12 kg/cm^2.$$

Przyjmijmy teraz  $v_0=0.15 cm$ , to:

$$z=4.5+0.15+0.033 \cdot 10 - \sqrt{(4.5+0.15+0.33)^2 - (20 \cdot 1.3 \cdot 0.033 + 4.5^2 + 0.15^2)} = 3.07 cm$$

$$I_6 = \frac{60}{3} \left[ (4.5-3.07)^3 - \frac{0.15^3}{2} + \frac{3}{2} \cdot 0.15 \cdot 3.07^2 \right] + 10 \cdot 1.98 [3.07-1.3]^2 = 163 cm^4,$$

więc  $\mu_2 = \frac{14640 \cdot 0.15}{163} = 13.5 kg/cm^2$ . Wartość ta niewiele się różni od 12, więc

ostatnie wartości na  $v_0$ ,  $z$ ,  $I_6$  i  $\mu_2$  możemy uważać za wystarczająco dokładne i obliczyć natężenia  $\tau_1$  i  $\sigma_e$  z wzorów (49):

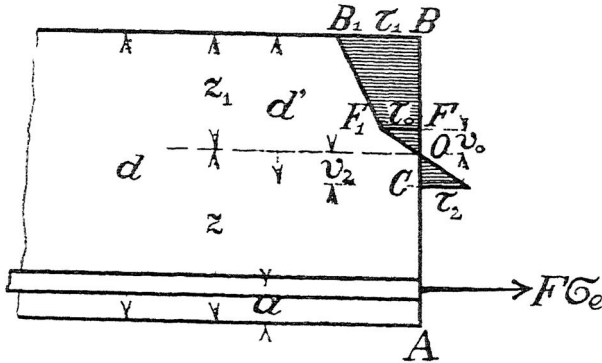
$$\tau_1 = \frac{14640(4.5-3.07)}{163} = 128 kg/cm^2$$

$$\sigma_e = \frac{10 \cdot 14640(3.07-1.3)}{163} = 1590 kg/cm^2$$

## § 18. Faza II b.

W § 8. mówiliśmy o rozmaitych założeniach co do kształtu linii natężeń. Teraz przyjmujemy, że beton już pękł, że zatem w betonie niema wcale ciągnięć albo tylko bardzo małe.

Obecnie ogólnie przyjmuje się linię nateżeń prostą, chociaż wiemy, że w ten sposób otrzymamy ciśnienie liczebne w betonie większe, niż rzeczywiste. Nim jednak wyprowadzimy wzory na podstawie tego przypuszczenia, zastanowimy się nad założeniem linii łamanej nateżeń, więcej zbliżeniem do rzeczywistości.



Rys. 28.

Z rys. 28. otrzymamy  $\frac{E}{r} = \frac{\tau_2}{v_2} = \frac{\tau_0}{v_0} = \frac{\sigma_e}{n(z-a)}$  <sup>1)</sup>

Na długości  $FB$  zaś  $\sigma_1 = \frac{E}{r} [v_0 + \alpha(v_1 - v_0)] = \frac{E}{r} v_0(1-\alpha) + \frac{E}{r} \alpha v_1$ .

Suma nateżeń ma być równa zero, więc

$$-b \int_0^{v_2} \sigma_2 dv_2 + b \int_0^{v_0} \sigma_1 dv_1 + b \int_{v_0}^{z_1} \frac{E}{r} [v_0(1-\alpha) + \alpha v_1] dv_1 - nF \frac{(z-a)}{r} = 0,$$

a stąd

$$-\frac{v_2^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} + v_0(1-\alpha)(z_1 - v_0) + \frac{\alpha}{2} (z_1^2 - v_0^2) - \frac{nF}{b} (z-a) = 0.$$

Opuściwszy bardzo małe wyrazy  $\frac{v_0^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} - \frac{\alpha v_0^2}{2}$ , otrzymamy

$$2v_0(1-\alpha)(z_1 - v_0) + \alpha z_1^2 - \frac{2nF}{b} (d - z_1 - \alpha) = 0$$

a jeżeli  $v_0 = \beta z_1$  a  $2\beta(1-\alpha)(1-\beta) + \alpha = \gamma$ , to

$$z_1 = -\frac{Fn}{b\gamma} + \sqrt{\frac{Fn}{b\gamma} \left[ \frac{Fn}{b\gamma} + 2(d-a) \right]}. \quad (51)$$

<sup>1)</sup> Por. artykuł autora: Ueber die Berechnung der Monierplatte. Zeit. d. osterr. Ing. u. Arch. Vereines 1897 Nr. 13 i Podr. Stat. Budow. II. wyd. str. 229.



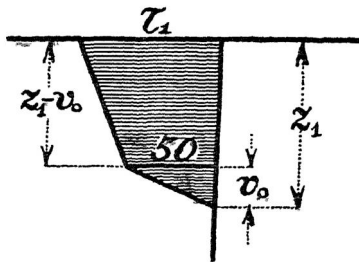
W przybliżeniu możemy przyjąć  $\alpha = \frac{1}{2}$  a  $v_0 = 50 \text{ kg/cm}^2$ ,  
wtedy (rys. 29.)

$$\tau_1 = 50 + \frac{1}{2} \frac{z_1 - v_0}{v_0} \cdot 50 = 50 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{z_1 - v_0}{v_0} \right],$$

$$v_0 \frac{z_1}{50} - v_0 = \frac{1}{2} [z_1 - v_0], \text{ a że } v_0 = \beta z_1, \text{ więc}$$

$$2z_1\beta \left( \frac{z_1}{50} - 1 \right) = z_1(1 - \beta), \text{ stąd}$$

$$\beta = \frac{25}{z_1 - 25} \dots \dots \dots (52)$$



Rys. 29.

Moment sił zewnętrznych równa się sumie momentów sił wewnętrznych, więc

$$M = \frac{Eb}{r} \int_0^{v_0} v_1^2 dv_1 + \frac{Eb}{r} v_0(1 - \alpha) \int_{v_0}^{z_1} v_1 dv_1 + \alpha \frac{Eb}{r} \int_{v_0}^{z_1} v_1^2 dv_1 +$$

$$+ \frac{Eb}{r} \int_0^{v_2} v_2^2 dv_2 + n \cdot F(d - z_1 - a)^2.$$

Po opuszczeniu małych wartości  $v_0^3$  i  $v_2^3$  otrzymamy

$$M = \frac{Eb}{3r} \left( \alpha z_1^3 + \frac{3}{2} v_0(1 - \alpha) z_1^2 \right) + nF(d - z_1 - a)^2.$$

Wstawmy  $v_0 = \beta z_1$  i nazwijmy  $\delta = \alpha + \frac{3}{2} \beta(1 - \alpha)$ , to

$$M = \frac{Eb}{3r} \delta z_1^3 + nF(d - z_1 - a)^2.$$

Jeżeli  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0.2$ , to  $\delta = 0.65$ , a gdy  $n = 10$ , to

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{0.18 M z_1}{0.65 b z_1^3 + 30 F (d - z_1 - a)^2} \\ \tau_1 &= 25 + \frac{1.5 M z_1}{0.65 b z_1^3 + 30 F (d - z_1 - a)^2} \\ \sigma_e &= \frac{30 M (d - z_1 - a)}{0.65 b z_1^3 + 30 F (d - z_1 - a)} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Dla rozmaitych  $\tau_1$  obliczyliśmy z (52)  $\beta$ , a potem  $\gamma$  i  $\delta$  i otrzymaliśmy następującą tabliczkę:

Tabliczka XIII.

$\tau_1$ w $kg/cm^2$	50	75	100	125	150	200	225
$\beta$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$
$\gamma$	1	0.75	0.72	0.69	0.67	0.62	0.60
$\delta$	1	0.87	0.75	0.69	0.65	0.61	0.58

Wzory więc (53) są tylko ważne dla  $\tau_1 = 150 kg/cm^2$ , dla innych  $\tau_1$  otrzymujemy tak współczynnik  $\frac{n}{\gamma}$  w (51), jak i współczynnik  $\delta$  w (53) inny, a mianowicie:

Tabliczka XIV.

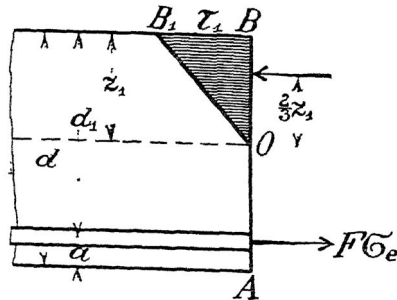
$\tau_1$	50	75	100	125	150	200	250
$\frac{n}{\gamma}$ w rów. (51)	10	13.33	13.85	14.5	15	16.1	16.67
$\delta$ w rów. (53)	1	0.87	0.75	0.89	0.65	0.61	0.58

Jeżeli więc chcemy jakąś belkę obliczyć dla kilku obciążeń, to musimy dla każdego obciążenia przyjąć inny wzór i to spróbować parę razy, dopóki nie otrzymamy wyników zadawalniających. Prócz tego istnieje jeszcze ta niepewność, że przyjęliśmy  $\alpha = \frac{1}{2}$ , a ono zależy od nachylenia linii nateżeń (rys. 28.), a ponieważ mamy mało doświadczeń co do  $\alpha$ , przeto

$\alpha$  może być w rzeczywistości większem lub mniejszem niż  $\frac{1}{2}$ , zatem wzory powyższe się zmieniają. Widzimy więc, że wzory te nie nadają się wprost do praktyki, lecz mają tylko teoretyczne znaczenie.

### § 19. Sposób przybliżony Christopha, Empergera i Wuczowskiego.

Christophe i Emperger przyjmują jako linię nateżeń jedną prostą, a to dla średniego  $n=15=\frac{10+20}{2}$ . Zasadę tę przyjęto w rozporządzeniu pruskiego ministerstwa, w zasadach obliczenia niemieckiego Betonvereinu, w rozporządzeniu austriackiem, francuskim i rosyjskim, tak że obecnie liczymy w praktyce prawie wyłącznie wedle tego założenia.



Rys. 30.

Dla przekroju  $AB$  (rys. 30.) jest najprzód suma nateżeń równa zeru. Więć

$$\frac{b\tau_1 z_1}{2} = F\sigma_e, \text{ a że}$$

$$\sigma_e = 15 \frac{d_1 - z_1}{z_1} \tau_1, \text{ więc}$$

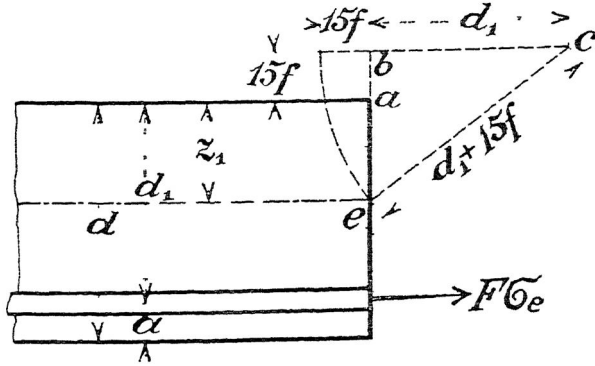
$$\frac{b\tau_1 z_1}{2} = 15F \frac{d_1 - z_1}{z_1} \tau_1, \text{ a stąd}$$

$$z_1 = -\frac{15F}{b} + \sqrt{\frac{15F}{b} \left( \frac{15F}{b} + 2d_1 \right)} \quad \dots \quad (54)$$

Możemy to jeszcze inaczej wyrazić, jak w pruskiem rozporządzeniu, mianowicie

$$z_1 = \frac{15F}{b} \left[ \sqrt{1 + \frac{2bd_1}{15F}} - 1 \right] \quad \dots \quad (55)$$

Christophe podaje konstrukcję wykresłą wyznaczenia położenia osi obojętnej, a mianowicie naznaczoną w rys. 31. Na przedłużeniu przekroju  $ae$  odcinamy  $ab=15f=15\frac{F}{b}$ , następnie kreślimy poziomą i odcinamy na lewo od punktu  $b$   $15f$  i  $bc=$



Rys. 31.

$=d_1$ , zataczamy dalej promieniem  $cr=15f+d_1$  łuk aż do przecięcia się z pionową  $ae$ . Punkt  $e$  jest punktem linii obojętnej. Mamy bowiem  $ec^2=d_1^2+be^2$  czyli  $(d_1+15f)^2=d_1^2+(ae+15f)^2$ , zatem

$$ae=15f+\sqrt{15f(15f+2d_1)}=z_1$$

Drugim warunkiem równowagi jest, że suma momentów równa się zeru. Więc

$$M = \frac{b\tau_1 z_1}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) = F\sigma_e \left[ d_1 - \frac{z_1}{3} \right], \text{ stąd} \quad (56)$$

$$\tau_1 = \frac{2M}{bz_1 \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)} \text{ i } \sigma_e = \frac{M}{F \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)}$$

Są to wzory Christopa i Empergera.

Wychodząc z wzoru zasadniczego  $\tau = \frac{Me}{I}$ , otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{Mz_1}{\frac{b}{3} z_1^3 + 15F(d_1 - z_1)^2} = \frac{3Mz_1}{bz_1^3 + 45F(d_1 - z_1)^2} \\ \sigma_e &= \frac{45M(d_1 - z_1)}{bz_1^3 + 45F(d_1 - z_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

wzory, które ustawiłem w rozprawie mej w Zeitsch. des Ing. und Arch. Vereines 1896 Nr. 24.

Przykład. Dana płyta o wymiarach jak poprzednio. Zatem  $d=20\text{ cm}$ ,  $d_1=17\text{ cm}$ ,  $a=3\text{ cm}$ ,  $F=855\text{ cm}^2$ .  $M=124000\text{ kgem}$ . Obliczyć natężenia.

Zę wzorów Christopha i Empergera otrzymujemy:

$$z \text{ (55)} \quad z_1 = \frac{15 \cdot 855}{100} \left[ \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100 \cdot 17}{15 \cdot 855}} - 1 \right] = 5.45 \text{ cm}$$

$$z \text{ (56)} \quad \tau_1 = \frac{2 \cdot 124000}{100 \cdot 5.45 \left( 17 - \frac{5.45}{3} \right)} = 29.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{124000}{8.55 \left( 17 - \frac{5.45}{3} \right)} = 956 \text{ kg/cm}^2:$$

z równania (57):

$$\tau_1 = \frac{3 \cdot 124000 \cdot 5.45}{100 \cdot 5.45^3 + 45 \cdot 8.55(17 - 5.45)^2} = 29.8 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{45 \cdot 124000 \cdot (17 - 5.45)}{100 \cdot 5.45^3 + 45 \cdot 8.55(17 - 5.45)^2} = 955 \text{ kg/cm}^2.$$

Nazwijmy z W u c z k o w s k i m

$$v = \frac{\sigma_e}{\tau_1} = \frac{15(d_1 - z_1)}{z_1} \quad \dots \quad (58)$$

to stąd 
$$z_1 = \frac{15}{15 + v} d_1 \quad \dots \quad (59)$$

Dla danego stosunku natężeń  $v$  dane jest położenie osi obrotowej, bo

$$F\sigma_e = \frac{bz_1}{2} \quad \tau_1 = \frac{bz_1}{2} \frac{15}{15 + v} d_1, \text{ więc jeżeli } F = \frac{p \cdot bd_1}{100} \quad \dots \quad (60)$$

gdy  $p$  oznacza procent uzbrojenia, to  $\frac{pb d_1 v}{100} = \frac{b d_1}{2} \frac{15}{15 + v}$ , a stąd

$$p = \frac{750}{v(15 + v)} \quad \dots \quad (61)$$

i 
$$v = -7.5 + \sqrt{56.25 + \frac{750}{p}} \quad \dots \quad (62)$$

Jeżeli nazwiemy ramię momentu wewnętrzznego  $m = d_1 - \frac{z_1}{3}$ ,

to 
$$m = \frac{v + 10}{v + 15} d_1, \text{ zatem}$$

$$\sigma_e = \frac{M}{mF} = \frac{M(v + 15)}{(v + 10)d_1 F} \quad \dots \quad (63)$$

$$\tau_1 = \frac{\sigma_e}{v} \quad \dots \quad (64)$$

$$M = \sigma_e \frac{b}{100} \frac{p(v + 10)}{v + 15} d_1^2 \quad \dots \quad (65)$$

Wuczkowski<sup>1)</sup> ustawia tabliczkę XV. dla  $b=100\text{ cm}$ ,  $\sigma_e=1000\text{ kg/cm}^2$ .

Tabliczka XV.

$\tau_1$ w $\text{kg/cm}^2$	45	40	35	30	25	20	15
$v = \frac{\sigma_e}{\tau_1}$	22.2	25	28.5	33.3	40	50	66.6
$M =$	787	658	533	418	310	214	$129 \cdot d_1^2$
$p\%$	0.93	0.75	0.61	0.47	0.34	0.23	0.14

Przykład: Dana płyta o wymiarach jak poprzednio, a więc  $d=20\text{ cm}$ ,  $d_1=17\text{ cm}$ ,  $a=3\text{ cm}$ ,  $F=8.55\text{ cm}^2$ ,  $M=124000\text{ kgcm}$ . Obliczyć natężenia.

$$\text{Procent uzbrojenia z równ. (60)} \quad p = \frac{100 \cdot F'}{b \cdot d_1} = \frac{100 \cdot 8.55}{100 \cdot 17} = 0.503\%$$

z równ. (62)  $v = -7.5 + \sqrt{56.25 + \frac{750}{0.503}} = 31.8$ , czyli natężenie w żelazie z równania (63):

$$\sigma_e = \frac{124000(31.8 + 15)}{(31.8 + 10) \cdot 17 \cdot 8.55} = 954\text{ kg/cm}^2,$$

natężenie zaś w betonie z równ. (64):

$$\tau_1 = \frac{954}{31.8} = 30\text{ kg/cm}^2$$

## § 20. Belka obustronnie uzbrojona.

Żelazo w ciśnionej części nie może być wyzyskanem, bo  $n=15$ , więc przypuściwszy nawet  $\tau_1=40\text{ kg/cm}^2$ , to najwyżej będzie  $\sigma_e'=15 \times 40=600\text{ kg/cm}^2$ . Pomimo tego niezupełnego wyzyskania żelaza może być całkowita ilość żelaza znacznie mniejszą tak, że w niektórych wypadkach ekonomiczniej jest używać belek podwójnie uzbrojonych, jak o tem później obszerniej pomówimy.

Jeżeli więc mamy belkę obustronnie uzbrojoną (rys. 32), to otrzymamy dla warunku pierwszego, że suma natężeń ma

być równa zeru:  $\frac{b\tau_1 z_1}{2} + F'\sigma_e' = F\sigma_e$ , a że

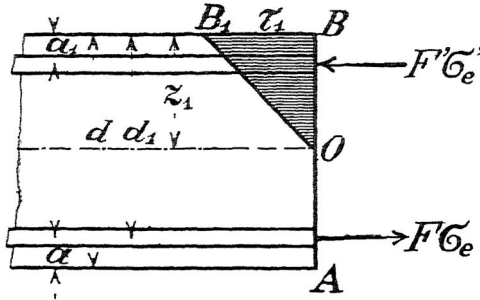
$$\sigma_e = 15 \frac{d_1 - z_1}{z_1} \tau_1 \quad \text{i} \quad \sigma_e' = 15 \frac{z_1 - a_1}{z_1} \tau_1, \quad \text{więc}$$

$$\frac{b\tau_1 z_1}{2} + 15F' \frac{z_1 - a_1}{z_1} \tau_1 = 15F \frac{d_1 - z_1}{z_1} \tau_1, \quad \text{skąd}$$

<sup>1)</sup> Pör. Rich. Wuczkowski: Eisenbetonkonstruktionen bei Biegung und bei exzentrisch wirkenden Druck — oder Zugkräften. Tab. I. str. 5.

$$z_1 = \frac{15(F+F')}{b} + \sqrt{\left(\frac{15[F+F']}{b} + 2 \frac{Fd_1 + F'a_1}{F+F'}\right) \frac{15[F+F']}{b}} \quad (66)$$

$$\text{lub też } z_1 = \frac{15(F+F')}{b} \left\{ -1 + \sqrt{1 + 2b \frac{Fd_1 + F'a_1}{15(F+F')^2}} \right\} \quad (67)$$



Rys. 32.

Z warunku drugiego, że suma momentów równa się zeru, otrzymamy:

$$z_1 I = M z_1, \text{ a moment bezwładności } I = \frac{1}{3} b z_1^3 + 15 F' (z_1 - a_1)^2 + 15 F (d_1 - z_1)^2 \quad (68)$$

Jeżeli we wzorach 66. i 67. wstawimy  $F' = 0$ , otrzymamy wzory 54. i 55.

Saliger otrzymał wzory te w nieco innym kształcie, albowiem tworzy on moment ze względu na dolną wkładkę i otrzymuje:

$$M = \frac{b \tau_1 z_1}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) + F' \sigma_e' (d_1 - a_1) = \frac{b \tau_1 z_1}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) + 15 F' \frac{z_1 - a_1}{z_1} \tau_1 (d_1 - a_1) \text{ stąd}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{6 M z_1}{b z_1^2 (3 d_1 - z_1) + 90 F' (z_1 - a_1) (d_1 - a_1)} \\ \sigma_e &= \frac{90 M (d_1 - z_1)}{b z_1^2 (3 d_1 - z_1) + 90 F' (z_1 - a_1) (d_1 - a_1)} \\ \sigma_e' &= \frac{90 M (z_1 - a_1)}{b z_1^2 (3 d_1 - z_1) + 90 F' (z_1 - a_1) (d_1 - a_1)} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Przykład: Płyta o wymiarach, jak poprzednio, z dodaną wkładką górną, taką samą i w takim samym odstępnie od górnej krawędzi, jak dolna. Obliczyć natężenia.

Położenie osi obojętnej otrzymamy z wzoru (67):

$$z_1 = \frac{15(8.55 + 8.55)}{100} \left[ -1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 100 \cdot \frac{8.55 \cdot 17 + 8.55 \cdot 3}{15(8.55 + 8.55)^2}} \right] = 5.02 \text{ cm},$$

natężenia zaś w betonie w wkładce dolnej i górnej z wzorów (69), mianowicie:

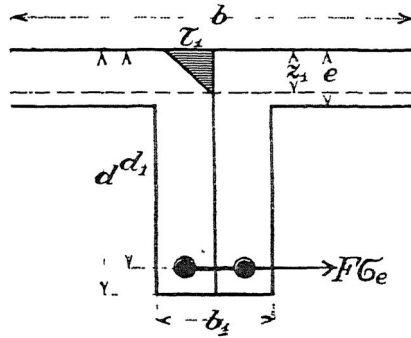
$$\tau_1 = \frac{6 \cdot 124000 \cdot 5.02}{100 \cdot 5.02^2 (3 \cdot 17.0 - 5.02) + 90 \cdot 8.55 (5.02 - 3.0) (17.0 - 3.0)} = 27.1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{90 \cdot 124000 (17 - 5.02)}{100 \cdot 5.02^2 (3 \cdot 17.0 - 5.02) + 90 \cdot 8.55 (5.02 - 3.0) (17.0 - 3.0)} = 972 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_c' = \frac{90 \cdot 124000 (5.02 - 3.0)}{100 \cdot 5.02^2 (3 \cdot 17.0 - 5.02) + 90 \cdot 8.55 (5.02 - 3.0) (17.0 - 3.0)} = 163.2 \text{ kg/cm}^2$$

### § 21. Belka o przekroju teowym, faza II b.

Jeżeli oś obojętna leży w płycie, więc  $z_1 < e$  (rys. 33.), to jest rzeczą obojętną, czy belka ma żebro, czy też jest pełna o grubości  $d$ , bo i tak nie uwzględniamy części betonowej poniżej osi obojętnej. Należy więc stosować wzory 54 do 57.



Rys. 33.

Czy oś obojętna przechodzi przez płytę, można się przekonać z wzoru (59)  $z_1 = \frac{15}{15+v} d$ , przy czym  $v$  należy wyznaczyć z wzoru (62) albo też z wzorów (54) lub (55).

Przykład: Daną belkę przekroju T o wymiarach  $b=150 \text{ cm}$ ,  $b_1=30 \text{ cm}$ ,  $d=66 \text{ cm}$ ,  $d_1=60 \text{ cm}$ ,  $e=20 \text{ cm}$ ,  $F_e=49.28 \text{ cm}^2$  (8  $\phi$  28 mm) zbadać ze względu na natężenia przy  $M=2000000 \text{ kgcm}$ .

Ze wzoru (55) otrzymujemy:

$$z_1 = \frac{15 \cdot 49.28}{150} \left[ \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 150 \cdot 60}{15 \cdot 49.28}} - 1 \right] = 19.85 \text{ cm}$$

ze wzorów (56) zaś:

$$\tau_1 = \frac{2 \cdot 2000,000}{150 \cdot 19.85 \left( 60 - \frac{19.85}{3} \right)} = 25.2 \text{ kg/cm}^2$$



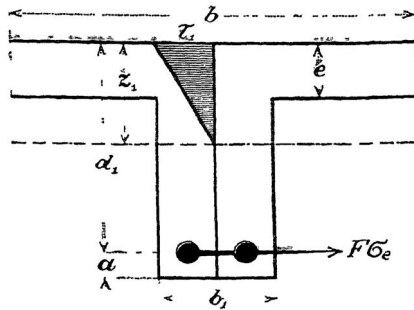
$$\sigma_e = \frac{2000000}{49 \cdot 28 \left( 60 - \frac{19 \cdot 85}{3} \right)} = 760 \cdot 0 \text{ kg/cm}^2$$

Jeżeli oś obojętna wychodzi po za płytę i przecina żebro (rys. 34.), to musimy uwzględnić ciśnienie w żebrze o mniejszej szerokości  $b_1$ . Nazwijmy  $\frac{b_1}{b} = k$ , to dla osi obojętnej sumy momentów statycznych musi być równa zero, zatem

$$\frac{bz_1^2}{2} - \frac{b-b_1}{2} (z_1 - e)^2 = 15 F(d_1 - z_1)$$

a stąd

$$z_1 = -\frac{(b-b_1)e + 15F}{b_1} + \sqrt{\left( \frac{(b-b_1)e + 15F}{b_1} \right)^2 + \frac{(b-b_1)e^2 + 30Fd_1}{b_1}} \quad (7)$$



Rys. 34.

Dalej otrzymamy  $\tau_1 = \frac{Mz_1}{I_1}$  i  $\sigma_e = \frac{15M(d_1 - z_1)}{I_1}$  . . . (7)

$$I_1 = \frac{1}{3} b z_1^3 - \frac{1}{3} (b-b_1)(z_1 - e)^3 + 15 F(d_1 - z_1)^2 \quad (7)$$

Dla  $b=b_1$  otrzymamy stąd wzory (54) i (57).

Przykład: Daną belkę przekroju T o wymiarach  $b=150 \text{ cm}$ ,  $b_1=27 \text{ cm}$ ,  $d_1=42 \text{ cm}$ ,  $e=10 \text{ cm}$ ,  $F=28 \cdot 28 \text{ cm}^2$  (4  $\phi$  30 mm) zbadać ze względu na napężenia przy  $M=800000 \text{ kgcm}$ .

Położenie osi obojętnej wyznaczymy z równ. (70):

$$z_1 = -\frac{(150-27) \cdot 10 + 15 \cdot 28 \cdot 28}{27} + \sqrt{\left\{ \frac{(150-27) \cdot 10 + 15 \cdot 28 \cdot 28}{27} \right\}^2 + \frac{(150-27) \cdot 10^2 + 30 \cdot 28 \cdot 28 \cdot 39}{27}} = 12 \cdot 5 \text{ cm},$$

$$z(72) I_1 = \frac{1}{3} \cdot 150 \cdot 12 \cdot 5^3 - \frac{1}{3} (150-27)(12 \cdot 5 - 10)^3 + 15 \cdot 28 \cdot 28 (39 - 12 \cdot 5)^2 = 395000 \text{ cm}^4$$

a z rów. (71):

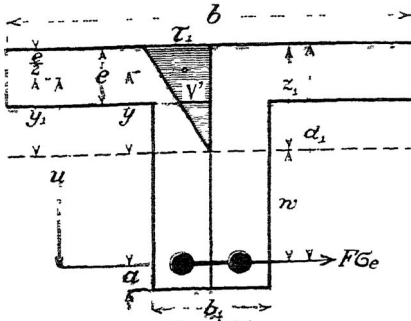
$$\tau_1 = \frac{800000 \cdot 12 \cdot 5}{395000} = 25 \cdot 3 \text{ kg/cm}^2 \text{ i } \sigma_e = \frac{15 \cdot 800000 (39 - 12 \cdot 5)}{395000} = 805 \text{ kg/cm}^2.$$

## § 22. Sposób przybliżony wyznaczenia nateżeń.

Rozporządzenie pruskie przyjmuje sposób przybliżony wyznaczenia nateżeń, opuszczając wpływ bardzo małych nateżeń w żebrze, przez co wzory stają się prostsze. Z rysunku 35<sup>1)</sup> mamy:

$$\nu' : \tau_1 = (z_1 - e) : z_1, \text{ zatem}$$

$$\nu' = \tau_1 \frac{z_1 - e}{z_1}.$$



Rys. 35.

A że suma sił ma być równa zero, więc

$$\frac{b\tau_1 z_1}{2} - \frac{b\nu'(z_1 - e)}{2} = F\sigma_e, \quad \frac{b\tau_1 z_1}{2} - \frac{b\tau_1(z_1 - e)^2}{2z_1} = F\sigma_e$$

$$\frac{b\tau_1 e}{2z_1} (2z_1 - e) = F\sigma_e = \frac{15F(d_1 - z_1)}{z_1} \tau_1, \text{ a stąd}$$

$$z_1 = \frac{be^2 + 30Fd_1}{2(be + 15F)} \quad \dots \quad (73)$$

Wyznamy teraz odstęp środka ciężkości trapezu  $y$ , a mianowicie:

$$z_1 - y = \frac{e}{3} \frac{\tau_1 + 2\nu'}{\tau_1 + \nu'} = \frac{e}{3} \frac{\tau_1 + 2\tau_1 \frac{z_1 - e}{z_1}}{\tau_1 + \tau_1 \frac{z_1 - e}{z_1}}, \text{ czyli}$$

$$z_1 - y = \frac{e}{3} \frac{3z_1 - 2e}{2z_1 - e}, \text{ stąd}$$

$$y = z_1 - \frac{e}{3} \frac{3z_1 - 2e}{2z_1 - e} = z_1 - \frac{e}{2} + \frac{e^2}{6(2z_1 - e)} \quad \dots \quad (74)$$

Dalej mamy

$$\sigma_e = \frac{M}{F(d_1 - z_1 + y)}, \quad \tau_1 = \frac{\sigma_e z_1}{15(d_1 - z_1)} = \frac{M z_1}{15F(d_1 - z_1)(d_1 - z_1 + y)} \quad (75)$$

<sup>1)</sup> Na rys. 35 zakreskowano przez pomyłkę część powierzchni nateżeń, leżącą w żebrze.

Przykład: Przeliczyć zagadnienie poprzednie sposobem przybliżonym.

Z rów. (73) otrzymujemy:

$$z_1 = \frac{150 \cdot 10^2 + 30 \cdot 28 \cdot 28 \cdot 39}{2(150 \cdot 10 + 15 \cdot 28 \cdot 28)} = 12 \cdot 49 \text{ cm, z rów. (74):}$$

$$y = 12 \cdot 49 - \frac{10}{2} + \frac{10^2}{6(2 \cdot 12 \cdot 49 - 10)} = 8 \cdot 6 \text{ cm, a z wzorów (75)}$$

$$\sigma_e = \frac{800000}{28 \cdot 28(39 - 12 \cdot 49 + 8 \cdot 6)} = 806 \text{ kg/cm}^2, \text{ i}$$

$$\tau_1 = \frac{806}{15} \cdot \frac{12 \cdot 49}{39 - 12 \cdot 49} = 25 \cdot 3 \text{ kg/cm}^2.$$

Wuczkowski podaje jeszcze inny sposób przybliżony obliczenia w razie, jeżeli  $z_1 > e$ .

Suma momentów statycznych ze względu na oś obojętną jest równa zero, więc

$$15 F w = b e y_1, \text{ a że } w = u - y_1, \text{ więc}$$

$$15 F(u - y_1) = b e y_1.$$

Jeżeli nazwiemy  $\varphi$  procent uzbrojenia, odnoszący się do powierzchni płyty, czyli  $F = \frac{\varphi b e}{100}$ . . . . . (76)

$$y_1 = \frac{15 F u}{b e + 15 F} = \frac{15 \varphi u}{100 + 15 \varphi}, \text{ a}$$

$$z_1 = y_1 + \frac{e}{2} = \frac{15 \varphi u}{100 + 15 \varphi} + \frac{e}{2} . . . . . (77)$$

Wyznaczywszy środek ciśnienia, jak przedtem, otrzymamy

$$m = d_1 - z_1 + y = d_1 - \frac{e}{3} \frac{3z_1 - 2e}{2z_1 - e} . . . . . (78)$$

$$\text{a } \sigma_e = \frac{M}{m F} \text{ i } \tau_1 = \frac{\sigma_z}{v} . . . . . (79)$$

przyczem  $v = 15 w$ .

Przykład: Przeliczyć poprzednie zagadnienie sposobem Wuczkowskiego. Ponieważ wiemy z poprzedniego przykładu, że oś obojętna nie przecina płyty, więc obliczamy odrazu z rów. (76)  $\varphi = \frac{28 \cdot 28 \cdot 100}{150 \cdot 10} = 1 \cdot 89\%$

$$\text{dalej z rów. (77) } z_1 = \frac{15 \cdot 1 \cdot 89 \cdot 34}{100 + 15 \cdot 1 \cdot 89} + \frac{10}{2} = 12 \cdot 48 \text{ cm,}$$

$$\text{przyczem } u = d_1 - \frac{e}{2} = 39 - \frac{10}{2} = 34 \text{ cm,}$$

$$\text{z (78) } m = 39 - \frac{10}{3} \cdot \frac{3 \cdot 12 \cdot 48 - 2 \cdot 10}{2 \cdot 12 \cdot 48 - 10} = 35 \cdot 02 \text{ cm,}$$

$$\text{a z wzorów (79)} \quad \sigma_e = \frac{800000}{35 \cdot 02 \cdot 28 \cdot 28} = 808 \text{ kg/cm}^2,$$

$$v = \frac{15 \cdot 26 \cdot 52}{12 \cdot 48} = 31 \cdot 25 \quad \text{a} \quad \tau_1 = \frac{808}{31 \cdot 85} = 25 \cdot 4 \text{ kg/cm}^2$$

Wuczkowski oblicza na tej podstawie tablicę dla  $\sigma_e = 1000$ , przyczem  $k_2 = \frac{M_{100}}{e^2}$

Tabliczka XVI.

$\frac{d_1}{e} = k_1$	$\tau_1 =$	15	20	30	40
2.0	$k_2$	510	900	1700	2600
	$\varphi$	0.27	0.46	0.91	1.48
3.0	$k_2$	1150	1900	3750	5800
	$\varphi$	0.41	0.69	1.37	2.21
4.0	$k_2$	2050	3400	6350	9500
	$\varphi$	0.55	0.92	1.78	2.67
5.0	$k_2$	3200	5150	9250	13300
	$\varphi$	0.69	1.13	2.03	2.93
6.0	$k_2$	4600	7050	12175	17150
	$\varphi$	0.82	1.26	2.19	3.11
7.0	$k_2$	6050	9000	15125	21125
	$\varphi$	0.91	1.37	2.30	3.24
8.0	$k_2$	7500	10900	18050	25100
	$\varphi$	0.98	1.45	2.39	3.33
9.0	$k_2$	8975	12875	20975	29100
	$\varphi$	1.03	1.51	2.45	3.41
10.0	$k_2$	10450	14800	23900	33000
	$\varphi$	1.08	1.55	2.51	3.46

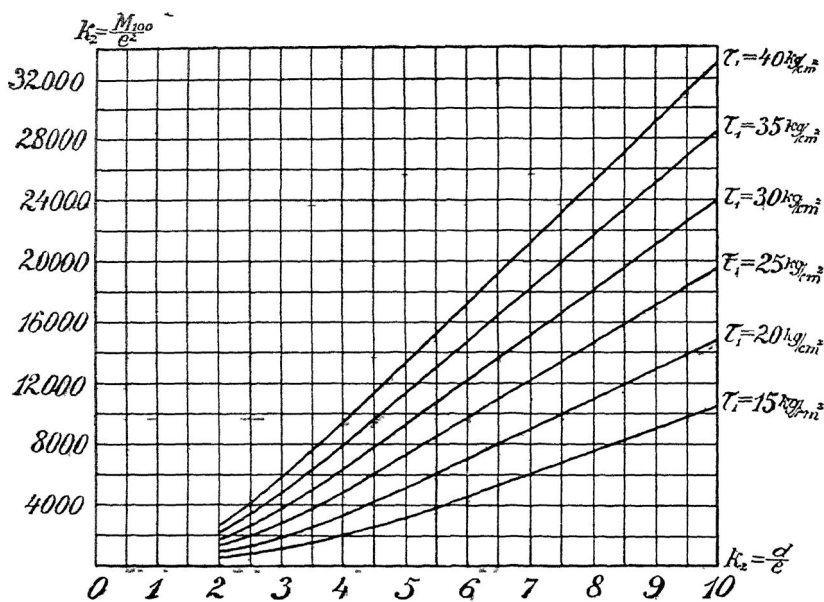
Tabliczka ta da się przedstawić też wykresnie (rys. 36a i 36b).  
Przykład: Zbadać tę samą belkę przy pomocy tablic Wuczkowskiego.

Dla belki tej mamy  $k_1^1) = \frac{d_1}{e} = \frac{39}{10} = 3.9$ , a procent uzbrojenia  $\varphi =$

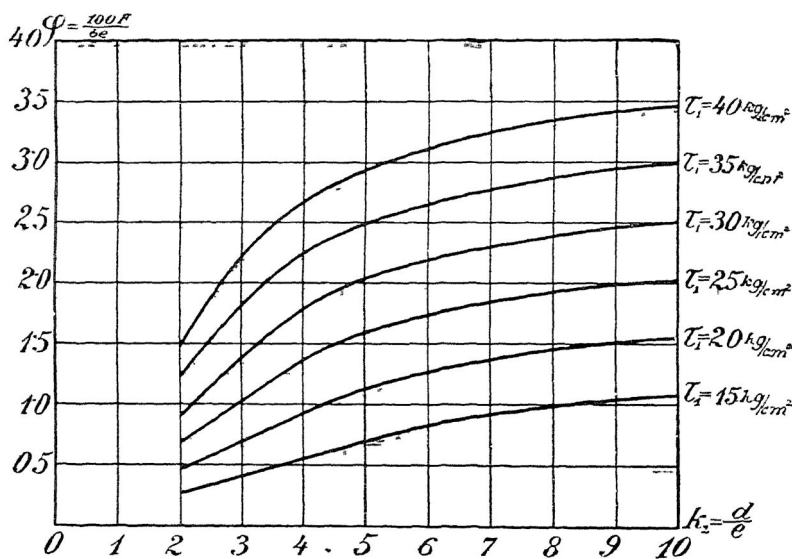
1) W rysunkach 36a i 36b czytaj na osi odciętych  $k_1 = \frac{d_1}{e}$  zamiast

$$k_2 = \frac{d}{e}.$$

$= \frac{100 \cdot 28 \cdot 28}{150 \cdot 10} = 1.89\%$ . Dla tych wartości odczytamy z rysunku 36 a odpowiadające  $\tau_1 = 32 \text{ kg/cm}^2$ , a na podstawie tego z rys. 36 a wartość  $k_2 = 6500$ .



Rys. 36 a.



Rys. 36 b.

Natężenie w żelazie jest więc  $\sigma_e = \frac{800000 \cdot 1000 \cdot 100}{150 \cdot 6500 \cdot 10^2} = 820 \text{ kg/cm}^2$ , a rzeczywiste ciśnienie w betonie:

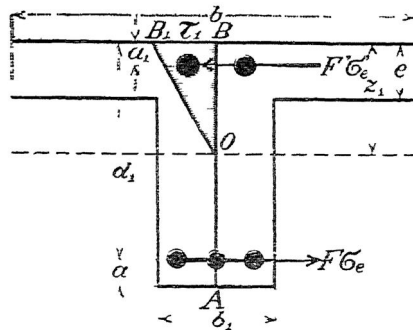
$$\tau_1' = \frac{\tau_1}{1000} \cdot \sigma_e = \frac{82}{1000} \cdot 820 = 26.2 \text{ kg/cm}^2.$$

Te przybliżone obliczenia dają natężenia w betonie i żelazie prawie takie same, jak obliczone sposobem dokładnym. W budownictwie lądowym różnice są tak małe, że można używać zawsze równań przybliżonych (73) i (75), w budowie mostów jednak lepiej liczyć dokładnie według wzorów (70), (71) i (72).

### § 23. Belka teowa obustronnie uzbrojona.

Jeżeli  $z_1$  jest mniejsze od  $e$ , to belkę teową obliczamy jako prostokątną. Dla  $z_1$  większego od  $e$  (rys. 37.) otrzymamy dla osi obojętnej sumę momentów statycznych równą zeru, zatem

$$\frac{b_1(z_1 - e)^2}{2} + b \frac{z_1^2 - (z_1 - e)^2}{2} + 15F'(z_1 - a_1) = 15F(d_1 - z_1)$$



Rys 37.

zatem

$$b_1 z_1^2 + 2z_1 e(b - b_1) + 30F'z_1 - 30F'a_1 + 30Fz_1 - 30Fd_1 - e^2(b - b_1) = 0$$

$$z_1 = \frac{e(b - b_1) + 15(F + F')}{b_1} + \sqrt{\left(\frac{e(b - b_1) + 15(F + F')}{b_1}\right)^2 + \frac{e^2(b - b_1) + 30(Fd_1 - F'a_1)}{b_1}} \quad (80)$$

Ciśnienie w betonie wyznaczmy z równań

$$\tau_1 = \frac{Mz_1}{I_2} \quad \text{i} \quad \sigma_e = \frac{15M(d_1 - z_1)}{I_2} \quad \dots \quad (81)$$

przyczem

$$I_2 = \frac{1}{3} b z_1^3 - \frac{1}{3} (b - b_1)(z_1 - e)^3 + 15F(d_1 - z_1)^2 + 15F'(z_1 - a_1)^2 \quad (82)$$

Przykład: Dana belka T o wymiarach (jak na str. 44.):  $b=150\text{ cm}$ ,  $b_1=27\text{ cm}$ ,  $d=42\text{ cm}$ ,  $d_1=39\text{ cm}$ ,  $e=10\text{ cm}$ ,  $F=F'=28\cdot 28\text{ cm}^2$  (4  $\varnothing$  30 mm),  $a=a_1=3\text{ cm}$ ,  $M=800000\text{ kgcm}$ . Obliczyć ciśnienie w betonie i ciągnięcie w żelazie.

Podług (80):

$$z_1 = -\frac{10(150-27)+15(28\cdot 28+28\cdot 28)}{27} + \sqrt{\left(\frac{10(150-27)+15(28\cdot 28+28\cdot 28)}{27}\right)^2 + \frac{10^2(150-27)+30(28\cdot 28\times 39-28\cdot 28\times 3)}{27}} = 9\cdot 5\text{ cm},$$

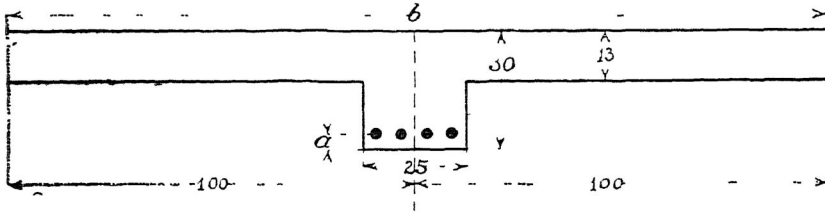
Podług (82):

$$I_2 = \frac{1}{8} 150 \times 9\cdot 5^3 - (150-27)(9\cdot 5-10)^3 + 15[28\cdot 28(39-9\cdot 5)^2 + 28\cdot 28(9\cdot 5-3)^2] = 429800\text{ cm}^4, \text{ a natężenie podług (81):}$$

$$\tau_1 = \frac{800000 \times 17\cdot 7}{542600} = 17\cdot 7\text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_e = \frac{15 \times 800000(39-17\cdot 7)}{542600} = 825\text{ kg/cm}^2.$$

## § 24. Współdziałanie płyty.

Pytanie teraz zachodzi, o ile płyta współdziała z żebrem. Gdyby ugięcie płyty i belki było jednakowe, to płyta tworzyłaby z belką jedną całość. W rzeczywistości płyta ugina się także, ale nieco mniej, jak to okazały doświadczenia Bacha. Oprócz tego powstaje między płytą a żebrem znaczna siła ścinająca, z tego powodu należy w tem miejscu wzmocnić belkę wkładkami żelaznymi poprzecznymi. Aby zbadać, o ile rozmaite założenia co do współdziałania płyty mają wpływ na natężenia i wielkość obciążenia, zrobmy przykład <sup>1)</sup>. Rys. 38 przedstawia belkę żebrową.



Rys. 38.

Tutaj  $d=30\text{ cm}$ ,  $e=13\text{ cm}$ ,  $b_1=25\text{ cm}$ .  $F=20\text{ cm}^2$ .

Przypuśćmy najprzód, że cała płyta współdziała, to

$$b=200\text{ cm}, \quad f = \frac{20}{200} = 0\cdot 1\text{ cm}, \text{ wtedy } z_1 = 8\cdot 1\text{ cm}; \text{ dla } \sigma_e = 750\text{ kg/cm}^2,$$

$$M=409400\text{ kgcm}, \quad \tau_1 = 18\cdot 5\text{ kg/cm}^2.$$

<sup>1)</sup> Porów. autora. Dimensionierung d. T form. Trager, Beton und Eisen 1904 V zeszyt.

Teraz przyjmujemy, że tylko część płyty współdziała, przyjmujemy po kolei  $b=100, 50, 25\text{cm}$ , a otrzymamy wyniki zestawione w tablicy XVII.

Tabliczka XVII.

$b$ w $\text{cm}$	$\beta = \frac{b_1}{b}$	$f = \frac{F}{b}$ w $\text{cm}$	$z_1$ w $\text{cm}$	nateżenia w $\text{kg/cm}^2$		$M$ na $100\text{cm}$ szerok. w $\text{kgcm}$
				w żelazie	w betonie	
200	0.1	0.333	8.1	750	18.5	409400
100	0.2	0.666	10.75	750	27.2	384700
50	0.4	1.333	13.90	750	43.4	379900
25	0.8	2.667	17.39	{750} {454}	69.0 41.6	{362900} {218770}

W ostatnim wypadku t. j. gdy  $b=25\text{cm}$ , moment  $M$  musi być mniejszy z powodu zbyt wielkiego nateżenia w betonie  $\tau=69\text{kg/cm}^2$ . Zresztą dla  $\sigma_e=750\text{kg/cm}^2$  różnice momentu  $M$  od  $b=200$  do  $b=50$  są bardzo małe, jednak z malejącą szerokością, ciśnienie w betonie znacznie zwrasta. A więc widzimy, że przyjęcie mniejszej lub większej szerokości płyty jako współdziałającej ma głównie wpływ na nateżenie w betonie.

Rzecz ta nie jest jeszcze doświadczeniami ostatecznie wyjaśniona, jednak szerokość wliczalna płyty nie może być zależna od rozpiętości belki, tylko od grubości płyty i szerokości żebra.

Podajemy tu przepisy w rozmaitych państwach w tej sprawie.

Rozporządzenie pruskie dozwala liczyć do przekroju szerokość płyty najwyżej równą  $\frac{1}{3}$  rozpiętości belki.

Rozporządzenie austr. z r. 1911 dla budownictwa § 5 ust. 12. Szerokość płyty, którą możemy przyjąć jako współdziałającą, może być liczoną od osi żebra po każdej stronie nie większa, niż czterokrotna szerokość żebra lub ośmiokrotna grubość płyty albo połowa odstępu żebra. Najmniejszy z tych wymiarów należy wybrać.

Płyty o mniejszej grubości, niż  $6\text{cm}$ , nie mogą być uważane w rachunku jako współdziałające.

Możemy to wyrazić następnie

$$b \leq 8b_1, \quad b \leq 16e, \quad b \leq a \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

Przy mostach niema takiego zastrzeżenia, szerokość jest tam ograniczona ciągnięciem w żebrze.

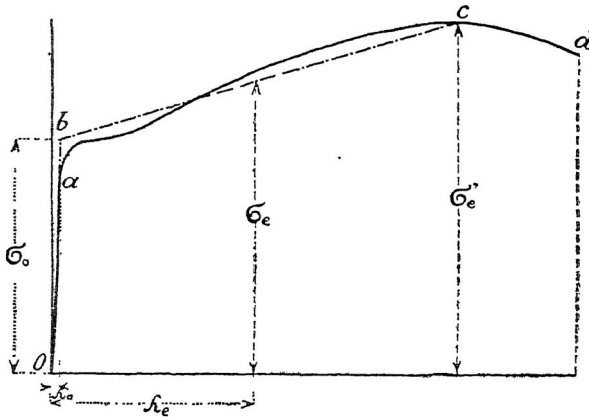


Rozporządzenie rosyjskie instr. A do § 1. ust. 4. Jeżeli belki stanowią jedną całość z płytami, pokrywającymi przestrzenie między belkami, to do obliczenia należy włączyć przekroje płyt z każdej strony osi belki, każdy szerokości nie większej, niż  $\frac{3}{8}$  odległości pomiędzy osiami belek, ale też nie większej niż  $\frac{1}{6}$  rozpiętości belki w świetle. Należy przytem sprawdzić, czy jest wystarczająca wytrzymałość połączenia belki z płytą, w razie przeciwnym należy zmniejszyć wprowadzoną do obliczenia belki szerokość płyty. O ile odległość między belkami w świetle nie przekracza półtorakrotnej szerokości belki, to można wprowadzić do przekroju belek całą płytę tj. szerokość równą odstępowi odległości pomiędzy osiami sąsiednich belek.

### § 25. Faza trzecia.

Po przekroczeniu granicy płynności żelaza następuje trzecia faza <sup>1)</sup>. Wyznaczenie natężeń w tej fazie jest trudnem, bo nie znamy dobrze współczynników. Zresztą chodzi tu o granicę płynności, a ona nie jest stałą nawet przy materiałach jednolitych.

Obliczenie natężeń zależy od dalszego przebiegu linii odkształceń dla żelaza (rys. 39.).

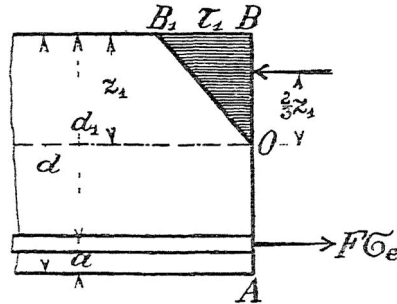


Rys. 39.

Gdy natężenie przekracza granicę płynności, to przy dalszem obciążaniu powstaje moment większy głównie przez przesunięcie środka ciśnienia ku górnej podstawie, przez co też oś obojętna się podnosi, a największe ciśnienie betonu znacznie wzrasta. Złamanie belki następuje wtedy prawie zawsze przez

<sup>1)</sup> Porównaj autora: Neue Versuche mit Hennebique Träger in Lemberg. [Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Vereines 1902. Nr. 50.]

osiągnięcie współczynnika wytrzymałości betonu na zgniecenie. Liczyć tu możemy tylko w przybliżeniu. Dlatego przyjmujemy tutaj linię odkształceń betonu prostą (rys. 40).



Rys. 40.

Ciągnięcie w żelazie równa się ciśnieniu betonu, więc

$$F\sigma_e = \frac{b\tau_1 z_1}{2}.$$

Dalej mamy

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \alpha\lambda_0, & \sigma_e &= \alpha\lambda_0 + \alpha\kappa(\lambda_e - \lambda_0) = \alpha\lambda_0(1 - \kappa) + \alpha\kappa\lambda_e \\ \lambda_e &= \frac{\sigma_e - \sigma_0(1 - \kappa)}{\alpha\kappa}.\end{aligned}$$

Dla założenia, że przekroje pozostają po ugięciu płaskie także po przekroczeniu granicy płynności mamy

$$\lambda_b : z_1 = \lambda_e : (d_1 - z_1)$$

lub

$$\frac{15\tau_1}{\alpha} : z_1 = \frac{\sigma_e - \sigma_0(1 - \kappa)}{\alpha\kappa} : (d_1 - z_1)$$

wreszcie

$$\tau_1 : z_1 = \frac{\sigma_e - \sigma_0(1 - \kappa)}{15\kappa} : (d_1 - z_1)$$

a stąd

$$15\kappa\tau_1(d_1 - z_1) = [\sigma_e - \sigma_0(1 - \kappa)]z_1$$

więc

$$\sigma_e = \frac{15\kappa\tau_1(d_1 - z_1)}{z_1} + \sigma_0(1 - \kappa) \quad \dots \quad (84)$$

Suma natężeń równa się zeru, więc

$$\frac{b\tau_1 z_1}{2} = 15\kappa\tau_1 F \frac{d_1 - z_1}{z_1} = \sigma_0(1 - \kappa)F, \text{ a stąd}$$

$$z_1 = -\frac{F}{b} \left( 15\kappa - \frac{\sigma_0}{\tau_1}(1 - \kappa) \right) + \sqrt{\left( \frac{F}{b} \left( 15\kappa - \frac{\sigma_0}{\tau_1}(1 - \kappa) \right) \right)^2 + \frac{30\kappa F d_1}{b}} \quad (85)$$

Jeżeli wedle doświadczenia, podanego przez Mehrtensa w Försterze<sup>1)</sup>, przyjmiemy  $\kappa=0.0047$ , to

$$z_1 = -\frac{F}{b} \left( 0.0705 - 0.9953 \frac{\sigma_0}{\tau_1} \right) + \sqrt{\left( \frac{F}{b} \right)^2 \left( 0.0705 - 0.9953 \frac{\sigma_0}{\tau_1} \right)^2 + 0.141 \frac{F}{b} d_1} \quad (86)$$

Przyjmijmy, jak w tym wypadku,  $\sigma_0 = 2680 \text{ kg/cm}^2$ , to otrzymamy dla

$$\tau_1 = 100 \quad 150 \quad 200 \quad 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{\sigma_0}{\tau_1} = 26.8 \quad 17.9 \quad 13.4 \quad 10.7$$

Z warunku, że suma momentów równa się zeru, otrzymujemy  $M = \frac{b\tau_1 z_1}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) = F\sigma_e \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)$ , zatem jak rów (56) (87)

$$\text{stad } \sigma_e = \frac{M}{F \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)} \text{ i } \tau_1 = \frac{2M}{bz_1 \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)} \quad (88)$$

Tok obliczenia byłby następny. Przyjmujemy  $\tau_1$  większe, niż podczas osiągnięcia granicy płynności żelaza, obliczamy z (85)  $z_1$ , z pierwszego równania (87)  $M$ , z rów (88)  $\sigma_e$ .

$$\text{Sprawdzamy wreszcie, czy } \frac{b\tau_1 z_1}{2} = F\sigma_e.$$

Jeżeli kształt linii odkształceń jest wedle rys. 41, to dla długości  $ab$  będzie

$$\sigma_e = \alpha\lambda_0 + \alpha\kappa_1(\lambda_e - \lambda_0), \text{ dla } b \quad \sigma_1 = \sigma_0 + \alpha\kappa_1(\lambda_1 - \lambda_0)$$

$$\text{więc} \quad \lambda_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_0(1 - \kappa_1)}{\alpha\kappa_1},$$

dla długości  $bc$

$$\begin{aligned} \sigma_e' &= \alpha\lambda_0 + \alpha\kappa_1(\lambda_1 - \lambda_0) + \alpha\kappa_2(\lambda_e' - \lambda_1) = \alpha\lambda_0(1 - \kappa_1) + \alpha\lambda_1(\kappa_1 - \kappa_2) + \\ &+ \alpha\kappa_2\lambda_e' = \sigma_0(1 - \kappa_1) + \frac{\sigma_1 - \sigma_0(1 - \kappa_1)}{\kappa_1} (\kappa_1 - \kappa_2) + \alpha\kappa_2\lambda_e'. \end{aligned}$$

$$\lambda_e' = \frac{\sigma_e' - \sigma_0(1 - \kappa_1) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \sigma_1 \left( 1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)}{\alpha\kappa_2}$$

<sup>1)</sup> Förster: Taschenbuch für Bauingenieure str. 197.

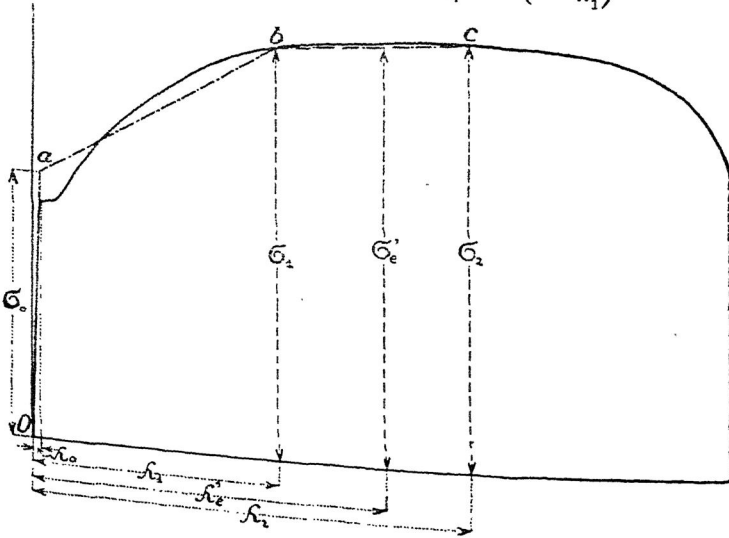
Dalej mamy  $\lambda_b : z_1' = \lambda_e' : (d_1 - z_1')$

$$\frac{15\tau_1'}{\alpha} : z_1' = \frac{\sigma_e' - \sigma_0(1-\kappa_1) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \sigma_1 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)}{\alpha\kappa_2} : (d_1 - z_1')$$

$$\tau_1' : z_1' = \frac{\sigma_e' - \sigma_0(1-\kappa_1) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \sigma_1 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)}{15\kappa_2} : (d_1 - z_1')$$

$$\frac{15\kappa_2\tau_1'(d_1 - z_1')}{z_1'} = \sigma_e' - \sigma_0(1-\kappa_1) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \sigma_1 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)$$

więc  $\sigma_e' = \frac{15\kappa_2\tau_1'(d_1 - z_1')}{z_1'} + \sigma_0(1-\kappa_1) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + \sigma_1 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)$  . . . (89)



Rys. 41.

Suma nateżeń równa się zeru, więc

$$\frac{b\tau_1'z_1}{2} = \frac{15\kappa_2\tau_1'(d_1 - z_1')}{z_1'} F + \sigma_0(1-\kappa_1) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} F + \sigma_1 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) F,$$

a stąd

$$z_1' = -\frac{F}{b} \left(15\kappa_2 - \frac{\sigma_0}{\tau_1'} (1-\kappa_1) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \frac{\sigma_1}{\tau_1'} \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)\right) + \sqrt{\left(\frac{F}{b} \left(15\kappa_2 - \frac{\sigma_0}{\tau_1'} (1-\kappa_1) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} - \frac{\sigma_1}{\tau_1'} \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)\right)\right)^2 + \frac{30\kappa_2 F d_1}{b}} \quad (90)$$

Równania (87) i (88) są i w tym wypadku ważne.

Przykład: Dany przekrój z doświadczeń Kleinlogla:  $d_1=27\text{ cm}$ ,  $b=15\text{ cm}$ ,  $F=3\cdot8\text{ cm}^2$ , procent uzbrojenia  $\rho=0\cdot887\%$ . Wartości, obliczone z krzywej odkształceń żelaza, wynoszą:  $\alpha_1=0\cdot014$ ,  $\alpha_2=0\cdot0017$ ,  $\sigma_0=2330\text{ kg/cm}^2$ . Dla fazy II b mamy odległość osi obojętnej według wzoru (55):

$$z_1 = \frac{15 \times 3\cdot8}{15} \left[ \sqrt{1 + \frac{2 \times 15 \times 27}{15 \times 3\cdot8}} - 1 \right] = 11\text{ cm.}$$

Dla granicy płynności mamy  $\sigma_0=2330\text{ kg/cm}^2$ , więc według drugiego równania (56) lub pierwszego (88) jest moment zgięcia:

$M=2330 \times 3\cdot8 \left(27 - \frac{11}{3}\right) = 206600\text{ kgcm}$ , a natężenie w betonie według drugiego równania (88):

$$\tau_1 = \frac{2 \times 206600}{15 \times 11 \left(27 - \frac{11}{3}\right)} = 107\text{ kg/cm}^2.$$

Przyjmijmy teraz natężenie w betonie  $\tau_1=150\text{ kg/cm}^2$ , to według równania (85) jest odległość osi obojętnej:

$$z_1 = -\frac{3\cdot8}{15} \left\{ 15 \times 0\cdot014 - \frac{2330}{150} (1 - 0\cdot014) \right\} + \sqrt{\frac{(3\cdot8)^2}{(1\cdot5)^2} \left\{ 15 \times 0\cdot014 - \frac{2330}{150} (1 - 0\cdot014) \right\}^2 + 30 \times 0\cdot014 \times \frac{3\cdot8}{15} \times 27} = 7\cdot93\text{ cm.}$$

Moment zgięcia otrzymamy według drugiego równania (88):

$$M = \frac{15 \times 150 \times 7\cdot93}{2} \left(27 - \frac{7\cdot93}{3}\right) = 217500\text{ kgcm.}$$

Natężenie w żelazie podług pierwszego równania (88):

$$\sigma_e = \frac{217500}{3\cdot8 \left(27 - \frac{7\cdot93}{3}\right)} = 2350\text{ kg/cm}^2.$$

Podobnie otrzymamy dla przyjętego  $\tau_1=250\text{ kg/cm}^2$ :

$$z_1 = 5\cdot07\text{ cm}, \quad M = 241000\text{ kgcm}, \quad \sigma_e = 2510\text{ kg/cm}^2.$$

Dla  $\tau_1=400\text{ kg/cm}^2$ :

$$z_1 = 3\cdot58\text{ cm}, \quad M = 277000\text{ kgcm}, \quad \sigma_e = 2820\text{ kg/cm}^2.$$

Nakoniec dla  $\tau_1=530\text{ kg/cm}^2$ :

$$z_1 = 3\cdot02\text{ cm}, \quad M = 312000\text{ kgcm}, \quad \sigma_e = 3160\text{ kg/cm}^2.$$

Złamanie nastąpiło tu przy momencie  $M=307500\text{ kgcm}$ .

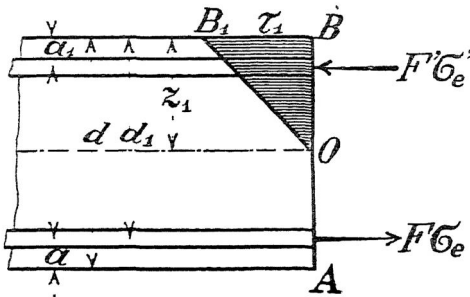
Użycie wzoru (90) do obliczenia odległości osi obojętnej (stosownie do rys. 41) okazuje się zwykle niepotrzebnym, bo natężenie w betonie tak szybko wzrasta w stosunku do natężenia w żelazie, że ostatecznie nawet przy złamaniu natężenie w żelazie nie osiąga wartości granicznej:  $\sigma_1$ .<sup>1)</sup>

Jeżeli wkładka jest obustronna, to zachodzi pytanie, czy liczyć na tę wkładkę w fazie trzeciej, albowiem żelazo okrągłe

<sup>1)</sup> Porównaj także: Dr. M. v. Thullie: „Die dritte Phase der gebogenen Eisenbetonträger“ (Zeitschrift d. öst. Ing. u. Arch. Vereines, 1913, Nr. 48).

ma mały moment bezwładności, i może się łatwo wyboczyć. Powtóre, warstwa betonu ponad wkładką jest zwykle niewielka, a przy doświadczeniach Empergera w r. 1906<sup>1)</sup> okazało się, że wytrzymałość belki o wkładkach obustronnych jest taka sama, jak przy wkładkach pojedynczych. Zazwyczaj jednak liczymy na wytrzymałość żelaza, a wtedy, aby nie nastąpiło wyboczenie, należałoby dać bardzo dobry beton i odstąpić dosyć znacznie z wkładkami od krawędzi. Dr. Huber (Czasopismo techniczne 1905 str. 162) sądzi, że można uwzględnić wkładkę górną, tylko trzeba przyjąć  $a_1 \geq 2$  do 3*d*.

Jeżeli liczymy na podwójne wkładki, to możemy wprowadzić wzory dla trzeciej fazy w sposób, poprzednio podany, (rys. 42). Otrzymamy



Rys. 42.

$$\frac{b\tau_1 z_1}{2} + F'\sigma_e' = F\sigma_e, \text{ a wi\u0119c, jak poprzednio,}$$

$$\sigma_e = 15\kappa\tau_1 \frac{d_1 - z_1}{z_1} + \sigma_0(1 - \kappa).$$

We wkładce górnej zazwyczaj nie dosięgnie ciśnienie granicy płynności, a wtedy

$$\sigma_e' : \tau_1 = 15(z_1 - a_1) : z_1, \text{ a } \sigma_e' = 15\tau_1 \frac{z_1 - a_1}{z_1}.$$

$$\text{Wi\u0119c } \frac{b\tau_1 z_1}{2} + F'\tau_1 15 \frac{(z_1 - a_1)}{z_1} = 15\kappa\tau_1 \frac{(d_1 - z_1)F}{z_1} + \sigma_0(1 - \kappa)F,$$

$$\text{a } \left. \begin{aligned} z_1 &= -A_2 + \sqrt{A_2^2 + B_2} \\ \text{je\u017celi } A_2 &= \frac{F'}{b} \left( 15\kappa \frac{\sigma_0}{\tau_1} (1 - \kappa) \right) - 15 \frac{F'}{b} \\ B_2 &= \frac{30}{b} (\kappa F d_1 + F' a_1). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (91)$$

<sup>1)</sup> Patrz Beton u. Eisen. 1906 str 267.

Dalej otrzymamy

$$M = \frac{b\tau_1 z_1}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) + F' \sigma_e' (d_1 - a_1) = \frac{b\tau_1 z_1}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) + F' 15\tau_1 \frac{z_1 - a_1}{a_1} (d_1 - a_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{stąd} \quad \tau_1 &= \frac{2M_1}{bz_1 \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) + 15' F(z_1 - a_1) \frac{d_1 - a_1}{a_1}} \\ \sigma_e' &= 15\tau_1 \frac{z_1 - a_1}{z_1} \\ \sigma_e &= 15\kappa \frac{d_1 - z_1}{z_1} \tau_1 + \sigma_0(1 - \kappa). \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

### C. Obliczenie wymiarów.

#### § 26. Zasady obliczenia wymiarów.

Poprzednio wyłożyliśmy sposoby wyznaczenia natężenia betonu i żelaza w fazach Ia, Ib, IIa, IIb i III, jeżeli wymiary belki jakoteż i obciążenie są dane.

Przy projektowaniu mamy inne zadanie do rozwiązania. Dla danego obciążenia, momentu i sił poprzecznych i danego ustroju belki należy wyznaczyć wymiary.

Zachodzi tu najprzód pytanie, na podstawie której fazy należy wyznaczać wymiary.

Najwłaściwiej byłoby liczyć wedle fazy trzeciej, bo głównie nam chodzi o pewność ze względu na złamanie. Jednak obliczenie dokładne w trzeciej fazie jest niemożliwym, bo granica płynności żelaza jest niepewną, dalej panuje wielka niepewność co do współczynnika  $\kappa$ , bo nachylenie linii odkształceń jest zmienliwym. Dlatego dopóki nie mamy dokładnych danych, musimy liczyć wedle fazy IIb.

Rozumie się, że pamiętać musimy, że jeżeli obliczenia wedle fazy IIb zastosujemy przy złamaniu, to tylko wtedy otrzymamy dobre wyniki, jeżeli złamanie nastąpiło skutkiem przecięcia wytrzymałości betonu na zgniecenie, zanim ciągnięcie żelaza przekroczyło granicę płynności. Jeżeli jednak przekroczy granicę płynności żelaza, to natężenia liczone wedle fazy drugiej są tylko rachunkowe, a nie rzeczywiste.

Można wyznaczyć taki procent żelaza, dla którego nastąpi zgniecenie betonu równocześnie z osiągnięciem granicy płynności żelaza. Jeżeli procent żelaza jest mniejszy, to granicę płynności w żelazie osiągniemy pierwej, niż zgniecenie betonu.

Przeciwnie rzecz przedstawi się, gdy mamy więcej żelaza. bo wtedy beton prędzej ulegnie zgnieceniu, niż żelazo przerwaniu.

Przy małych procentach  $p = \frac{100 F}{bd_1}$  żelaza zostanie przekroczona granica płynności już przy niewielkiem ciśnieniu betonu, wtedy po przekroczeniu granicy płynności może moment  $M$  jeszcze wzrosć tembardziej, im mniejsze było natężenie betonu przy wejściu w fazę trzecią. Jednak, ile on może wzrosnąć, obliczyć trudno, bezpieczniej więc jest nie liczyć wcale na fazę trzecią.

Jeżeli chcemy mieć pewność co do trwałości wykonanego zespołu, to ponieważ współczynniki i obliczenie we fazie trzeciej są niepewne, więc nie uwzględniamy tego, co będzie poza granicą płynności i liczymy wedle fazy II *b*.

Wiemy, że w pierwszej fazie wkładka żelazna ma mały wpływ na zniżenie ciągnięcia, które jest mało co mniejsze od ciśnienia. Pożyteczność wkładki żelaznej uwydatnia się dopiero w drugiej fazie po przewyciężeniu wytrzymałości betonu na ciągnięcie, sprawia ona wielką wytrzymałość płyty na złamanie; grubość zatem wkładki żelaznej obliczać musimy głównie ze względu na złamanie, a więc wedle wzorów fazy II *b*.

Wedle fazy II *b* obliczamy jednak belki tylko ze względu na pewność na złamanie. Dla zwykłych obciążeń natężenia są znacznie mniejsze i zazwyczaj belka znajduje się wtedy w fazie Ia lub Ib. Zachodzi teraz pytanie, czy należy obliczać także w ten sposób, aby mieć jakąś pewność ze względu na pęknięcie betonu, czy należy więc nietylko liczyć belki wedle fazy II *b*, ale także i wedle fazy I. Zdania są podzielone; niektórzy żądają, aby obliczać w ten sposób, by uniknąć pęknięć betonu, bo jeżeli belka pęknie, to może się przez to pęknięcie dostać do żelaza powietrze, para wodna, gazy i spowodować rdzewienie wkładek, a więc pośrednio spowodować znacznie zmniejszenie wytrzymałości. Drudzy twierdzą, że obawy te są płonne, bo doświadczenia wykazały, że małe rysy nie są szkodliwe, a nie-



bezpieczeństwo rdzewienia zachodzi dopiero przy znacznych pęknięciach, występujących przy zbliżaniu się do granicy płynności żelaza.

Pomimo tego w Niemczech, Austrii i Rosyi żąda się obliczenia belek także według fazy I przy belkach mostowych ze względu na wstrząśnienie i takich belkach, używanych w budownictwie, które narażane są na wpływy atmosferyczne lub szkodliwe gazy. W Austrii i Rosyi żąda się obliczenia wedle fazy Ib, w Niemczech wedle Ia, co jest niekorzystniejsze i podraża bardziej wykonanie belek żelbetowych.

Rozporządzenie ministerstwa austriackiego z r. 1911 dla budownictwa § 5. ust. 8.

Obliczenie natężeń w dźwigarach żelbetowych ma się wykonać przy następujących założeniach.

a) Pierwotnie płaskie przekroje pozostają płaskimi przy odkształceniu.

b) Spółczynnik sprężystości betonu na ciśnienie należy przyjąć  $140000 \text{ kg/cm}^2$ , a więc równy jednej piętnastej części współczynnika sprężystości żelaza na ciągnięcie i ciśnienie  $2100000 \text{ kg/cm}^2$ .

c) Natężenia w betonie na ciśnienie i żelaza na ciągnięcie należy obliczać dla założenia, że w betonie niema wcale ciągnięć.

9. Przy takich zginanych dźwigarach, które narażone są na wpływy atmosferyczne, na wilgoć, parę, dym albo gazy szkodliwe dla żelaza, należy też wykazać największe ciągnięcia w betonie, które wypadają dla współczynnika sprężystości betonu na ciągnięcie  $56000 \text{ kg/cm}^2$ , a zresztą wedle założeń podanych w 8a) i b).

Rozporządzenie ministerstwa austriackiego z 1911 dla mostów drogowych § 5. ust. 7.

Obliczenie natężeń w dźwigarach żelbetowych ma się wykonać przy następujących założeniach.

a), b), c) jak wyżej.

d) Przy zginanych dźwigarach należy wykazać także największe ciągnięcia betonu, które występują dla współczynnika sprężystości betonu na ciągnięcie  $56000 \text{ kg/cm}^2$ .

Rozporządzenie ministerstwa rosyjskiego z roku 1911. Normy § 2. Natężenia w częściach budowli żelaznobetonowych wyznacza się w przypuszczeniu, że beton nie przedstawia oporu siłom rozciągającym, że te ostatnie działają jedynie na uzbrojenie rozciągane, oraz stosując zasady teorii gięcia o płaskich przekrojach poprzecznych i o proporcjonalności pomiędzy wydłużeniem i natężeniem.

§ 4. Stosunek  $m$  współczynników sprężystości uzbrojenia żelaznego i betonu, służący do zastępowania różnorodnego przekroju żelbetu jednorodnym przekrojem zastępczym, należy przyjmować przy prostym (nie spiralnym) uzbrojeniu równym 15.

Instrukcja A. do § 2. Jeżeli charakter danej budowli jest tego rodzaju, że tworzenie się pęknięć w betonie pod wpływem obciążenia nie jest dopuszczalnym (n. p. części żelbetowe, poddane działaniu wilgoci, dymu, gazów i innych szkodliwych czynników), to należy sprawdzić obliczeniem największe ciągnięcia w betonie, które nie powinny w tym wypadku przekraczać wytrzymałości betonu na ciągnięcie, przyjmując ją jako  $\frac{1}{10}$  wytrzymałości tegoż na ściskanie.

Do § 3 i 4. W obliczeniach odkształceń sprężystych i natężeń w ustrojach statycznie niewyznaczalnych należy przyjmować stosunek  $m=15$ , oraz równe współczynniki sprężystości betonu na ciągnięcie i ciśnienie  $E=140000 \text{ kg/cm}^2$ . W tych zaś wypadkach, gdy w obliczeniu na zgięcie jest uwzględniane ciągnięcie betonu, należy przyjmować współczynnik sprężystości betonu na ciśnienie  $E=140000 \text{ kg/cm}^2$ , a na ciągnięcie  $E=56000 \text{ kg/cm}^2$ .

Rozporządzenie pruskie z r. 1907 dla budownictwa. § 15.

1. Współczynnik sprężystości żelaza należy przyjąć 15 razy większy od współczynnika sprężystości betonu, jeżeli nie udowodni się innego współczynnika sprężystości.

2. Natężenia w przekroju dźwigaru zginanego należy obliczyć dla założenia, że odkształcenia proporcjonalne są do odstępów od osi obojętnej i że wkładki żelazne mogą przyjąć na siebie całe ciągnięcie.

3. Przy budowlach albo częściach budowli, które wystawione są na wpływy atmosferyczne, wilgoć, dym albo inne szkodliwe wpływy, należy oprócz tego wykazać, że nie dopuszcza się do pojawienia się pęknięć betonu ze względu na ciągnięcie, w betonie występujące.

§ 16. 1. Dla części budowli zginanych nie powinno przekraczać ciśnienie betonu szóstą część jego wytrzymałości, ciągnięcie i ciśnienie żelaza  $1000 \text{ kg/cm}^2$ .

2. Jeżeli uwzględnia się w wypadkach w § 15. ust. 3 wymienionych ciągnięcie betonu, należy przyjąć jako ciągnięcie dopuszczalne dwie trzecie wytrzymałości betonu na ciągnięcie, wykazanej doświadczeniami na ciągnięcie. Jeżeli wytrzymałości betonu na ciągnięcie nie udowodniono, nie może ciągnięcie przekraczać jednej dziesiątej wytrzymałości na ciśnienie.

## § 27. Belki prostokątne pojedynczo uzbrojone.

Przekrój idealny.

Chodzi nam teraz o wyznaczenie wymiarów belki dla danego momentu  $M$ . Założmy najprzód, że wymiary tak obieramy, aby natężenia w żelazie i betonie były równe dopuszczalnym. W takim wypadku zazwyczaj belka jest najtańszą, bo oba materiały zostały należycie wykorzystane. Przekrój taki nazywa się idealnym (n. *Idealer Querschnitt*). Koszt belki zależy wprawdzie od stosunku ceny jednostkowej żelaza i betonu,

ale dla obecnych stosunków możemy przyjąć, że belka prostokątna, o przekroju idealnym, jest najtańszą<sup>1)</sup>. Dla tego założenia mamy wedle § 19 (str. 38.)  $\sigma_e = 15 \frac{d_1 - z_1}{z_1} \tau_1$ , a stąd

$$z_1 = \frac{15 \tau_1}{\sigma_e + 15 \tau_1} d_1 = \xi' d_1 \quad \dots \quad (93)$$

lub gdy nazwiemy  $\frac{\tau_1}{\sigma_e} = \gamma$ , to  $\xi' = \frac{15\gamma}{1+15\gamma} \dots \dots \dots (94)$

Dla nateżeń dopuszczalnych, przepisanych w rozporządzeniu austriackim, da się z równań (93) i (94) obliczyć  $\xi'$  dla różnych mieszanin betonu i otrzymamy dla budownictwa

dla betonu 470 kg/cm <sup>2</sup> cementu	$z_1 = 0.3865 d_1$
"          350                  "	$z_1 = 0.3569 d_1$
"          280                  "	$z_1 = 0.3243 d_1$

dla mostów znajdziemy odnośne  $z_1$  w tabliczce XVIII.

Znając  $z_1$  można wyznaczyć  $d_1$  i  ${}^iF$  przekrój idealny.

I tak z wzoru (56)  $\tau_1 = \frac{2M}{bz_1 \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)}$  otrzymamy, wstawivszy

$$\tau_1 b \xi' d_1 \left( d_1 - \frac{\xi' d_1}{3} \right) = 2M, \text{ a stąd}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{2M}{\tau_1 b \xi' \left( 1 - \frac{\xi'}{3} \right)}} = C_1 \sqrt{\frac{M}{b}} \quad \dots \quad (95)$$

Dalej z wzoru  $\sigma_e {}^iF = \frac{M}{d_1 - \frac{z_1}{3}} = \frac{M}{d_1 \left( 1 - \frac{\xi'}{3} \right)}$  mamy

$${}^iF = \frac{M}{\sigma_e d_1 \left( 1 - \frac{\xi'}{3} \right)} \quad \dots \quad (96)$$

lub też z wzoru  $\sigma_e {}^iF = \frac{1}{2} b \tau_1 z_1$  (str. 38.) otrzymamy

$${}^iF = \frac{1}{2} b \gamma z_1 = \frac{1}{2} b \gamma \xi' d_1 = C_2 b d_1 \quad \dots \quad (97)$$

wreszcie

$${}^iF = \frac{1}{\sigma_e} \frac{b}{2} \tau_1 \xi' \sqrt{\frac{2M}{\tau_1 b \xi' \left( 1 - \frac{\xi'}{3} \right)}} =$$

$$= \gamma \sqrt{\frac{\xi'}{2\tau_1}} \left( 1 - \frac{\xi'}{3} \right) \sqrt{Mb} = C_3 \sqrt{Mb} \quad \dots \quad (98)$$

<sup>1)</sup> Później nad kwestyą tą osobno się zastanowimy i wykażemy, kiedy belka o przekroju idealnym jest najtańszą.

Na podstawie powyższych wzorów obliczyli Haberkalt i Postuvanschitz następującą tabliczkę XVIII., przy czem procent idealnego uzbrojenia  $i'p' = \frac{100 \cdot F}{bd_1}$ .

Tabliczka XVIII.

Stosunek mieszka- niny	l	$\sigma_e$ w $kg/cm^2$	$\tau_1$ w $kg/cm^2$	$z_1$	$d_1$	$iF$	$iF$	$i'p'$
470 kg cementu na 1 m <sup>3</sup> miesz. mosty	0	800	33.0	0.3822	0.4263	0.007882	0.003360	0.788
	2	806	33.4	0.3833	0.4232	0.007941	0.003361	0.794
	6	818	34.2	0.3854	0.4173	0.008056	0.003361	0.806
	10	830	35.0	0.3874	0.4116	0.008166	0.003361	0.817
	14	842	35.8	0.3894	0.4060	0.008278	0.003361	0.828
	18	854	36.6	0.3913	0.4007	0.008385	0.003360	0.839
	22	866	37.4	0.3931	0.3957	0.008487	0.003358	0.849
	bud.	1000	42	0.3865	0.3761	0.008117	0.003052	0.812
350 kg cem. na 1 m <sup>3</sup> miesz. mosty	0	800	29.0	0.3533	0.4710	0.006383	0.003006	0.638
	2	806	29.4	0.3536	0.4670	0.006448	0.003011	0.645
	6	818	30.2	0.3564	0.4592	0.006579	0.003021	0.658
	10	830	31.0	0.3591	0.4518	0.006707	0.003031	0.671
	14	842	31.8	0.3617	0.4447	0.006832	0.003038	0.683
	18	854	32.6	0.3641	0.4379	0.006949	0.003044	0.695
	22	866	33.4	0.3665	0.4314	0.007068	0.003049	0.707
	bud.	1000	37.0	0.3569	0.4146	0.006603	0.002738	0.660
280 kg cementu na 1 m <sup>3</sup> miesz. mosty	0	800	25.0	0.3191	0.5297	0.004985	0.002640	0.499
	2	806	25.4	0.3209	0.5242	0.005055	0.002650	0.506
	6	818	26.2	0.3245	0.5136	0.005196	0.002659	0.520
	10	830	27.0	0.3280	0.5036	0.005336	0.002687	0.534
	14	842	27.8	0.3312	0.4941	0.005467	0.002704	0.547
	18	854	28.6	0.3344	0.4851	0.005600	0.002717	0.560
	22	866	29.4	0.3374	0.4766	0.005727	0.002730	0.573
	bud.	1000	32.0	0.3243	0.4648	0.005189	0.002412	0.519
		$kg/cm^2$	$kg/cm^2$	$d_1$	$\sqrt{\frac{M}{b}}$	$bd_1$	$\sqrt{Mb}$	$\frac{100F}{bd_1}$

### § 28. Ogólne obliczenie wymiarów belki prostokątnej.

Dotychczas mówiliśmy o wyznaczeniu przekroju idealnego. Jednak w praktyce mogą zająć wypadki, że przyjmujemy inną wysokość  $d_1$  i inną wielkość przekroju  $F$  wkładki żelaznej. Ze względu na małą rozporządzalną wysokość ustroju, przyjmujemy nieraz  $d_1$  mniejsze, a wtedy musi być przekrój wkładki większym. Moglibyśmy odwrotnie przyjąć wysokość belki większą, jeżeliby chodziło nam o oszczędność żelaza, ale to się tylko czasem opłaca.

Jeżeli więc mamy wogóle obliczyć przekrój żelaza dla danej wysokości  $d_1$ , to nazwijmy procent uzbrojenia  $p' = \frac{100F}{bd_1}$ , zatem  $F = \frac{p'}{100} bd_1$ . Wstawmy to w rów (54), to otrzymamy

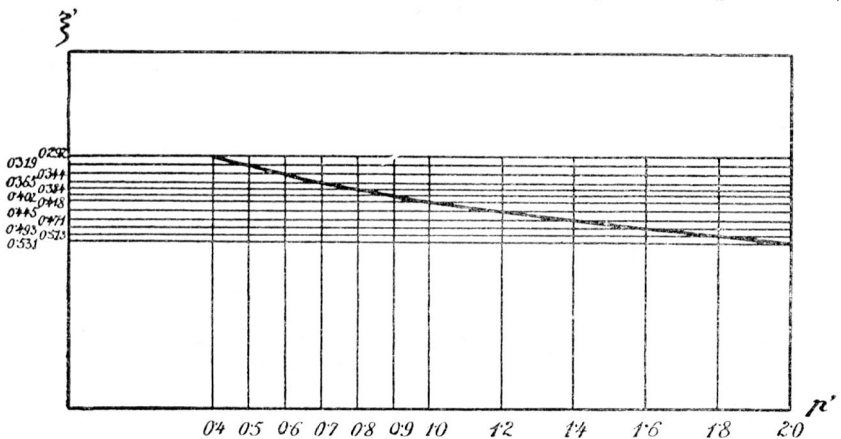
$$z_1 = [-0.15p' + \sqrt{0.15p'(0.15p' + 2)}]d_1 = \xi' d_1. \quad (99)$$

Widzimy więc, że dla danego  $p'$  możemy obliczyć  $z_1$  i  $\xi'$ .

Wstawiając za  $p'$  wartości w (99) otrzymamy następną tabliczkę XIX. (rys. 43).

Tabliczka XIX.

$p' =$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	9.0
$\xi' =$	0.292	0.319	0.344	0.365	0.384	0.402
$p' =$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0%
$\xi' =$	0.418	0.445	0.471	0.493	0.513	0.531



Rys. 43.

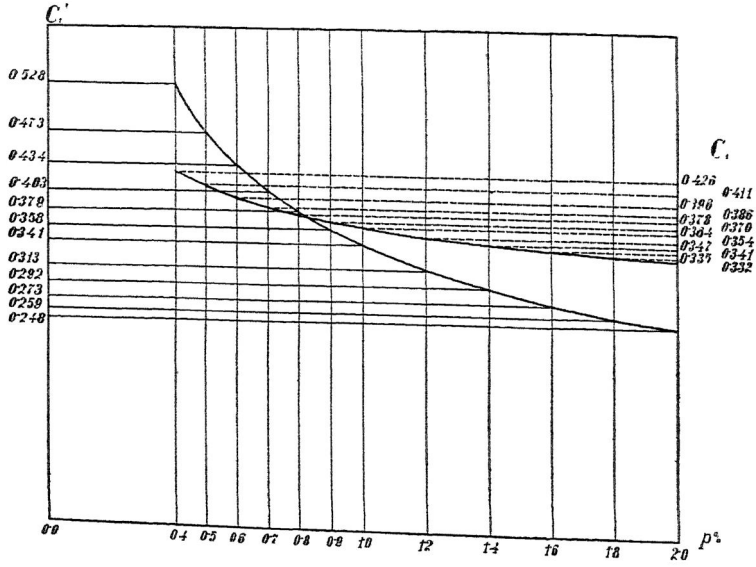
Wstawmy teraz wartość za  $z_1$  i  $F$  w równ (57), a otrzymamy

$$\tau_1 = \frac{3M\xi'd_1}{b\xi'^3 d_1^3 + 45(d_1 - \xi'd_1)^3 \frac{p'd_1 b}{100}} = C_1 \frac{M}{b d_1^2}$$

przyczem  $C_1 = \frac{3\xi'}{\xi'^3 + 0.45(1-\xi')^2 p'}$ . A stąd

$$d_1 = \sqrt{\frac{C_1 M}{b \tau_1}} = C \sqrt{\frac{M}{b}} \dots \dots \dots (100)$$

przyczem  $C = \sqrt{\frac{C_1}{\tau_1}} = \sqrt{\frac{3\xi'}{\tau_1[\xi'^3 + 0.45(1-\xi')^2 p']}} \dots \dots \dots (101)$



Rys. 44.

Dalej mamy  $\sigma_e = \tau_1 \frac{15(d_1 - z_1)}{z_1} = \tau_1 \frac{15(1-\xi')}{\xi'}$   
 $= C_1 \frac{15(1-\xi')}{\xi'} \frac{M}{b d_1^2}$

Stąd  $d_1 = \sqrt{\frac{15(1-\xi')}{\xi'} \frac{C_1 M}{b \sigma_e}} = C' \sqrt{\frac{M}{b}} \dots \dots \dots (102)$

przyczem  $C' = \sqrt{\frac{45(1-\xi')}{\sigma_e[\xi'^3 + 0.45(1-\xi')^2 p']}} \dots \dots \dots (103)$

I tak n. p. dla  $\sigma_e = 1000 \text{ kg/cm}^2$  otrzymamy (rys. 44).

T a b l i c z k a   X X .

Dla	$p'$	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
$\sigma_e=1000$	$C'$	0·528	0·473	0·434	0·403	0·379	0·358
$\tau_1=42$	$C$	0·426	0·411	0·396	0·386	0·378	0·370
Dla	$p'$	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8	2·0
$\sigma_e=1000$	$C'$	0·341	0·313	0·292	0·273	0·259	0·248
$\tau_1=42$	$C$	0·364	0·354	0·347	0·341	0·335	0·332

Widzimy więc, że przyjąwszy natężenie  $\sigma_e=1000$  i  $\tau_1=42 \text{ kg/cm}^2$ , otrzymamy dla  $p' < 0·81$  wartości  $C'$  większe dla żelaza niż  $C$  dla betonu, zaś dla  $p' > 0·81$  jest  $C$  dla betonu większem. Rozumie się, że zawsze musimy przyjąć większą z dwu wartości  $C$  i  $C'$ . Spółczynniki  $C$  i  $C'$  dadzą się też przedstawić wykreślnie

zapomocą linii prostych, jeżeli jako odcinki odetniemy  $\sqrt{\frac{1}{\sigma_e}}$  i  $\sqrt{\frac{1}{\tau_1}}$ <sup>1)</sup>. Proste te widzimy na rysunku 45.

Dla przyjętego procentu żelaza  $p'$  i przyjętego natężenia w żelazie lub betonie, otrzymujemy z wykresu wartości  $C$  i  $C'$ , a wysokość belki żelbetowej  $d_1 = C\sqrt{\frac{M}{b}}$ .

Z tablic tych można dla danych natężeń i danych  $p'$ , otrzymać  $d_1$ , względnie możemy procent żelaza  $p'$  zmienić ze względu na żelazo i beton, tak aby oba materiały wyzyskać.

Profesor Huber postawił sobie zadanie, wyznaczyć taki ustrój, aby koszta były najmniejsze. Wzory jego<sup>2)</sup> jako bardzo zawile nie nadają się do praktyki. Myśl jego zasadnicza jest następująca:

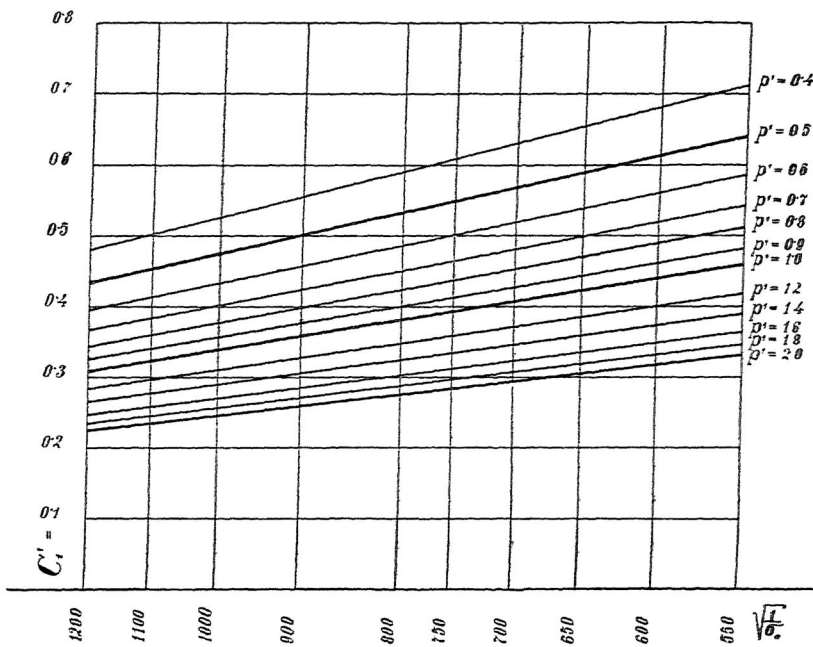
Nazwijmy koszt żelaza  $C_z$ , betonu  $C_b$ , to wtedy koszt belki będzie

$$K = b(d_1 + a)C_b = FC_z, \text{ a że}$$

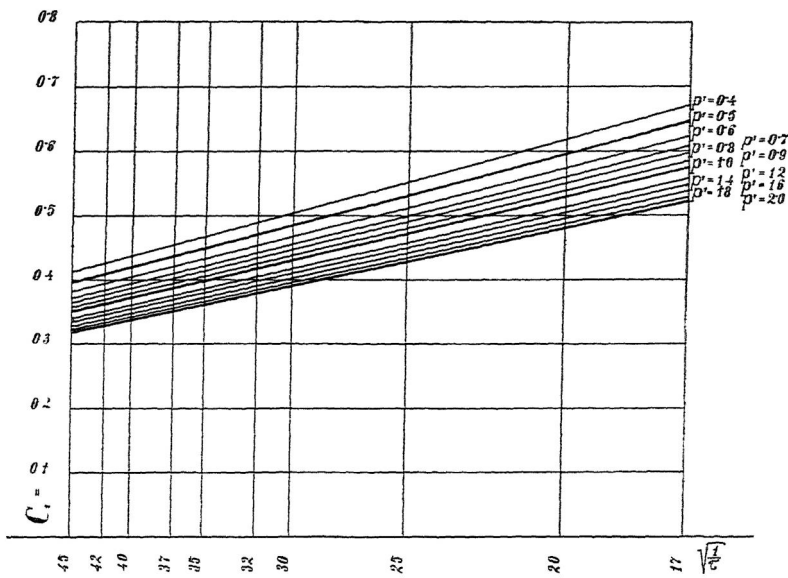
$$d_1 = C_1 \sqrt{\frac{M}{b}}, \quad \text{dla } \frac{F}{bd_1} = \frac{p'}{100}, \quad F = \frac{p'}{100} bd_1.$$

1) Na rys. 45  $b$  ma być zamiast  $\sqrt{\frac{1}{\tau}}$  wartość  $\sqrt{\frac{1}{\tau_1}}$ .

2) Czasopismo techniczne rok 1905.



Rys. 45a. Natężenie żelaza.



Rys. 45b. Natężenie betonu.



Ze względu na beton mamy

$$K = b \left( C_1 \sqrt{\frac{M}{b}} + a \right) C_b + \frac{p'}{100} C_2 b C_1 \sqrt{\frac{M}{b}}$$

Z tego widać, że  $K$  będzie najmniejsze, gdy dla danego  $b$ ,  $M$  i  $a$  wartość  $C_1 \left( C_b + C_2 \frac{p'}{100} \right)$  będzie najmniejszą.

### § 29. Uwzględnienie ciągnięcia przy obliczaniu wymiarów belki prostokątnej.

W niektórych wypadkach, powyżej podanych, należy, po obliczeniu wymiarów wedle ciśnienia betonu  $\tau_1$  i ciągnięcia żelaza  $\sigma_e$  w fazie IIb, przekonać się jeszcze, czy ciągnięcie betonu  $\tau_2$  nie jest za wielkiem. Haberkalt i Postuvanschitz<sup>1)</sup> udowadniają, że jeżeli przy płytach i belkach prostokątnych obliczymy przekrój idealny wedle fazy IIb, zawsze  $\tau_2$  jest niższe od dopuszczalnego i tak dla  $\frac{a}{d} = 0.08$  mamy według tabl. XXI.:

Tabliczka XXI.

Ilość kg cementu na 1m <sup>3</sup> mieszanki żwiru i piasku	natężenie dopuszczalne na ciągnięcie budow. mosty rozpiętość w m			ciągnięcie rzeczywiste budow. mosty rozpiętość w m		
		2	22		2	22
470	25 kg/cm <sup>2</sup>	19.2	21.2	16.0 kg/cm <sup>2</sup>	13.2	14.7
350	24 „	18.2	19.0	14.8 „	11.6	13.4
280	22 „	16.7	18.7	12.8 „	10.2	11.8

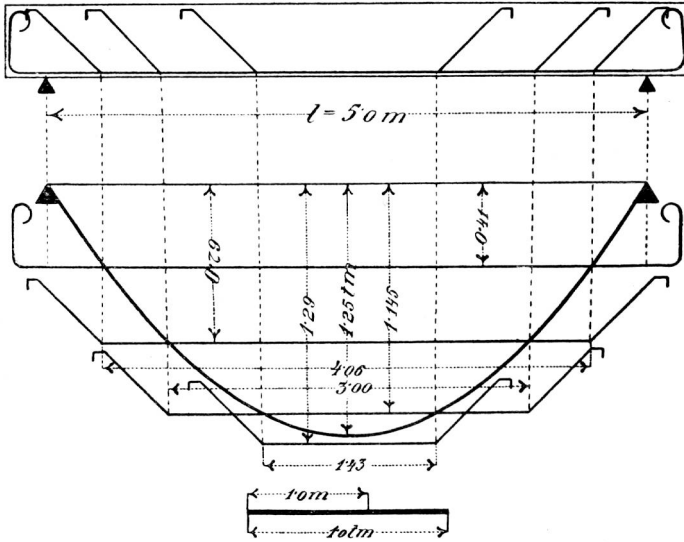
A więc dla płyt i belek prostokątnych o przekroju idealnym nie potrzebujemy wcale badać ciągnięcia. Haberkalt udowadnia dalej<sup>2)</sup>, że i dla innych belek prostokątnych i płyt ciągnięcie betonu jest zawsze mniejszem od dopuszczalnego tak, że wogóle dla płyt i belek prostokątnych nie potrzeba badać ciągnięcia betonu.

<sup>1)</sup> Haberkalt i Postuvanschitz: Die Berechnung der Tragwerke aus Betoneisen oder Stampfbeton II. wyd. Wiedeń 1912 str. 41—43.

<sup>2)</sup> Dtto str. 49.

### § 30. Długość wkładek żelaznych.

Długość wkładki zależna jest od zmienności linii największych momentów i położenia osi obojętnej. Jeżeli n. p. mamy w belce 4 pręty dla bezwzględnie największego  $M$ , to opuszczamy 1 pręt i dla  $\frac{3}{4} F$  obliczamy  $z_1$ , a stąd, dla danego  $\sigma_e$ , moment  $M'$ . Wkładka 4-ta teoretycznie powinna być np. według rys. 46 na długości 1.43 m, lecz przedłużamy ją jeszcze o tyle, aby siłę, która w niej działa, przenieść na beton za pośrednictwem przyczepności.



Rys. 46.

Nazwijmy przedłużenie wkładki  $l_1$ , to  $l_1 \sigma_p = F_1 \sigma_e$  (104) jeśli „o” oznacza obwód przekroju pręta,  $\tau_p$  przyczepność dopuszczalną,  $F_1$  przekrój jednego pręta. O uwzględnieniu haków dla długości  $l_1$  będzie mowa później.

Ponieważ jednak oś obojętna nie o wiele się zmienia, więc wystarczy w praktyce wyznaczyć  $z_1$  tylko dla największej i najmniejszej ilości równo grubych prętów, w tym samym rzędzie się znajdujących, z tego odnośnie  $M$ , a dla dowolnej ilości prętów interpolować momenty wedle linii prostej. Jeżeli średnice prętów są różne, to należy przy interpolacji uwzględnić przekrój poszczególnych prętów.

Przykład. Dźwigar prostokątny ma przy rozpiętości  $l=5.0\text{ m}$ , obciążeniu jednostajnie rozłożonem  $g=400\text{ kg/m}$  wraz z ciężarem własnym, a więc przy momencie  $M=125000\text{ kgcm}$ , natężeniach dopuszczalnych  $\sigma_e =$

$=815 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\tau_1 = 34 \text{ kg/cm}^2$ , wymiary:  $b = 20 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 33 \text{ cm}$ ,  $F = 5.55 \text{ cm}^2$  to jest  $7 \text{ cf}10 \text{ mm}$ . Wyznaczyć długość wkładek żelaznych.

Postępując wyżej podanym sposobem, obliczymy położenie osi obojętnej dla skrajnych ilości wkładek, dla pośrednich zaś zainterpolujemy wedle linii prostej, poczem obliczymy inne potrzebne daty statyczne. Mamy więc:

Przekrój	I.	II.	III.	IV.
$F_e$	$7 \text{ cf}10 \text{ mm} (5.5 \text{ cm}^2)$	$6 \text{ cf}10 \text{ mm} (4.71 \text{ cm}^2)$	$4 \text{ cf}10 \text{ mm} (3.14 \text{ cm}^2)$	$2 \text{ cf}10 \text{ mm} (1.57 \text{ cm}^2)$
$d_1$	33.0	33.5	34.0	34.5 <i>cm</i>
$z_1$	12.5	10.9	9.3	7.8 <i>cm</i>
$M$	129000	114500	79000	40800 <i>kgcm</i>

przyczem  $z_1$  liczymy z wzoru (55), zaś  $M$  z wzoru (56), podstawiając za  $\sigma_e$  wartość dopuszczalną, bo wskutek zmniejszania się procentu uzbrojenia przez opuszczanie wkładek przekroczyłyby natężenia w żelazie prędkiej wartość dopuszczalną, niż natężenia w betonie. Na podstawie tych danych wykonywamy wykres, jak na rys. 46., z którego otrzymujemy szukane długości wkładek.

### § 31. Obliczenie wymiarów wedle Wuczowskiego.

Przy obliczeniu płyt ważną jest rzeczą uwzględnianie od razu ciężaru własnego płyty, bo inaczej musimy parę razy obliczać, gdy przyjęta grubość nie zgadza się z otrzymaną z obliczenia.

Przyjmijmy w przybliżeniu odstęp środka uzbrojenia od dolnej powierzchni płyty  $a = 1.5 \text{ cm}$ . Niech dalej będzie  $M = \frac{q l^2}{k} = \beta d^2$ , przekrój uzbrojenia na  $1 \text{ mb}$ :  $F = \frac{p b d_1}{100}$  i na razie  $\sigma_e = 1000 \text{ kg/cm}^2$ , to przyjąwszy  $M = \beta d^2$ , jest  $d_1 = \sqrt{\frac{M}{\beta}}$ , przyczem współczynnik  $\beta$  wyznaczmy z tabliczki XV. (str. 41.).

Jeżeli mamy  $\sigma_e$  różne od  $1000 \text{ kg/cm}^2$ , to z tabl. XV. odczytamy dla danego  $v = \frac{\sigma_e}{\tau_1}$  odnośny procent  $p$  i obliczamy  $\beta' = \frac{\sigma_e}{1000} \beta$ , więc  $d_1 = \sqrt{\frac{M}{\beta'}}$  . . . . . (105)

Jeżeli teraz ciężar ruchomy nazwiemy  $p_2$ , a ciężar własny płyty wyrażony na  $1 \text{ m}^2$

$$g = 24d_1 + 24a, \text{ wtedy dla } a = 1.5 \text{ cm } g = 24d_1 + 36, \text{ a}$$

$$q = g + p_2 = (p_2 + 36) + 24d_1, \text{ zatem } M = \beta' d_1^2 = \frac{100}{k} [(p_2 + 36) + 24d_1] l^2$$

a stąd  $d_1 = \frac{10 \cdot l}{k \beta'} \left[ 120l + \sqrt{14400l^2 + \beta' k (p_2 + 36)} \right]$  . . . . . (106)

Przykład. Niech będzie  $l=3.0\text{ m}$ ,  $p_2=426\text{ kg/m}^2$ ,  $k=8$ ,  $\sigma_e=809\text{ kg/cm}^2$ ,  $\tau_1=33.6\text{ kg/cm}^2$ , to  $v=\frac{809}{33.6}=24.05$ . Z tablicy otrzymamy (przez interpolację)  $p=0.806\%$ , zaś  $\beta'=\frac{809}{1000} \cdot 694.75=562$ .

Przyjmując  $a=1.5\text{ cm}$ , mamy z równ. 106:

$$d_1 = \frac{10 \cdot 3.0}{8 \cdot 562} \left[ 120 \cdot 3.0 + \sqrt{14400 \cdot 3.0^2 + 562 \cdot 8(426 + 36)} \right] = 12.3\text{ cm}.$$

$F=0.806 \cdot 12.3=9.92\text{ cm}^2$ . Przyjmiemy więc 10 prętów  $\phi 11\text{ mm}$  ( $F=9.5\text{ cm}^2$ ).

Grubość płyty  $d=12.3+1.5=13.8\text{ cm}$ .

Sprawdzenie natężeń.

Ciężar własny  $g=24(12.3+1.5)=331\text{ kg/m}^2$

Ciężar ruchomy  $p_2=426\text{ „}$

Ciężar całkowity  $757\text{ kg/m}^2$ .

Obciążenie na całą rozpiętość płyty  $Q=757 \times 3=2271\text{ kg}$ .

Moment zgięcia  $M=\frac{2271 \times 300}{8}=85300\text{ kgcm}$ .

Według wzoru (63):

$$\sigma_e = \frac{85300(24.05+15)}{(24.05+10)12.3 \times 9.5} = 837\text{ kg/cm}^2, \text{ a według (64):}$$

$$\tau_1 = \frac{837}{24.05} = 34.8\text{ kg/cm}^2.$$

## § 32. Wyznaczenie wymiarów belki podwójnie uzbrojonej.

Jeżeli podwójne uzbrojenie daliśmy ze względu na zmianę znaku momentu, to dla pierwszego przyjęcia wystarczy obliczyć tak, jak gdyby była tylko wkładka jedna lub tylko druga. Potem można ostatecznie i w tym wypadku obliczać dokładnie.

Melan zastanawiał się nad tą kwestyą szczegółowo w Technische Blätter 1907 i doszedł do następujących wyników w razie, gdy nie zachodzi zmiana znaku momentów.

1. Uzbrojenie w części ciśnionej belki tylko wtedy jest korzystnym, jeżeli uzbrojenie w części ciągniętej nie jest wyczerpanym, bo wtedy nie możemy powiększyć momentu ze względu na ciśnienie betonu; jeżeli mamy drugą wkładkę, moment może być większym. A więc korzyść może być tylko dla procentów żelaza wyższych od idealnego, względnie dla wysokości mniejszej od idealnej.

2. Jeżeli ma równocześnie wystąpić natężenie dopuszczalne w żelazie ciągniętym i w betonie ciśnionym, więc dla idealnego przekroju podwójnie uzbrojonego musi być pewien stosunek między uzbrojeniem na ciśnienie i na ciągnięcie.

I tutaj otrzymamy, jak pierwej, wedle (93)

$$z_1 = \xi' d_1 \text{ i } \xi' = \frac{15\tau_1}{\sigma_e + 15\tau_1}.$$

Jeżeli wstawimy te wartości w równanie (66) na  $z_1$  i jeżeli nazwiemy  $\frac{\alpha}{d} = \alpha$ ,  $\frac{\alpha_1}{a} = \alpha_1$ , a stąd  $\frac{\alpha_1}{d_1} = \frac{\alpha_1}{d-\alpha} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha}$ , to otrzymamy wedle Haberkalta  $\xi'^2 d_1^2 + \frac{30(F+F')}{b} \xi' d_1 = \frac{30}{b} (F' a_1 + F d_1)$ ,

a stąd  $15(1-\xi')F - 15\left(\xi' - \frac{\alpha_1}{1-\alpha}\right) F' = \frac{1}{2} b \xi'^2 d_1 \dots \alpha$ , dalej

$$I_1 = \frac{M' \xi' d_1}{\tau_1} = \frac{1}{3} b \xi'^3 d_1^3 + 15[F'(\xi' d_1 - a_1)^2 + F(d_1 - \xi' d_1)^2]$$

$$15(1-\xi')^2 F + 15\left(\xi' - \frac{\alpha_1}{1-\alpha}\right)^2 F' = \frac{\xi' M}{d_1 \tau_1} - \frac{1}{3} b \xi'^3 d_1 \dots \beta$$

Z równań  $\alpha$ ) i  $\beta$ ) otrzymamy wreszcie

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{\xi' \left[ M + \frac{1}{6} \xi' \left( \xi' - \frac{3\alpha_1}{1-\alpha} \right) \tau_1 b d_1^2 \right]}{15 \left( 1 - \frac{\alpha_1}{1-\alpha} \right) (1-\xi') \tau_1 d_1} \\ F' &= \frac{\xi' \left[ M - \frac{1}{6} \xi' (3-\xi') \tau_1 b d_1^2 \right]}{15 \left( 1 - \frac{\alpha_1}{1-\alpha} \right) \left( \xi' - \frac{\alpha_1}{1-\alpha} \right) \tau_1 d_1} \end{aligned} \right\} \dots (107)$$

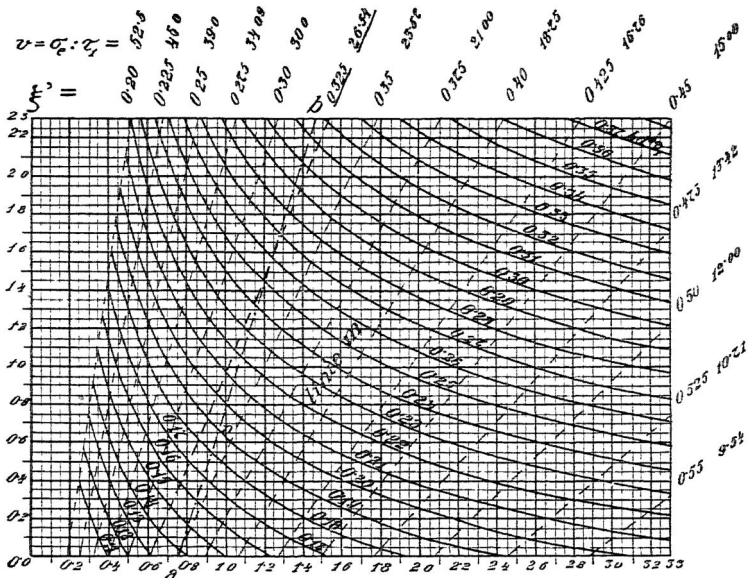
Widzimy, że potrzebne  $F$  i  $F'$  zmieniają się ze względu na  $M$  wedle równania linii prostej, jeżeli  $\sigma_e$  i  $\tau_1$  przyjmiemy jako stałe. Dla danego  $M$  i przyjętego  $F$  lub  $p = \frac{100 F}{bd}$ , przy czem to  $p$  musi być większe, niż  $p$  idealne dla pojedynczego uzbrojenia, otrzymamy tylko pewne  $F'$ , czyli  $p_1 = \frac{100 F'}{bd}$ ; nazywa się ono idealnem uzbrojeniem na ciśnienie (n. *idealle Druckarmierung*), chociaż tu  $\sigma_e'$  będzie mniejszem od dopuszczalnego.

Z dwu równań (107) wynika

$$F' = \frac{1-\xi'}{\xi' - \frac{\alpha_1}{1-\alpha}} F - \frac{\xi'^2 b d_1}{30 \left( \xi' - \frac{\alpha_1}{1-\alpha} \right)} \dots (108)$$

Dla przyjętego  $F$  można więc zawsze obliczyć  $F'$ .

Melan sporządził następną wykresną tablicę<sup>1)</sup> (rys. 47) dla  $a=0.1d$ .



Rys. 47.

Dla przyjętego  $\tau_1$  i  $d$  szuka się  $m = \frac{M}{bd^2\tau_1}$ , każdy punkt tej linii oznacza dwa odpowiednie punkty  $p$  (na osi poziomej) i  $p_1$  (na osi pionowej). Dla danego stosunku  $\tau_1$  i  $\sigma_e$  kreśli się promień  $ab$ . Punkt  $n$  daje nam  $p$  i  $p_1$ , dla których osiąga się równocześnie  $\tau_1$  i  $\sigma_e$ . N. p. przypuśćmy, że mamy dany moment  $M=6.8 tm$ ,  $b=0.3 m$ ,  $d=0.6 m$ ,  $\tau_1=33 kg/cm^2$ ,  $\sigma_e=1000 kg/cm^2$ . Będzie wtedy  $m = \frac{680000}{30 \cdot 60^2 \cdot 33} = 0.19$ , każdy punkt krzywej 0.19 na rys. 47 wskazuje nam procenty  $p$  i  $p_1$ , których użyć możemy. Jeżeli będzie tylko uzbrojenie w części ciągnionej, a  $p_1=0$ , to widzimy z tablicy, że  $p=2.43\%$ . Jednak wtedy byłoby wprowadzić  $\tau_1=33 kg/cm^2$ , ale według linii ukośnych w tym miejscu byłoby  $\sigma_e=10.78.33=356 kg/cm^2$ , a więc żelazo byłoby zupełnie niewyzyskanem. Gdybyśmy chcieli wyzyskać żelazo, a więc  $v=1000:33=30$ , to przecięcie się linii  $m=0.19$  z prostą ukośną 30 wskazuje, że musiałyby być  $p=0.79$ , a  $p_1=0.87\%$ , a więc  $p+p_1=1.66$ , zatem znacznie mniejsze, niż w poprzednim wypadku. Najmniejszą ilość ma-

<sup>1)</sup> Por. Technische Blätter 38 Jahrg. 1907, Heft 4.

teryątu dla obustronnego uzbrojenia otrzymamy dla punktu przecięcia się prostej  $ab$  z krzywą 0.19 w punkcie  $n$ . Otrzymamy mianowicie  $p=0.96$ ,  $p_1=0.67$ , więc  $p+p_1=1.63$ .

Trzeba jeszcze przy mostach i niektórych budowlach zwracać uwagę na ciągnięcie betonu. Haberkalt udowadnia <sup>1)</sup>, że dla idealnych przekrojów i wogóle dla przekrojów w praktyce używanych ciągnięcie betonu w płytach podwójnie uzbrojonych jest zawsze mniejsze niż dopuszczalne, więc nie potrzeba go wcale liczyć.

Haberkalt podaje też konstrukcję, zapomoącą której można wykreślnie wyznaczyć długość prętów górnych i dolnych. Pomijamy ją tutaj. Wspominamy tylko tyle, że zmiana prętów dolnych następuje grupami, dla których należy wyznaczyć odnośne  $M$ , a dla nich obliczyć potrzebną grubość wkładki górnej z równań lub tablic.

Jeżeli wyznaczmy dla belki idealnej  $z_1$  i  $\xi'$  z rów. (93) i (94) dla rozmaitych mieszanin betonu, to otrzymamy, jak pierwszej n. p. dla mieszaniny betonu  $470 \text{ kg/cm}^2$  dla budownictwa  $\xi'=0.3865$ . Przyjąwszy  $\alpha=\alpha_1=0.1 d$ , zatem  $\alpha=\alpha_1=0.1$  a  $\tau_1=42 \text{ kg/cm}^2$ , otrzymamy z (107)

$$F = \frac{0.3865 \left[ M + \frac{1}{6} 0.3865 \left( 0.3865 - \frac{0.3}{0.9} \right) 42 \cdot b d_1^2 \right]}{15 \left( 1 - \frac{0.1}{0.9} \right) (1 - 0.3865) 42 d_1}, \text{ czyli}$$

$$F = 0.001112 \frac{M}{d_1} + 0.000160 b d_1. \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

$$F' = \frac{0.3865 \left[ M - \frac{1}{6} 0.3865 (3 - 0.3865) 42 \cdot b d_1^2 \right]}{15 \left( 1 - \frac{0.1}{0.9} \right) \left( 0.3865 - \frac{0.1}{0.9} \right) 42 d^2}, \text{ czyli}$$

$$F' = 0.002478 \frac{M}{d_1} = 0.0175 b d_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

W podobny sposób możemy obliczyć wzory dla innych mieszanin i dla mostów. Zestawiwszy je, otrzymamy tabliczkę XXII, dla wzorów

$$\left. \begin{aligned} F &= A \frac{M}{d_1} + B b d_1 \\ F_1 &= A_1 \frac{M}{d_1} - B_1 b d_1 \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

<sup>1)</sup> Porównaj Haberkalt u. Postuvanschitz: Die Berechnung der Tragwerke aus Eisenbeton II. wyd. str. 70.

Tabliczka XXII.  
Spółczynniki równań 110 i 111.

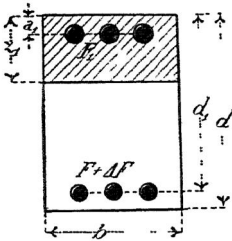
Plość cementu w $kg\ m^3$	Rodzaj budowli	$\xi'$	$\tau_1$	$\sigma_c$	$A$ +	$B$ $\pm$	$A_1$ +	$B_1$ +
470	budown.	0·3865	42	1000	0·001125	+0·000162	0·002506	0·0175
	$l=2$	0·3833	33·4	806	0·001392	+0·000148	0·003161	0·0176
	mosty $l=22$	0·3931	37·4	866	0·001292	+0·000190	0·002795	0·0178
350	budown.	0·3569	37·0	1000	0·001125	+0·000058	0·002945	0·0171
	$l=2$	0·3536	29·4	806	0·001357	+0·000048	0·003718	0·0170
	mosty $l=22$	0·3665	33·4	866	0·001298	+0·000088	0·003215	0·0173
280	budown.	0·3243	32·0	1000	0·001122	-0·000018	0·003565	0·0164
	$l=2$	0·3209	25·4	806	0·001392	-0·000023	0·004515	0·0154
	mosty $l=22$	0·3374	29·4	866	0·001299	+0·000009	0·003805	0·0167



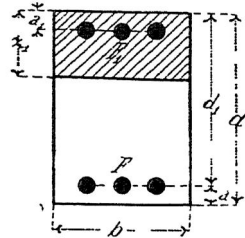
### § 33. Obliczenie belek podwójnie uzbrojonych sposobami Suen-sona i Wuczkovskiego.

Suenson<sup>1)</sup> podaje następujący sposób:

Uzbrojenia podwójnego używa się tylko wtedy, gdy jesteśmy do tego zmuszeni ograniczoną rozporządzalną wysokością. W takim wypadku możemy przyjąć  $d$ , a stąd i  $d_1$  (rys. 48). Dla danych nateżeń dopuszczalnych  $\sigma_e$  i  $\tau_1$  da się w znany sposób obliczyć idealne pojedyncze uzbrojenie dolne  $F$ , odstęp osi obojętnej  $z_1$  i moment  $M'$ , który odpowiada tym wymiarom.



Rys. 48.



Rys. 49.

Jeżeli dany moment  $M$ , to dla reszty momentu  $\Delta M = M - M'$  trzeba dać uzbrojenie górne  $F'^2$ ) i zwiększyć uzbrojenie dolne o  $\Delta F$ . Jeżeli chcemy zatrzymać położenie osi obojętnej, to  $F'\sigma_e' = \Delta F \cdot \sigma_e$  i dalej mamy  $F'\sigma_e' (d_1 - a_1) = \Delta M = M - M'$ , a stąd

$$F' = \frac{M - M'}{\sigma_e' (d_1 - a_1)} \quad \dots \quad (112)$$

$\sigma_e'$  możemy wyznaczyć z równ.  $\sigma_e' = 15\tau_1 \frac{z_1 - a_1}{z_1}$ , a wreszcie

$$\Delta F = \frac{F'\sigma_e'}{\sigma_e} \quad \dots \quad (113)$$

Np. dla  $\sigma_e = 1000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\tau_1 = 42 \text{ kg/cm}^2$ , mamy  $z_1 = 0.3865 d_1$ ,  $F = 0.0081 b d_1$ ,  $M' = 7.071 b d_1^2$ . Dalej będzie  $F' = \frac{M - 7.071 b d_1^2}{\sigma_e' (d_1 - 2)}$ ,  $\sigma_e' = 15 \cdot 42 \cdot \frac{0.3865 d_1 - 2}{0.3865 d_1} = 630 \left(1 - \frac{2}{0.3865 d_1}\right)$ .

Dla:  $b = 100 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $M = 367000 \text{ kgcm}$  będzie:  $z_1 = 0.3865 \cdot 20 = 7.73 \text{ cm}$ ,  $F = 0.0081 \cdot 100 \cdot 20 = 16.2 \text{ cm}^2$ ,  $M' = 7.071 \cdot 100 \cdot 20^2 = 282840 \text{ kgcm}$ ,  $\sigma_e' = 630 \left(1 - \frac{2}{0.3865 \cdot 20}\right) = 467 \text{ kg/cm}^2$ ,  $F' = \frac{367000 - 7.071 \cdot 100 \cdot 20^2}{467(20 - 2)} = 10.0 \text{ cm}^2$ .  
 $\Delta F = \frac{10 \cdot 467}{1000} = 4.67 \text{ cm}^2$  czyli  $F + \Delta F = 16.2 + 4.7 = 20.9 \text{ cm}^2$ .

<sup>1)</sup> Porównaj *Beton u. Eisen* 1912 str. 167.

<sup>2)</sup> W rys. 48 i 49 ma być przekrój wkładek ciśnionych oznaczony przez  $F'$ , a nie przez  $F_1$ .

Według Wuczковского postępujemy w następujący sposób.

Nazwijmy  $v = \frac{(d_1 - z_1) \cdot 15}{z_1} = \frac{\sigma_e}{\tau_1}$ . Mamy dalej  $\tau_1 = \frac{M}{I} z_1$ , więc  $I = \frac{M}{\tau_1} z_1$ .

Przyjąwszy  $\sigma_e$  i  $\tau_1$  możemy obliczyć  $z_1 = \frac{15}{15+v} d_1$ . (114)

a stąd potrzebne  $I$ .

Ze względu na oś obojętną mamy (rys. 49)

$$15F'(z_1 - a_1) - 15F(d_1 - z_1) + \frac{bz_1^2}{2} = 0 \quad (115)$$

dalej  $15F'(z_1 - a_1)^2 + 15F(d_1 - z_1)^2 + \frac{bz_1^3}{3} = I \quad (116)$

Z tych dwu równań możemy obliczyć  $F$  i  $F'$ ; otrzymamy mianowicie

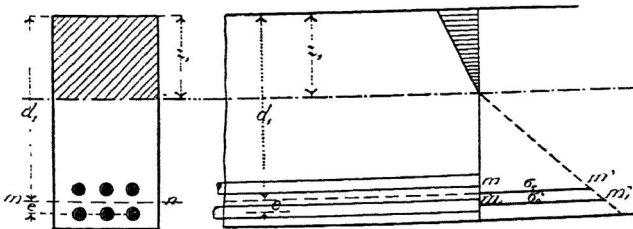
$$F = \frac{\frac{bz_1^2}{6} (z_1 - 3a_1) + \frac{M}{\tau_1} z_1}{15(d_1 - z_1)(d_1 - a_1)} \quad (117)$$

$$F' = \frac{\frac{M}{\tau_1} z_1 - \frac{bz_1^2}{6} (3d_1 - z_1)}{15(d_1 - a_1)(z_1 - a_1)} \quad (118)$$

Z rów. (118) widzimy, kiedy wogóle potrzebne jest uzbrojenie podwójne, a mianowicie wtedy, gdy licznik jest dodatni, więc  $\frac{M}{\tau_1} z_1 > \frac{bz_1^2}{6} (3d_1 - z_1)$ .

### § 34. Wkładki szerokie.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że żelazo jest skupione w jednym punkcie i natężenie w wkładce żelaznej jest stałym.



Rys. 50.

Możemy to przypuszczenie zrobić, jeżeli wkładka składa się z prętów okrągłych, ułożonych w jednym rzędzie. Inaczej się



żałoby dodać do odkształceń, wywołanych wskutek ciśnienia głównego.

Jeżelibyśmy płytę obliczali dla natężenia mniejszego, niż dopuszczalne, więc n. p. dla  $\tau_1' = \frac{\tau_1}{2}$ , to idealne natężenie było-

by  $\tau_1' = \tau_1 - \frac{1}{4} \frac{\tau_1}{2} = 0.875\tau_1$ , czyli, że natężenie w belce głównej należałoby o 12% zmniejszyć, czego jednak rozmaite rozporządzenia dotychczas nie uwzględniają.

Jednak i bez względu na to, lepiej jest przyjąć trochę większą grubość płyty, niż wypada z obliczenia dla natężenia dopuszczalnego, więc płytę obliczać dla natężenia mniejszego n. p. 15 do 25  $kg/cm^2$ . Rozporządzenie pruskie zresztą przepi-suje wyraźnie, że najmniejsza grubość płyty może być 8 *cm*.

Rozporządzenie ministeryalne dla budownictwa z r. 1911 brzmi:

§ 5. ust. 12. Płyt o mniejszej grubości, niż 6 *cm* nie uwzględnia się w rachunku jako współdziałających.

Rozp. dla mostów § 5 ust. 10. Płyt o mniejszej grubości, niż 8 *cm* nie uwzględnia się w rachunku jako współdziałających.

Jeżeli oś obojętna znajduje się w płycie, to wszystko jedno, jaki jest kształt belki poniżej osi obojętnej. Wzory dla obliczenia wysokości belki teowej są wtedy zupełnie takie same, jak dla obliczenia belki prostokątnej.

Jeżeli zaś oś obojętna wychodzi z płyty, to wzory odpowiednio się zmieniają.

Nazwijmy  $\frac{b_1}{b} = \kappa$ , to otrzymamy z wzoru (70), przyjąwszy

$$F = \frac{p \cdot db}{100}, \quad e = cd_1$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \left[ -\frac{c(1-\kappa) + 0.15p}{\kappa} \right] d_1 + \\ &+ \sqrt{\left[ -\frac{c(1-\kappa) + 0.15p}{\kappa} \right]^2 d_1^2 + \frac{c^2 d_1^2 (1-\kappa) + 0.3pd_1^2}{\kappa}} \\ z_1 &= \left[ -\frac{c(1-\kappa) + 0.15p}{\kappa} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\left( \frac{c(1-\kappa) + 0.15p}{\kappa} \right)^2 + \frac{c^2(1-\kappa) + 0.3p}{\kappa}} \right] d_1 = B d_1 \quad (120) \end{aligned}$$

Dalej otrzymamy z równ. (71), (72) i (120)

$$\sigma_e = \frac{1}{b} \frac{45 \cdot M \cdot (1-B)d_1}{B^3 d_1^3 - (B-c)^3 (1-x) d_1^3 + 0.45 p (1-B)^2 d_1^3} =$$

$$= \frac{45(1-B)}{B^3 - (B-c)^3 (1-x) + 0.45 p (1-B)^2} \cdot \frac{M}{b d_1^2} = C \frac{M}{b d_1^2}$$

więc  $d_1 = \sqrt{\frac{C M}{\sigma_e b}} = \sqrt{\frac{45(1-B)}{\sigma_e [B^3 + (B-C)^3 (1-x) + 0.45 p (1-B)^2]} \cdot \frac{M}{b}}$

$$d_1 = C_1 \sqrt{\frac{M}{b \sigma_e}} \quad \dots \quad (121)$$

Mając te wzory, możemy obliczać tabliczki dla różnych  $x$  i  $C^1$ ).

Ze względu na natężenie betonu otrzymamy

$$\tau_1 = \frac{1}{b} \frac{3 \cdot M \cdot B d_1}{B^3 d_1^3 - (B-C)^3 (1-x) d_1^3 + 0.45 p (1-B)^2 d_1^3} =$$

$$= C' \frac{M}{b d_1^2}, \text{ a stąd } d'_1 = \sqrt{\frac{C' M}{\tau_1} \cdot \frac{1}{b}} = C_1' \sqrt{\frac{M}{b \tau_1}} \quad \dots \quad (122)$$

### § 36. Wyznaczenie wymiarów belki teowej idealnej.

Chodzi nam zwykle o najtańszą belkę. Jeżeli natężenie dopuszczalne zostanie osiągnięte dla żelaza i betonu, a więc dla przekroju idealnego, otrzymamy, dla  $k > \frac{1}{4}$ , dla cen materiałów austriackich zarazem najtańszą belką, jak to twierdzi Haberkalt na podstawie wielu obliczeń. Jeżeli  $k < \frac{1}{4}$ , to możemy przez powiększenie wysokości żebra zmniejszyć przekrój żelaza o tyle, że belka będzie pomimo większej ilości betonu tańsza<sup>2)</sup>. Różnica w kosztach będzie jednak nie wielką tak, że i tutaj będziemy przede wszystkim szukać przekrojów idealnych.

<sup>1)</sup> Porównaj rozprawkę autora w Beton u. Eisen 1904, V zeszyt str. 309 i Beton u. Eisen 1905 zes. VII. str. 175.

<sup>2)</sup> Porównaj artykuł Prokscha w Beton u. Eisen (1911 str. 200). Najtańszy przekrój zależny jest od stosunku ceny betonu do ceny żelaza a także od kosztu opierzenia i wygładzenia cementem. Autor podaje wzory dla wysokości najkorzystniejszej. — Völker i Richter (Handbuch für Eisenbetonbau II. wyd., I. tom str. 599) twierdzą dla stosunków niemieckich, że zawsze taniej jest przyjmować wysokość większą, niż dla przekroju idealnego, a wysokość belki teowej można przyjmować, jak dla belki prostokątnej. O tem zresztą później obszerniej pomówimy.

Nazwijmy  $\frac{b_1}{b} = k$ ,  $\frac{e}{d} = \delta$ ,  $\frac{a}{d} = \alpha$ ,  $\frac{\tau_1}{\sigma_e} = \gamma$ ,  $\frac{z_1}{d} = \xi$ ,

idealny przekrój wkładki  ${}^iF$ .

Mamy ogólnie  $\frac{\tau_1}{\sigma_e} = \gamma = \frac{z_1}{15(d-a-z_1)}$ , a stąd

$$z_1 = \frac{15(d-a)\gamma}{1+15\gamma} \dots \dots \dots (123)$$

więc

$$\xi = \frac{z_1}{d} = \frac{15\gamma(1-\alpha)}{1+15\gamma} \dots \dots \dots (124)$$

A więc odstęp osi obojętnej jest od  $e$  niezależnym, jeżeli tylko przekrój jest idealnym. Przypuśćmy na razie, że  $\delta < \xi$ , czyli  $e < z_1$ , więc oś obojętna  $A$  (przy obliczeniu wedle fazy II  $b$ , gdy przy obliczeniu na ciągnięcie wedle fazy I wedle rozporządzenia nazwiemy oś obojętną  $B$ ), przecina żebro, to, jak wiemy, wedle równ. (70)

$$z_1 = -\frac{(b-b_1)e + 15F}{b_1} + \sqrt{\left[\frac{(b-b_1)e + 15F}{b_1}\right]^2 + \frac{(b-b_1)e^2 + 30Fd_1}{b_1}} \quad (125)$$

Równanie (125) możemy inaczej napisać

$${}^iF = b_1(z_1 - e)^2 + z_1^2 - (z_1 - e)^2 = \frac{b_1 z_1^2 + 2z_1 e(b-b_1) - e^2(b-b_1)}{30(d_1 - z_1)},$$

a wstawivszy za  $z_1$  wartość z równania (123)

$${}^iF = \frac{15\gamma^2 b_1 d_1}{2(1+15\gamma)} + (b-b_1)e \left[ \gamma - \frac{e(1+15\gamma)}{30d_1} \right] \dots \dots (126)$$

albo po wstawieniu wartości za  $\xi$  z równania (124)

$${}^iF = C_1 b d \dots \dots \dots (127)$$

$$\text{jeżeli} \quad C_1 = \frac{\gamma}{2} \left[ k\xi + \delta(1-k) \left( 2 - \frac{\delta}{\xi} \right) \right] \dots \dots \dots (128)$$

Moment, który wywołuje w idealnym przekroju  $\tau_1$  i  $\sigma_e$ , nazwijmy momentem idealnym  ${}^iM$ , to

$$15{}^iM(d_1 - z_1) = \sigma_e I_1, \text{ zatem}$$

$${}^iM = \frac{\frac{1}{3} b z_1^3 - \frac{1}{3} (z_1 - e)^3 (b - b_1) + 15{}^iF(d_1 - z_1)^2}{15(d_1 - z_1)} \sigma_e$$

$${}^iM = \sigma_e \left[ {}^iF(d_1 - z_1) + \frac{b_1(z_1 - e)^3 + b e(3z_1^2 - 3z_1 e + e^2)}{45(d_1 - z_1)} \right]$$

a ze względu na (123)

$${}^iM = \sigma_e \left[ {}^iF(d_1 - z_1) + \gamma \frac{b_1(z_1 - e)^3 + b e(3z_1^2 - 3z_1 e + e^2)}{3z_1} \right]$$

albo po wprowadzeniu  $k$ ,  $\delta$  i  $\xi$

$${}^iM = C_2 b d^2 \sigma_e, \quad \dots \quad (129)$$

$$\text{jeżeli } C_2 = \frac{{}^iF(d_1 - z_1)}{b d^2} + \frac{\gamma}{3\xi} \left[ k(\xi - \delta)^3 + \delta(3\xi^2 - 3\xi\delta + \delta^2) \right]$$

Ze względu na (127)  ${}^iF \cdot \frac{d_1 - z_1}{b d^2} = C_1 \frac{d_1 - z_1}{d} = C_1 \frac{\xi}{15\gamma}$ , więc

$$C_2 = \frac{C_1 \xi}{15\gamma} + \frac{\gamma}{3\xi} [k(\xi - \delta)^3 + \delta(3\xi^2 - 3\xi\delta + \delta^2)] \quad \dots \quad (130)$$

Jeżeli powiększamy grubość płyty, to wzrasta  $\delta$ , a wtedy  $C_1$  i  $C_2$ , a zatem  ${}^iF$  i  ${}^iM$ . Gdy  $e = z_1$ , otrzymamy największe  ${}^iF$  i najw.  ${}^iM$ , wtedy  $\delta = \xi$  a  $k = 1$ , co wstawivszy w (127) i (125)

$$\text{otrzymamy najw. } {}^iF_1 = C_1' b d, \quad C_1' = \frac{\gamma \xi}{2} \quad \dots \quad (131)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{zaś najw. } {}^iM = C_2' b d^2 \sigma_e \quad \dots \quad \dots \\ C_2' = \frac{C_1' \xi}{15\gamma} + \frac{\gamma \xi^2}{3} = \frac{1 + 10\gamma}{30} \xi^2 \quad \dots \quad \dots \end{array} \right\} \quad \dots \quad (132)$$

Jeżeli  $e$  jeszcze wzrasta, to, najw.  ${}^iF$  i najw.  ${}^iM$  pozostają te same, bo oblicza się wtedy przekrój, jak dla belki prostokątnej, więc równania powyższe są ważne też dla belki prostokątnej.

### § 37. Wyznaczenie wymiarów belki idealnej żebrowej ze względu na ciągnięcie.

Tu trzeba by dwa wypadki rozróżnić, czy oś obojętna  $B$  przecina płytę czy żebro. Ograniczymy się jednak tylko do drugiego wypadku, bo przy belkach żebrowych pierwszy wypadek zachodziłby tylko przy niestosunkowo grubej płycie.

Tu jednak mogą znów zajść dwa wypadki: Oś obojętna  $A$  (w fazie  $\Pi b$ ) albo przecina płytę albo żebro (rys. 52).

Nazwijmy  $z_1' = \xi' d$ , to najprzód niech będzie

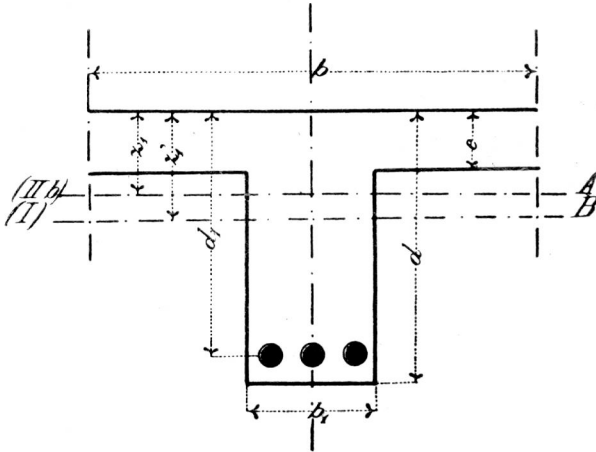
$$\text{I. } z_1 > e \text{ i } z_1' > e$$

$z_1'$  wyznacza równanie  $z_1' = -B_1 + \sqrt{B_1^2 + D_1} = \xi' d$ , przyczem wedle Haberkalta <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Haberkalt i Postuvanschitz: Die Berechnung der Tragwerke aus Eisenbeton II. wyd. str. 102.

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= C_3 d, \quad D_1 = C_4 d^2 \\ C_3 &= \frac{2k + 5\delta(1-k) + 75 C_1}{3k} \\ C_4 &= \frac{2k + 5\delta^2(1-k) + 150 C_1(1-\alpha)}{3k} \end{aligned} \right\} \dots \dots (133)$$

$$\xi' = -C_3 + \sqrt{C_3^2 + C_4} \dots \dots \dots (134)$$



Rys. 52.

$\tau_2$  da się teraz wyrazić wedle równ. (34) i (35), tylko należy tu wstawić  $iM$  zamiast  $M$ , z równ. (129) i  $iF$  zamiast  $F$  z równ. (126)  $\tau_2$  da się wyrazić teraz przez  $\sigma_e$  i tak otrzymamy  $\tau_2 = C_8 \sigma_e$

$$\left. \begin{aligned} C_8 &= \frac{0.4(1-\xi)C_2}{C_5 + 0.4C_6 + 15C_7} \\ C_5 &= \frac{\xi^3 - (1-k)(\xi-\delta)^3}{3}, \quad C_6 = \frac{k(1-\xi)^3}{3}, \quad C_7 = C_1(1-\xi_1-\alpha)^2 \end{aligned} \right\} (135)$$

II.  $z_1 < e, z_1 > e'$ .

W podobny sposób Haberkalt otrzymuje

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= C_8' \sigma_e \\ C_8 &= \frac{0.4(1-\xi')C_2'}{C_5' + 0.4C_6' + 15C_7'} \\ C_5' &= \frac{\xi'^3 - (1-k)(\xi'-\delta)^3}{3}, \quad C_6' = \frac{k(1-\xi')^3}{3}, \quad C_7' = \frac{\gamma\xi}{2} (1-\xi'-\alpha)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (136)$$

III.  $z_1 < e, z_1' < e$ .

Tu otrzymamy podobnie

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= C_8'' \sigma_e \\ C_8' &= \frac{0.4(1-\xi')C_2'}{C_5'' + 0.4C_6'' + 15C_7''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (137)$$

\*



$$C_5'' = \frac{\xi'^3}{3}, \quad C_6' = \frac{k(1-\xi')^3 + (1-k)(\delta-\xi')^3}{3}, \quad C_7'' = \frac{\gamma\xi}{2} (1-\xi'-\alpha)^2.$$

Haberkał obliczył powyższe wartości dla szeregu typów belek teowych i wykonał tablice (rys. 53.) dla założenia  $\alpha = \frac{\alpha}{d} = 0.08$ .

Przyjmuje on dla budownictwa

$$k = 0.3, \quad 0.25, \quad 0.20, \quad 0.15, \quad 0.10$$

$$\delta = 0.30, \quad 0.25, \quad 0.20, \quad 0.16, \quad 0.13, \quad 0.10$$

i średnie  $\alpha = 0.08$ ;

dla mostów

$$k = 0.3, \quad 0.25, \quad 0.20, \quad 0.16$$

$$\delta = 0.30, \quad 0.25, \quad 0.20, \quad 0.16, \quad 0.13.$$

Dla idealnego przekroju mamy wedle (124) następną tabliczkę.

Tabliczka XXIII.

Stosunek mieszany kg na 1 m <sup>3</sup> mieszany	l w m	$\tau_1$ w kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_e$	$\gamma = \frac{\tau_1}{\sigma}$	$\xi = \frac{z_1}{d} = \frac{13.8\gamma}{1+15\gamma}$
470	4	33.8	812	0.0416	0.354
	20	37.0	860	0.0430	0.361
350	4	29.8	812	0.0367	0.327
	20	33.0	860	0.0384	0.336
280	4	25.8	812	0.0317	0.297
	20	29.0	860	0.0337	0.309

dla budownictwa

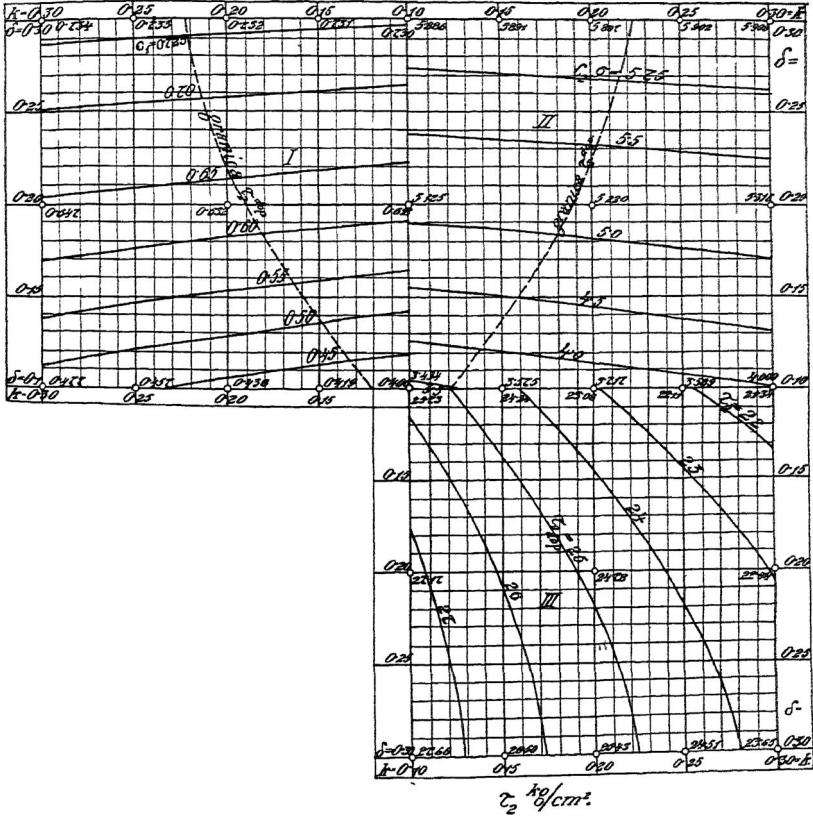
Tabliczka XXIV.

Stosunek mieszany	$\tau_1$	$\sigma_e$	$\gamma = \frac{\tau_1}{\sigma}$	$\xi = \frac{z_1}{d}$
470	42	1000	0.0420	0.356
350	37	1000	0.0370	0.328
280	32	1000	0.0320	0.298

Aby wytlómaczyć używanie tablic Haberkalta podajemy tu jedną z nich dla mieszaniny 470 kg/cm<sup>3</sup> dla budownictwa (rys. 53) i robimy następujący przykład:

$$F = C \cdot \frac{bd}{100}$$

$$M = (C_1 \cdot \sigma) \cdot bd^2$$



Rys. 53.

Dane:  $b = 1.0m = 100cm$ , najw  $M = 1340000 kgcm$ , stos. mieszan.  $470kg/m^3$ .  
 Płyta dla danego obciążenia jest gruba 12 cm. Przyjmujemy na razie  $d = 60cm$ , i  $k = 0.2$ , więc  $\delta_1 = \frac{12}{60} = 0.2$ , zatem otrzymamy z tablicy  $M = 5.22bd^2 = 1340000 kgcm$ , stąd  $d = 50.7cm$  dla  $\delta_1 = \frac{e}{d} = \frac{12}{50.7} = 0.237$ . Dla tego  $\delta_1$  otrzymamy z tablicy  $M = 5.55bd^2 = 1340000 kgcm$ , stąd  $d = 49.1cm$ . Lecz punkt odnośny na tablicy leży na lewo od granicy  $\tau_2$ , widzimy więc, że  $k$  jest za małe. Przyjmy więc od razu  $k = 0.22$ , a wtedy dla  $d = 49.1$ ,  $\delta = \frac{12}{49.1} = 0.245$ ,  $M = 5.60bd^2 = 1340000 kgcm$ , więc  $d = 48.9cm$ , a że  $\alpha = 0.08$ ,  $a = 0.08 \cdot 48.9 = 3.9$  więc  $d_1 = 45cm$ .

Mamy teraz  $\delta_3 = \frac{12}{48.9} = 0.245$  i  $k = 0.22$ , bierzemy z pierwszego odcinka tablicy XIII.  $F = 0.685 \frac{100 \cdot 48.9}{100} = 33.5$ . A że  $k = 0.22$ , więc  $b_1 = 0.22 \cdot 100 = 22 \text{ cm}$ .

Wkładkę umieszczamy w 2 rzędach, wskutek tego będzie natężenie większe, więc  $F$  musi być większe. Mamy  $z_1 = 0.356 \cdot 49 = 17.4$ ,  $d_1 - z_1 = 27.6$ . Ze względu na wkładkę w dwu rzędach uwzględniamy odstęp 2 cm, zatem  $F = \frac{27.6 + 2}{27.6} \cdot 33.5 = 34.9$ , więc 6 prętów po 28 mm,  $F = 36.9 \text{ cm}^2$ .

Najmniejsze szerokości żeber, przy których możliwym jest uzbrojenie idealne, podajemy w tabliczce. Jeżeli mniejsza jest szerokość żebra, to musi być wtedy większe uzbrojenie, aby otrzymać ciągnięcie jeszcze w granicach dopuszczalnych.

Tabliczka XXV.

budownictwo.      Wartości  $\alpha = \frac{b_1}{b}$       mosty.

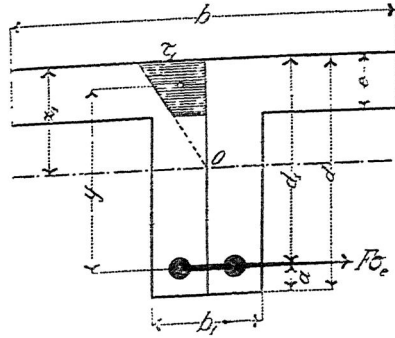
$\delta = \frac{e}{d}$	470	350	280	470		350		280	
				$l=4$	20	4	20	4	20
0.30	0.223	0.220	0.238	0.280	0.268	0.277	0.270	0.287	0.286
0.25	0.211	0.208	0.229	0.265	0.253	0.264	0.257	0.280	0.277
0.20	0.190	0.189	0.213	0.241	0.230	0.243	0.236	0.260	0.257
0.16	0.165	0.168	0.197	0.215	0.205	0.218	0.211	0.236	0.233
0.13	0.144	0.149	0.178	0.190	0.180	0.194	0.187	0.212	0.209
0.10	0.122	0.124	0.144	—	—	—	—	—	—

### § 38. Obliczenie przybliżone wymiarów belki teowej.

Haberkalt podaje też obliczenie przybliżone dla belki idealnej, które zresztą może być też użyte dla belki teowej o dowolnym procencie uzbrojenia, a więc i wtedy, gdy przyjmiemy wysokość, jak dla belki prostokątnej.

Wedle Haberkalta z rys. 54. mamy  $\tau_1 : \sigma_e = z_1 : 15(d_1 - z_1)$

a stąd  $z_1 = \frac{15\tau_1}{\sigma_e + 15\tau_1} d_1 = \xi_1 d_1 \dots \dots \dots (138)$



Rys. 54.

Ze względu na wkładki żelazne mamy, nie licząc ciśnień w żebrze,

$$M = \int_{d_1-e}^{d_1} b\sigma_y y dy, \text{ a że } \sigma_y = \frac{y-d_1+z_1}{z_1} \tau_1, \text{ więc}$$

$$M = \frac{b\tau_1}{z_1} \int_{d_1-e}^{d_1} (y-d_1+z_1)y dy = \frac{b\tau_1}{z_1} \left[ \frac{y^3}{3} - (d_1-z_1) \frac{y^2}{2} \right]_{d_1-e}^{d_1}$$

Po wstawieniu wartości otrzymamy

$$M = \frac{b\tau_1}{6z_1} \left[ 3z_1(2d_1-e) - e(3d_1-2e) \right] \text{ albo, jeśli } \frac{e}{d_1} = \delta_1,$$

$$M = \frac{\delta_1 \tau_1}{6\xi_1} \left[ 3\xi_1(2-\delta_1) - \delta_1(3-2\delta_1) \right] b d_1^2 \dots \dots \dots (139)$$

Stąd otrzymamy  $d_1 = G_1 \sqrt{\frac{M}{b}} \dots \dots \dots (140)$

jeśli  $G_1 = \sqrt{\frac{6\xi_1}{\delta_1 \tau_1 [3\xi_1(2-\delta_1) - \delta_1(3-2\delta_1)]}} \dots \dots \dots (141)$

Ponieważ  $b \int_{d_1}^e \sigma_y dy = F\sigma_e$ , po wstawieniu wartości za  $\sigma_y$

i  $\sigma_e = \frac{15 \cdot \tau_1 (d_1 - z_1)}{z_1}$  otrzymamy  $\frac{b\tau_1 e}{z_1} \left( z_1 - \frac{e}{2} \right) = F \frac{15 \tau_1 (d_1 - z_1)}{z_1}$ , a stąd

$$F = \frac{be(2z_1 - e)}{30(d_1 - z_1)} = \frac{\delta_1(2\xi_1 - \delta_1)}{30(1 - \xi_1)} b d_1 \dots \dots \dots (142)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{albo } {}^iF &= G_2 b \bar{a}_1, \text{ jeśli} \\ G_2 &= \frac{\delta_1 (2\xi_1 - \delta_1)}{30(1 - \xi_1)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (143)$$

Obliczenie  $\bar{a}_1$  i  ${}^iF$  mogłoby nastąpić tylko przez próby, bo  $\delta_1$  jest funkcją  $\bar{a}_1$ .

Dla budownictwa możemy to łatwo zrobić wedle tabl. XXVI., w której dla rozmaitych  $\delta_1$  wyznaczono  $G_1$ ,  $10G_1\delta_1$  i  $100G_2$ .

$$\text{Mamy bowiem } \delta_1 = \frac{e}{\bar{a}_1} = \frac{e}{G_1 \sqrt{\frac{M}{b}}}, \text{ więc}$$

$$10G_1\delta_1 = \frac{10e}{\sqrt{\frac{M}{b}}} \dots \dots \dots (144)$$

Dla danych  $e$ ,  $M$  i  $b$ , wyznaczamy z (144)  $10G_1\delta_1$ , szukamy w tabliczce odpowiedniego  $\delta_1$  a stąd  $\bar{a}_1$ , wreszcie z (143)  ${}^iF$ .

Tabliczka XXVI.

Budownictwo.

Stosunek mieszający.

$\delta_1 = \frac{e}{\bar{a}_1}$	470			350			280 kg/cm <sup>3</sup>		
	$G_1$	$10G_1\delta_1$	$100G_2$	$G_1$	$10G_1\delta_1$	$100G_2$	$G_1$	$10G_1\delta_1$	$100G_2$
0.08	0.588	0.470	0.301	0.629	0.503	0.263	0.681	0.545	0.224
0.10	0.536	0.536	0.366	0.574	0.574	0.318	0.623	0.623	0.271
0.12	0.499	0.599	0.426	0.536	0.643	0.369	0.582	0.698	0.313
0.14	0.471	0.660	0.482	0.506	0.709	0.416	0.551	0.772	0.351
0.16	0.450	0.720	0.533	0.484	0.775	0.459	0.528	0.845	0.386
0.18	0.433	0.780	0.580	0.467	0.841	0.498	0.511	0.919	0.416
0.20	0.420	0.839	0.623	0.454	0.907	0.533	0.497	0.993	0.443
0.22	0.409	0.900	0.661	0.442	0.974	0.563	0.486	1.070	0.465
0.24	0.400	0.961	0.695	0.434	1.042	0.589	0.478	1.148	0.484
0.26	0.393	1.023	0.725	0.427	1.111	0.612	0.472	1.228	0.498
0.28	0.388	1.086	0.750	0.422	1.183	0.630	0.468	1.311	0.509
0.30	0.384	1.151	0.771	0.419	1.256	0.643	0.466	1.398	0.516
0.32	0.380	1.217	0.788	0.416	1.332	0.653	0.465	1.488	0.519
0.34	0.378	1.286	0.800	0.415	1.411	0.659			
0.36	0.377	1.356	0.808						
0.3865	0.376	1.454	0.812						



1:3 (470 kg/m<sup>3</sup>). Wyznaczyć wysokość i uzbrojenie żebra przy zupełnem wyzyskaniu betonu na ciśnienie i żelaza na ciągnięcie.

$$\text{Według wzoru (144)} \quad 10G_1\delta_1 = \frac{10e}{\sqrt{\frac{M}{b}}} = \frac{10 \times 16}{\sqrt{\frac{2,100,000}{160}}} = 1.396$$

Według tablicy XXVI. dla  $10G_1\delta_1 = 1.356 \dots \delta_1 = 0.36$ , dla  $10G_1\delta_1 = 1.454 \dots \delta = 0.3865$

$$\text{Interpolując, otrzymamy } \delta_1 = 0.371. \text{ Zatem wysokość żebra } d_1 = \frac{e}{\delta_1} = \frac{16}{0.371} = 43 \text{ cm.}$$

Z tabeli XXVI. otrzymamy dla  $\delta_1 = 0.360$ ,  $100G_2 = 0.808$ , dla  $\delta_1 = 0.3865 \dots 100G_2 = 0.812$ , interpolując otrzymamy dla  $\delta_1 = 0.371 \dots 100G_2 = 0.8097$ , stąd  $G_2 = 0.008097$ .

$$\text{Według wzoru (143)} \quad F = G_2 \cdot b \cdot d_1 = 0.008097 \cdot 160 \cdot 43 = 55.6 \text{ cm}^2.$$

Przyjmuję  $8\phi 30 (F = 56.55 \text{ cm}^2)$ , szerokość żebra  $b_1 = 32 \text{ cm}$ .

Całkowita wysokość belki  $d = 43 + 1.5 + 3 + 3 = 50.5 \text{ cm}$ .

Sprawdzenie natężeń. Podług wzoru (70) jest:

$$z_1 = \frac{(160-32)16 + 15 \times 56.55}{32} + \sqrt{\left[\frac{(160-32)16 + 15 \times 56.55}{32}\right]^2 + \frac{(160-32)16^2 + 30 \times 56.55 \times 43}{32}} = 16.4 \text{ cm.}$$

Według (72):

$$I_1 = \frac{1}{3} [160 \times 16^3 - (160-32)(16.4-16)^3] + 15 \times 56.55(43-16.4)^2 = 836670 \text{ cm}^4.$$

Według (71):

$$\tau_1 = \frac{2100000 \times 16.4}{836670} = 41.3 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_e = \frac{15 \times 2100000(43-16.4)}{836670} = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Według (33):

$$A_2 = \frac{0.4 \times 32 \times 50.5 + (160-32)16 + 15 \times 56.55}{0.6 \times 32} = 184$$

$$B_2 = \frac{0.4 \times 32 \times 50.5^2 + (160-32)16^2 + 30 \times 56.55 \times 43}{0.6 \times 32} = 7220$$

Według (32):

$z_1 = 184 + \sqrt{184^2 + 7220} = 18.8 \text{ cm}$ , a ciągnięcie w betonie podług (34):

$$\tau_2 = \frac{0.4 \times 2100000(50.5-18.8)}{964060} = 27.6 \text{ kg/cm}^2, \text{ jeżeli według (35):}$$

$$I_2 = \frac{1}{3} [160 \times 18.8^3 - (160-32)(18.8-16)^3 + 0.4 \times 32(50.5-18.8)^3] + 15 \times 56.55(43-18.8)^2 = 964060 \text{ cm}^4.$$

Dopuszczalne ciągnięcie betonu 1:3 wynosi 25 kg/cm<sup>2</sup>, dopuszczalne ciśnienie 42 kg/cm<sup>2</sup>, a dopuszczalne ciągnięcie żelaza 1000 kg/cm. Wobec przekroczenia natężenia dopuszczalnego na ciągnięcie należałyby powiększyć grubość żebra może do 35 cm.





Z poprzedniego mamy

$$F = \frac{b(2ez_1 - e^2)}{30(d_1 - z_1)} \quad \dots \quad (149)$$

Wstawivszy wartości odnośne otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } 470 \text{ kg/m}^3 \quad F = 0.006227 b d_1 = 0.2613 \frac{b}{100} \sqrt{\frac{M}{b}} \\ \text{dla } 350 \quad \quad \quad F = 0.005326 b d_1 = 0.2415 \frac{b}{100} \sqrt{\frac{M}{b}} \\ \text{dla } 280 \quad \quad \quad F = 0.004426 b d_1 = 0.2199 \frac{b}{100} \sqrt{\frac{M}{b}} \end{array} \right\} \quad (150)$$

Przykład. Dany moment  $M = 2100000 \text{ kgcm}$ , odstęp żeber  $b = 1.6 \text{ m}$  i stosunek mieszanki  $1:3(470 \text{ kg/m}^3)$ .

Wyznaczyć wysokość żebra i płyty oraz uzbrojenie żebra według Allitscha.

$$\text{Według wzoru (148)} \quad d_1 = 0.4197 \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.4197 \sqrt{\frac{2,100,000}{160}} = 48 \text{ cm},$$

$\delta_1 = \frac{e}{d_1} = \frac{1}{5}$ , zatem  $e = \frac{d_1}{5} = \frac{48}{5} = 10 \text{ cm}$ ; wzór powyższy jest więc ważny dla grubości płyty  $e = 10 \text{ cm}$ .

$$\text{Według wzoru (150)} \quad F = 0.006227 b d_1 = 0.006227 \times 160 \times 48 = 47.8 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Przyjmuję } 8 \phi 28 (F' = 49.26 \text{ cm}^2), \text{ szerokość żebra } b_1 = \frac{160}{5} = 32 \text{ cm}.$$

$$\text{Całkowita wysokość belki } d = 48 + 1.5 + 2.8 + 3 = 55.3 \text{ cm}.$$

Sprawdzenie nateżeń. Podług wzoru (70) jest:

$$z_1 = - \frac{(160 - 32)10 + 15 \times 49.26}{32} + \sqrt{\left[ \frac{(160 - 32)10 + 15 \times 49.26}{32} \right]^2 + \frac{(160 - 32)10^2 + 30 \times 49.26 \times 48}{32}} = 18.2 \text{ cm}.$$

Według (72):

$$I_1 = \frac{1}{3} [160 \times 18.2^3 - (160 - 32) \cdot (18.2 - 10)^3] + 15 \times 49.26 (48 - 18.2)^2 = 927466 \text{ cm}^4.$$

Według (71):

$$\tau_1 = \frac{2100000 \times 18.2}{927466} = 41.3 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_s = \frac{15 \times 2100000 (48 - 18.2)}{927466} = 995 \text{ kg/cm}^2.$$

Według (33):

$$A_2 = \frac{0.4 \times 32 \times 55.3 + (160 - 31)10 + 15 \times 49.26}{0.6 \times 32} = 142,$$

$$B_2 = \frac{0.4 \times 32 \times 55.3^2 + (160 - 32)10^2 + 30 \times 49.26 \times 48}{0.6 \times 32} = 5790.$$

Według (32)

$$z_1 = -142 + \sqrt{142^2 + 5790} = 19 \text{ cm},$$

moment bezwładności według (35):

$$I_2 = \frac{1}{3} [160 \times 19^3 - (160 - 32)(19 - 10)^3 + 0.4 \times 32(55.3 - 19)^3] + 15 \times 49.26(48 - 19)^2 = 1157530 \text{ cm}^4.$$

Według (34):

$$\tau_2 = \frac{0.4 \times 2100000(55.3 - 19)}{1157530} = 25.6 \text{ kg/cm}^2.$$

### § 39. Wyznaczenie długości prętów.

Przekrój wkładki żelaznej wyznaczamy według największego momentu. Dla przekroju wkładki po opuszczeniu jednego lub dwu prętów wyznaczamy moment, dla którego jeszcze natężenia dopuszczalne (także na ciągnięcie) nie zostaną przekroczone. Po za miejsce, wskazane tym momentem, należy jeszcze wkładkę przedłużyć, jak to poprzednio poznaliśmy.

### § 40. Wyznaczenie wymiarów belki teowej podwójnie uzbrojonej.

Jak wiadomo, zadanie takie jest nieokreślone. Belkę uzbrajamy podwójnie tylko wtedy, jeśli przyjmiemy mniejszą wysokość belki od idealnej. Przyjmijmy, że mamy dane  $d$ ,  $b$ ,  $b_1$  i  $e$ , a chodzi nam tylko o przekroje  $F$  i  $F'$  takie, aby równocześnie uzyskać największe ciśnienie w betonie i największe ciągnięcie w żelazie, a więc o uzbrojenie idealne.

Aby uzbrojenie było idealne, musi być, jak pierwiej, (rów. 122. i 123.)

$$z = \frac{15(d-a)\gamma}{1+15\gamma}, \quad \xi = \frac{z_1}{d} = \frac{15\gamma(1-a)}{1+15\gamma}.$$

Teraz znowu rozróżniamy dwa wypadki.

I.  $z_1 < e$ , ( $\xi < \delta_1$ )

Dla wyznaczenia osi obojętnej mamy po przekształceniu ostatniego równania na str. 41:

$$z_1^2 + 30 \frac{F'}{b} (z_1 - a_1) - 30 \frac{F}{b} (d_1 - z_1) = 0.$$

Pomnożmy obie strony równania przez  $b$  i wstawmy  $\xi = \frac{z_1}{d}$ ,  $a = \frac{a}{d}$  i  $a_1 = \frac{a_1}{d}$ , to

$$bd\xi^2 + 30F'(\xi - a) - 30F(1 - a - \xi) = 0 \quad . \quad . \quad (151)$$

Dalej mamy według równania (68):

$$z_1^3 + 45 \frac{F'}{b} (d_1 - z_1)^2 + 45 \frac{F'}{b} (z_1 - a_1)^2 = \frac{3Mz_1}{b\tau_1},$$



Podobnie otrzymamy

$$I_i = b \left( z_1^2 e - z_1 d^2 + \frac{e^2}{3} \right) + 15F'(z_1 - a_1)^2 + 15F(d_1 - z_1)^2, \quad (158)$$

a po wstawieniu wartości

$$I_i = b \left( 0.3865^2 \cdot 0.2 - 0.3865 \cdot 0.04 + \frac{1}{3} 0.008 \right) d_1^3 + \\ + 15F^2(0.3865 - 0.1)^2 d_1^2 + 15F(1 - 0.6865)^2 d_1^2 = 0.0171 b d_1^3 + \\ + 1.2312 F' d_1^2 + 5.6456 F d_1^2.$$

Dalej mamy  $42 = \frac{M}{I_i} z_1$ , więc

$$42 = \frac{M}{(0.0171 b d_1 + 1.2312 F' + 5.6456 F) d_1^2} 0.3865 d_1,$$

a stąd

$$51.71 F' + 237.12 F = 0.3865 \frac{M}{d_1} - 0.7182 b d_1, \quad (159)$$

Z równań (157.) i (159.) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} F' &= 0.002379 \frac{M}{d_1} - 0.0135 b d_1 \\ F &= 0.001163 \frac{M}{d_1} - 0.000083 b d_1 \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

Podobnie otrzymamy wartości dla  $F$  i  $F'$  dla innych natężeń dopuszczalnych, przy czem ogólnie możemy pisać

$$\left. \begin{aligned} F' &= k_1 \frac{M}{d_1} - k_1' b d_1 \\ F &= k_2 \frac{M}{d_1} - k_2' b d_1 \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

Wartości dla  $k_1$ ,  $k_1'$ ,  $k_2$  i  $k_2'$  zestawiliśmy poniżej

Tabliczka XXVIII.

mieszanina $kg/m^3$	rodzaj zespołu	$l$	$k_1$	$k_1'$	$k_2$	$k_2'$
470	budow.	—	0.002379	0.01350	0.001163	0.000083
	mosty	4	0.002960	0.01350	0.001381	0.000083
	"	20	0.002702	0.01350	0.001272	0.000083
350	budow.	—	0.002702	0.01350	0.001262	0.000083
	mosty	4	0.003356	0.01350	0.001568	0.000083
	"	20	0.003030	0.01350	0.001414	0.000083
280	budow.	—	0.003131	0.01350	0.001458	0.000083
	mosty	4	0.003878	0.01350	0.001810	0.000083
	"	20	0.003448	0.01350	0.001610	0.000083

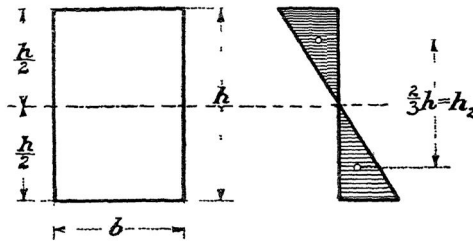
### D. Natężenia ścinające i główne.

#### § 41. Siły ścinające belki prostokątnej, (faza I).

Natężenie ścinające jest w belce o materiale jednorodnym (wedle równania 194. Statyka Bud. wyd. II.)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{u} = \frac{QS}{Iu} \dots \dots \dots (162)$$

Największa siła ścinająca jest w osi obojętnej. Dla stałej szerokości belki  $u$ , albo gdy przynajmniej szerokość w osi nie jest większą, niż gdzieindziej, natężenie ścinające jest też



Rys. 56.

w osi największem. Dla przekroju prostokątnego (rys. 56.) jest

$$\text{najw. } \sigma_1 b = \frac{QS}{I} = \frac{Qb \frac{h^2}{8}}{bh^3} = \frac{Q}{\frac{12}{3} h}$$

a że  $\frac{2}{3} h = h_2$  jest odstępem środka ciśnienia od środka ciągnięcia, więc najw.  $\sigma_1 = \frac{Q}{bh_2} \dots \dots \dots (163)$

Równanie to jest ogólnie ważnem dla dowolnego przekroju. Dla belki żelbetowej mamy

$$\sigma = \frac{Q \frac{bz_1^2}{2}}{\frac{bz_1^3}{3} + 15F(d_1 - z_1)^2} = \frac{Q}{\frac{2}{3} z_1 + 30 \frac{F}{b} \cdot \frac{(d_1 - z_1)^2}{z_1^2}}$$

Podstawiając z równania, poprzedzającego równanie (54) (str. 38.),  $F = \frac{b}{30} \cdot \frac{z_1^2}{d_1 - z_1}$ , otrzymujemy

$$\sigma = \frac{Q}{d_1 - \frac{z_1}{3}} = \frac{Q}{h_2}, \text{ a } \sigma_1 = \frac{Q}{bh_2}.$$

Jeżeli belka jest w dwu punktach podparta, to przy podporach siła poprzeczna jest największą a moment najmniejszy, zatem belka przy podporach znajduje się w fazie pierwszej, i należałoby wedle fazy I. obliczać siłę ścinającą w następujący sposób:

1. Dla wkładki jednostronnej: (rys. 56.)

Natężenie w odstępnie  $v$  od osi obojętnej jest  $v = \frac{Mv}{I_2}$

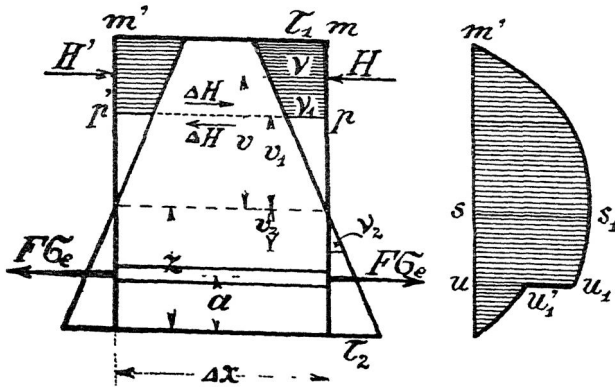
gdzie  $I = \frac{b}{3} \left[ z^3 + (d-z)^3 + 30 \frac{F}{b} (z-a)^2 \right] \dots \dots \dots (164)$

Dalej mamy  $H = b \int_{v_1}^{d-z} \frac{Mvdv}{I} = \frac{bM}{2I} \left[ (d-z)^2 - v_1^2 \right] \dots (165)$

Zatem natężenie ścinające  $\sigma = \frac{\Delta H}{b\Delta x} = \frac{Q}{2I} [(d-z)^2 - v_1^2] (166)$

Dla  $v=0$  najw.  $\sigma_1 = \frac{Q}{2I} (d-z)^2 = \frac{Qz_1^2}{2I} \dots \dots \dots (167)$

Dla  $v = -(z-a)$   $\sigma_1 = \frac{Q}{2I} [z_1^2 - (z-a)^2]$ .



Rys. 57.

Jeżeli będziemy liczyć od dołu, to otrzymamy

$H = \frac{M}{2I} (z^2 - v^2)$ , zatem  $\sigma_1 = \frac{bQ}{2I} (z^2 - v^2) \dots \dots \dots (168)$

Dla  $v = -z$   $\sigma_1 = 0$

Dla  $v = -(z-a)$   $\sigma_1 = \frac{Q}{2I} [z^2 - (z-a)^2]$ .

Przykład. Dana płyta żelbetowa o wymiarach (jak na str. 21.):  
 $d=20\text{ cm}$ ,  $d_1=17\text{ cm}$ ,  $a=3\text{ cm}$ .  $F=8.55\text{ cm}^2$  (9 *gf* 11 *mm* na 1 *m* szerokości płyty),  
 $M=124000\text{ kgcm}$ ,  $Q=6200\text{ kg}$ . Obliczyć największe napięcie ścinające.

Mamy tu  $f=\frac{8.55}{100}=0.0855\text{ cm}$ ,  $n=10$ , więc według (5):

$$z = \frac{20^2 + 2 \times 3 \times 0.0855 \times 10}{2(20 + 0.0855 \times 10)} = 9.75\text{ cm}, \quad z_1 = 20 - 9.75 = 10.25\text{ cm}.$$

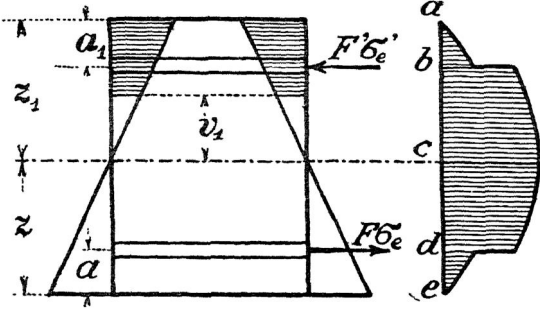
Według (164):

$$I = \frac{100}{3} \left[ 9.75^3 + (20 - 9.75)^3 + 30 \frac{8.55}{100} (9.55 - 3)^2 \right] = 70600\text{ cm}^4.$$

Największe napięcie ścinające według (167):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{6200 \times 10.25^2}{2 \times 70600} = 4.6\text{ kg/cm}^2.$$

2. Dla wkładki obustronnej będzie (rys. 58).  $\nu = \frac{Mv}{I}$ ,



Rys. 58.

przyczem  $I = \frac{b}{3} [z^3 + (d-z)^3] + 10F(z-a)^2 + 10F'(d-z-a_1)$ ,

a licząc od  $a$  do  $b$ , otrzymamy

$$H = \frac{bM}{2I} [z_1^2 - v_1^2], \text{ zatem}$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2I} [z_1^2 - v_1^2] \quad . . . . . (169)$$

Licząc od  $b$  do  $c$ , otrzymamy

$$H = \frac{bM}{2I_3} [z_1^2 - v_1^2] + F' \frac{10M(z_1 - a_1)}{I}$$

zatem

$$\sigma_1 = \frac{Q}{I} \left[ \frac{z_1^2 - v_1^2}{2} + 10F'(z_1 - a_1) \right] \quad . . . (170)$$

Dla  $v_1=0$  otrzymamy największe  $\sigma_1$ :

$$\text{najw. } \sigma_1 = \frac{Q}{I} \left[ \frac{z_1^2}{2} + 10 \frac{F'}{b} (z_1 - a_1) \right] \quad . . . . . (171)$$

Przykład. Płyta o wymiarach, jak poprzednio, z dodaną wkładką górną, o przekroju równym przekrojowi wkładki dolnej i w takim odstępnie od krawędzi górnej, jak wkładka dolna. Obliczyć największe natężenie ścinające.

Z przykładu na str. 22 mamy:

$z=z_1=10\text{ cm}$ ,  $I=75040\text{ cm}^4$ ; a największe natężenie ścinające według (171):

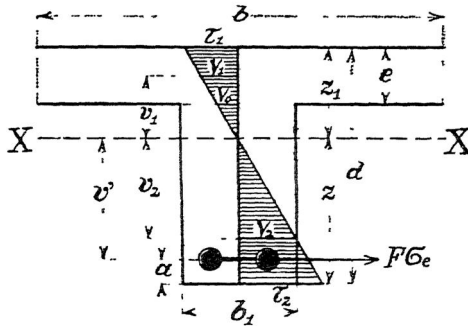
$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{6200}{75040} \left[ \frac{10^3}{2} + \frac{10 \times 8 \cdot 55}{100} (10-3) \right] = 4.6\text{ kg/cm}^2.$$

§ 42. Siły ścinające belki teowej (faza I.).

1. Belka teowa pojedynczo uzbrojona.

a) Oś obojętna nie przecina płyty.

Odstęp osi obojętnej z od dolnej krawędzi (rys. 59.) znajdziemy z rów. (14) (str. 23).



Rys. 59.

Dalej mamy

$$\tau_1 = \frac{Mz_1}{I}, \text{ jeżeli } I = \frac{b}{3} [z_1^3 - (z_1 - e)^3(1-k) + kz^3] + 10F(z-a)^2 \quad (172)$$

Analogicznie do poprzedniego otrzymamy

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2Ik} [z_1^2 - (z_1 - e)^2(1-k) - v^2] \quad (173)$$

$$\text{a najw. } \sigma_1 = \frac{Q}{2Ik} [z_1^2 - (z_1 - e)^2(1-k)] \quad (174)$$

przyczem  $Q$  należy liczyć na szerokość  $b$ .

Przykład. Według przykładu na str. 24 mamy dla  $M=800000\text{ kgcm}$  i przyjętego teraz  $Q=1600\text{ kg}$ :  $z=26\text{ cm}$ ,  $z_1=16\text{ cm}$ .

Według (172):

$$I = \frac{150}{3} [16^3 - (16-10)^3 \cdot (1-0.186) + 0.186 \times 26^3] + 10 \times 28 \cdot 28 (26-3)^2 = 508700\text{ cm}^4.$$



Podług (171):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{1600}{2 \times 508700.0.186} [16^2 - (16-10)^2(1-0.186)] = 1.9 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Oś obojętna przecina płytę.

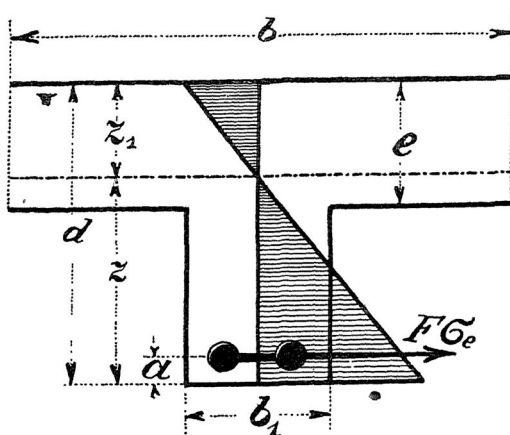
Tu  $z_1$  wyznaczamy z rów. (19) str. 25; nazwijmy dalej (rys. 60):

$$I = \frac{b}{3} \left\{ z_1^3 + (e-z_1)^3 + k[(d-z_1)^3 - (e-z_1)^3] \right\} + 10F(z-\alpha)^2. \quad (175)$$

a otrzymamy analogicznie:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2Ik} [(d-z)^2 - v_1^2]. \quad (176)$$

$$\text{a najw. } \sigma_1 = \frac{Q}{2Ik} z_1^2. \quad (177)$$



Rys. 60.

Przykład. Z przykładu na str. 25 mamy dla  $M=250000 \text{ kgcm}$  i  $Q=1200 \text{ kg}$ :  $z_1=11 \text{ cm}$ ,  $z=29 \text{ cm}$ ,  $k=0.125$ .

Według (175):

$$I = \frac{160}{3} \left\{ 11^3 + (12-11)^3 + 0.125[(40-11)^3 - (12-11)^3] \right\} + 10 \times 13.57(29-3)^2 = 316400 \text{ cm}^4.$$

Według (177):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{1200 \times 11^2}{2 \times 316400.0.125} = 1.8 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Belka teowa obustronnie uzbrojona.

b) Oś obojętna nie przecina płyty.

Tu otrzymamy z równ. (17) str. 24.



Według (180):

$$I = \frac{160}{3} [11 \cdot 4^3 + (12 - 11 \cdot 4)^3] + \frac{20}{3} [(40 - 11 \cdot 4)^3 - (12 - 11 \cdot 4)^3] + 10 \{ 13 \cdot 57 (28 \cdot 6 - 3)^2 + 13 \cdot 57 (11 \cdot 4 - 3)^2 \} = 333400 \text{ cm}^4.$$

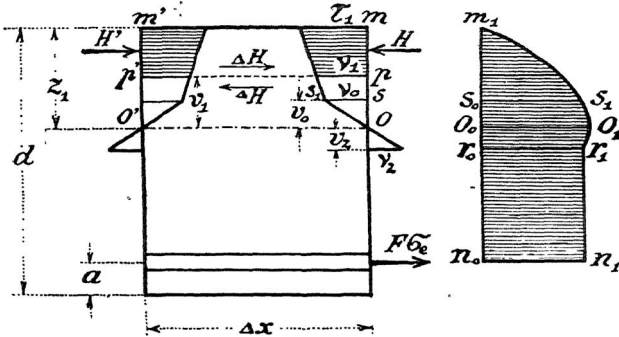
Według (181):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{1200}{2 \times 333400} \left[ 11 \cdot 4^2 + \frac{20 \times 13 \cdot 57}{160} (11 \cdot 4 - 3) \right] = 2 \cdot 1 \text{ kg/cm}^2.$$

### § 43. Siły ścinające w przekroju prostokątnym, (faza II).

#### 1. Wkładka pojedyncza.

Wytnijmy z belki żelbetowej o przekroju prostokątnym, część o długości  $\Delta x$ , (rys. 61.) i oznaczmy siły wewnętrzne, będące w równowadze z zewnętrznymi. Na część belki  $m m'$   $p' p$ , działają z prawej i lewej strony nateżenia, których wypadkowe nazwijmy  $H$  i  $H'$ .



Rys. 61.

Jeżeli w podobny sposób, co pierwej, wyznaczymy z tego siły ścinające<sup>1)</sup>, to otrzymamy parabolę  $m_1 r_1$  i prostą  $r_1 n_1$ . Największe siły ścinające, a dla przekroju prostokątnego i największe nateżenie ścinające, będzie w osi obojętnej.

My jednak zadowolimy się wyznaczeniem sił i nateżeń ścinających dla założenia, że linia nateżeń jest prosta (rys. 62.)

i nazwawszy moment bezwładności  $I = \frac{1}{3} b z_1^3 + 15 F (d_1 - z_1)^2$ , otrzymamy

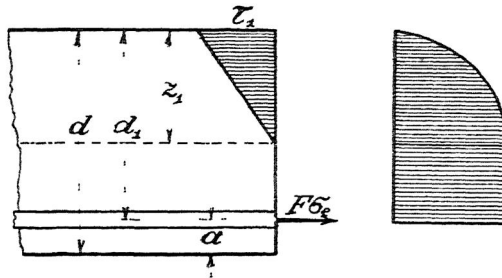
$$H = \frac{M z_1^2 - v_1^2}{I} \cdot \frac{1}{2}, \text{ więc } \sigma_1 = \frac{1}{2} \frac{Q}{I} (z_1^2 - v_1^2)$$

<sup>1)</sup> Por. Thullie. Die Schubspannungen in Betoneisenträger. Beton u. Eisen. 1903. zesz. III.

a dla  $v=0$  otrzymamy

$$\text{najw. } \sigma_1 = \frac{Q}{2I} z_1^2 \dots \dots \dots (182)$$

Z porównania z wzorem (167) widzimy więc, że wzór (182) jest dla belki pojedynczo uzbrojonej prostokątnej ogólnie ważnym, tylko w danym wypadku trzeba za  $I$  wstawić odpowiednią wartość.



Rys. 62.

Wedle Empergera mamy analogicznie do równ. (163)

$$\text{najw. } \sigma_1 = \frac{Q}{bh_2} = \frac{Q}{b \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)} \dots \dots \dots (183)$$

Przy płytach i belkach prostokątnych największe  $\sigma_1$ , obliczone wedle równań (182 i 183) jest w zwyczajnych wypadkach zawsze mniejszem od dopuszczalnego natężenia ścinającego, dlatego zazwyczaj nie obliczamy w tym wypadku sił ścinających. Tylko przy bardzo wielkich obciążeniach otrzymujemy  $\sigma_1$  za wielkie tak, że musimy wzmacniać płytę strzemionami, o czem później mówić będziemy.

Przykład. Z przykładu na str. 40 mamy:

$$z_1 = 5.45 \text{ cm. Dla podanych tam wymiarów otrzymamy } I = \frac{100 \times 5.45^3}{3} + 15 \times \\ \times 855(17 - 5.45)^2 = 25280 \text{ cm}^4.$$

Przyjąwszy  $Q = 6200 \text{ kg}$  mamy według (182):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{6200 \times 5.45^2}{2 \times 25280} = 3.6 \text{ kg/cm}^2.$$

Według (183):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{6200}{100 \left( 17 - \frac{5.45}{3} \right)} = 3.9 \text{ kg/cm}^2.$$

## 2. Wkładka podwójna.

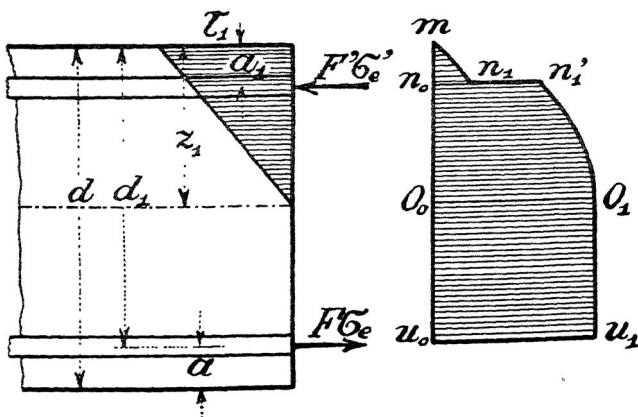
Jeżeli belka żelbetowa uzbrojona jest dwiema wkładkami żelaznymi, to wtedy:

$$I = \frac{1}{3} b z_1^3 + 15 F' (z_1 - a_1)^2 + 15 F (d_1 - z_1)^2$$

$$\text{a najw. } \sigma_1 = \frac{Q}{I} \left( \frac{z_1^2}{2} + 15 \frac{F'}{b} (z_1 - a_1) \right) \dots \dots \dots (184)$$

albo najw.  $\sigma_1 = \frac{Q}{bh_2}$ . Tu jednak trzeba najprzód obliczyć  $h_2$ ,

złożyć ciśnienie  $\sigma_e' F'$  z  $\frac{bz_1}{2}$ .



Rys. 63.

Przykład. Z przykładu na str. 42 mamy  $z_1 = 5.02 \text{ cm}$ ; następnie

$$I = \frac{1}{3} 100 \times 5.02^3 + 15 \times 8.55 (5.02 - 3)^2 + 15 \times 8.55 (17 - 5.02)^2 = 23304 \text{ cm}^4.$$

Przyjawszy również  $Q = 6200 \text{ kg}$ , mamy według (184):

$$\text{najw. } \sigma_1 = \frac{6200}{23304} \left( \frac{5.02^2}{2} + 15 \frac{8.55}{100} (5.02 - 3) \right) = 4.04 \text{ kg/cm}^2.$$

## § 44. Siły ścinające w przekroju teowym (faza II).

## 1. Wkładka pojedyncza.

Linie odkształceń przyjmujemy znowu jako prostą (rys. 64.). Jeżeli oś obojętna nie przecina płyty, to największą siłę ścinającą poziomą obliczamy podobnie, jak poprzednie.

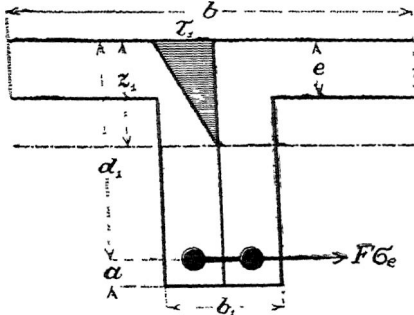
Dla  $v=0$  otrzymamy

$$H = b_1 \int_0^{z_1-e} \frac{Mv}{I_1} dv + b \int_{z_1-e}^{z_1} \frac{Mv}{I_4} dv = \frac{M}{2I_1} [b_1(z_1-e)^2 + bz_1^2 - b(z_1-e)^2]$$

więc jeśli  $k = \frac{b_1}{b}$ ,  $H = \frac{bM}{2I_1} [z_1^2 - (z_1-e)^2(1-k)]$ , przyczem

$$I_1 = \frac{b}{3} [z_1^3 - (z_1-e)^3(1-k)] + 15F(d_1-z_1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (185)$$

a stąd najw.  $\sigma_1 = \frac{1}{b_1} \frac{dH}{dx} = \frac{1}{2kI_1} \frac{Q}{I_1} [z_1^2 - (z_1-e)^2(1-k)] \quad . \quad (186)$



Rys. 64.

Przykład. Z przykładu na str. 44 mamy:  $e=10\text{ cm}$ ,  $z_1=12.5\text{ cm}$ ,  $I_1=395000\text{ cm}^4$ ,  $k=\frac{27}{150}=0.18$ . Przyjawszy  $Q=10000\text{ kg}$ , otrzymamy z równania (186):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{10000}{2 \times 0.18 \times 395000} [12.5^2 - (12.5-10)^2(1-0.18)] = 10.6\text{ kg/cm}^2.$$

Jeżeli nie uwzględniamy ciśnien w żebrze (rys. 65), otrzymujemy wedle równ. (163):

$$\text{najw. } \sigma_1 = \frac{Q}{b_1(d_1 - z_1 + y)} \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

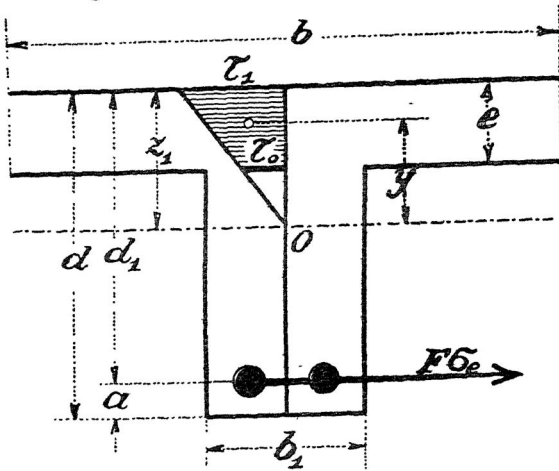
Przykład. Według str. 44 i 46 mamy:  $b_1=27\text{ cm}$ ,  $d_1=39\text{ cm}$ ,  $z_1=12.49\text{ cm}$ ,  $y=8.6\text{ cm}$ . Przyjawszy jak poprzednio  $Q=10000\text{ kg}$ , mamy według (187):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{10000}{27(39-12.49+8.6)} = 10.6\text{ kg/cm}^2.$$

Jeżeli oś obojętna przecina płytę, to obliczenie  $\sigma_1$  jest zupełnie takie samo, jak przy przekroju prostokątnym, tylko w żebrze będzie natężenie ścinające  $\frac{b}{b_1}$  razy większe,

zatem najw.  $\sigma_1 = \frac{1}{2k} \frac{Q}{I} \cdot z_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad (188)$

lub najw.  $\sigma_1 = \frac{Q}{b_1 \left[ d_1 - \frac{z_1}{3} \right]}$  . . . . . (189)



Rys. 65.

Przykład. Według przykładu na str. 48 mamy dane:  
 $b_1 = 30 \text{ cm}$ ,  $d_1 = 60 \text{ cm}$ ,  $z_1 = 19.85 \text{ cm}$ . Przyjmując  $Q = 10000 \text{ kg}$ , otrzymamy z wzoru (189):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{10000}{30 \left( 60 - \frac{19.85}{3} \right)} = 6.3 \text{ kg/cm}^2.$$

## 2. Wkładka podwójna.

Tu obliczymy znowu analogicznie do równań (184) i (186), jeżeli oś obojętna przecina żebro, wedle wzoru

$$\text{najw. } \sigma_1 = \frac{Q}{kI_2} \left[ \frac{z_1^2}{2} - \frac{(z_1 - e)^2(1-k)}{2} + 15 \frac{F'}{b} (z_1 - a_1) \right] \quad \dots (190)$$

a jeżeli przecina płytę

$$\text{najw. } \sigma_1 = \frac{Q}{kI_3} \left( \frac{z_1^2}{2} + 15 \frac{F'}{b} (z_1 - a_1) \right) \quad \dots (191)$$

przyczem należy za  $I_2$  i  $I_3$  wprowadzić odnośne momenty bezwładności.

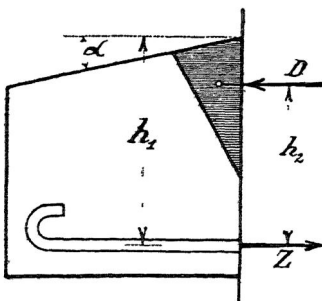
Przykład. Według przykładu na str. 50 (por. dostrz. omyłki) mamy:  $z_1 = 10.9 \text{ cm}$ ,  $e = 10 \text{ cm}$ ,  $a_1 = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 150 \text{ cm}$ ,  $k = \frac{27}{150} = 0.18$ ,  $F' = 28.28 \text{ cm}^2$ ,  $I_2 = 470800 \text{ cm}^4$ .

Przyjawszy  $Q = 10000 \text{ kg}$ , otrzymamy z równania (190):

$$\text{Najw. } \sigma_1 = \frac{10000}{0.18 \times 470800} \left[ \frac{10 \cdot 9^2}{2} - \frac{(10 \cdot 9 - 10)^2 (1 - 0.18)}{2} + 15 \frac{28 \cdot 28}{150} (10 \cdot 9 - 3) \right] = 9 \cdot 7 \text{ kg/cm}^2.$$

### § 45. Siły ścinające w belce wielobocznej.

Wedle rys. 66. mamy



$$D = Z = \frac{M}{h_2}, \text{ stąd}$$

$$dZ = \frac{h_2 dM - M dh_2}{h_2^2}$$

$$h_2 \frac{dZ}{dx} = \frac{1}{h_2} \frac{dM}{dx} - \frac{M}{h_2^2} \frac{dh_2}{dx} \quad \dots \quad (192)$$

Dalej mamy  $\frac{dM}{dx} = Q$ . Jeżeli  $b$

jest szerokością belki,  $\sigma_1$  natężeniem ścinającym, to możemy napisać  
 $b\sigma_1 dx = dZ$ , przyjmąwszy w przybliżeniu

$$h_2 = \frac{7}{8} h_1, \text{ mamy } \frac{dh_2}{dx} = \frac{7}{8} \frac{dh_1}{dx} = \frac{7}{8} \text{ sta.}$$

Wstawmy to w rów. (192) to

$$b\sigma_1 = \frac{Q}{h_2} - \frac{M}{h_2^2} \frac{7}{8} \text{ sta.}$$

$$\sigma_1 = \frac{Q - \frac{M}{h_2} \frac{7}{8} \text{ sta}}{bh_2} = \frac{Q - \frac{M}{h_1} \text{ sta}}{\frac{7}{8} bh_1} \quad \dots \quad (193)$$

Więc obliczamy, jak dla belki równoległej, tylko  $Q$  zmniejszamy o  $\frac{M}{h_2} \frac{7}{8} \text{ sta}$ . Jeżeli  $M$  i  $h_2$  nie zmieniają się w tym samym kierunku, lecz w przeciwnym, to znak jest ujemny i  $Q$  zwiększy się o  $\frac{M}{h_2} \frac{7}{8} \text{ sta}$ .

Przy belkach ciągłych, gdy zwiększamy wysokość na podporze, zwiększa się  $M$  i  $h_2$  równocześnie, więc  $Q$  należy zmniejszyć. Przy belkach w dwu punktach podpartych jest przeciwnie,  $Q$  należy zwiększyć, więc zwiększenie wysokości nie wiele tu pomoże.



Przykład. Z przykładu na str. 40 mamy:  $M=124000 \text{ kgcm}$ ,  $h_1=17 \text{ cm}$ ,  $b=100 \text{ cm}$ . Przyjawszy  $Q=6200 \text{ kg}$ ,  $\alpha=20^\circ$  ( $\text{st } \alpha=0.364$ ), mamy według równania (193):

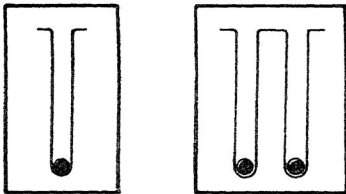
$$\sigma_1 = \frac{6200 - \frac{124000}{17} \cdot 0.364}{\frac{7}{8} \cdot 100 \times 17} = 2.04 \text{ kg/cm}^2.$$

### § 46. Obliczenie strzemion.

Jeżeli z obliczenia według poprzednich wzorów wypadnie największe napięcie na ścinanie betonu większe, niż dopuszczalne, to należy zastosować strzemiona. Z poprzedniego wyniku, że dla płyt nie okazuje się zazwyczaj potrzeba użycia strzemion. Zachodzi teraz pytanie, jak te strzemiona liczyć. Rozporządzenie pruskie przyjmując  $4.5 \text{ kg/cm}^2$  jako napięcie dopuszczalne na ścinanie betonu, nakazuje resztę siły przenieść na żelazo. To jednak nie jest słusznem, gdyż nie wiemy, ile siły przenosi się na beton, a ile na żelazo. Można by przyjęc tu rozdział w stosunku współczynników sprężystości na ścinanie, albo w przybliżeniu w stosunku  $1:n=1:15$ , albo też idąc pewnie, można by nie liczyć wcale na beton, a tylko na żelazo.

Z tych trzech sposobów, trzeci byłby najpewniejszym, drugi nie zgadza się z doświadczeniami, pierwszy jest obecnie używanym w Niemczech.

W Austrii rozporządzenie z r. 1911 nakazuje, aby siły ścinające, których nie może przenieść beton, przyjmując jako działające na strzemiona, najmniej jednak 60%, beton zaś musi przenieść przynajmniej 30% całej siły.



Rys. 67.

Rozporządzenie austriackiego ministerstwa z r. 1911 § 6 ust. 7. Jeżeli napięcia ścinające i napięcia główne w betonie, obliczone wedle § 5 ust. 7, przekraczają granice,

dozwolone w § 6 ust. 1, należy umieścić strzemiona, albo im odpowiednie wkładki w takiej ilości, żeby zniosły nadmiar siły, przypadającej na beton, a co najmniej 60% całej siły. Beton powinien sam przenieść najmniej 30% tej siły, przyczem napięcie dopuszczalne nie może przekroczyć dozwolonej granicy.

Nazwijmy przekrój jednego pręta strzemion  $A_s$ , to cały przekrój będzie  $nA_s$ , przyczem zwykle  $n=2$  lub 4. (rys. 67.).

Jeżeli siła  $Q$  działa na belkę o szerokości  $b$  i jeżeli nazwiemy  $e$  odstęp strzemion o przekroju stałym, to dla przekroju prostokątnego otrzymamy, jeżeli nateżenie na ścinanie dla żelaza nazwiemy  $\sigma_{1e}$  i siłę ścinającą, przeniesioną na żelazo, nazwiemy  $T_e$ , to

$$\frac{n A_s \sigma_{1e}}{e} = T_e, \text{ a stąd } \sigma_{1e} = \frac{e}{n A_s} T_e \dots (194)$$

Jeżeli  $\frac{Q}{b \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)} \leq \sigma_1$ , to nie potrzeba strzemion wcale.

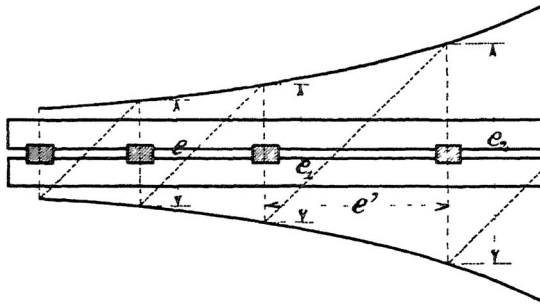
Jeżeli  $\frac{Q}{b \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)} > \sigma_1$ , to musimy dać strzemiona, które

przenoszą siłę ścinającą  $T_e$ . Wedle rozporządzenia musi być

$$T_e > 0.6 T = 0.6 \frac{Q}{\left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)}, \text{ a } b \sigma_1 = T_b > 0.3 T = 0.3 \frac{Q}{\left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)}$$

W tych granicach jest  $T_e = \frac{Q}{d_1 - \frac{z_1}{3}} - b \sigma_1$ .

$$\text{Ze (194) otrzymamy wręcz } e = \frac{n A_s \sigma_{1e}}{T_e} \dots (195)$$



Rys. 68.

Nazwijmy  $\frac{T}{b} = \frac{Q}{b \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)} = s_1$ , to gdy  $s > \sigma_1$  i  $T_e = T - b \sigma_1$ ,

$$T_e = b(s_1 - \sigma_1) = \frac{n A_s \sigma_{1e}}{e}, \text{ a stąd } e = \frac{n A_s \sigma_{1e}}{b(s_1 - \sigma_1)} \dots (196)$$

a jeżeli  $T_e = 0.6 T$

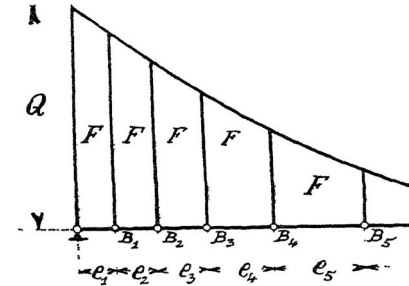
$$e = \frac{n A_s \sigma_{1e}}{0.6 b s_1} \dots (197)$$

Jeżeli przekrój strzemiem  $nA_s$  jest stałym, to gdyby  $z_1$  było stałym, to  $s_1$  zmieniałoby się odwrotnie proporcjonalnie do  $Q$ . Tak jednak nie jest, zatem nie pozostaje nam nic innego, jak tylko obliczać odstęp  $e$  wedle (195) (196) lub (197) i dla wyznaczenia położenia strzemiem użyć podobnej konstrukcyi, jak przy belkach złożonych drewnianych<sup>1)</sup> (rys. 68.).

Saliger podaje inny sposób wyznaczenia odległości  $e$  (rys. 69.). Wykreśliłyśmy linię sił poprzecznych dla belki żelbetowej. Przekroje strzemiem niech będą  $nA_s$ , natężenie dopuszczalne na ścinanie dla żelaza  $\sigma_{1e}$ , to wedle (195)  $e =$

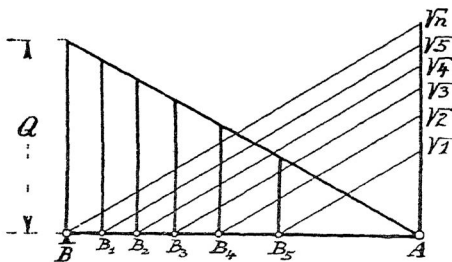
$$= \frac{nA_s \sigma_{1e}}{T_e} = \frac{nA_s \sigma_{1e}}{Q_e : \left(d_1 - \frac{z_1}{I}\right)}, \text{ przy-}$$

czem  $Q_e$  oznacza część siły poprzecznej, która działa na żelazo. Jeżeli  $nA_s$ ,  $\left[d_1 - \frac{z_1}{I}\right]$



Rys. 69.

i  $\sigma_{1e}$  są stałe, to  $e \cdot Q_e$  jest stałym. Mając  $Q$  i  $e$  otrzymujemy powierzchnie  $F = \int Q_e \cdot de$ . Te powierzchnie muszą być zatem



Rys. 70.

równe. Jeżeli więc całą powierzchnię sił poprzecznych, działającą na żelazo, podzielimy na równe części  $F$ , to otrzymamy punkty, w których trzeba wstawić strzemiiona.

Ten podział da się wyznaczyć sposobem wykreślnym (rys. 70.) dla linii

sił poprzecznych prostej, którą w przybliżeniu przyjąćbyśmy mogli dla obciążenia ciągłego.

Jeżeli w punkcie  $A$ , wystawimy prostopadłą, a na niej odetniemy  $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}$ , następnie połączymy  $\sqrt{n}$  z  $B$  i do tej prostej poprowadzimy równoległe przez punkty  $\sqrt{1}, \sqrt{2}$  i t. d., to otrzymamy szukane punkty podziału  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ , bo wtedy powierzchnie trójkątów mają się jak  $1:2:3:\dots:n$ .

<sup>1)</sup> Por. Podręcznik Statyki Budowli II. wyd. str. 216.

Sposób ten, podany przez Saligera, nie jest dokładnym, zawiera bowiem w samym założeniu wiele przypuszczeń, jak n. p. że  $\left[ d_1 - \frac{z_1}{3} \right]$  jest stałym, co nie jest prawdą, zatem lepiej obliczać wedle ogólnych wzorów i wyznaczać  $e$  według rys. 68.

Przykład. Wyznaczyć rozkład strzemion dla belki T, podanej w przykładzie na str. 44.

Przyjąwszy na podporze  $Q=10000\text{ kg}$ , mamy tu  $s_1 = \frac{10000}{27 \left( 39 - \frac{12.5}{3} \right)} = 10.6\text{ kg/cm}^2$ . Przyjmijmy następnie dopuszczalne ścinanie dla żelaza  $\sigma_{1e} = 600\text{ kg/cm}^2$ , a np. dla betonu 1:4 dopuszczalne  $\sigma_1 = 4\text{ kg/cm}^2$ . Jeżeli zarazem przyjmiemy strzemiona czteroramienne (więc  $n=4$ ), o przekroju jednego drutu  $A_s = 0.5\text{ cm}^2$  ( $\phi 8\text{ mm}$ ), to według równania (196):

$$e = \frac{4 \times 0.5 \times 600}{27(10.6 - 4)} = 6.75\text{ cm.}$$

Mając wykres sił poprzecznych obliczymy wielkości  $e$  w tylu miejscach, aby otrzymać dwie krzywe symetryczne (według rys. 68) dla wyznaczenia właściwego odstepu strzemion  $e'$ . Gdyby ku środkowi belki wraz z malejącą siłą poprzeczną  $Q$  wzrastały znacznie odstepy  $e'$ , to ze względu na usztywnienie szkieletu żelaznego podczas betonowania nieprzekroczymy odstepu  $e' = 40$  do  $50\text{ cm}$ .

Doświadczenia jednak najnowsze wykazały, że powyżej podany sposób obliczenia, przepisany zresztą rozmaitemi rozporządzeniami, nie jest uzasadnionym. Okazało się bowiem, że przy obciążaniu belki nigdy strzemiona nie zostały ścięte, ale przeciwnie stwierdzono przesunięcie ich pionowe w betonie; pracują one zatem nie na ścinanie, lecz na ciągnięcie. Właściwie więc obliczać byśmy ich powinni wedle Saligera<sup>1)</sup> jako słupy wiszące belki kratowej, u której ciśnienia przenoszą się zamiast zastrzałów przez beton.

Rozróżnić przytem trzeba kratę pojedynczą (rys. 71 a) gdy  $e = h_0$ , od kraty dwu lub trzykrotnej (rys. 71 b), gdy  $e = \frac{1}{2} h_0$  lub  $\frac{1}{3} h_0$ . W pierwszym wypadku kraty pojedynczej

(rys. 71 a) jest  $V = Q$ . Przy kracie wielokrotnej jest  $V = \frac{c}{h_0} Q$  (198)

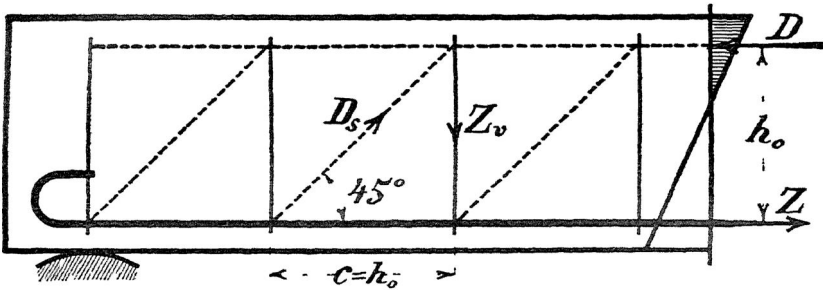
Oprócz tego na podporach powiększają gęste strzemiona zakotwienie prętów analogicznie do owinięcia i zmniejszają siły, przenoszone z uzbrojenia wprost na beton, i rozdzielają je

<sup>1)</sup> Deutsche Bauzeitung-Mittheilungen 1912 Nr. 4.

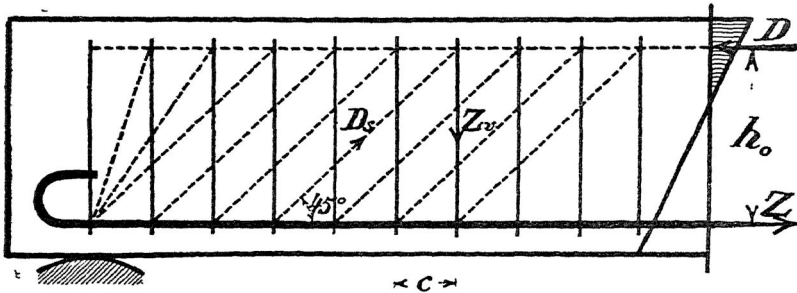
na większą długość. Zatem strzemiąca są tam skuteczniejsze, gdzie inne środki przeciw nateżeniom głównym <sup>1)</sup> są niedostateczne.

### § 47. Pręty odginane.

W belce zginanej powstają, jak wiemy, nateżenia główne nachylone do pionu, a w osi obojętnej kąt wychylenia tych nateżeń głównych jest  $45^\circ$ . Dla belki żelbetowej wchodzi tu w grę największe ciągnięcie, które (wedle rów. 202 w Podręczniku Statyki Bud.) jest najw.  $\nu' = \frac{\nu}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 + 4\sigma^2}$ . (199)



Rys. 71 a



Rys 71 b.

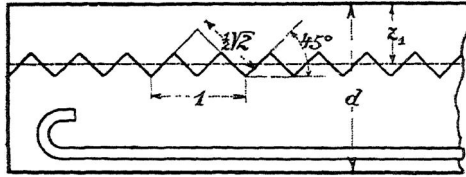
W osi obojętnej  $\nu=0$ , a stąd  $\nu'=\sigma$ , a zatem ciągnięcie główne jest równe nateżeniu ścinającemu. Ponieważ beton na ciągnięcie jest mało wytrzymałym, więc tam, gdzie nateżenie przekracza dozwoloną granicę, wzmacniamy belkę odginanymi prętami.

Ciągnięcie dopuszczalne główne dla betonu przyjmujemy równe nateżeniu dopuszczalnemu na ścinanie.

<sup>1)</sup> Patrz następny paragraf.

Właściwie powinno ono być mniejszem, bo wytrzymałość na ciągnięcie jest mniejszą, niż na ścinanie, ale przy tej drugorzędnej konstrukcyi zadawaliśmy się mniejszą pewnością i dlatego przyjmujemy równe natężenia dopuszczalne na ścinanie.

Na długość poziomą, równą jednostce, przypada  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  (rysunek 72.) długości, w której działa ciągnięcie główne.



Rys. 72.

Dlatego, jeżeli odstęp odgiętych prętów jest  $e$ , a ciągnięcie w nich  $Z$ , to  $Z = \frac{1}{2}\sqrt{2}.e \left[ \frac{Q}{d_1 - \frac{z_1}{3}} - b\sigma_1 \right] = \sigma_e F_e$  . . . . . (200)

a stąd da się obliczyć  $e$  lub  $F_e$ , przyczem  $F_e$  oznacza sumę przekrojów potrzebnych prętów odginanych w danym przekroju na długości  $e$ .

Rozporządzenie austriackie żąda też, aby rozdział ciągnięcia na beton i żelazo przyjmować w pewnych granicach. Na żelazo ma mianowicie przypaść najmniej 60%, a na beton najmniej 30% ciągnięcia.

Wykreślnie da się rozdział odginanych prętów przedstawić w przybliżeniu następnie (rys. 73.).

Na osi w połowie rozpiętości w  $d$  odcinamy kąt  $45^\circ$  i kreślimy prostą  $da$ . Na prostej  $0a$  odcinamy długość  $ab = \frac{QS}{I}$ , czyli tu  $\frac{QS}{d_1 - \frac{z_1}{3}}$ , dalej robimy  $ac = b\sigma_1$  i  $af = 0.4 \frac{QS}{I}$ . W podobny spo-

sób dzielimy  $dd_1$  w stosunku 4:6 i inne rzędne tak samo i otrzymujemy krzywą  $ff_1$ . Kreślimy teraz  $cc_1 \parallel ad$ , to na tej długości  $cc_1$  potrzebne są odgięte pręty, a powierzchnia kreskowana przedstawia nam siłę na nie przypadającą. Jeśli teraz okaże się



Rozumie się, że odginać pręty możemy tylko o tyle, o ile na to pozwoli badanie ze względu na momenty (§ 30.).

Dla obciążenia jednostajnego zupełnego jest siła poprzeczna w środku równa zeru i da się przedstawić linią prostą. Rys. 73. zmienia się tu o tyle, że punkty  $d_1$  i  $f_1$  wpadają na  $d$  i że linie  $bc_1d_1$  i  $ff_1$  są proste.

W tym paragrafie i w poprzednim przyjmowaliśmy we wzorach siłę ścinającą poziomą  $\frac{QS}{I} = \frac{Q}{d_1 - \frac{1}{3}z}$  dla przekroju

prostokątnego o pojedynczem uzbrojeniu. Jeżeli mamy uzbrojenie podwójne lub belkę teową, to należy zamiast  $\frac{Q}{d_1 - \frac{1}{3}z}$

przyjąć inną wartość dla siły ścinającej, jakto poprzednio wykazaliśmy, a także dla belek teowych  $b_1\sigma_1$  zamiast  $b\sigma_1$ .

Rozporządzenia ministerstwa austr. dla budownictwa § 6. ust. 6 i dla mostów § 6. ust. 7 brzmią: Jeżeli natężenia ścinające i ciągnięcia główne w betonie, obliczone wedle § 5. ust. 8, przekraczają wartości, wyznaczone w § 6. ust. 1, to należy urządzić strzemiona albo inne odnośne wkładki żelazne i takie im dać wymiary, aby przyjęły tę część natężeń ścinających i ciągnięć głównych, które nie może wziąć na siebie beton bez przekroczenia normowanych natężeń dopuszczalnych, a najmniej 60 procent całych natężeń ścinających i ciągnięć głównych. Beton sam musi przenieść najmniej 30% sił ścinających jako natężenia ścinające o dopuszczalnej wielkości.

W Szwajcaryi wedle rozp. z 1909 maja, jeżeli natężenia główne przekraczają  $4 \text{ kg/cm}^2$ , pręty odginane przenieść całe natężenie główne.

Przykład. Przyjąwszy, że dla przykładu na str. 44 mamy ze względu na ciągnięcia główne z czterech istniejących odgiąć dwa druty  $\phi 30 \text{ mm}$  (lub dać dwa druty dodatkowe) o przekroju  $F_e = 14 \cdot 14 \text{ cm}^2$  i mając dla przyjętego  $Q = 10000 \text{ kg}$  dane:  $d_1 = 39 \text{ cm}$ ,  $z_1 = 12 \cdot 25 \text{ cm}$ ,  $b_1 = 27 \text{ cm}$ ,  $\sigma_1 = 4 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_e = 950 \text{ kg/cm}^2$ , to odstęp  $e$  możemy obliczyć z wzoru:

$$e = \frac{950 \times 7 \cdot 07}{\frac{1}{2} \sqrt{2 \left( \frac{10000}{39 - \frac{12 \cdot 25}{3}} - 27 \times 4 \right)}} = 52 \text{ cm.}$$

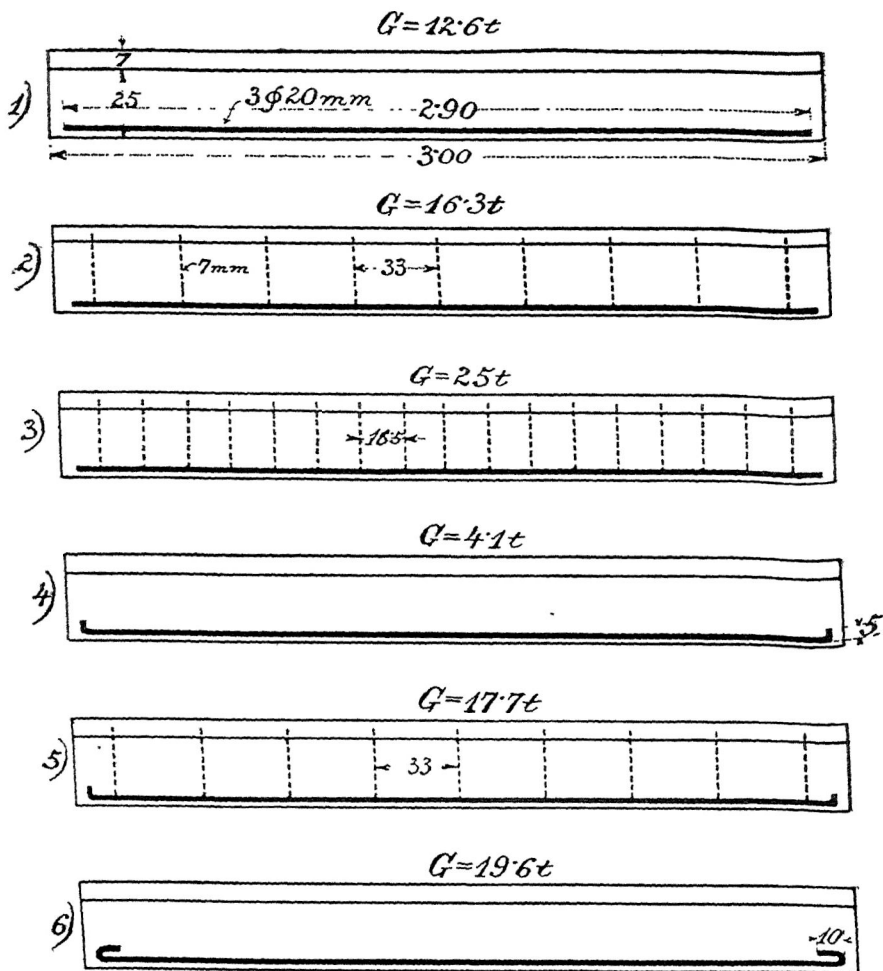
Zatem jeden drut przenosi siłę ciągnącą:  $Z = 950 \times 7 \cdot 07 = 6608 \text{ kg}$ .

Zwykle jednak odstępy  $e$  wyznacza się wykreślnie według rys. 73, a liczebnie sprawdza się tylko, czy natężenie ciągnące w żelazie nie przekroczyło wartości dopuszczalnej.



## § 48. Uwzględnienie przyczepności.

Przyczepność żelaza i betonu jest warunkiem działania zespołów żelbetowych jako całości. O przyczepności mówiliśmy już w § 7. Podaliśmy tam też natężenia dopuszczalne. Jeżeli natężenie wypadła z rachunku większe, niż 2 do  $3 \text{ kg/cm}^2$ , trzeba

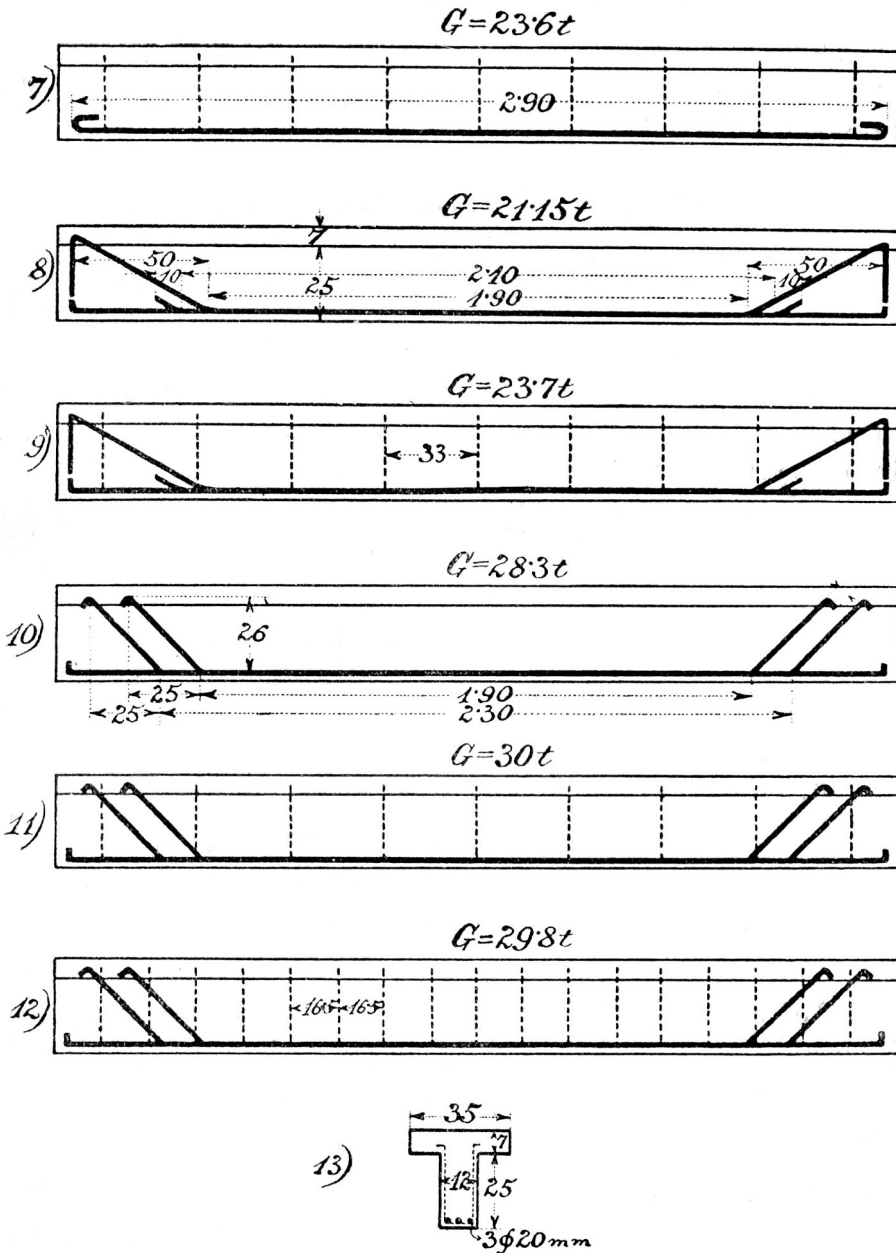


Rys. 74 a.

użyć odpowiednich środków dla wzmocnienia, względnie przeszkodzenia przesunięciu.

W tym celu używają specjalnych prętów żelaznych, które stawiają opór przesunięciu swym kształtem. Wtedy wedle roz-

porządzenia austriackiego może być natężenie przyczepne o 10% większe. Nie może ono być większym, bo żelaza te przy większym natężeniu rozsadzają beton.



Rys. 74b.

Bardzo ciekawe doświadczenia z belkami żelbetowymi ogłosiło przedsiębiorstwo Rella i Neffe w Wiedniu w Beton und Eisen (1909 str. 62

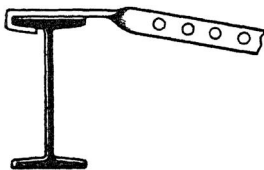
i nast.). Badano na złamanie 36 belek, zawsze po 3 takich samych, zatem 12 typów belek teowych 35 m szerokich 32 cm wysokich. Grubość płyty wynosiła 7 cm, żebra 12 cm, wkładki były 3 okrągłe ( $d=20$  cm). Na rys. 74 a b zestawiliśmy wszystkie typy wraz z wynikami doświadczeń. Widzimy z tego, jak dobre zabezpieczenie przeciw przesunięciu i ciągnięciom głównym powiększa wytrzymałość.

W Ameryce używają specjalnych prętów żelaznych w celu przeszkodzenia przesunięciu i tak Ransome (rys. 75) skręca wkładki o przekroju kwadratowym.



Rys. 75.

Stapf używa szerokich wstęp z żelaza płaskiego, o kołistych wypukłościach (rys. 76) naprzemian w jedną i drugą stronę wytłoczonych.



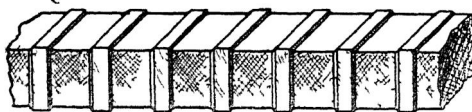
Rys. 76.

Thacher ma wkładki przedstawione na rys. 77.



Rys. 77.

Johnson przyjmuje wkładki żelazne z obręczami (rys. 78). Wszystkie te specjalne kształty żelaza zwiększają o tyle opór



Rys. 78.

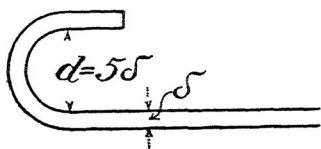
przeciw przesunięciu, że ścięcie betonu następuje na zewnątrz nierówności, więc przy obliczeniu możemy uwzględnić trochę

większą powierzchnię lub co na jedno wychodzi przypuścić trochę większe natężenie.

Zresztą zapobiegamy przesunięciu też przez zaginanie prętów i tworzenie haków.

Zwrócić uwagę należy, że odgięcie musi być dość długie, bo przez hak przenosi się siła na beton, a ciśnienie na beton nie może być za wielkie<sup>1)</sup>. Właściwie należałoby to ciśnienie obliczyć wedle całej siły, działającej w pręcie, czyli dla założenia, że już przyczepność zniesioną została.

Doświadczenia Bacha wykazały, że początek przesunięcia nie wiele się opóźnia przez haki, że jednak wytrzymałość się zwiększa o 40—50%, aż nastąpi wygięcie haków. Considère proponuje użycie haków w kształcie, jak na rysunku 79., przyczem  $d=5\delta$ .



Rys. 79.

Ponieważ pręty dolne bez udziału górnych nie mogą się przesunąć, należy według doświadczeń Bacha do

obliczenia natężeń przyczepnych przyjmując także oprócz powierzchni prętów dolnych i powierzchnię górnych.

Doświadczenia Empergera<sup>2)</sup> wykazały, że strzemiona powiększają przyczepność, może dla tego, że otaczając beton, ściskają go, a tem samym przeszkadzają oddaleniu się betonu od pręta i powiększają tarcie między betonem a żelazem. Doświadczenia Bacha potwierdziły to, że tarcie jest o 20% większem i wytrzymałość znacznie większą, za to pęknięcia betonu występują prędzej tam, gdzie są strzemiona.

Jeżeli natężenie zatem nie przekracza 2 do 3 kg, możemy nie dawać wcale strzemion, przy natężeniu większem powinniśmy bezwarunkowo użyć strzemion.

Natężenia przyczepne liczymy przytem wedle wzoru

$$\tau_n = \frac{Q S_i}{u I_i} = \frac{Q}{h_2 u} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (201)$$

przyczem  $Q$  oznacza siłę poprzeczną,  $S_i$  moment statyczny idealnej powierzchni przekroju ponad daną warstwą ze względu na oś ciężkości, a w fazie drugiej moment statyczny powierz-

<sup>1)</sup> Por. Thullie: Versuche von Goodrich-Brooklyn (Ben. u. Eisen 1906 zesz. IV.).

<sup>2)</sup> Emperger: Die Abhängigkeit der Bruchlast vom Verbund.

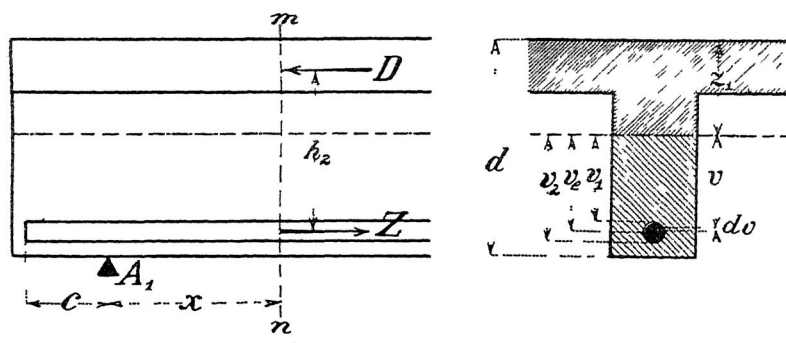
chni ciśnionej lub ciągnięonej idealnej,  $u$  obwód wkładki żelaznej,  $I_1$  idealny moment bezwładności przekroju, zaś  $h_2$  odstęp środka ciśnienia od środka ciągnięcia.

### § 49. Przyczepność wedle rozporządzenia austriackiego.

Przeciw powyższemu obliczaniu podnosiły się rozmaite głosy. I tak Kleinlogel występował wogóle przeciw obliczaniu przyczepności. Ja zwracałem uwagę, że na podporze, gdzie moment jest równy zeru, belka znajduje się w fazie I, a nie drugiej. Obliczenie to nie uwzględnia wreszcie haków, kończących wkładki.

Nowe przepisy austriackie z 1911 stały więc na zupełnie odmiennem stanowisku. Natężenia przyczepne należy obliczać z ciągnięcia albo ciśnienia wkładek żelaznych i długości przyczepnej (n. *Haftlänge*), przyczem działanie haków prostokątnych należy uwzględnić dodając czterokrotną, półkolistych zaś haków, dodając dwunastokrotną wysokość wkładek żelaznych do długości przyczepnej. W ten sposób otrzymujemy natężenie przyczepne przeciętne (n. *mittlere Haftspannung*), które od natężenia rzeczywistego będzie się jednak znacznie różnić.

Sposób uwzględniania haków nie wydaje mi się odpowiednim, bo haki zaczynają dopiero wtedy działać, gdy nastąpi



Rys. 80.

przesunięciu, gdy więc natężenie przyczepne zostanie w części, albo też w całości przewyższone; działanie haków jest rozsądzające beton, a wchodzi też w grę głównie ciśnienie na beton, niezależnie zupełnie od długości przyczepnej. Byłoby więc

właściwiej haki uwzględniać przez podwyższenie natężenia dopuszczalnego.

Pomimo tego nowy sposób obliczenia natężeń przyczepnych, obecnie w Austrii obowiązujący, stanowi pewien postęp.

Przypuśćmy, że mamy jedną wkładkę żelazną (rys. 80), to w przekroju  $m-n$  w odstępnie  $x$  od podpory  $A_1$  siła ciągnąca  $Z = \sigma_e F$  . . . . . (202)

Siła przyczepna  $T_p$ , gdy  $u$  oznacza obwód wkładki żelaznej,  $c$  zmodyfikowaną długość wkładki żelaznej od podpory do końca tejże wkładki, a  $\tau_p$  stałe natężenie przeciętne przyczepne jest

$$T_p = u(c+x)\tau_p,$$

więc

$$\tau_p = \frac{Z}{u(c+x)} = \frac{\sigma_e F}{u(c+x)};$$

a że  $\sigma_e = \frac{15 M v_e}{I_i}$ ,  $\tau_p = \frac{15 F v_e M}{u(c+x)I_i}$  . . . . . (203)

Dla rozmaitych  $x$  otrzymamy z rów 203 rozmaite wartości  $\tau_p$ . Chodzi o wyznaczenie takiego  $x=r$ , dla którego  $\tau_p$  jest największością. Otrzymamy wtedy

$$\frac{d\tau_p}{dx} = \frac{15 d\left(\frac{F v_e M}{u(c+x)I_i}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sigma_e F}{u(c+x)}\right)}{dx} = 0.$$

Dla stałego  $F$ ,  $x_e$ ,  $u$  i  $I_i$  otrzymamy warunek

$$\frac{d\left(\frac{M}{c+x}\right)}{dx} = 0 . . . . . (204)$$

który wyznaczy nam  $x=r$  dla najw  $\tau_p$ .

Jeżeli w jednej wysokości znajduje się kilka wkładek, to  $F$  i  $u$  oznaczają sumy powierzchni przekroju i obwodów wkładek. Jeżeli wkładki znajdują się w różnych wysokościach, to ściśle wzięwszy, należałoby dla każdej wysokości osobno obliczyć  $\tau_p$ . Haki należy uwzględnić, wprowadzając odpowiednio zwiększone  $c$ .

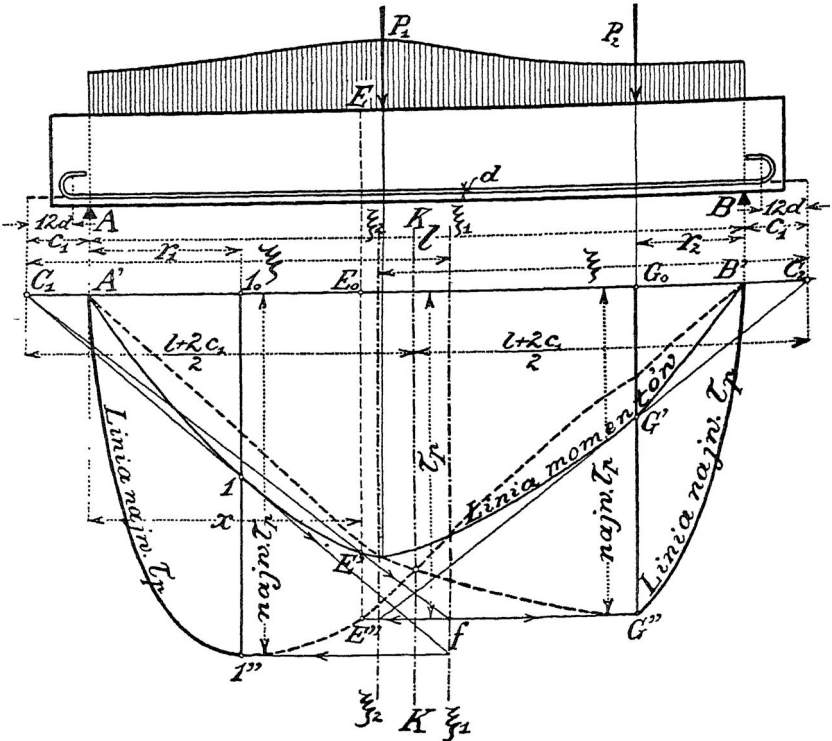
Wyznamy dla dowolnego obciążenia stałego natężenia przyczepne, przyczem przyjmimy na razie tylko jedną wkładkę (rys. 81).

Wykreślmy w znany sposób linię momentów  $A'E'G'B'$ . Jeżeli  $h_2$  jest odstępem sił  $D$  i  $Z$  (rys. 81) to  $M = Zh_2$

więc  $Z = \frac{M}{h_2}$ , otrzymamy zatem z równania (203)

$$\tau_p = \frac{M}{h_2 u (c+x)} \dots \dots \dots (205)$$

Widzimy więc, że dla stałego  $h_2$  i  $u$  jest  $\tau_p$  wprost proporcjonalnem do  $\frac{M}{c+x}$ . Stąd konstrukcja: Przyjmijmy dowolną pionową  $\xi_1 \xi_1$  (rys. 81.) w odstępnie  $\xi$  od  $C_1$ . Jeżeli połączymy dowolny punkt linii momentów np.  $E'$  (w odstępnie  $x$  od pod-



Rys. 81.

pory  $A$ ) z  $C_1$  aż do przecięcia się z prostą  $\xi_1 \xi_1$  i potem poprowadzimy poziomą  $fE''$ , to  $E_0 E''$  przedstawia nam  $\tau_p$ , bośmy  $M$  pomnożyli przez  $\frac{\tau_p}{c_1+x}$ .

Chodzi teraz o podziałkę, w jakiej mamy odczytać  $\tau_p$ .

Otóż długość  $E_0 E''$  odczytamy jako  $M \frac{\xi}{c_1+x}$ , przyczem

$(\xi) \text{ cm}$  przedstawia  $\left(\frac{1}{h_2 u}\right) \text{ cm}^2$

czyli  $(1) \text{ cm}$  przedstawia  $\left(\frac{1}{h_2 u \xi}\right) \text{ cm}^2$ .

Jeżeli podziałka momentów była  $\frac{1 \text{ cm}}{\mu \text{ kgcm}}$ , to

$(1) \text{ cm}$  przedstawia  $\left(\frac{\mu}{h_2 u \xi}\right) \text{ kg/cm}^2$ .

Jeżeli odwrotnie przyjmiemy podziałkę dla  $\tau_p$ , więc, że  $n \text{ cm}$  przedstawia  $\tau_p \text{ kg/cm}^2$ , to

$\left(\frac{\tau_p}{n}\right) \text{ kg/cm}^2 = \left(\frac{\mu}{h_2 u \xi}\right) \text{ kg/cm}^2$ , stąd

$(\xi) \text{ cm}$  przedstawia  $\frac{(\mu) \text{ kgcm}}{(h_2) \text{ cm} (u) \text{ cm} \left(\frac{\tau_p}{n}\right) \cdot \text{kg cm}^2}$  . . . (206)

Przyjąwszy w odstępnie  $\xi$  promień  $\xi_1 \xi_1$ , otrzymamy rzędne  $E_0 E''$  w podziałce  $n : \tau_p$ .

Przyjąwszy inny punkt linii momentów, możemy w ten sam sposób otrzymać punkt linii  $\tau_p$ .

W ten sposób otrzymamy linię  $A' 1'' E'' B'$ , a z drugiej strony zapomocą pionowej  $\xi_2 \xi_2$  w odstępnie  $\xi$  od  $C_2$  linię  $B' G'' A'$ .

Największe  $\tau_p$  otrzymamy, gdy z  $C_1$ , względnie  $C_2$  poprowadzimy styczne do linii momentów, a więc  $1_0 1''$  względnie  $G_0 G''$ . Obie linie  $\tau_p$  przecinają się w pionowej  $KK$ , połowiącej odstęp  $C_1 C_2$ , a każda z tych linii przecina się z linią momentów w punkcie przecięcia się odnośnej pionowej  $\xi$ .

Jeżeli  $C_1 1'$  jest styczną do linii momentów w  $1'$ , to przez  $C_1$  przechodzi odnośne  $Q$  i mamy

$$(c_1 + r_1) = \frac{M}{Q} \text{ . . . . . (207)}$$

Zapomocą tego równania możemy też licznie wyznaczyć punkt  $1'$ . Jestto punkt, dla którego siła poprzeczna  $Q$  wpada na punkt  $C_1$ , albo go przekracza, jeżeli, jak w  $G'$ , linia  $C_2 G'$  nie jest styczną do linii momentów, bo tam jest nagle załamanie tej linii.

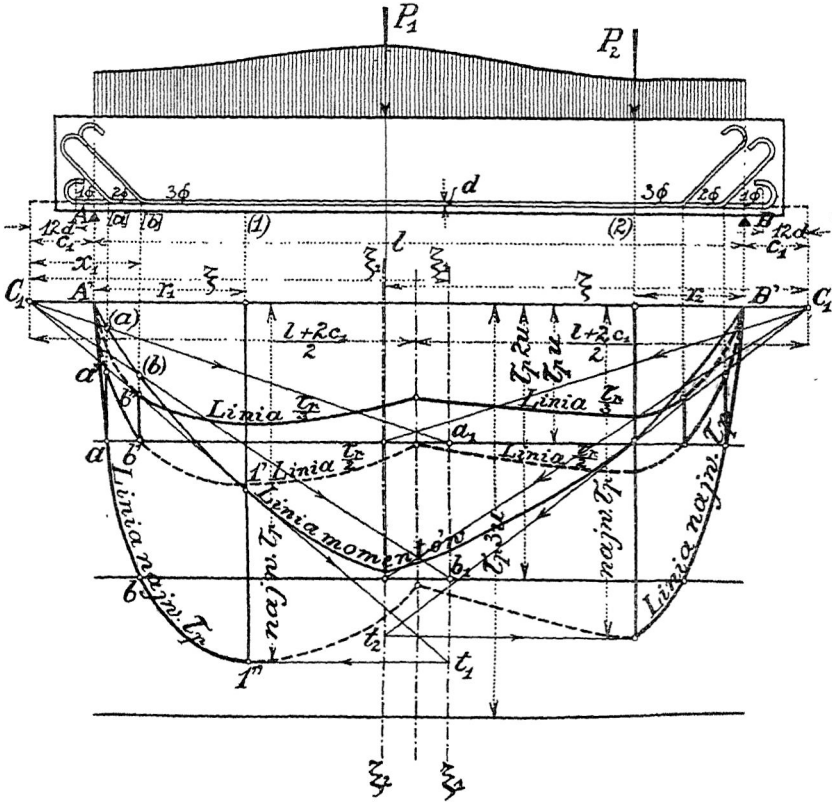
Punkty  $1_0$  i  $G_0$  nazywamy punktami miarodajnymi (n. *massgebender Punkt*).



Dla punktu 1<sub>0</sub> otrzymamy z równania (205)

$$\text{najw. } \tau_p = \frac{M_r}{h_2 u (c_1 + r_1)} = \frac{Q_r}{h_2 u'}$$

a więc wzór zupełnie taki sam, jak wedle dotychczasowego sposobu liczenia, tylko, że dla obliczenia  $\tau_p$  bierzemy w rachunek  $Q_r$  w punkcie miarodajnym, a dotychczas braliśmy dla obliczenia  $\tau_p'$  siłę  $Q_1$  na podporze. O tyle więc teraz wypada mniejsze natężenie przyцепne.



Rys. 82.

Jeżeliby  $c_1 = 0$ , to punkt miarodajny byłby na podporze i mielibyśmy

$$\tau_p = \frac{Q_r}{h_2 u} = \tau_p'$$

Zapomocą nowej metody uwzględniamy więc przedłużenie wkładki i wpływ haków.

Jeżeli niektóre pręty żelazne odginamy, to dla każdej wkładki nie powinno natężenie przyczepne przekroczyć pewnej granicy.

Na rys. 82 widzimy tę samą belkę tak samo obciążoną. Obliczmy  $\tau_p u$  dla jednego pręta,  $\tau_p 2u$  dla dwu,  $\tau_p 3u$  dla trzech i t. d. i odetnijmy w podziałce, to widzimy, że aż do  $a$  wystarczy jeden pręt, dalej musimy dać 2 pręty, rzędne linii  $\tau_p$  zatem zmniejszamy o połowę. Wystarczy ona do  $b$ , poczem dajemy 3 pręty, a rzędne odnośnej linii wynoszą  $\frac{1}{3}$  linii  $\tau_p$ .

W ten sposób otrzymujemy punkty  $[a]$ ,  $[b]$ , gdzie mogą się odginać pręty, jeżeli  $h_2$  jest stałe. To ostatnie założenie nie sprawdza się jednak, bo  $h_2$  zależy od ilości prętów; lecz wedle Haberkalta<sup>1)</sup> wystarczy, jeżeli dla tej konstrukcyi przyjmiemy średnio dla wyznaczenia  $h_2$  tylko  $\frac{3}{4}$  wkładek przekroju środkowego.

Ponieważ na mocy konstrukcyi punktu  $a$  otrzymamy odnośny punkt  $a'$  linii momentów, jeżeli  $C_1$  połączymy z  $a_1$ , to dla wyznaczenia  $(a)$  nie potrzeba kreślić linii  $\tau_p$ , lecz otrzymamy punkty, w których mogą kończyć się pręty, połączywszy punkty  $a_1$ ,  $b_1$  z  $C_1$  do przecięcia się z linią momentów. Nie potrzeba więc kreślić całej linii  $\tau_p$ , wystarczy wyznaczyć tylko  $1''$ , a potem punkty  $a_1$ ,  $b_1$ , a stąd  $a'$  i  $b'$ .

Haberkalt udowadnia dalej, że w przybliżeniu długość przyczepna prętów odgiętych oznacza się jako rzut poziomy tych prętów.

Poza punktem  $b$  linia zredukowanych  $\tau_p$  nie dochodzi już do wielkości dopuszczalnej. Najwyższy jej punkt jest punkt  $1'''$ . Jeżeli liczba prętów wzrasta dalej ku środkowi, to odgięcie może — ze względu na przyczepność — nastąpić w dowolnym punkcie; stosuje się więc ono tylko do momentu. Zato ta odgięta wkładka nie potrzebuje wtedy sięgać aż do podpory.

Długość jej od punktu odgięcia, da się obliczyć z siły  $Z$  działającej we wkładce z równania (203)

$$x_1 = \frac{Z}{u\tau_p} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (208)$$

przyczem w długości  $x_1$  należy uwzględnić haki.

<sup>1)</sup> Por. art. Haberkalta i Postuvanschitza w Oest. Wochen. f. d. öffentl. Baudienst 1911, zeszyt 27 i 28.

Jeżeli ciężar jest ruchomy, to — rozumie się — zamiast  $M$  musimy w każdym punkcie wyznaczyć najw  $M$ .

Kreślmy linie najw  $M$ , a wystarczy to zrobić tylko dla skrajnych ćwiartek rozpiętości. Konstrukcyja zostaje ta sama. Dla wyznaczenia punktu miarodajnego kreślmy z  $C_1$  styczną do linii najw  $M$ .

W przybliżeniu możemy dla wyznaczenia końców prętów użyć też linii najw  $M$ .

Jeżeli belka jest utwierdzona, to z konstrukcyi wynika, że punkt miarodajny jest na podporze. Trzeba od tego punktu mieć odpowiednie długości  $x_1$  na podporze. Można też zwiększyć  $u$ , przyjmując małe średnice prętów, można użyć wkładek dodatkowych, powiększyć  $h_2$ , połączyć haki poprzeczką. Jeżeli pomimo tego nie osiągniemy przepisanego  $x_1$ , to belkę uważać należy jako częściowo utwierdzoną.

Rozporządzenie ministerstwa austriackiego z r. 1911 §. 5 ust. 23. Co do przyczepności żelaza do betonu należy udowodnić, że siła ciągnąca lub cisnąca wkładki żelaznej, działająca w jakimkolwiek przekroju a obliczona wedle ust. 3c, zostaje przeniesiona już przed tym przekrojem zapomocą „średnich natężeń przyczepnych“ o dopuszczalnej wielkości. Dla obliczenia tego średniego natężenia przyczepnego należy przyjąć całkowitą siłę ciągnącą lub cisnącą, rozdzieloną równomiernie na odnośną powierzchnię przyczepną (obwód wkładki żelaznej pomnożony przez długość przyczepną). Uwzględniając działanie haków prosto i ostrokątnych należy do przyległej prostej długości przyczepnej dodać poczwórny, haków półkolistych dwunastokrrotny wymiar przekroju wkładki żelaznej, wpadający w płaszczyznę zginania.

Przykład. Wyznaczyć największe natężenie przyczepne dla belki, podanej w przykładzie na str. 44.

Dla tego przypadku  $h_2 = d_1 - \frac{z_1}{3} = 39 - \frac{12 \cdot 25}{3} = 34 \cdot 92 \text{ cm}$ ; przypuścmy, że dwa druty są już w badanem miejscu odgięte, to dla pozostałych dwóch jest  $u = 18 \cdot 84 \text{ cm}$ .

Następnie przyjmijmy  $c_1 + r_1 = 120 \text{ cm}$ ,  $M_1 = 300000 \text{ kgcm}$ , to według równania (205):

$$\text{Najw. } \tau_p = \frac{300000}{34 \cdot 92 \times 18 \cdot 84 \times 120} = 3 \cdot 8 \text{ kg/cm}^2.$$

Najlepiej jednak natężenia przyczepne zbadać (według żądań austr. przepisów) wykreślić, zatem na podstawie konstrukcyi, podanych w rys. 81 i 82.

## E. Obliczenie prętów ciśnionych środkowo.

### § 50. Obliczenie słupów żelbetowych.

Jeżeli siła  $P$  działa na słupek żelbetowy środkowo, to przyjąć należy, że siła rozdziela się równo na beton, na żelazo zaś w stosunku do współczynnika sprężystości, zatem

$$P = F_b \tau_1 + F' \sigma_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (209)$$

gdzie  $F_b$  oznacza przekrój betonu, a  $F'$  wkładki żelaznej. Zwykle przyjmujemy, jak w fazie II b,  $\sigma_e = 15 \tau_1$  więc

$$P = \tau_1 [F_b + 15 F'] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

Równanie to, obecnie powszechnie używane do obliczeń wymiarów słupa, okazało się też ważnym ze względu na bezpieczeństwo przeciw zniszczeniu słupa, ale tylko do stosunku  $\frac{F'}{F_b} = 0.02$ , czyli do 2% uzbrojenia. Równanie (210) możemy

jeszcze napisać, jeżeli nazwiemy  $p = \frac{100 F_b}{F'}$ ,

$$P = \tau_1 F_b \left( 1 + 15 \frac{p}{100} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (211)$$

przyczem  $0.8 < p < 2$ .

Jeżeli  $p > 2$ , to należy w rachunku uwzględnić tylko trzecią część ponad 2%, więc należy w wzór wprowadzić

$$p' = 2 + \frac{1}{3} (p - 2) = 1.33 + 0.33 p \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

otrzymamy zatem dla

$$\begin{array}{cccccc} p = 0.8 & 2 & 3 & 4 & 5 & \% \\ p' = 0.8 & 2 & 2.33 & 2.67 & 3.00 & \end{array}$$

Natężenie dopuszczalne dla betonu przyjmujemy, rozumie się, niższe przy ciśnieniu środkowym, niż przy ciśnieniu przy zginaniu, jak o tem w pierwszym rozdziale mówiliśmy.

Wedle rozporządzenia austriackiego z r. 1911 natężenia dopuszczalne są następujące:

stosunek mieszaniny, w kg cementu na 1 m <sup>3</sup> mieszaniny	w budownictwie	dla mostów drogow.
470 kg na	28 kg/cm <sup>2</sup>	25 kg/cm <sup>2</sup>
350 „	25 „	22 „
280 „	22 „	19 „

Powyższe wzory są ważne wedle rozporządzenia austriackiego dla  $\frac{l}{a} < 60$ . Jeżeli  $\frac{l}{a} > 60$ , należy obliczać na wyboczenie.

Dla zeskładów betonowych mamy

w kg cementu na 1 m <sup>3</sup> miesz. stosunek mieszanki	budownictwo kg/cm <sup>2</sup>	mosty drogowe kg/cm <sup>2</sup>
470	22	20
350	20	18
280	17	16
200	14	13
160	9	9
120	6	6

Powyższe wzory są ważne dla  $\frac{l}{a} < 60$ . Słupy o  $\frac{l}{a} > 60$  należy obliczać na wyboczenie.

Przy licznych doświadczeniach, robionych ze słupami, nie ulegały one zgnieciu, ale ścięciu, przyczem pręty podłużne przytrzymywane poziomymi strzemiionami wyginały się (rys. 83).



Rys. 83.

Jaki jest najkorzystniejszy odstęp strzemiion i ich ustrój, nie wykazały jeszcze doświadczenia. Dawniej dawano strzemiiona w odstępie  $= b$ , przy mniejszym odstępie zwiększa się nieco wytrzymałość.

Z licznych doświadczeń wynika, że według wzoru (210) możemy liczyć tylko do pewnego procentu uzbrojenia, a mianowicie jeżeli  $F' < 0.02F_b$ , czyli do 2% uzbrojenia. Jeżeli zwiększamy uzbrojenie poza

tę granicę, to wytrzymałość nie rośnie w tym samym stosunku lecz powolniej.

Rozporządzenie austriackie pozwala uwzględniać wtedy tylko  $\frac{1}{3}$  nadmiaru przekroju wkładek ponad 2%. Zresztą niektórzy inżynierowie (Emperger) przeczą potrzebie zmniejszania wytrzymałości w tym wypadku. Dalsze doświadczenia może rozstrzygnąć tę kwestyę.

Doświadczenia okazały, że aby słupy funkcjonowały jako żelbetowe, procent żelaza nie może być mniejszy, niż 0·8%.

Co do wielkości natężenia dopuszczalnego są rozmaite zdania. Rozporządzenie pruskie przyjmuje natężenie dopuszczalne równe  $\frac{1}{10}$  wytrzymałości na ciśnienie. Jest to bardzo mało, bo jeżeli n. p.  $\mu=180$  do  $200 \text{ kg/cm}^2$ , to równałoby się 18 do  $20 \text{ kg/cm}^2$ . „Leitsätze des Beton-Vereines“ przyjmują  $\tau_1 = 35 \text{ kg/cm}^2$ .

Słusznem jest, aby natężenie było w stosunku do wytrzymałości, a to zależy także od stosunku mieszaniny betonu. Natężenie dopuszczalne należałoby więc zmieniać wedle mieszaniny i innych okoliczności, uwzględniając wstrząśnienia, większe lub mniejsze zmiany natężeń.

Rozporządzenie austr. minister. z r. 1911 dla budownictwa § 5. ust. 14. Przy prętach ciśnionych, to jest prętach, pracujących na ciśnienie środkowe lub mimośrodkowe, trzeba zważać na potrzebną wytrzymałość na wyboczenie, jeżeli stosunek długości wolnej  $L$  do odnośnego promienia bezwładności  $i$  powierzchni przekroju, którą się ma wyznaczyć wedle ustępu 8d, przekracza wartość  $\frac{L}{i}=60$ .

15. Jako długość wolną  $L$  należy przyjąć długość pręta między dwoma punktami osi podłużnej, zabezpieczonymi od wychylenia się.

16. W prętach należy zbadać wkładki żelazne także same dla siebie co do wytrzymałości ich na wyboczenie, przyjmując ich długość wolną równą odstępowi strzemion; umieszczać je należy w odstępach najwyżej równych najmniejszej średnicy przekroju, poprowadzonej przez jego środek ciężkości.

17. Przy prętach należy uwzględnić ewentualnie mimośrodkowe działanie siły.

18. Pręty ciśnione z wyjątkiem sklepień mogą być obliczone w myśl § 5 i 6 tylko wtedy, gdy przekrój wkładek podłużnych w każdym przekroju wynosi najmniej 0·8% całej powierzchni przekroju. Jeżeli powyższy przekrój żelaza wynosi więcej, niż 2% tej całkowitej powierzchni przekroju, to należy ze zwyczajki powierzchni przekroju — prętów podłużnych nad 2% brać w rachubę tylko trzecią część. Jeżeli przekrój wkładek żelaznych jest mniejszy, niż 0·8% całego przekroju, to nie należy wcale uwzględniać wkładek żelaznych przy wyznaczaniu ich udźwigu, ale liczyć pręt jakby z betonu ubijanego.

§ 6 ust. 4. Jeżeli należy uwzględnić wyboczenie wedle § 5 ust. 14., to jako natężenie dopuszczalne powinno się przyjąć:

a) przy środkowo obciążonych prętach ciśnionych natężenia dopuszczalne dla obciążenia środkowego wedle ustępu 1, pomnożone współczynnikiem zmniejszającym  $\alpha = \left(1.72 - 0.012 \frac{L}{i}\right)$ ;

b) przy mimośrodkowo obciążonych prętach ciśnionych natężenie dopuszczalne dla obciążenia mimośrodkowego według ustępu 1, zmniejszone o  $\frac{1-\alpha}{\alpha}$  razy ciśnienie, odpowiednio pomyślanemu obciążeniu środkowemu.

Jeżeli przy wkładkach żelaznych baczyć należy na wyboczenie, to należy ciśnienia dopuszczalne wedle tablicy w ustępie 1 zmniejszyć do wartości  $\sigma_w$  wedle następujących wzorów:

a) dla stosunków długości  $\frac{L}{i} = 10$  do 105

$$\sigma_w = \left(0.816 - 0.003 \frac{L}{i}\right) \tau_1;$$

b) dla stosunków długości  $\frac{L}{i} > 105$   $\sigma_w = 5580 \left(\frac{i}{L}\right)^2 \tau_1$ .

Te same przepisy stosują się też do mostów żelbetowych.

Dla budowli betonowych przepisy są te same z następnymi zmianami: W § 5 ust. 14 należy zmienić  $\frac{L}{i} = 60$  na  $\frac{L}{i} = 20$ ,

w § 6 ust. 4 brzmi wzór  $\alpha = \left(1.72 - 0.036 \frac{L}{i}\right)$ .

Leitsätze des Betonvereines z r. 1903 przyjmują dla różnych  $\tau_1$  następujące najmniejsze wymiary słupów, dla których nie potrzeba jeszcze liczyć na wyboczenie:

$\tau_1$	30	35	40	45	50 kg/cm <sup>2</sup>
$\frac{d}{l}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{14}$
$\frac{b}{l}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{17}$

Rozporządzenie pruskie z r. 1907 § 15 ust. 6. Obliczenie słupów na wyboczenie ma nastąpić, jeżeli ich wysokość wynosi  $\frac{1}{18}$  najmniejszego wymiaru poprzecznego. Strzemionami należy ustalić niezmiennie wzajemny odstęp prętów żelaznych. Odstęp tych strzemion musi w przybliżeniu odpowiadać najmniejszemu wymiarowi słupa, a nie może być większym, niż 30-krotna grubość wkładki podłużnej.

7. Do obliczenia słupów na wyboczenie należy użyć wzoru Eulera. § 16 ust. 4. W słupach nie może beton pracować więcej, niż  $\frac{1}{10}$  swej wytrzymałości. Przy obliczeniu wkładek żelaznych na wyboczenie należy udowodnić pięciokrotną pewność.

Rozporządzenie ministeryjne rosyjskie z roku 1911. Normy: 5. Najwyższe dopuszczalne natężenia żelaza i betonu w częściach ściskanych przy zupełnym wyłączeniu zginania i przy zawartości prze-

kroju uzbrojenia nie mniejszej, niż 0·80% przekroju betonu, nie powinny przekraczać dla betonu  $\frac{1}{6}$  wytrzymałości na ciśnienie w terminie 28 dniowym, a dla żelaza zlewnego 800 kg/cm<sup>2</sup>.

W częściach, na które nie działają wstrząśnienia lub siły, często się zmniejszające, powyższe naprężenia dopuszczalne mogą być podniesione, ale nie więcej, niż o 20%.

Gdy długość części ciśnionej przekracza 18 razy wzięty najmniejszy wymiar przekroju poprzecznego, wytrzymałość tej części należy sprawdzić na wyboczenie. Przyjmuje się wtedy za wolną długość — odległość pomiędzy punktami, które nie dopuszczają wyboczenia.

Instr. A. do § 5. 10. W obliczeniach prętów ściskanych, posiadających uzbrojenie podłużne, przekraczające 2% przekroju poprzecznego betonu, należy brać w rachubę tylko  $\frac{1}{4}$  przekroju uzbrojenia ponad 2%.

11.) Spółczynnik zmniejszenia zasadniczego natężenia w obliczeniu na wyboczeniu należy brać: przy ciśnieniu środkowym  $\sigma = \frac{1}{0.96 + 0.0001 \left(\frac{l}{i}\right)^2}$

gdzie  $\sigma$  stosunek natężenia dopuszczalnego do zasadniczego,  $l$  długość wolna,  $i$  najmniejszy promień bezwładności przekroju poprzecznego; wiązania poprzeczne muszą się znajdować jedno od drugiego w odległości nie większej, niż najmniejszy wymiar przekroju poprzecznego ciśnionej części, licząc tę odległość po linii, przechodzącej przez środek ciężkości tego przekroju.

Przykład. Wyznaczyć największe ciśnienie w betonie dla słupa żelbetowego, o przekroju kwadratowym 30×30 cm ( $F_b = 900 \text{ cm}^2$ ), uzbrojeniu 4 *gf* 20 mm ( $F' = 12.57 \text{ cm}^2$ , zatem  $p = \frac{12.57}{900} = 0.014$ ), pod działaniem siły osiowej 30000 kg.

Według wzoru (211) mamy:

$$\tau_1 = \frac{30000}{900(1 + 15 \times 0.014)} = 27.5 \text{ kg/cm}^2.$$

## § 51. Słupy żelbetowe owijane.

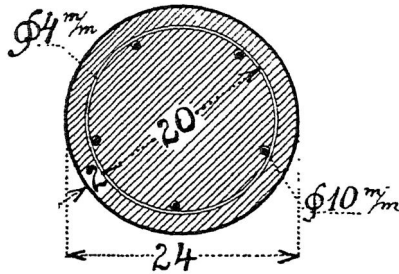
Considère doświadczalnie wykazał, że przez owijanie słupa wytrzymałość znacznie się powiększa. Powodem tego jest ta okoliczność, że owinięcie przeszkadza odkształceniu poprzecznemu betonu. Wykazał on doświadczalnie, że wytrzymałość betonu wzrasta przez owinięcie 1.5 razy, zaś żelazo w owinięciu niesie 2.4 razy tyle, co wkładki podłużne.

Wzór Considèra więc jest

$$P = 1.5\tau_1 F_l + \sigma_s(F_l + 2.4F_s) \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$



przyczem  $F_i$  oznacza przekrój jądra słupa, zawartego między owinięciem (rys. 84),  $F_l$  przekrój wkładek podłużnych,  $F_s$  prze-



Rys. 84.

krój urojonej wkładki podłużnej o tym samym ciężarze, co owinięcie dla danej wysokości.

Postaramy się uzasadnić bliżej ten wzór wedle Saligera<sup>1)</sup>.

Nazwijmy  $l$  długość walca betonowego,  $d$  jego średnicę wewnątrz owinięcia, sumę przekrojów owinięcia  $f_u$  na wysokości  $l$ ,  $P$  siłę podłużną, to powstaje wskutek niej ciśnienie podłużne  $\sigma_l = \frac{P}{f} = \frac{4P}{d^2\pi}$ .

Temu ciśnieniu odpowiada skrócenie jednostkowe  $\varepsilon_l = \frac{\sigma_l}{E_1}$

a rozszerzenie jednostkowe  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_l}{m}$ . To rozszerzenie sprawia ciągnięcie w owinięciu, które znów ciśnie na beton. Między ciśnieniem poprzecznym betonu  $\sigma_q$  a ciągnięciem owinięcia  $\sigma_u$  istnieje zależność  $\sigma_q \cdot dl = 2f_u \sigma_u$ .

Jeżeli współczynnik sprężystości poprzecznej betonu jest  $E_q$ , współczynnik sprężystości żelaza na ciągnięcie  $E_u$ , to  $\sigma_q = \varepsilon_q E_q$  i  $\sigma_u = \varepsilon_u E_u$ , co wstawivszy w poprzednie równanie, otrzymamy  $\varepsilon_q E_q dl = 2f_u \varepsilon_u E_u$ , czyli

$$\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_q} = \frac{E_q}{E_u} \frac{dl}{2f_u} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (214)$$

Ponieważ skrócenie poprzeczne betonu  $\varepsilon_q$ , powiększone przez rozciągnięcie owinięcia  $\varepsilon_u$ , musi być równe rozszerzeniu poprzecznemu słupa nieowiniętego  $\varepsilon$ , więc możemy napisać  $\varepsilon_u + \varepsilon_q = \varepsilon$ , czyli

$$\frac{\sigma_u}{E_u} + \frac{\sigma_q}{E_q} = \frac{\sigma_l}{E_l m} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (215)$$

<sup>1)</sup> Der umschnürte Beton. Rundschau f. Techn. u. Wirt. 1908. Zur Theorie des querverstärkten Betons u. Eisenbeton 1910.

Z obu równań (214) i (215) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \sigma_q &= \frac{l}{E_l + \frac{E_l}{E_u} 2f_u} \frac{\sigma_l}{m} \\ \sigma_u &= \frac{l}{E_u + \frac{E_l}{E_q} 2f_u} \frac{\sigma_l}{m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (216)$$

Przyjmijmy w przybliżeniu  $E_l = E_q$  i  $\frac{E_u}{E_q} = n_u$

zaś  $\frac{V_u}{V} = \frac{f_u d\pi}{l \cdot \frac{d^2\pi}{4}} = \frac{4f_u^3}{4dl} = \mu_u \dots \dots \dots (217)$

Wstawiając to w równ. (216), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \sigma_q &= \frac{1}{1 + \frac{2}{n_u \mu_u}} \frac{\sigma_l}{m} \\ \sigma_u &= \frac{1}{\frac{1}{n_u} + \frac{\mu_u}{2}} \frac{\sigma_l}{m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (218)$$

a stąd  $\frac{\sigma_q}{\sigma_u} = \frac{\mu_u}{2}$ .

Jeżeli  $\sigma_l$  wrośnie aż do granicy wytrzymałości  $k_u$ , to jeżeli  $\sigma_u$  oznacza granicę płynności owijania, otrzymamy z równ. (218)

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{\frac{1}{n_u} + \frac{\mu_u}{2}} \frac{k_u}{m}, \text{ stąd} \\ k_u &= \frac{m\sigma_u}{n_u} + \frac{\mu_u}{2} m\sigma_u \dots \dots \dots (219) \end{aligned}$$

Jeżeli niema wcale owinięcia, to wedle (217):

$\mu_u = 0$ , więc z (219) otrzymamy  $k = \frac{m\sigma_u}{n_u}$ , co wstawiając w (219), możemy napisać  $k_u = k + \frac{\mu_u}{2} m\sigma_u \dots \dots \dots (220)$

Wytrzymałość na ciśnienie słupa owijanego składa się z dwu części. Pierwsza część to  $k$ , wytrzymałość słupa z wkładkami podłużnymi bez owinięcia, druga część to  $\frac{\mu_u}{2} m\sigma_u$ .

Spółczynnik  $\frac{\mu_u}{2}$   $m$  oznaczył Considère doświadczalnie równy 2.4. Gdy przytem zważymy, że wytrzymałość betonu w jądrze okazała się według Considère o 50% większą, niż zwykle, to otrzymamy wzór (213):  $P=1.5 \tau_1 F_l + \sigma_e (F_l + 2.4 F_s)$ .

Przykład. Wyznaczyć wymiary słupa z betonu owijanego, obciążonego osiowo siłą  $P=22000$   $kg$ .

Przyjmijmy  $\tau_1=25$   $kg/cm^2$ ,  $\sigma_e=1000$   $kg/cm^2$ , przekrój wkładki pionowych  $F_l=3.93$   $cm^2$  ( $\phi$  10  $mm$ ), średnicę jądra dla okrągłego przekroju słupa  $D=20$   $cm$  (zatem  $F_b=314.16$   $cm^2$ ), to pozostaje do wyznaczenia tylko przekrój wkładki owijającej. — Z wzoru (213) otrzymamy:

$$F_s = \frac{22000 - 1.5 \times 25 \times 314.16 - 1000 \times 3.93}{2.4 \times 1000} = 2.6 \text{ cm.}$$

Jest to przekrój wkładki owijającej, określony przepisami austr.

Przyjmując skok śrubowego owinięcia 4  $cm$ , otrzymamy rzeczywisty przekrój drutu owijającego:  $f = \frac{2.6 \times 4}{3.14 \times 20} = 0.165$   $cm^2$ , zatem  $\phi = 5$   $mm$  ( $f=0.16$   $cm^2$ ).

Dodając jako grubość skorupy 2  $cm$ , mamy zewnętrzną średnicę słupa  $D'=24$   $cm$  (rys. 84).

Rozporządzenie francuskie dozwala najwyżej obciążać takie słupy do 65% wytrzymałości betonu. Wytrzymałość zwiększa się w stosunku 1:  $(1 + m' \frac{V'}{V})$ , gdzie  $V'$  oznacza objętość uzbrojenia poprzecznego lub ukośnego,  $V$  oznacza, wszystko na 1  $m$  długości;  $m'$  oznacza współczynnik, który wynosi

$$\text{dla strzemion, jeżeli } e=b \text{ } m'=8; e=\frac{b}{3} \text{ } m'=15$$

$$\text{„ owinięcia „ } e=\frac{2}{5} b \text{ } m'=15,$$

$$e=\frac{1}{5} b \text{ (dla 50 kg) i } e=\frac{1}{8} b \text{ (dla 100 kg) ..... } m'=32.$$

Rozp. min austr. z r. 1911 dla budownictwa § 5. ust. 19, dla mostów § 5. ust. 17. Przy prętach ciśnionych żelbetowych, w których, oprócz wkładek podłużnych umieszczono także śrubowo wyginane ciągłe łączniki poprzeczne (beton owijany), należy do wyznaczenia ciśnienia wskutek siły cisnącej środkowo wprowadzić urojoną powierzchnię przekroju  $F_i = F_b + 15 F_l + 30 F_s$ , przyczem  $F_b$  oznacza cały przekrój betonu,  $F_l$  przekrój wkładek z uwzględnieniem poprzedniego ustępu 18, a  $F_s$  powierzchnię przekroju pomyślanego pręta podłużnego, którego ciężar równa się ciężarowi śrubowatego łącznika poprzecznego, jeżeli oba ciężary odniesiemy do jednostki długości pręta ciśnionego. Jeżeli przytem tak utworzona urojona powierzchnia  $F_i$  wynosi więcej, niż 1.5 ( $F_b + 15 F_l$ ) albo więcej niż 2  $F_l$ , to można w rachunek wstawić tylko mniejszą tych obu wartości granicznych.

Rozporządzenie pruskiego minist. z r. 1909. Słupy z betonu owijanego ustroju Considéra, jakoteż z innym poprzecznym uzbrojeniem spiralnym, które dla wytrzymałości żelbetu ma ten sam skutek, mogą być dopuszczone, jeżeli przytem będzie zachowanym następujący sposób obliczenia:

Jeżeli  $F_b$  jest całkowity przekrój betonu,  $F_l$  całkowity przekrój pionowych wkładek,  $F_s$  przekrój pomyślanej takiej pionowej wkładki żelaznej, który powstaje, jeżeli ilość żelaza owijana na jednostkę wysokości słupa zamieni się na przyjętą wkładkę żelazną podłużną na tej samej wysokości o równej ilości, to na podstawie stąd utworzonego przekroju idealnego  $F_i = F_b + 15F_l + 30F_s$ , wyznacza się obciążenie dopuszczalne  $P$  słupa wedle wzoru  $P = \sigma_b F_i$ , przyczem  $\sigma_b$  wedle idących przepisów oznacza natężenie dopuszczalne ciśnień w słupach  $\left(\frac{1}{10}\mu\right)$ .

Przekrój, wynikający z powyższego wzoru, dopuszcza się tylko tak długo, dopóki nie przekracza on  $2F_b$ .

Rozporządzenie rosyjskie z roku 1911 nie zawiera żadnej wzmianki o obliczaniu słupów owijanych.

## § 52. Wyboczenie słupów.

Jeżeli  $\frac{l}{\alpha}$  jest większe, niż 60, to należy liczyć słupy na wyboczenie.

Rozporządzenie pruskie przepisuje obliczać słupy żelbetowe wedle wzoru Eulera:

$$J = m \frac{Pl^2}{E\pi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

jeżeli  $m$  oznacza współczynnik bezpieczeństwa, a  $P$  siłę podłużną. W Prusiech przepisy wymagają pięciokrotnej pewności, więc  $m = 5$ ,  $E = 140000$ .

Wzór Eulera, jak wiadomo, ważny jest tylko dla stałego  $E$ . Tu dla betonu wzór ten nie może być ważnym, gdyż  $E$  znacznie się zmienia. Dlatego inni obliczają wedle wzoru Rankina:

$$P = \frac{A\tau_1}{1 + \alpha \left(\frac{l}{\alpha}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

Chodzi teraz o współczynnik  $\alpha$ , którego z doświadczeń jeszcze nie wyznaczono.

Ritter<sup>1)</sup> obliczył na podstawie linii odkształceń Bacha wzór dla natężeń

$$\tau_1 = \mu [1 - e^{-1000\sigma}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (223)$$

<sup>1)</sup> p. Schweizer-Bauzeitung 1899.

jeżeli  $\mu$  jest współczynnikiem wytrzymałości betonu na ciśnienie  $e=2\cdot 171828$  zasada log. natur.,  $\delta = \frac{dl}{L}$ , względne skrócenie.

Wiemy ze statyki, że  $E = \frac{d\tau_1}{d\delta}$ .

Jeżeli więc różniczkujemy równ. (223), to otrzymamy

$$E = \frac{d\tau_1}{d\delta} = \mu 1000 \cdot e^{-1000\delta} = 1000[\mu - \tau_1].$$

Wstawmy te wartości we wzór Eulera, który opiewa:

$$P = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot E \cdot J, \text{ to otrzymamy}$$

$$P = \frac{\pi^2 E J}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot J}{l^2} 1000[\mu - \tau_1].$$

W tym wzorze jako  $\tau_1$  wstawmy natężenie przy rozpozczęciu wybożenia  $\mu_w$ , więc  $P = F_b \mu_w$ .

Wstawmy  $\pi^2 = 10$ ,  $J = F_b a^2$ , to

$$P = \frac{F_b a^2 \cdot 10}{l^2} 100[\mu - \mu_w] = F_b \cdot \sigma_{\mu_w} \text{ stąd otrzymujemy } \mu_w,$$

$$\mu_w = \frac{\mu}{1 + 0\cdot 0001 \cdot \frac{l^2}{a^2}} \quad \dots \quad (224)$$

Dla  $n$ -krotnej pewności otrzymujemy:

$$F_b = \frac{nP}{\mu_w} = \frac{P}{\tau_w} = \frac{P}{\tau_1} \left[ 1 + 0\cdot 0001 \frac{l^2}{a^2} \right] \quad \dots \quad (225)$$

wzór, podobny kształtem do wzoru Rankina.

Wzór ten przyjmuje rozporządzenie francuskie.

Najnowsze doświadczenia Bacha<sup>1)</sup> wykazują, że współczynnik powinien być o połowę mniejszy, więc 0·00005.

Austryackie rozporządzenie przyjmuje wytrzymałość na wybożenie jako funkcję liniową  $\frac{l}{a}$ , a więc wedle Tetmajera,

i przyjmuje współczynnik zmniejszający dla  $\frac{l}{a} \geq 60$ .

$$\tau_w = \tau_1 \left( 1\cdot 72 - 0\cdot 012 \frac{l}{a} \right) \quad \dots \quad (226)$$

<sup>1)</sup> Por. Zeit. d. Verein. deut. Ing. 1913 II. str. 1969.



Inaczej rachuje Emperger. Słupy takie według niego niosą sumę ciężaru, odpowiadającego osobno słupowi żelaznemu a osobno betonowemu. Doświadczenia nieliczne, któremi popiera ową teorię, nie są dość przekonujące i raczej należałoby obliczać słupy takie na innej zasadzie.

Wiadomo, że słup żelazny, składający się z pojedynczych prętów, jeżeli ma nieść odpowiednio do momentu bezwładności całości przekroju, musi być albo stężony kratą lub też rozporami w odstępach o połowę mniejszym od teoretycznego, tj. takiego, który odpowiada długości wolnej poszczególnych prętów. Jeżeli stężenie nie jest tak silne, to słup ten niesie mniej. Otóż zabetonowanie takiego słupa stęży dostatecznie pręty żelazne tak, że możemy pomimo większej odległości wiązań poziomych liczyć, że wszystkie żelaza działać będą jako całość. Wytrzymałość słupa takiego jest czasem jeszcze większą, bo i beton nieco się przyczyni do niesienia, jednak z doświadczeń nie można jeszcze twierdzić, ile na beton liczyć można. Dlatego pewniej będzie, jeżeli słup taki liczyć będziemy jako słup żelazny dostatecznie stężony, a beton będziemy uważać tylko jako wypełnienie.

Rozporządzenie minist. austr. z r. 1911 § 5. ust. 22 dla budownictwa a ust. 29 dla mostów: Prętów ciśnionych z wkładką żelazną, która sama zdolną jest do niesienia, u których beton tylko służy jako materiał wypełniający albo osłaniający, nie można liczyć jako zeskładów niosących żelbetowych po myśli § 5.

#### § 54. Słupy żelbetowe z wkładką z żelaza lanego.

Jest to zasługą Dr. Empergera, że pierwszy zwrócił uwagę na możliwość zastosowania wkładek tęgich z żelaza lanego do słupów żelbetowych i wykonał odnośne doświadczenia. Wykazały one, że udźwig rury z żelaza lanego tylko wtedy zwiększa się przez zabetonowanie, jeżeli beton owiniemy, przyczem krok owinięcia co najwyżej równy jest grubości warstwy betonu, osłaniającego żelazo.

Pod tym warunkiem twierdzi Emperger, że udźwig takiego słupa równa się sumie udźwigów słupa żelaznego i słupa żelbetowego. Można by to wytłumaczyć w ten sposób, że gdy z początku rozkłada się siła cisnąca na beton i wkładki żelazne proporcjonalnie do współczynników sprężystości, potem je-

dnak, gdy osiągniemy spólczynnik wytrzymałości betonu, może on wskutek owinięcia jeszcze dalej się odkształcać, jednak natężenie betonu bardzo mało już wzrasta. To samo się dzieje z osiągnięciem płynności żelaza zlewnego wkładek podłużnych. Wtedy dalsze obciążenie wywołuje tylko zwiększenie natężenia żelaza lanego i słup się łamie po wyczerpaniu sumy udźwignów wszystkich trzech materyałów.

Możemy więc napisać

$$P = 1.5 F_k v_1 + 2400 F_l + \sigma_g F_g \quad . \quad . \quad (228)$$

Przy betonie uwzględniamy tu zwiększenie wytrzymałości półtorakrotnie przez owinięcie.

Jeżeli wchodzi w grę wyboczenie, należy przy obliczeniu  $\sigma_g$  zmniejszyć stosownie do  $\frac{l}{a}$ . Przy obliczeniu  $a$  uwzględnić można też i beton, przyjmując mianowicie

$$F_i = F_g + \frac{F_l}{2} + \frac{F_k}{30}, \quad J_i = J_g + \frac{1}{2} J_l + \frac{F_k}{30} \quad . \quad . \quad (229)$$

$$a_i = \sqrt{\frac{J_i}{F_i}}$$

W ten sposób uwzględniamy wpływ stężający betonu.

Jeżeli przyjmiemy dla żelaza lanego  $\mu_g = 8000 \text{ kg/cm}$ , to dla pewności  $n = 5$  możemy przyjąć  $\sigma_g = 1600 \text{ kg/cm}^2$ , co ewentualnie należy zmniejszyć ze względu na wyboczenie; dla betonu nie należy przyjmować zbyt wielkiego natężenia.

Przykład. Weźmy słup o przekroju okrągłym z doświadczeń austr. wydziału żelbetowego. Średnica jądra wynosi  $24.4 \text{ cm}$ ; laną wkładkę stanowi rura, o zewnętrznej średnicy  $144 \text{ mm}$ , grubości ścianki  $19 \text{ mm}$ ; przekrój pionowych wkładek zlewnych  $F_l = 1.57 \text{ cm}^2$  ( $8 \text{ } \phi 5 \text{ mm}$ ); drut owijający  $\phi 10 \text{ mm}$  ma skok  $\Delta = 4 \text{ cm}$ . Długość rzeczywista słupa wynosi  $300 \text{ cm}$ , długość wolna  $l = 0.7 \times 300 = 210 \text{ cm}$ .

Mamy tu zatem:  $F_g = \frac{3.14}{4} (14.4^2 - 12.5^2) = 39.5 \text{ cm}^2$ ,  $J_g = 0.0491 (14.4^4 - 12.5^4) = 912 \text{ cm}^4$ ,  $F_k = 0.785 (24.4^2 - 14.4^2) = 304 \text{ cm}^2$ ,  $J_k = 0.0491 (24.4^4 - 14.4^4) = 15250 \text{ cm}^4$ .

Według (229):

$$F_i = 39.5 + \frac{1}{2} 1.57 + \frac{304}{30} = 50.3 \text{ cm}^2,$$

$$J_i = 912 + \frac{1}{2} 0.39 (10^2 + 15^2) + \frac{15250}{30} = 1472 \text{ cm}^4,$$

$$a = \sqrt{\frac{1472}{50.3}} = 5.42 \text{ cm}, \quad \frac{l}{a} = \frac{210}{5.42} = 38.8, \quad \varphi = 0.488.$$





$$J = \frac{bd^3}{12} + bde_1^2 + nFe_2^2 \dots \dots \dots (231)$$

jeżeli  $F$  oznacza przekrój wkładki żelaznej.

Po podstawieniu za  $e_1$  i  $e_2$  wartości z (230), otrzymamy:

$$J = \frac{bd^3}{12} + \frac{bdFm^2n}{bd+nF} \dots \dots \dots (232)$$

Nazwijmy  $a$  ramię bezwładności a  $i$  odstęp jędry, to otrzymamy

$$a^2 = \frac{J}{F_1} = \frac{b}{12} \frac{bd^4 + dFn(d^2 + 12m^2)}{[bd + nF]^2} \dots \dots (233)$$

Dalej jest

$$i_1 = \frac{a^2}{\frac{d}{2} - e_1}, \quad i_2 = \frac{a^2}{\frac{d}{2} + e_1} \dots \dots \dots (234)$$

a największe natężenia:

$$\left. \begin{aligned} \text{na ciśnienie betonu } \tau_1 &= \frac{P(i_2 + c + e_1) \left( \frac{d}{2} + e_1 \right)}{J} \\ \text{na ciągnienie betonu } \tau_2 &= \frac{P(c + e_1 - i_1) \left( \frac{d}{2} - e_1 \right)}{J} \\ \text{na ciągnienie żelaza } \sigma_e &= \frac{nP(c + e_1 - i_1) e_2}{J} \end{aligned} \right\} (235)$$

Przykład: Obliczyć natężenia w wezłowie strony obciążonej próbnego sklepienia wiedeńskiego (Bericht des Gewölbeausschusses 1895, str. 125)

Tam było  $P=41695 \text{ kg}$ ,  $c=31.5 \text{ cm}$ ,  $d=60 \text{ cm}$ ,  $b=100 \text{ cm}$ ,  $n=10$ . Wkładka żelazna składała się z 15 drutów  $\phi 14 \text{ mm}$  ( $F=23.09 \text{ cm}^2$ ).

Niech będzie  $a=6 \text{ cm}$ , więc  $m=30-6=24 \text{ cm}$ .

Według (230):

$$e_1 = \frac{10 \times 23.09 \times 24}{100 \times 60 + 10 \times 23.09} = 0.89 \text{ cm.}$$

$$e_2 = \frac{100 \times 60 \times 24}{100 \times 60 + 10 \times 23.09} = 23.2 \text{ cm.}$$

Dalej mamy wedle (231):

$$J = \frac{100 \times 60^3}{12} + \frac{100 \times 60 \times 10 \times 23.09 \times 24^2}{100 \times 60 + 10 \times 23.09} = 1928950 \text{ cm}^4,$$

zatem wedle (232):

$$a^2 = \frac{100}{12} \cdot \frac{100 \times 60^4 + 60 \times 23.09 \times 10 (60^2 + 12 \times 24^2)}{100 \times 60 + 10 \times 23.09} = 309.6 \text{ cm}^2,$$

a wedle (234):

$$i_1 = \frac{309 \cdot 60}{\frac{60}{2} - 0 \cdot 89} = 10 \cdot 64 \text{ cm}$$

$$i_2 = \frac{309 \cdot 60}{\frac{60}{2} + 0 \cdot 89} = 10 \cdot 02 \text{ cm.}$$

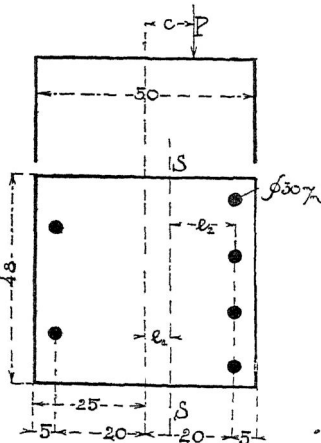
Dla sklepienia betonowego byłoby  $i_1 = i_2 = \frac{60}{6} = 10 \text{ cm}$ , widzimy więc że uwzględniając wkładki żelazne, otrzymujemy tylko małego większy odstęp jędrny.

Dalej mamy wedle (235):

$$\tau_1 = \frac{41695 + 10 \cdot 02 + (31 \cdot 5 + 0 \cdot 89) \left( \frac{60}{2} + 0 \cdot 89 \right)}{1928950} = 28 \cdot 4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_2 = \frac{41695 (31 \cdot 5 + 0 \cdot 89 - 10 \cdot 64) \left( \frac{60}{2} - 0 \cdot 89 \right)}{1928950} = 13 \cdot 7 \text{ kg/cm}^2,$$

w końcu  $\sigma_e = \frac{10 \times 41695 (31 \cdot 5 + 0 \cdot 89 - 10 \cdot 64) 23 \cdot 20}{1928950} = 109 \cdot 1 \text{ kg/cm}^2.$



Rys. 87.

Tych wzorów możemy także użyć do obliczenia słupów prostokątnych.

Mamy n. p. słup prostokątny, mimośrodkowo obciążony (rys. 87).

Gdy  $c = 4 \text{ cm}$ ,  $P = 60.000$ ,  $K' = 28 \cdot 27 + 14 \cdot 14 (4 \phi^{30} + 2 \phi^{30})$ .

Wyznamy środek ciężkości. Zatem moment statyczny ze względu na oś mamy:

$$15 [28 \cdot 27 \cdot 20 - 14 \cdot 14 \times 20] = e_1 [50 \cdot 48 + 15 (28 \cdot 27 + 14 \cdot 14)]$$

$$e_1 = 4 \cdot 19 \text{ cm}, \quad e_2 = 15 \cdot 81 \text{ cm.}$$

$$J = \frac{1}{12} 48 \cdot 50^3 + 48 \cdot 30 \cdot 4 \cdot 19^2 + 28 \cdot 27 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 81^2 + 15 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 24 \cdot 19^2 = 755370$$

$$a^2 = \frac{755370}{50 \cdot 48 + 15 (28 \cdot 27 + 14 \cdot 14)} = \frac{755370}{3086 \cdot 1} = 248 \cdot 77 \text{ cm}^2$$

$$i_1 = \frac{a^2}{\frac{d}{2} - e_1} = \frac{248 \cdot 77}{25 - 4 \cdot 19} = 11 \cdot 96 \text{ cm}$$

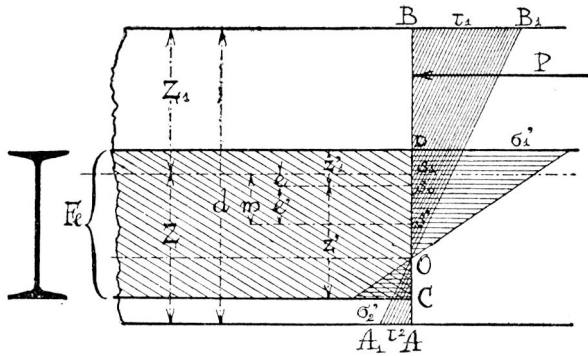
$$i_2 = \frac{a^2}{\frac{d}{2} + 4 \cdot 19} = \frac{248 \cdot 77}{25 + 4 \cdot 19} = 8 \cdot 5 \text{ cm}$$

$$\tau_1 = \frac{60000 (8 \cdot 5 + 4 + 4 \cdot 19) (25 + 4 \cdot 19)}{755370} = 38 \cdot 7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_2 = \frac{60000 (4 + 4 \cdot 19 - 11 \cdot 96) (25 - 4 \cdot 19)}{755370} = -6 \cdot 2 \text{ kg/cm}^2.$$

§ 56. Wkładki tęgic.

Jeżeli przekroje wkładek żelaznych są małe, to przyjąć możemy stałe natężenie w całym przekroju pręta, gdy jednak wkładki są o znacznych przekrojach kształtówki lub belki bla-



Rys. 88.

szanej lub kratowej, musimy zmiany natężeń w przekroju uwzględnić.

Wedle prof. Melana (rys. 88) będziemy liczyć w następujący sposób:

Przyjmijmy  $n=15$ . Mamy dla betonu  $J = \frac{1}{12} bd^3$ ,  $F = bd$ , a dla wkładki żelaznej  $nJ_e$  i  $nF_e$ , przy czem  $b$  oznacza odstęp żeber w m.  $J_e$  moment bezwładności, a  $F_e$  przekrój wkładki żelaznej. Jest więc

$$F_i = bd + nF_e \dots \dots \dots (236)$$

Oś ciężkości przekroju całkowitego przechodzi przez  $s_0$  w odstępie  $e$  od środka, zatem  $e(bd + nF_e) = nF_e \cdot m$ , stąd

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{n \cdot F_e}{bd + nF_e} \cdot m \\ e' &= \frac{bd}{bd + nF_e} \cdot m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (237)$$

Moment bezwładności ze względu na oś ciężkości  $S_0$  jest

$$J_i = \frac{1}{12} bd^3 + bde^2 + n[J_e + F_e e'^2] \dots \dots (238)$$

Natężenie największe w betonie mamy:

$$\tau_1 = \frac{P}{F_i} + \frac{Mz_1}{J_i}, \quad \tau_2 = \frac{P}{F_i} - \frac{Mz_2}{J_i} \dots \dots (239)$$

a w żelazie

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e' &= n \left[ \frac{P}{F_i} + \frac{Mz'}{J_i} \right] \\ \sigma_e'' &= n \left[ \frac{P}{F_i} - \frac{Mz'}{J_i} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (240)$$

Przykład. Przyjmijmy  $d=40$  cm, i)ówkę l. 30, symetrycznie umieszczoną.  $P=50$  t.  $M=14.2$  tm,  $b=100$  cm. Wtedy  $F_i=100.40+15.780=5170$  cm<sup>2</sup>. W tym wypadku  $m=0$ , więc  $e=e'=0$ , więc wedle (238)  $J_i=\frac{1}{12} 100.40^3+15.10997=698255$  cm<sup>4</sup>, więc

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{50000}{5170} + \frac{1420000 \cdot 20}{698255} = 9.7 + 4.1 = 13.8 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_2 &= \frac{50000}{5170} - \frac{1420000 \cdot 20}{698255} = 9.7 - 4.1 = 5.6 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_e' &= 15 \left( \frac{50000}{5170} + \frac{142000 \cdot 15}{698255} \right) = 15(9.7 + 3.1) = 192 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_e'' &= 15 \left( \frac{50000}{5170} - \frac{142000 \cdot 15}{698255} \right) = 15(9.7 - 3.1) = 99 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Przy sklepieniach liczą przeważnie wedle fazy I-szej, bo przeważa ciśnienie, jednak analogicznie, jak w belkach prostych należałoby ze względu na pewność obliczać natężenie wedle fazy II<sub>b</sub>. Zwłaszcza musimy wtedy tak liczyć, gdy ciągnienia w fazie I. wypadają większe, niż wytrzymałość betonu na ciągnienie.

### § 57. Przekrój teowy ciśniony mimośrodkowo w fazie pierwszej.

Tu także będziemy liczyć natężenia wedle ogólnego wzoru

$$\tau_1 = \frac{P}{F_b} + \frac{M}{W}.$$

Środek ciężkości  $S$  idealnego przekroju otrzymamy, tworząc równanie momentów ze względu na górną warstwę  $A$ . Otrzymamy

$$(b-b_1) \frac{c^2}{2} + \frac{db_1^2}{2} + 15 F_e' a_1 + 15 F_e e_1 d_1 = [(b-b_1) c + db_1 + 15 (F_e + F_{e_1})] e_1$$

$$\text{stad } e_1 = \frac{(b-b_1) \frac{c^2}{2} + \frac{db_1^2}{2} + 15 (F_e d_1 + F_e' a_1)}{(b-b_1) c + db_1 + 15 (F_e + F_e')}$$

zaś  $e = d - e_1$ .

Moment bezwładności ze względu na oś ciężkości  $S$  będzie

$$J = \frac{1}{3} b e_1^3 - \frac{1}{3} (b - b_1) (e_1 - c)^3 + \frac{1}{3} b_1 e^3 + \left. \begin{aligned} &+ 15 F_e' (e_1 - a_1)^2 + 15 F_e (e - a)^2 \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

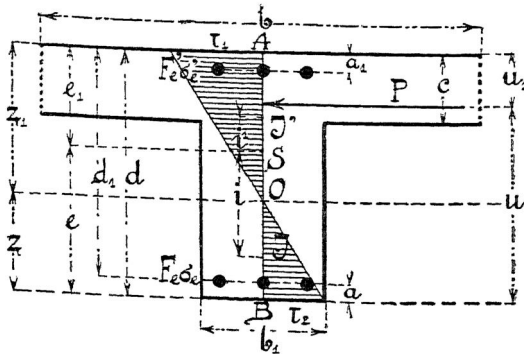
Teraz możemy wyznaczyć  $a^2 = \frac{J}{F}$ ,  $i_1 = \frac{a^2}{e}$  i  $i = \frac{a^2}{e_1}$ , a wreszcie

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{P(i - e + u) e_1}{J} \\ \tau_2 &= \frac{P(i_1 - e_1 + u_1) e}{J} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (242)$$

$$z_1 = \frac{\tau_1 d}{\tau_1 + \tau_2} \quad \dots \dots \dots (243)$$

wreszcie

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e' &= 15 \tau_1 \frac{z_1 - a_1}{z_1} \\ \sigma_e &= 15 \tau_2 \frac{d - z_1 - a}{d - z_1} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (244)$$



Rys. 89.

Przykład. Przyjmijmy w  $P=41700 \text{ kg}$ ,  $u_1=6 \text{ cm}$ ,  $d=60 \text{ cm}$ ,  $b=100 \text{ cm}$ ,  $c=12 \text{ cm}$ ,  $b_1=20 \text{ cm}$ ,  $F_e=F_e'=6 \cdot 16$  ( $\phi 14 \text{ mm}$ ),  $a=a_1=6 \text{ cm}$ .

Wedle (240 a) otrzymamy:

$$e_1 = \frac{(100-20) \frac{12^2}{2} + \frac{60 \cdot 20^2}{2} + 15(6 \cdot 16 \cdot 54 + 6 \cdot 16 \cdot 6)}{(100-20) 12 + 60 \cdot 20 + 15(6 \cdot 16 + 6 \cdot 16)} = 9 \cdot 9 \text{ cm.}$$

Tu więc wpada środek ciężkości przekroju idealnego w płytę. Mamy dalej  $e=60-9 \cdot 9=50 \cdot 1 \text{ cm}$ .

$$\text{Dalej jest } J = \frac{100}{3} 9 \cdot 9^3 + \frac{20}{3} 50 \cdot 1^3 + (12-9 \cdot 9)^3 \frac{100-20}{3} + 15 \cdot 6 \cdot 16 (9 \cdot 9-6)^2 + 15 \cdot 6 \cdot 16 (50 \cdot 1-6)^2 = 1060074, \quad a^2 = \frac{1060074}{100 \cdot 12 + 48 \cdot 20 + 2 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 16} = 452,$$

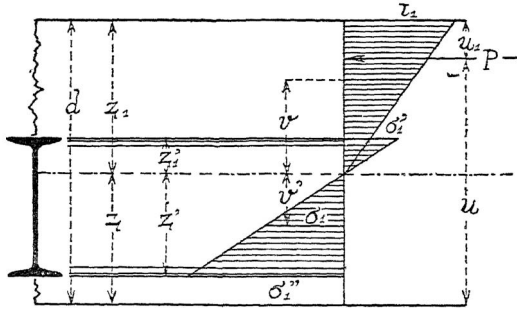
$$i = \frac{452}{9 \cdot 9} = 45 \cdot 7 \text{ cm}, \quad i_1 = \frac{452}{50 \cdot 1} = 9 \cdot 0 \text{ cm},$$

a wreszcie

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{41700(42-50.1+54)9.9}{1060074} = 17.9 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_2 &= \frac{41700(9.0-9.9+6)50.1}{1060074} = 10.0 \text{ kg/cm}^2 \\ z_1 &= \frac{17.9 \cdot 60}{17.9+10.0} = 38.5 \text{ cm} \\ \sigma_e' &= 15 \cdot 17.9 \frac{38.5-6}{38.5} = 227 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_e &= 15 \cdot 10.0 \frac{60-38.5-6}{60-38.5} = 107 \text{ kg/cm}^2.\end{aligned}$$

### § 58. Przekrój prostokątny ciśniony mimośrodkowo w fazie drugiej.

Wedle tej fazy należy wedle austriackiego rozporządzenia liczyć zawsze, ilekroć punkt zaczepienia wyjdzie z jądra.



Rys. 90.

Przyjmujemy, jak zwykle,  $n=15$ . Suma sił poziomych jest równa zeru (rys. 90.), więc

$$b \int_0^{z'} v dv + \int_0^{z_1} b' \sigma dv - \int_0^{z'} b' \sigma dv' = P,$$

przyczem  $P$  liczymy na szerokość  $b$ , a że

$$v = \tau_1 \frac{v}{z_1}, \text{ a } \sigma = 15 \tau_1 \frac{v'}{z_1},$$

więc wstawiając wartości, otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{b \tau_1 z_1}{2} + \frac{15 \tau_1}{z_1} \left[ \int_0^{z_1} b' v' dv - \int_0^{z'} b' v dv \right] &= P \\ \frac{b \tau_1 z_1}{2} + \frac{15 \tau_1}{z_1} [S' - S''] &= P, \quad . . . \quad (245)\end{aligned}$$

gdyż całki te wyrażają momenty statyczne części przekroju wkładki żelaznej nad i pod osią ze względu na oś ciężkości.

Dalej suma momentów musi być równa zero, więc

$$b \int_0^{z_1} v_1 v dv + \int_0^{z_1} b' \sigma v' dv' + \int_0^{z'} b' \sigma v dv = P(z_1 - u_1)$$

albo

$$\frac{b z_1^3}{3} + \frac{15 \tau_1}{z_1} \left[ \int_0^{z_1} b' v'^2 dv' + \int_0^{z'} b' v^2 dv \right] = P(z_1 - u_1)$$

$$\frac{b z_1^3}{3} + \frac{15 \tau_1}{z_1} (J' + J'') = P(z_1 - u_1) \quad . \quad . \quad (246)$$

jeżeli  $J'$  i  $J''$  oznaczają momenty bezwładności tych części przekroju wkładki żelaznej ze względu na oś ciężkości. Z dwu tych równań wyrugujemy  $\frac{P}{\tau_1}$  i otrzymamy

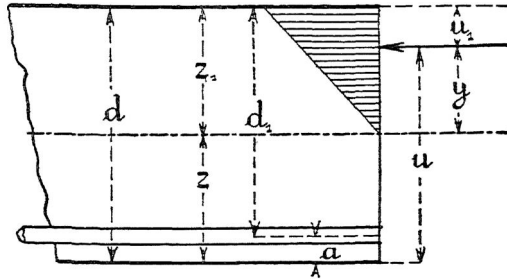
$$\left[ \frac{b z_1}{2} + \frac{15}{z_1} (S' - S'') \right] (z_1 - u_1) = \frac{b z_1^2}{3} + \frac{15}{z_1} (J' + J'') \quad (247)$$

Jeżeli teraz  $S'$ ,  $S''$ ,  $J'$  i  $J''$  wyrazimy jako funkcye  $z_1$ , to możemy z tego równania  $z_1$  obliczyć.

Dalej mamy z równ. (245)

$$\tau_1 = \frac{P}{b \frac{z_1}{2} + \frac{15}{z_1} (S' - S'')} \quad . \quad . \quad . \quad (248)$$

$$\sigma_{e'} = -\frac{15 \tau_1 z_1'}{z_1'}, \quad \sigma_{e''} = \frac{15 \tau_1 z'}{z'} \quad . \quad . \quad . \quad (249)$$



Rys. 91.

Jeżeli mamy uzbrojenie gibkie pojedyncze, to  $S' = J' = 0$ ,  $S'' = F_e(d_1 - z_1)$ ,  $J'' = F_e(d_1 - z_1)^2$  (rys. 91.). Wstawmy te wartości w równ. (247), to

$$\left[ \frac{b z_1}{2} - \frac{15}{z_1} F_e (d_1 - z_1) \right] (z_1 - u_1) = \frac{b z_1^2}{3} + \frac{15}{z_1} F_e (d_1 - z_1)^2.$$



Po uporządkowaniu równania otrzymamy

$$z_1^3 - 3u_1 z_1^2 + 90 \frac{F_e}{b} (d_1 - u_1) z_1 - 90 \frac{F_e}{b} d_1 (d_1 - u_1) = 0.$$

Wstawmy  $z_1 = y + u_1$ , więc  $y = z_1 - u_1$ , to otrzymamy

$$y^3 + \left[ \frac{90 F_e (d_1 - u_1)}{b} - 3u_1^2 \right] y - \left[ \frac{90 F_e (d_1 - u_1)^2}{b} + 2u_1^3 \right] = 0$$

Wstawmy dalej

$$p = \frac{30 F_e}{b} (d_1 - u_1) - u_1^2, \text{ a}$$

$$q = - \left[ 45 \frac{F_e}{b} (d_1 - u_1)^2 + u_1^3 \right], \text{ to}$$

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Wyznaczymy w ten sposób  $z_1$ , mamy potem

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{P}{b \frac{z_1}{2} - 15 F_e \frac{(d_1 - z_1)}{z_1}} \\ \sigma &= \frac{15 \tau_1 (d_1 - z_1)}{z_1} \end{aligned} \right\} \dots$$

1. Przykład. Przyjmijmy, jak w § 56,  $d = 40 \text{ cm}$ , ijkówkę l. 30 trycznie umieszczoną,  $P = 50 \text{ t}$ , lecz  $M = 30 \text{ tm}$ ,  $b = 100 \text{ cm}$ . Wtedy  $F_e = 51 \text{ J}$ ,  $J_i = 698255$ ,  $\frac{d}{2} - u_1 = \frac{3000000}{50000} = 60 \text{ cm}$ , stąd  $u_1 = 20 - 60 = -40 \text{ cm}$ .

$$S' = \frac{1}{2} [12 \cdot 6 z_1'^2 - 11 \cdot 4 (z_1' - 3 \cdot 6 z_1' + 3 \cdot 24)] = 0 \cdot 6 z_1'^2 + 20 \cdot 52 z_1' - 18 \cdot 47 = 0 - 10 z_1 + 25 + 20 \cdot 52 (z_1 - 5) - 18 \cdot 47 = 0 \cdot 6 z_1^2 + 14 \cdot 52 z_1 - 106 \cdot 07,$$

$$S'' = \frac{1}{2} [12 \cdot 6 z_1'^2 - 11 \cdot 4 (z_1' - 1 \cdot 8)^2] = 0 \cdot 6 z_1'^2 + 20 \cdot 52 z_1' - 18 \cdot 47 = 0 \cdot 6 (35^2 - 70 z_1 + 20 \cdot 52 (35 - z_1) - 18 \cdot 47 = 0 \cdot 6 z_1^2 - 62 \cdot 52 z_1 + 1434 \cdot 73,$$

$$J' = \frac{1}{3} [12 \cdot 6 z_1'^3 - 11 \cdot 4 (z_1'^3 - z_1'^2 \cdot 5 \cdot 4 + 9 \cdot 72 z_1' - 5 \cdot 832)] = 0 \cdot 4 z_1'^3 + 20 \cdot 52 z_1'^2 - 36 \cdot 94 z_1' + 22 \cdot 16 = 0 \cdot 4 (z_1^3 - 15 \cdot z_1^2 + 75 z_1 - 125) + 20 \cdot 52 (z_1^2 - 10 z_1 + 25) - 36 \cdot 94 (z_1 - 1) + 22 \cdot 16 = 0 \cdot 4 z_1^3 + 14 \cdot 52 z_1^2 - 212 \cdot 14 z_1 + 647 \cdot 7,$$

$$J'' = \frac{1}{3} [12 \cdot 6 z_1'^3 - 11 \cdot 4 (z_1' - 1 \cdot 8)^3] = 0 \cdot 4 z_1'^3 + 20 \cdot 52 z_1'^2 - 36 \cdot 94 z_1' + 22 \cdot 16 = 0 \cdot 4 (z_1^3 - 3675 z_1^2 + 105 z_1^2 - z_1^3) + 20 \cdot 52 (1125 - 105 z_1 + z_1^2) - 36 \cdot 94 (35 - z_1) + 22 \cdot 16 = 0 \cdot 4 z_1^3 + 62 \cdot 52 z_1^2 - 3527 \cdot 66 z_1 + 20993 \cdot 06,$$

zatem wedle (247):

$$\left[ \frac{100 \cdot z_1}{2} + \frac{15}{z_1} (0 \cdot 6 z_1^2 + 14 \cdot 52 z_1 - 106 \cdot 07 - 0 \cdot 6 z_1^2 + 62 \cdot 52 z_1 - 1434 \cdot 73) \right] (z_1 - 40) = \frac{100 z_1^2}{2} + \frac{15}{z_1} (0 \cdot 4 z_1^3 + 14 \cdot 52 z_1^2 - 212 \cdot 14 z_1 + 647 \cdot 7 + 0 \cdot 4 z_1^3 + 62 \cdot 52 z_1^2 - 3527 \cdot 66 z_1 + 20993 \cdot 06)$$

$$50 z_1^2 + 15(77 \cdot 04 z_1 - 1540 \cdot 8)(z_1 - 40) = 33 \cdot 3 z_1^3 + 12 z_1^3 + 1105 \cdot 6 z_1^2 - 18699 z_1 + 32$$

Stąd  $-45 \cdot 33 z_1^3 - 48637 z_1 + 599878 \cdot 6 = 0$  albo  $z_1^3 + 1073 z_2 - 13233 = 0$ ,  
 gdy więc  $p = \frac{1073}{3} = 357 \cdot 7$ ,  $q = -6616 \cdot 5$ ,

$$z_1 = \sqrt[3]{6616 \cdot 5 + \sqrt{6616 \cdot 5^2 + 357 \cdot 7^3}} + \sqrt[3]{6616 \cdot 5 - \sqrt{6616 \cdot 5^2 + 357 \cdot 7^3}} = 11 \cdot 08 \text{ cm.}$$

Dalej mamy  $S' = 0 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 08^2 - 62 \cdot 52 \cdot 11 \cdot 08 + 1434 \cdot 73 = 815 \cdot 67$ .

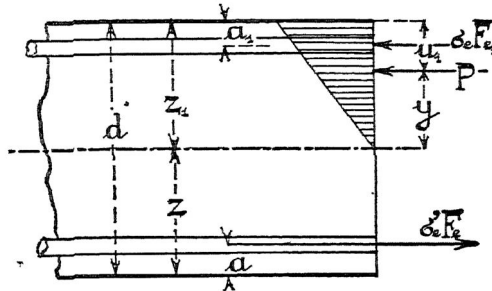
$$S'' = 0 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 08^2 + 14 \cdot 52 \cdot 11 \cdot 08 - 106 \cdot 7 = 127 \cdot 84.$$

$$\tau_1 = \frac{50000}{100 \frac{11 \cdot 08}{2} + \frac{15}{11 \cdot 08} (127 \cdot 84 - 815 \cdot 67)} = 132 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e' = -\frac{15 \cdot 132 \cdot 6 \cdot 08}{11 \cdot 08} = -1086 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e'' = \frac{15 \cdot 132 \cdot 11 \cdot 08}{23 \cdot 92} = 917 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Przykład. Niech będzie  $P = 41695 \text{ kg}$ ,  $c_1 = 63 \text{ cm}$  czyli  $u_1 = -33 \text{ cm}$ ,  
 $d = 60 \text{ cm}$ ,  $b = 100 \text{ cm}$ . Wkładka żelazna składa się z 15 drutów  $14 \text{ mm}$  gru-  
 bych,  $F = 23 \cdot 09$ ,  $a = 6 \text{ cm}$ .



Rys. 92.

Mamy wtedy  $d_1 = 60 - 4 = 56 \text{ cm}$ , więc

$$p = \frac{30 \cdot 23 \cdot 09}{100} (56 + 33) - 33^2 = -473 \cdot 5,$$

$$q = -\left[ \frac{45 \cdot 23 \cdot 09}{100} (56 + 33)^2 - 33^3 \right] = -\left[ 82302 - 35937 \right] = -46365.$$

$$y = \sqrt[3]{46365 + \sqrt{46365^2 - 473 \cdot 5^3}} + \sqrt[3]{46365 - \sqrt{46365^2 - 473 \cdot 5^3}} = 56 \cdot 9 \text{ cm},$$

$$z_1 = 56 \cdot 9 - 33 = 23 \cdot 9 \text{ cm},$$

$$\tau_1 = \frac{41695}{100 \frac{23 \cdot 9}{2} - 15 \cdot 23 \cdot 09 \frac{56 - 23 \cdot 9}{23 \cdot 9}} = 57 \cdot 1 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma = \frac{15 \cdot 57 \cdot 1 (56 - 23 \cdot 9)}{23 \cdot 9} = 1150 \text{ kg/cm}^2.$$

Jeżeli wkładka jest podwójną (rys. 92.) to  $S' = F_{e_1} (z_1 - a_1)$ ,  
 $J' = F_{e_1} (z_1 - a_1)^2$ ,  $S'' = F_e (d_1 - z_1)$ ,  $J'' = F_e (d_1 - z_1)$ .

Wstawmy to w równ. (247), a otrzymamy

$$\left[ \frac{bz_1}{2} + \frac{15}{z_1} [F_{e_1}(z_1 - a_1) - F_e(d_1 - z_1)] \right] (z_1 - u_1) = \\ = \frac{bz_1^2}{3} + \frac{15}{z_1} [F_{e_1}''(z_1 - a_1)^2 + F_e'(d_1 - z_1)^2],$$

a po uporządkowaniu

$$z_1^3 - 3u_1z_1^2 + 90 \frac{F_e}{b} (d_1 - u_1) z_1 - 90 \frac{F_{e_1}}{b} (u_1 - a_1) z_1 - \\ - 90 \frac{F_e}{b} d_1 (d_1 - u_1) - 90 \frac{F_{e_1}}{b} a_1 (a_1 - u_1) = 0. \quad (248)$$

Wstawivszy  $y = z_1 - u_1$ , otrzymamy

$$y^3 + \left[ 90 \frac{F_e}{b} (d_1 - u_1) - 90 \frac{F_{e_1}}{b} (u_1 - a_1) - 3u_1^2 \right] y + \\ - \left[ 90 \frac{F_e}{b} (d_1 - u_1)^2 + 90 \frac{F_{e_1}}{b} (a_1 - u_1)^2 + 2u_1^3 \right] = 0.$$

Wstawmy

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{30}{b} [F_e(d_1 - u_1) - F_{e_1}(u_1 - a_1)] - u_1^2 \\ q &= -\frac{45}{b} [F_e(d_1 - u_1)^2 + F_{e_1}(a_1 - u_1)^2] - u_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

to obliczymy  $y$  wedle równ. (251).

Wyznaczywszy w ten sposób  $z_1 = y + u_1$ , otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{P}{\frac{bz_1}{2} + \frac{15}{z_1} [F_{e_1}(z_1 - a_1) - F_e(d_1 - z_1)]} \\ \sigma_e &= -15 \tau_1 \frac{z_1 - a_1}{z_1}, \quad \sigma_e' = 15 \tau_1 \frac{d_1 - z_1}{z_1} \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

Aby niepotrzebnem było rozwiązywanie równania tego stopnia, obliczono tablice, które dadzą się przedstawić wykreślnie<sup>1)</sup>.

Przykład. Niech będzie  $P = 41695 \text{ kg}$ ,  $u_1 = -18 \text{ cm}$ ,  $d = 60 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ . Wkładka żelazna u góry i u dołu składa się z 15 drutów po 10 mm średnicy, więc  $F_e = F_{e_1} = 11.78 \text{ cm}^2$ ,  $a = a_1 = 4 \text{ cm}$ .

Mamy wtedy wedle (254):

$$p = \frac{30}{100} 11.78 \cdot [56 + 18 - (-18 - 6)] - 18^2 = 24.33,$$

<sup>1)</sup> p. Dimensionirung der betoneiserne Gewölbe. Oesterr. Wochenschrift f. d. öffent. Baudienst 1905. Heft 38.

$$q = -\frac{45}{100} 11 \cdot 78 [(56 + 18)^2 - (-18 - 6)^2] - (-18)^3 = -31807,$$

$$y = \sqrt[3]{31807 + \sqrt{31807^2 + 24 \cdot 33^3}} + \sqrt[3]{31807 - \sqrt{31807^2 + 24 \cdot 33^3}}$$

$$y = 39 \cdot 9 \text{ cm}, \quad z_1 = 39 \cdot 9 - 18 = 21 \cdot 9 \text{ cm},$$

$$\tau_1 = \frac{41695}{100 \cdot \frac{21 \cdot 9}{2} + \frac{15 \cdot 11 \cdot 78}{21 \cdot 8} (21 \cdot 9 - 4 - 56 + 21 \cdot 9)},$$

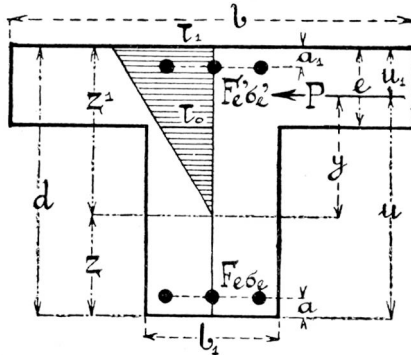
$$\sigma_e = -15 \cdot 34 \cdot 1 \frac{21 \cdot 9 - 4}{21 \cdot 9} = 417 \cdot 6 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e' = 15 \cdot 34 \cdot 1 \frac{56 - 21 \cdot 9}{21 \cdot 9} = 802 \cdot 4 \text{ kg/cm}^2.$$

### § 59. Przekrój teowy ciśniony mimośrodkowo w fazie drugiej.

Suma sił poziomych musi być równa zero, więc

$$\frac{b \tau_1 z_1}{2} - (b - b_1) \frac{\tau_0 (z_1 - e)}{2} + F_e' \sigma_e' - F_e \sigma_e = P.$$



Rys. 93.

Wstawmy

$$\tau_0 = \tau_1 \frac{z_1 - e}{z_1}, \quad \sigma_e' = 15 \frac{z_1 - a_1}{z_1} \tau_1, \quad \sigma_e = 15 \frac{d_1 - z_1}{z_1} \tau,$$

to

$$\frac{b z_1^2}{2} - (b - b_1) \frac{(z_1 - e)^2}{2} + 15 F_e' (z_1 - a_1) - 15 F_e (d_1 - z_1) = \frac{P z_1}{\tau_1} \quad (256)$$

Część równania po lewej stronie przedstawia moment statyczny powierzchni idealnej.

Podobnie otrzymamy równanie momentów

$$\frac{b \tau_1 z_1}{2} \cdot \frac{2}{3} z_1 - (b - b_1) \frac{(z_1 - e)}{2} \tau_0 \frac{2}{3} (z_1 - e) + F_e' \sigma_e' (z_1 - a_1) + 15 F_e \sigma_e (d_1 - z_1) = P (z_1 - u_1)$$

a stąd

$$\frac{bz_1^3}{3} - \frac{b-b_1}{3} (z_1-e)^3 + 15 F_e' (z_1-a_1)^2 + 15 F_e (d_1-z_1)^2 = \frac{Pz_1(z_1-u_1)}{\tau_1} \quad (257)$$

Lewa część tego równania przedstawia moment bezwładności przekroju idealnego.

Równania (256) i (257) dadzą się jeszcze napisać

$$S_{z_1} = \frac{Pz_1}{\tau_1} \quad \text{i} \quad J_{z_1} = \frac{Pz_1(z_1-u_1)}{\tau_1} \quad (258)$$

Z obu tych równań otrzymamy

$$z_1 - u_1 = \frac{J_{z_1}}{S_{z_1}}, \quad (259)$$

z którego to równania można  $z_1$  obliczyć, uwzględniając tę okoliczność, że  $J_{z_1}$  i  $S_{z_1}$  są funkcjami  $z_1$ .

Natężenie otrzymamy wtedy

$$\tau_1 = \frac{Pz_1}{S_{z_1}} = \frac{Pz_1(z_1-u_1)}{J_{z_1}} \quad (260)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e' &= -\frac{15(z_1-a_1)}{z_1} \tau_1 \\ \sigma_e &= \frac{15(d_1-z_1)}{z_1} \tau_1 \end{aligned} \right\} \quad (261)$$

Dla przekroju teowego otrzymamy z (256), (257) i (259):

$$z_1 - u_1 = \frac{\frac{bz_1^3}{3} - \frac{(b-b_1)(z_1-e)^3}{3} + 15 F_e' (z_1-a_1)^2 + 15 F_e (d_1-z_1)^2}{\frac{bz_1^3}{2} - \frac{(b-b_1)(z_1-e)^2}{2} + 15 F_e' (z_1-a_1) - 15 F_e (d_1-z_1)},$$

a po uporządkowaniu, przyjmąwszy  $\frac{b_1}{b} = k$ ,

$$\begin{aligned} & z_1^3 - 3ku_1z_1^2 + 3(1-k)e(e-2u_1)z_1 - 90\frac{F_e'}{b}(u_1-a_1)z_1 + \\ & + 90\frac{F_e}{b}(d_1+u_1)z_1 + (1-k)e^2(3u_1-2e) - 90\frac{F_e'}{b}a_1(a_1-u_1) - \\ & - 90\frac{F_e}{b}d_1(d_1-u_1) = 0. \end{aligned}$$

Wstawiając  $y_1 = z_1 - ku_1$ , otrzymamy

$$y_1^3 + y_1 \left[ 90 \frac{F_e}{b} (d_1 - u_1) - 90 \frac{F_e'}{b} (u_1 - a_1) - 3k^2 u_1^2 + 3(1-k)e(e-2u_1) \right] - \left[ 90 \frac{F_e'}{b} (a_1 - u_1)(a_1 - u_1 k) + 90 \frac{F_e}{b} (d_1 - u_1)(d_1 - u_1 k) + 2k^2 u_1^2 + -3(1-k)eku_1(e-2u_1) - (1-k)e^2(3u_1 - 2e) \right] = 0. \quad (262)$$

Wstawmy

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{30}{b} [F_e(d_1 - u_1) - F_e'(u_1 - a_1)] - k^2 u_1^2 + (1-k)e(e-2u_1) \\ q &= \frac{45}{b} [F_e'(a_1 - u_1)(a_1 - ku_1) + F_e(d_1 - u_1)(d_1 - ku_1)] - k^3 u_1^3 + \\ &+ \frac{3}{2}(1-k)eku_1(e-2u_1) + \frac{1}{2}(1-k)e^2(3u_1 - 2e) \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

to obliczymy  $y_1$  wedle równ. (251), zaś  $z_1 = y_1 + ku_1$  (263 a).

Jeżeli w równ. (262) wstawimy  $k=1$ , otrzymamy  $y=y_1$  i równanie (254).

Przykład. Dane  $P=20000 \text{ kg}$ ,  $u_1=-10 \text{ cm}$ ,  $d=60 \text{ cm}$ ,  $b=100 \text{ cm}$ ,  $b_1=30 \text{ cm}$ ,  $e=12 \text{ cm}$ ,  $F_e=F_e'=11.78 \text{ cm}^2$  (15 drutów 10 mm gr.),  $a=a_1=4 \text{ cm}$ .

Mamy wtedy  $k=0.3$  i wedle (263)

$$\begin{aligned} p &= \frac{30}{100} [11.78(56+10) - 11.78(-10-4)] - 0.3^2 \cdot 10^2 + 0.7 \cdot 12(12+20) = 542.5 \\ q &= -\frac{45}{100} 11.78 [(4+10)(4+10 \cdot 0.3) + (56+10)(56+10 \cdot 0.3)] + 0.3^3 \cdot 10^3 + \\ &- \frac{3}{2} 0.7 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 0.3(12+20) + \frac{1}{2} 0.7 \cdot 144 \cdot (-30-24) = -21160 + 27 - 1209.6 - \\ &- 2721.6 = -25064 \end{aligned}$$

$$y_1 = \sqrt[3]{25064 + \sqrt{25064^2 + 542.5^3}} + \sqrt[3]{25064 - \sqrt{25064^2 + 542.5^3}} = 23.2$$

$$z_1 = 23.2 - 0.3 \cdot 10 = 20.2 \text{ kg/cm}^2$$

a z równ. (256)

$$\tau_1 = \frac{20000 \cdot 20.2}{\frac{100 \cdot 20.2^2}{2} - (100-30) \frac{(20.2-12)^2}{2} + 15 \cdot 11.78 [(20.2-4) - (56-20.2)]}$$

$$\tau_1 = 14.1 \text{ kg/cm}^2$$

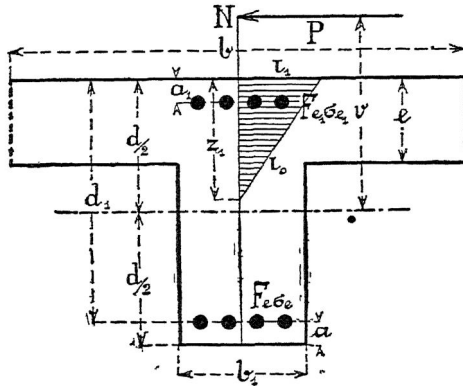
$$\sigma_{e'} = -\frac{15(20.2)}{20.2} \cdot 14.1 = -172 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{15(56-20.2)}{20.2} \cdot 14.1 = 376 \text{ kg/cm}^2.$$

§ 60. Projektowanie przekroju teowego ciśnionego  
mimośrodkowo:

Obliczenie uzbrojenia w tym wypadku podamy wedle Lichtensteina<sup>1)</sup>.

Siła  $P$  zaczepta w  $N$  (rys. 94.). Przypuszczamy, że zach-



Rys. 94.

dzi tu faza  $\Pi_b$ , ciągnięć w betonie nie uwzględniamy, tak samo ciśnięć w żebrze.

Mamy wtedy ciśnienie w betonie i żelazie

$$D = be \frac{\tau_1 + \tau_0}{2}, \quad D' = F_{e_1} \sigma_{e_1}, \quad a$$

ciągnięcie w żelazie  $Z = D + D' - P = F \sigma_e$  . . . . . (264)

Dalej  $\tau_1 : \sigma_e = z_1 : 15 (d_1 - z_1), \quad \tau_0 : \tau_1 = (z_1 - e) : z_1,$

$$\sigma_{e_1} : \tau_1 = 15 (z_1 - a_1) : z_1, \quad \text{stad} \quad z_1 = \frac{15 \tau_1}{\sigma_e + 15 \tau_1} d_1 = \xi d_1 \quad (265)$$

$$\tau_0 = \frac{z_1 - e}{z_1} \tau_1 = \left(1 - \frac{e}{z_1}\right) \tau_1 \quad . \quad . \quad . \quad (266)$$

$$\sigma_{e_1} = \frac{15 (z_1 - a_1)}{z_1} \tau_1 = 15 \left(1 - \frac{a_1}{z_1}\right) \tau_1 \quad . \quad . \quad (267)$$

Dalej mamy równanie momentów ze względu na dolną wkładkę

$$P \left( v - \frac{d}{z} + d_1 \right) = \frac{bz_1 \tau_1}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) + \\ - \frac{b(z_1 - e)}{2} \tau_0 \left( d_1 - e - \frac{z_1 - e}{3} \right) + D' (d_1 - a_1)$$

<sup>1)</sup> por. Oest. Wochen f. d. öff. Baudienst 1911 str. 755.

stąd

$$D' \left( d_1 - a_1 \right) = P \left( v - \frac{d}{2} + d_1 \right) - \frac{bz_1}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) \left( \tau_1 - \tau_0 \right) + \\ - \left[ \frac{bz_1 e}{3} - \frac{be^2}{3} + \frac{be}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) \right] \tau_0. \quad (268)$$

Jeżeli nazwiemy  $\frac{e}{2d_1} = \varphi$ , to

$$D = be \tau_1 \left( 1 - \frac{e}{2z_1} \right) = be \tau_1 \left( 1 - \frac{\varphi}{\xi} \right) \quad (269)$$

Z równ. (268) otrzymamy, nazwawszy  $\mu = \frac{\tau_1}{b\xi}$ ,

$$D' = \frac{1}{d_1 - a_1} \left[ P \left( v - \frac{d}{2} + d_1 \right) - b\tau_1 e d_1 \left( 1 - \frac{e}{2z_1} \right) + \frac{b\tau_1 e^2}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{e}{z_1} \right) \right]$$

lub

$$D' = \frac{1}{d_1 - a_1} \left\{ P \left( v - \frac{d}{2} + d_1 \right) - D d_1 (1 - \varphi) + \right. \\ \left. + be^2 \mu (4\xi - 4\varphi) \right\} \quad (270)$$

Z równ. (254) mamy

$$F = \frac{D + D' - P}{\sigma_e} \quad (271)$$

dalej

$$F_{e_1} = \frac{D'}{\sigma_{e_1}} = \frac{D'}{15 \tau_1 \left( 1 - \frac{a_1}{z_1} \right)}$$

a gdy

$$15 \tau_1 = \beta, \quad \frac{1}{\varphi} = \delta,$$

to

$$D = be \tau_1 (1 - \delta \varphi) \quad (272)$$

$$F' = \frac{D'}{\beta \left( 1 - \delta \frac{a_1}{d_1} \right)} \quad (273)$$

Wyraz  $be^2 \mu (3\xi - 4\varphi)$  jest mały, tak, że go można opuścić, wtedy mamy w przybliżeniu

$$D' = \frac{1}{d_1 - a_1} \left\{ P \left( v - \frac{d}{2} + d_1 \right) - D d_1 (1 - \varphi) \right\} \quad (274)$$

Lichtenstein obliczył następną tabliczkę:





Przykład. Przyjmijmy  $\tau=42 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_e=1000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $P=30000 \text{ kg}$ ,  
 $v=40 \text{ cm}$ ,  $d=42 \text{ cm}$ ,  $e=7 \text{ cm}$ ,  $d_1=38.5 \text{ cm}$ ,  $b=150 \text{ cm}$ ,  $a=a_1=3.5 \text{ cm}$ .

Więc  $\varphi = \frac{7}{2 \cdot 38.5} = \frac{7}{77} = \frac{1}{11} = 0.0909$ . Z tabl. XVIII. str. 63 dla  $\tau_1=42$ ,  
 $\sigma_e=1000 \text{ kg/cm}^2$   $\xi=0.3865$ .

Z równ. (272) mamy wtedy

$$D=150 \cdot 7 \cdot 42(1-2 \cdot 587 \cdot 0.0909)=33756 \text{ kg.}$$

Z równ. (270) mamy

$$D' = \frac{1}{38.5-3.5} \left[ 30000 \left( 40 - \frac{42}{2} + 38.5 \right) - 33736 \cdot 38.5 \left( 1 - 0.0909 \right) + \right. \\ \left. - 150 \cdot 7^2 \cdot 16 \cdot 11 \left( 3 \cdot 0.3865 - 4 \cdot 0.0909 \right) \right] = \frac{1}{35} \left[ 17250000 - 1180800 + 94242 \right] = \\ = \frac{638442}{35} = 18241 \text{ kg.}$$

Wedle (271) mamy

$$F = \frac{33736 + 18241 - 30000}{1000} = 22.0 \text{ cm}^2,$$

zaś z równ. (273)

$$F'' = \frac{18241}{630 \left( 1 - 2 \cdot 587 \cdot \frac{3.5}{38.5} \right)} = 37.9 \text{ cm}^2.$$

Obliczmy teraz natężenie:

Mamy  $u_1 = \frac{42}{2} - 40 = -19 \text{ cm}$ . Przyjmijmy  $b_1 = 30 \text{ cm}$ ,  $k = \frac{30}{150} = 0.2$ ,  
 $F=22.62$  (5 § 24),  $F'=38.48$  (4 § 35),  $a=a_1=3.5$ . Wedle (263) mamy

$$p = \frac{30}{150} [22.62(38.5+19) - 38.48(-19-3.5)] - 0.2^2 \cdot 19^2 + 0.8 \cdot 7(7+2 \cdot 19) \\ p = 433.3 = -14.4 + 252 = 670.9$$

$$q = \frac{45}{150} [38.48(3.5+19)(3.5+0.2 \cdot 19) + 22.62(38.5+19)(38.5+0.2 \cdot 19) + \\ + 0.2^3 \cdot 19^3 + \frac{3}{2} \cdot 0.8 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 0.2(7+2 \cdot 19) + \frac{1}{2} \cdot 0.8 \cdot 7^2(-3 \cdot 19-2 \cdot 7)] = \\ q = -18401.4 + 54.9 - 1436.4 - 1391.6 = 21165.$$

$$y_1 = \sqrt[3]{21165 + \sqrt{21165^2 + 670.9^3}} + \sqrt[3]{21165 - \sqrt{21165^2 + 670.9^3}} = 36.5 - 18.4 = 18.1 \text{ cm} \\ z_1 = 18.1 - 0.2 \cdot 19 = 14.3 \text{ cm.}$$

Z równ. (256) otrzymamy

$$\tau_1 = \frac{30000 \cdot 14.3}{\frac{150 \cdot 14.3^2}{2} - (150-30) \frac{(14.3-7)^2}{2} + 15 \cdot 38.48(14.3-3.5) - 15 \cdot 22.62(38.5-14.3)} \\ \tau_1 = 42.2 \text{ kg/cm}^2.$$

a wedle (261)

$$\sigma_e' = -\frac{15(14.3-3.5)}{14.3} 42.2 = 478 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_e = \frac{15(38.5-14.3)}{14.3} 42.2 = 1071 \text{ kg/cm}^2.$$

Natężenia są więc nieco za wielkie, uzbrojenie trzeba powiększyć. Niedokładność pochodzi stąd, że w równ. (264) do (270) uwzględniono tylko ciśnienie betonu w płycie. Ta płyta jest 7 cm gruba, a  $z_1=13.9$ , więc różnica jest znaczna.

Inaczej moglibyśmy obliczyć wymiary w następujący sposób.

Naprzód obliczymy  $z_1$  z danych  $\tau_1=42$  i  $\sigma_e=1000 \text{ kg/cm}^2$ , jak dla belki prostokątnej (tabl. XVIII. str. 63). Tam mamy  $z_1=0.3865.38.5$ ,  $z_1=14.8 \text{ cm}$ .

Dalej mamy z równ.(266)  $\tau_0=\left(1-\frac{7}{14.8}\right)42=22.1 \text{ kg/cm}^2$ . Zatem wedle równ.

(264)  $D=150.7. \frac{212+224}{2}=33675 \text{ kg}$ . Gdybyśmy chcieli uwzględnić także ciśnienie w żebrze, to trzeba by jeszcze dodać  $\Delta D=30.(14.8-7)\frac{22.1}{2}=2585.7$ , byłoby więc dokładniej  $D=36261 \text{ kg}$ .

Dalej mamy wedle (267)  $\sigma_e'=15\left(1-\frac{3.5}{14.8}\right)42=481 \text{ kg/cm}^2$ .

Wedle (268) mamy dalej z uwzględnieniem nateżeń w żebrze

$$F'=\frac{1}{(38.5-3.5)481}\left[30000\left(40-\frac{42}{2}+38.5\right)-\frac{150.14.8.42}{2}\left(38.5-\frac{14.8}{3}\right)+\left(150-30\right)\frac{14.8-7}{2}22.1\left(38.5-7-\frac{14.8-7}{3}\right)\right].$$

$$F'=\frac{1}{35.481}(1725000-1564000+298900)=27.3 \text{ cm}^2$$

$$D'=27.3 \times 481=13140 \text{ kg}$$

Z równ. (264) otrzymamy

$$Z=36261+13140-30000=19401 \text{ kg}$$

a

$$F=\frac{19401}{1000}=19.4 \text{ kg/cm}^2.$$

Obliczmy teraz nateżenie:

Mamy  $u_1=-19$ ,  $b_1=30 \text{ cm}$ ,  $k=0.2$ ,  $F=19.63(4 \text{ fj } 25)$ ,  $F'=28.27(4 \text{ fj } 30)$ ,  $a=a_1=3.5 \text{ cm}$ . Wedle (263) mamy

$$p=\frac{30}{150}[19.63(38.5+19)-28.27(-19-3.5)]-0.2^2.19^2+0.8.7(7+2.19)$$

$$p=353-14.4+252=580.6$$

$$q=\frac{45}{150}[28.27(3.5+19)(3.5+0.2.19)+19.63(38.5+19)(38.5+0.2.19)]-$$

$$-0.2^3.19^3-\frac{3}{2}0.8.7.19.0.2(7+2.19)+\frac{1}{2}0.8.7^2(-3.19-2.7)=$$

$$=-15716.5+54.9-1436.4-1391.6=-18490$$

$$y=\sqrt[3]{18490+\sqrt{18490^2+580.6^3}}+\sqrt[3]{18490-\sqrt{18490^2+580.6^3}}=18.1 \text{ cm}$$

$z_1=18.1-0.2.19=14.3 \text{ cm}$ . Wartość ta jest tu ta sama, co pierwszej.

Dalej mamy

$$\tau_1=\frac{30000.14.8}{\frac{150.14.8^2}{2}-(150-30)\frac{(14.8-7)^2}{2}+15.28.27(14.3-3.5)-15.19.63(38.5-14.3)}$$

$$\tau_1=44.7$$

$$\sigma_e'+\frac{15(14.3-3.5)}{14.8}44.7=506 \text{ kg/cm}^2$$

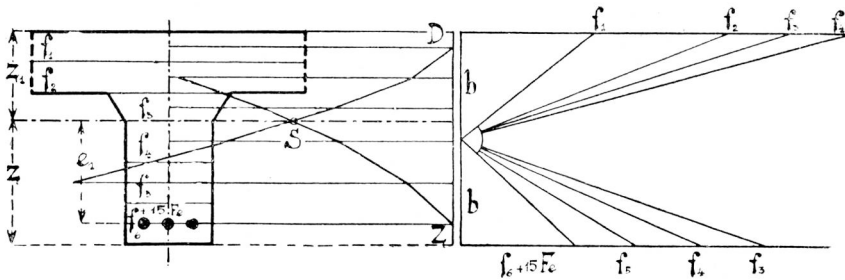
$$\sigma_e'=\frac{15(38.5-14.3)}{14.8}44.7=1135 \text{ kg/cm}^2.$$

Tu więc są nateżenia za wielkie, należałoby zatem zwiększyć  $F$  i  $F'$  mniej więcej o 15%.

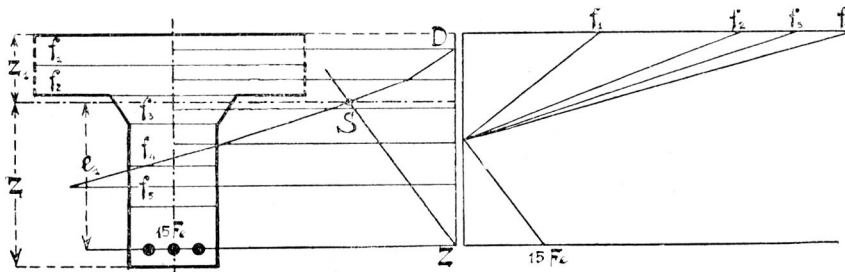
## G. Wykreślne wyznaczenie osi obojętnej.

### § 61. Belka zginana.

Autenrieth podaje prosty sposób wyznaczenia osi obojętnej w belce zginanej w fazie Ia. Polega on na tem, że zmieniamy siły, proporcjonalne do powierzchni, w stosunku do współczynników sprężystości. Dany przekrój dzielimy na paski i kreślimy dwa wieloboki sił dla betonu u góry i dla betonu i żelaza u dołu. Przyjmujemy dla obu jednaką odległość



Rys. 95.



Rys. 96.

biegunową  $h$  (rys. 95.) i kreślimy wieloboki sznurowe jeden z góry, drugi z dołu. Przez punkt przecięcia się  $S$  boków obu wieloboków przechodzi oś obojętna, bo momenty statyczne górnej i dolnej części przekroju są równe.

Wedle Mohra  $J=2b \cdot DZS$ .

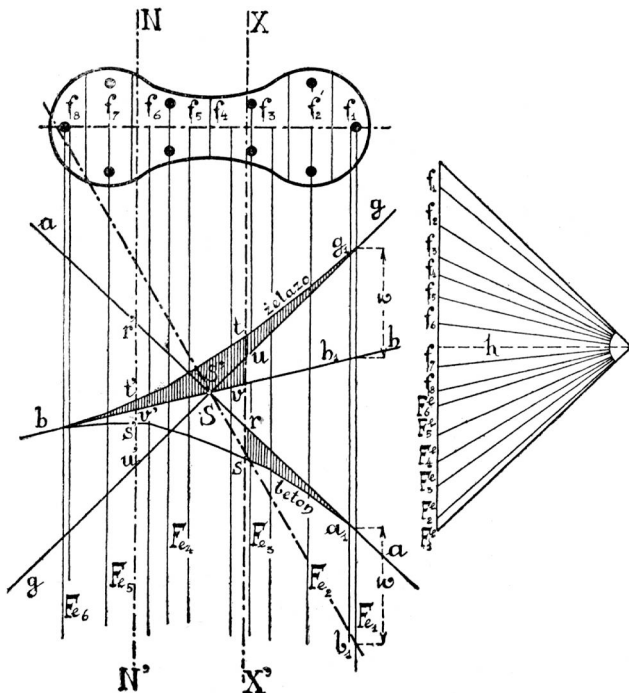
Teraz obliczamy natężenia

$$\tau_1 = \frac{Mz_1}{J}, \quad \tau_2 = \frac{Mz}{J}.$$

Zupełnie w ten sam sposób da się wyznaczyć oś obojętna w fazie Ib z tą tylko różnicą, że w dolnym wieloboku sił odcinamy  $0.4f_5$ ,  $0.4f_4$  itd. Dalszy tok konstrukcyi ten sam.

Dla fazy IIb konstrukcja jest bardzo podobna (rys. 96.) tylko, że tu nie uwzględniamy ciągnięcia, więc w wieloboku sił u dołu mamy tylko 15  $F$ .

Zawilszy wypadek przedstawia (rys. 97.), gdy uzbrojenie jest umieszczone w całym przekroju. Tu dzielimy znów przekrój na paski i kreślimy wielobok sił, najprzód z prawej ku lewej siły odpowiednie paskom betonu, potem w odwrotnym kierunku siły odpowiednie przekrojowi żelaza. Kreślimy od  $a$  począwszy



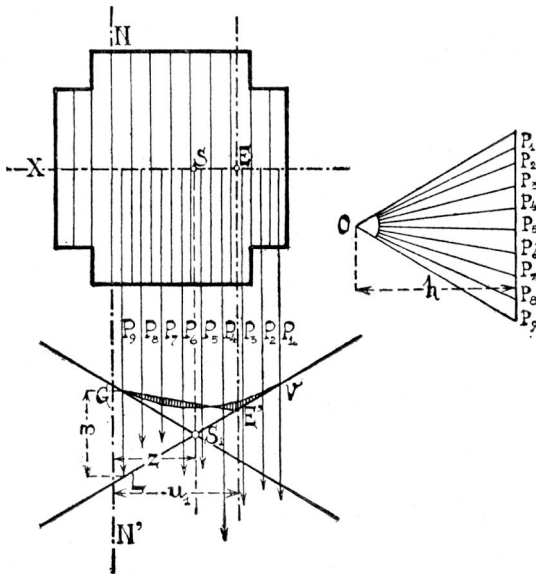
Rys. 97.

wielobok sznurowy  $ahg$ . Dla dowolnego przekroju  $NN'$  moment statyczny sił, na prawo leżących,  $S_p = h(r's' + t'u')$ , sił, na lewo leżących dla fazy IIb  $S_l = h.t'v'$ , bo ciągnięcia w betonie nie uwzględniamy. Dla osi obojętnej musi być moment równy zero, więc  $rs + tu = tv$ ,  $rs = tv - tu = vu$ . Z rysunku widzimy, że  $vu$  jest tu różnica rzędnych między prostymi  $hh$  i  $gg$ . Dla osi obojętnej  $XX$ .  $w_1$ , moment statyczny całego uzbrojenia, musi być równy momentowi statycznemu betonu po prawej stronie  $rs$ . W tym celu robimy  $a_1b_1 = w = g_1h_1$ , punkt  $b_1$  łączymy z  $S$  i otrzymujemy punkt przecięcia  $s_1$ , przez który przechodzi oś obojętna.

Jeżeli uzbrojenie jest symetrycznym, to środek ciężkości żelaza jest tam, gdzie betonu, jednak  $S$  i  $S_1$  niekoniecznie muszą być w jednym punkcie. Jeżeli powierzchnię kreskowaną nazwiemy  $A$ , to  $J=2hA$ .

### § 62. Ciśnienie mimośrodkowe.

Jeżeli przekrój słupa jest dowolny, siła działa jednak w osi głównej w  $E$  (rys. 98.), to oś obojętną wyznaczamy za pomocą znanej konstrukcyi<sup>1)</sup>, która polega na tem, że z punktu



Rys. 98

ktu  $E'$  kreślimy linię prostą  $GE'$ , która by wyrównywała powierzchnię momentów kreskowaną.

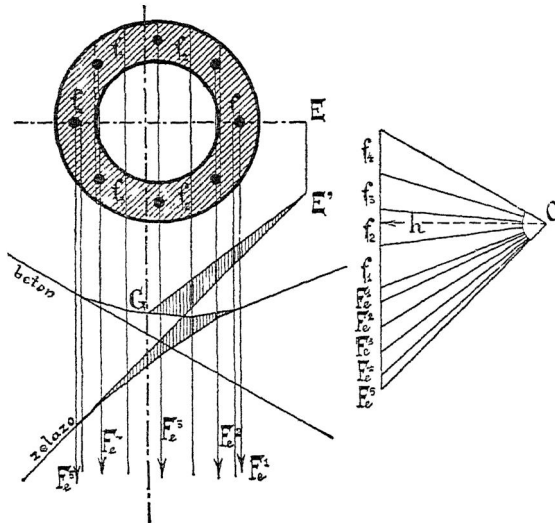
Konstrukcyę tę jeśli zastosujemy do przekroju żelbetowego w fazie II b, to musimy tu uwzględnić tylko przekrój żelaza i ciśnioną część przekroju betonu. Jeżeli siła zaczyna w  $E$  (rys. 99.), to kreślimy najprzód wielobok sił dla betonu i żelaza, wielobok sznurowy, a z punktu  $E'$  kreślimy znów prostą  $E'G$  tak, aby powierzchnie kreskowane były równe.

<sup>1)</sup> Por. Podręcznik Statyki Budowl. str. 446.

## H. Wyznaczenie wymiarów zeskładów żelbetowych ze względu na koszty.

### § 63. Uwagi ogólne.

Poprzednio idąc za wywodami Haberkalta i Postuvanschitza, uważaliśmy za najekonomiczniejsze wymiary zeskładów żelbetowych wymiary przekrojów idealnych t. j. takich, w których równocześnie osiągnięto natężenie dopuszczalne na ciągnięcie żelaza i na ciśnienie betonu. Dla płyt mają być te przekroje



Rys. 99.

dla austriackich cen materiałów prawie zawsze najekonomiczniejsze, dla przekrojów teowych, gdy  $\frac{b'}{b} \geq \frac{1}{4}$ .

Kwestya ta nie przedstawia się jednak tak prosto. Zajmował się nią między innymi Dr. Maksymilian Mayer. (Die Wirtschaftlichkeit als Konstruktionsprinzip in Eisenbetonbau, Berlin, Springer 1913), i wedle jego wywodów postaramy się tę sprawę bliżej omówić.

### § 64. Płyta z jednej strony uzbrojona.

Jeżeli obliczymy wymiary płyty idealnej, to chcąc zmniejszyć koszty, możemy zwiększyć grubość, a przez to pomniejszyć

szycy przekrój żelaza. Że płyta cieńsza o większej ilości żelaza nie może być tańszą, jest oczywista. Zbadajmy więc, kiedy przez powiększenie grubości płyty można zmniejszyć koszt.

Z rys. 100 mamy

$$M = \frac{bz_1\tau_1}{2} \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right) = F\sigma_e \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right),$$

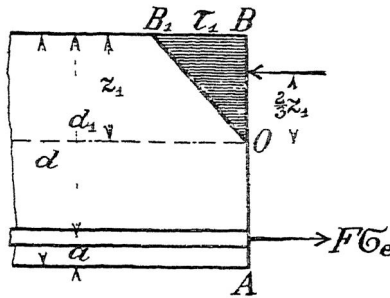
a że  $\tau_1 = \frac{z_1\sigma_e}{15(d_1 - z_1)}$ , więc  $\frac{bz_1^2}{30(d_1 - z_1)} = F$ ,

zatem  $bz_1^2 = 30 F(d_1 - z_1)$  . . . . . (275)

Z równ.  $M = F\sigma_e \left( d_1 - \frac{z_1}{3} \right)$  mamy  $z_1 = 3 \left( d_1 - \frac{M}{F\sigma_e} \right)$ , co wstawiając w równ. (275), otrzymamy

$$9b \left( d_1 - \frac{M}{F\sigma_e} \right)^2 = 30F \left[ d_1 - 3 \left( d_1 - \frac{M}{F\sigma_e} \right) \right], \text{ a stąd}$$

$$d_1 = -\frac{30F}{9b} + \frac{M}{F\sigma_e} + \sqrt{\frac{900F^2}{81b^2} + \frac{30M}{9b\sigma_e}} \quad . \quad (276)$$



Rys. 100.

Pochodna tej funkcji ze względu na  $F$

$$\frac{dd_1}{dF} = -\frac{30}{9b} - \frac{M}{F^2\sigma_e} + \frac{30F}{9b \sqrt{F^2 + \frac{30Mb}{9\sigma_e}}} \quad . \quad (277)$$

$$\text{Koszt płyty } k = d_1\beta = \varepsilon r F \quad . \quad . \quad . \quad (278)$$

w halerzach, jeżeli  $\beta$  oznacza cenę jednostkową betonu w koronach na  $1m^3$ ,  $\varepsilon$  żelaza w kor. na  $100kg$  a  $r$  współczynnik ustrojowy wkładki żelaznej. Koszt części płyty poniżej wkładki, jakoteż rusztowania, pomijamy jako ilość stałą.



Z równ. (278) mamy  $dk = \beta dd_1 + \epsilon r dF$ .

Dla najmniejszości  $dk = 0$ , więc

$$\frac{dd_1}{dF} = -\frac{\epsilon r}{\beta} = -\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (279)$$

To równanie wraz z (277) wyznacza nam  $F_1$ , dla którego koszt płyty jest najmniejszym.

Zbadajmy teraz, kiedy będzie ekonomicznym przekrój idealny.

Z równ. (279) otrzymamy

$$\frac{dk}{dF} = \beta \cdot \frac{dd_1}{dF} + \epsilon r = \epsilon r - \beta \left( \frac{M}{F^2 \sigma_e} - \frac{30}{9b} + \frac{30 F}{9b \sqrt{F^2 + \frac{30 Mb}{9 \sigma_e}}} \right) \quad (280)$$

Wstawmy teraz za  $F$  największe i najmniejsze wartości z tabl. XVIII. str. 63, a mianowicie: dla  $\sigma_e = 818$ ,  $\tau_1 = 34.2$ , mięszan. 1:3,  $F = 0.003361 \sqrt{M \cdot 100} = 0.03361 \sqrt{M}$ , to  $\frac{dk}{dF} = \epsilon r - 1.123 \beta$ .

Jeżeli  $\frac{dk}{dF} \leq 0$ , to  $\epsilon r < 1.123 \beta$ , więc  $\frac{\epsilon}{\beta} < \frac{1.123}{r}$ . Dla płyt ciągłych należy przyjąć  $r = 1.35$ , więc  $\frac{\epsilon}{13} < 0.83$ ,  $\beta > 1.2 \epsilon$ .

Dla płyt w dwukrawędziach podpartych  $r = 1$ , więc  $\beta > 0.89 \epsilon$ . Podobnie przyjmąwszy dla  $\tau_1 = 32$ ,  $\sigma_e = 1000$ ,  $F = 0.02412 \sqrt{M}$ ,  $\frac{dk}{dF} = \epsilon r - 1.744 \beta$ . Dla płyt ciągłych  $r = 1.35$ , więc  $\frac{\epsilon}{\beta} < \frac{1.744}{1.35}$ ,  $\frac{\beta}{\epsilon} > 0.775$ . Dla płyt podpartych  $r = 1$ , więc  $\frac{\beta}{\epsilon} > 0.56$ .

Mamy więc następną tabliczkę XXX.

		plyta pod- parta $r=1$	plyta ciągła $r=1.35$
najw.	$\frac{\beta}{\epsilon}$ dla $\tau_1 = 34.2$ $\sigma_e = 818$	0.89	1.2
najm.	$\frac{\beta}{\epsilon}$ " $\tau_1 = 32$ $\sigma_e = 1100$	0.56	0.775

Jakież mogą być ceny jednostkowe betonu i żelaza? Zależy to od wielu okoliczności. Przyjmijmy wartości skrajne dla  $\epsilon = 38$  i 22,  $\beta = 50$  i 20, to

$$\text{najw. } \frac{\beta}{\epsilon} = \frac{50}{22} = 2.2, \quad \text{najmn. } \frac{\beta}{\epsilon} = \frac{20}{38} = 0.53.$$

Widzimy więc, że dla zwykłych cen żelaza i betonu, przyczem należy rozumieć cenę jednostkową już w gotowej płycie,  $\frac{\beta}{\varepsilon}$  jest dla płyt zwykłych ( $r=1$ ) większem, niż w tabliczce, a nawet można to powiedzieć i dla płyt ciągłych. Jeżeli jednak beton jest tani a żelazo bardzo drogie, to może się opłacać, zwłaszcza dla płyt ciągłych, przyjąć większą grubość płyty i zmniejszyć natężenie betonu. Przez to zmniejszyć możemy ilość cementu w betonie, a zatem i cenę jego jednostkową.

Jeżeli przyjmiemy  $b=100\text{ cm}$ , to z równ. (279) i (277) otrzymamy dla najmniejszości kosztów

$$\delta = +0.033 + \frac{M}{F^2 \sigma_e} - \frac{F}{30 \sqrt{F^2 + \frac{30M}{\sigma_e}}} \quad . \quad . \quad (281)$$

Mając  $\delta$  i  $\sigma_e$ , możemy stąd obliczyć  $F$ , ale chyba przez próbowanie, bo równanie to jest ze względu na  $F$  szóstego stopnia. Wyraz ostatni w równ. (281) jest bardzo mały tak, że możemy go przynajmniej na razie opuścić, a wtedy obliczenie  $F$  z równania jest łatwym.

Mayer podaje tabelkę, obliczoną dla  $\sigma_e = 1000\text{ kg/cm}^2$  i  $\sigma_e = 1200\text{ kg/cm}^2$ , których można użyć tylko dla budownictwa.

W innych wypadkach możemy użyć przybliżonego wzoru

$$\bar{d}_1 = \sqrt{\frac{8r}{7}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \sqrt{\frac{M}{\sigma_e}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (282)$$

Przykład. Niech będzie  $\beta = 24 \frac{k}{m^3}$ ,  $\varepsilon = 36\text{ h}$ . Płyta niech będzie ciągłą.  $M = 50000\text{ kg/cm}^2$ ,  $b = 100\text{ cm}$ ,  $\sigma_e = 1000$ ,  $\tau_1 = 37$ ,  $r = 1.4$ . Znaleźć grubość najtańszej płyty i jej uzbrojenie.

Dla płyty idealnej (wedle tabl. XVIII. str. 63) jest

$$d_1 = 0.4146 \sqrt{\frac{50000}{100}} = 9.3, \quad d = 11\text{ cm}, \quad F = 0.002738 \sqrt{50000 \cdot 100} = 6.14\text{ cm}^2,$$

zatem  $8\text{ }\phi\text{ }10\text{ mm}$  czyli  $6.28\text{ cm}^2$ . Koszt na  $1\text{ m}^2$  płyty bez kosztów opierzenia i warstwy poniżej wkładki dolnej wynosi wedle (278)

$$k = 9.3 \cdot 24 + 36 \cdot 1.4 \cdot 6.28 = 223 + 316 = 539 \frac{h}{m^2}.$$

Tu mamy wedle równ. (279)

$$\delta = \frac{36 \cdot 1.4}{2.4} = 2.1.$$

Z równ. (281) mamy

$$2.1 = +0.033 + \frac{50000}{F^2 \cdot 1000} - \frac{F}{30 \sqrt{F^2 + \frac{30 \cdot 50000}{100}}}$$

czyli

$$2.066 = \frac{50}{F^2} - \frac{F}{30 \sqrt{F^2 + 15000}},$$

z czego po paru próbach otrzymamy  $F = 4.9 \text{ cm}^2$ .

Dla przekroju idealnego jest  $p' = \frac{6.28}{9.3} = 0.68$ . Tu będzie  $p'$  mniejszem

Dla  $p' = 0.5$  mamy wedle str. 67  $C_1' = 0.475$ , więc  $d_1 = 0.475 \sqrt{\frac{50000}{100}}$ ,  $d = 10.6$ ,

zatem  $p' = \frac{4.9}{10.6} = 0.46$ . Przyjąwszy  $p' = 0.45$ , to z tablicy mamy  $C_1' = 0.5$ ,

więc  $d_1 = 0.5 \sqrt{\frac{50000}{100}} = 11.2$ , zatem  $p' = \frac{4.085}{11.2} = 0.435$ . Przyjmy  $p' = 0.42$ .

to  $d_1 = 0.52 \sqrt{\frac{50000}{100}} = 11.6$ , stąd  $p' = \frac{4.05}{11.6} = 0.42$ . Możemy więc zatrzymać  $d_1 = 11.6 \text{ cm}$ . Mamy wtedy  $k = 11.6 \times 24 + 36.1.4.4.85 = 242 + 244 = 522$ . Widzimy więc, że koszt jest nieco mniejszym. W praktyce różnica jest jednak tak małą, że zakrytą zostanie zaokrągleniem grubości płyty lub średnicy prętów.

Wedle równ. (282) mamy przybliżone

$$d_1 = \sqrt{\frac{8.1.4}{7}} \sqrt{\frac{36}{24}} \sqrt{\frac{50000}{1000}} = 10.3 \text{ cm}, \text{ a więc nieco mniej.}$$

## § 65. Płyta uzbrojona w dwu kierunkach.

Tu zmienia się tylko  $r$ , mianowicie, jeżeli płyta spoczywa na krawędziach  $r = 2 \times 0.9 = 1.8$ , jeżeli zaś płyta utwierdzona na krawędziach  $r = 2 \times 1.2 = 2.4$ .

Jeżeli teraz obliczymy podobnie, jak poprzednio, to stwierdzić możemy, że wtedy płyta idealna jest najekonomiczniejszą,

jeśli  $\frac{1}{100} \text{ m}^2$  betonu kosztuje więcej, niż  $\alpha$  razy tyle, co  $\text{kg}$  żelaza. Przyczem  $\alpha$  będzie

	dla płyt wolnopodpartych $r = 1.8$	utwierdzonych $r = 2.4$
$\tau_1 / \sigma_e = 34.2 / 818$	1.6	2.14
$n = 32 / 1000$	1.05	1.39
$n = 42 / 1000$	1.6	2.14
$n = 25 / 800$	0.99	1.32

Tu, jak widzimy, bardzo często w praktyce zdarzyć się może  $\alpha$  mniejsze i wtedy należy zmniejszyć natężenie betonu, zwiększyć grubość płyty, a zwłaszcza dla betonu taniego a żelaza drogiego. Dla płyt utwierdzonych w regule należy przyjmować grubość płyty większą, niż idealna.

Przykład. Przyjmijmy z Haberkaltem dla budynku płytę wolno-leżącą na czterech krawędziach o rozpiętościach w świetle 1·9 m i 2·85 m. Obciążenie największe równo rozdzielone  $Q=7200$  kg. Beton 1:3.

Wedle rozporządzenia austriackiego (§ 82.) rozdzielamy  $Q$  na dwie części, działające na płyty, uzbrojone w kierunkach do siebie prostopadłych. Rozpiętość przyjmijmy 1·05·19=200 cm i 2·85·15=300 cm, zatem  $n=\frac{b}{a}=1\cdot5$ . Przyjmijmy  $k=\frac{F_b}{F_a}=0\cdot3$ .

$$\text{Na jedną płytę wypada } \frac{3^2}{0\cdot3\cdot2^2+3^2} 7200=6353 \text{ kg,}$$

$$\text{„ drugą „ „ } \frac{0\cdot3\cdot2^2}{0\cdot3\cdot2^2+3^2} 7200=847 \text{ kg.}$$

$$\text{Dla rozpiętości 2 m mamy } M_a=\frac{1}{8} 6353\cdot200=158825 \text{ kgcm}$$

$$\text{„ „ 3 m „ } M_b=\frac{1}{8} 847\cdot300=31762 \text{ kgcm.}$$

Dla momentu  $M_a$  liczymy grubość płyty idealnej dla  $\tau_1=32$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_e=1000$ . Mamy więc  $d_1=0\cdot4648\sqrt{\frac{158825}{300}}=10\cdot7$ ,  $F=0\cdot002412\sqrt{158825\cdot300}=16\cdot65$  cm<sup>2</sup> albo na 1 m szerokości  $F'=\frac{16\cdot65}{3}=5\cdot55$  cm<sup>2</sup>.

Dla kierunku poprzecznego mamy  $F'=0\cdot3 F=1\cdot665$  cm<sup>2</sup>.

Zatem przyjmijmy w jednym kierunku 6 prętów po 11 mm,  $F=5\cdot7$  cm<sup>2</sup>, a w drugim 6 prętów po 6 mm  $F'=1\cdot7$  cm<sup>2</sup>, grubość płyty  $d=10\cdot7+\frac{1\cdot1}{2}+10=12\cdot25$ , zamiast czego przyjmijmy 13 cm.

Koszt bez uwzględnienia warstwy dolnej pod uzbrojeniem wynosić ma na 1 m<sup>2</sup>  $k=10\cdot7\cdot24+36\times0\cdot9(5\cdot55+1\cdot67)=490\cdot7$  h.

Tu mamy wedle równ. (279)

$$\delta=\frac{36\cdot1\cdot8}{24}=2\cdot7.$$

Podobnie, jak dla pojedynczego uzbrojenia, otrzymamy tu

$$d_1=-\frac{30}{9b}\left(F-F'\frac{\sigma_e'}{\sigma_e}\right)+\frac{M}{F'\sigma_e}+\sqrt{\frac{900}{81b^2}\left(F-F'\frac{\sigma_e'}{\sigma_e}\right)^2+\frac{30}{9}\frac{M}{b\sigma_e}\frac{F-F'\frac{\sigma_e'}{\sigma_e}}{F}}.$$

Pochodna tej funkcji ze względu na  $F$ , gdy  $F' = \alpha F$  a  $\zeta = 1 - \alpha \frac{\sigma_e'}{\sigma_e}$

$$\frac{dd_1}{dF} = -\frac{30}{9b} \frac{M}{F^2 \sigma_e} + \frac{30 F}{9b \sqrt{F^2 \zeta^2 + \frac{30 M b}{9 \sigma_e} \zeta}}$$

Dla  $b=100$  otrzymamy analogicznie do (281)

$$\delta = 0.033 \zeta + \frac{M}{F^2 \sigma_e} - \frac{F}{30 \sqrt{F^2 \zeta^2 + \frac{30 M \zeta}{\sigma_e}}}$$

Wstawmy teraz wartości, otrzymamy wtedy

$$\zeta = 1 - 0.3 \frac{1}{2} = 0.85,$$

$$2.7 = 0.033 \cdot 0.85 + \frac{52942}{F^2 \cdot 1000} - \frac{F}{30 \sqrt{F^2 \cdot 0.85^2 + \frac{30 \cdot 158825}{1000} \cdot 0.85}},$$

$$2.672 = \frac{52.94}{F^2} - \frac{F}{30 \sqrt{0.722 F^2 + 4050.1}}$$

Drugi wyraz jako bardzo mały możemy opuścić. Mamy wtedy

$$F^2 - \frac{52.94}{2.672} = 19.7, \quad F = 4.33 \text{ cm}^2.$$

Wtedy  $F' = 4.33 \cdot 0.3 = 1.3 \text{ cm}^2$ .

Dla przekroju idealnego jest  $p' = \frac{5.55}{10.9} = 0.51$ . Tu będzie  $p'$  mniejszem.

Dla  $p' = 0.48$  będzie  $C_1' = 0.48$ , więc  $d_1 = 0.48 \sqrt{\frac{158825}{300}} = 11.05$ , zatem  $p' = \frac{4.33}{11.05} = 0.4$ . Przyjmijmy  $p' = 0.44$ , to  $C_1' = 0.55$ ,  $d_1 = 0.505 \sqrt{\frac{158825}{300}} = 11.6 \text{ cm}$ , zatem  $p' = \frac{4.33}{11.6} = 3.8$ . Przyjmijmy  $p' = 3.7$ , to  $C_1' = 0.55$ ,  $d_1 = 0.55 \sqrt{\frac{158825}{300}} = 12.9$ , zatem  $p' = \frac{4.33}{12.9} = 3.4$ . Grubość 12.9 będzie za małą, przyjmijmy więc  $d_1 = 13.5$ .

Wedle (54) otrzymamy

$$z_1 = -\frac{15.4.33}{100} + \sqrt{\frac{15.4.33}{100} \left( \frac{15.4.33}{100} + 2.13.5 \right)} = 3.58 \text{ cm},$$

$$\sigma_e = \frac{52942}{4.33 \cdot (13.5 - 3.58)} = 993 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau_1 = \frac{2.52442}{100 \cdot 3.58 \left( 13.5 - \frac{3.58}{3} \right)}$$

Grubość może być trochę mniejszą, przyjmijmy 13.4 cm.

Dla tej płyty wynosi

$$k = 13.4.24 + 36.09(4.33 + 1.3) = 504 \text{ h}.$$

Widzimy więc, że tuśmy na cenie nic nie zyskali, że nawet płyta jest nieco droższą. Gdyby z powodu mniejszego ciśnienia w betonie można

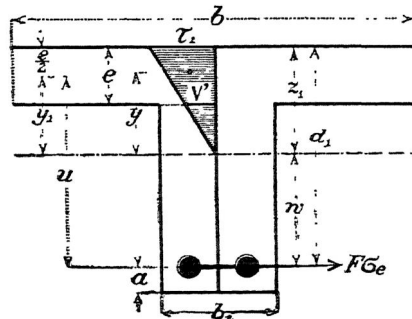
było zmniejszyć cenę betonu, to możebyśmy mieli pewną oszczędność, która przy płycie ciągłej byłaby większą. Jednak musimy zwrócić uwagę na tę okoliczność, że ciężar własny grubszej płyty jest większym, oszczędność zatem w każdym razie nie będzie wielką, chyba przy bardzo drogim żelazie.

### § 66. Płyta obustronnie uzbrojona.

Płyta taka rzadko jest używana, mianowicie wtedy, gdy obciążenie może działać i z jednej i z drugiej strony, a moment jest prawie równy. Tu zawsze należy przyjąć  $r=2.0$ . W podobny sposób licząc, otrzymuje autor wartości  $\alpha=1.8$  do  $4.6$ , a więc tu zawsze należy przyjąć mniejsze  $\tau_1$ , nie większe, niż 25 do 30  $kg/cm^2$ .

### § 67. Belka teowa.

Ponieważ powiększenie wysokości belki teowej o  $dh$  wywołuje tylko powiększenie powierzchni o  $b_1 dh$ , a więc znacznie



Rys. 101.

mniej, niż  $b dh$ , zatem tu tem bardziej nie będzie najtańszą belka idealna.

Jasną więc jest rzeczą, że belka najtańsza będzie miała tylko  $\sigma_e$  dopuszczalne, zaś  $\tau_1$  znacznie niższe.

W przybliżeniu możemy tu napisać (rys. 101.)

$$F = \frac{M}{\left(d_1 - \frac{e}{2}\right) \cdot \sigma_e} = \frac{M}{u \sigma_e} \quad . \quad . \quad . \quad (283)$$

Koszt belki będzie w przybliżeniu

$$k = b_1 u \beta + \left[ b_1 + 2 \left( u - \frac{e}{2} \right) \right] s z + F r \epsilon \quad . \quad . \quad . \quad (284)$$

Koszt płyty przyjmiemy stały, bo grubość jej już jest dana, więc jako stały nie uwzględniamy, to samo i dolną warstwę betonu  $a$  grubą. Za to uwzględnić musimy koszt szalowania  $sz$ , ale znów tylko żebra, bo koszt szalowania płyty jest stałym.

Wstawivszy wartość za  $F$  z (283), otrzymamy

$$k = b_1 u \beta + \left[ b_1 + 2 \left( u - \frac{e}{2} \right) \right] sz + \frac{Mr \varepsilon}{u \sigma_e} \quad . \quad . \quad (285)$$

Chodzi teraz o przyjęcie szerokości żebra  $b'$ . Mayer proponuje wzór doświadczalny

$$b_1 = 15 + 0.4 F \text{ cm} \quad . \quad . \quad . \quad (286)$$

Wartość za  $b_1$  wstawimy z (286) i (283) w (285) i otrzymujemy

$$k = \left( 15 + \frac{0.4 M}{u \sigma_e} \right) \beta + \left[ 15 + \frac{0.4 M}{u \sigma_e} + 2 \left( u + \frac{e}{2} \right) \right] sz + \frac{Mr \varepsilon}{u \sigma_e}$$

Dla najmniejszości

$$\frac{dk}{du} = 0 = 15 + \left( 2 - \frac{0.4 M}{u^2 \sigma_e} \right) sz - \frac{Mr \varepsilon}{u^2 \sigma_e}$$

stad

$$u = \sqrt{\frac{M}{\sigma_e} \left( \frac{0.4 sz + r \varepsilon}{15 \beta + 2 sz} \right)} \quad . \quad . \quad . \quad (287)$$

Przykład. Przyjawszy n. p.  $\beta = 24 \text{ k/m}^3$ ,  $\varepsilon = 25 \frac{\text{h}}{\text{kg}}$ ,  $sz = 2.5 \text{ k/m}^2$ , otrzymamy, przyjawszy siły w  $t$ , wymiary w  $\text{cm}$ , koszt w  $\text{hal/m}$  belki, gdy  $M = 15 \text{ tm}$ ,  $\sigma_e = 1000 \text{ kg/cm}^2 = 1 \text{ t/cm}^2$

$$u = \sqrt{\frac{1500}{1} \left( \frac{0.4 \cdot 2.5 + 1 \cdot 0.25}{15 \cdot 0.24 + 2 \cdot 2.5} \right)} = 60 \text{ cm},$$

$$F = \frac{1500}{60.1} = 24 \text{ cm}, \quad b' = 15 + 0.4 \times 25 = 25 \text{ cm}$$

Rozumie się, że jeżeli belka jest ciągłą, przyjmiemy  $r = 1.4$ .

## § 68. Przekrój ciśniony mimośrodkowo.

Przypuśćmy, że mamy dane  $M$  i  $N$ , wyznaczyć należy dla danego przekroju i danych nateżeń  $F$  i  $F'$ , aby koszt był jak najmniejszy.

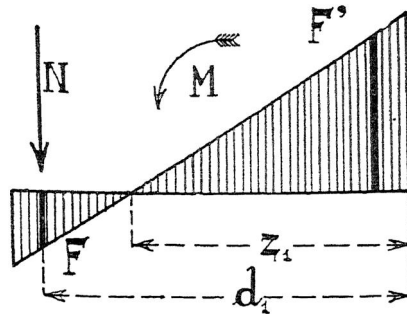
Najprzód należałoby zbadać, czy wogóle opłaci się dawać uzbrojenie podwójne. Uzbrojenie w ciśnionej części zastępuje 15 razy beton, więc, aby się opłaciło, musi być

$$r \varepsilon < \frac{15 \beta}{100} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (288)$$

Jeżeli  $r = 1$ , to musi być  $\frac{\beta}{2} > 6.67$ , co nie jest możliwym, więc uzbrojenie podwójne w ogóle się nie opłaca.

Pomimo tego nieraz dajemy uzbrojenie podwójne ze względów ustrojowych. Najtańszy ustrój będzie wtedy, gdy  $F + F'$  będzie najmniejszym.

Przypuszczamy znowu w przybliżeniu, że uzbrojenie ciśnionie  $F'$  jest w środku ciśnienia i że na przekrój działa siła  $2N$  (rys. 102.).



Rys. 102.

Mamy wtedy

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{M}{\left(d_1 - \frac{z_1}{3}\right) \sigma_e} - \frac{N}{\sigma_e} \\ F' &= \frac{M}{\left(d_1 - \frac{z_1}{3}\right) \sigma_{e_1}} - \frac{bz_1 \tau_1}{2 \sigma_{e_1}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (289)$$

Tu  $\sigma_{e_1} = \frac{2}{3} \cdot 15 \tau_1 = 10 \tau_1$ ; jeżeli to wstawimy, to

$$F' = \frac{0.3 M}{(3 d_1 - z_1) \tau_1} - \frac{bz_1}{20} \dots \dots (290)$$

a

$$z_1 = \frac{15 \tau_1}{\sigma_e + 15 \tau_1} d_1 \dots \dots (291)$$

Nazwijmy

$$\gamma = \frac{\sigma_e + 15 \tau_1}{\sigma_e + 10 \tau_1}, \dots \dots (292)$$

a możemy napisać

$$F = \frac{M}{d_1 \sigma_e} \gamma - \frac{N}{\sigma_e} \dots \dots (293)$$

$$F' = \frac{M}{10 d_1 \tau_1} \gamma - \frac{3}{4} b d_1 \frac{\tau_1}{\sigma_e + 15 \tau_1} \dots \dots (294)$$



Zbadajmy, jak się zmieniają przekroje  $F$  i  $F'$  przy stałym  $\sigma_e$  a zmiennem  $\tau_1$ .

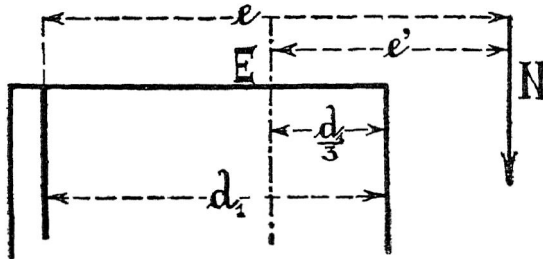
$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = \frac{M}{d_1 \sigma_e} \frac{d\gamma}{d\tau_1} = \frac{M}{d_1 \sigma_e} \frac{(\sigma_e + 10\tau_1)15 - (\sigma_e + 15\tau_1)10}{(\sigma_e + 10\tau_1)^2} =$$

$$= \frac{5M}{d_1(\sigma_e + 10\tau_1)^2} \dots \dots \dots (295)$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \tau_1} = - \frac{M}{30 d_1 \tau_1^2} \frac{3\sigma_e^2 + 60\tau_1\sigma_e + 450\tau_1^2}{(\sigma_e + 10\tau_1)^2} -$$

$$- \frac{3}{4} b d_1 \frac{\sigma_e}{(\sigma_e + 15\tau_1)^2} \dots \dots \dots (296)$$

Jeżeli oba wyrazy dodamy i odpowiednio skrócimy, to okaże się, że suma obu wyrazów nie będzie nigdy zerem, lecz



Rys. 103.

ilością ujemną. Więc jeżeli  $\tau_1$  wzrasta, to  $F$  zwiększa się mniej, niż  $F'$  wzrasta. Najekonomiczniej więc będzie wyzyskać  $\tau_1$ , przytem pokaże się, czy jeszcze uzbrojenie ciśnione jest potrzebnem.

A zatem dla podwójnego uzbrojenia przyjmujemy  $\tau_1$  dopuszczalne, a szukamy najkorzystniejszego  $\sigma_e$ .

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_e} = \frac{N}{\sigma_e^2} - \frac{M}{d_1 \sigma_e^2} \frac{\sigma_e^2 + 30\tau_1\sigma_e + 150\tau_1^2}{(\sigma_e + 10\tau_1)^2} \dots \dots (297)$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \sigma_e} = - \frac{M}{2d_1(\sigma_e + 10\tau_1)^2} + \frac{3}{4} d_1 b \frac{\tau_1}{(\sigma_e + 15\tau_1)^2} \dots \dots (298)$$

Oba te wyrazy dodajemy, czynimy równe zeru i obliczamy stąd  $\sigma_e$ . Otrzymamy wtedy

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_e + 15\tau_1} = C = \sqrt{\frac{2}{bd_1^2 \tau_1} \left( M - \frac{2}{3} N d_1 \right)} = \sqrt{\frac{2Ne'}{bd_1^2 \tau_1}} \dots \dots (299)$$

a

$$\sigma_e = \frac{C}{1-C} 15\tau_1 \dots \dots \dots (300)$$

przyczem  $e'$  jest odstęp siły  $N$  od punktu  $E$  (rys. 103.) w jednej trzeciej części  $d_1$ . Więc  $\sigma_e$  tylko wtedy jest dodatnie, jeżeli  $e'$  dodatnie, gdy siła  $N$  zaczyna poza średnią trzecią  $d_1$ .

Będzie  $\sigma_e < \sigma_e$  dopuszczalne, jeżeli

$$\frac{C}{1-C} 15 \tau_1 < \sigma_e \text{ dopusz.} \quad . \quad . \quad . \quad (301)$$

Najprzód należy badać wedle nierówn. (301). Jeżeli ta nierówność się sprawdza, to z (300) obliczamy  $\sigma_e$ , a potem z równ. (293) i (294)  $F$  i  $F'$ . W danym wypadku możemy otrzymać  $F$  lub  $F'$  ujemne, gdy przekrój betonowy jest za wielki lub mi-mośród za mały.

Przykład. Na słup działa siła  $28t$  w odstępie  $24 \text{ cm}$  od osi. Przekrój słupa jest prostokątny,  $b=30$ ,  $d=50 \text{ cm}$ , odstęp uzbrojenia od krawę-dzi  $3 \text{ cm}$ ,  $\varepsilon=35$ ,  $\beta=25$ ,  $\tau_1=37 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_e=1000 \text{ kg/cm}^2$ .

Mamy więc  $N = \frac{28000}{2} \text{ kg}$ ,  $M = 28000 \cdot 24 = 672000 \text{ kg/cm}^2$ . Należy wyzna-czyć  $F$  i  $F'$ . Czy opłaci się dawać uzbrojenie podwójne? Przyjmijmy  $r=1$ , to  $1.35 > \frac{15 \cdot 25}{100}$ , więc uzbrojenie podwójne się nie opłaca. Jeżeli ze wzglę-dów ustrojowych mamy uzbrojenie podwójne, to wyzyskujemy  $\tau_1 = 37 \text{ kg/cm}^2$  a szukamy  $\sigma_e$  wedle równ. (299) i (300). Mamy tutaj

$$d_1 = 50 - 3 = 47 \text{ cm}, \quad \frac{d_1}{3} = 15.7 \text{ cm}, \text{ więc}$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{30 \cdot 47^2 \cdot 37} \left( 672000 - \frac{2}{3} \cdot 14000 \cdot 47 \right)} = 0.440,$$

wedle przybliżonego wzoru mamy  $e' = 24 - (25 - 15.7) = 14.7$ , stąd

$$C = \sqrt{\frac{2 \cdot 14000 \cdot 14.7}{30 \cdot 47^2 \cdot 37}} = 0.440,$$

$$\sigma_e = \frac{0.440}{1 - 0.440} 15 \cdot 37 = 436 \text{ kg/cm}^2.$$

Teraz obliczymy przekroje z równ. (292) do (294)

$$\gamma = \frac{436 + 15 \cdot 37}{436 + 10 \cdot 37} = \frac{991}{806} = 1.1,$$

$$F = \frac{672000}{47 \cdot 436} - \frac{14000}{436} = 36.1 - 32.1 = 4.0 \text{ cm}^2,$$

$$F' = \frac{672000}{10 \cdot 47 \cdot 37} 1.1 - \frac{3}{4} 30 \cdot 47 \cdot \frac{37}{436 + 15 \cdot 37} = 40.8 - 39.5 = 1.3 \text{ cm}^2.$$

Uzbrojenie to będzie jednak ze względów ustrojowych *za małe*. Ponieważ najmniejsze uzbrojenie musi być  $\frac{0.8 \cdot 30 \cdot 50}{100} = 12 \text{ cm}^2$ , więc przy-jmiemy może  $F=9 \text{ cm}^2$ ,  $F'=3 \text{ cm}^2$ , przytem natężenia tak w betonie jak i żelazie będą mniejsze.

§ 69. Przekrój ciśniony mimośrodkowo bez uzbrojenia ciśnionego.

Wedle równ. (294)  $F'=0$ , gdy

$$\frac{M}{10 d_1 \tau_1} \cdot \frac{\sigma_e + 15 \tau_1}{\sigma_e + 10 \tau_1} = \frac{3}{4} b d_1 \frac{\tau_1}{\sigma_e + 15 \tau_1}, \quad \dots \quad (302)$$

a stąd  $F' < 0$ , gdy

$$\frac{6M}{b d_1^2 \tau_1} \leq (1-C)(2+C) \quad \dots \quad (303)$$

Jeżeli niema uzbrojenia ciśnionego, to z równ. (302)

$$\frac{(1-C)^2 (2+C)}{C} = \frac{90M}{b d_1^2 \sigma_e} \quad \dots \quad (304)$$

zaś

$$\tau_1 = \frac{1-C}{C} \frac{\sigma_e}{15} \quad \dots \quad (305)$$

Jeżeli  $\tau_1$  przyjmujemy, to obliczyć należy z równ. (305)  $\sigma_e$  i próbować, czy wypełnione równ. (304).

Przykład. Dla poprzedniego przykładu bez uzbrojenia ciśnionego mamy, jak pierwiej  $C=0.44$ . Obliczamy teraz z równ. (300)  $\sigma_e$ ,

$$\sigma_e = \frac{15 \cdot 37 \cdot 0.44}{1-0.44} = 436.$$

Próbujemy teraz, czy równ. (304) jest wypełnione. Mamy wtedy

$$\frac{(1-0.44)^2 (2+0.44)}{0.44} = \frac{90 \cdot 672000}{30.47^2 \cdot 436}$$

$$1.74 < 2.99.$$

Widzimy więc, że prawa strona równania jest za wielka. Przyjmijmy mniejsze  $\tau_1$ . Niech będzie  $\tau_1 = 33 \text{ kg/cm}^2$ , to z równ. (299)

$$C = \sqrt{\frac{2 \cdot 14000 \cdot 14.7}{30.47^2 \cdot 436}} = 0.434,$$

a

$$\sigma_e = \frac{15 \cdot 33 \cdot 0.434}{1-0.434} = 380,$$

Próbujemy, czy równ. (304) jest wypełnione,

$$\frac{(1-0.38)^2 (2+0.38)}{0.38} = \frac{90 \cdot 672000}{30.47^2 \cdot 380},$$

$$1.485 < 2.4.$$

Nierówność jest jeszcze większa, trzeba by więc  $\tau_1$  zwiększyć. Jeżeli to jest niemożliwym, musielibyśmy zatrzymać  $\sigma_e = 436$ , a stąd, jak pierwiej  $F = 4.0 \text{ cm}^2$ . Ze względów konstrukcyjnych jest to za mało, możemy przyjąć

$$F = \frac{0.8 \cdot 30.50}{100} = 9 \text{ cm}^2.$$

§ 70. Przekrój ciśniony mimośrodkowo bez uzbrojenia ciągnionego.

Z wzoru (293) można otrzymać  $F$  ujemne, wtedy przyjmujemy  $F=0$ .

Z równ. (293) otrzymamy wtedy  $\frac{M}{d_1 \sigma_e} \gamma = \frac{N}{\sigma_e}$ , a stąd

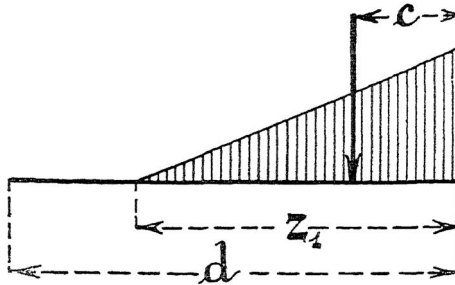
$$e' = C_1 \frac{d_1}{3}, \dots \dots \dots (306)$$

przyczem 
$$e' = e - \frac{2}{3} d_1 = \frac{M}{N} - \frac{2}{3} d_1$$

a 
$$C_1 = \frac{\sigma_e}{\sigma_e + 15 \tau_1} \dots \dots \dots (307)$$

We wzorach tych należy wstawić  $\tau_1$  dopuszczalne.

Jeżeli niema wcale uzbrojenia ciągnionego, to należy najprzód zbadać, czy wogóle uzbrojenie ciśnione jest potrzebnem.



Rys. 104.

Stanie się to wtedy, gdy inaczej ciśnienie betonu byłoby za wielkie. Ciśnienie to obliczymy (rys. 104.) z wzoru

$$\tau_1 = \frac{2N}{3cb} \dots \dots \dots (308)$$

Jeżeli  $\tau_1$  byłoby za wielkiem, to, rozumie się, przyjmujemy  $\tau_1$  dopuszczalne i uzbrojenie ciśnione.

Dla tego wypadku mamy

$$N = \frac{bz_1}{2} \tau_1 + F \sigma_e$$

$$0 = \frac{bz_1}{2} \tau_1 \left( \frac{z_1}{3} - c \right) - F' \sigma_e (c - a)$$

a że

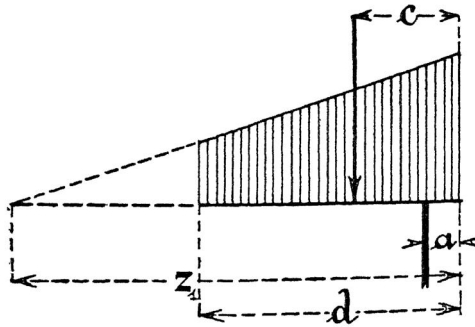
$$\sigma_e' = \frac{z_1 - a}{z_1} 15 \tau_1$$

to

$$F'' = \frac{bz_1^2 \left( \frac{z_1}{3} - c \right)}{30(z_1 - a)(c - a)} = \frac{N - \frac{bz_1}{2} \tau_1}{\sigma_e'} \quad (309)$$

zaś

$$z_1 = \frac{3}{2} a + \sqrt{\frac{9}{4} a^2 + \frac{6N(c-a)}{b\tau_1}} = \frac{3}{2} a + \frac{3 \sqrt{b\tau_1 \left[ a^2 b\tau_1 + \frac{8}{3} N(c-a) \right]}}{2b\tau_1} \quad (310)$$



Rys. 105.

Zwykle wypada  $z_1 > d$  (rys. 105.), wtedy płaszczyzna ciśnienia jest trapezem i otrzymamy

$$\frac{2Nz_1}{\tau_1} = bd(2z_1 - d) + 30 F''(z_1 - a),$$

$$\frac{6Nz_1 c}{\tau_1} = bz^3 - b(z_1 - d)^2 (2d + z_1) + 90 F'' a (z_1 - a),$$

stąd otrzymamy

$$F'' = \frac{bd^2}{60} \frac{2 \frac{N}{\tau_1} (2d - 3a) - bd^2}{bd[d^2 - 3a(d - a)] + 3 \frac{N}{\tau} a(c - a)} \quad (311)$$

Należy jednak przytem zbadać, czy  $\tau$  nie jest za wielkiem z równ.

$$\tau_1 = \frac{2N}{bd^2} (2d - 3c), \quad (312)$$

gdyż w takim razie trzeba by dać uzbrojenie.

Przykład. Na słup działa siła 28 t w odstępnie 15 cm od osi. Przekrój słupa jest prostokątem  $b=30$ ,  $h=50$  cm, odstęp uzbrojenia od krawędzi 3 cm,  $\tau_1=37$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_e=1000$  kg/cm<sup>2</sup>,  $M=28000 \cdot 15=420000$  kgcm,  $d_1=50-3=47$  cm,  $N=\frac{28000}{2}=14000$  kg,  $e'=15-\left(25-\frac{47}{3}\right)=5.7$  cm.

Wedle równ. (299)

$$C=\sqrt{\frac{2 \cdot 14000 \cdot 5.7}{30 \cdot 47^2 \cdot 37}}=0.255, \quad \sigma_e=\frac{0.255}{1-0.255} 15 \cdot 37=190 \text{ kg/cm}^2.$$

Wedle równ. (292)

$$\gamma=\frac{190+15.37}{190+10.37}=1.33,$$

wedle równ. (293)

$$F=\frac{420000}{47 \cdot 190} 1.33-\frac{14000}{190}=626-737=-111.$$

Musimy więc przyjąć  $F=0$ , badamy wedle (308), gdy  $c=25-15=10$ , ciśnienie  $\tau_1=\frac{2 \cdot 28000}{3 \cdot 10 \cdot 30}=64$  kg/cm<sup>2</sup>, więc za wielkie. Potrzeba tu wkładki ciśnionej. Wedle równ. (310) jest

$$z_1=\frac{3}{2} 3+\frac{3 \sqrt{30 \cdot 37[3^2 \cdot 30 \cdot 37+\frac{8}{3} 28000(10-3)]}}{2 \cdot 30 \cdot 37}=4.5+32.8=37.3 \text{ cm}.$$

Tu  $z_1 < d$ , więc wedle równ. (309)  $\sigma_e=\frac{37.3-3}{37.3} 15 \cdot 37=510$  kg/cm<sup>2</sup>, a

$$F'=\frac{28000-\frac{30 \cdot 37 \cdot 3}{2} \cdot 37}{510}=14.2 \text{ cm}^2.$$

Przyjmujemy 5  $\phi$  14 czyli  $F'=14.2$  cm<sup>2</sup>.

## I. Ugięcia i zeszkłady statycznie niewyznaczalne.

### § 71. Zasada obliczenia.

Wiadomo, że gdy jakiś zeszkład jest statycznie niewyznaczalnym i brakuje pewnej ilości równań do wyznaczenia niewiadomych, to brakujące równania uzyskujemy, badając odkształcenie zeszkładu. Sposób podparcia zeszkładu określa pewne warunki podczas odkształcenia, z których otrzymamy te brakujące równania. Nim więc powiemy o układaniu takich równań, zastanowić się musimy przedtem nad wyznaczeniem odkształceń zeszkładów żelbetowych.



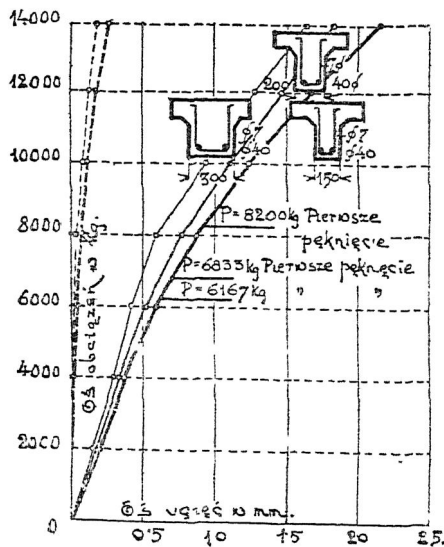
Dla prętów ciśnionych dla nateżeń niewielkich, a więc także dla nateżeń dopuszczalnych, należy odkształcenie liczyć wedle wzoru (313) i (314) dla  $n=10$  a  $E=210000$ .

Przy większem ciśnieniu  $n$  wzrasta, a  $E$  maleje aż do złamania. Dla słupów owijanych po dojściu do granicy ciastowości betonu dalsze odkształcenie zależy tylko od żelaza.

Jednak zazwyczaj chodzi nam o wyznaczenie odkształceń dla nateżeń mało co wyższych od dopuszczalnych, a wtedy zastosować należy równania (313) i (314).

### § 73. Ugięcie belek żelbetowych zginanych.

Rozróżnić tu musimy fazę pierwszą, której odpowiada linia prosta odkształcenia  $ab$  (rys. 106.). Gdy nastąpi pierwsze



Rys. 107.

pęknięcie, linia odkształceń się załamuje (rys. 106.) i jest dalej albo prostą albo też ku górze wypukłą (rys. 107).

Obliczenie w pierwszej fazie jest łatwe według znanych prawideł nauki o sprężystości zapomocą drugiego wieloboku sznurowego, przyczem zamiast  $J$  wstawić należy  $J_b + nJ_c$ . Po pierwszych pęknięciach wogóle dla fazy II i III byłoby za



trudnem obliczenie ugięcia zwłaszcza, że faza II istnieje tylko w niektórych przekrojach, a w innych jeszcze faza I. W obliczeniu należałoby to uwzględnić, co dałoby się zrobić co najwyżej przy wyznaczeniu wykreślnem ugięcia. Należałoby mianowicie przy wyznaczeniu ugięcia uwzględnić moment bezwładności w każdym punkcie w tej fazie, w której się ten przekrój znajduje. Spółczynnik sprężystości przyjmujemy zwykle  $E = E_b$ , Völker i Richter przyjmują  $E = \dot{E}_b + n E_b \frac{F_e}{F_b}$ .

Przykład. Mamy belkę o przekroju prostokątnym, dla której  $b = 29.9 \text{ cm}$ ,  $h = 30.8$ ,  $l = 2.0 \text{ m}$ ,  $F_e = 4.91 \text{ cm}^2$ ,  $d_1 = 28.6 \text{ cm}^4$ . Belka obciążona jest dwoma ciężarami  $P$  w odstępnie  $0.5 \text{ m}$  od podpór. Ciężar belki wynosi  $454 \text{ kg}$ . Dla  $P = 2000 \text{ kg}$  stwierdzono ugięcie  $y' = 0.275 \text{ mm}$ , dla  $P = 1000 \text{ kg}$   $y' = 0.130 \text{ mm}$ . Mamy  $f = 4.91 : 29.9 = 1.64 \text{ cm}$ .

W pierwszej fazie jest dla  $n = 10$

$$z = \frac{30.8^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1.64 \cdot 10}{2(30.8 + 1.64 \cdot 10)} = 10.8 \text{ cm},$$

$$J = \frac{1}{3} 29.9 \cdot (10.8^3 + 17.8^3) + 10.4 \cdot 91 (10.8 - 2.2)^2 = 69080 + 3631 = 72711 \text{ cm}^4.$$

Dla tego obciążenia wynosi strzałka

$$y' = \frac{Pa}{24 \epsilon J} (3l^2 - 4a^2). \text{ Tu } l = 200 \text{ cm}, a = 50 \text{ cm}.$$

$$\text{Więc dla } E = 200000 \text{ kg/cm}^2 \text{ } y' = \frac{P \cdot 50 (3 \cdot 200^2 - 4 \cdot 50^2)}{24 \cdot 200000 \cdot 72711} = 0.00001576 P.$$

Uwzględniając ciężar własny, przyjmiemy

$$P = 1200 \text{ kg}, \text{ więc } y' = 0.0189 \text{ cm} = 0.189 \text{ mm}$$

$$P = 2200 \text{ „ „ } y' = 0.0347 \text{ „ } = 0.347 \text{ „}$$

Przyjmijmy  $n = 15$ , jak w rozporządzeniu rosyjskiem, to

$$z = \frac{30.8^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1.64 \cdot 15}{2(30.8 + 1.64 \cdot 15)} = 9.5 \text{ cm},$$

$$J = \frac{1}{3} 29.9 (9.5^3 + 19.1^3) + 15.4 \cdot 91 (9.5 - 2.2)^2 = 77960 + 3925 = 81885.$$

$$\text{Więc dla } E = 140000, \text{ } y' = \frac{P \cdot 50 (3 \cdot 200^2 - 4 \cdot 50^2)}{24 \cdot 140000 \cdot 81885} = 0.00002 P,$$

$$\text{zatem dla } P = 1200 \text{ kg}, \text{ } y' = 0.024 \text{ cm} = 0.24 \text{ mm}$$

$$\text{„ „ } P = 2200 \text{ „ } y' = 0.044 \text{ „ } = 0.44 \text{ „}$$

Widzimy więc, że rzeczywiste ugięcia były więcej zbliżone do wyników rachunku przy założeniu  $n = 10$ , a wynosiły tylko 79% obliczonych.

Rozumie się, że zwłaszcza po przekroczeniu granicy proporcjonalności ugięcie trwałe jest dość znacznem. Na rys. 106. i 107. widzimy to ugięcie zaznaczone.

<sup>1)</sup> Por. Bach, Versuche mit Eisenbetonbalken. I. Th. belka 1. 10.

Rozporządzenie ministerstwa austriackiego z r. 1911 dla bud. § 12 ust. 5 i 6, dla mostów § 12 ust. 3 i 4.

Ugięcie sprężyste spostrzegane nie powinno przewyższać ugięcia, obliczonego na działanie obciążenia próbnego, więcej, niż 20%. Ugięcie trwałe nie powinno wynosić więcej, niż trzecią część ugięć sprężystych obliczonych. Przy ocenieniu wyników obciążenia należy uwzględnić ewentualny wpływ zmian ciepłoty.

Przy wyznaczaniu sprężystych odkształceń należy przekrój i spółczynnik sprężystości betonu przyjąć wedle § 5 ust. 7 e ( $F=F_b+15F_e$ ,  $E=140000 \text{ kg/cm}^2$  dla ciśnienia i ciągnięcia).

Rozporządzenie ministerstwa rosyjskiego z r. 1911. Instrukcja A. do § 3. i 4. 9) W obliczeniach odkształceń sprężystych i natężeń w ustrojach statycznie niewyznaczalnych należy przyjmować stosunek  $n=15$ , oraz stałe znaczenie spółczynnika sprężystości betonu na ciągnięcie i ciśnienie  $E=140000 \text{ kg/cm}^2$ . W tych zaś wypadkach (p. 8), gdy w obliczeniu na zgięcie jest uwzględnione ciągnięcie betonu należy przyjmować spółczynnik sprężystości betonu na ciśnienie  $E=140000 \text{ kg/cm}^2$  a na ciągnięcie  $E=56000 \text{ kg/cm}^2$ .

### § 74. Dźwigary statycznie niewyznaczalne.

Jak wiadomo<sup>1)</sup>, jeżeli punkty podparcia są stałe w kierunku oddziaływań, to dla nich  $v=0$ , jeżeli końce belki są utwierdzone, to  $\Delta\varphi=0$ , a stąd gdy  $L$  oznacza pracę odkształcenia,  $X$  nieznanne statycznie niewyznaczalne oddziaływania, to

$$\frac{\partial L}{\partial X}=0 \text{ i } \frac{\partial L}{\partial M_0}=0 \dots \dots \dots (316)$$

zatem 
$$\int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dx + \alpha t \int \frac{\partial N}{\partial X} dx = 0 \dots \dots (317)$$

$$\int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial M_0} dx + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M_0} dx + \alpha t \int \frac{\partial N}{\partial M_0} dx = 0 \dots \dots (318)$$

Trzeci wyraz oznacza wpływ zmiany ciepłoty, pierwszy jest zwykle bardzo mały i możemy, licząc w przybliżeniu, go opuścić.

Ilości  $F$  i  $J$  w równ. (317) i (318) są te same, któreśmy poznali przy obliczeniu natężeń,  $F=F_b+nF_e$ ,  $J=J_b+nF_e$ .

Zachodzi teraz pytanie, dla której fazy mamy wyznaczyć  $F$  i  $J$ . Otóż w zwyczajnych wypadkach przy dopuszczalnych natężeniach przeważna część zeskładu znajduje się w fazie pierwszej, a tylko niektóre, a może nawet żaden, w fazie II.

<sup>1)</sup> Por. Podr. Teorii Mostów część I. tom II. str. 131.

Dlatego obliczamy siły zewnętrzne zeskładów statycznie niewyznaczalnych dla założenia fazy pierwszej, a więc przyjmując współdziałanie betonu na ciągnięcie i równe współczynniki sprężystości na ciągnięcie i ciśnienie. Licząc ściśle wedle fazy pierwszej, wypadaloby właściwie przyjąć  $n=10$ . Jednak wpływ uzbrojenia na stosunek momentów bezwładności, o który tu chodzi, jest zazwyczaj tak mały, że rozporządzenie austriackie i inne każą przyjmować takie samo  $n$ , jak dla zginania, więc  $n=15$ .

Niektórzy inżynierowie idą jeszcze dalej, bo przy pierwszym obliczeniu momentów bezwładności w celu wyznaczenia sił zewnętrznych nie uwzględniają wcale uzbrojenia. Ponieważ tu chodzi tylko o stosunek momentów bezwładności i ponieważ na razie dokładne uzbrojenie nie jest jeszcze znanem, więc dla pierwszego przybliżonego obliczenia jest to zupełnie wystarczającym.

Zarzucićby można temu sposobowi obliczenia, że licząc tylko wedle fazy pierwszej, a nie uwzględniając drugiej, nie mamy wyobrażenia o pewności zeskładu. Zarzut ten jest słusznym. Jednak ponieważ niektóre tylko części zeskładu znajdują się w fazie drugiej, a inne w pierwszej, ponieważ ze zmieniającym się obciążeniem coraz inne części zeskładu wchodzi w fazę drugą, uwzględnienie tego przy obliczeniu przedstawia niepokonalne trudności. Aby jednak uwzględnić pewność, o którą nam przedewszystkiem chodzi, obliczamy wprawdzie siły zewnętrzne na podstawie fazy pierwszej, lecz z wyznaczonych w ten sposób momentów i sił poprzecznych obliczamy wedle fazy IIb natężenia, względnie na podstawie ich wyznaczamy wymiary.

W budownictwie żelbetowem mamy do czynienia zwłaszcza z następującymi zeskładami statycznie niewyznaczalnymi:

- a) Dźwigary utwierdzone i belki ramowe;
- b) Belki ciągłe;
- c) Płyty;
- d) Sklepienia.

### § 75. Dźwigary utwierdzone.

Dźwigar utwierdzony (n. *eingespannter Träger*) jest to taki dźwigar, dla którego przy obciążeniu styczne do osi

w miejscach utwierdzenia się nie zmieniają. Belka prosta może być poziomo lub ukośnie utwierdzona<sup>1)</sup>.

Utwierdzenie może być zupełnem (n. *vollkommen*), przy którym styczna do osi w miejscu utwierdzenia wcale się nie zmienia, albo też niezupełnem (n. *unvollkommen*), przy którym styczna do osi zmienia bardzo mało swe nachylenie, a zmiana ta zależna jest od łożysk, sprężystości podpory i belki i obciążenia. Ściśle rzecz biorąc, utwierdzenie zupełne jest niemożliwem, bo zawsze mamy do czynienia z materiałami sprężystymi. Chodzi więc teraz o to, jak uwzględnić w obliczeniach niezupełne utwierdzenie.

Otóż zbadać należy w danym wypadku, jakie utwierdzenie możliwem jest przy danych wymiarach i materiałach i tylko takie niezupełne utwierdzenie możemy przy wyznaczeniu sił zewnętrznych uwzględnić.

Rozporządzenie minist. austr. z r. 1911 brzmi § 5. ust. 2. Przy wyznaczaniu sił zewnętrznych i momentów zgięcia można przyjąć na podporze tylko taką wielkość utwierdzenia, jaką się osiąga w rzeczywistości przy odpowiednim ustroju budowli i bez przekroczenia natężeń dopuszczalnych w odnośnych częściach budowli. Jeżeli dźwigar utwierdzony jest w murze z cegieł zwykłych na zaprawie wapiennej, nie należy dla wyznaczenia momentów dodatnich w środkowej części przesła przyjmować w obliczeniu żadnego utwierdzenia.

Rozporządzenie minist. pruskiego z r. 1907 II. § 14. ust. 4. Przy belkach można uwzględnić w obliczeniu moment utwierdzenia tylko wtedy, gdy ustrój budowli jest tego rodzaju, że zapewnia dowodnie pewne utwierdzenie.

Utwierdzenie możemy osiągnąć przez ciężar muru nad częścią wmurowaną belki albo też przez zakotwienie. Obliczenie natężeń w pierwszym wypadku znane jest ze statyki<sup>2)</sup>. W krótkości przypomnimy tu sposób obliczenia natężeń.

Wyznaczamy najprzód moment utwierdzenia  $M_0$ . Aby utwierdzenie zupełne było możliwe, musi być moment ciężaru muru  $G$  (rys. 108.) ze względu na  $B$  większym, niż  $C_2z$ , więc

$$G \frac{d}{2} > C_2z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (319)$$

jeżeli  $d$  oznacza grubość muru. Ciężar muru, działającego na belkę, obliczamy, nie uwzględniając spójności muru, przyjmując rozdział ciśnienia pod  $45^\circ$  (rys. 109.).

<sup>1)</sup> Por. Podręcznik Teorii Mostów, część I, tom. II., str. 2 i 4.

<sup>2)</sup> Por. Podręcznik Statyki Budowli, str. 439.

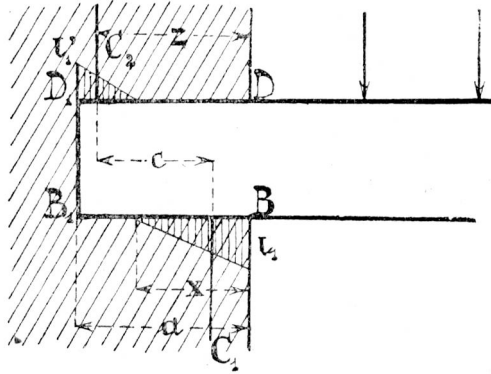
Możemy teraz przyjąć w przybliżeniu

$$M_0 = C_2 c = \frac{2}{3} C_2 a, \quad \text{więc} \quad C_2 = \frac{3 M_0}{2 a} \quad . \quad . \quad (320)$$

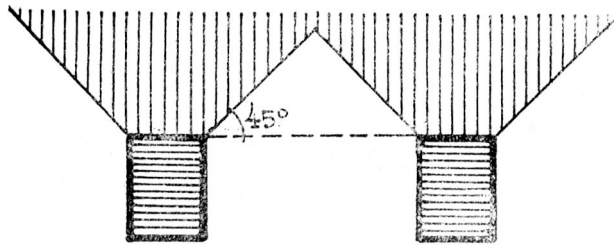
Jeżeli siła poprzeczna w punkcie  $B$  belki jest  $Q$ , to

$$C_1 = C_2 + Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (321)$$

Wyznaczywszy w ten sposób  $C_1$  i  $C_2$ , możemy obliczyć nateżenie, bo  $C_1 = \tau_1 \frac{bx}{2}$ ,  $C_2 = \tau_1' \frac{b(a-x)}{2}$ , więc  $\tau_1 : \tau_1' = x : (a-x)$ .



Rys. 108.



Rys. 109.

Mamy więc  $\tau_1 \frac{bx}{2} = \frac{\tau_1' b(a-x)}{2} + Q$ , albo

$$\frac{\tau_1}{\tau_1'} \frac{x}{a-x} = 1 - \frac{2Q}{b\tau_1'(a-x)} = \frac{x^2}{(a-x)^2}, \quad \text{a stąd}$$

$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = 1 - \frac{2aQ}{3M_0}.$$

Nazwijmy

$$m = \sqrt{1 + \frac{2aQ}{3M_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (321)$$

to mamy

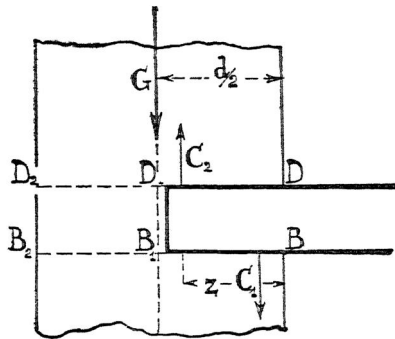
$$x = \frac{am}{1+m}$$

Stąd otrzymamy wreszcie

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{2 C_1}{bx} = \frac{2}{bx} \left( \frac{3 M_0}{2a} + Q \right) \\ \tau_1' &= \frac{2 C_2}{b(a-x)} = \frac{3 M_0}{ab(a-x)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (322)$$

To są jednak tylko natężenia wskutek utwierdzenia belki. Oprócz tego powstają natężenia wskutek siły  $G$  (rys. 110.).

Na przekrój  $BB_2$  działa siła  $G$  i  $C_2$  czyli moment  $C_2 \left( \frac{d}{2} - z \right) = M'$  i siła podłużna  $N' = G - C_2$ .



Rys. 110.

Mamy dalej  $z = x + \frac{2}{3}(a-x) = \frac{x+2a}{3}$ ,

$$M' = \frac{3 M_0}{2a} \left( \frac{d}{2} - \frac{x+2a}{3} \right) = \frac{M_0}{4a} (3d - 4a - 2x) \dots (323)$$

i  $N' = G - \frac{3 M_0}{2a} \dots \dots (324)$

a natężenia włókien skrajnych  $\tau'$  i  $\tau''$  w  $B_2$  i  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{w } B \quad \tau' &= \frac{N'}{bd} - \frac{6 M'}{bd^2} \\ \text{w } B_2 \quad \tau'' &= \frac{N'}{bd} + \frac{6 M'}{bd^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (325)$$

Największe ciśnienie będzie, rozumie się, w  $B$ , mianowicie

$$\tau = \tau_1 + \tau' \dots \dots (326)$$

Przykład. Niechaj będzie  $d = 100 \text{ cm}$ ,  $a = 50 \text{ cm}$ ,  $G = 25000 \text{ kg}$ ,  $M_0 = 600000 \text{ kgcm}$ ,  $Q = 6000 \text{ kg}$ ,  $b = 40 \text{ cm}$ .

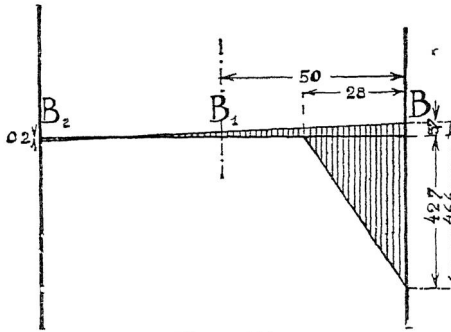
Otrzymamy wtedy z równ. (320)  $C_2 = \frac{3 \cdot 600000}{2 \cdot 50} = 18000 \text{ kg}$ . Z równ. (321)  $e_1 = 18000 + 6000 = 24000 \text{ kg}$ , wedle równ. (321) jest

$$m = \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 50 \cdot 6000}{3 \cdot 600000}} = 1.27, \quad x = \frac{50 \cdot 1.27}{1 + 1.27} = 28.0 \text{ cm.}$$

Przypuścimy, że słup jest betonowy, a podkładek żelaznych niema, to wedle równ. (322)

$$\tau_1 = \frac{2 \cdot 24000}{40 \cdot 28} = 42.9 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau_1' = \frac{2 \cdot 18000}{40(50 - 28)} = 40.9 \text{ kg/cm}^2.$$



Rys. 111.

Dalej mamy  $z = x + \frac{2}{3}(a-x) = \frac{2a+x}{3} = \frac{2 \cdot 50 + 28}{3} = 42.7 \text{ cm}$ .

Wedle równ. (319) jest  $25000 \cdot \frac{100}{2} - 18000 \cdot 42.7 = 481490 \text{ kgcm}$ , więc dodatnie, ciężar obciążający  $G$  jest dostatecznym. Dalej mamy

$$M' = 18000 \cdot \left( \frac{100}{2} - 42.7 \right) = 131400 \text{ kgcm},$$

$$N' = 25000 - 18000 = 7000 \text{ kg}, \text{ więc}$$

$$\tau' = \frac{7000}{40 \cdot 100} - \frac{6 \cdot 131400}{40 \cdot 100^2} = -0.2 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau'' = \frac{7000}{40 \cdot 100} + \frac{6 \cdot 131400}{40 \cdot 100^2} = +3.7 \text{ kg/cm}^2,$$

więc w  $B \tau = 42.9 + 3.7 = 46.6 \text{ kg/cm}^2$ , ciśnienie w  $B_2$   $40.9 - 0.2 = 40.7$ . Jeżeli ciśnienie  $46.6 \text{ kgcm}$  jest za wielkie, to trzeba użyć podkładek żelaznych szerszych.

Towarzystwo inżynierów i architektów w Wiedniu wykonało doświadczenia z belkami utwierdzonymi, których wyniki ogłosił Emperger<sup>1)</sup>. Okazały one, że przy przyczółkach be-

<sup>1)</sup> Por. Mitteilungen über Versuche ausgeführt von Eisenbeton-Ausschuss. Heft 4. Versuche mit eingespannten Balken von Emperger 1913.

tonowych, ceglanych na zaprawie cementowej, a nawet przy przyczółkach na zaprawie wapiennej, jeżeli belki tkwią jednak w bloku betonowym lub w części muru na zaprawie cementowej, liczyć można na zupełne utwierdzenie. Tylko jeżeli belki tkwią w murze na zaprawie wapiennej, nie możemy liczyć na utwierdzenie zupełne.

Dalsza serya doświadczeń obejmowała belki zgrubione przy podporach. Wykazały one, że wzmocnienia te przy podporach zwiększają jeszcze bardziej wytrzymałość i to nie tylko przy belkach utwierdzonych, ale nawet i wolno podpartych. Wzmocnienia te działają poniekąd jako ramy.

### § 76. Belki ramowe.

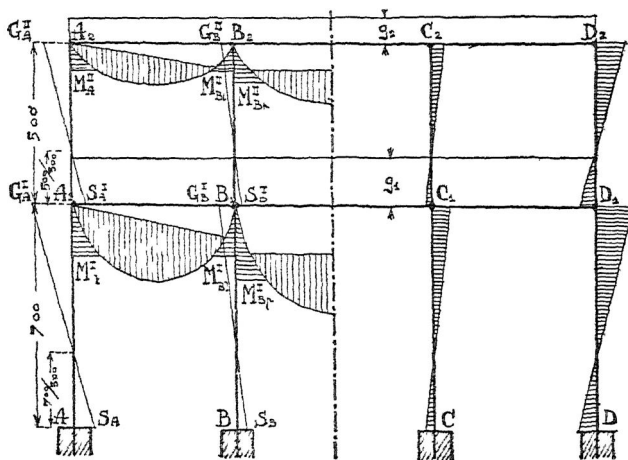
Nie tutaj jest miejsce podawania teorii dźwigarów ramowych. Tu przedstawimy tylko pokrótce, jak wedle rozporządzenia austriackiego można obliczać w przybliżeniu ramy jedno lub kilkopiętrowe.

§ 5. ust. 5. rozporządzenia minist. austr. brzmi: Belki ciągłe, połączone stałe z podporami żelbetowymi jedno lub kilkopiętrowymi (dźwigary ramowe), można obliczać w przybliżeniu dla pionowych obciążeń, o ile nie wykazano sił zewnętrznych i momentów (dokładnie) w myśl ust. 3. i 4. — w następujący sposób: Momenty ujemne należy przyjąć równe momentom tegoż przęsła przy utwierdzeniu zupełnym. Momenty dodatnie należy przyjąć równe momentom tegoż przęsła przy podparciu wolnym, jednak zmniejszone ze względu na momenty podporowe ujemne, powstałe przy temże obciążeniu a utwierdzeniu zupełnym, przyjmując tylko w rachunek dwie trzecie części tych momentów. Dla dodatnich momentów przęsła skrajnych nie należy na podporze skrajnej przyjmować utwierdzenia. Dla wyznaczenia momentów zginających w podporach należy uwzględnić powyżej podane zupełne momenty utwierdzenia przyległych przęsła, zakładając najniekorzystniejsze obciążenie przęsła. Moment stopy podparcia należy przyjąć równy połowie momentu głowicy tejże podparcia, jednak o znaku przeciwnym. Siły poprzeczne i oddziaływanie należy obliczać, jak dla belek ciągłych.

Dla objaśnienia sposobu obliczenia podajemy poniżej przykład (rys. 112.). Tu jednak już zauważymy, że na słupy pośrednie oba sąsiednie przęsła działają w kierunku przeciwnym, że zatem jako moment utwierdzenia słupa należy przyjąć różnicę obu momentów utwierdzenia sąsiednich przęsła. W piętrze najwyższem uwzględnia się, rozumie się, tylko momenty przyle-



głych belek. W piętrach pośrednich uwzględnić należy jednak także momenty stopowe piętra wyższego. Jeżeli obciążenie jest zmiennem, to należy obliczyć największe momenty i siły po-



Rys. 112.

przezne, a więc dla momentów w głowicach słupów należy obciążyć jedno z przyległych przęseł, drugie nie, a w piętrach sąsiednich odwrotnie.

Przykład. Dla obciążenia całkowitego ciężarem  $g_2=8.8t/m$  i  $g_1=1.5t/m$  (rys. 112.) należy obliczyć w przybliżeniu momenty. Belki ciągłe  $A_2D_2$  i  $A_1D_1$  połączone są sztywnie ze słupami. Momenty ujemne liczymy w przypuszczeniu utwierdzenia zupełnego, więc

$$M_{A_1}^{II} = -\frac{1}{12} 0.8.5^2 = -1.67 tm = M_{B_1}^{II}$$

$$M_{B_2}^{II} = -\frac{1}{12} 0.8.6^2 = -2.4 tm.$$

Momenty  $M_C^{II}$  i  $M_D^{II}$  są takie same, jak  $M_B^{II}$  i  $M_A^{II}$ . Dla wyznaczenia dodatnich momentów w przęśle środkowym zmniejszymy o  $\frac{1}{3}$  momenty podporowe, przedtem wyznaczone, i otrzymujemy w ten sposób zamykającą. Najw.  $M_{B_1}^{II} = \frac{1}{8} 0.8.6^2 - \frac{2}{9} 2.4 = 2.0 tm$ . Dla przęśla skrajnego wyznaczamy zamykającą, łącząc  $A_2$  z punktem w wysokości  $\frac{2}{3} M_{B_1}^{II}$ .

Dla wyznaczenia momentów w słupach mamy  $G_{A_1}^{II} = M_{A_1}^{II}$ . Moment w stopie  $S_{A_1}' = -\frac{1}{2} G_{A_1}^{II} = +0.83 tm$ . Podobnie mamy  $G_{B_1}^{II} = M_{B_2}^{II} - M_{B_1}^{II} = -2.4 + 1.67 = 0.73 tm$  a  $S_{B_1}' = \frac{1}{2} 0.73 = 0.365 tm$ .

Na pierwszym piętrze mamy podobnie

$$M_A^I = -\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5^2 = -3 \cdot 12 \text{ tm}, \quad M_{Bp}^{II} = -\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6^2 = -4 \cdot 5 \text{ tm}.$$

Największe momenty dodatnie są dla przęsła średniego

$$\text{najw. } M_{Bz}^I = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6^2 - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 75 - 3 \cdot 0 = 3 \cdot 75 \text{ tm}.$$

Dla przęsła skrajnego wyznaczamy zamykającą łącząc,  $A$ , z punktem w wysokości  $\frac{2}{3} M_{Bz}^I$ .

$$\text{Dalej mamy moment u góry słupa } G_{A'} = M_A^I + S_A^I = -3 \cdot 12 + 0 \cdot 83 = -2 \cdot 29 \text{ tm}, \text{ a } S_{A'} = \frac{1}{2} G_{A'} = 1 \cdot 14 \text{ tm}, \text{ podobnie moment u góry słupa } G_{E'} = -4 \cdot 5 + 3 \cdot 12 + 0 \cdot 365 = -1 \cdot 015 \text{ tm}, \text{ a } S_{E'} = -\frac{1}{2} G_{E'} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 015 = 0 \cdot 51 \text{ tm}.$$

## §. 77. Rama jednoprzęsłowa.

Powyżej podany przybliżony sposób obliczenia nie stosuje się do ram jednoprzęsłowych, które możemy zresztą łatwo obliczyć dokładnie.

Podamy tu w krótkości wzory dla rami jednoprzęsłowej o równo wysokich słupach.

a) Rama prostokątna.

a) Słupy przegibnie podparte.

Dla obciążenia siłą  $P$  (rys. 113.),  
jeżeli nazwiemy

$$\varphi = \frac{J_1}{J_0} \frac{h}{l} \quad \dots \quad (327)$$

to

$$H = \frac{3 P x (l - x)}{2 h l (2 \varphi + 3)} \quad \dots \quad (328)$$

Dla obciążenia pionowego zupełnego ciężarem jednostkowym  $g$

$$H = \frac{g l^2}{4 h (2 \varphi + 3)} \quad \dots \quad (329)$$

Dla obciążenia siłą poziomą  $W$  (rys. 114.)

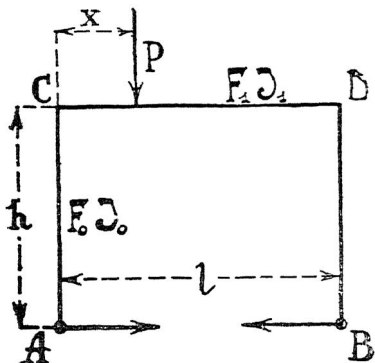
$$H = \frac{\varphi [4 h^3 + y^3 - 3 y h^2] + 6 h^3 - 3 y h^2}{h^3 (2 \varphi + 3)} \cdot \frac{W}{2} \quad \dots \quad (330)$$

Dla obciążenia poziomego zupełnego ciężarem jednostkowym  $w$

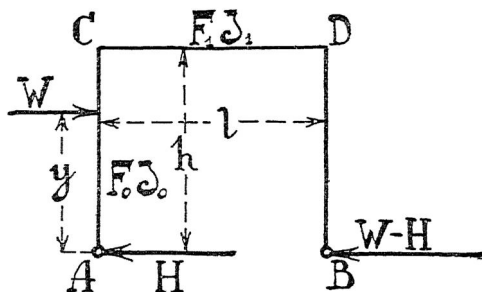
$$H = \frac{11 \varphi + 18}{2 \varphi + 3} \frac{w h}{8}$$

β) Stupy utwierdzone (rys. 115.).

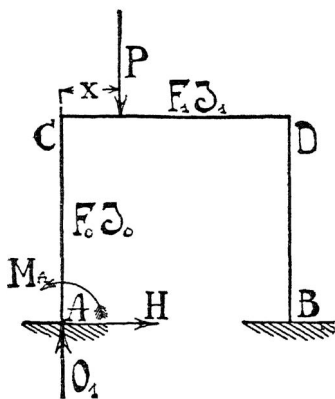
$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{3}{2} \frac{x(l-x)}{hl(2+\varphi)} P \\ M_A &= \frac{Px(l-x)}{2l} \left[ \frac{1}{2+\varphi} - \frac{l-2x}{l(1+6\varphi)} \right] \\ O_1 &= P \frac{l-x}{l} \left[ 1 + \frac{x(l-2x)}{l^2(1+6\varphi)} \right] \end{aligned} \right\} \dots (331)$$



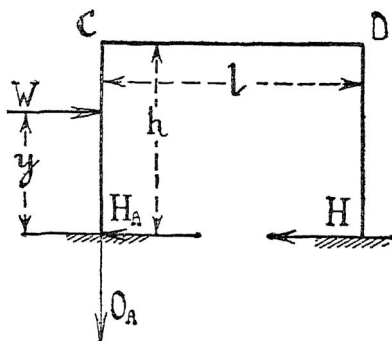
Rys 113



Rys 114



Rys 115



Rys 116

Dla obciążenia zupełnego ciężarem jednostkowym  $g$

$$\left. \begin{aligned} H_g &= \frac{gl^2}{4} \frac{1}{h(2+\varphi)} \end{aligned} \right\} (332)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{Ag} &= \frac{gl^2}{12(2+\varphi)} \\ O_{1g} &= \frac{gl}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (332a)$$

Dla obciążenia siłą poziomą  $W$  (rys. 116)

$$\left. \begin{aligned} H_A &= \frac{Py^2}{2h^2} \left[ 1 + \frac{h-y}{h} \frac{1+2\varphi}{2+\varphi} \right] \\ M_A &= \frac{Py^2}{2h} \left[ 1 - \frac{3\varphi}{1+6\varphi} + \frac{1+\varphi}{2+\varphi} \frac{h-y}{h} \right] \\ O_A &= \frac{3P \cdot y^2 \cdot \varphi}{hl(1+6\varphi)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (333)$$

Dla obciążenia poziomego zupełnego ciężarem jednostajnym

$$\left. \begin{aligned} H_w &= \frac{wh}{8} \cdot \frac{3+2\varphi}{2+\varphi} \\ M_A &= -\frac{wh^2}{24} \left[ 12 - \frac{9+5\varphi}{2+\varphi} - \frac{12\varphi}{1+6\varphi} \right] \\ O_A &= \frac{wh^2 \cdot \varphi}{l(1+6\varphi)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (334)$$

Dla jednoprzęsłowych ram piętrowych podaje Ostenfeld szczegółowe wzory<sup>1)</sup>.

## § 78. Belki ciągłe.

Nie mamy tu zamiaru podawać teorii belki ciągłej, znanej skądinąd<sup>2)</sup>. Jednak przepisy różnych państw co do budowni żelbetowych zawierają rozmaite postanowienia także co do sposobu obliczania belek ciągłych przybliżonego lub dokładnego.

Doświadczenia Mörscha wykazały, że belki żelbetowe ciągle zachowują się tak, jak belki ciągłe jednolite i że można je obliczać wedle teorii dla stałego przekroju, o ile zmienia się tylko przekrój wkładek, a przekrój betonu jest stałym. W razie zmiennego przekroju betonowego belki należy to w obliczeniu uwzględnić.

Jeżeli belki lub płyty ciągłe są stale połączone z filarami względnie belkami, to właściwie należałoby to w rachunku

<sup>1)</sup> Por. Der zweistielige Stockwerksrahmen, Zeit. f. Betonbau, 1914, Nr. 2 i 3.

<sup>2)</sup> Por. Podręcznik Teorii Mostów, część I, tom II.

uwzględnić. Jednak dla belek, względnie płyt ciągłych, możemy nie uwzględniać tego połączenia stałego, przez co liczymy trochę za niekorzystnie.

Utwardzenie płyt stropowych w murach otaczających nie da się zwykle dokładnie wykonać. Nie uwzględnimy więc tego w obliczeniu, a tylko odginamy w pobliżu podpory parę prętów. Inaczej się rzecz ma, jeśli belki połączone są na końcowych podporach stale z filarami żelbetowymi. Wtedy mamy właściwie do czynienia z ramami. W przybliżeniu radzi Mörsch przyjąć moment utwardzenia  $\frac{1}{18} gl^2$ .

Rozporządzenie minist. austr. z r. 1911 § 5. ust. 3 i 4. brzmi:

3. Dźwigary, przechodzące przez kilka przęseł, a leżące wolno na podporach, należy obliczać wedle reguł dla belek ciągłych z uwzględnieniem każdorazowego najniekorzystniejszego obciążenia.

4. Przy obliczaniu dźwigarów, które odpowiednio stale połączone są ze sprężystymi podporami, należy wogóle uwzględnić sprężyste odkształcenia, wynikiem wskutek sił zewnętrznych. Płyty ciągłe belek żebrowych można jednak obliczać bez względu na odkształcenia sprężyste belek jako na nich wolno spoczywające.

Rozporządzenie minist. ros. z r. 1911. Instr. A. do § 1.:

1. W celu ułatwienia obliczenia belek ciągłych wieloprzęsłowych można dokonywać go w przypuszczeniu, że moment pośrodku rozpiętości stanowi 80% momentu belki, leżącej swobodnie na dwu oporach, a moment ujemny na oporach równa się momentowi pośrodku rozpiętości takiejże belki.

Jeżeli jednak obliczenie ma być dokonane jako dla belki ciągłej wieloprzęsłowej, to można przyjmować, że na dane przęsła wpływa prócz jego własnego obciążenia przęseł przyległych po dwa z każdej strony.

W każdym razie należy przyjmować w rachubę możliwą zmianę położenia opór, przyczem wszakże przyjęcie pod uwagę zgięcia belek żelbetowych, stanowiących opory dla wieloprzęsłowych belek i płyt w obliczeniu stropów nie jest koniecznem.

Rozporządzenie minist. pruskiego z r. 1907 § 14.:

3. Przy płytach i belkach wieloprzęsłowych, jeżeli się nie wyznaczy rzeczywicie występujących momentów i oddziaływań liczebnie wedle reguł, ważnych dla belek ciągłych, przyjmując swobodne podparcie na podporach średnich i skrajnych albo też nie wyznaczy się ich doświadczenie, można przyjąć moment zgięcia w środku przęseł równy  $\frac{1}{5}$  momentu dla płyty na dwu oporach swobodnie podpartej. Na oporach należy wtedy przyjąć moment zgięcia tak wielki, jak moment w środku przęsła przy obustronnem swobodnem podparciu. Jako ciągłe mogą być wedle tej reguły obliczane płyty i belki tylko wtedy, gdy wszędzie spoczywają na stałych podstawach, leżących w jednej płaszczyźnie lub też na belkach

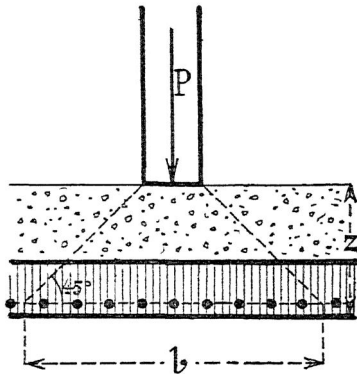
żelbetowych. Przy prowadzeniu wkładek żelaznych należy w każdym razie starannie uwzględnić możliwość występowania momentów ujemnych.

5. Założenia rachunkowego ciągłości nie należy rozszerzać dalej, niż na trzy przęsła. Przy obciążeniu użytkowem większem, niż  $1000 \text{ kg/cm}^2$ , należy obliczenie wykonać także dla obciążenia najniekorzystniejszego.

### § 79. Płyty, spoczywające na dwu krawędziach.

Płyty, podparte na dwu lub więcej krawędziach albo też w nich utwierdzone, obliczamy, o ile są ciągłe, w ten sam sposób, jak belki ciągłe. O tem już pisaliśmy w poprzednim paragrafie.

Chodziłoby tylko w tym wypadku o to, jaką szerokość płyty mamy przyjąć jako współdziałającą w razie, gdy na nią



Rys. 117.

działa ciężar skupiony. Kwestyta nie została jeszcze dostatecznie wyjaśniona doświadczeniami. Zazwyczaj przyjmujemy rozdzielenie się ciśnienia przez nadsypkę pod kątem  $45^\circ$ . Ponieważ płyta żelbetowa rozdziela bardziej ciśnienie od nadsypki, więc jeśli i tu przyjmujemy rozdzielenie się ciśnienia pod kątem  $45^\circ$  aż do osi płyty albo, co lepiej, aż do wkładek żelaznych (rys. 117.), to rachujemy bezpiecznie. Wtedy otrzymamy szerokość, na jaką się rozdziela

ciśnienie na płytę,  $b = 10 + 2z$  . . . . . (335)

Na tak samo wielką długość należałoby przyjąć rozdział ciśnienia w kierunku prostokątnym, a więc siła  $P$  rozdzieliłaby się na kwadrat o boku  $b$ .

Jeżeli mamy bruk, to w równ. (335) zamiast 10 należy przyjąć szerokość kostki  $b_1$ , a  $z$  liczyć od dolnej powierzchni kostki.

Rozporządzenie austr. minist. z r. 1911 § 5. ust. 11. Siły skupione, jeżeli między ich punktem zaczepienia a niosącą płytą żelbetową jest warstwa nadsypki, należy przyjmować jako równo rozdzielone na powierzchni, której wymiary należy w stosunku do płaszczyzny zaczepienia ciężaru przy kształcie jej prostokątnym  $a$ ) przy krzyżujących się

prętach uzbrojenia, przy których stosunek przekrojów odpowiada ustępowi 5<sup>1)</sup> o podwójną wysokość nadsypki i podwójną grubość płyty, b) przy krzyżujących się prętach uzbrojenia, przy których tego stosunku nie ma, w kierunku silniejszej wkładki, dalej przy uzbrojeniu tylko w jednym kierunku co do tego kierunku, jak pod a), w kierunku zaś prostopadłym o podwójną wysokość żwirówki i pojedynczą grubość płyty. Przy płaszczyznach zaczepienia ciężaru innego kształtu, niż prostokątnego, należy co do jej powiększenia analogicznie postępować. Jako statycznie działającą dla niesienia ciężaru szerokość płyty należy przyjąć odpowiednio w powyższy sposób powiększoną szerokość płaszczyzny zaczepienia. Ewentualnego bruku nie należy uwzględniać przy rozdziale ciśnienia.

Rozporządzenie minist. rosyjskiego z r. 1911 Instr. A do § 1. ust. 6). Szerokość części płyty, niosącej ciężar skupiony, oznacza się z wzoru:  $h + \frac{\alpha}{3}$ , gdzie  $h$  oznacza sumę grubości płyty i nadsypki, (bruku, nasypu i t. p.), zaś  $\alpha$  oznacza odległość pomiędzy osiami opór (rozpiętość płyty), tę szerokość bierze się w rachubę przy obliczeniu oporu. Długość płyty, na którą się oddaje ciężar skupiony, należy brać równe  $h$ .

Przykład. Niech będzie  $P=2000\text{ kg}$ , grubość żwirówki  $10\text{ cm}$ , rozpiętość płyty  $1.2\text{ m}$ . Przyjąwszy tymczasowo grubość płyty  $d=10\text{ cm}$ , mamy ciężar własny na  $1\text{ m}$  szerokości  $g=10.24+10.19=430\text{ kg/m}$ . Szerokość, na jaką się rozdziela ciężar  $P$ , będzie  $b=10+2.(10+8)=46\text{ cm}$ . (Wedle rozporządzenia austriackiego  $b=10+2(10+10)=50\text{ cm}$ , wedle rozp. rosyjskiego  $20+\frac{120}{3}=60\text{ cm}$ ). Długość płyty, na którą się rozdziela ciężar  $P$ , będzie również  $46\text{ cm}$  (wedle rozporządzenia austriackiego  $10+2.10+10=40\text{ cm}$ , wedle rosyjskiego  $60\text{ cm}$ ). Będziemy więc liczyć płytę na szerokość  $46\text{ cm}$ , więc  $g = \frac{430 \cdot 0.46}{1000} = 0.198\text{ t/m}$ , zatem  $M = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 1.2 + \frac{1}{8} \cdot 0.198 \cdot 1.2^2$ ,  $M = 0.6 + 0.03564 = 0.63564\text{ tm} = 63564\text{ kgcm}$ . Dla  $\tau_1 = 33\text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_e = 800\text{ kg/cm}^2$  otrzymamy wedle tabl. XVIII str. 63  $d_1 = 0.4263 \sqrt{\frac{63564}{46}} = 15.8\text{ cm}$ . Widzimy, że płyta musi być znacznie grubsza. Przyjmijmy  $d=16\text{ cm}$ , to otrzymamy  $b=10+2(10+14)=58\text{ cm}$ ,  $M = 0.6 + \frac{0.58 \cdot 430}{1000} \cdot 1.2^2 = 0.645\text{ tm} = 64500\text{ kgcm}^2$ . Stąd  $d_1 = 0.4263 \sqrt{\frac{64500}{58}} = 14.2\text{ cm}$ , a  $d=16\text{ cm}$ .

## § 80. Płyty, spoczywające na czterech krawędziach.

Teoria płyty, z czterech stron podparte, w ogóle jest jednym z trudniejszych zadań mechaniki, które tylko w przybliżeniu i dla pewnych założeń da się rozwiązać<sup>2)</sup>. Założenia te

<sup>1)</sup> Ustęp 5. podamy w następnym paragrafie.

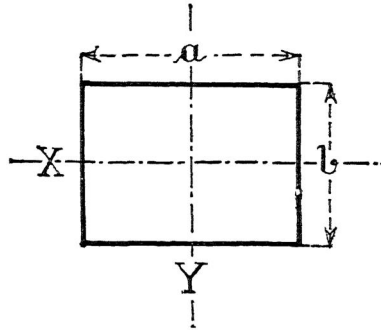
<sup>2)</sup> Por. Huber: Ogólna teoria płyt żelaznobetonowych i ich praktyczne zastosowanie. Czas. Techn. 1914.

są przede wszystkim ważność prawa Hooke'a, dalej, że grubość płyty jest stałą i małą wobec innych wymiarów, że ugięcia płyty są małe w porównaniu do grubości i że wpływ sił poprzecznych jest w stosunku do wpływu momentów małym.

Uwzględniając jeszcze założenia co do kształtu powierzchni ugięcia wedle Lorenza dochodzi Huber do następujących wzorów.

1. Dla obciążenia  $q$  ( $kg/cm^2$ ) rozłożonego jednostajnie na całej powierzchni płyty (rys. 118.).

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{1}{60 \cdot 1} \frac{q}{E_b'} \frac{a^4 b^4}{N}, \\ \text{jeżeli } N &= J_x a^4 + \left[ \frac{1}{m} (J_x + J_y) + 2 \frac{m-1}{m} J' \right] a^2 b^2 + J_y b^4 \end{aligned} \right\} \quad (336)$$



Rys 118.

$$\text{najw. } M_x = \frac{1}{6 \cdot 1} q a^2 \frac{b^2 \left( \frac{1}{m} a^2 + b^2 \right) J_y}{N} \quad \dots \quad (337)$$

$$\text{najw. } M_y = \frac{1}{6 \cdot 1} q b^2 \frac{a^2 \left( a^2 + \frac{1}{m} b^2 \right) J_x}{N} \quad \dots \quad (338)$$

2. Dla obciążenia skupionego  $P$  w środku płyty

$$f = \frac{1}{24 \cdot 35} \frac{P}{E_b'} \frac{a^3 b^3}{IV} \quad \dots \quad (339)$$

$$\text{najw. } M_x = 0 \cdot 405 P \frac{ab \left( \frac{1}{m} a^2 + b^2 \right) J_y}{N} \quad \dots \quad (340)$$

$$\text{najw. } M_y = 0 \cdot 405 P \frac{ab \left( a^2 + \frac{1}{m} b^2 \right) J_x}{N} \quad \dots \quad (341)$$



Dla płyty kwadratowej, uzbrojonej w obu kierunkach jednakowo ( $b=a$ ,  $J_x=J_y=J$ ), upraszczają się te wzory i otrzymujemy:

Dla obciążenia jednostajnie rozłożonego

$$f = \frac{1}{120 \cdot 18} \frac{q a^4}{E_b' J} \frac{1}{1 + \frac{1}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{J'}{J}} \quad . \quad . \quad (342)$$

$$\text{najw. } M = \frac{1}{12 \cdot 2} q a^2 \frac{1}{1 + \frac{m-1}{m+1} \frac{J'}{J}} \quad . \quad . \quad (343)$$

Dla obciążenia ciężarem skupionym  $P$

$$f = \frac{1}{48 \cdot 7} \frac{P a^2}{E_b' J} \frac{1}{1 + \frac{1}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{J'}{J}} \quad . \quad . \quad (344)$$

$$\text{najw. } M = 0 \cdot 2025 P \frac{1}{1 + \frac{m-1}{m+1} \frac{J'}{J}} \quad . \quad . \quad (345)$$

$$\text{Przytem jest} \quad E' = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \quad . \quad . \quad . \quad (346)$$

$$J_x = J_{bx} + 15 J_{ex}, \quad J_y = J_{by} + 15 J_{ey} \quad . \quad . \quad (347)$$

$$J' = J_b + \nu \cdot J_e \quad . \quad . \quad . \quad (348)$$

przyczem  $\nu$  oznacza współczynnik, rosnący wraz ze sztywnością na skrzyżowaniach prętów, a zatem bardzo mały w przypadku ich luźnego skrzyżowania, zaś wszystkie momenty bezwładności liczyć należy na jednostkę szerokości płyty.

Współczynniki  $m$  i  $\nu$  nie są dokładnie znane. Stała Poissona zmienia się od 6 do 10 i więcej<sup>1)</sup>, a więc może w przybliżeniu przyjąćby należało  $m=8$  a  $\nu=0$ .

Przykład. Mamy płytę prostokątną, na czterech krawędziach podpartą, o rozpiętościach w świetle 1·45 i 1·95 cm. Rozpiętość teoretyczną przyjmijmy  $a=15$ ,  $b=2 \cdot 0 m$ . Obciążenie całkowite jednostajne bez ciężaru własnego 4800 kg. Przyjmijmy grubość płyty tymczasowo  $d=10$  cm,  $d_1=8 \cdot 5$  cm. Ciężar własny wynosi  $2 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 3 = 0 \cdot 72 t$ , więc ciężar całkowity  $4800 + 720 = 5520$  kg, albo na  $m^2$

$$q = \frac{5 \cdot 52}{3} = 1 \cdot 84 t/m^2 = 0 \cdot 184 \text{ kg/cm}^2.$$

Dla  $m=8$  i  $\nu=0$  otrzymamy z równ. (338)

$$\text{najw. } M_x = \frac{1}{6 \cdot 1} 0 \cdot 184 \cdot 100^2 \frac{150^2 \left( \frac{1}{8} 100^2 + 150^2 \right) J_y}{N},$$

<sup>1)</sup> Por. autora: Witheys Versuche mit Saulen aus Betoneisen. Öst. Wochen. f. d. off. Band, 1910.

przyczem, jeżeli opuścimy na razie wpływ żelaza na  $J$ ,

$$J_y = \frac{1}{12} 10^3 = 83 \cdot 33 = J_x = J'$$

$$N = 83 \cdot 33 \cdot 150^4 + \left[ \frac{1}{8} (83 \cdot 33 + 83 \cdot 33) + 2 \frac{8-1}{8} 83 \cdot 33 \right] 150^2 \cdot 200^2 + \\ + 83 \cdot 33 \cdot 200^4 = 3254 \cdot 5 \cdot 10^8 \text{ więc}$$

$$\text{najw } M_x = \frac{1}{6 \cdot 1} 0 \cdot 184 \cdot 150^2 \frac{200^2 \left( \frac{1}{8} 150^2 + 200^2 \right) 83 \cdot 33}{3254 \cdot 5 \cdot 10^8} = 297 \cdot 7 \text{ kgcm},$$

$$\text{najw } M_y = \frac{1}{6 \cdot 1} 0 \cdot 184 \cdot 200^2 \frac{150^2 \left( 150^2 + \frac{1}{8} 200^2 \right) 83 \cdot 33}{3254 \cdot 5 \cdot 10^8} = 191 \cdot 1 \text{ kgcm}.$$

Wyznaczymy wedle tych momentów przekroje.

Dla  $\tau_1 = 25 \cdot 4$ ,  $\sigma_e = 806 \text{ kg/cm}^2$  otrzymamy wedle tabl. XVIII.

$$d_1 = 0 \cdot 5242 \sqrt{297 \cdot 7} = 9 \cdot 0 \text{ cm}, \text{ a } F = 0 \cdot 00265 \sqrt{297 \cdot 7} = 0 \cdot 0457 \text{ cm},$$

czyli na 1 m szerokości  $4 \cdot 57 \text{ cm}^2$ . Przyjmiemy 6  $\phi$  10 cm czyli  $F = 4 \cdot 71 \text{ cm}^2$ .

Dla przekroju prostopadłego mamy  $d_1 = 0 \cdot 5242 \sqrt{191 \cdot 1} = 7 \cdot 25 \text{ cm}$ , rzeczywiste  $d_1 = 7 \cdot 5 \text{ cm}$ . Wedle równ. (100) mamy  $d_1 = 7 \cdot 5 = C \sqrt{191 \cdot 1}$ , stąd

$$C = \frac{7 \cdot 5}{\sqrt{191 \cdot 1}} = 0 \cdot 54.$$

Z rys. 45 b widzimy, że  $p' < 0 \cdot 4$ . Przyjmiemy  $p' = 0 \cdot 4$ , to na 1 m

$$F' = \frac{0 \cdot 4}{100} 100 \cdot 7 \cdot 5 = 3 \text{ cm}^2.$$

Przyjmiemy 6  $\phi$  8, więc  $F' = 3 \cdot 01 \text{ cm}^2$ .

Liczmy teraz dokładniej. Najprzód obliczymy momenty bezwładności dla równ. (337) i (338), rozumie się, w fazie I. Widzimy, że potrzeba tu  $d = 11 \text{ cm}$ , więc ciężar własny wynosi  $2 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 11 \cdot 3 = 0 \cdot 792 t$ , zatem ciężar całkowity  $4800 + 792 = 5592 \text{ kg}$  albo na  $m^2$   $q = \frac{5 \cdot 592}{3} = 1 \cdot 864 t/m^2 = 0 \cdot 186 \text{ kg/cm}^2$ .

Dla  $m = 8$  i  $v = 0$  otrzymamy dla przekroju XX. wedle (5)

$$z = \frac{11^2 + 30 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0471}{2(11 + 15 \cdot 0 \cdot 0471)} = 5 \cdot 29 \text{ cm},$$

$$J_x = \frac{1}{3} (5 \cdot 29^3 + 5 \cdot 71^3) + 15 \cdot 0 \cdot 0478 (5 \cdot 29 - 2)^2 = 111 \cdot 4 + 7 \cdot 65 = 119 \cdot 05 \text{ cm}^4$$

$$\text{Dla } YY \ z = \frac{11^2 + 30 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0 \cdot 03}{2(11 + 15 \cdot 0 \cdot 03)} = 5 \cdot 42 \text{ cm},$$

$$J_y = \frac{1}{3} (5 \cdot 42^3 + 5 \cdot 58^3) + 15 \cdot 0 \cdot 03 (5 \cdot 42 - 3 \cdot 5)^2 = 110 \cdot 99 + 1 \cdot 66 = 111 \cdot 65 \text{ cm}^4.$$

$$J' = \frac{110 \cdot 99 + 111 \cdot 4}{2} = 111 \cdot 2 \text{ cm}^4$$

$$N = 119 \cdot 05 \cdot 150^4 + \left[ \frac{1}{8} (119 \cdot 05 + 111 \cdot 65) + 2 \frac{7}{8} 111 \cdot 2 \right] 150^2 \cdot 200^2 + \\ + 111 \cdot 65 \cdot 200^4 = 4400 \cdot 10^8$$

$$\text{najw. } M_x = \frac{1}{6} \cdot 0.186 \cdot 150^2 \cdot \frac{200^2 \left( \frac{1}{8} \cdot 150^2 + 200^2 \right) \cdot 119.05}{4400 \cdot 10^8} = 346.1 \text{ kgcm}$$

$$\text{najw. } M_y = \frac{1}{6} \cdot 0.186 \cdot 200^2 \cdot \frac{150^2 \left( 150^2 + \frac{1}{8} \cdot 200^2 \right) \cdot 111.65}{4400 \cdot 10^8} = 208.5 \text{ kgcm.}$$

Wyznaczymy wedle tych momentów przekroje. Otrzymamy, jak pierwszej,  $d_1 = 0.5242 \sqrt{346.1} = 9.75 \text{ cm}$  a  $F = 0.00265 \sqrt{346.1} = 0.0493$  czyli na 1 m szerokości  $4.93 \text{ cm}^2$ . Przyjmijmy  $8 \text{ }\phi\text{ } 9 \text{ cm}$  czyli  $F = 5.08 \text{ cm}^2$ .

Dla przekroju prostopadłego mamy

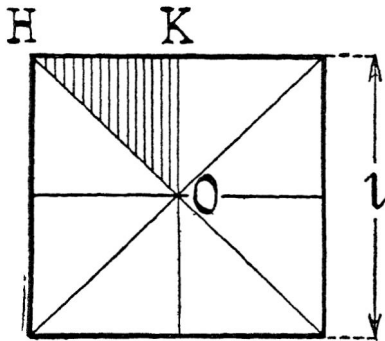
$$d_1 = 0.5242 \sqrt{208.5} = 7.57 \text{ cm.}$$

Jeżeli w rzeczywistości jest  $d_1 = 8.3 \text{ cm}$ , to  $8.3 = C \sqrt{208.5}$  czyli

$$C = \frac{8.3}{\sqrt{208.5}} = 0.575$$

Z rys. 45b widzimy, że  $p' < 0.4$ . Przyjmijmy  $p' = 0.4$ , to na 1 m  $F' = \frac{0.4}{100} \cdot 100 \cdot 8.3 = 3.32 \text{ cm}^2$ . Przyjmijmy  $12 \text{ }\phi\text{ } 6$ , więc  $F' = 3.38 \text{ cm}^2$ .

W przybliżony, jednak dla praktyki dostateczny, sposób stara się tę kwestyę rozstrzygnąć inż. Danusso<sup>1)</sup>. Przyjmuje on zamiast płyty pewną ilość równoległych i równo odległych



Rys. 119.

belek w dwu przecinających się kierunkach i zakłada, że w każdym punkcie przecięcia się tych belek ugięcie obu belek musi być równem. Im więcej belek przyjmuje się, tem bardziej zbliża się ten układ belek do płyty. Danusso uwzględnia przytem utwierdzenie częściowe płyt i ugięcie podpierających belek.

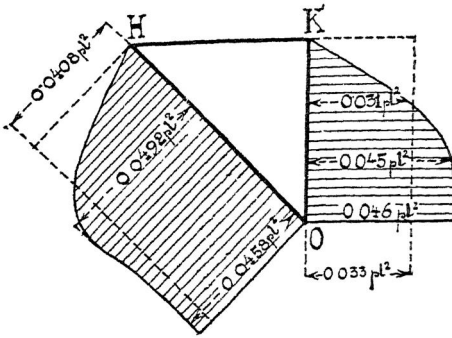
Podamy tu tylko wyniki, do których doszedł Danusso.

Jeżeli podzielimy płytę kwadratową swobodnie podpartą na ośm części (rys. 119.) i osobno wykreślimy jedną ósemkę (rys. 120.) a w przekrojach przez środek O, prostopadłym KO i w kierunku przekątnej HO, wykreślimy rzędne, odpowiadające momentom i wykresujemy powierzchnie, to otrzymamy wedle Danussa

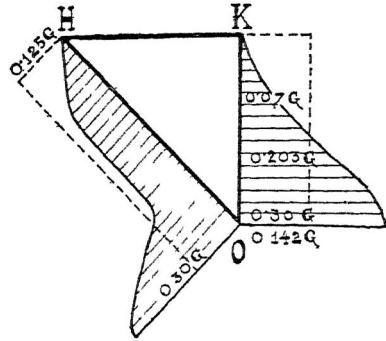
<sup>1)</sup> Beitrag zur Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatte und deren Aufnahmesträger v. Danusso, bearbeitet v. Bronneck, Berlin 1913.

$$\text{średni moment w } KO \quad M_m = \frac{1}{30.5} pl^2 = 0.033 pl^2$$

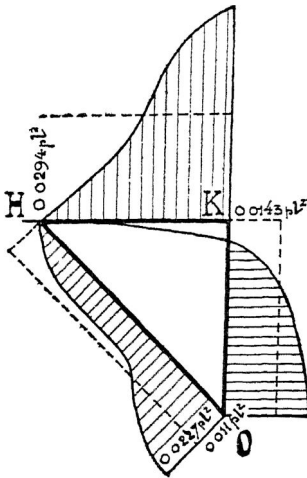
$$\text{" " " } HO \quad M_a = \frac{1}{24.5} pl^2 = 0.0408 pl^2$$



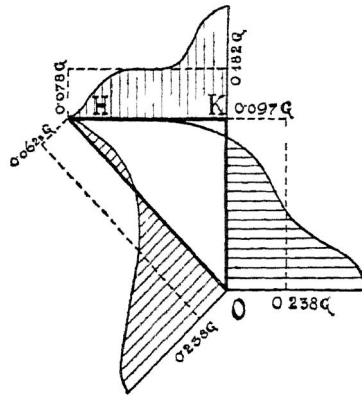
Rys. 120.



Rys. 121.



Rys. 122.



Rys. 123.

Dla obciążenia ciężarem skupionym  $G$  w środku otrzymamy (rys. 121.).

$$\text{średni moment w } KO \quad M_m = \frac{1}{7} G = 0.142 G$$

$$\text{" " " } HO \quad M_a = \frac{1}{8} G = 0.125 G$$

Jeżeli płyta kwadratowa jest utwierdzoną, to dla obciążenia jednostajnego mamy (rys. 122.):

$$\text{średni moment w } KO \quad M_m = \frac{1}{70} pl^2 = 0.0143 pl^2$$

$$\text{" " " } HO \quad M_a = \frac{1}{91} pl^2 = 0.011 pl^2$$

$$\text{" " " } HK \quad M_1 = -\frac{1}{34} pl^2 = -0.0294 pl^2$$

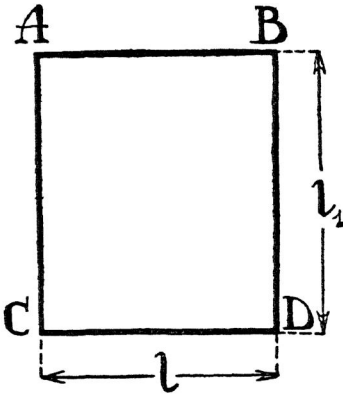
Dla obciążenia ciężarem skupionym  $G$  w środku płyty otrzymamy (rys. 123.).

$$\text{średni moment w } KO \quad M_m = \frac{1}{10} G = 0.097 G$$

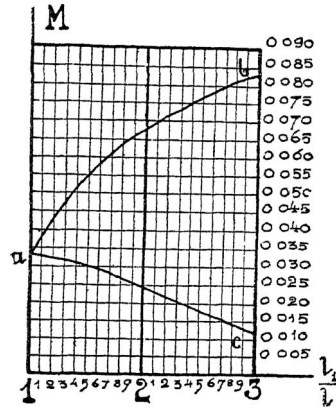
$$\text{" " " } HO \quad M_1 = \frac{1}{16} G = 0.0625 G$$

$$\text{" " " } HK \quad M_1 = -\frac{1}{13} G = -0.078 G$$

Chodziłoby teraz o to, czy mamy obliczać wymiary wedle momentu średniego czy największego. Rozumie się, że grubość



Rys. 124.



Rys. 125

płyty będzie stała, chodziłoby więc o to, czy uzbrojenie ma być jednostajnym czy zmiennym. Zmienny odstęp prętów nie byłby jednak wskazanym w przekroju środkowym, bo wtedy w przekątni przekrój byłby za słaby. Zazwyczaj przyjmujemy więc nie tylko grubość płyty stałą, ale i uzbrojenie stałe, chyba uwzględniamy osobno momenty ujemne. Liczymy płyty wedle momentu średniego, wtedy wprawdzie w środku natężenia będą

większe, ale ze względu, że powstaje też równo wielkie natężenie prostopadłe, jest to dopuszczalnym.

Dla płyt prostokątnych (rys. 124.) podaje Danusso wykresy (rys. 125.). Dla przekroju równoległego do  $AC$ , a więc dla rozpiętości  $l$ , krzywa  $ab$  podaje momenty dla rozmaitych stosunków  $\frac{l_1}{l}$ , więc dla

$$l_1 = l, \quad M = 0.033 pl^2$$

$$l_1 = 3l, \quad M = 0.083 pl^2,$$

gdzie  $p$  oznacza obciążenie na jednostkę kwadratową.

Dla przekrojów równoległych do  $AB$ , a więc dla rozpiętości  $l_1$ , daje nam momenty krzywa  $ac$  z czynnikiem  $p\lambda^2$ , gdy  $\lambda = \frac{l+l_1}{2}$ . I tak dla

$$l_1 = l, \quad M = 0.033 p\lambda^2$$

$$l_1 = 3l, \quad M = 0.012 p\lambda^2.$$

Przykład. Zróbmy ten sam przykład wedle Danussa. Dla przekroju równoległego do  $AB$ , więc dla rozpiętości  $l_1 = 2m$ , otrzymamy dla

$$\frac{l_1}{l} = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3} = 1.33, \quad \lambda = \frac{1.5+2}{2} = 1.75 \text{ cm},$$

$$M = 0.0312 \cdot 1.864 \cdot 1.75^2 = 0.178 \text{ tm}.$$

Dla przekroju równoległego do  $AC$ , więc dla rozpiętości  $l = 1.5 \text{ cm}$ ,

$$M = 0.0475 \cdot 1.864 \cdot 1.5^2 = 0.199 \text{ tm}.$$

Licząc na  $1 \text{ cm}$  szerokości, w pierwszym wypadku  $M = 178 \text{ kgcm}$ , w drugim  $M = 199 \text{ kgcm}$ , a więc mniej, niż wedle teorii Hubera.

Rozporządzenie minist. austriackiego § 5. brzmi:

6. Płyty prostokątne, naokoło swobodnie podparte lub utwierdzone, z długościami boków (rozpiętościami)  $a$  i  $b$  i krzyżującymi się wkładkami należy w następujący sposób obliczać: Ciężary, działające na płytę, należy przyjąć jako działające na dwie płyty, każda tylko z dwu stron podparta (swobodnie lub utwierdzona), jedna płyta o rozpiętości  $a$ , druga o rozpiętości  $b$ , a to w ten sposób, że na pierwszą wypadają tylko w stosunku  $\frac{b^2}{ka^2 + b^2}$  a na drugą tylko w stosunku  $\frac{ka^2}{ka^2 + b^2}$  zmniejszone ciężary przy zresztą takim samym zestawieniu; przytem oznacza  $k$  stosunek powierzchni przekroju prętów żelaznych równoległych do  $a$ , obie powierzchnie na metr bieżący. Stosownie do tego rozdziału obciążenia należy wyznaczyć siły poprzeczne, oddziaływania i momenty zgięcia. Powyższy sposób obliczenia jest niedopuszczalnym, jeżeli jedna rozpiętość  $b$  wynosi więcej, niż półtora razy drugiej rozpiętości  $a$ , albo gdy powierzchnia przekroju jednego szeregu prętów wynosi mniej, niż 30% przekroju drugiego szeregu prętów żelaznych. W tych wypadkach należy płytę prostokątną obliczać tylko dla mniejszej z obu rozpiętości. Przy płytach ciągłych

z krzyżującymi się wkładkami żelaznymi należy co do obliczenia postępować analogicznie. Przy tego rodzaju płytach ciągłych lub utwierdzonych nie można jednak przyjmować dodatnich momentów w środku przęseł mniejszych, niż dwie trzecie odpowiednich momentów dodatnich dla swobodnie podpartej jednoprzęsłowej płyty.

Rozporządzenie minist. rosyjskiego z r. 1911. Instrukcyja A. do §. 1. ust. 5. Jeżeli w obliczeniu płyt, leżących na oporach całym swym obwodem i posiadających uzbrojenie w dwóch kierunkach, określa się momenty zginające jak dla belek, wspartych tylko dwoma końcami, to można zmniejszyć moment, wyliczony dla mniejszej rozpiętości, mnożąc przez współczynnik  $\frac{1}{1+\alpha^4}$ , gdzie  $\alpha$  oznacza stosunek mniejszej rozpiętości płyty do większej.

Rozporządzenie minist. pruskiego z r. 1907 § 14. ustęp 7. Naokół swobodnie podparte, uzbrojone krzyżującymi się prętami żelaznymi płyty można obliczać przy obciążeniu jednostajnie rozłożonem, jeżeli ich długość  $a$  wynosi mniej, niż półtora razy ich szerokości  $b$  wedle wzoru  $M = \frac{pb^2}{12}$ . Przeciw momentom ujemnym na podporach należy odpowiednie zarządzenia poczynić kształtem i położeniem prętów żelaznych.

8. Grubość płyt i części płytowych belek teowych obliczoną należy przyjąć wszędzie najmniej 8cm.

Przykład. Dla naszego przykładu otrzymalibyśmy wedle rozporządzenia austriackiego

$$k = \frac{5.08}{3.38} = 1.5, \quad \alpha = \frac{1.5+2}{2} = 1.75,$$

więc na szerokość 1 m

$$\text{dla rozpiętości } 1.5 \text{ m } M = \frac{1}{8} \frac{2.0}{1.5+2.0^2} 1.864 \cdot 1.5^2 = 0.381 \text{ tm}$$

$$\text{„ „ } 2.0 \text{ m } M = \frac{1}{8} \frac{1.5 \cdot 1.5^2}{1.5 \cdot 1.5^2 + 2^2} 1.864 \cdot 2^2 = 0.427 \text{ tm}$$

a więc momenty znacznie większe, niż dla obliczenia dokładnego.

Wedle rozporządzenia rosyjskiego otrzymamy

$$\alpha = \frac{1.5}{2} = 0.75, \quad \text{więc } M = \frac{1}{8} \frac{1}{1+0.75^4} 1.864 \cdot 1.5^2 = 0.398 \text{ tm}$$

a wedle rozporządzenia pruskiego

$$M = \frac{1}{12} 1.864 \cdot 1.5^2 = 0.350 \text{ tm.}$$

Widzimy, że wszystkie te momenty są większe, niż wedle obliczenia dokładnego.

## § 81. Sklepienia.

Obliczenie sił zewnętrznych sklepień należy do statyki budowli i budowy mostów. Wyznaczenie nateżeń i wymiarów następuje tak, jak dla słupów mimośrodkowo obciążonych<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Por. § 55 i następne.

Tu więc niewiele mamy do dodania do tego, co już jest znanem.

Przekrój sklepień może być prostokątnym albo teowym. Zazwyczaj uzbrojenie jest obustronne, bo moment zwykle może zmieniać znak. W układzie Melana mamy wkładki tęgie, umieszczone w pewnym stałym odstępie.

Dla przekroju prostokątnego, a nawet i dla teowego, nie potrzeba obliczać natężeń na ciągnięcie, bo ze względu na siłę podłużną sklepienia są w korzystniejszym położeniu, niż belki proste, i ciągnięcia są zawsze mniejsze od dopuszczalnych.

Dla obliczenia sił zewnętrznych uwzględnić należy odkształcenie, a to zrobić możemy tylko dla fazy I. Dla tej więc fazy należy wstawiać momenty bezwładności. Znając już siły zewnętrzne, momenty, siły podłużne i poprzeczne obliczamy w poszczególnych przekrojach natężenia i to znów wedle fazy I. Jeżeli jednak ciągnięcia z tego obliczenia wypadają znaczne, gdy zbliżają się do granicy wytrzymałości, to w tych przekrojach obliczamy natężenia wedle fazy II b.

Przy obliczeniu sklepień bezprzegubowych i dwuprzegubowych musimy uwzględnić także zmiany ciepłoty. Spółczynnik rozszerzalności betonu jest  $\alpha = 0.000012$ , a różnica ciepłoty sklepienia wynosi mniej, niż różnice ciepłoty powietrza. Zależy ona od grubości sklepienia i od tego, czy sklepienie jest nakryte nadsypką. Średnio możemy przyjąć  $\pm 15^{\circ}\text{C}$ . Jeżeli grubość sklepienia jest większa, niż  $70\text{ cm}$ , a nadsypka wynosi, co najmniej,  $70\text{ cm}$ , to wystarczy przyjąć różnicę ciepłoty  $\pm 10^{\circ}\text{C}$ .

Rozporządzenie minist. austr. z r. 1911 § 4. dla budownictwa. *Wahania się ciepłoty.* Wahania się ciepłoty, o ile wywołują natężenia, należy, wyjąwszy wypadki wyjątkowe, jak suszarnie, chłodnie itd. — uwzględniać tylko wtedy, jeżeli dźwigar jest wystawiony na zmianę ciepłoty powietrza zewnętrznego; przytem należy przyjąć zmianę jego ciepłoty  $\pm 15^{\circ}\text{C}$  w porównaniu ze stanem bez natężenia i współczynnik rozszerzalności betonu  $\alpha = 0.000012$  na  $1^{\circ}\text{C}$ . W wypadkach wyjątkowych, poprzednio wspomnianych należy przyjąć odnośne największe różnice ciepłoty od średniej ciepłoty  $+10^{\circ}\text{C}$ .

§ 4. ustęp 3 dla mostów. Wahania się ciepłoty należy uwzględnić, o ile wywołują natężenie dla zmian ciepłoty dźwigara  $\pm 15^{\circ}\text{C}$  w porównaniu ze stanem bez natężenia i współczynnik rozszerzalności betonu  $\alpha = 0.000012$  na  $1^{\circ}\text{C}$ . Przy dźwigarach, u których najmniejsza grubość betonu wynosi więcej, niż  $70\text{ cm}$ , albo które zasypane są całkowicie ziemią,



żwirem lub innym materiałem na średnią wysokość najmn. 70 *cm*, można powyższe granice ciepłoty zmniejszyć na  $\pm 10^{\circ}\text{C}$ .

Rozporządzenie minist. rosyjskiego z r. 1911. Instr. A. do § 1. ust. 1. Spółczynnik liniowy rozszerzalności betonu dla zmian ciepłoty przyjmować należy 0.0000135 na  $1^{\circ}\text{C}$ .

III. § 5. Prócz natężeń, wywołanych przez obciążenie, w obliczeniu należy przyjąć pod uwagę natężenia dodatkowe, powstające przy zmianach ciepłoty, o ile nie są one usunięte przez zastosowanie odpowiednich środków.



## K. Dodatek.

### I. Tablica dla żelaza okrągłego (średnica w mm).

(Żelazo zlewno: ciężar gat. 7·85).

Średnica mm	Ciężar kg/m	Obwód cm	Przekrój cm <sup>2</sup>	Powierzchnia przekroju prętów w cm <sup>2</sup>									
				2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0·006	0·31	0·008	0·016	0·024	0·031	0·039	0·047	0·055	0·063	0·071	0·079	
2	0·024	0·63	0·031	0·063	0·094	0·128	0·157	0·188	0·222	0·25	0·28	0·31	
3	0·055	0·94	0·07	0·14	0·21	0·28	0·35	0·42	0·49	0·56	0·63	0·71	
4	0·098	1·26	0·13	0·25	0·38	0·50	0·63	0·76	0·88	1·00	1·13	1·21	
5	0·154	1·57	0·20	0·39	0·59	0·78	0·98	1·18	1·37	1·57	1·77	1·96	
6	0·222	1·88	0·28	0·56	0·85	1·13	1·41	1·70	1·98	2·26	2·54	2·83	
7	0·302	2·20	0·38	0·77	1·15	1·54	1·92	2·31	2·69	3·08	3·46	3·85	
8	0·395	2·51	0·50	1·00	1·51	2·01	2·51	3·01	3·52	4·02	4·52	5·03	
9	0·499	2·83	0·64	1·27	1·91	2·54	3·18	3·82	4·45	5·09	5·73	6·36	
10	0·616	3·14	0·79	1·57	2·36	3·14	3·93	4·71	5·50	6·28	7·07	7·85	
11	0·746	3·46	0·95	1·90	2·85	3·80	4·75	5·70	6·65	7·60	8·55	9·50	
12	0·888	3·77	1·13	2·26	3·39	4·52	5·65	6·79	7·91	9·05	10·18	11·31	
13	1·042	4·08	1·33	2·65	3·98	5·31	6·64	7·96	9·29	10·62	11·95	13·27	
14	1·208	4·40	1·54	3·08	4·62	6·16	7·70	9·24	10·77	12·32	13·86	15·39	
15	1·387	4·71	1·77	3·53	5·30	7·07	8·84	10·60	12·37	14·14	15·91	17·67	
16	1·578	5·03	2·01	4·02	6·03	8·04	10·05	12·06	14·07	16·08	18·09	20·11	
17	1·782	5·34	2·27	4·54	6·81	9·08	11·35	13·62	15·89	18·16	20·43	22·70	
18	1·998	5·65	2·54	5·09	7·63	10·18	12·72	15·26	17·81	20·36	22·90	25·45	
19	2·226	5·97	2·84	5·67	8·51	11·34	14·18	17·02	19·85	22·68	25·52	28·35	
20	2·466	6·28	3·14	6·28	9·42	12·57	15·71	18·84	21·99	25·14	28·28	31·42	
21	2·714	6·60	3·46	6·93	10·39	13·85	17·32	20·78	24·24	27·70	31·17	34·64	
22	2·984	6·91	3·80	7·60	11·40	15·21	19·01	22·81	26·61	30·41	34·21	38·01	
23	3·261	7·23	4·15	8·31	12·46	16·62	20·77	24·93	29·08	33·24	37·40	41·55	
24	3·551	7·54	4·52	9·05	13·57	18·10	22·62	27·14	31·67	36·19	40·71	45·24	
25	3·853	7·85	4·91	9·82	14·73	19·63	24·54	29·45	34·36	39·27	44·18	49·09	

Tablica I. (ciąg dalszy).

Średnica mm	Ciężar kg/m	Obwód cm	Przekrój cm <sup>2</sup>	Powierzchnia przekroju prętów w cm <sup>2</sup>									
				2	3	4	5	6	7	8	9	10	
26	4·168	8·17	5·31	10·62	15·93	21·24	26·55	31·86	37·17	42·47	47·78	53·09	
27	4·495	8·48	5·73	11·45	17·18	22·90	28·63	34·35	40·08	45·80	51·53	57·26	
28	4·834	8·80	6·16	12·31	18·47	24·63	30·79	36·94	43·10	49·26	55·42	61·58	
29	5·186	9·11	6·61	13·21	19·81	26·42	33·02	39·62	46·23	52·84	59·44	66·05	
30	5·549	9·42	7·07	14·14	21·21	28·27	35·34	42·41	49·48	56·55	63·62	70·69	
31	5·925	9·74	7·55	15·09	22·64	30·19	37·74	45·29	52·83	60·38	67·93	75·48	
32	6·313	10·05	8·04	16·08	24·13	32·17	40·21	48·26	56·30	64·34	72·38	80·42	
33	6·714	10·37	8·55	17·11	25·66	34·21	42·76	51·32	59·87	68·42	76·97	85·53	
34	7·127	10·68	9·08	18·16	27·24	36·42	45·40	54·48	63·56	72·63	81·71	90·79	
35	7·553	11·00	9·62	19·24	28·86	38·48	48·41	57·73	67·34	76·97	86·59	96·21	
36	7·990	11·31	10·18	20·36	30·54	40·72	50·90	61·07	71·26	81·43	91·64	101·70	
37	8·440	11·62	10·75	21·50	32·26	43·01	53·76	64·51	75·27	86·02	96·77	107·52	
38	8·903	11·94	11·34	22·68	34·02	45·36	56·70	68·04	79·38	90·73	102·07	113·41	
39	9·378	12·25	11·95	23·89	35·84	47·78	59·73	71·68	83·62	95·57	107·51	119·46	
40	9·865	12·57	12·57	25·13	37·70	50·26	62·83	75·40	87·96	100·53	113·09	125·66	
41	10·364	12·88	13·20	26·41	39·61	52·81	66·01	79·22	92·42	105·62	118·82	132·03	
42	10·876	13·19	13·85	27·71	41·56	55·42	69·27	83·12	96·98	110·83	124·68	138·54	
43	11·400	13·51	14·52	29·04	43·56	58·09	72·61	87·13	101·65	116·18	130·70	145·22	
44	11·936	13·82	15·21	30·41	45·61	60·82	76·03	91·23	106·43	121·64	136·84	152·05	
45	12·485	14·14	15·90	31·81	47·71	63·62	79·52	95·42	111·33	127·23	143·13	159·04	
46	13·046	14·45	16·62	33·24	49·86	66·48	83·10	99·71	116·34	132·94	149·57	166·19	
47	13·619	14·77	17·35	34·70	52·05	69·40	86·75	104·10	121·45	138·79	156·14	173·49	
48	14·205	15·08	18·10	36·19	54·29	72·38	90·48	108·58	126·67	144·77	162·86	180·57	
49	14·803	15·39	18·86	37·71	56·57	75·43	94·28	113·14	132·00	150·86	169·72	188·57	
50	15·414	15·71	19·64	39·27	58·90	78·54	98·17	117·81	137·44	157·08	176·71	196·35	

II. Tablica dla  $\frac{15 d^3 \pi}{4}$  w  $cm^3$  (średnica w  $mm$ ).

d mm	I l o ś ć   p r e ę t ó w									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0·118	0·236	0·353	0·471	0·589	0·707	0·825	0·942	1·060	1·178
2	0·471	0·943	1·414	1·885	2·357	2·828	3·299	3·770	4·242	4·713
3	1·06	2·12	3·18	4·24	5·30	6·36	7·42	8·48	9·54	10·60
4	1·88	3·77	5·66	7·54	9·43	11·31	13·20	15·08	16·97	18·85
5	2·95	5·89	8·84	11·78	14·73	17·67	20·62	23·56	26·51	29·45
6	4·24	8·48	12·72	16·96	21·21	25·45	29·69	33·93	38·17	42·41
7	5·77	11·15	17·32	23·09	28·86	34·64	40·41	46·18	51·95	57·73
8	7·54	15·08	22·62	30·16	37·70	45·24	52·78	60·32	67·86	75·40
9	9·54	19·09	28·63	38·17	47·71	57·26	66·80	76·34	85·88	95·43
10	11·78	23·56	35·34	47·12	58·91	70·69	82·47	94·25	106·03	117·81
11	14·25	28·51	42·76	57·02	71·27	85·53	99·78	114·04	128·29	142·55
12	16·96	33·93	50·89	67·86	84·82	101·79	118·75	135·72	152·68	169·65
13	19·81	39·62	59·43	79·24	99·05	118·86	138·67	158·48	178·29	198·10
14	23·09	46·18	69·27	92·36	115·45	138·54	161·63	184·72	207·8	230·9
15	26·51	53·02	79·53	106·03	132·53	159·04	185·55	212·1	238·6	265·1
16	30·16	60·32	90·48	120·64	150·80	180·96	211·1	241·3	271·4	301·6
17	34·05	68·10	102·15	136·20	170·24	204·3	238·3	272·4	306·4	340·5
18	38·17	76·34	114·51	152·68	190·85	229·0	267·2	305·4	343·5	381·7
19	42·53	85·06	127·59	170·12	212·6	255·2	297·7	340·2	382·8	425·3
20	47·12	94·24	141·36	188·48	235·6	282·7	329·8	377·0	424·1	471·2
21	51·95	103·91	155·86	207·8	259·8	311·7	363·7	415·7	467·6	519·5
22	57·02	114·04	171·06	228·1	285·1	342·1	399·1	456·2	513·2	570·2
23	62·32	124·64	186·96	249·3	311·6	373·9	436·2	498·6	560·9	623·2
24	67·86	135·72	203·6	271·4	339·3	407·1	475·0	542·9	610·9	678·6
25	73·63	147·26	220·9	294·5	368·2	441·8	515·4	589·0	662·7	736·3

Tablica II. (ciąg dalszy).

<i>d</i> <i>mm</i>	I l o ś ć   p r e ę t ó w									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
26	79·64	159·28	238·9	318·6	398·2	477·8	557·5	637·0	716·8	796·4
27	85·88	171·77	257·6	343·5	429·4	515·3	601·2	687·0	772·9	858·8
28	92·36	184·73	277·1	369·4	461·8	554·2	646·5	738·9	831·2	923·6
29	99·08	198·16	297·2	396·3	495·4	594·5	693·5	792·6	891·7	990·8
30	106·03	212·1	318·1	424·1	530·1	636·2	742·2	848·2	954·3	1060·3
31	113·22	226·4	339·7	452·9	566·1	679·3	792·5	905·7	1019·0	1132·2
32	120·64	241·3	361·9	482·5	603·2	723·8	844·5	965·1	1085·7	1206·4
33	128·29	256·6	384·9	513·3	641·5	769·8	898·1	1026·4	1154·6	1282·9
34	136·19	272·4	408·6	544·8	680·9	817·1	953·5	1089·5	1225·7	1361·9
35	144·32	288·6	433·0	577·3	721·6	865·9	1010·2	1154·4	1298·9	1443·2
36	152·67	305·3	458·0	610·7	763·4	916·0	1068·7	1221·3	1374·0	1526·7
37	161·28	322·6	483·8	645·1	806·4	967·7	1129·0	1290·2	1451·5	1612·8
38	170·12	340·4	510·4	680·5	850·6	1020·7	1190·8	1360·9	1531·1	1701·2
39	179·19	358·4	537·6	716·8	895·9	1075·1	1254·3	1433·5	1612·7	1791·9
40	188·50	377·0	565·5	754·0	942·5	1131·0	1319·5	1508·0	1696·5	1885·0
41	198·04	396·1	594·1	792·1	990·2	1188·2	1386·3	1584·3	1782·3	1980·4
42	207·8	415·6	623·4	831·3	1039·1	1246·9	1454·7	1662·5	1870·3	2078
43	217·8	435·6	653·4	871·2	1089·0	1306·8	1524·7	1742·6	1960·4	2178
44	228·1	456·2	684·2	912·3	1140·4	1368·5	1596·5	1824·6	2053	2281
45	238·6	477·1	715·7	954·2	1192·3	1431·4	1669·9	1908·6	2147	2386
46	249·3	498·6	747·9	997·1	1246·4	1495·7	1745·0	1994·3	2244	2493
47	260·2	520·4	780·7	1041·0	1301·2	1561·4	1821·7	2082	2342	2602
48	271·4	542·9	814·2	1085·7	1357·2	1628·6	1900·0	2171	2443	2714
49	282·9	565·7	848·6	1131·4	1414·3	1697·2	1980·0	2263	2546	2829
50	294·5	589·1	883·6	1178·1	1472·6	1767·2	2062	2366	2651	2945

### III. Tablica dla żelaza okrągłego (średnica w calach).

Średnica		Ciężar kg/m	Obwód cm	Prze- krój cm <sup>2</sup>	Powierzchnia przekroju prętów w cm <sup>2</sup>									
w calach ros.	w mm				2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1/16	1.587	0.016	0.50	0.020	0.040	0.059	0.079	0.099	0.119	0.139	0.158	0.178	0.20	
1/8	3.18	0.062	1.00	0.08	0.158	0.24	0.32	0.40	0.47	0.55	0.63	0.71	0.79	
3/16	4.76	0.140	1.50	0.18	0.36	0.53	0.71	0.89	1.07	1.25	1.42	1.60	1.78	
1/4	6.35	0.249	2.00	0.32	0.63	0.95	1.27	1.58	1.90	2.22	2.54	2.85	3.17	
5/16	7.94	0.389	2.49	0.49	0.99	1.48	1.98	2.47	2.97	3.46	3.96	4.45	4.95	
3/8	9.53	0.559	2.99	0.71	1.43	2.14	2.85	3.56	4.28	4.99	5.70	6.42	7.13	
7/16	11.1	0.760	3.49	0.97	1.94	2.90	3.87	4.84	5.81	6.78	7.75	8.71	9.68	
1/2	12.7	0.995	3.99	1.27	2.53	3.80	5.07	6.33	7.60	8.87	10.14	11.40	12.67	
9/16	14.3	1.259	4.49	1.60	3.21	4.81	6.42	8.02	9.62	11.23	12.83	14.44	16.04	
5/8	15.9	1.553	4.98	1.98	3.96	5.93	7.91	9.89	11.87	13.85	15.82	17.80	19.78	
11/16	17.5	1.879	5.49	2.39	4.79	7.18	9.57	11.97	14.36	16.76	19.15	21.55	23.94	
3/4	19.1	2.237	5.98	2.85	5.70	8.55	11.40	14.25	17.10	19.95	22.80	25.65	28.50	
13/16	20.6	2.627	6.48	3.35	6.69	10.04	13.38	16.73	20.08	23.42	26.77	30.11	33.46	
7/8	22.2	3.044	6.98	3.88	7.75	11.63	15.51	19.39	23.26	27.14	31.02	34.89	38.78	
15/16	23.8	3.496	7.48	4.45	8.91	13.36	17.81	22.26	26.72	31.17	35.62	40.08	44.53	
1	25.4	3.978	7.98	5.07	10.13	15.20	20.27	25.34	30.40	35.47	40.54	45.60	50.67	
1 1/8	28.6	5.036	8.98	6.41	12.83	19.24	25.66	32.07	38.49	44.90	51.32	57.73	64.15	
1 1/4	31.8	6.215	9.97	7.92	15.83	23.75	31.67	39.59	47.50	55.42	63.34	71.26	79.17	
1 3/8	34.9	7.523	10.97	9.58	19.17	28.75	38.83	47.91	57.50	67.08	76.66	86.25	95.83	
1 1/2	38.1	8.950	11.97	11.40	22.80	34.20	45.60	57.00	68.41	79.81	91.21	102.61	114.01	
1 5/8	41.3	10.501	12.96	13.88	26.75	40.18	53.51	66.88	80.26	93.64	107.02	120.39	133.77	
1 3/4	44.5	12.182	13.96	15.52	31.04	46.55	62.07	77.59	93.11	108.62	124.14	139.66	155.18	
1 7/8	47.6	13.981	14.96	17.81	35.62	53.43	71.24	89.05	106.86	124.67	142.48	160.29	178.40	
2	50.8	15.910	15.96	20.27	40.54	60.80	81.07	101.34	121.61	141.88	162.14	182.41	202.68	

IV. Tablica dla  $\frac{15d^2\pi}{4}$  w  $\text{cm}^2$  (średnica w calach).

Średnica		Ilość prętów									
w calach	w mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{16}$	1·587	0·297	0·593	0·890	1·187	1·483	1·780	2·077	2·374	2·670	2·967
$\frac{1}{8}$	3·18	1·19	2·38	3·56	4·75	5·94	7·13	8·32	9·50	10·69	11·88
$\frac{3}{16}$	4·76	2·67	5·31	8·01	10·69	13·36	16·03	18·70	21·37	24·04	26·72
$\frac{1}{4}$	6·35	4·75	9·50	14·25	19·00	23·75	28·50	33·25	38·00	42·75	47·50
$\frac{5}{16}$	7·94	7·42	14·84	22·27	29·69	37·11	44·53	51·95	59·38	66·80	74·22
$\frac{3}{8}$	9·53	10·69	21·38	32·06	42·25	53·44	64·19	74·82	85·50	96·19	106·88
$\frac{7}{16}$	11·1	14·54	29·08	43·62	58·16	72·71	87·25	101·79	116·33	120·87	145·41
$\frac{1}{2}$	12·7	19·00	38·00	57·00	76·00	95·01	114·01	133·01	152·01	171·01	190·01
$\frac{9}{16}$	14·3	24·06	48·11	72·17	96·23	120·28	144·34	168·40	192·45	216·5	240·6
$\frac{5}{8}$	15·9	29·67	59·34	89·01	118·68	148·36	178·03	207·7	237·4	267·0	296·7
$\frac{11}{16}$	17·5	35·91	71·82	107·74	143·65	179·57	215·5	251·4	287·3	323·2	359·1
$\frac{3}{4}$	19·1	42·75	85·50	128·26	171·01	213·8	256·5	299·3	342·0	384·8	427·5
$\frac{13}{16}$	20·6	50·19	100·38	150·56	200·8	250·9	301·1	351·2	401·5	451·7	501·9
$\frac{1}{8}$	22·2	58·17	116·34	174·49	232·7	290·8	349·0	407·2	465·3	523·5	581·7
$\frac{15}{16}$	23·8	66·79	133·59	200·4	267·2	334·0	400·7	467·5	534·3	601·1	667·9
1	25·4	76·01	152·01	228·0	304·0	380·0	456·0	532·0	608·1	684·1	760·1
$\frac{1}{8}$	28·6	96·23	192·45	288·7	384·9	481·1	577·4	673·6	769·8	866·0	962·3
$\frac{1}{4}$	31·8	118·76	237·5	356·3	475·1	593·8	712·7	831·4	950·2	1069·0	1187·6
$\frac{3}{8}$	34·9	143·74	287·5	431·2	575·0	718·7	862·4	1006·2	1149·9	1293·7	1437·4
$\frac{1}{2}$	38·1	171·01	342·0	513·0	684·0	855·1	1026·1	1197·1	1368·1	1539·1	1710·1
$\frac{5}{8}$	41·3	200·7	401·3	602·0	802·6	1003·3	1203·9	1404·6	1605·2	1865·9	2007
$\frac{3}{4}$	44·5	232·8	465·6	698·3	931·1	1163·8	1396·6	1629·4	1862·1	2095	2328
$\frac{7}{8}$	47·6	267·2	534·3	801·5	1068·6	1335·8	1602·9	1870·1	2137	2404	2672
$\frac{1}{2}$	50·8	304·1	608·1	912·2	1220·2	1520·3	1824·3	2128	2440	2746	3041

## LITERATURA.

Podajemy tutaj tylko niektóre ważniejsze dzieła i niektóre artykuły, gdyż literatura tego przedmiotu jest już tak wielką, że wychodzą osobne książki nią się zajmujące.

## I. Dzieła i artykuły.

- Sanders-Onderzock. *Theorie der Beton en Cement-ijzer Constructiën*. 1898.
- Christophe P. *Le beton armé et ses applications*. Paryż-Londyn 1899. II. wydanie 1902.
- Lefort L. *Calcul des poutres droites et planchers en beton de ciment armé*. Paryż 1899.
- Berger C. Guillaume. *La construction en ciment armé*. Paryż 1902.
- Guidi Camillo. *Sulle costruzioni in beton armato*. Rzym 1903. II. wydanie 1906.
- Pomianowski. *Tabela do obliczania płyt i belek żel. bet.* 1903.
- Sanders. *Proevenmet Balken von Cement-Ijzer* 1904.
- Marsch Charles. *Reinforced concrete*. Londyn-Nowy York 1904.
- Tedesco et Mauvel. *Traité theorique et pratique de la resistances des materiaux appliqué à beton et au ciment*. Paryż 1904.
- Herzan. *Beton a železo v modernich stavbach*. Praga 1904.
- Weiske. *Graphostatische Untersuchung der Beton u. Eisenbetonträger*. Wiedeń 1904.
- Saliger Dr. Rudolf. *Der Eisenbeton in Theorie und Konstruktion*. Kassel 1905. II. wydanie 1908.
- Büsing u. Schumann. *Der Portlandcement und seine Anwendung im Bauwesen*. Berlin 1905.
- Guidi C. *Conglomerati di cemento semplice armati*. 1905.



- Huber M. *Obliczenie belek żel. betonowych systemu Hennebique'a*. 1905.
- Huber M. *Oznaczenie wymiarów belek żel. betonowych*. 1905.
- Bach. *Versuche mit Eisenbetonbalken. Mitteil. über Forschungsarbeiten*. Zeszyt 29, 39, 45—47, 72—74, 95, 1905 i nast.
- Emperger Fritz. *Die Rolle der Haftfestigkeit im Verbundbalken. Forscherarb.* Zeszyt III. Berlin 1905.
- Grabowski. *Formänderungsarbeit der Eisenbetonbauten bei Biegung. Forscherarb.* Zeszyt IV. Berlin 1906.
- Grabowski. To samo po polsku. „Przegląd Techniczny“ 1905.
- Feret R. *Etude expérimentale du ciment armé*. Paryż 1906.
- Mörsch. *Der Eisenbetonbau*. Stuttgart 1906. IV. wyd. 1912.
- Подольский. *Зелезобетонные мосты*. Moskwa 1906.
- Huber M. *Obliczenie wymiarów belek betonowych obustronnie zbrojonych*. 1904.
- Pilgrim. *Theoretische Berechnung der Eisenbetonkonstruktionen*. Wiesbaden 1906.
- Probst. *Das Zusammenwirken von Beton u. Eisen. Forscherarbei.* IV. Berlin 1900.
- Göldel. *Praxis und Theorie des Eisenbetons*. Berlin 1906.
- Barkhausen G. *Theorie der Verbundbauten in Eisenbeton*. Wiesbaden 1907.
- Reid. *Concrete and reinforced concrete construction*. Nowy York. 1907.
- Sanders. *Het Cement Ijzer*. Amsterdam.
- Kersten. *Der Eisenbetonbau*. Berlin I. 8, II., VI. wyd. 1911 i 1912.
- Foerster M. *Das Material und die statische Berechnung der Eisenbetonbauten*. Lipsk 1907.
- Reid Homer. *Concrete and reinforced concrete construction*. Nowy York 1907.
- Taylor Fr. *A treatise on concrete plain and reinforced*. 1907.
- Emperger Fr. Dr. *Handbuch für Eisenbetonbau*. Berlin 1907. II. wydanie 1912.
- Haberkalt u. Postuvanschitz. *Die Berechnung der Tragwerke aus Eisenbeton oder Stampfbeton*. Wiedeń i Lipsk 1908. II. wydanie 1912.
- *Expériences, rapports et propositions par la commission du ciment armé*. Paryż.
- Spitzer. *Berechnung der Moniergewölbe*. Berlin.

- Rieger. *Determination graphique des efforts dans une poutre.* 1908.
- Bosch Dr. J. *Berechnung der gekreuztarmierten Eisenbetonplatte.* Berlin 1908.
- Bazali M. *Zahlenbeispiele zur statischen Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen.* Glauchau 1908.
- Bach Dr. C. *Mitteilungen über die Druckfestigkeit von Betonkörper mit verschiedenem Wasserzusatz.* Stuttgart 1909.
- Thullie Dr. M. *Versuche mit exzentrisch belasteten betoneisernen Säulen.* Berlin 1909.
- Sonntag. *Biegung. Schub und Scherung.* Berlin 1909.
- Brik J. *Knickfestigkeit betongefüllter Eisensäulen* 1909.
- Klokner T. *Vystuženy beton.* 1909.
- Kleinlogel. *Ueber das Wesen und die wahre Grösse der Verbundes zwischen Eisen und Beton.* Berlin 1910.
- Berby. *Tests of concrete columns made under building conditions* 1910.
- Rudeloff. *Versuche mit Betonsäulen.* Reih. I. u. II. Berlin 1910.
- Rings Frederik. *Reinforced concrete.* Londyn 1910.
- Herzka Leopold. *Dimensionierungsformeln für einfach und doppelt bewehrte Betonplatten.* Wiedeń 1910.
- Hofmann Richard. *Die Eisenbetonlitteratur bis Ende 1910.* Berlin 1911.
- Turneave. *Principles of reinforced concrete construction.*
- Allitsch Karl. *Der Eisenbetonbau.* Lipsk i Wiedeń 1911.
- Scheit-Wawrzyniak. *Versuche mit Eisenbetonbalken zur Bestimmung der Gleitwiderstandes.* Berlin 1911.
- Frank Dr. W. *Der Eisenbetonbau.* Stuttgart 1911.
- Tedesco et Maurel. *Béton et ciment armé.* Paryż i Londyn 1911.
- Gosyn Leon. *Traité des constructions en beton armé.* Paryż i Leodyum 1911.
- Wuczkowski. *Die Bemessung der Eisenbetonkonstruktionen.* Berlin 1911.
- Emperger Dr. Fritz. *Neue Verwendung des Gusseisens bei Säulen u. Bogenbrücken* 1911.
- Koenen. *Grundzüge für die statische Berechnung der Beton und Eisenbetonbauten.* IV. wydanie. Berlin 1912.

- Melan Joh. *Versuche mit Plattenbalken*. Lipsk i Wiedeń 1912.  
 Spitzer Joseph. *Versuche mit Eisenbetonsäulen*. Lipsk i Wiedeń 1912.  
 Odorico. *Neue Versuche mit ringbewehrter Eisenbetonsäulen*. 1912.  
 Thullie Dr. M. *Weitere Versuche mit exzentrisch belasteten Eisenbetonsäulen*. Lipsk i Wiedeń 1912.  
 Aubry Ch. *Calcul de béton armé*. Paryż 1913.  
 Danusso-Bronneck. *Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten*. Berlin 1913.  
 Ways u. Freytag. *Umschnürter Beton*.  
 Jurkowski Stefan. *Żelbetnictwo*. Warszawa 1914.  
 Taylor et Thomson. *Pratique de la construction en béton et mortier de ciment armées ou non armées*. Tłum. Darras. Paryż 1914.

## II. Czasopisma.

### 1. Ogólne.

- „Czasopismo Techniczne“, Lwów.  
 „Engineering News“, Nowy York.  
 „Engineering Record“, Nowy York.  
 „Oesterr. Wochenschrift f. d. öffent. Baudienst“, Wiedeń.  
 „Przegląd Techniczny“, Warszawa.  
 „Rundschau für Technik und Wirtschaft“, Praga.  
 „Wochenschrift der oester. Ing. u. Arch. Ver.“, Wiedeń.  
 „Zeitschrift des Vereins deutsches Ingenieure“, Berlin.

### 2. Specyalne.

- „Armierter Beton“, Berlin.  
 „Beton u. Eisen“, Berlin (Wiedeń).  
 „Cement a železo“, Praga.  
 „Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen über Cement, Beton u. Eisenbetonbau“, Berlin.  
 „Cement und Beton“, Berlin.
-

## OMYŁKI

które należy poprawić przed użyciem książki.

Str.	Zamiast	Ma być
5 w. 2 z dołu	$n$	$\mu$
13 „ 2 z góry	$\mu=65\cdot9$	$\mu_1=65\cdot9$
16 nad w. 7 z d.		<b>B. Natężenia przy zginaniu.</b>
18 w. 1 z góry	rys. 9.	rys. 11.
18 „ 5 „	Christoph	Christophe
19 równ. (4)	$\frac{E_b}{E_e}=n$	$\frac{E_e}{E_b}=n$
20 w. 12 z góry	$+nf \frac{z-a}{2} \tau_2$	$+nf \frac{z-a}{z} \tau_2$
20 „ 2 „	$(d-z)^2+z^2+\dots$	$-(d-z)^2+z^2+\dots$
21 „ 1 „	$\frac{b}{3}[z^2+(d-z)^2+\dots$	$\frac{b}{3}[z^3+(d-z)^3+\dots$
22 „ 5 „	$10 F'(d-z-a)^2$	$10 F'(d-z-a_1)^2$
22 „ 6 „	$\sigma_e' =$	$\sigma_e =$
22 „ 7 „	$\sigma_e =$	$\sigma_e' =$
22 „ 7 z dołu	$=\frac{100}{3}$	$J=\frac{100}{3}$
22 „ 4 „	$\sigma_e' =$	$\sigma_e =$
22 „ 8 „	$\sigma_e =$	$\sigma_e' =$
23 „ 8 „	$\frac{b(\tau_1-\nu_0)e}{2}\dots - F_e\sigma_e$	$\frac{b(\tau_1+\nu_0)e}{2}\dots - F\sigma_e$
25 równ. (20)	$+\frac{b_1}{3}[d_1-z_1]^3-$	$+\frac{b_1}{3}[(d_1-z_1)^3-$
25 w. 1 z dołu	$=11 \text{ cm}$	$=12 \text{ cm}$
26 „ 1 „	$[11^3+(12-11)^3]+\frac{20}{3}[(40-$ $-11)^3-(12-11)^3]+10\times$ $\times 13\cdot 57(11-3)^2=242320 \text{ cm}^4$	$[12^3+(12-12)^3]+\frac{20}{3}[(40-$ $-12)^3-(12-12)^3]+10\cdot$ $\cdot 13\cdot 57(28-3)^2=323500$
26 rys. 20.		oś obojętna ma wpadać na dolną krawędź płyty.

Str.	Zamiast	Ma być
26 w. 4 z góry	$\tau_2 = \frac{25000 \times 29}{243320} = 29.9$	$\tau_2 = \frac{25000 \times 28}{323500} = 21.6$
26 „ 4 „	$\tau_1 = \frac{250000 \times 11}{242320} = 11.3$	$\tau_1 = \frac{250000 \times 12}{323500} = 9.3$
26 „ 5 „	$\sigma_e = \frac{10 \times 250000(29-3)}{242320} = 268$	$\sigma_e = \frac{10 \times 250000(28-3)}{323500} = 193$
27 „ 3 „	$(d_1 - z_1)$	$(d - z_1)$
28 „ 3 „	$F'e'\sigma_e'$	$F'\sigma_e'$
29 „ 10 „	$\tau_2 =$	$\tau_3 =$
29 „ 7 z dołu	$15 F'(d_1 - z_1)^2 +$	$15 F'(d_1 - z_1) +$
29 „ 5 „	$(1 - 0.4)b$	$(1 - 0.4)b_1$
29 „ 4 „	$(1 - 0.4)b$	$(1 - 0.4)b_1$
29 „ 1 „	$(z_2 - e)^3 + 0.4b(d - z_1)^3$	$(z_1 - e)^3 + 0.4b_1(d - z_1)^3$
30 „ 4 z góry	$\frac{\dots\dots\dots}{(1-0.4)150} = 22.3$	$\frac{\dots\dots\dots}{(1-0.4)27} = 130$
30 „ 5 „	$\frac{\dots\dots\dots}{(1-0.4)150} = 716$	$\frac{\dots\dots\dots}{(1-0.4)27} = 3980$
30 „ 6 „	$= -22.3 + \sqrt{22.3^2 + 716} = 12.5$	$= -130 + \sqrt{130^2 + 3980} = 14$
30 „ 7 „	$[150 \times 12.5^3 - (150 -$	$150 \times 14^3 - (150 -$
	$-27)(12.5 - 10)^3$	$-27)(14 - 10)^3$
30 „ 8 „	$150(42 - 12.5)^3] + 15 \times$	$27(42 - 14)^3] + 15 \times$
	$\times 28.28(39 - 12.5)^2 = 905030$	$\times 28.28(39 - 14)^2 = 342080$
30 „ 9 „	$\frac{0.4 \times 800000(42 - 12.5)}{908030} = 10.4$	$\frac{0.4 \times 800000(42 - 14)}{342080} = 26$
30 „ 7 z dołu	$\frac{15 F'(d_1 - z_1)^2 + \dots +$	$\frac{15 F'(d_1 - z_1) + \dots +$
	$\frac{0.4(b - b_1)(e - z)^2}{2}$	$\frac{0.4(b - b_1)(e - z_1)^2}{2}$
31 „ 5 „	$15 F'(d_1 - z_1)^2$	$15 F'(d_1 - z_1)$
32 „ 1 z góry	$M(dz - 1)$	$M(d - z_1)$
43 „ 7 „	$\sigma_c'$	$\sigma_e'$
46 „ 8 z dołu	$\tau_1 = \frac{\sigma_z}{v}$	$\tau_1 = \frac{\sigma_e}{v}$
46 „ 7 „	$v = 15 \nu$	$v = 15 \frac{\nu}{z_1}$
49 „ 5 „	$(Fd_1 - F'a_1)$	$(Fd_1 + F'a_1)$
50 „ 7 z góry	$\frac{\times 39 - 28.38 \times 3}{27} = 9.5$	$\frac{\times 39 + 28.28 \times 3}{27} = 10.9$
50 „ 9 „	$\times 9.5^3 - (150 - 27)(9.5 -$	$\times 10.9^3 - (150 - 27)(10.9 -$
	$-10)^3] + 15 [28.28(39 - 9.5)^2 +$	$-10)^3] + 15.28.28[(39 -$
	$28.28(9.5 - 3)^2]$	$-10.9)^2 + (10.9 - 3)^2]$
50 „ 10 „	429800	470800
50 „ 11 „	$\tau_1 = \frac{800000 \times 17.7}{542600} = 17.7$	$\tau_1 = \frac{800000 \times 10.9}{470800} = 18.5$
	$\sigma_e = \frac{15 \times 800000(39 - 17.7)}{542600} = 825$	$\sigma_e = \frac{15 \times 800000(39 - 10.9)}{470800} = 717$

Str.	Zamiast	Ma być
56 w. 12 z dołu	3·02 <i>om</i>	3·02 <i>cm</i>
62 „ 17 z góry	$\xi' d_1$ 3	$\frac{\xi' d_1}{3}$
64 „ 18 „	9·0	0·9
65 rys. 44	$C_1' C_1$	$C' C_1$
66 w. 1 z dołu	techniczne	Techniczne
66 „ 4 „	$=FC_2$	$+FC_2$
71 po w. 16 z góry dodać:	Nateżenia za wielkie, trzeba więc przyjąć 5 pretów $\phi$ 16 mm ( $F=10\cdot05\text{ cm}^2$ )	
74 w. 11 z dołu	$0\cdot001112 \frac{M}{d_1} + 0\cdot000160$	$0\cdot001125 \frac{M}{d_1} + 0\cdot000162$
74 „ 8 „	$0\cdot002478 \frac{M}{d_1} =$	$0\cdot002506 \frac{M}{d_1} -$
75 „ 3 z góry	$\frac{B}{+} \quad \frac{B_1}{+}$	$\frac{B}{+} \quad \frac{B_1}{-}$
78 „ 15 „	$t$ , niesie	$t$ niesie,
79 „ 5 „	$\tau_1 - \frac{1}{4} \frac{\tau_1}{2} = 0\cdot875$	$\tau_1 + \frac{1}{4} \frac{\tau_1}{2} = 1\cdot125$
79 „ 13 „	ministeryalne	ministeryalne austr.
89 „ 11 z dołu	XXVII.	XXVII. dla $\delta_1 = 0\cdot2$ .
90 „ 3 z góry	2,100,000	2100000
91 „ 7 „	$k$	$x$
91 „ 12 „	$k$	$x$
91 „ 8 z dołu	$\frac{6}{2}$	$\frac{b}{2}$
91 „ 6 „	146	(146)
94 „ 9 „	$k$	$x$
109 „ 6 z góry	$T_e$	$T_e$
110 „ 17 „	$Q$ i $e$	$Q_e$ i $e$
111 „ 11 z dołu	obliczać byśmy ich	obliczać byśmy je
113 „ 16 „	$F_e$	$F_{e_1}$
113 „ 5 „	$\frac{QS}{d_1 - z \frac{1}{3}}$	$\frac{Q}{d_1 - \frac{z_1}{3}}$
115 „ 8 z góry	$d_1 - \frac{1}{3} z$	$d_1 - \frac{1}{3} z_1$
115 „ 10 „	„	„
132 rys. 84.	$\phi$ 4 m/m	$\phi$ 5 mm
144 w. 4 z dołu	15 $F_{ee}$	15 $F_e$
144 „ 3 „	$F_e + F_{e_1}$	$F_e + F_{e'}$
144 „ 2 „	na końcu dodać	(240 a)
146 rys. 90	$\sigma_1' \sigma_1 \sigma_1''$	$\sigma_{e'} \sigma \sigma_{e''}$
149 w. 2 z góry	$9 = -6616\cdot5$	$q = -6616\cdot5$
153 „ 3 „	$+ 2k^2 u_1^2$	$+ 2k^2 u_1^3$

Str.	Zamiast	Ma być
153 w. 7 z góry	$9 = \frac{45}{b}$	$9 = -\frac{45}{b}$
157 „ 16 z dołu	$483 \cdot 3 = -14 \cdot 4$	$483 \cdot 3 = -14 \cdot 4$
157 „ 15 „	$q = \frac{45}{150} [\dots + 0 \cdot 2 \cdot 19] +$	$q = -\frac{45}{150} [\dots + 0 \cdot 2 \cdot 19] +$
157 „ 13 „	$= 21165$	$= -21165$
158 „ 12 „	$q = \frac{45}{150}$	$q = -\frac{45}{150}$
158 „ 11 „	$-0 \cdot 2^3 \cdot 19^3$	$-0 \cdot 2^3 \cdot 19^3$
171 „ 1 z góry	$\frac{\beta}{2}$	$\frac{\beta}{\varepsilon}$

---

## SPIS RZECZY.

---

### A. Własności mechaniczne betonu i żelaza.

	Str.
§. 1. Wstęp . . . . .	1
§. 2. Beton . . . . .	1
§. 3. Żelazo . . . . .	2
§. 4. Wytrzymałość betonu na ciśnienie i ciągnięcie . . . . .	3
§. 5. Sprężystość betonu . . . . .	10
§. 6. Wytrzymałość na ścinanie . . . . .	12
§. 7. Przyczepność do żelaza . . . . .	13

### B. Natężenia przy zginaniu.

§. 8. Zasady obliczenia belek żelbetowych na zginanie . . . . .	16
§. 9. Faza pierwsza. Belka prostokątna . . . . .	18
§. 10. Belka prostokątna o wkładkach gibkich . . . . .	19
§. 11. Belka prostokątna podwójnie uzbrojona . . . . .	21
§. 12. Belka o przekroju teowym . . . . .	22
§. 13. Faza I <i>b</i> , belka prostokątna . . . . .	26
§. 14. Belka prostokątna obustronnie wzmocniona, faza I <i>b</i> . . . . .	28
§. 15. Belka teowa, faza I <i>b</i> . . . . .	31
§. 16. Belka teowa obustronnie uzbrojona . . . . .	33
§. 17. Faza II <i>a</i> . . . . .	33
§. 18. Faza II <i>b</i> . . . . .	34
§. 19. Sposób przybliżony Christopha, Empergera i Wuczkowskiego . . . . .	38
§. 20. Belka obustronnie uzbrojona . . . . .	41
§. 21. Belka o przekroju teowym, faza II <i>b</i> . . . . .	43
§. 22. Sposób przybliżony wyznaczenia natężeń . . . . .	45
§. 23. Belka teowa obustronnie uzbrojona . . . . .	49
§. 24. Współdziałanie płyty . . . . .	50
§. 25. Faza trzecia . . . . .	52

### C. Obliczenie wymiarów.

§. 26. Zasady obliczenia wymiarów . . . . .	58
§. 27. Belki prostokątne pojedynczo uzbrojone. Przekrój idealny . . . . .	61
§. 28. Ogólne obliczenie wymiarów belki prostokątnej . . . . .	64



	Str.
§. 29. Uwzględnienie ciągnięcia przy obliczaniu wymiarów belki prostokątnej . . . . .	68
§. 30. Długość wkładek żelaznych . . . . .	69
§. 31. Obliczenie wymiarów wedle Wuczковского . . . . .	70
§. 32. Wyznaczenie wymiarów belki podwójnie uzbrojonej . . . . .	71
§. 33. Obliczenie belek podwójnie uzbrojonych sposobami Suensona i Wuczковского . . . . .	76
§. 34. Wkładki szerokie . . . . .	77
§. 35. Obliczanie wymiarów belki teowej . . . . .	78
§. 36. Wyznaczenie wymiarów belki teowej idealnej . . . . .	80
§. 37. Wyznaczenie wymiarów belki idealnej żebrowej ze względu na ciągnięcie . . . . .	82
§. 38. Obliczenie przybliżone wymiarów belki teowej . . . . .	86
§. 39. Wyznaczenie długości prętów . . . . .	93
§. 40. Wyznaczenie wymiarów belki teowej podwójnie uzbrojonej . . . . .	93

#### **D. Natężenia ścinające i główne.**

§. 41. Siły ścinające belki prostokątnej (Faza I.) . . . . .	96
§. 42. Siły ścinające belki teowej (Faza I.) . . . . .	99
§. 43. Siły ścinające w przekroju prostokątnym (Faza II.) . . . . .	102
§. 44. Siły ścinające w przekroju teowym (Faza II.) . . . . .	104
§. 45. Siły ścinające w belce wielobocznej . . . . .	107
§. 46. Obliczenie strzemion . . . . .	108
§. 47. Pręty odginane . . . . .	112
§. 48. Uwzględnienie przyczepności . . . . .	116
§. 49. Przyczepność wedle rozporządzenia austriackiego . . . . .	120

#### **E. Obliczenie prętów ciśnionych środkowo.**

§. 50. Obliczenie słupów żelbetowych . . . . .	127
§. 51. Słupy żelbetowe owijane . . . . .	131
§. 52. Wyboczenie słupów . . . . .	135
§. 53. Obliczenie słupów żelbetowych z wkładkami tęgimi . . . . .	137
§. 54. Słupy żelbetowe z wkładką z żelaza lanego . . . . .	138

#### **F. Obliczenie prętów ciśnionych mimośrodkowo.**

§. 55. Przekroje ciśnione mimośrodkowo, wkładki gibkie, Faza I. . . . .	140
§. 56. Wkładki tęgą . . . . .	143
§. 57. Przekrój teowy ciśniony mimośrodkowo w fazie pierwszej . . . . .	144
§. 58. Przekrój prostokątny ciśniony mimośrodkowo w fazie drugiej . . . . .	146
§. 59. Przekrój teowy ciśniony mimośrodkowo w fazie drugiej . . . . .	151
§. 60. Projektowanie przekroju teowego ciśnionego mimośrodkowo . . . . .	154

#### **G. Wykreślne wyznaczenie osi obojętnej.**

§. 61. Belka zginana . . . . .	155
§. 62. Ciśnienie mimośrodkowe . . . . .	161

## H. Wyznaczenie wymiarów zeskładów żelbetowych ze względu na koszty.

Str.

§. 63. Uwagi ogólne . . . . .	162
§. 64. Płyta z jednej strony uzbrojona . . . . .	162
§. 65. Płyta uzbrojona w dwu kierunkach . . . . .	166
§. 66. Płyta obustronnie uzbrojona . . . . .	169
§. 67. Belka teowa . . . . .	169
§. 68. Przekrój ciśniony mimośrodkowo . . . . .	170
§. 69. Przekrój ciśniony mimośrodkowo bez uzbrojenia ciśnionego .	174
§. 70. Przekrój ciśniony mimośrodkowo bez uzbrojenia ciągnionego	175

## I. Ugięcia i zeskłady statycznie niewyznaczalne.

§. 71. Zasada obliczenia . . . . .	177
§. 72. Odkształcenie zeskładów żelbetowych ciągnionych i ciśnionych	178
§. 73. Ugięcia belek żelbetowych zginanych . . . . .	179
§. 74. Dźwigary statycznie niewyznaczalne . . . . .	181
§. 75. Dźwigary utwierdzone . . . . .	182
§. 76. Belki ramowe . . . . .	187
§. 77. Rama jednoprzęsłowa . . . . .	189
§. 78. Belki ciągłe . . . . .	191
§. 79. Płyty spoczywające na dwu krawędziach . . . . .	193
§. 80. Płyty spoczywające na czterech krawędziach . . . . .	194
§. 81. Sklepienia . . . . .	202

## K. Dodatek.

I. Tablica dla żelaza okrągłego (średnica w <i>mm</i> ) . . . . .	205
II. Tablica dla $\frac{15 d^2 \pi}{4}$ w <i>cm</i> <sup>2</sup> (średnica w <i>mm</i> ) . . . . .	207
III. Tablica dla żelaza okrągłego (średnica w <i>calach</i> ) . . . . .	209
IV. Tablica dla $\frac{15 d^2 \pi}{4}$ w <i>cm</i> <sup>2</sup> (średnica w <i>calach</i> ) . . . . .	210
Literatura . . . . .	211
Omyłki . . . . .	215
Spis rzeczy . . . . .	219

POLITECHNIKA WROCLAWSKA  
Biblioteka Główna













BIBLIOTEKA GŁÓWNA

347060L/1