

**POLITECHNIKA  
OPOLSKA**

**SKRYPT  
NR 214**

**Andrzej Przytułski**

**ZBIÓR ZADAŃ Z PODSTAW  
ELEKTROTECHNIKI  
DLA STUDENTÓW STUDIÓW ZAOCZNYCH**

**cz. I  
(wyd. III)**

**OW**  
OFICyna  
WYDAWnicZA

**ISSN 1427-9932**

**Opole 1999**

*Rodzicom moim poświęcam*

## SPIS TREŚCI

<b>WSTĘP</b> .....	5
<b>1. LINIOWE OBWODY PRĄDU STAŁEGO</b> .....	7
1.1. Energia, moc, połączenia rezystancji, zależności rezystancji od temperatury .....	7
1.2. Zastosowanie I i II prawa Kirchhoffa do rozwiązywania obwodów elektrycznych .....	25
1.3. Metoda prądów oczkowych i potencjałów węzłowych .....	28
1.4. Zastosowanie twierdzeń Thevenina i Nortona .....	50
1.5. Zastosowanie zasady superpozycji .....	68
1.6. Metoda przekształceń sieci .....	73
<b>2. NIELINIOWE OBWODY PRĄDU STAŁEGO</b> .....	77
<b>3. POLE PRZEPLYWOWE</b> .....	90
<b>4. POLE ELEKTROSTATYCZNE</b> .....	100
4.1. Siły działające w polu elektrostatycznym, natężenie i potencjał pola .....	100
4.2. Kondensatory .....	112
<b>5. POLE MAGNETYCZNE</b> .....	123
<b>6. OBWODY MAGNETYCZNE</b> .....	135
<b>DODATEK</b> .....	148
Procedura GAUSSA-JORDANA .....	149
Procedura CHOLESKIEGO .....	151
<b>LITERATURA</b> .....	153

## WSTĘP

Materiał zawarty w skrypcie, przeznaczony jest do ćwiczeń rachunkowych z podstaw elektrotechniki, dla studentów studiów zaocznych Wydziału Elektrotechniki i Automatyki, w pierwszym semestrze nauki tego przedmiotu.

Tytuły rozdziałów tego opracowania odpowiadają tematyce wykładów, a ilość zadań jest proporcjonalna do czasu poświęconego na zajęciach poszczególnym zagadnieniom.

Część zadań jest własnego pomysłu autora i stanowi efekt wieloletnich doświadczeń w pracy ze studentami studiów zaocznych.

Zbiór uzupełniają przykłady z cytowanej literatury, publikowane tam bez rozwiązań.

Różnorodność wybranych zadań i metod powinna pomóc studentom w samodzielnej nauce i usprawnić proces dydaktyczny.

*Pani prof. dr hab. inż. Marii ZĄBKOWSKIEJ-WACŁAWEK składam serdeczne podziękowania za trud recenzowania skryptu.*

*Panu inż. Eugeniuszowi GŁOWIENKOWSKIEMU dziękuję za bardzo staranne wykonanie szaty graficznej*

*Autor*

# 1. LINIOWE OBWODY PRĄDU STAŁEGO

## 1.1. Energia, moc, połączenia rezystancji, zależność rezystancji od temperatury

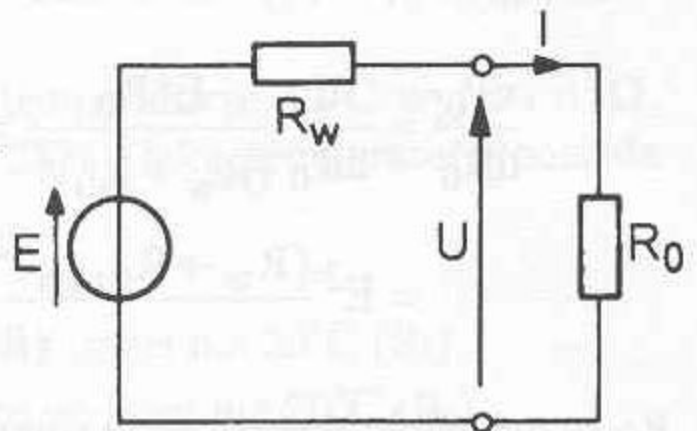
### Zadanie 1.1

Do rzeczywistego źródła napięcia o parametrach  $E$  i  $R_w$  przyłączono rezystancję obciążenia  $R_0$ , jak pokazano na rysunku 1.1.

Dane:  $E = 15V$ ,  $R_w = 1\Omega$ ,  $R_0 = 19\Omega$ .

Obliczyć:

- Pobraną ze źródła moc całkowitą  $P$ ,
- Moc pobraną przez odbiornik  $P_0$ ,
- Jaki powinien być rezystor obciążający  $R_0$  aby pobrana przez niego moc była max.?
- Jak duża jest moc pobrana przez odbiornik obliczony w punkcie c) ?
- Jaka jest wtedy sprawność źródła?
- Dla jakiego obciążenia (dla jakiego  $R_0$ ) sprawność osiąga swoje maksimum?
- Jaką moc pobiera odbiornik  $R_0$ , dla którego sprawność z jaką pracuje źródło jest maksymalna?



Rys. 1.1

Rozwiązanie:

- Oddana przez źródło moc jest równa iloczynowi jego napięcia i prądu

$$I = \frac{E}{R_w + R_0}, \quad I = \frac{15}{1 + 19} = 0,75A,$$

$$P = EI = \frac{E^2}{R_w + R_0}, \quad P = \frac{15^2}{1 + 19} = \frac{225}{20} = 11,25W.$$

- b) Odpowiednio moc pobrana przez odbiornik  $P_0 = UI$ , z reguły dzielnika napięcia

$$U = \frac{ER_0}{R_w + R_0}, \quad P_0 = UI = \frac{E^2 R_0}{(R_w + R_0)^2}, \quad P_0 = \frac{15^2 \cdot 19}{(1+19)^2} = 10,6875W.$$

- c) Celem znalezienia odbiornika pobierającego największą moc należy zbadać funkcję mocy odbiornika w zależności od  $R_0$

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dR_0} &= \frac{d}{dR_0} \frac{E^2 R_0}{(R_w + R_0)^2} = E^2 \frac{(R_w + R_0)^2 - 2R_0(R_w + R_0)}{(R_w + R_0)^4} = \\ &= E^2 \frac{(R_w + R_{0\max})^2 - 2R_{0\max}(R_w + R_{0\max})}{(R_0 + R_{0\max})^4} = 0. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu powyższego równania uzyskuje się:

$$R_w + R_{0\max} = 2R_{0\max}, \quad R_{0\max} = R_w.$$

- d)  $P_{0\max} = \frac{E^2 R_w}{(R_w + R_w)^2} = \frac{E^2}{4R_w}, \quad P_{0\max} = \frac{15^2}{4} = 56,25W.$

- e) Sprawność to stosunek mocy pobranej przez odbiornik do mocy całkowitej.

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{E^2 R_0}{(R_w + R_0)^2} \frac{R_w + R_0}{E^2} = \frac{R_0}{R_w + R_0}.$$

Dla przypadku maksymalnego poboru mocy przez odbiornik

$$\eta_{\max} = \frac{P_{0\max}}{P} = \frac{E^2}{4R_w} \frac{2R_w}{E^2}, \quad \eta_{\max} = 0,5.$$

- f) Maksymalna sprawność może zostać wyznaczona z analizy wzoru

$$\eta = \frac{R_0}{R_w + R_0} = \frac{1}{\frac{R_w}{R_0} + 1}.$$

Wynika z tego, że maksymalna sprawność wystąpi przy  $R_0 \rightarrow \infty$ . Jest ona wtedy równa 1.

$$R_{0\text{opt}} = \infty.$$

g) Taki przypadek jest jednak bezsensowny, gdyż moc pobierana przez odbiornik wynosi wtedy 0, ( $I=0$ ),  $P_{opt} = 0$

Odpowiedź: a) 11,25W, b) 10,6875W, c)  $R_{0max} = 1\Omega$ , d)  $P_{0max} = 56,25W$ ,  
e)  $\eta_{max} = 0,5$ , f)  $R_0 \rightarrow \infty$ , g)  $P_{opt} = 0$ .

### Zadanie 1.2

Rezystancja cewki z drutu miedzianego w temperaturze  $12^\circ\text{C}$  wynosi  $45\Omega$ . Po pewnym okresie pracy wzrosła ona o 28%. Jaka temperaturę posiada teraz cewka?

$$\vartheta_{0Cu} = 237 \text{ K},$$

$R_1$  - rezystancja przewodnika w temperaturze niższej niż  $20^\circ\text{C}$  ( $\vartheta_1$ ).

$R_2$  - rezystancja przewodnika w temperaturze wyższej niż  $20^\circ\text{C}$  ( $\vartheta_2$ ).

Rozwiązanie: 
$$R_2 = R_{20} \left[ 1 + \alpha_{20} (\vartheta_2 - 20^\circ\text{C}) \right],$$

$$R_1 = R_{20} \left[ 1 + \alpha_{20} (\vartheta_1 - 20^\circ\text{C}) \right], \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{1 + \alpha_{20} (\vartheta_2 - 20^\circ\text{C})}{1 + \alpha_{20} (\vartheta_1 - 20^\circ\text{C})}$$

Prawą stronę równania (licznik i mianownik) dzielimy przez  $\alpha_{20}$  i podstawiamy  $\frac{1}{\alpha_{20}} - 20^\circ\text{C} = \vartheta_0$ ,  $\vartheta_{0Cu}$  podano w treści zadania

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\vartheta_0 + \vartheta_2}{\vartheta_0 + \vartheta_1},$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \frac{R_2 - R_1}{R_1} (\vartheta_0 - \vartheta_1), \quad \vartheta_2 = \frac{R_2 - R_1}{R_1} (\vartheta_0 + \vartheta_1) + \vartheta_1.$$

zgodnie z danymi:  $R_1 = 45\Omega$ ,  $\vartheta_1 = 12^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_0 = 237 \text{ K}$ ,

$$R_2 = 45 \cdot 1,28 = 57,6\Omega, \quad \vartheta_2 = \frac{57,6 - 45}{45} (237\text{K} + 12^\circ\text{C}) + 12^\circ\text{C} = 81,7^\circ\text{C}.$$

Odpowiedź: Temperatura uzwojenia po nagrzaniu  $\vartheta_2 = 81,7^\circ\text{C}$ .

**Zadanie 1.3**

Jaką rezystancję posiada przewód aluminiowy o długości  $l = 600\text{m}$  i średnicy  $d = 0,2\text{mm}$  w temperaturach  $20^\circ\text{C}$ ,  $75^\circ\text{C}$ , i  $-8^\circ\text{C}$ . Temperaturowy współczynnik rezystancji aluminium  $\alpha_{20} = 0,00377\text{ K}^{-1}$ , natomiast rezystywność właściwa aluminium  $\rho_{\text{Al}} = 0,02857\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ .

**Rozwiązanie:**

$$R_{20} = \frac{600\text{m} \cdot 0,02857\Omega \cdot \text{mm}^2 / \text{m}}{(0,2\text{mm})^2 \frac{\pi}{4}} = 545,64\Omega,$$

$$R_{75} = 545,64[1 + 0,00377(75 - 20)] = 658,79\Omega,$$

$$R_{-8} = 545,64[1 + 0,00377(-8 - 20)] = 488,05\Omega.$$

**Odpowiedź:**  $R_{20} = 545,64\Omega$ ,  $R_{75} = 658,786\Omega$ ,  $R_{-8} = 488,05\Omega$ .

**Zadanie 1.4**

Wolframowe włókno żarówki ma w temperaturze  $20^\circ\text{C}$  rezystancję  $R_{20} = 48,7\Omega$ .

- Jaką rezystancję ma żarówka w temperaturze  $2200^\circ\text{C}$  ?
  - Jak duży jest prąd w momencie włączenia żarówki w stosunku do prądu przy pracy ustalonej ?
  - Jaką moc posiada żarówka przy napięciu  $U = 220\text{ V}$  ?
- Współczynnik temperaturowy rezystancji wolframu  $\alpha_{20} = 4,1 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$ .

**Rozwiązanie:**

$$\text{a)} \quad R_{2200} = R_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta\theta),$$

$$R_{2200} = 48,7\Omega \left[ 1 + 0,041\text{K}^{-1}(2200 - 20)\text{K} \right], \quad R_{2200} = 484\Omega.$$

b) W obu przypadkach żarówka włączona jest na to samo napięcie

$$I_{20}R_{20} = I_{2200}R_{2200}, \quad \frac{I_{20}}{I_{2200}} = \frac{R_{2200}}{R_{20}} = \frac{484\Omega}{48,7\Omega} = 9,94.$$

$$c) \quad P = \frac{U^2}{R} = \frac{220^2}{484} = \frac{48400}{484} = 100 \text{ W}.$$

Odpowiedź:  $R_{2200} = 484 \Omega$ ,  $I_{20} / I_{2200} \approx 10$ ,  $P = 100 \text{ W}$ .

### Zadanie 1.5

W termie o pojemności 5l należy podgrzać wodę od temperatury  $\vartheta_1 = 10^\circ\text{C}$  do temperatury  $\vartheta_2 = 80^\circ\text{C}$  w przeciągu 30 minut.

- a) Ile energii elektrycznej należy dostarczyć do tego celu i jaką moc powinien posiadać element grzewczy jeżeli nie uwzględnia się strat ?  
 b) Jaki jest pobór prądu ?

Dane: Napięcie robocze termy  $U = 220 \text{ V}$ , ciepło właściwe wody

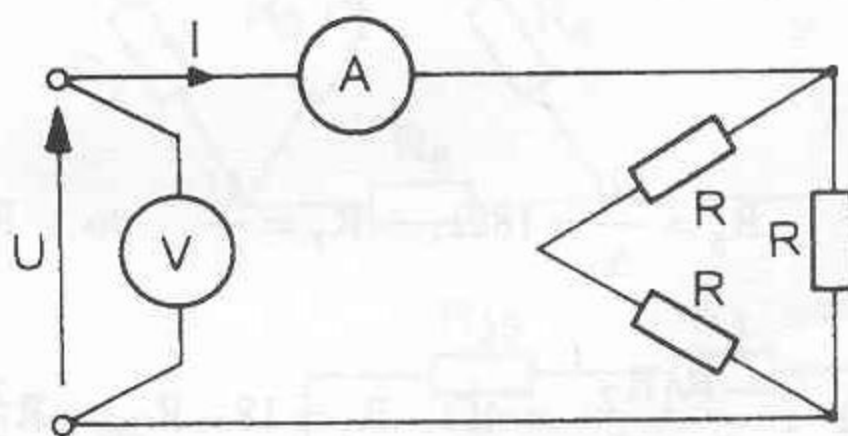
$$c = 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}.$$

Odpowiedź: a)  $W = 1467 \text{ kJ} = 0,41 \text{ kWh}$ ,  $P = 0,82 \text{ kW}$ , b)  $I = 3,72 \text{ A}$ .

### Zadanie 1.6

Trzy jednakowe uzwojenia połączone w trójkąt i zasilano napięciem 12 V jak na rysunku 1.2. Prąd płynący ze źródła wynosi 18 A. Jaka jest rezystancja jednego uzwojenia ?

Rys. 1.2



Rozwiązanie:

$$\frac{(R + R)R}{R + R + R} = \frac{U}{I}, \quad \frac{2R^2}{3R} = \frac{12}{18}, \quad \frac{2}{3}R = \frac{2}{3}, \quad R = 1 \Omega.$$

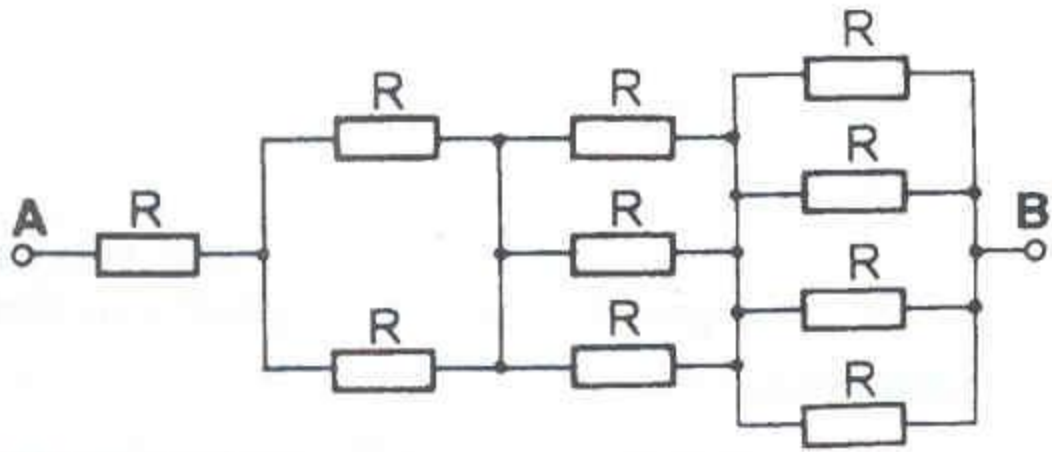
Odpowiedź: Rezystancja uzwojenia wynosi  $1 \Omega$ .



**Zadanie 1.7**

Jak duża powinna być rezystancja  $R$  aby rezystancja zastępcza układu na rysunku 1.3 wynosiła  $R_{AB} = 25\Omega$ ?

Rys. 1.3



Odpowiedź:  $R = 12\Omega$ .

**Zadanie 1.8**

Do sieci o napięciu  $U=90V$  włączono dwa rezystory połączone szeregowo i zmierzono prąd  $I_s=5A$ . Przy połączeniu równoległym prąd pobierany z sieci wyniósł  $I_r=22,5A$ . Oblicz poszczególne rezystancje zakładając, że przy zmianie płynącego przez nie prądu, rezystancje te nie zmieniają się.

Rozwiązanie:

$$R_s = \frac{U}{I_s} \quad \text{to} \quad R_s = \frac{90}{5} = 18\Omega, \quad R_r = \frac{U}{I_r} \quad \text{to} \quad R_r = \frac{90}{22,5} = 4\Omega,$$

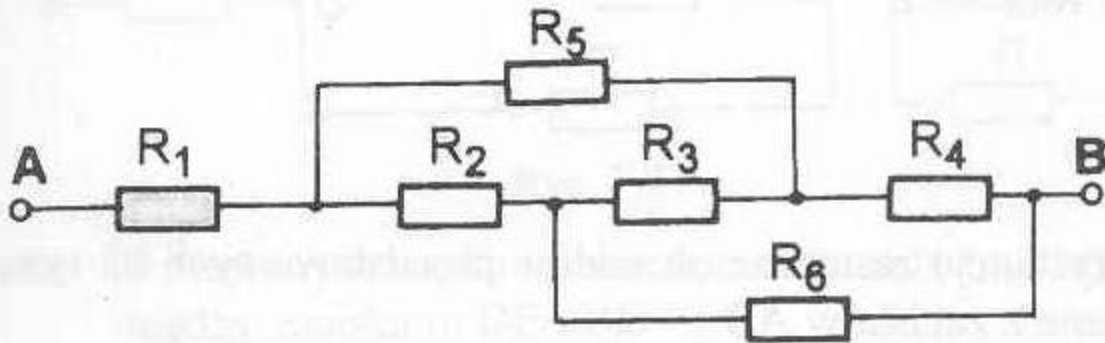
$$R_1 + R_2 = 18\Omega \quad \text{i} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4\Omega, \quad R_1 = 18 - R_2, \quad -R_2^2 + 18R_2 - 72 = 0,$$

$$R_{2(1)} = 6\Omega \quad \text{lub} \quad R_{2(2)} = 12\Omega, \quad R_{1(1)} = 12\Omega \quad \text{lub} \quad R_{1(2)} = 6\Omega.$$

Odpowiedź:  $R_1=12\Omega$ ,  $R_2=6\Omega$  lub odwrotnie.

**Zadanie 1.9**

Obliczyć rezystancję zastępczą obwodu między zaciskami AB. Schemat połączeń jak na rysunku 1.4a.

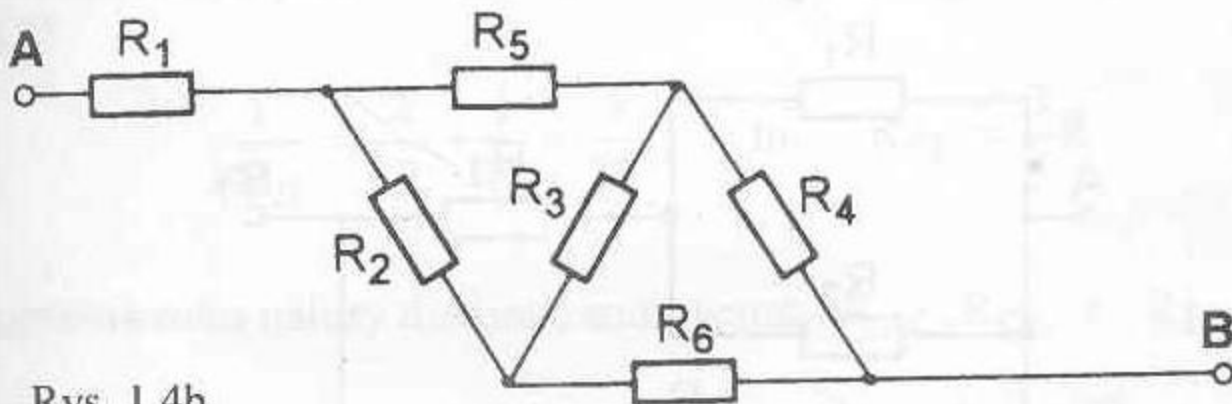


Rys. 1.4a

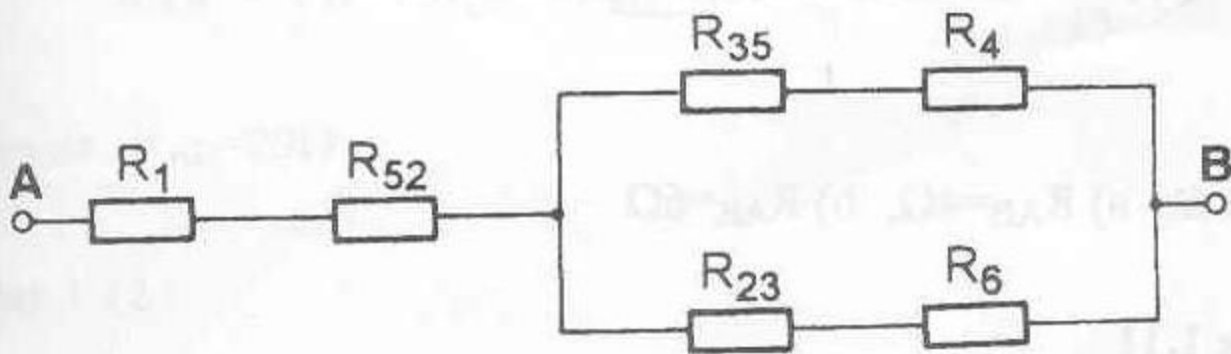
Dane:  $R_1=1\Omega$ ,  $R_2=2\Omega$ ,  $R_3=3\Omega$ ,  $R_4=4\Omega$ ,  $R_5=5\Omega$ ,  $R_6=6\Omega$ .

Rozwiązanie:

Układ z rysunku 1.4a po kolejnych przekształceniach przedstawiono na rysunkach 1.4b i 1.4c



Rys. 1.4b.



Rys. 1.4c.

Po przekształceniu  $R_{23}=0,6\Omega$ ,  $R_{35}=1,5\Omega$  a  $R_{52}=1\Omega$ .

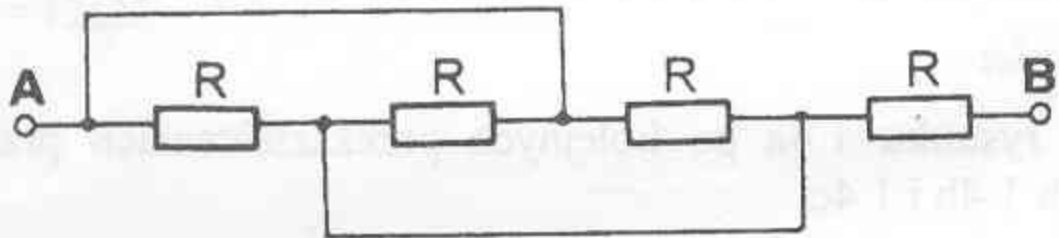
$$R_{AB} = R_1 + R_{52} + \frac{(R_{35} + R_4)(R_{23} + R_6)}{R_{35} + R_4 + R_{23} + R_6}$$

**Odpowiedź:**  $R_{AB} = 5\Omega$ .

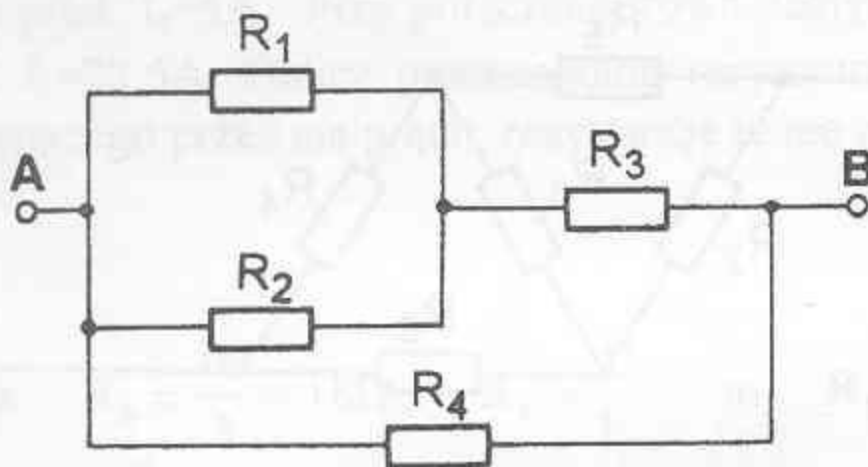
### Zadanie 1.10

Obliczyć rezystancje zastępcze obwodów przedstawionych na rysunkach 1.5 i 1.6 widziane z zacisków AB.

**Dane:**  $R=3\Omega$ ,  $R_1=12\Omega$ ,  $R_2=6\Omega$ ,  $R_3=5\Omega$ ,  $R_4=18\Omega$ .



Rys. 1.5

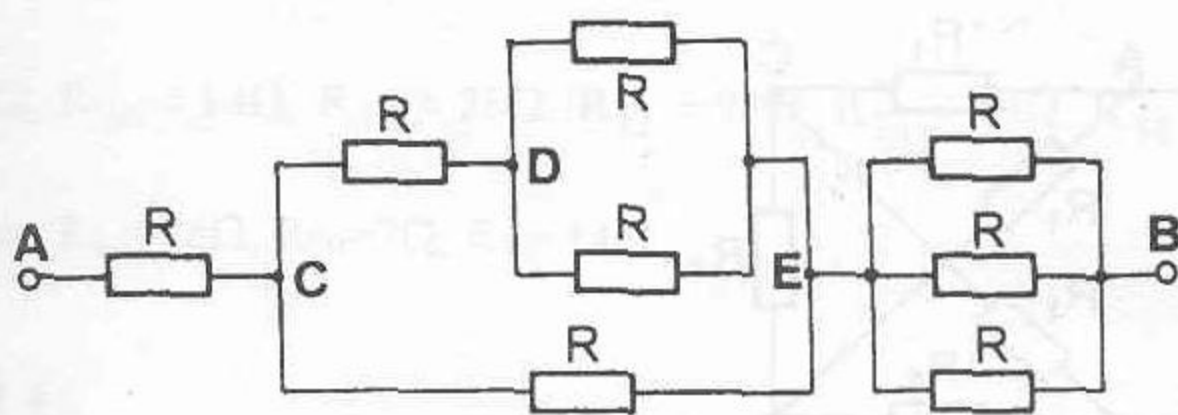


Rys. 1.6

**Odpowiedź:** a)  $R_{AB}=4\Omega$ , b)  $R_{AB}=6\Omega$ .

### Zadanie 1.11

Wszystkie rezystancje sieci przedstawionej na rys. 1.7 są takie same i mają wartość  $R=15\Omega$ . Oblicz rezystancję zastępczą na zaciskach AB.



Rys. 1.7

**Rozwiązanie:** W pierwszym rzędzie policzone zostaną rezystancje zastępcze między zaciskami DE i BE

$$\frac{1}{R_{DE}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}, \quad R_{DE} = \frac{1}{2}R, \quad R_{BE} = \frac{1}{3}R.$$

Rezystancja górnej gałęzi  $R_{CEg}$  wynosi:

$$R_{CEg} = R_{CD} + R_{DE} = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R.$$

Rezystancja dolnej gałęzi  $R_{CEd}$  wynosi  $R$ , tak więc rezystancja między zaciskami CE

$$\frac{1}{R_{CE}} = \frac{2}{3R} + \frac{1}{R} = \frac{5}{3R} \quad \text{to} \quad R_{CE} = \frac{3}{5}R.$$

W ostatnim kroku należy dokonać sumowania  $R_{AC}$ ,  $R_{CE}$  i  $R_{BE}$

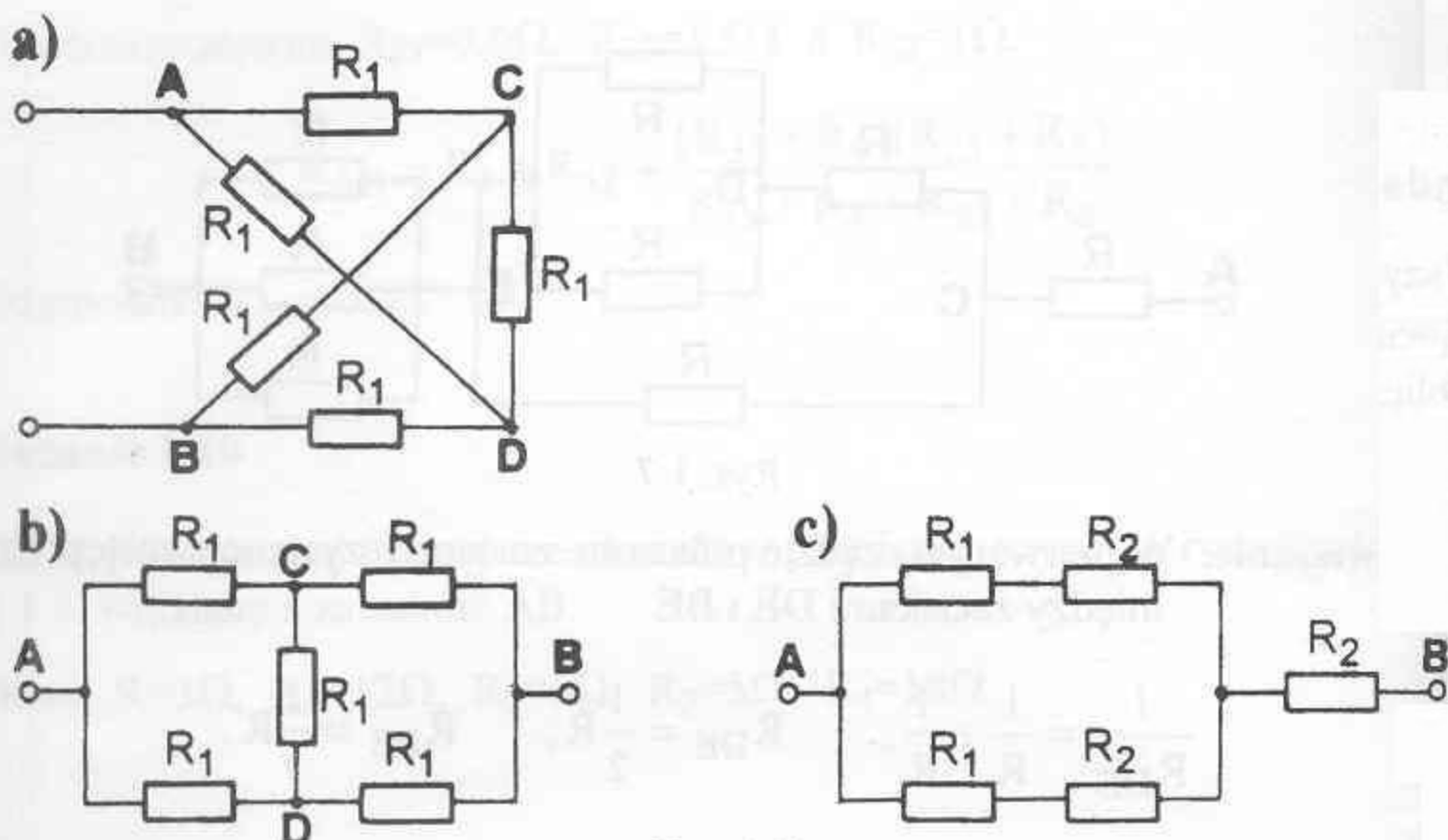
$$R_{AB} = R_{AC} + R_{CE} + R_{BE} = R + \frac{3}{5}R + \frac{1}{3}R = \frac{29}{15}R.$$

**Odpowiedź:**  $R_{AB} = 29\Omega$ .

### Zadanie 1.12

Wszystkie rezystancje sieci przedstawionej na rysunku 1.8a mają wartości  $R_1 = 5\Omega$ .

Obliczyć rezystancję zastępczą na zaciskach AB.



Rys. 1.8

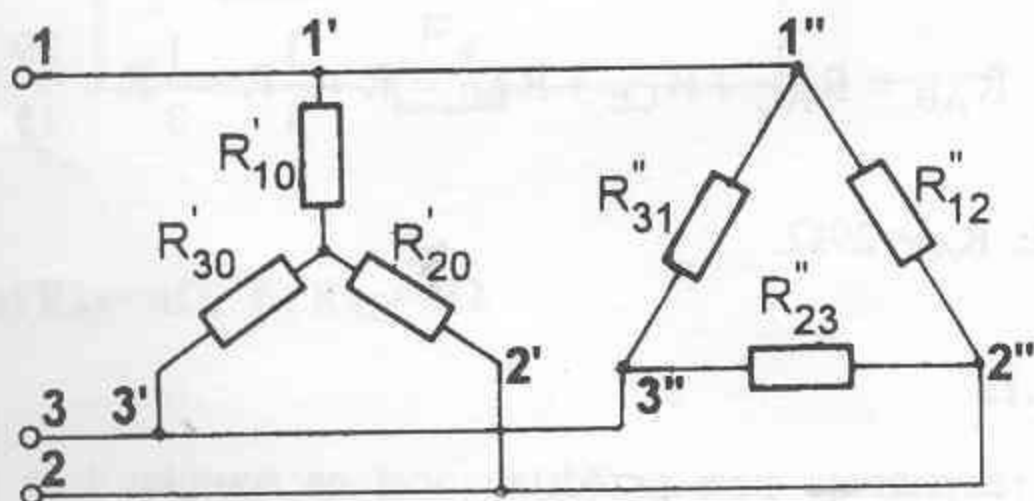
**Rozwiązanie:** Stosując przekształcenie trójkąt-gwiazda rys. 1.8b i 1.8c, uzyskuje się

$$R_2 = \frac{1}{3}R_1, \quad \text{a stąd} \quad R_{AB} = \frac{R_1 + R_2}{2} + R_2 = \frac{R_1 + 3R_2}{2}, \quad R_{AB} = R_1.$$

**Odpowiedź:**  $R_{AB} = 5\Omega$ .

### Zadanie 1.13

Obliczyć parametry gwiazdy zastępczej dla układu przedstawionego na rysunku 1.9.



Rys. 1.9

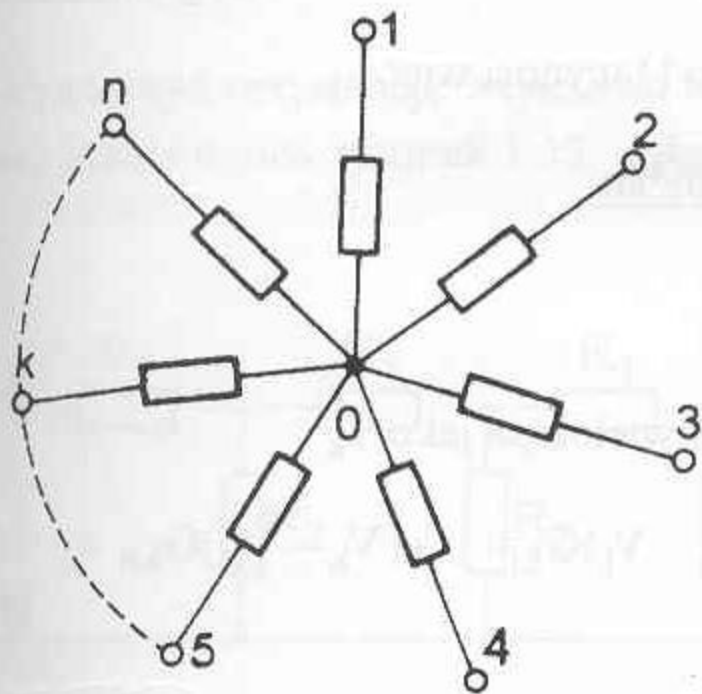
Dane:

$$R'_{10} = 56\Omega, R'_{20} = 14\Omega, R'_{30} = 28\Omega, R''_{12} = 98\Omega, R''_{23} = 49\Omega, R''_{31} = 196\Omega.$$

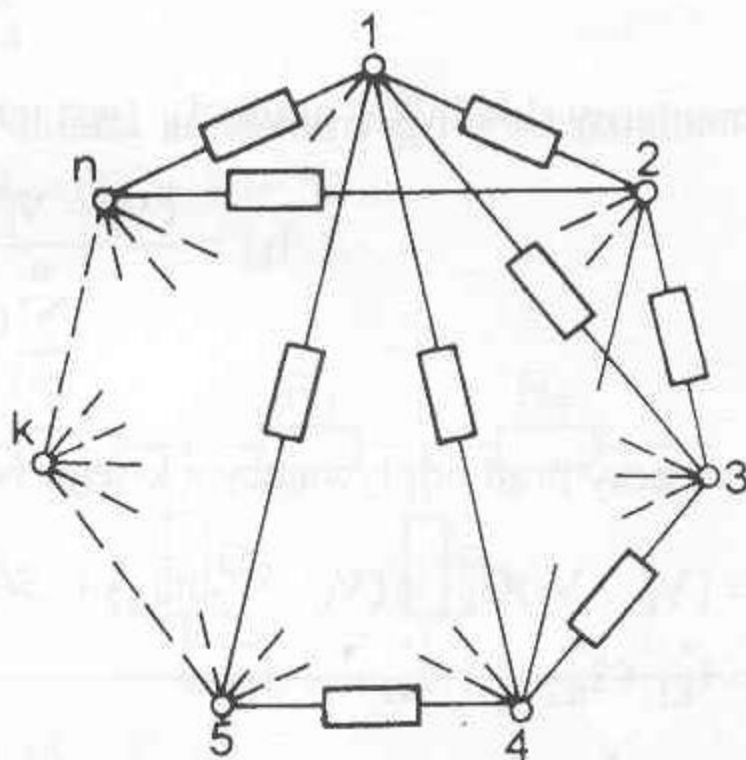
Odpowiedź:  $R_{10}=28\Omega, R_{20}=7\Omega, R_{30}=14\Omega$ .

### Zadanie 1.14

Wyprowadź wzór na przekształcenie n-ramiennej gwiazdy rezystancji jak na rys. 1.10 w równoważny wielokąt rezystancji jak na rys. 1.11,  $R_{k0}$ -rezystancja k-tej gałęzi gwiazdy,  $R_{kl}$ -rezystancja pomiędzy węzłami k i l wielokąta.



Rys. 1.10



Rys. 1.11

**Rozwiązanie:** Potencjały węzłów wynoszą odpowiednio  $V_1, V_2, V_3, V_4, \dots, V_k, \dots, V_n$ . Prąd od k-tego punktu gwiazdy do jej środka można zapisać wzorem  $I'_k = G_{k0}(V_k - V_0)$ , gdzie  $I'_k$  - prąd k-tej gałęzi gwiazdy,  $V_0$  - potencjał punktu środka gwiazdy (niekoniecznie równy zero).

Dla punktu 0 ważne jest I prawo Kirchhoffa 
$$\sum_{k=1}^n I'_k = 0,$$

$$(V_1 - V_0)G_{10} + (V_2 - V_0)G_{20} + \dots + (V_k - V_0)G_{k0} + \dots + (V_n - V_0)G_{n0} = 0.$$

Z wyrażenia tego łatwo określa się potencjał o numerze 0 ( $V_0$ ).

$$V_0 = \frac{G_{10}V_1 + G_{20}V_2 + \dots + G_{k0}V_k + \dots + G_{n0}V_n}{G_{10} + G_{20} + \dots + G_{k0} + \dots + G_{n0}},$$

a po wstawieniu do poprzedniego wzoru uzyskuje się:

$$\begin{aligned} I'_k &= V_k G_{k0} - V_0 G_{k0} = V_k G_{k0} - \frac{V_1 G_{10} + V_2 G_{20} + \dots + V_k G_{k0} + \dots + V_n G_{n0}}{G_{10} + G_{20} + \dots + G_{k0} + \dots + G_{n0}} G_{k0} = \\ &= \frac{(V_k - V_1)G_{10}G_{k0} + (V_k - V_2)G_{20}G_{k0} + \dots + (V_k - V_k)G_{k0}^2 + \dots + (V_k - V_n)G_{n0}G_{k0}}{\sum_{k=1}^n G_{k0}} \end{aligned}$$

Elementarny składnik i prądu  $I'_k$  (jest ich  $n-1$ ) wynosi więc:

$$I'_{ki} = \frac{(V_k - V_i)G_{i0}G_{k0}}{\sum_{k=1}^n G_{k0}}.$$

Oznaczamy prąd odpływający z  $k$ -tego węzła wielokąta jako  $I''_k$

$$\begin{aligned} I''_k &= (V_k - V_1)G_{k1} + (V_k - V_2)G_{k2} + \dots + (V_k - V_1)G_{k1} + \dots + (V_k - V_n)G_{kn} = \\ &= I''_{k1} + I''_{k2} + \dots + I''_{k1} + \dots + I''_{kn}. \end{aligned}$$

Ogólnie  $I''_{kl} = (V_k - V_l)G_{kl}$  (składników takich jest również  $n-1$ ). W związku z tym warunek równoważności jest następujący  $I'_{kl} = I''_{kl}$ , czyli

$$G_{kl} = \frac{G_{i0}G_{k0}}{\sum_{k=1}^n G_{k0}}.$$

**Przykład: Dane:**  $G_{10}, G_{20}, G_{30}$  obliczyć  $G_{12}, G_{23}, G_{31}$ ,

$$G_{12} = \frac{G_{10}G_{20}}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} \text{ przy przejściu z gwiazdy trójramiennej na trójkąt.}$$

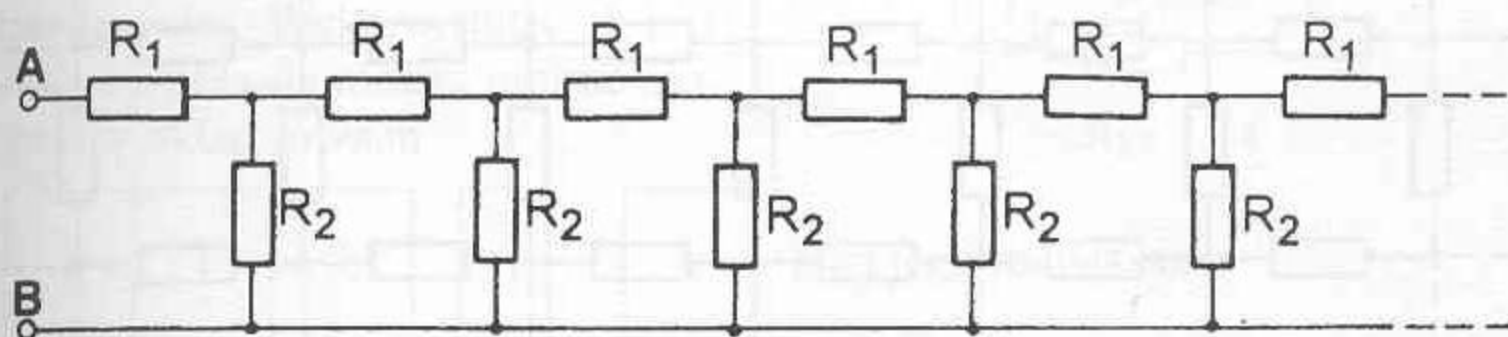
W zapisie rezystancyjnym  $R_{12} = R_{10} + R_{20} + \frac{R_{10}R_{20}}{R_{30}}$ . W prosty sposób

określić można liczbę rezystorów  $R_{ik}$ , ponieważ liczba wierzchołków wielokąta wynosi  $n$ , a ilość gałęzi-prądów z jednego punktu  $(n-1)$ . Każda gałąź łączy dwa punkty, a więc liczba gałęzi wynosi  $g = \frac{n}{2}(n-1)$ , np. dla  $n=3$ ,  $g=3$ ,  $n=4$ ,  $g=6$ ,  $n=5$ ,  $g=10$ .

**Uwaga!** Postępowanie odwrotne możliwe jest tylko dla  $n = 3 \frac{n}{2}(n-1)$  równań.

### Zadanie 1.15

Wyznaczyć rezystancję wejściową  $R_{AB}$  układu łańcuchowego o nieskończonej liczbie ogniw rysunek 1.12, gdzie  $R_1=1\Omega$  a  $R_2=2\Omega$ .



Rys. 1.12

**Rozwiązanie:** Ponieważ układ łańcuchowy posiada nieskończoną liczbę ogniw, to rezystancja wejściowa będzie taka sama, gdy punkty AB przesunie się o jedno ogniwo w prawo.

$$R_{AB} = R_1 + \frac{R_2 R_{AB}}{R_2 + R_{AB}}, \quad R_{AB}^2 - R_1 R_{AB} - R_1 R_2 = 0, \quad \Delta = R_1^2 + 4R_1 R_2.$$

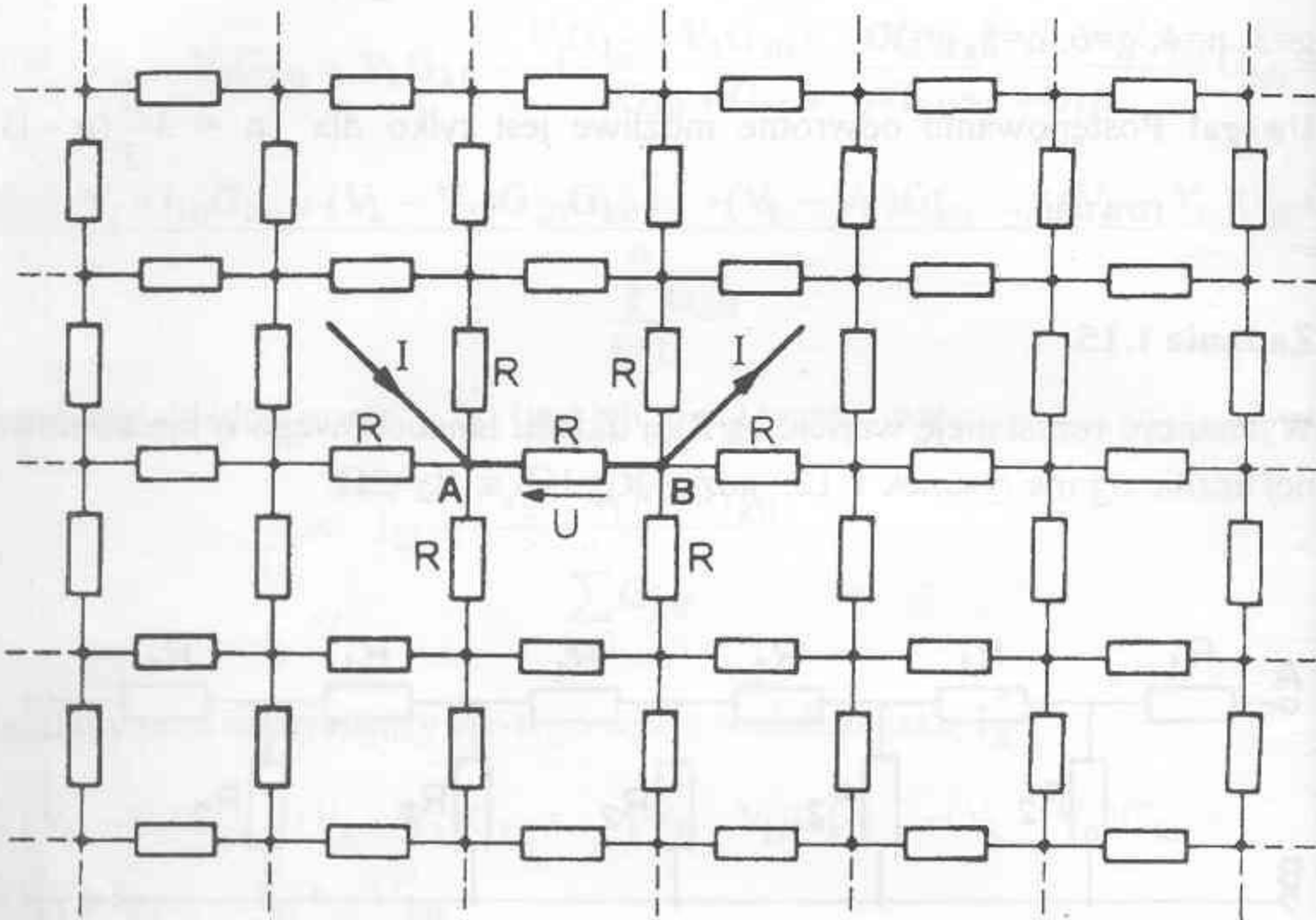
Logiczny jest tylko wzór 
$$R_{AB} = \frac{R_1 + \sqrt{R_1(R_1 + 4R_2)}}{2}$$

**Odpowiedź:**  $R_{AB} = 2\Omega$ .

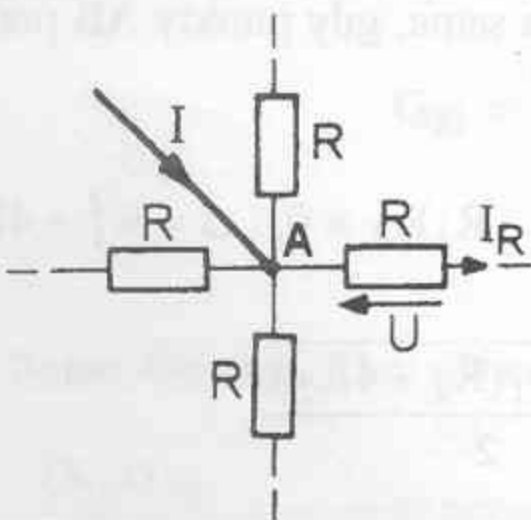


### Zadanie 1.16

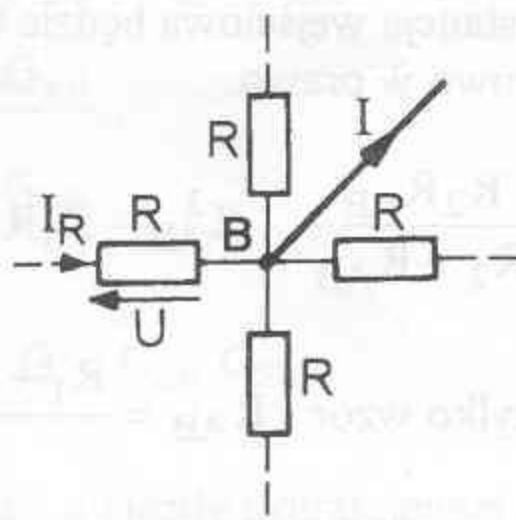
Wyznaczyć rezystancję między dwoma sąsiednimi punktami nieskończonej symetrycznej kwadratowej sieci elektrycznej rys. 1.13a jeżeli wiadomo, że rezystancja jednej krawędzi sieci  $R = 1\Omega$ .



Rys. 1.13a



Rys. 1.13b



Rys. 1.13c

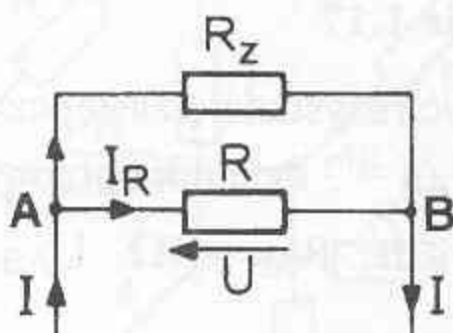
**Rozwiązanie:**

Źródła prądowe  $I$  rys. 1.13b i 1.13c mają swoje drugie bieguny w nieskończoności, a prąd płynący przez rezystor  $R$  między punktami  $A$  i  $B$  rys. 1.13d wynosi

$$I_R = \frac{1}{2}I, \quad R_{AB} = \frac{U}{I}, \quad R = \frac{U}{I_R},$$

a więc

$$U = R \cdot I_R, \quad R_{AB} = \frac{RI_R}{I} = \frac{1}{2}R.$$



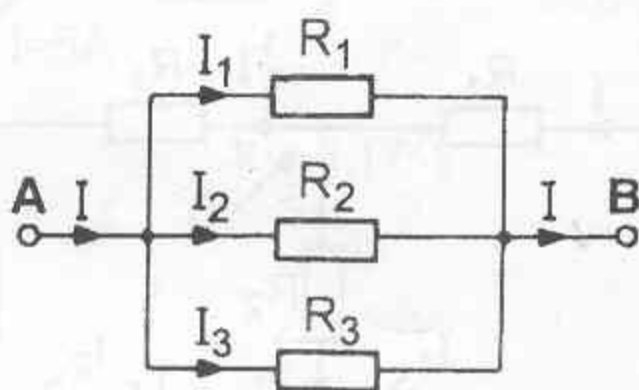
Rys. 1.13d

**Odpowiedź:**  $R_{AB} = 0,5\Omega$ .

**Zadanie 1.18**

Obliczyć rozplływ prądów w dzielniku prądowym o danych  $I = 147A$ ,  $R_1 = 7\Omega$ ,  $R_2 = 14\Omega$ ,  $R_3 = 28\Omega$ . Dzielnik ten przedstawiono na rys. 1.14.

**Rozwiązanie:** Wykorzystując I i II prawo Kirchhoffa można zapisać następujący układ równań.



Rys. 1.14

1	1	1	$I_1$	=	$I$
$R_1$	$-R_2$	0	$I_2$	=	0
0	$R_2$	$-R_3$	$I_3$	=	0

a po jego rozwiązaniu

$$W = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1,$$

$$W_1 = R_2R_3I,$$

$$W_2 = R_3R_1I, \quad W_3 = R_1R_2I$$

1	1	1	$I_1$	=	147
7	-14	0	$I_2$	=	0
0	14	-28	$I_3$	=	0

$$I_1 = \frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}I,$$

$$I_2 = \frac{R_3R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}I,$$

$$I_3 = \frac{R_1R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}I.$$

$W=686$ ,  $W_1=57624$ ,  $W_2=28812$ ,  $W_3=14406$ ,  $I_1=84\text{A}$ ,  $I_2=42\text{A}$ ,  $I_3=21\text{A}$ .

**Odpowiedź:**  $I_1 = 84\text{A}$ ,  $I_2 = 42\text{A}$ ,  $I_3 = 21\text{A}$ .

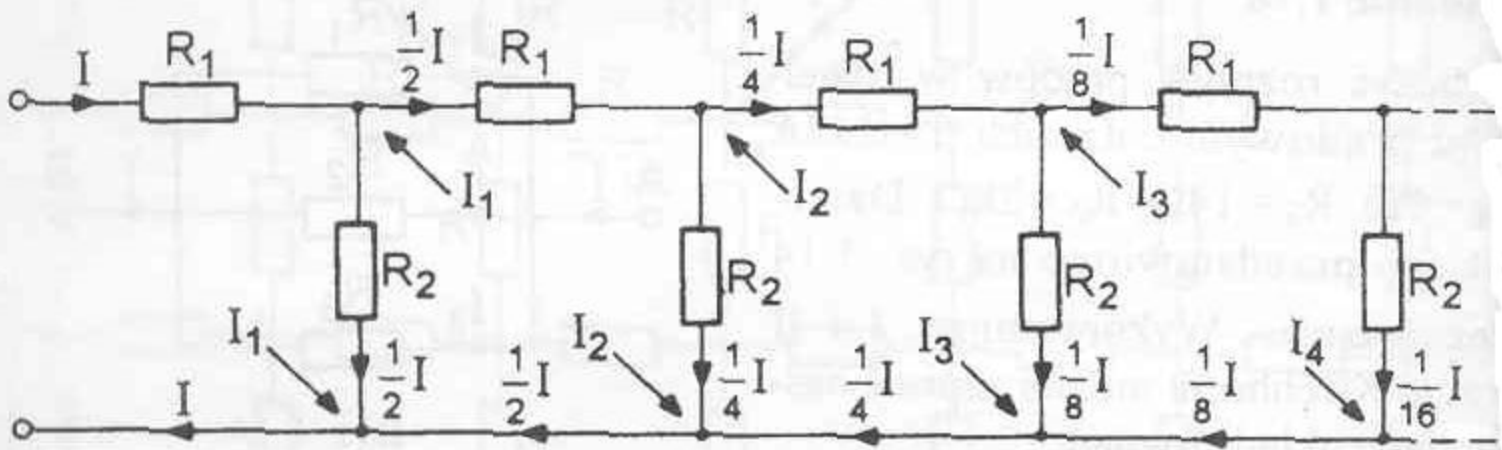
### Zadanie 1.17

Obliczyć rezystancję zastępczą z zacisków AB -  $R_{AB}$  oraz napięcie na zaciskach  $U_{AB} = ?$  dzielnika prądu z poprzedniego zadania.

**Odpowiedź:**  $R_{AB} = 4\Omega$ ,  $U_{AB} = 588\text{V}$ .

### Zadanie 1.19

Wyznaczyć rozptyw prądów w nieskończonej drabince złożonej z rezystorów jak na rys.1.15. Prąd wpływający do drabinki  $I=1\text{A}$ ,  $R_1=1\Omega$ ,  $R_2=2\Omega$ .



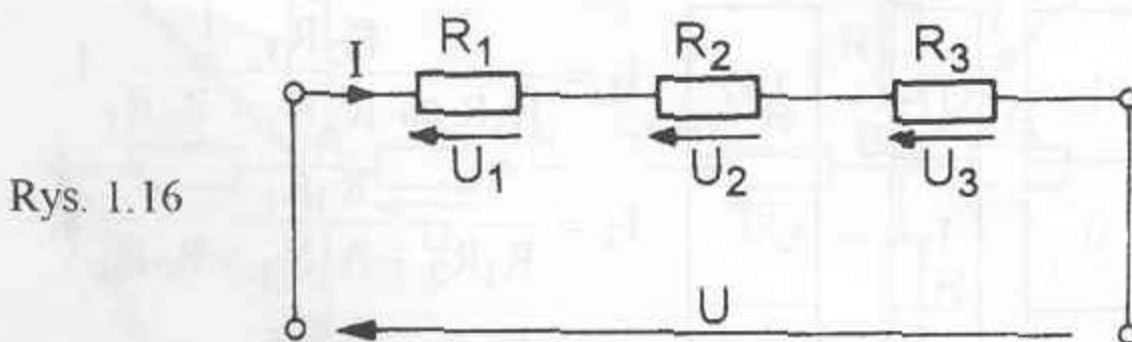
Rys. 1.15

**Odpowiedź:**  $I_k = \frac{1}{2^k} \text{A}$  od  $k=1$  aż do  $n$ .

### Zadanie 1.20

Wyznaczyć podział napięć w układzie szeregowym jak na rysunku 1.16.

**Dane:**  $U=220\text{V}$ ,  $R_1=4\Omega$ ,  $R_2=7\Omega$ ,  $R_3=11\Omega$ .



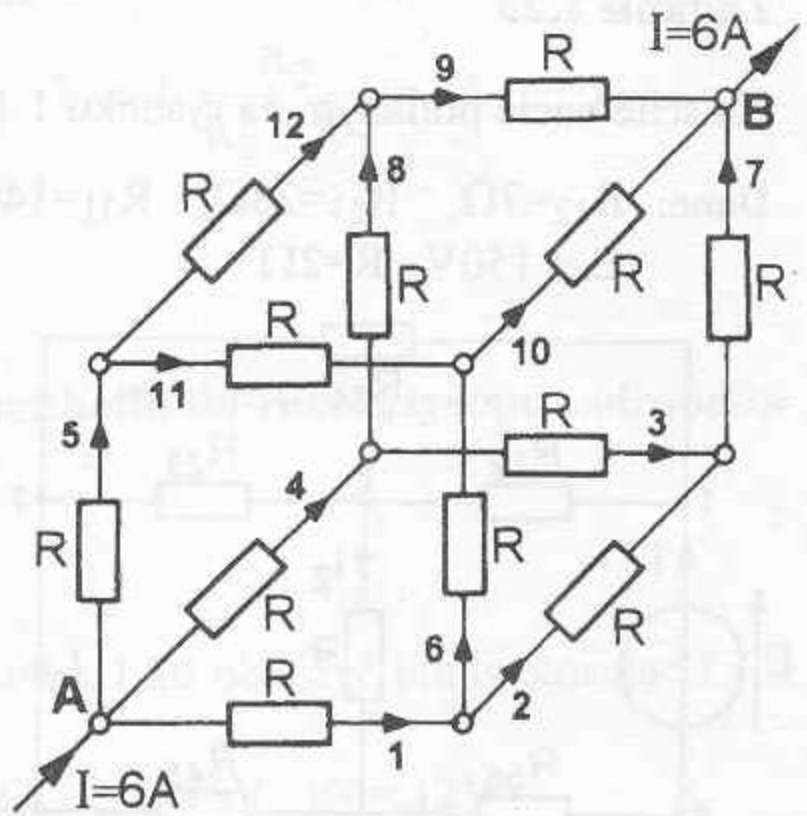
Rys. 1.16

**Odpowiedź:**  $U_1 = 40\text{V}$ ,  $U_2 = 70\text{V}$ ,  $U_3 = 110\text{V}$ .

**Zadanie 1.21**

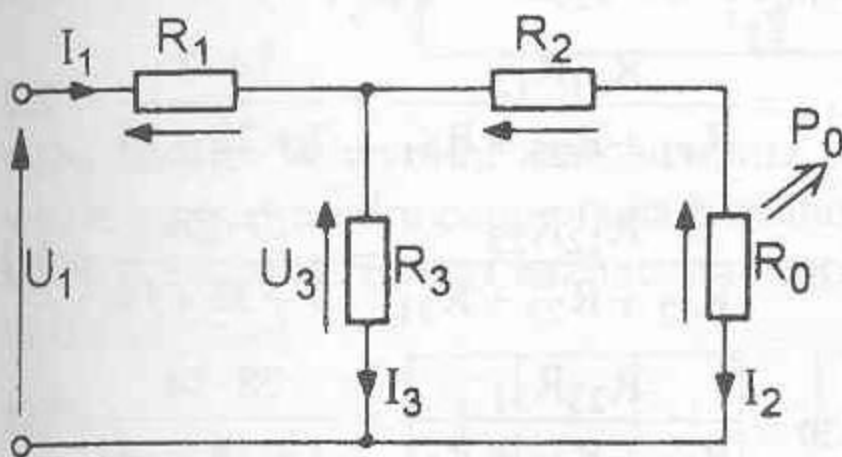
W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.17 obliczyć rozptyw prądów w poszczególnych gałęziach oraz rezystancję zastępczą widzianą z zacisków AB. Rezystancje każdej krawędzi sześcianu są takie same  $R = 6\Omega$ , a prądy dopływający do węzła A i odpływający z węzła B wynoszą  $I = 6A$ .

Wskazówka: Wykorzystać regułę dzielnika prądów



Odpowiedź:  $I_1 = I_4 = I_5 = I_7 = I_9 = I_{10} = 2A$ ,  
 $I_2 = I_3 = I_6 = I_8 = I_{11} = I_{12} = 1A$ ,  
 $R_{AB} = 5\Omega$ .

Rys. 1.17

**Zadanie 1.22**

Rys. 1.18

Rozwiązanie:

$$P_0 = R_0 I_2^2 \quad \text{to} \quad I_2 = \sqrt{\frac{P}{R_0}} = \sqrt{\frac{640}{10}} = 8A,$$

$$U_3 = (R_0 + R_2) I_2 = 25 \cdot 8 = 200V, \quad I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{200}{50} = 4A,$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 8 + 4 = 12A, \quad U_1 = R_1 I_1 + U_3 = 2 \cdot 12 + 200 = 224V.$$

Odpowiedź: Napięcie zasilające  $U_1 = 224V$ .

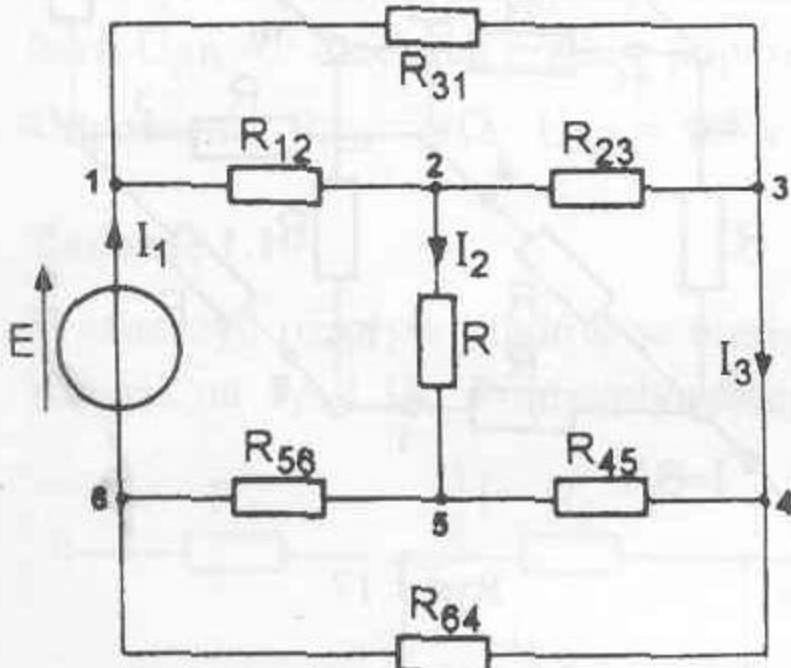
W obwodzie pokazanym na rysunku 1.18 obliczyć napięcie  $U_1$ , jeżeli moc pobrana przez rezystor  $R_0$ ,  $P_0 = 640W$ .

Dane:  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 15\Omega$ ,  
 $R_3 = 50\Omega$ ,  $R_0 = 10\Omega$ .

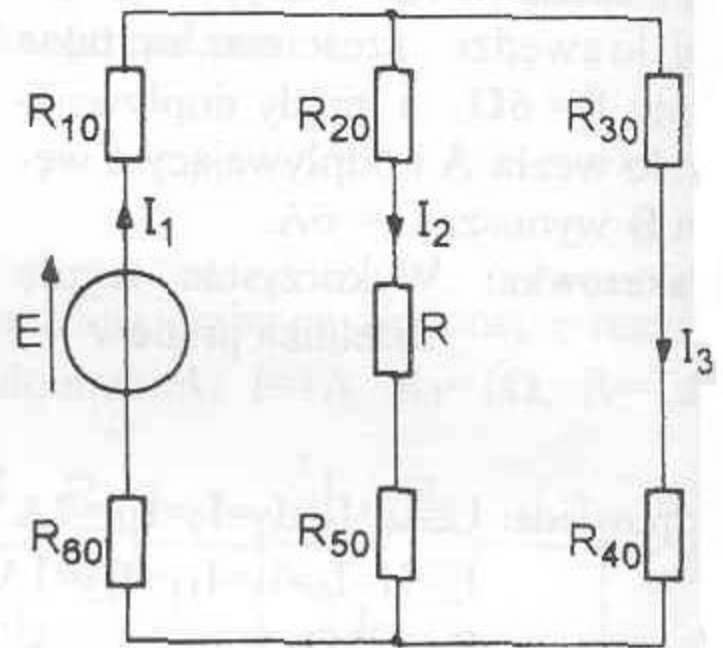
## Zadanie 1.23

Na schemacie podanym na rysunku 1.19a obliczyć prądy  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .

Dane:  $R_{12}=7\Omega$ ,  $R_{23}=28\Omega$ ,  $R_{31}=14\Omega$ ,  $R_{45}=7\Omega$ ,  $R_{56}=28\Omega$ ,  $R_{64}=14\Omega$ ,  
 $E = 150V$ ,  $R=2\Omega$ .

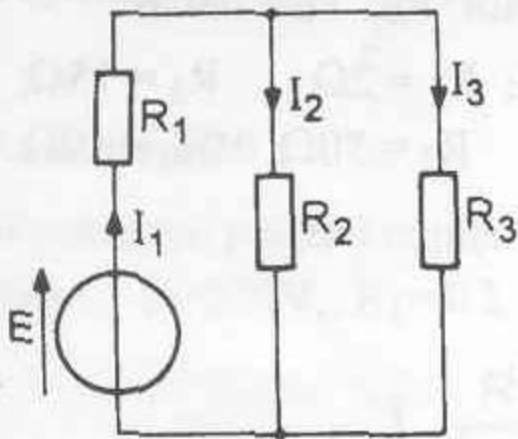


Rys. 1.19a



Rys. 1.19b.

Rysunki 1.19b i 1.19c przedstawiają obwód wyjściowy po przekształceniach



Rys. 1.19c

$$R_{10} = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{14 \cdot 7}{7 + 28 + 14} = 2\Omega,$$

$$R_{20} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{7 \cdot 28}{7 + 28 + 14} = 4\Omega,$$

$$R_{30} = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{28 \cdot 14}{7 + 28 + 14} = 8\Omega,$$

$$R_{40}=R_{10}=2\Omega, \quad R_{50}=R_{20}=4\Omega, \quad R_{60}=R_{30}=8\Omega,$$

$$R_1=R_{10}+R_{60}=2+8=10\Omega,$$

$$R_2=R_{20}+R+R_{50}=4+2+4=10\Omega, \quad R_3=R_{30}+R_{40}=8+2=10\Omega, \quad R_{23} \text{ z rys. 1.19c,}$$

$$R_{23}=5\Omega, \quad I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{23}} = \frac{150}{15} = 10 \text{ A.}$$

W takim razie z zasady dzielnika prądu

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 5A, \quad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 5A.$$

Odpowiedź:  $I_1=10A$ ,  $I_2=I_3=5A$ .

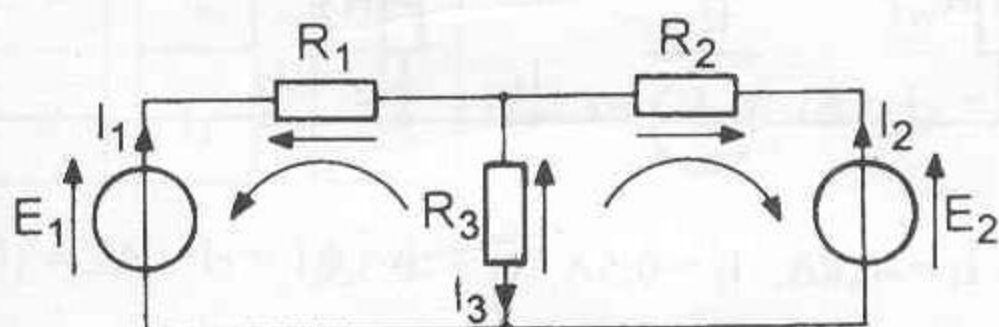
## 1.2. Zastosowanie I i II prawa Kirchhoffa do rozwiązywania obwodów elektrycznych

### Zadanie 1.24

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.20 obliczyć prądy stosując I i II prawo Kirchhoffa.

Dane:  $R_1 = 10\Omega$ ,  $R_2 = 2,5\Omega$ ,  $R_3 = 5\Omega$ ,  $E_1 = 15V$ ,  $E_2 = 12V$ .

Rys. 1.20



**Rozwiązanie:** W wyniku zastosowania pierwszego prawa Kirchhoffa do węzła górnego i drugiego prawa Kirchhoffa dla dwóch niezależnych oczek, których dodatnie obiegi zaznaczono strzałkami, otrzymano następujący układ równań:

1	1	-1
10	0	5
0	2,5	5

$I_1$	=	0
$I_2$	=	15
$I_3$	=	12

$$W = -87,5, \quad W_1 = -52,5, \quad W_2 = -105, \quad W_3 = -157,5,$$

$$I_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-52,5}{-87,5} = 0,6A, \quad I_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{-105}{-87,5} = 1,2A,$$

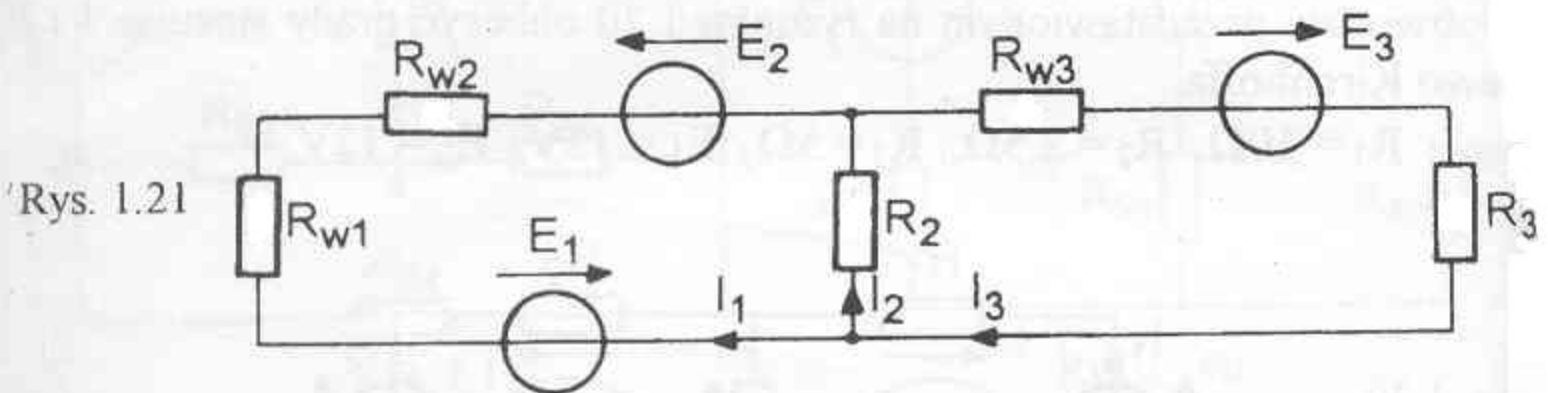
$$I_3 = \frac{W_3}{W} = \frac{-157,5}{-87,5} = 1,8A.$$

**Odpowiedź:**  $I_1 = 0,6A$ ,  $I_2 = 1,2A$ ,  $I_3 = 1,8A$ .

### Zadanie 1.25

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.21 obliczyć prądy stosując I i II prawo Kirchhoffa.

**Dane:**  $E_1 = 6,2V$ ,  $E_2 = 12,6V$ ,  $E_3 = 4,6V$ ,  $R_{w1} = 5\Omega$ ,  $R_{w2} = 6\Omega$ ,  $R_{w3} = 3\Omega$ ,  
 $R_2 = 20\Omega$ ,  $R_3 = 15\Omega$ .

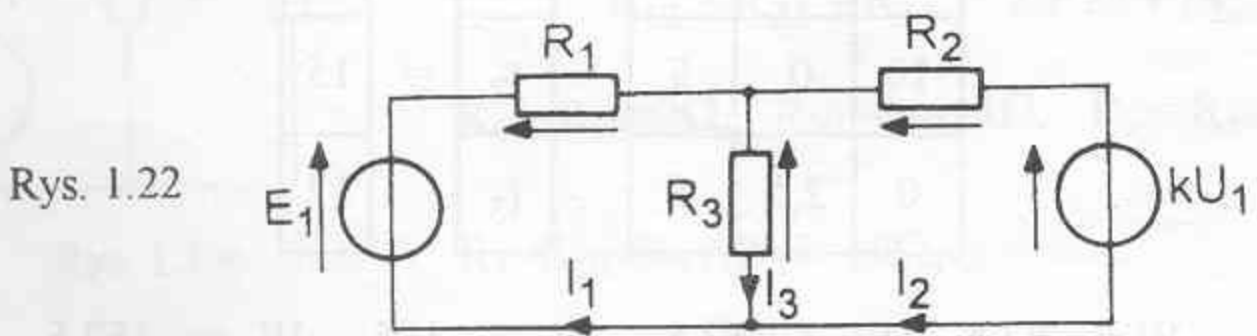


**Odpowiedź:**  $I_1 = -0,8A$ ,  $I_2 = 0,5A$ ,  $I_3 = -0,3A$ .

### Zadanie 1.26

Stosując prawa Kirchhoffa obliczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.22.

**Dane:**  $E_1 = 10V$ ,  $k = \frac{1}{3}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$ .



Dodatknie obiegi oczek obrano zgodnie z ruchem wskazówek zegara

**Rozwiązanie:** Dla górnego węzła i dwóch niezależnych oczek uzyskano następujący układ równań:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline -R_1 & 0 & -R_3 \\ \hline 0 & -R_2 & R_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline I_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline -E_1 \\ \hline kR_1 I_1 \\ \hline \end{array}$$

Po przeniesieniu niewiadomej  $I_1$  na lewą stronę, równania przyjmują postać:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline -R_1 & 0 & -R_3 \\ \hline -kR_1 & -R_2 & R_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline I_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline -E_1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline -2 & 0 & -2 \\ \hline -\frac{2}{3} & -2 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline I_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline -10 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$$W = -13\frac{1}{3}, \quad W_1 = -40, \quad W_2 = -13\frac{1}{3},$$

$$W_3 = -26\frac{2}{3},$$

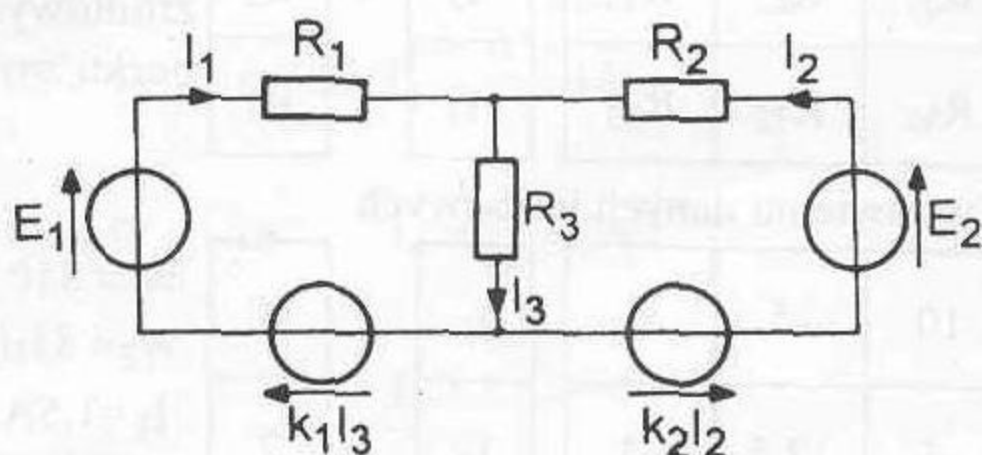
$$I_1 = 3A, \quad I_2 = 1A, \quad I_3 = 2A.$$

**Odpowiedź:**  $I_1 = 3A$ ;  $I_2 = 1A$ ;  $I_3 = 2A$ .

### Zadanie 1.27

Stosując prawa Kirchhoffa obliczyć rozptyw prądów w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.23.

**Dane:**  $E_1 = 24V$ ,  
 $E_2 = 48V$ ,  
 $R_1 = 4\Omega$ ,  
 $R_2 = 12\Omega$ ,  
 $R_3 = 3\Omega$ ,  
 $k_1 = 2,5\Omega$ ,  
 $k_2 = 4\Omega$ .



Rys. 1.23

**Odpowiedź:**  $I_1 = 5A$ ,  $I_2 = 3A$ ,  $I_3 = 8A$ .

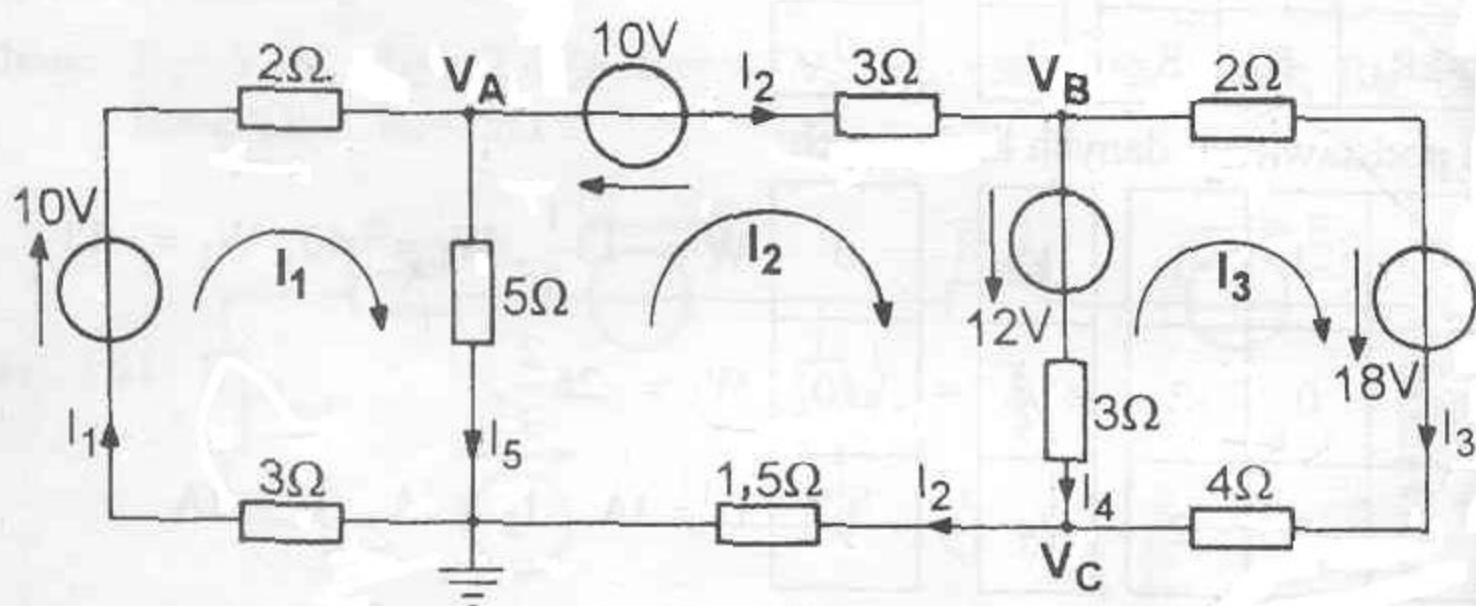


### 1.3. Metoda prądów oczkowych i potencjałów węzłowych

#### Zadanie 1.28

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.24 wyznaczyć rozptyw prądów

- metodą oczkową,
- metodą potencjałów węzłowych.



Rys. 1.24

**Rozwiązanie:** a) metoda prądów oczkowych.

Prądy oczkowe wybrano tak, że odpowiadają one prądom gałęziowym o tym samym indeksach.

$R_{11}$	$R_{12}$	$R_{13}$	$I_1$	=	$E_1$
$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{23}$	$I_2$		$E_2$
$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{33}$	$I_3$		$E_3$

Napięcia źródłowe  $E_1$ ,  $E_2$  i  $E_3$  odpowiadają tu sumom napięć źródłowych działających w danym oczku z uwzględnieniem znaków.

Po wstawieniu danych liczbowych:

10	-5	0	$I_1$	=	10
-5	12,5	-3	$I_2$		2
0	-3	9	$I_3$		6

$$\begin{aligned}
 W &= 810, & W_1 &= 1215, \\
 W_2 &= 810, & W_3 &= 810, \\
 I_1 &= 1,5\text{A}, & I_2 &= 1\text{A}, & I_3 &= 1\text{A}, \\
 I_4 &= I_2 - I_3 = 1 - 1 = 0\text{A}, \\
 I_5 &= I_1 - I_2 = 1,5 - 1 = 0,5\text{A}.
 \end{aligned}$$

## b) metoda potencjałów węzłowych.

Jako węzły o potencjałach różnych od zera wybrano punkty A, B, C.

Równania dla metody potencjałów węzłowych mają następującą postać:

$G_{11}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$V_A$
$G_{21}$	$G_{22}$	$G_{23}$	$V_B$
$G_{31}$	$G_{32}$	$G_{33}$	$V_C$

 $=$ 

$I_{zr1}$
$I_{zr2}$
$I_{zr3}$

Prądy źródłowe  $I_{zr1}$ ,  $I_{zr2}$  i  $I_{zr3}$  odpowiadają tu sumom prądów źródłowych danego węzła z uwzględnieniem znaku.

Po podstawieniu danych liczbowych:

$\frac{11}{15}$	$-\frac{1}{3}$	0	$V_A$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$V_B$
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	$V_C$

 $=$ 

$\frac{16}{3}$
$-\frac{31}{3}$
$\frac{21}{3}$

$W = 0,4$ ,  $W_A = 1$ ,  $W_B = -4,2$ ,  
 $W_C = 0,6$ ,  $V_A = 2,5V$ ,  
 $V_B = -10,5V$ ,  $V_C = 1,5V$ .

Poszczególne prądy obliczone zostały na podstawie II prawa Kirchhoffa

$$10 - 5I_1 - 2,5 = 0 \quad \text{to} \quad I_1 = \frac{7,5}{5} = 1,5A,$$

$$2,5 - 10 - 3I_2 + 10,5 = 0 \quad \text{to} \quad I_2 = \frac{3}{3} = 1A,$$

$$-10,5 + 18 - 6I_3 - 1,5 = 0 \quad \text{to} \quad I_3 = \frac{6}{6} = 1A,$$

$$-10,5 + 12 - 3I_4 - 1,5 = 0 \quad \text{to} \quad I_4 = \frac{0}{3} = 0A,$$

$$I_5 = \frac{2,5}{5} = 0,5A.$$

**Odpowiedź:**  $I_1 = 1,5A$ ,  $I_2 = 1A$ ,  $I_3 = 1A$ ,  $I_4 = 0A$ ,  $I_5 = 0,5A$ .

**Zadanie 1.29**

W obwodzie pokazanym na rysunku 1.25 obliczyć rozptyw prądów stosując dwie metody:

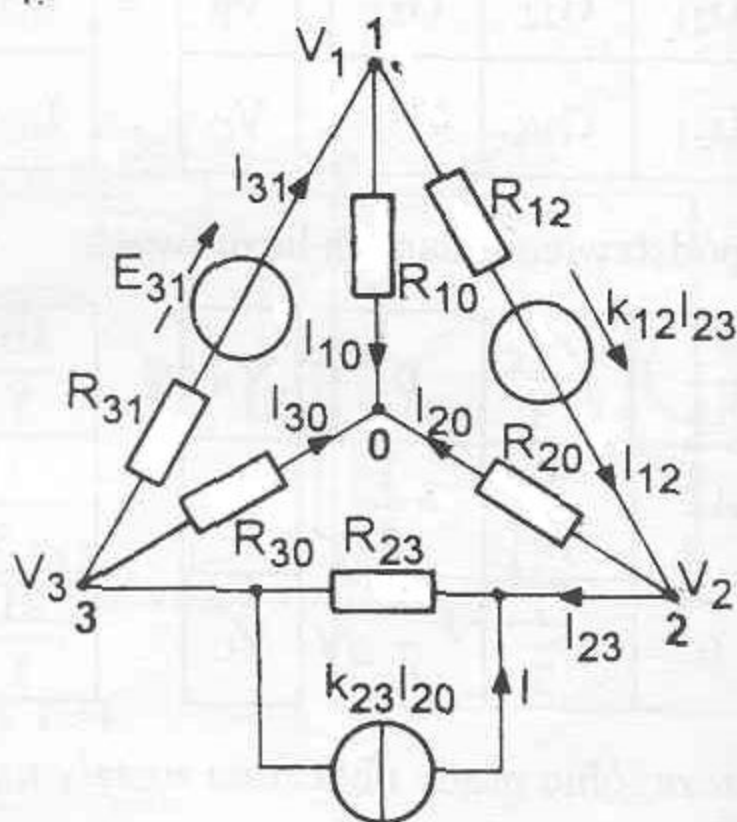
a) metodę prądów oczkowych, b) metodę potencjałów węzłowych.

Dane:  $R_{10} = R_{20} = R_{30} = 3\Omega$ ,  $R_{12} = 1\Omega$ ,  $R_{23} = 3\Omega$ ,  $R_{31} = 1\Omega$ ,  
 $E_{31} = 7V$ ,  $k_{12} = 2\Omega$ ,  $k_{23} = 4$ .

**Rozwiązanie:**

a) metoda prądów oczkowych.

Źródło prądowe sterowane prądowo zostanie zamienione na odpowiednie źródło sterowane napięciowe. Prądy oczkowe zostaną wybrane jako prądy gałęziowe  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$ .



Rys. 1.25

Układ równań dla metody oczkowejj

$R_{11}$	$R_{12}$	$R_{13}$
$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{23}$
$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{33}$

$I_{12}$
$I_{23}$
$I_{31}$

 $=$ 

$k_{12} I_{23}$
$-R_{23} k_{23} I_{20}$
$E_{31}$

 $I_{20} = I_{12} - I_{23}$

Po wstawieniu danych i przeniesieniu niewiadomych na lewą stronę układu równań otrzymuje się:

7	-5	-3
9	-3	-3
-3	-3	7

$I_{12}$
$I_{23}$
$I_{31}$

 $=$ 

0
0
7

 $W = 168$ ,  $W_1 = 42$ ,  $W_2 = -42$ ,  
 $W_3 = 168$ ,  $I_{12} = 0,25A$ ,  
 $I_{23} = -0,25A$ ,  $I_{31} = 1A$ .

$$I_{10} = I_{31} - I_{12} = 1 - 0,25 = 0,75 \text{ A},$$

$$I_{20} = I_{12} - I_{23} = 0,25 + 0,25 = 0,5 \text{ A},$$

$$I_{30} = I_{23} - I_{31} = -0,25 - 1 = -1,25 \text{ A}.$$

b) metoda potencjałów węzłowych.

Jako punkty z niewiadomymi potencjałami obrane zostały węzły 1,2,3. Źródło napięciowe sterowane prądowo zostanie przekształcone w odpowiednie źródło prądowe, podobnie źródło  $E_{31}$ .

$G_{11}$	$G_{12}$	$G_{13}$
$G_{21}$	$G_{22}$	$G_{23}$
$G_{31}$	$G_{32}$	$G_{33}$

$V_1$
$V_2$
$V_3$

 $=$ 

$G_{31}E_{31} - G_{12}k_{12}I_{23}$
$G_{12}k_{12}I_{23} + k_{23}I_{20}$
$-k_{23}I_{20} - G_{31}E_{31}$

$$\begin{aligned} I_{23} &= G_{23}(V_2 - V_3) - k_{23}G_{20}V_2, \\ I_{20} &= G_{20}V_2, \\ I_{23} &= \frac{1}{3}(V_2 - V_3) - \frac{4}{3}V_2, \\ I_{20} &= \frac{1}{3}V_2. \end{aligned}$$

Po wstawieniu danych

$\frac{7}{3}$	-1	-1
-1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$
-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

$V_1$
$V_2$
$V_3$

 $=$ 

$7 + 2V_2 + \frac{2}{3}V_3$
$-\frac{2}{3}V_2 - \frac{2}{3}V_3$
$-\frac{4}{3}V_2 - 7$

$\frac{7}{3}$	-3	$-\frac{5}{3}$
-1	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$
-1	1	$\frac{5}{3}$

$V_1$
$V_2$
$V_3$

 $=$ 

7
0
-7

$$\begin{aligned} W &= 2\frac{2}{27}, \quad W_1 = 4\frac{2}{3}, \quad W_2 = 3\frac{1}{9}, \\ W_3 &= -7\frac{7}{9}, \quad V_1 = 2,25 \text{ V}, \\ V_2 &= 1,5 \text{ V}, \quad V_3 = -3,75 \text{ V}. \end{aligned}$$

$$I_{10} = \frac{V_1}{R_{10}} = G_{10}V_1 = \frac{2,25}{3} = 0,75 \text{ A}, \quad I_{20} = \frac{V_2}{R_{20}} = G_{20}V_2 = \frac{1,5}{3} = 0,5 \text{ A},$$

$$I_{30} = \frac{V_3}{R_{30}} = G_{30} V_3 = \frac{-3,75}{3} = -1,25A, \quad I_{12} = 0,25A, \quad I_{23} = -0,25A, \quad I_{31} = 1A.$$

Prądy te uzyskuje się z równań oczkowych np. dla oczka 0-1-2-0,

$$V_1 - R_{12}I_{12} + k_{12}I_{23} - V_2 = 0,$$

znając  $I_{23} = -0,25$ ,  $I_{12} = \frac{V_1 - V_2 + k_{12}I_{23}}{R_{12}} = \frac{2,25 - 1,5 - 0,5}{1} = -0,25$  itd.

**Odpowiedź:** Prądy w gałęziach obwodu wynoszą odpowiednio:

$$I_{10} = 0,75A, \quad I_{20} = 0,5A, \quad I_{30} = -1,25A, \quad I_{12} = 0,25A,$$

$$I_{23} = -0,25A, \quad I_{31} = 1A.$$

### Zadanie 1.30

Obliczyć rozptyw prądów w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.26 stosując metodę prądów oczkowych a następnie potencjałów węzłowych.

**Dane:**

$$R_{10} = R_{20} = R_{30} = R_{12} = R_{23} = R_{31} = 1\Omega, \\ E_{23} = 1V, \quad E_{31} = 2V, \quad k = 2.$$

**Rozwiązanie:**

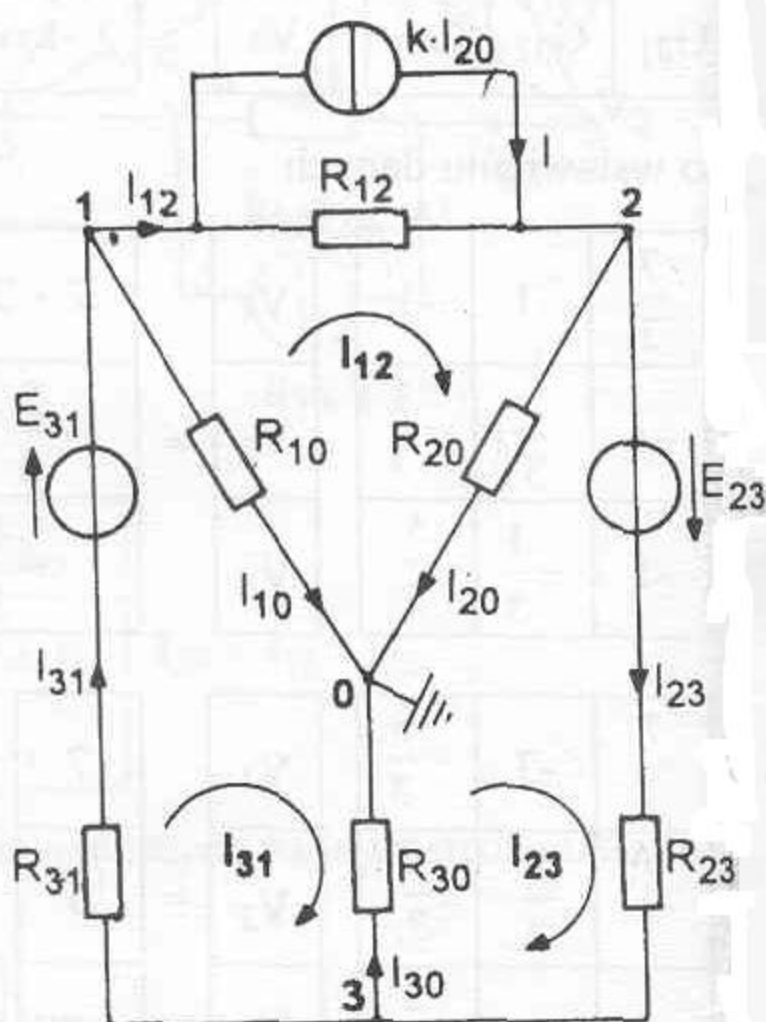
Stosując metodę oczkową, dla której prądy oczkowe odpowiadają prądom gałęziowym  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$ , otrzymuje się następujący układ równań:

$R_{11}$	$R_{12}$	$R_{13}$
$R_{21}$	$R_{22}$	$R_{23}$
$R_{31}$	$R_{32}$	$R_{33}$

$I_{12}$
$I_{23}$
$I_{31}$

 $=$ 

$R_{12}kI_{20}$
$E_{23}$
$E_{31}$



Rys. 1.26

Po wstawieniu danych liczbowych:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 3 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} I_{12} \\ I_{23} \\ I_{31} \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2I_{20} \\ \hline E_{23} \\ \hline E_{31} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 3 & -1 \\ \hline 2 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} I_{12} \\ I_{23} \\ I_{31} \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} W = 8, W_1 = 2, W_2 = 6, W_3 = 8, \\ I_{12} = 0,25A, I_{23} = 0,75A, \\ I_{31} = 1A. \end{array}$$

$$I_{10} = I_{31} - I_{12} = 1 - 0,25 = 0,75A,$$

$$I_{20} = I_{12} - I_{23} = 0,25 - 0,75 = -0,5A,$$

$$I_{30} = I_{23} - I_{31} = 0,75 - 1 = -0,25A.$$

Metoda potencjałów węzłowych

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ \hline G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ \hline G_{31} & G_{32} & G_{33} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline G_{31}E_{31} - kI_{20} \\ \hline kI_{20} - G_{23}E_{23} \\ \hline G_{23}E_{23} - G_{31}E_{31} \\ \hline \end{array}$$

Po podstawieniu danych liczbowych

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 3 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2 - 2V_2 \\ \hline 2V_2 - 1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} W = 8, W_1 = 6, W_2 = -4, W_3 = -2, \\ V_1 = 0,75V, V_2 = -0,5V, \\ V_3 = -0,25V. \end{array}$$

$$I_{10} = \frac{V_1}{R_{10}} = 0,75A, \quad I_{12} = G_{12}(V_1 - V_2) + k \cdot I_{20} = 1,25 - 1 = 0,25A,$$

$$I_{20} = \frac{V_2}{R_{20}} = -0,5A, \quad I_{23} = G_{23}(E_{23} + V_2 - V_3) = 0,75A,$$

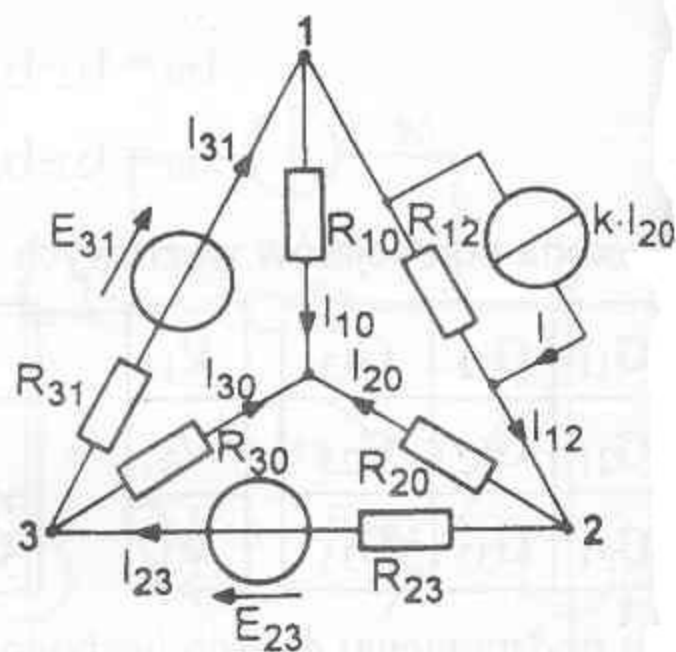
$$I_{30} = \frac{V_3}{R_{30}} = -0,25A, \quad I_{31} = G_{31}(E_{31} - V_1 + V_2) = 1A.$$

**Odpowiedź:** Poszczególne prądy wynoszą odpowiednio:  $I_{10}=0,75A$ ,  $I_{20}=-0,5A$ ,  $I_{30}=-0,25A$ ,  $I_{12}=0,25A$ ,  $I_{23}=0,75A$  i  $I_{31}=1A$ .

### Zadanie 1.31

Obliczyć rozptyw prądów w obwodzie podanym na rysunku 1.27. Obliczenia przeprowadzić stosując metody prądów oczkowych i potencjałów węzłowych.

**Dane obwodu:**  $R_{10}=R_{20}=R_{30}=1\Omega$ ,  
 $R_{12}=R_{23}=R_{31}=2\Omega$ ,  
 $E_{23}=5V$ ,  $E_{31}=10V$ ,  
 $k=2$ .



Rys. 1.27.

**Rozwiązanie:** Stosując metodę prądów oczkowych i zakładając, że prądy  $I_{12}$ ,  $I_{23}$  i  $I_{31}$  są prądami oczkowymi uzyskuje się następujący układ równań:

4	-1	-1
-1	4	-1
-1	-1	4

$I_{12}$
$I_{23}$
$I_{31}$

 $=$ 

$4(I_{12}-I_{23})$
5
10

po sprostowaniu niewiadomych na lewą stronę

0	3	-1
-1	4	-1
-1	-1	4

$I_{12}$
$I_{23}$
$I_{31}$

 $=$ 

0
5
10

$W=10$ ,  $W_1=-45$ ,  $W_2=5$ ,  $W_3=15$ ,  $I_{12}=-4,5A$ ,  $I_{23}=0,5A$ ,  $I_{31}=1,5A$ ,  
 $I_{10}=6A$ ,  $I_{20}=-5A$ ,  $I_{30}=-1A$ .

Stosując metodę potencjałów węzłowych zakładamy, że nieznane są potencjały w węzłach 1,2,3

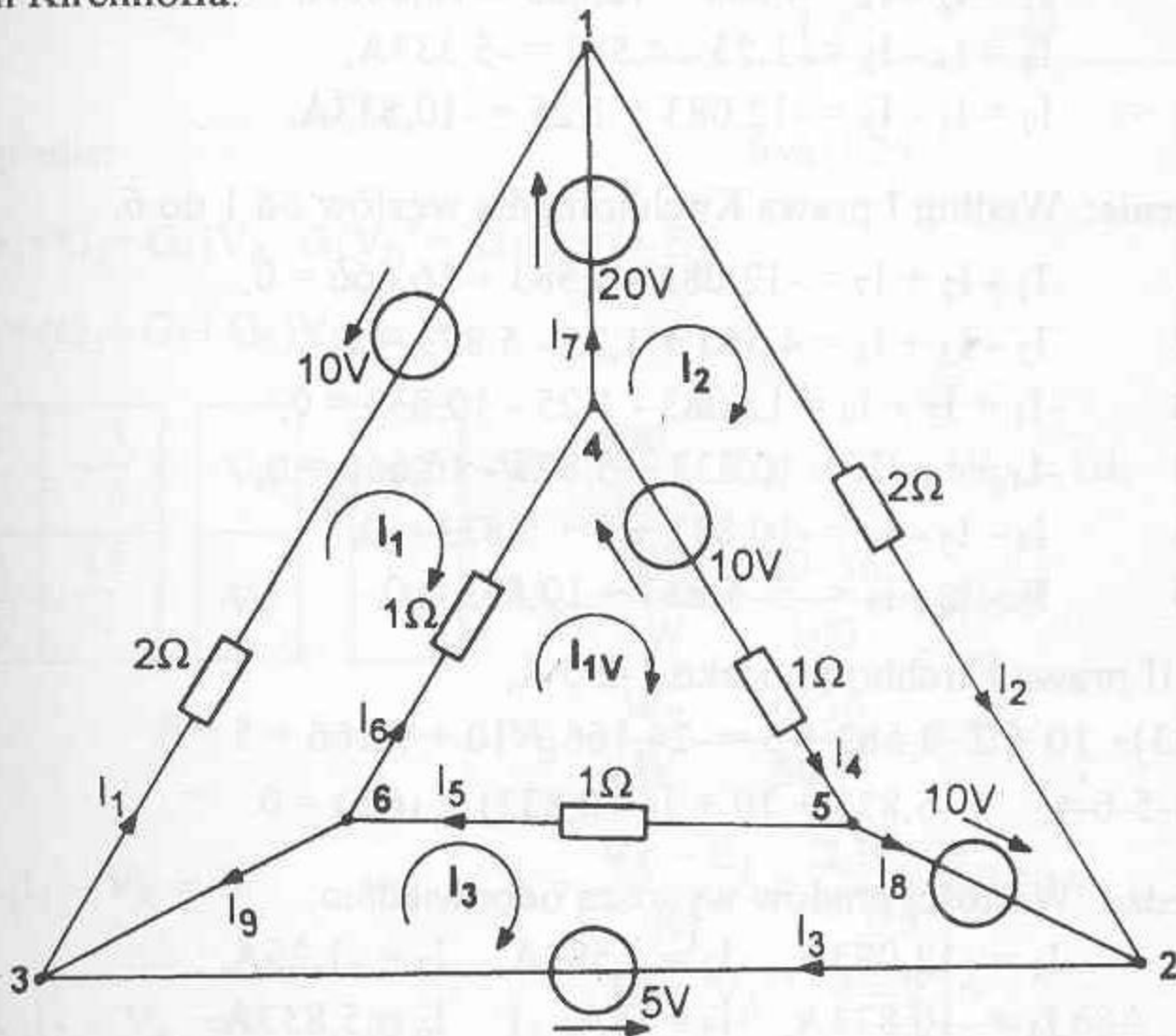
2	-0,5	-0,5	$V_1$	$5-2V_2$	2	1,5	-0,5	$V_1$	5
-0,5	2	-0,5	$V_2$	$-2,5+2V_2$	-0,5	0	-0,5	$V_2$	$-2,5$
-0,5	-0,5	2	$V_3$	$-2,5$	-0,5	-0,5	2	$V_3$	$-2,5$

$$W=1,25, W_1=7,5, W_2=-6,25, W_3=-1,25, V_1=6V, V_2=-5V, V_3=-1V.$$

$$\text{Odpowiedź: } I_{12}=-4,5A, I_{23}=0,5A, I_{31}=1,5A, I_{10}=6A, I_{20}=-5A, I_{30}=-1A.$$

### Zadanie 1.32

Metodą prądów oczkowych wyznaczyć prądy w poszczególnych gałęziach obwodu przedstawionego na rysunku 1.28. Wyniki sprawdzić za pomocą równań Kirchhoffa.



Rys. 1.28



**Rozwiązanie:** Przyjmując, że prądy oczkowe  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$  odpowiadają prądom gałęziowym o tej samej numeracji a prąd oczka wewnętrznego oznaczając jako  $I_{IV}$ , można powyższy schemat opisać następującym układem równań:

3	0	0	-1	$I_1$	-30
0	3	0	-1	$I_2$	20
0	0	1	-1	$I_3$	5
-1	-1	-1	3	$I_{IV}$	-10

=

z obliczenia wyznacznika głównego i podwyznaczników otrzymuje się:  
 $W = 12$ ,  $W_1 = -145$ ,  $W_2 = 55$ ,  
 $W_3 = -15$  i  $W_4 = -75$ .

$$I_1 = -12,083 \text{ A}, \quad I_2 = 4,583 \text{ A}, \quad I_3 = -1,25 \text{ A},$$

$$I_4 = I_{IV} - I_2 = -6,25 - 4,583 = -10,833 \text{ A},$$

$$I_5 = I_{IV} - I_3 = -6,25 + 1,25 = -5 \text{ A},$$

$$I_6 = I_{IV} - I_1 = -6,25 + 12,083 = 5,833 \text{ A},$$

$$I_7 = I_2 - I_1 = 4,583 + 12,083 = 16,666 \text{ A},$$

$$I_8 = I_3 - I_2 = -1,25 - 4,583 = -5,833 \text{ A},$$

$$I_9 = I_1 - I_3 = -12,083 + 1,25 = -10,833 \text{ A}.$$

**Sprawdzenie:** Według I prawa Kirchhoffa dla węzłów od 1 do 6.

$$\begin{aligned} 1 \quad & I_1 - I_2 + I_7 = -12,083 - 4,583 + 16,666 = 0, \\ 2 \quad & I_2 - I_3 + I_8 = 4,583 + 1,25 - 5,833 = 0, \\ 3 \quad & -I_1 + I_3 + I_9 = 12,083 - 1,25 - 10,833 = 0, \\ 4 \quad & -I_4 + I_6 - I_7 = 10,833 + 5,833 - 16,666 = 0, \\ 5 \quad & I_4 - I_5 - I_8 = -10,833 + 5 + 5,833 = 0, \\ 6 \quad & I_5 - I_6 - I_9 = -5 - 5,833 + 10,833 = 0. \end{aligned}$$

Według II prawa Kirchhoffa oczko 1-2-3-1,

$$2(-12,083) + 10 + 2 \cdot 4,583 + 5 = -24,166 + 10 + 9,166 + 5 = 0,$$

$$\text{oczko 4-5-6-4, } 1 \cdot 5,833 + 10 + 1(-10,833) + 1(-5) = 0.$$

**Odpowiedź:** Wartości prądów wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} I_1 &= -12,083 \text{ A}, & I_2 &= 4,583 \text{ A}, & I_3 &= -1,25 \text{ A}, \\ I_4 &= -10,833 \text{ A}, & I_5 &= -5 \text{ A}, & I_6 &= 5,833 \text{ A}, \\ I_7 &= 16,666 \text{ A}, & I_8 &= -5,833 \text{ A}, & I_9 &= -10,833 \text{ A}. \end{aligned}$$

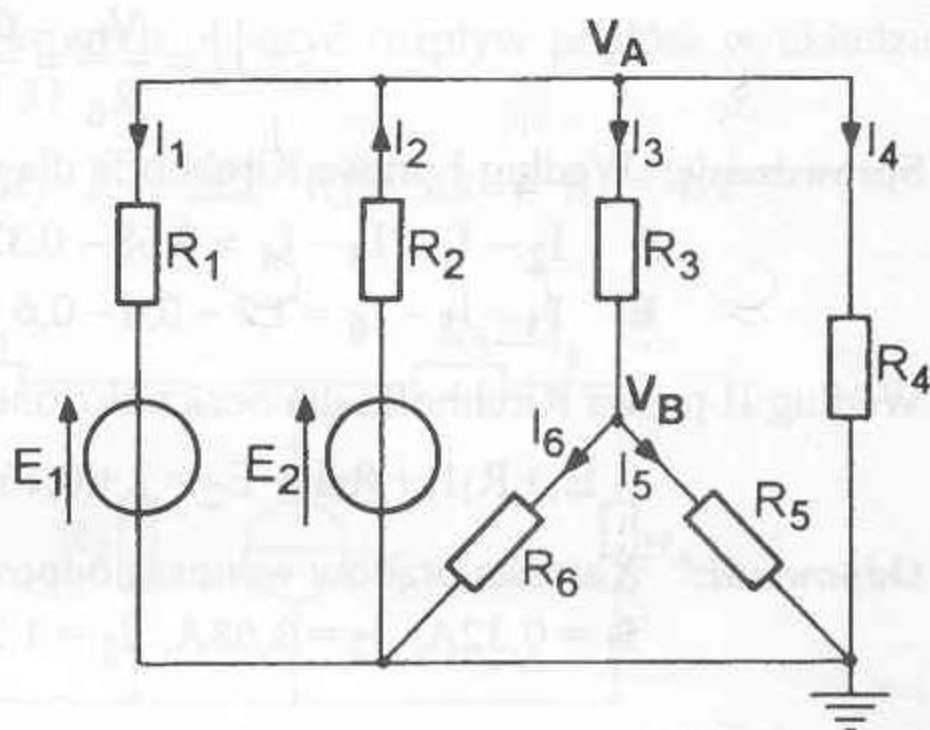
**Zadanie 1.33**

Wyznaczyć prądy w poszczególnych gałęziach obwodu z zadania 1.32 stosując metodę potencjałów węzłowych.

**Zadanie 1.34**

Wyznaczyć rozptyw prądów w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.29 stosując metodę potencjałów węzłowych. Wyniki sprawdzić stosując prawa Kirchhoffa.

Dane:  $E_1 = 2V$ ,  $E_2 = 4V$ ,  
 $R_1 = R_2 = 0,5\Omega$ ,  
 $R_3 = R_5 = R_6 = 1,2\Omega$ ,  
 $R_4 = 1\Omega$ .



Rys. 1.29

**Rozwiązanie:**

$$(G_1 + G_2 + G_3 + G_4)V_A - G_3V_B = G_1E_1 + G_2E_2$$

$$-G_3V_A + (G_3 + G_5 + G_6)V_B = 0.$$

$\frac{35}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$V_A =$	$12$
$-\frac{5}{6}$	$\frac{15}{6}$		$0$

$$W = \frac{500}{36}, \quad W_A = 30, \quad W_B = 10,$$

$$V_A = \frac{W_A}{W} = \frac{30 \cdot 36}{500} = 2,16V,$$

$$V_B = \frac{W_B}{W} = \frac{10 \cdot 36}{500} = 0,72V,$$

$$E_1 + R_1I_1 - V_A = 0 \quad \text{to} \quad I_1 = \frac{V_A - E_1}{R_1} = \frac{2,16 - 2}{0,5} = 0,32A,$$

$$E_2 - R_2I_2 - V_A = 0 \quad \text{to} \quad I_2 = \frac{E_2 - V_A}{R_2} = \frac{4 - 2,16}{0,5} = 3,68A,$$

$$V_A - R_3 I_3 - V_B = 0 \quad \text{to} \quad I_3 = \frac{V_A - V_B}{R_3} = \frac{2,16 - 0,72}{1,2} = 1,2 \text{ A},$$

$$I_4 = \frac{V_A}{R_4} = \frac{2,16}{1} = 2,16 \text{ A},$$

$$I_5 = \frac{V_B}{R_5} = \frac{0,72}{1,2} = 0,6 \text{ A},$$

$$I_6 = \frac{V_B}{R_6} = \frac{0,72}{1,2} = 0,6 \text{ A}.$$

**Sprawdzenie:** Według I prawa Kirchhoffa dla węzłów A i B

$$\text{A} \quad I_2 - I_1 - I_3 - I_4 = 3,68 - 0,32 - 1,2 - 2,16 = 0,$$

$$\text{B} \quad I_3 - I_5 - I_6 = 1,2 - 0,6 - 0,6 = 0.$$

Według II prawa Kirchhoffa dla oczka złożonego z elementów  $E_1, R_1, R_2$  i  $E_2$

$$E_1 + R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 2 + 0,16 + 1,84 - 4 = 0.$$

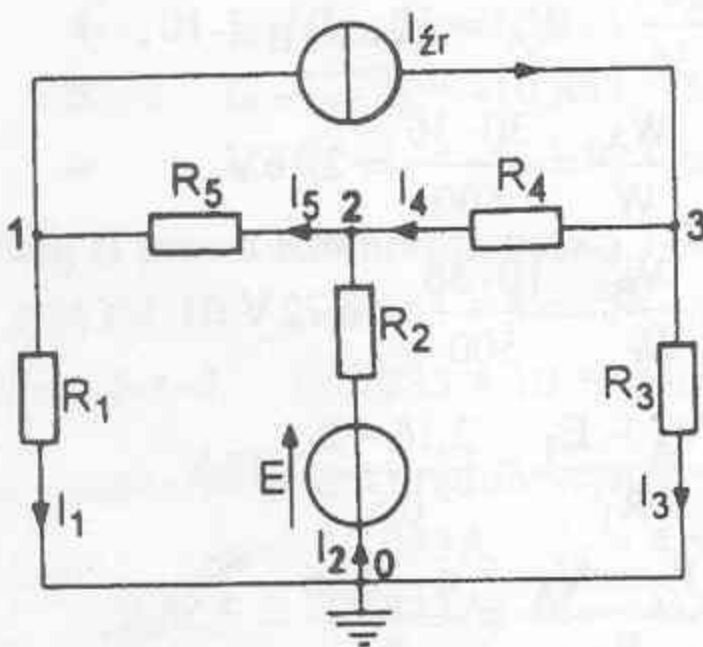
**Odpowiedź:** Wartości prądów wynoszą odpowiednio:

$$I_1 = 0,32 \text{ A}, \quad I_2 = 3,68 \text{ A}, \quad I_3 = 1,2 \text{ A}, \quad I_4 = 2,16 \text{ A}, \quad I_5 = I_6 = 0,6 \text{ A}.$$

### Zadanie 1.35

Wyznaczyć rozływ prądów z zadania 1.34 stosując metodę prądów oczkowych.

### Zadanie 1.36



Rys. 1.30

W układzie z rysunku 1.30 obliczyć rozływ prądów stosując metodę potencjałów węzłowych.

$$\text{Dane: } E = 48 \text{ V}, \quad I_{zr} = 8 \text{ A}, \\ R_1 = R_4 = R_5 = 2 \Omega, \\ R_2 = R_3 = 4 \Omega.$$

$$\text{Odpowiedź: } V_1 = 2 \text{ V}, \quad V_2 = 20 \text{ V}, \\ V_3 = 24 \text{ V}, \quad I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = 7 \text{ A}, \\ I_3 = 6 \text{ A}, \quad I_4 = 2 \text{ A}, \quad I_5 = 9 \text{ A}.$$

**Zadanie 1.37**

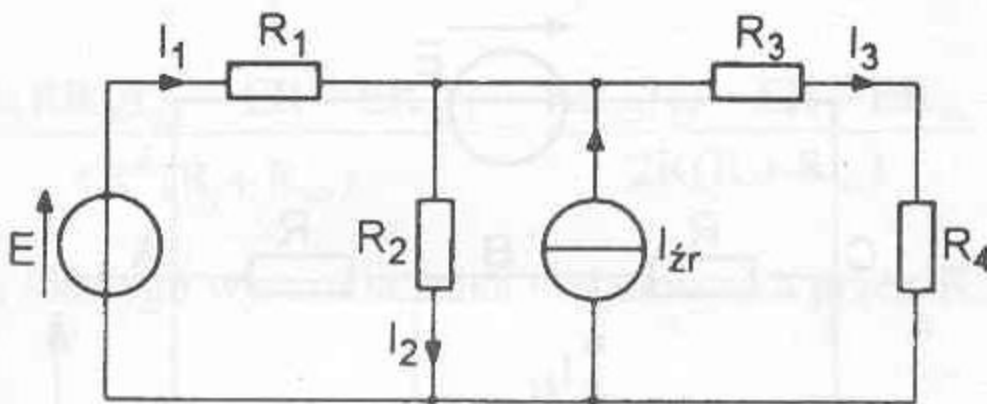
Obliczyć rozptyw prądów w układzie z zadania 1.36 stosując metodę prądów oczkowych.

**Zadanie 1.38**

Stosując metodę prądów oczkowych obliczyć rozptyw prądów w układzie przedstawionym na rysunku 1.31.

Dane:  $E = 16V$ ,  $I_{zr} = 2A$ ,  $R_1 = R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$  i  $R_4 = 4\Omega$ .

Rys. 1.31



Odpowiedź:  $I_1 = 3,625A$ ,  $I_2 = 4,375A$ ,  $I_3 = 1,25A$ .

**Zadanie 1.39**

Obliczyć rozptyw prądów i spadki napięć na rezystorach z poprzedniego zadania stosując metodę potencjałów węzłowych.

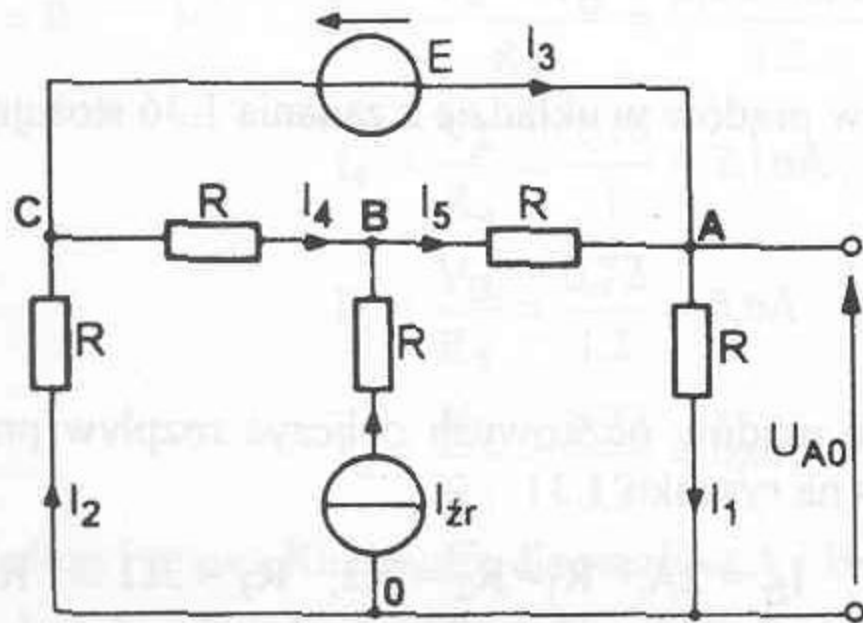
**Zadanie 1.40**

W podanym na rysunku 1.32a schemacie obliczyć napięcie  $U_{A0}$  stosując metodę prądów oczkowych.

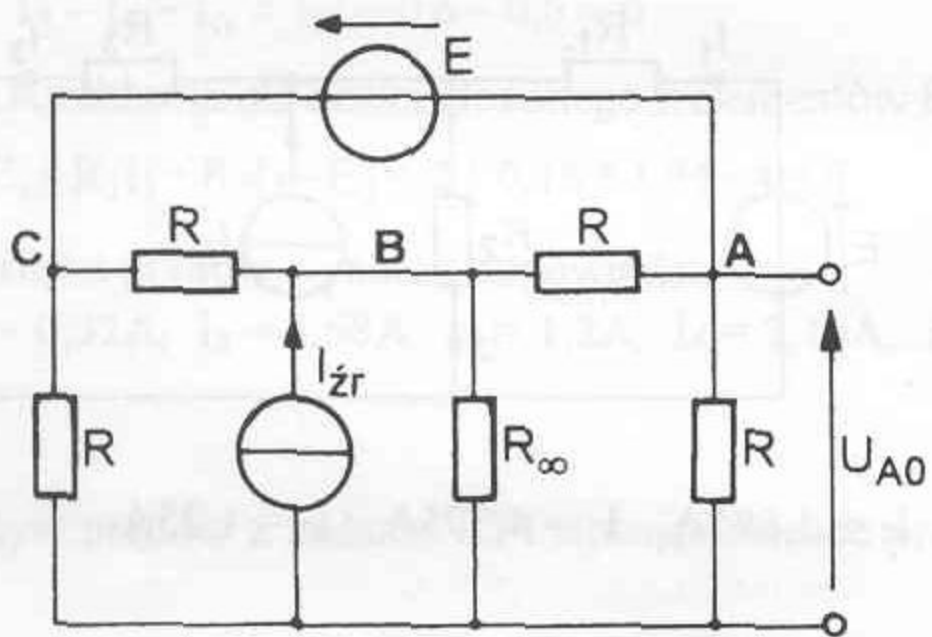
Dane:  $R = 5\Omega$ ,  $E = 24V$ ,  $I_{zr} = 8A$ .

Rozwiązanie: Aby móc zastosować metodę prądów oczkowych idealne źródło prądu zostanie zamienione na źródło napięcia według algorytmu przedstawionego kolejno na rys. 1.32b i c.

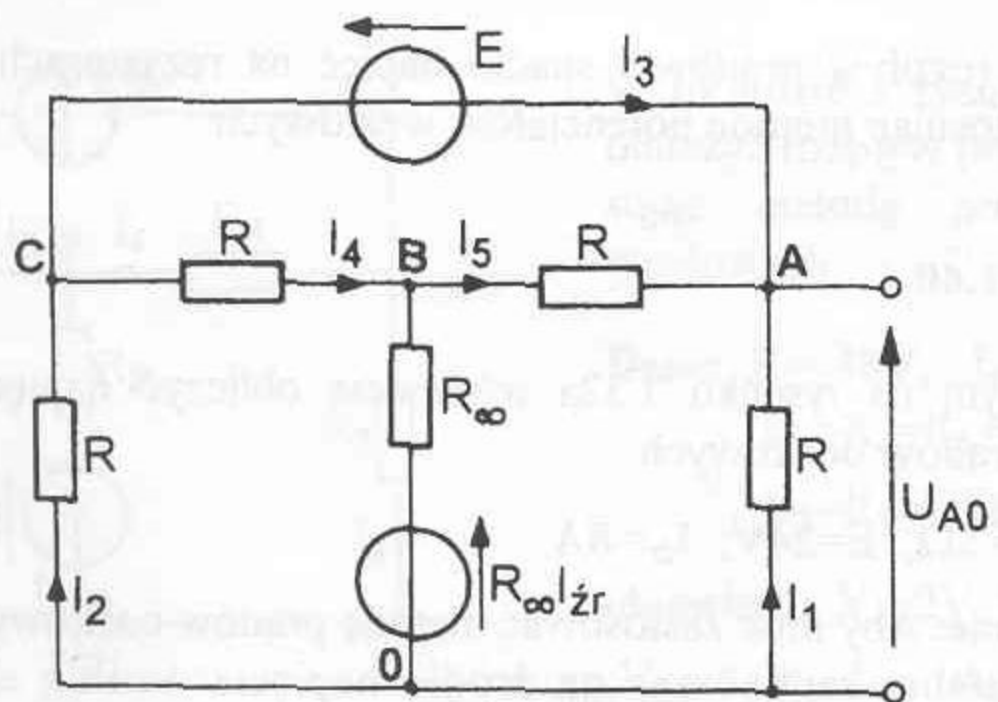
Rys. 1.32a



Rys. 1.32b



Rys. 1.32c



Obwód z rysunku 1.32c można opisać następującym układem równań dla metody oczkowej:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2R+R_\infty & -R_\infty & -R \\ \hline -R_\infty & 2R+R_\infty & -R \\ \hline -R & -R & 2R \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline I_3 \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline R_\infty I_{zr} \\ \hline -R_\infty I_{zr} \\ \hline -E \\ \hline \end{array}$$

Dla uzyskania prądu  $I_1$  oblicza się tylko wyznaczniki  $W$  i  $W_1$

$$W = 4R^2(R + R_\infty), \quad W_1 = 2R(RR_\infty I_{zr} - ER - ER_\infty),$$

$$I_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{2R(RR_\infty I_{zr} - ER - ER_\infty)}{4R^2(R + R_\infty)} = \frac{RR_\infty I_{zr} - ER - ER_\infty}{2R(R + R_\infty)}$$

Po podzieleniu każdego wyrazu licznika i mianownika przez  $R_\infty$ ,  $R_\infty \rightarrow \infty$  otrzymuje się

$$I_1 = \frac{RI_{zr} - E}{2R}$$

Natomiast wyrażenie na  $U_{A0}$  ma postać

$$U_{A0} = \frac{RI_{zr} - E}{2}$$

Po podstawieniu danych  $U_{A0} = 8V$ .

**Odpowiedź:**  $U_{A0} = 8V$ .

#### Zadanie 1.41

Dla obwodu z rysunku 1.32a obliczyć wszystkie zaznaczone prądy, dane identyczne jak w poprzednim zadaniu.

**Odpowiedź:**  $I_1 = 1,6A$ ,  $I_2 = -6,4A$ ,  $I_3 = -4,8A$ ,  $I_4 = -1,6A$ ,  $I_5 = 6,4A$ .

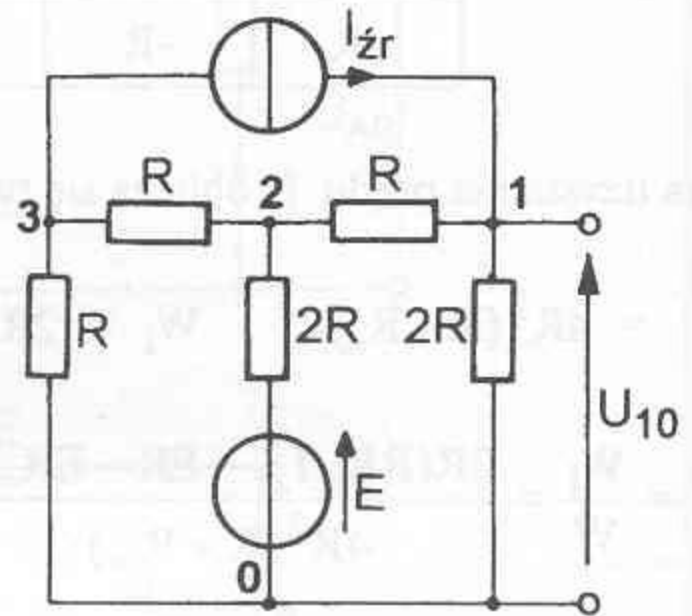
Prąd w gałęzi poprzecznej równy prądowi źródła  $I_{zr} = 8A$ .

### Zadanie 1.42

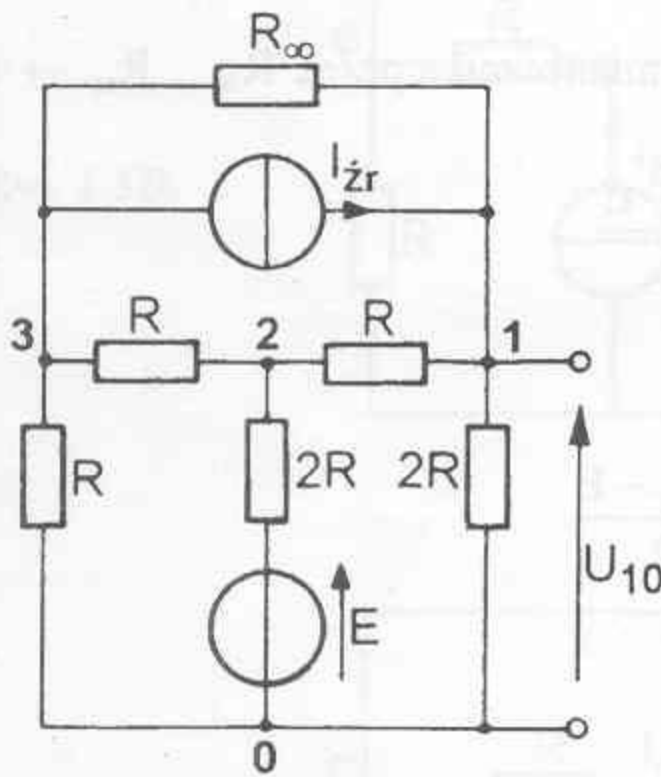
W obwodzie na rysunku 1.33a obliczyć napięcie  $U_{10}$  stosując metodę prądów oczkowych.

Dane:  $E = 40V$ ,  $I_{zr} = 8A$ ,  $R = 1\Omega$ .

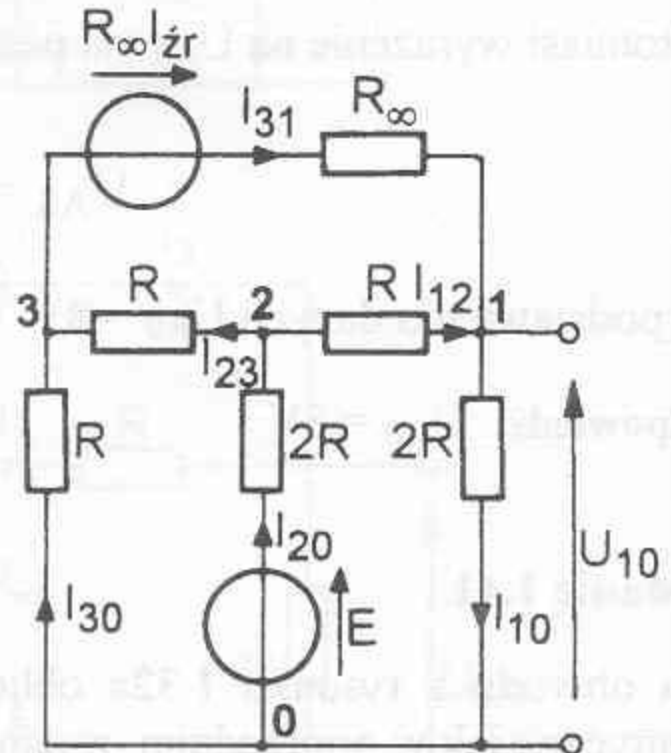
**Rozwiązanie:** Ponieważ obwód posiada idealne źródło prądu to w celu zastosowania metody oczkowej dobrze jest zamienić go na źródło napięcia. Kolejne przekształcenia schematu podstawowego pokazują rysunki 1.33b i c.



Rys. 1.33a



Rys. 1.33b



Rys. 1.33c

Schemat z rysunku 1.33c opisuje następujący układ równań:

5R	-2R	-R	$I_{10}$	=	E
-2R	4R	-R	$I_{30}$		-E
-R	-R	$2R+R_\infty$	$I_{31}$		$R_\infty I_{zr}$

Dzieląc ostatni wiersz tego układu równań przez  $R_\infty \rightarrow \infty$  otrzymuje się:

5R	-2R	-R	$I_{10}$	=	E
-2R	4R	-R	$I_{30}$		-E
0	0	1	$I_{31}$		$I_{zr}$

a po obliczeniu wyznaczników i podstawieniu danych

$$W = 16R^2, \quad W_1 = 2RE + 6R^2 I_{zr},$$

$$I_{10} = \frac{2RE + 6R^2 I_{zr}}{16R^2} = \frac{E}{8R} + \frac{3I_{zr}}{8},$$

5	-2	-1	$I_{10}$	=	40
-2	4	-1	$I_{30}$		-40
0	0	1	$I_{31}$		8

$$U_{10} = 2R \cdot I_{10} = \frac{E}{4} + \frac{3RI_{zr}}{4},$$

$$U_{10} = 16V,$$

$$W = 16, \quad W_1 = 128, \quad W_2 = -64, \quad W_3 = 128, \quad I_{10} = 8A, \quad I_{30} = -4A, \quad I_{31} = 8A, \\ I_{12} = 0A, \quad I_{23} = 12A, \quad I_{20} = 12A.$$

**Odpowiedź:**  $U_{10} = 16V$ .

### Zadanie 1.43

Obliczyć napięcie  $U_{10}$  z zadania 1.42 stosując metodę potencjałów węzłowych.

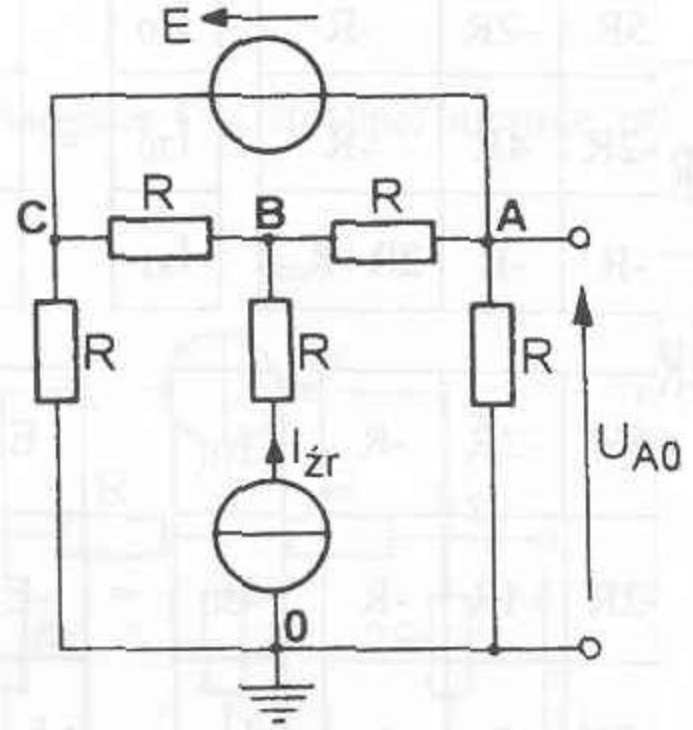
### Zadanie 1.44

Dla układu podanego na rysunku 1.34a obliczyć napięcie  $U_{A0}$  stosując metodę potencjałów węzłowych.

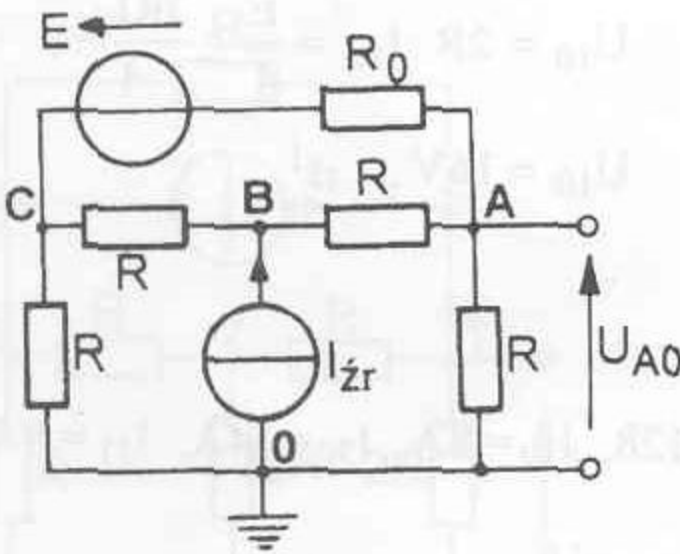


Dane:  $E = 24V$ ,  $I_{\text{źr}} = 12A$ ,  $R = 2\Omega$ .

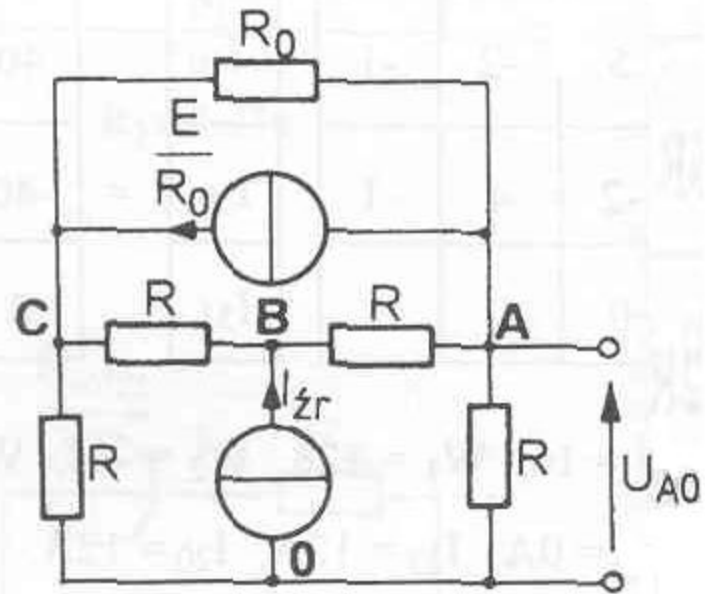
Rozwiązanie: Ponieważ obwód zawiera idealną siłę elektromotoryczną to w szereg z nią zostanie wprowadzony dodatkowy rezystor  $R_0$  (który w rzeczywistości równy jest zeru  $G_0 \rightarrow \infty$ ) i dopiero po uzyskaniu wyrażenia na  $U_0$  obliczona zostanie jego granica przy  $G_0 \rightarrow \infty$ . Rysunki 1.34b i c pokazują drogę kolejnych przekształceń. Ponieważ źródło prądowe jest źródłem idealnym to jego rezystancja wewnętrzna



Rys. 1.34a



Rys. 1.34b



Rys. 1.34c.

jest równa nieskończoności, można więc usunąć ze schematu połączony w szereg ze źródłem prądu rezystor  $R$ .

Oznaczenia:

$$G = \frac{1}{R}, \quad G_0 = \frac{1}{R_0}, \quad V_A, V_B, V_C - \text{potencjały węzłów A, B, C}$$

$$V_A = V_{A0}.$$

Układ równań dla metody potencjałów węzłowych opisujący schemat z rysunku 1.34c.

$2G+G_0$	$-G_0$	$-G_0$
$-G$	$2G$	$-G$
$-G_0$	$-G$	$2G+G_0$

$V_A$
$V_B$
$V_C$

 $=$ 

$-G_0 E$
$I_{zr}$
$G_0 E$

Po obliczeniu wyznacznika głównego otrzymuje się:

$$W = 4G^2G_0 + 4G^3,$$

a po obliczeniu wyznacznika  $W_A$

$$W_A = -2G^2G_0E + 2GG_0I_{zr} + 2G^2I_{zr}.$$

Dla potencjału  $V_A$  ważne jest następujące wyrażenie

$$V_A = \frac{-2G^2G_0E + 2GG_0I_{zr} + 2G^2I_{zr}}{4G^2G_0 + 4G^3},$$

a po podzieleniu przez  $G_0$  i policzeniu granicy wyrażenia dla  $G_0 \rightarrow \infty$

$$V_A = \frac{I_{zr} - EG}{2G}, \quad U_{A0} = \frac{RI_{zr}}{2} - \frac{E}{2}.$$

Po wstawieniu danych  $U_{A0} = 0$ .

**Odpowiedz:** Napięcie  $U_{A0} = 0V$ .

### Zadanie 1.45

W obwodzie z rysunku 1.33a obliczyć prądy gałęziowe stosując metodę potencjałów węzłowych. Dane identyczne jak w zadaniu 1.42. Prądy będące do obliczenia naniesiono na schemacie przedstawionym na rysunku 1.33c.

**Odpowiedz:**  $I_{10} = 8A$ ,  $I_{20} = 12A$ ,  $I_{30} = -4A$ ,  $I_{12} = 0A$ ,  $I_{23} = 12A$  i  $I_{31} = 8A$ .

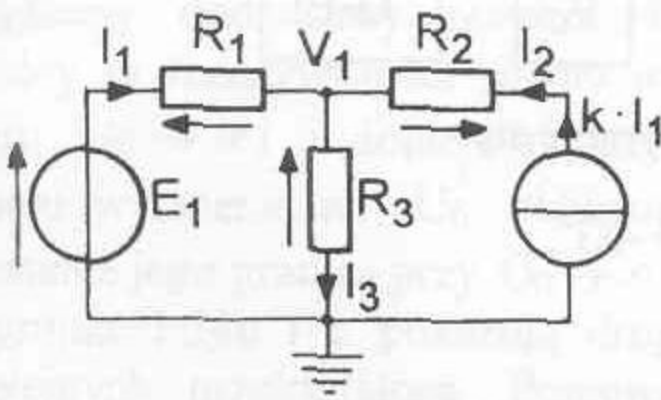
### Zadanie 1.46

Obliczyć napięcie  $U_{A0}$  z zadania 1.44 stosując metodę prądów oczkowych.

**Zadanie 1.47**

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.35 obliczyć rozptyw prądów.

Dane:  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ ,  $E_1 = 10V$ ,  $k = 1$ .



Rys. 1.35

**Rozwiązanie:** Ponieważ układ zawiera idealne źródło prądowe sterowane prądowo to do rozwiązania najlepiej użyć metody potencjałów węzłowych i potencjał węzła górnego oznaczyć jako  $V_1$ . Jedyne równanie ma wtedy postać:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)V_1 = \frac{E_1}{R_1} + kI_1, \quad \text{natomiast} \quad I_1 = \frac{E_1 - V_1}{R_1},$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)V_1 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{kE_1}{R_1} - \frac{kV_1}{R_1},$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{k}{R_1}\right)V_1 = (1+k)\frac{E_1}{R_1},$$

$$\frac{5}{4}V_1 = 10V \quad \text{to} \quad V_1 = 8V, \quad I_1 = 1A, \quad I_2 = 1A, \quad I_3 = 2A.$$

Stosując metodę prądów oczkowych otrzymuje się

$$(R_1 + R_3)I_1 + R_3I_2 = E_1,$$

i

$$(R_1 + R_3 + kR_3)I_1 = E_1,$$

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + (1+k)R_3} = \frac{E_1}{R_1 + 2R_3} = \frac{10}{10} = 1A,$$

$$I_2 = kI_1, \quad I_2 = 1A, \quad I_3 = 2A,$$

przyjęto tu, że prądy oczkowe odpowiadają prądom  $I_1$  i  $I_2$

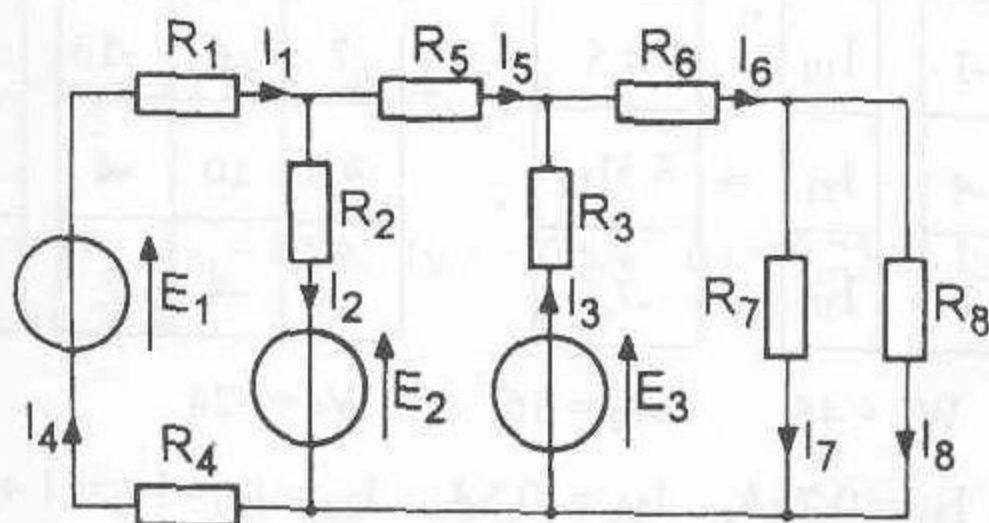
**Odpowiedź:**  $I_1 = 1A$ ,  $I_2 = 1A$ ,  $I_3 = 2A$ .

**Zadanie 1.48**

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.36 obliczyć rozptyw prądów stosując metody:

- prądów oczkowych,
- potencjałów węzłowych.

Rys. 1.36



Dane:  $E_1 = 62,5\text{V}$ ,  $E_2 = 4,5\text{V}$ ,  $E_3 = 120,5\text{V}$ ,  $R_1 = R_4 = 1,25\Omega$ ,  $R_2 = 8\Omega$ ,  $R_3 = 10\Omega$ ,  $R_5 = R_6 = 4\Omega$ ,  $R_7 = R_8 = 22,25\Omega$ .

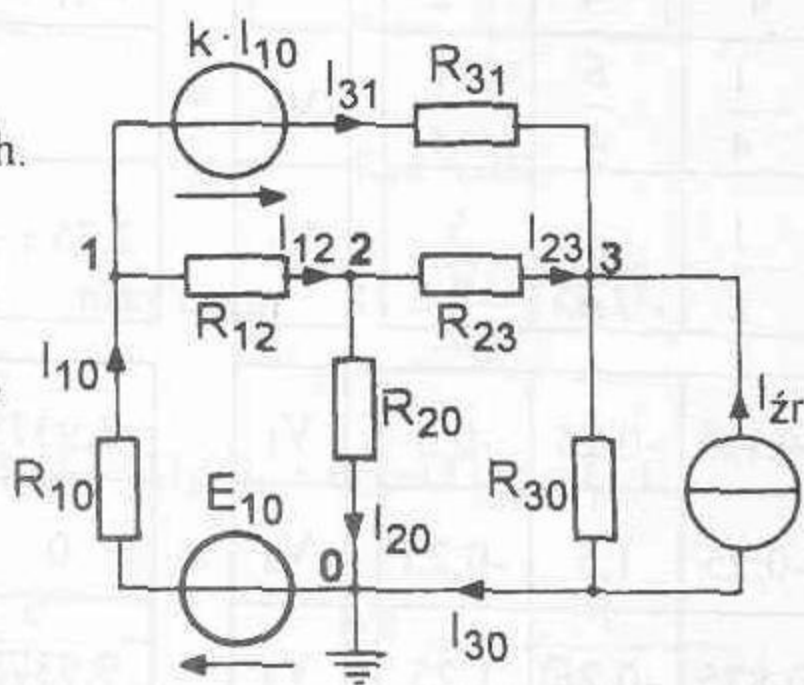
Odpowiedź:  $I_1 = I_4 = 4\text{A}$ ,  $I_2 = I_3 = 6\text{A}$ ,  $I_5 = -2\text{A}$ ,  $I_6 = 4\text{A}$ ,  $I_7 = I_8 = 2\text{A}$ .

**Zadanie 1.49**

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.37 obliczyć rozptyw prądów stosując:

- metodę prądów oczkowych,
- metodę potencjałów węzłowych.

Dane:  $E_{10} = 4,5\text{V}$ ,  $I_{zr} = 3,75\text{A}$ ,  
 $R_{10} = 2\Omega$ ,  $R_{20} = 1\Omega$ ,  
 $R_{30} = 2\Omega$ ,  $R_{12} = R_{23} = 4\Omega$ ,  
 $R_{31} = 2\Omega$ ,  $k = 5,5\Omega$ .



Rys. 1.37

**Rozwiązanie:**

a) metoda prądów oczkowych.

Jako prądy oczkowe wybrano prądy gałęziowe w kolejności  $I_{10}$ ,  $I_{31}$  i  $I_{30}$ . Źródło prądu przekształcono w ekwiwalentne źródło napięcia. Układ równań oczkowych po wstawieniu danych zapisano poniżej

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & -4 & -1 \\ \hline -4 & 10 & -4 \\ \hline -1 & -4 & 7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} I_{10} \\ I_{31} \\ I_{30} \end{array} = \begin{array}{l} 4,5 \\ 5,5I_{10} \\ -7,5 \end{array} ; \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & -4 & -1 \\ \hline -9,5 & 10 & -4 \\ \hline -1 & -4 & 7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} I_{10} \\ I_{31} \\ I_{30} \end{array} = \begin{array}{l} 4,5 \\ 0 \\ -7,5 \end{array}$$

$$W = 48, \quad W_1 = 48, \quad W_2 = 36, \quad W_3 = -24,$$

$$I_{10} = 1A, \quad I_{31} = 0,75A, \quad I_{30} = -0,5A, \quad I_{20} = I_{10} - I_{30} = 1 + 0,5 = 1,5A,$$

$$I_{12} = I_{10} - I_{31} = 1 - 0,75 = 0,25A, \quad I_{23} = I_{30} - I_{31} = -0,5 - 0,75 = -1,25A.$$

b) Metoda potencjałów węzłowych.

Jako węzeł uziemiony wybrano węzeł o numerze 0. Obliczone zostaną niewiadome potencjały w punktach 1, 2, 3. Układ równań zawiera wstawione już dane liczbowe.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{4} & \frac{6}{4} & -\frac{1}{4} \\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} = \begin{array}{l} \frac{-k}{R_{31}} \left( \frac{4,5 - V_1}{R_{10}} \right) + 2,25 \\ 0 \\ 3,75 + \frac{k}{R_{31}} \left( \frac{4,5 - V_1}{R_{10}} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -0,125 & -0,25 & -0,5 \\ \hline -0,25 & 1,5 & -0,25 \\ \hline 0,875 & -0,25 & 1,25 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} = \begin{array}{l} -3,9375 \\ 0 \\ 9,9375 \end{array} \quad \begin{array}{l} W = 0,375, \quad W_1 = 0,9375, \\ W_2 = 0,5625, \quad W_3 = 2,4375, \\ V_1 = 2,5V, \quad V_2 = 1,5V, \quad V_3 = 6,5V \end{array}$$

Z tak wyliczonych potencjałów punktów 1, 2, 3 można obliczyć prądy gałęziowe, których wartości są identyczne z tymi, które uzyskano stosując metodę prądów oczkowych.

$$\text{Np. } I_{10} = \frac{E_1 - V_1}{R_{10}} = \frac{4,5 - 2,5}{2} = 1\text{A}, \quad I_{20} = \frac{V_2}{R_{20}} = \frac{1,5}{1} = 1,5\text{A},$$

$$I_{30} = \frac{V_3}{R_{30}} - I_{\text{źr}} = \frac{6,5}{2} - 3,75 = -0,5\text{A} \quad \text{itd.}$$

**Odpowiedź:**  $I_{10} = 1\text{A}$ ,  $I_{20} = 1,5\text{A}$ ,  $I_{30} = -0,5\text{A}$ ,  $I_{12} = 0,25\text{A}$ ,  $I_{23} = -1,25\text{A}$ ,  $I_{31} = 0,75\text{A}$ .

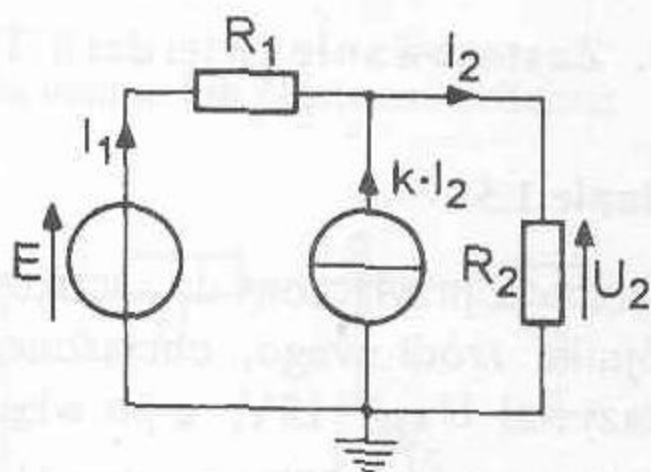
### Zadanie 1.50

W obwodzie podanym na rysunku 1.38 wyznaczyć transmitancję napięciową (stosunek napięć)  $\frac{U_2}{E}$ .

Podać warunek rozwiązalności.

**Dane:**  $E = 5\text{V}$ ,  $R_1 = 1\Omega$ ,  
 $R_2 = 2\Omega$ ,  $k = 1$ .

**Rozwiązanie:** Korzystając z metody potencjałów węzłowych można napisać równanie



Rys. 1.38

$$U_2(G_1 + G_2) = G_1E + k \cdot I_2, \quad \text{przy czym} \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2} = G_2U_2,$$

$$U_2G_1 + U_2G_2 = G_1E + kG_2U_2, \quad U_2(G_1 + G_2 - kG_2) = G_1E,$$

$$U_2 = \frac{G_1E}{G_1 + G_2(1-k)} = \frac{E}{1 + \frac{G_2}{G_1}(1-k)}, \quad \frac{U_2}{E} = \frac{1}{1 + \frac{G_2}{G_1}(1-k)}.$$

Warunek rozwiązalności

$$1 + \frac{R_1}{R_2}(1 - k) \neq 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{R_1}{R_2}(1 - k) \neq -1,$$

$$\frac{R_1}{R_2} + 1 = \frac{R_1}{R_2} k, \quad \text{dla} \quad k = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \text{układ nie posiada rozwiązania.}$$

Po podstawieniu danych  $\frac{U_2}{E} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(1 - 1)} = 1.$

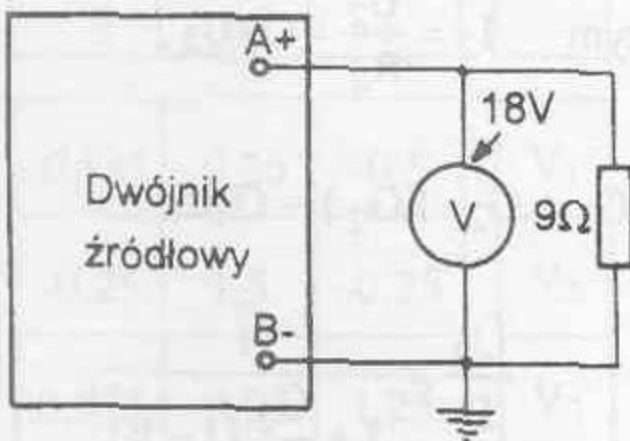
Dla  $k = 3$  zadanie nie ma rozwiązania.

**Odpowiedź:** Transmitancja napięciowa  $\frac{U_2}{E} = 1.$

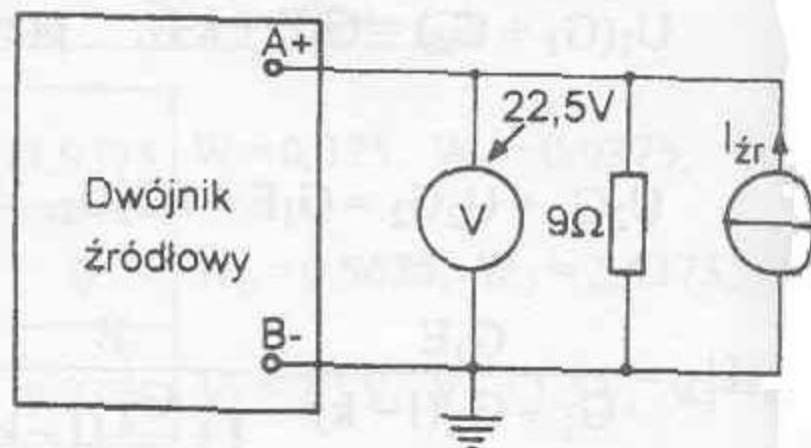
#### 1.4. Zastosowanie twierdzeń Thevenina i Nortona

##### Zadanie 1.51

Woltomierz przyłączony do zacisków AB przedstawionego na rysunku 1.39a dwójnika źródłowego, obciążonego rezystorem o rezystancji  $R = 9\Omega$  wskazywał  $U_{AB} = 18V$ , a po włączeniu do zacisków AB źródła prądu  $I_{zr} = 2A$  rysunek 1.39b napięcie  $U_{AB}$  zwiększyło się o  $4,5V$ . Wyznaczyć parametry zastępczego źródła napięcia dla danego dwójnika.



Rys. 1.39a



Rys. 1.39b

**Rozwiązanie:**

Zadanie można rozwiązać stosując dla obu układów metodę potencjałów węzłowych.

$$\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{9}\right)18 = \frac{U_0}{R_0} \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{9}\right)22,5 = \frac{U_0}{R_0} + 2.$$

Po przekształceniu

$$\begin{cases} 18 + 2R_0 = U_0 \\ 22,5 + 2,5R_0 = U_0 + 2R_0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań uzyskuje się:

$$U_0 = 24V, \quad R_0 = 3\Omega.$$

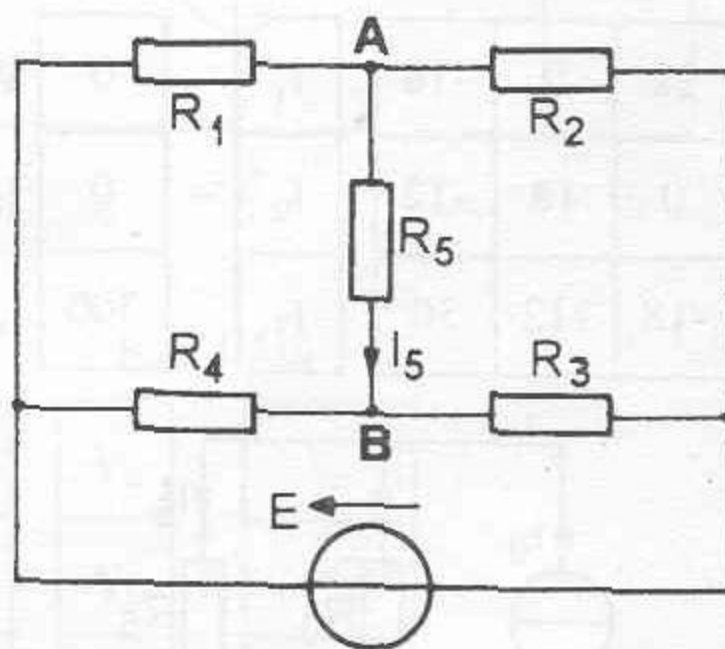
**Odpowiedz:** Parametry zastępczego źródła napięcia wynoszą odpowiednio  $U_0 = 24V$  i  $R_0 = 3\Omega$ .

**Zadanie 1.52**

Obliczyć prąd  $I_5$  stosując twierdzenie Thevenina lub Nortona. Schemat obwodu przedstawia rysunek 1.40a.

**Dane:**  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 6\Omega$ ,  
 $R_3 = 12\Omega$ ,  $R_4 = 18\Omega$ ,  
 $R_5 = 0,4\Omega$ ,  $E = 300V$ .

**Rozwiązanie:** W pierwszym rzędzie obliczona zostanie rezystancja  $R_0$  dla źródeł zastępczych widziana z zacisków AB po usunięciu gałęzi z rezystorem  $R_5$  i zwarcia źródła napięcia  $E$ .



Rys. 1.40a

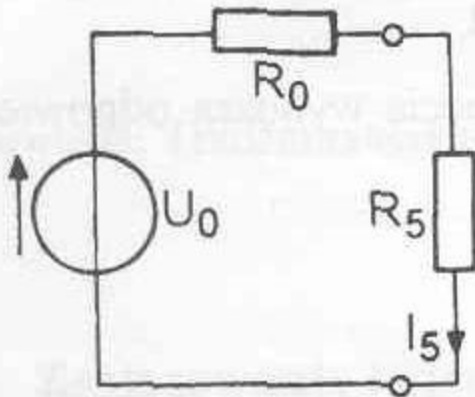
$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} + \frac{12 \cdot 18}{12 + 18} = \frac{24}{10} + \frac{216}{30} = 2,4 + 7,2 = 9,6\Omega.$$



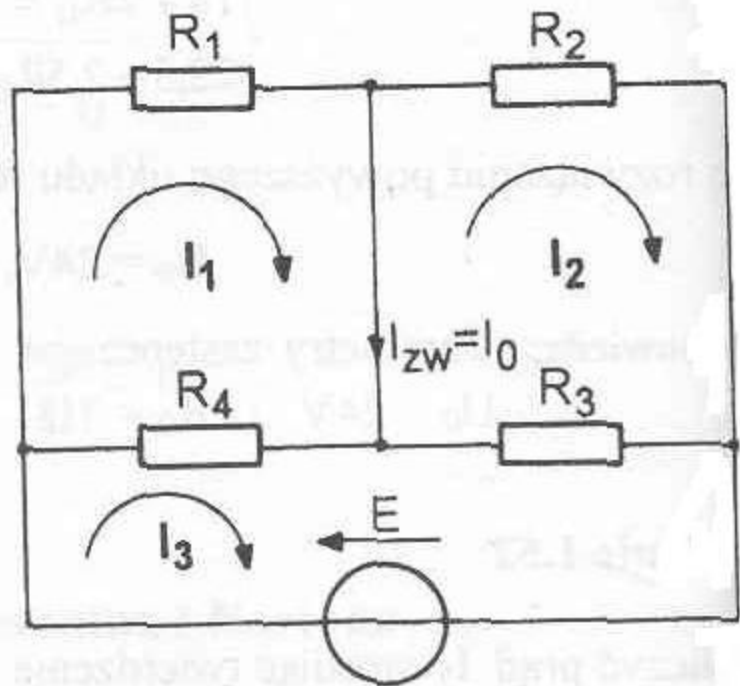
Obliczając napięcie na zaciskach AB ( $U_0$ ) przy usuniętej rezystancji  $R_5$  uzyskuje się  $U_0 = 60V$  - wartość napięcia dla twierdzenia Thevenina.

$$I_5 = \frac{U_0}{R_0 + R_5} = \frac{60}{9,6 + 0,4} = 6A.$$

Dla obliczenia prądu źródłowego użyty zostanie schemat z rysunku 1.40c.  $I_{zw} = I_0$  wartość prądu źródłowego dla twierdzenia Nortona.



Rys. 1.40b



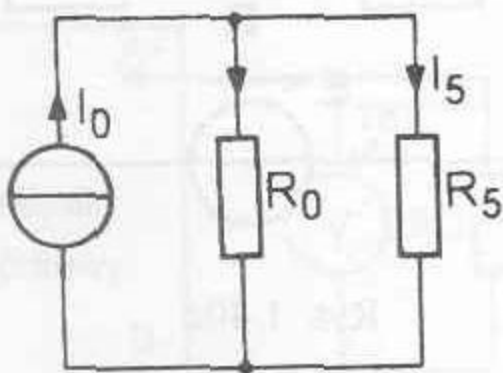
Rys. 1.40c

22	0	-18	$I_1$	=	0
0	18	-12	$I_2$	=	0
-18	-12	30	$I_3$	=	300

$$W = 2880, W_1 = 97200, W_2 = 79200;$$

$$I_1 = 33,75A, I_2 = 27,5A,$$

$$I_{zw} = I_0 = I_1 - I_2 = 6,25A.$$



Rys. 1.40d

$$I_5 = I_0 \frac{R_0}{R_0 + R_5} = 6,25 \frac{9,6}{10} = 6A.$$

**Odpowiedź:**  $I_5 = 6A.$

**Zadanie 1.53**

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.21 (zadanie 1.25) obliczyć prąd  $I_2$  stosując:

- twierdzenie Thevenina,
- twierdzenie Nortona.

**Zadanie 1.54**

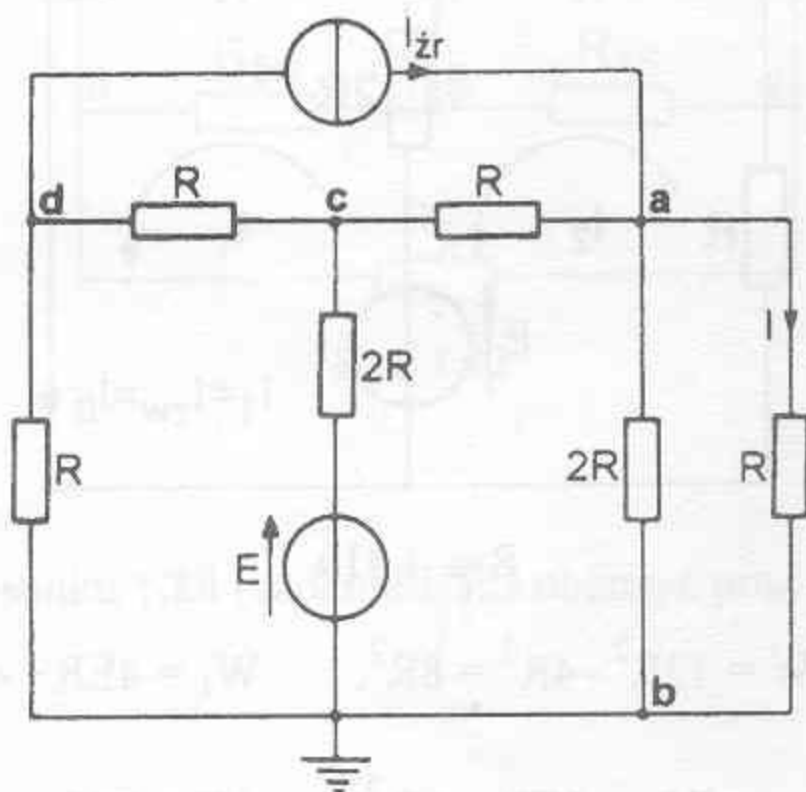
W obwodzie jak na rysunku 1.41a obliczyć prąd  $I$  stosując twierdzenia Thevenina a następnie Nortona.

Dane:  $R = 1\Omega$ ,  $E = 8V$ ,  
 $I_{zr} = 8A$ .

**Rozwiązanie:** Na wstępie obliczona zostanie rezystancja układu z zacisków  $ab$  po usunięciu gałęzi, w której ma być obliczony prąd  $I$  (źródło napięcia zostanie w tym celu zwarte a źródło prądu rozwarte).

$$R_{ab} = R_0 = R = 1\Omega.$$

- Prąd  $I$  zostanie obliczony najpierw przy pomocy twierdzenia Thevenina.



Rys. 1.41a

1,5G	-G	0	$V_a$	$I_{zr}$
-G	2,5G	-G	$V_c$	$= 0,5GE$
0	-G	2G	$V_d$	$-I_{zr}$

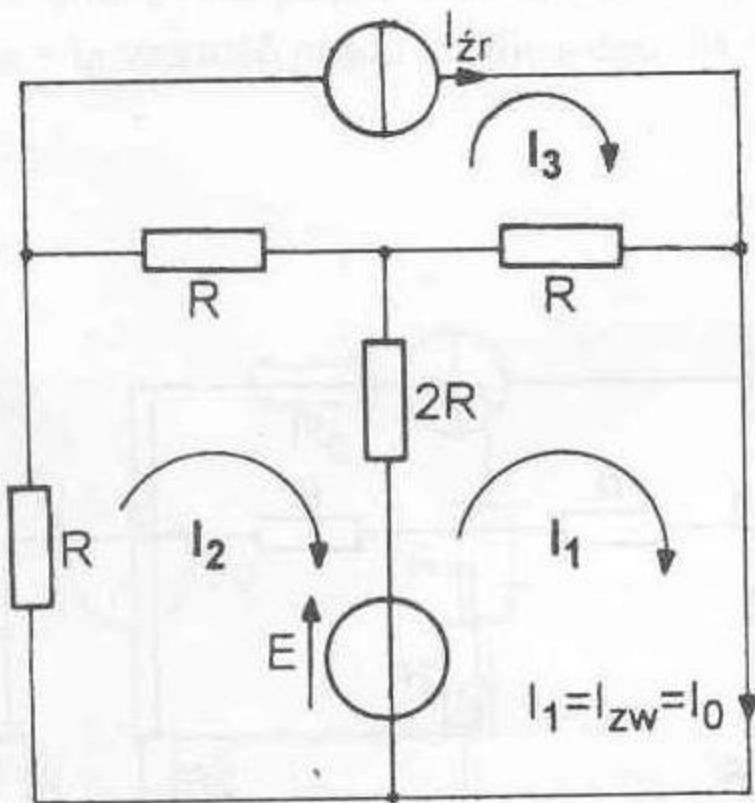
$$W = 4G^3 = \frac{4}{R^3}, \quad W_a = 3I_{zr}G^2 + EG^3, \quad W_a = \frac{3I_{zr}}{R^2} + \frac{E}{R^3},$$

$$V_a = U_0 = \frac{3I_{zr}R}{4} + \frac{E}{4},$$

$$I = \frac{3I_{zr}}{8} + \frac{E}{8R}.$$

Po wstawieniu danych otrzymuje się  $I = 4A$ .

Dla twierdzenia Nortona schemat z rys. 1.41b można opisać następującym układem równań



Rys. 1.41b

$3R$	$-2R$	$-R$	$I_1$	$E$
$-2R$	$4R$	$-R$	$I_2$	$-E$
$-R$	$-R$	$\infty$	$I_3$	$I_{zr}^{\infty}$

Ponieważ prąd  $I_3$  jest znany  $I_3 = I$ .

$3R$	$-2R$	$I_1$	$E + RI_3$
$-2R$	$4R$	$I_2$	$-E + RI_3$

Wyznaczenie wartości  $I_0$  dla twierdzenia Nortona

$$W = 12R^2 - 4R^2 = 8R^2, \quad W_1 = 4ER + 4R^2I_3 + 2R^2I_3 - 2RE = 2ER + 6R^2I_3,$$

$$I_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{2ER + 6R^2I_3}{8R^2} = \frac{2E + 6RI_3}{8R} = 8A, \quad I_0 = 8A, \quad I = 8 \frac{1}{1+1} = 4A.$$

**Odpowiedź:** Prąd  $I = 4A$  - wynik zgodny z uzyskanym uprzednio przy zastosowaniu twierdzenia Thevenina.

### Zadanie 1.55

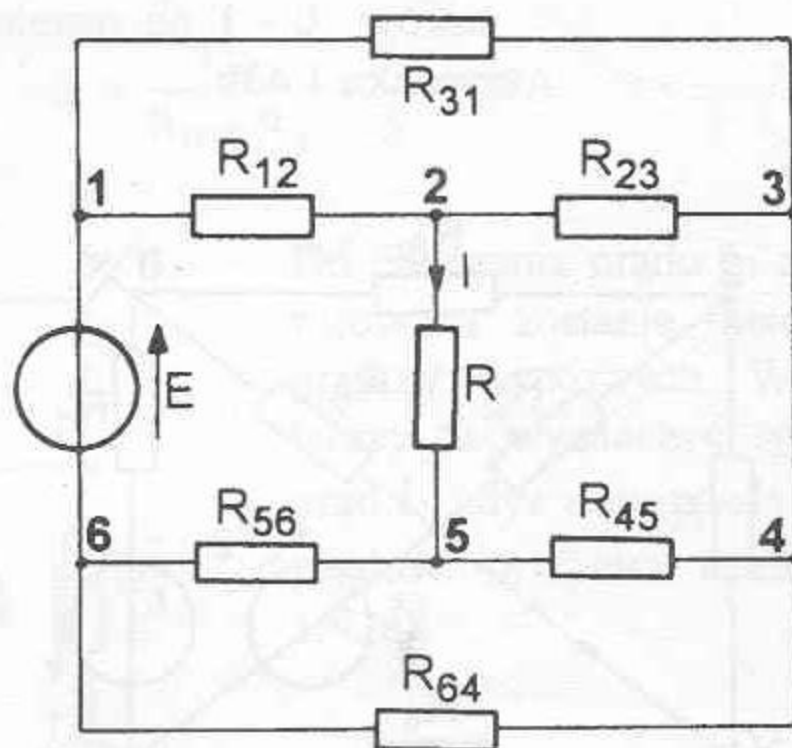
W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.24 (zadanie 1.28) obliczyć prąd  $I_4$  stosując:

- twierdzenie Thevenina,
- twierdzenie Nortona.

**Zadanie 1.56**

Obliczyć prąd  $I$  stosując twierdzenia Thevenina i Nortona. Schemat obwodu przedstawia rysunek 1.42.

Dane:  $E = 150\text{V}$ ,  $R = 2\Omega$ ,  
 $R_{12} = 7\Omega$ ,  $R_{23} = 28\Omega$ ,  
 $R_{31} = 14\Omega$ ,  $R_{45} = 7\Omega$ ,  
 $R_{56} = 28\Omega$ ,  $R_{64} = 14\Omega$ .



Rys. 1.42

Odpowiedź:  $I = 5\text{A}$ .

**Zadanie 1.57**

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.28 (zadanie 1.32) obliczyć prąd  $I_5$  stosując:

- twierdzenie Thevenina,
- twierdzenie Nortona.

**Zadanie 1.58**

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.31 (zadanie 1.38) obliczyć prąd  $I_3$  stosując:

- twierdzenie Thevenina,
- twierdzenie Nortona.

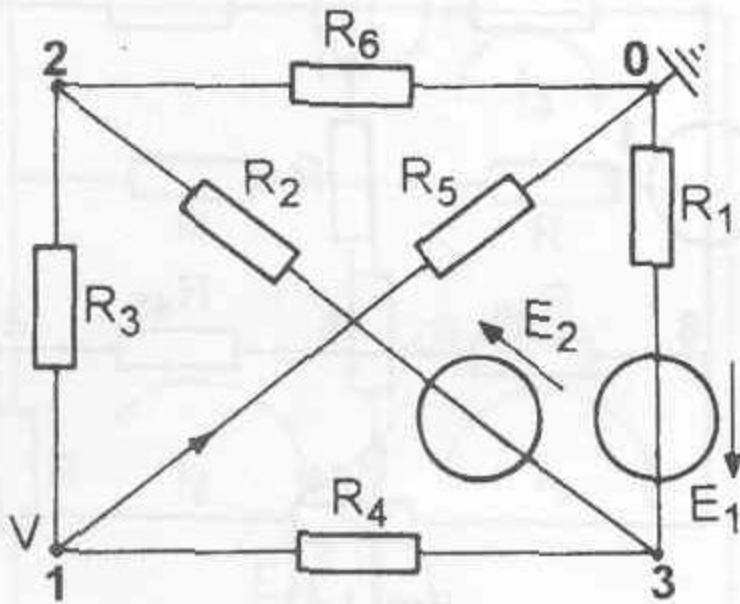
**Zadanie 1.59**

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.43a obliczyć prąd  $I_5$ , jeżeli znane są parametry elementów:

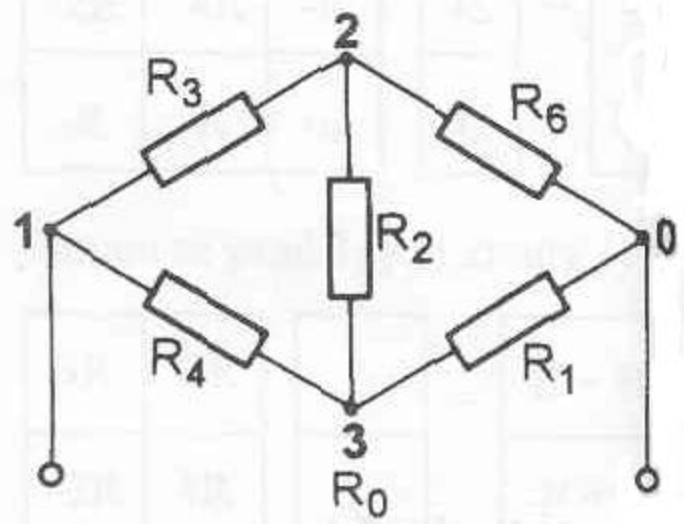
$$E_1 = 8\text{V}, \quad E_2 = 16\text{V}, \quad R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_6 = 3\Omega, \quad R_5 = 2\Omega$$

Do rozwiązania zadania zastosować metodę Thevenina, a wynik sprawdzić stosując twierdzenie Nortona.

**Rozwiązanie:** Na wstępie obliczona zostanie rezystancja  $R_0$  widziana z zacisków 0 - 1 po usunięciu gałęzi z rezystorem  $R_5$  jak na rysunku 1.43b.

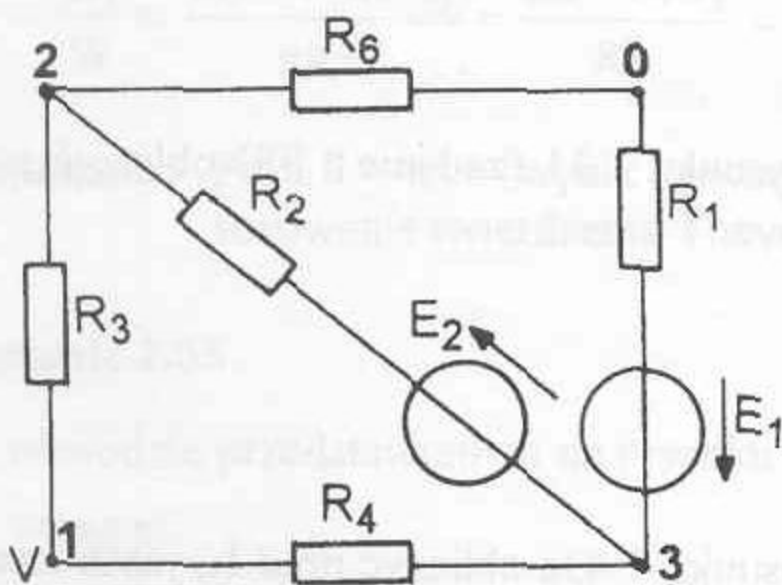


Rys. 1.43a

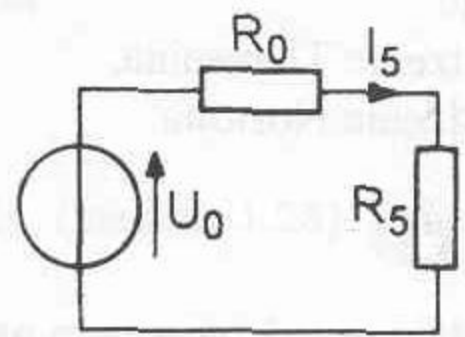


Rys. 1.43b

Po przekształceniu któregośkolwiek trójkąta rezystancji i po zwinięciu połączeń szeregoworównoległych uzyskuje się  $R_0 = 3\Omega$ . Do obliczenia potencjału  $V$  w węźle 1 zastosujemy metodę potencjałów węzłowych (rezystancja  $R_5$  nie występuje w tym schemacie rysunek 1.43c).



Rys. 1.43c



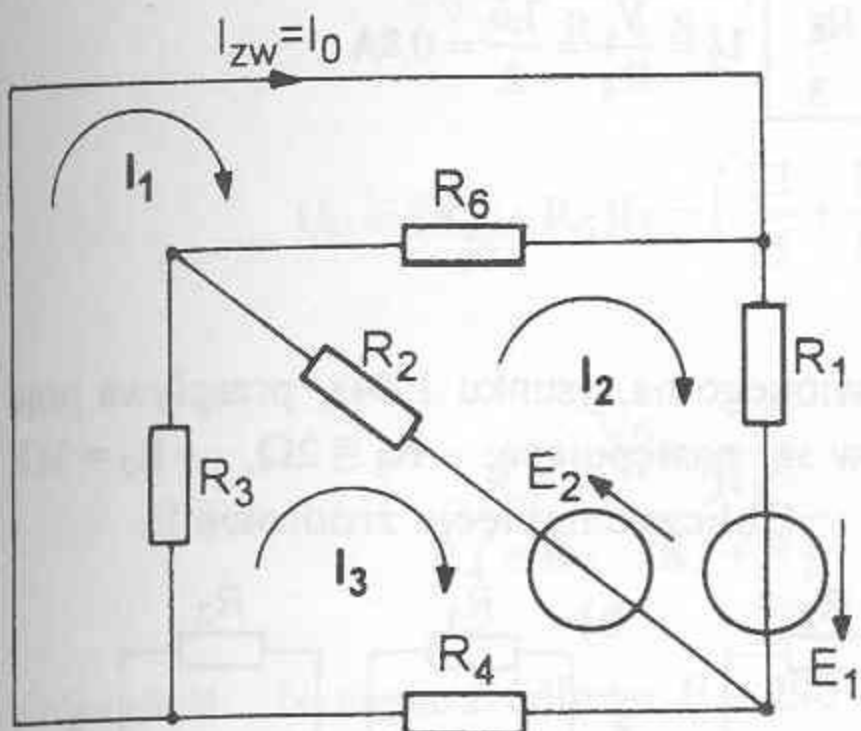
Rys. 1.43d

$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$V_1$	$0$
$-\frac{1}{3}$	$1$	$-\frac{1}{3}$	$V_2$	$\frac{16}{3}$
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$1$	$V_3$	$-\frac{8}{3}$

Po podstawieniu danych liczbowych

$$W = \frac{8}{27}, \quad W_1 = 1\frac{5}{27}, \quad V_1 = U_0 = 4V,$$

$$I_5 = \frac{U_0}{R_0 + R_5} = \frac{4}{5} = 0,8A$$



Do obliczenia prądu  $I_0$  zastosowana zostanie metoda prądów oczkowych. Wystarczy tu wyznaczyć tylko prąd  $I_1$  gdyż odpowiada on prądowi  $I_0$  (patrz rysunek 1.43e).

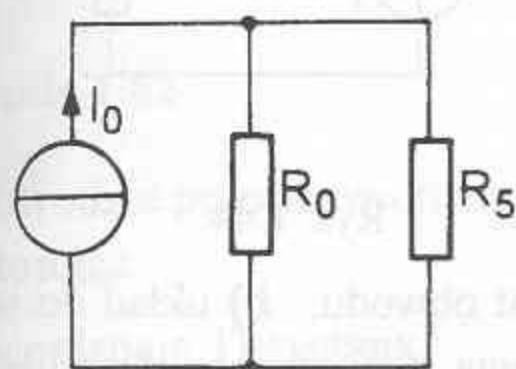
Rys.1.43e

$6$	$-3$	$-3$	$I_1$	$0$
$-3$	$9$	$-3$	$I_2$	$24$
$-3$	$-3$	$9$	$I_3$	$-16$

Układ równań dla metody prądów oczkowych po wstawieniu danych liczbowych

$$W = 216, \quad W_1 = 288,$$

$$I_0 = I_1 = 1\frac{1}{3}A.$$



Rys. 1.43f

Z reguły dzielnika prądów otrzymujemy:

$$I_5 = I_0 \frac{R_0}{R_0 + R_5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = 0,8A.$$

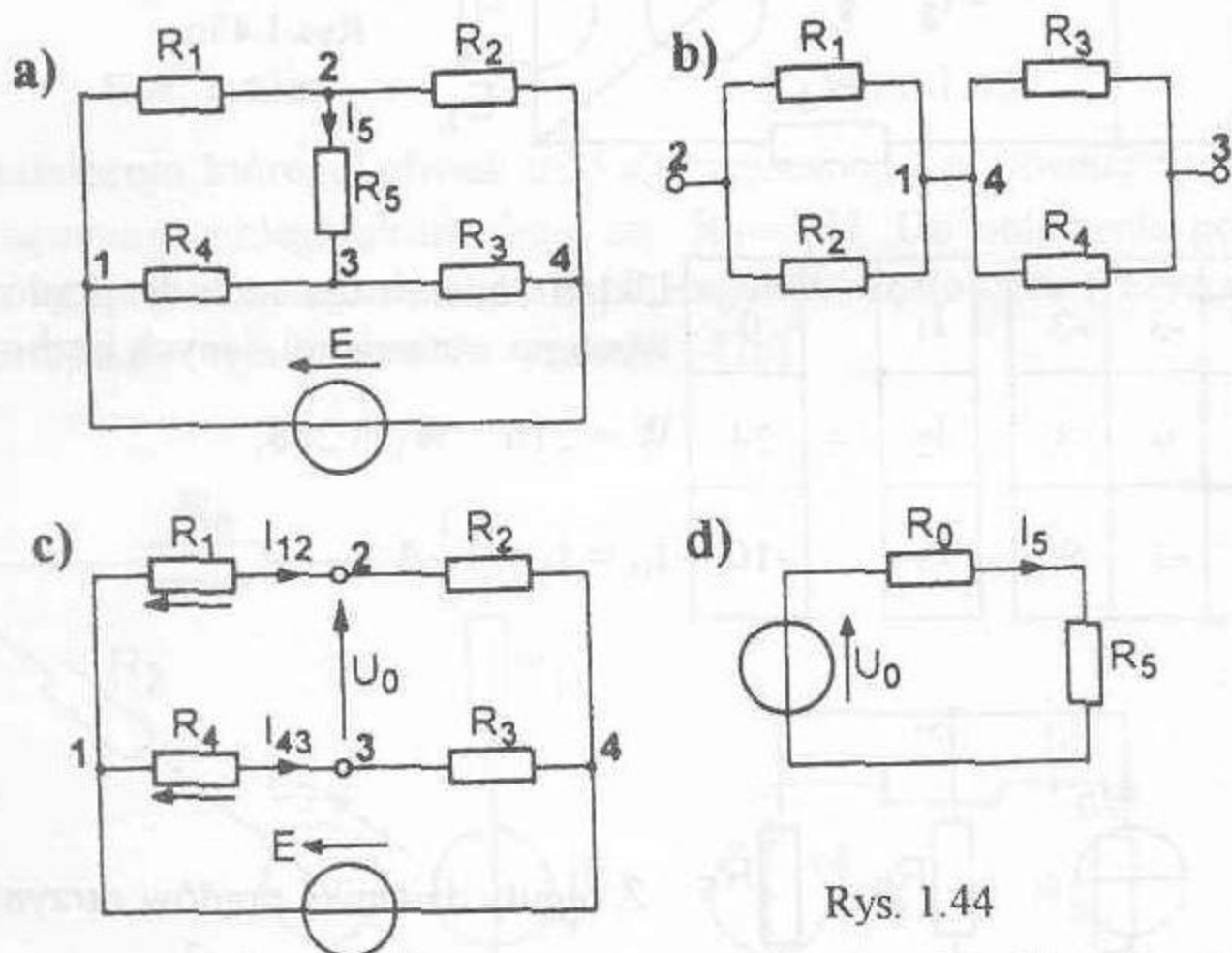
Na zakończenie prąd  $I_5$  zostanie wyznaczony metodą potencjałów węzłowych. Korzystamy tu ze schematu na rysunku 1.43a. Po wstawieniu danych liczbowych.

$\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$V_1$	=	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$	$W = \frac{20}{27}, \quad W_1 = \frac{32}{27},$	
$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$V_2$				$V_1 = 1,6V,$
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$V_3$				

**Odpowiedź:** Prąd  $I_5 = 0,8A$ .

### Zadanie 1.60

W gałęzi 2-3 obwodu przedstawionego na rysunku 1.44a przepływa prąd  $I_5 = 10A$ . Parametry oporników są następujące:  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $R_3 = 6\Omega$ ,  $R_4 = 9\Omega$ ,  $R_5 = 1\Omega$ . Obliczyć napięcie źródłowe  $E$ .



Rys. 1.44

Na rys.1.44 przedstawiono kolejno: a) schemat obwodu; b) układ do wyznaczenia rezystancji  $R_0$ ; c) układ do wyznaczania napięcia  $U_0$ ; d) schemat ze źródłem zastępczym i rezystorem zastępczym (dwójnik zastępczy dla twierdzenia Thevenina).

$$R_0 = R_{23} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{6}{5} + \frac{54}{15} = \frac{72}{15} \Omega = 4,8 \Omega,$$

$$I_{12} = \frac{E}{R_1 + R_2}, \quad I_{43} = \frac{E}{R_3 + R_4},$$

$$U_0 = + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E - \frac{R_4}{R_3 + R_4} E = 0,$$

$$U_0 = (R_0 + R_5) I_5 = \left( \frac{72}{15} + \frac{15}{15} \right) \cdot 10 = \frac{870}{15} \text{ V} = 58 \text{ V},$$

$$E = \frac{U_0}{\frac{R_4}{R_4 + R_3} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{\frac{870}{15}}{\frac{9}{15} - \frac{2}{5}} = 290 \text{ V}.$$

Odpowiedź: Napięcie źródłowe  $E = 290 \text{ V}$ .

### Zadanie 1.61

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.32a (zadanie 1.40) obliczyć prąd  $I_1$  stosując:

- twierdzenie Thevenina,
- twierdzenie Nortona.

### Zadanie 1.62

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.33a (zadanie 1.42) obliczyć prąd  $I_{10}$  stosując:

- twierdzenie Thevenina,
- twierdzenia Nortona.

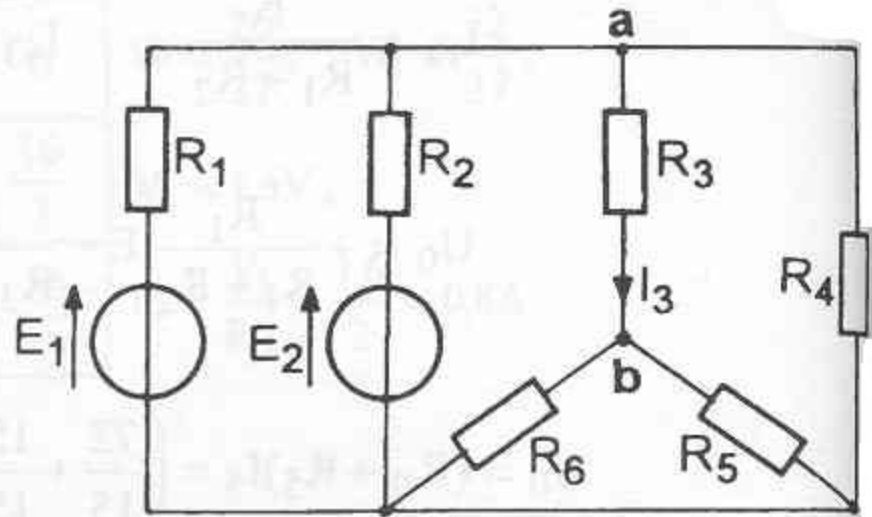


**Zadanie 1.63**

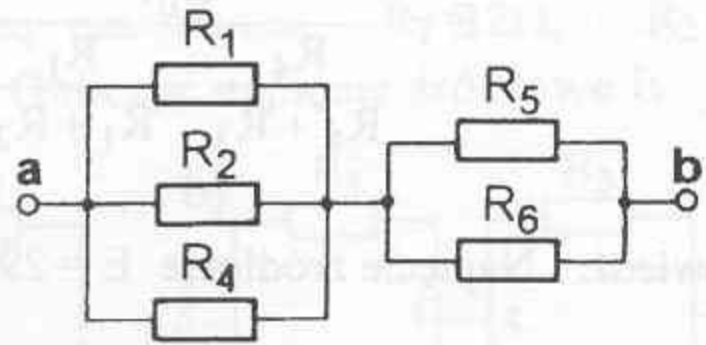
Obliczyć prąd  $I_3$  w schemacie podanym na rysunku 1.45a stosując twierdzenie Thevenina.

**Dane:**  $R_1 = R_2 = 0,5\Omega$ ,  
 $R_3 = R_5 = R_6 = 1,2\Omega$ ,  
 $R_4 = 1\Omega$ ,  $E_1 = 8V$ ,  
 $E_2 = 4V$ .

**Rozwiązanie:** W pierwszym rzędzie obliczona zostanie rezystancja zastępcza z zacisków **ab** rys.1.45b, po usunięciu rezystora  $R_3$  i zwarceniu źródeł napięcia  $R_{ab} = R_0$

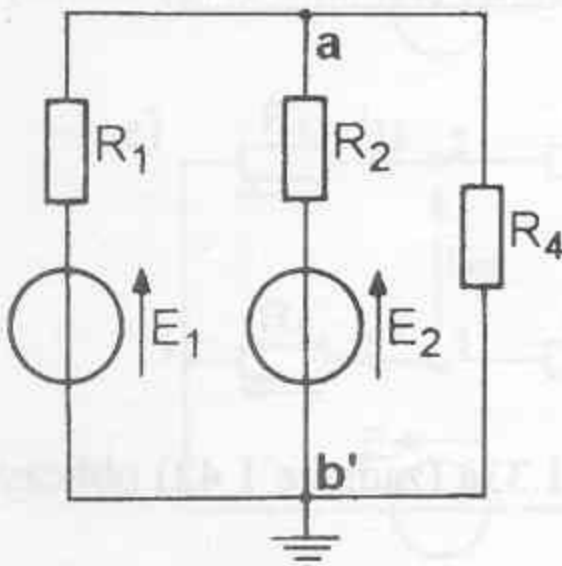


Rys. 1.45a

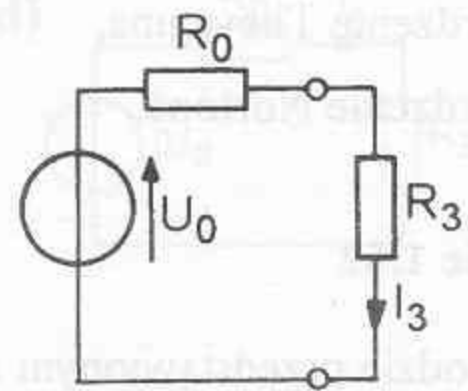


Rys. 1.45b

$$R_0 = \frac{R_1 R_2 R_4}{R_1 R_2 + R_2 R_4 + R_4 R_1} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = 0,2 + 0,6 = 0,8\Omega,$$



Rys. 1.45c



Rys. 1.45d.

Rys. 1.45c przedstawia schemat do wyznaczenia napięcia  $U_0$ , a rys.1.45d dwójnik zastępczy obciążony rezystancją  $R_3$ .

$$U_{ab} = U'_{ab} = U'_0, \quad 5U_0 = 24, \quad U_0 = 4,8V.$$

$$I_3 = \frac{U_0}{R_0 + R_3} = \frac{4,8}{2} = 2,4A.$$

Odpowiedź: Prąd  $I_3 = 2,4A$ .

### Zadanie 1.64

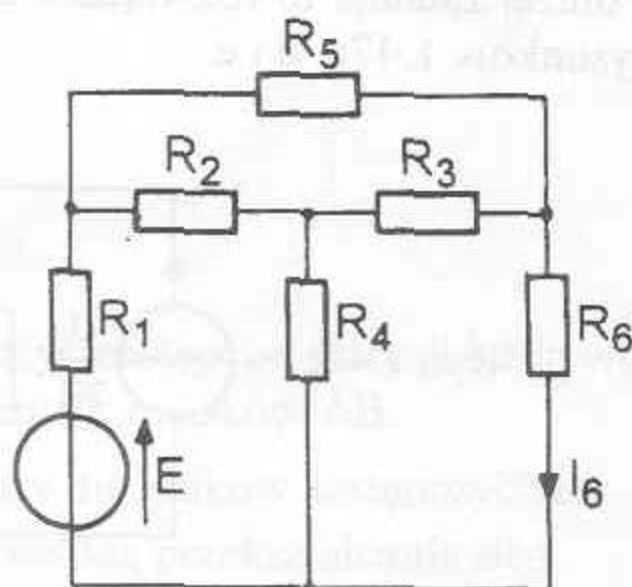
Obliczyć prąd  $I_3$  w zadaniu poprzednim stosując twierdzenie Nortona.

### Zadanie 1.65

W obwodzie podanym na rysunku 1.46 obliczyć prąd  $I_6$  stosując metody:

- Thevenina,
- Nortona.

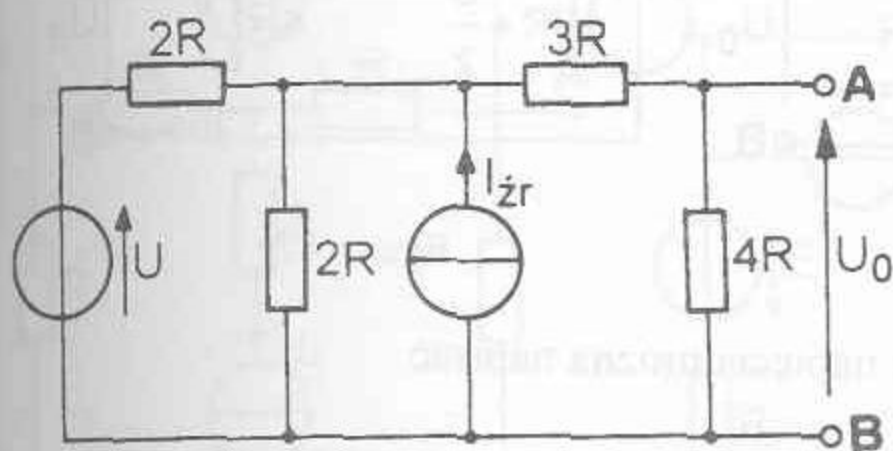
Dane:  $E = 30V$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  
 $R_2 = R_3 = R_4 = 6\Omega$ ,  
 $R_5 = 12\Omega$ ,  $R_6 = 3\Omega$ .



Rys. 1.46

Odpowiedź:  $I_6 = 2A$ .

### Zadanie 1.66



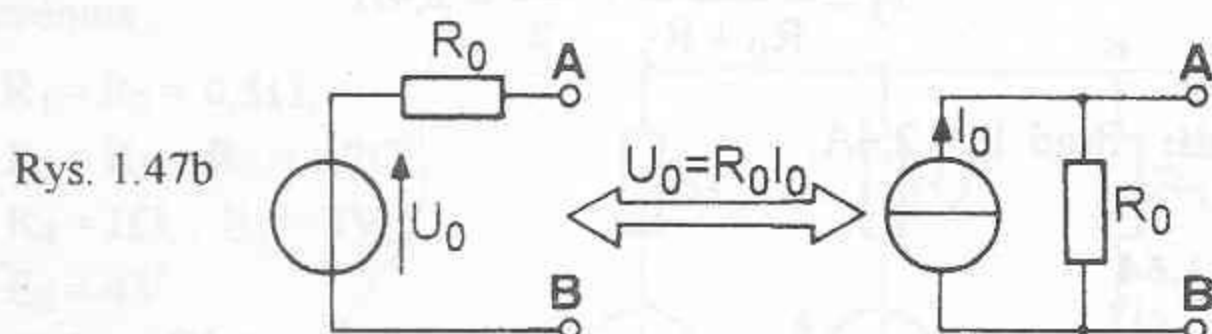
Rys. 1.47a

Dla obwodu z rysunku 1.47a wyznaczyć dla zacisków AB.

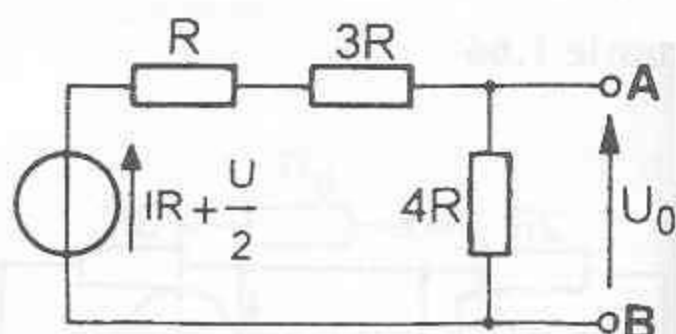
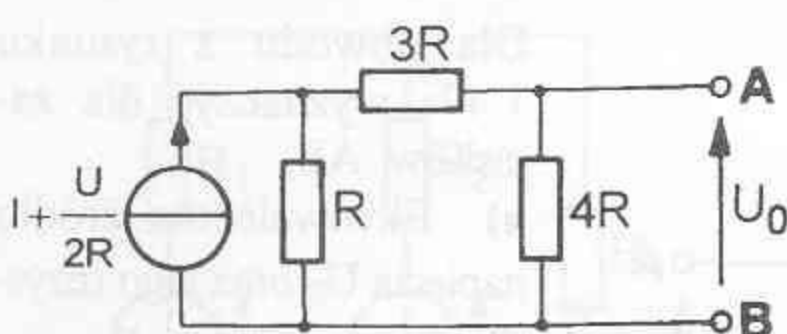
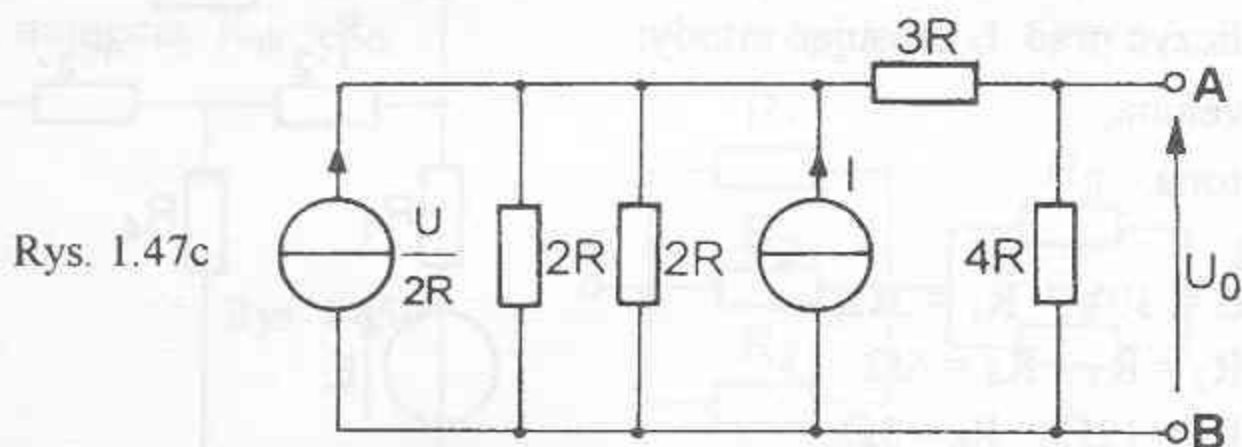
- Ekwiwalentne źródło napięcia  $U_0$  oraz jego rezystancję wewnętrzną  $R_0$ .
- Ekwiwalentne źródło prądu  $I_0$  oraz jego rezystancję wewnętrzną  $R_0$ .

Dane:  $R = 1\Omega$ ,  $U = 16V$ ,  
 $I_{zr} = 2A$ .

**Rozwiązanie:** Rysunek 1.47b przedstawia zamianę rzeczywistego źródła napięcia na ekwiwalentne źródło prądu i odwrotnie.



Do rozwiązania powyższego zadania można użyć różnych sposobów. Poniżej zadanie to rozwiązane zostanie metodą kolejnych przekształceń w rysunków 1.47c, d i e.



Korzystając z reguły dzielnika napięcia można napisać

$$U_0 = \left( RI + \frac{U}{2} \right) \frac{4R}{R + 3R + 4R}, \quad U_0 = \frac{RI}{2} + \frac{U}{4}.$$

Po wstawieniu danych  $U_0 = 5V$ . Obliczając  $R_0$  zauważamy, że rezystory  $R$  i  $3R$  (połączone szeregowo leżą równolegle do rezystora  $4R$ , który napięty jest na zaciskach AB).

$$R_0 = \frac{(R + 3R)4R}{R + 3R + 4R}$$

Po wstawieniu danych  $R_0 = 2\Omega$ .

Dla równowaznego źródła prądu ważny jest wzór

$$I_0 = \frac{U_0}{2R}, \quad I_0 = \frac{I}{4} + \frac{U}{8R}$$

Po wstawieniu danych  $I_0 = 2,5A$ .

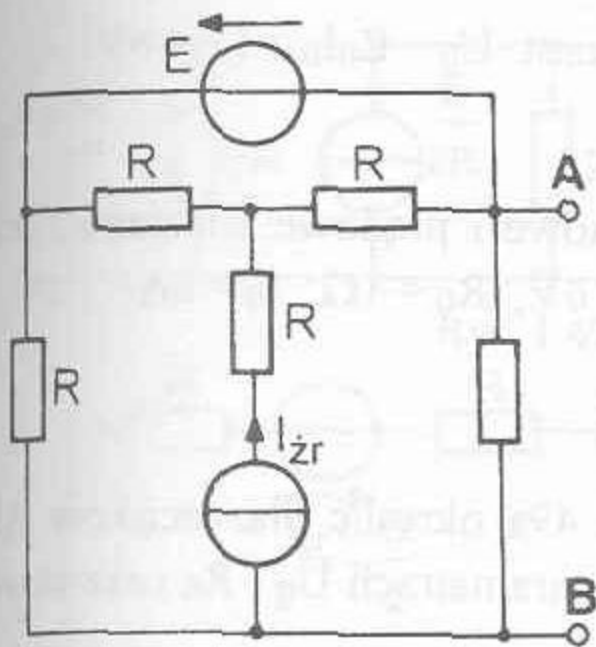
Odpowiedź:  $U_0 = 5V$ ,  $R_0 = 2\Omega$ ,  $I_0 = 2,5A$ .

### Zadanie 1.67

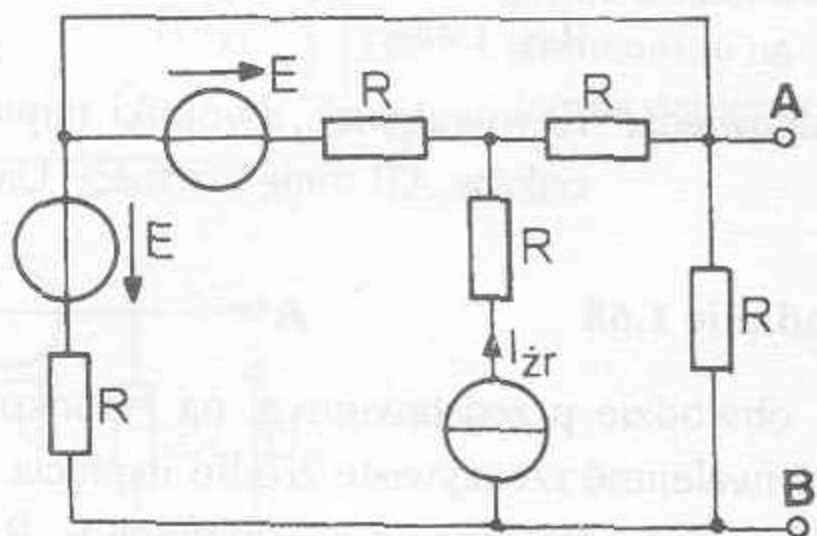
Dla schematu jak na rysunku 1.48a wyznaczyć zastępcze dwójniki aktywne (ze źródłem napięcia i źródłem prądu) widziane z zacisków AB.

Dane:  $E = 6V$ ,  $I_{zr} = 9A$ ,  $R = 2\Omega$ . Parametry dwójników zastępczych to:  $U_0$ ,  $R_0$  oraz  $I_0$ . Zadanie rozwiązać metodą przekształcania sieci.

Rozwiązanie: W pierwszym kroku postępowania do gałęzi zbiegających się w lewym górnym węźle zostaną wprowadzone dodatkowe siły elektromotoryczne o wartości  $E$ . Obrazuje to rysunek 1.48b.



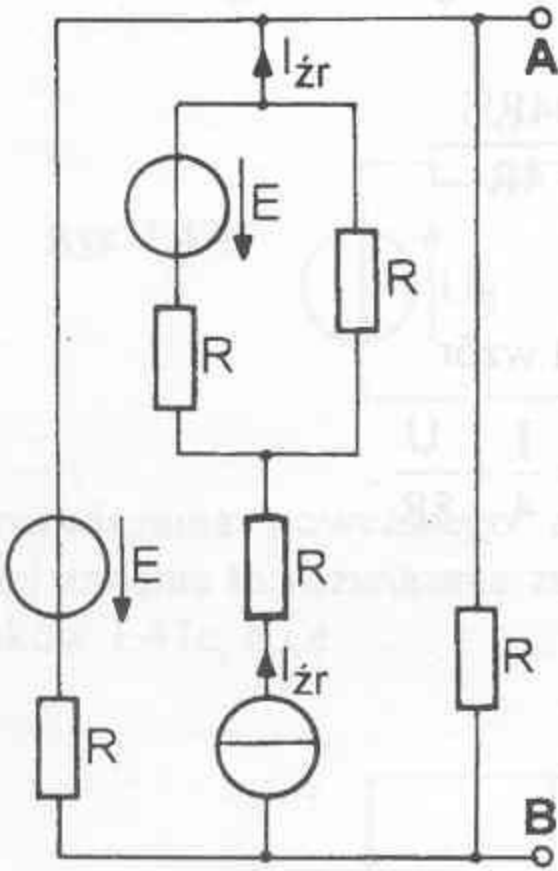
Rys. 1.48a



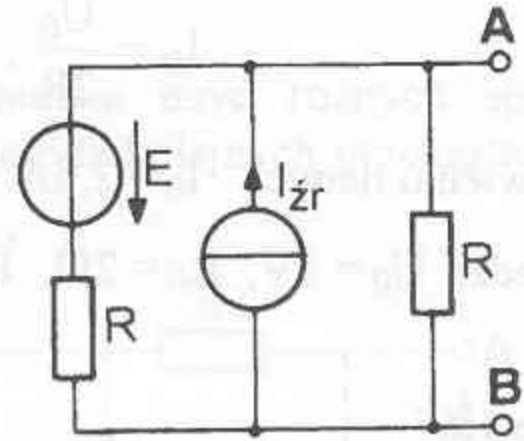
Rys. 1.48b

Dalsze przekształcenia tak otrzymanej sieci obrazują rysunki 1.48c, d i e.

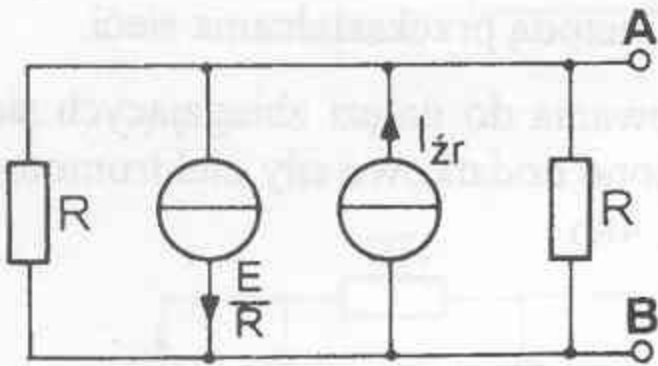
Ponieważ zgodnie z I prawem Kirchhoffa w środkowej gałęzi układu z rys. 1.48c płynie prąd  $I_{\text{zr}}$  to w gałęzi tej można pozostawić tylko (idealne) źródło prądu, obrazuje to rys. 1.48d. Rys. 1.48e przedstawia ostateczną postać prądowego dwójnika zastępczego.



Rys. 1.48c



Rys. 1.48d



Rys. 1.48e

$$I_0 = I_{\text{zr}} - \frac{E}{R},$$

Po wstawieniu danych

$$I_0 = 9 - \frac{6}{2} = 6\text{A}, \quad R_0 = \frac{R}{2} = \frac{2}{2} = 1\Omega,$$

$$\text{Natomiast } U_0 = R_0 I_0 = 1 \cdot 6 = 6\text{V}$$

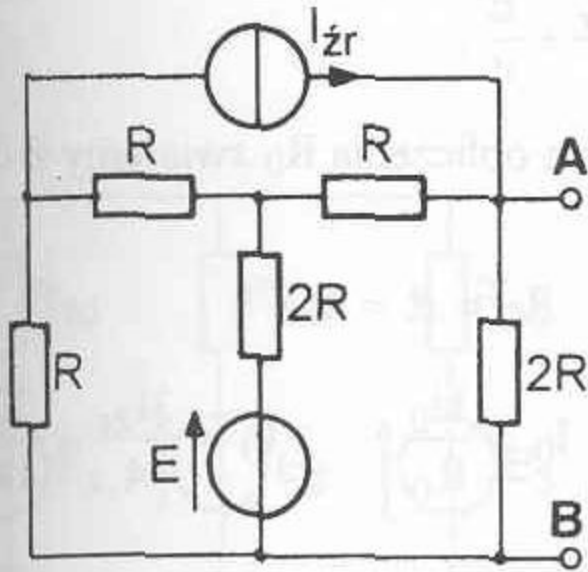
**Odpowiedź:** Ekwiwalentne dwójniki napięciowe i prądowe widziane z zacisków AB mają wartości  $U_0 = 6\text{V}$ ,  $R_0 = 1\Omega$ ,  $I_0 = 6\text{A}$ .

### Zadanie 1.68

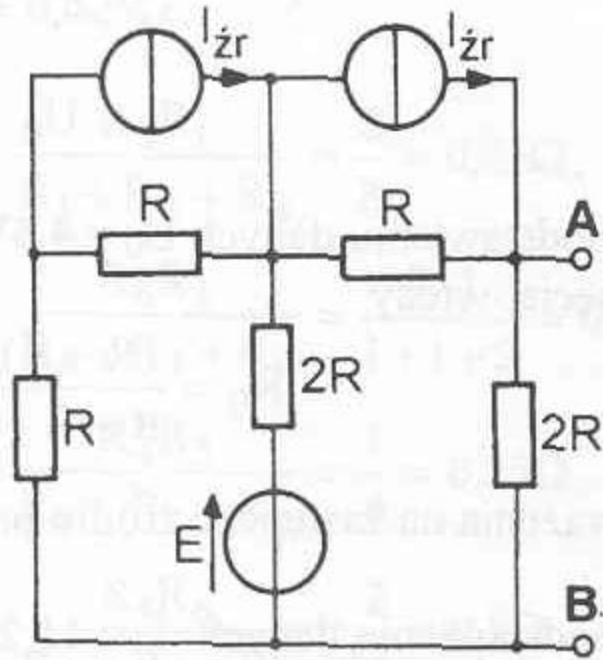
W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.49a określić dla zacisków AB ekwiwalentne rzeczywiste źródło napięcia o parametrach  $U_0$  i  $R_0$  oraz ekwiwalentne źródło prądu o parametrach  $I_0$ ,  $R_0$ .

Dane:  $E = 120V$ ,  $I_{zr} = 5A$ ,  $R = 4\Omega$ .

Wskazówka: Zastosować metodę podobną do tej której użyto przy rozwiązaniu zadania 1.67.

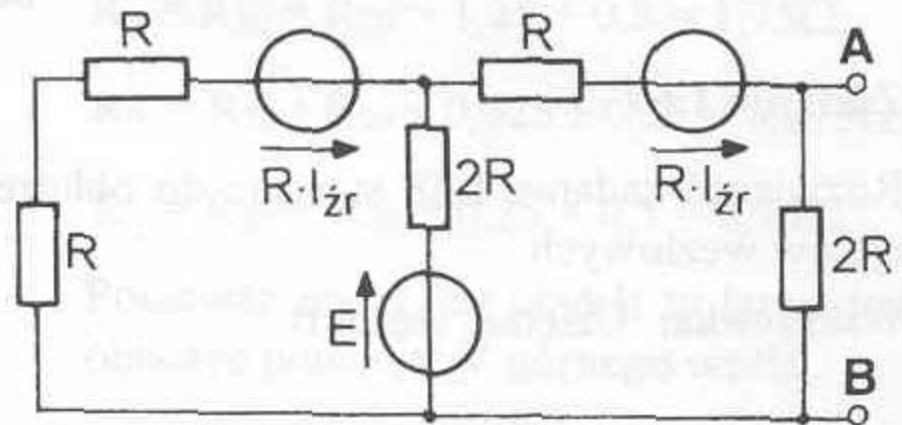


Rys. 1.49a

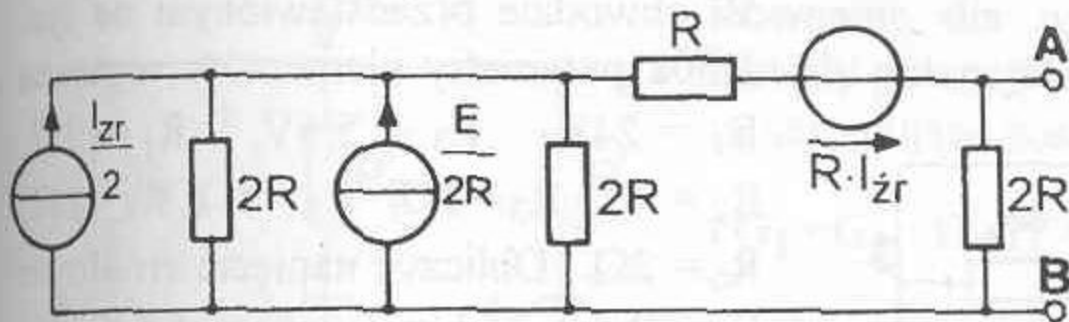


Rys. 1.49b

Obwód po pierwszym przekształceniu przedstawia rys. 1.49b, a po następnych przekształceniach rys. 1.49c, d, e.

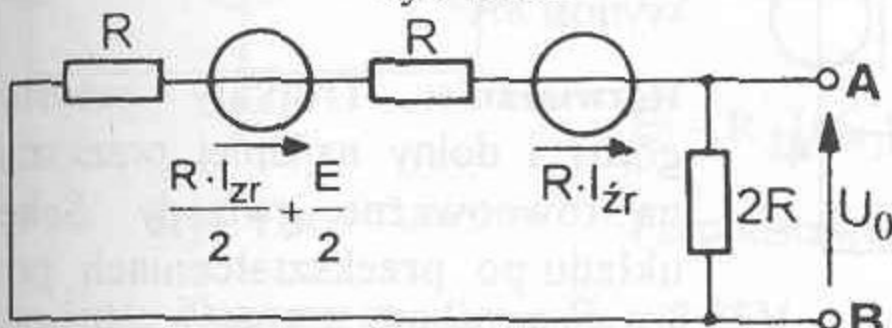


Rys. 1.49c



Rys. 1.49d

Obydwa źródła prądowe zostaną zamienione na źródła napięciowe.



Rys. 1.49e

Posługując się zasadą dzielnika napięcia można zapisać

$$U_0 = \left( RI_{\dot{z}r} + \frac{RI_{\dot{z}r}}{2} + \frac{E}{2} \right) \frac{2R}{R + R + 2R} = \frac{3RI_{\dot{z}r}}{4} + \frac{E}{4},$$

$$U_0 = \frac{3RI_{\dot{z}r}}{4} + \frac{E}{4}.$$

Po podstawieniu danych  $U_0 = 4,5V$ . Celem obliczenia  $R_0$  zwieramy źródła napięcia, wtedy

$$R_0 = \frac{(R + R)2R}{R + R + 2R}, \quad R_0 = R = 4\Omega.$$

Wyrażenia na zastępcze źródło prądu  $I_0 = \frac{U_0}{R_0}, \quad I_0 = \frac{3I_{\dot{z}r}}{4} + \frac{E}{4R}.$

Po podstawieniu danych  $I_0 = 11,25A$ .

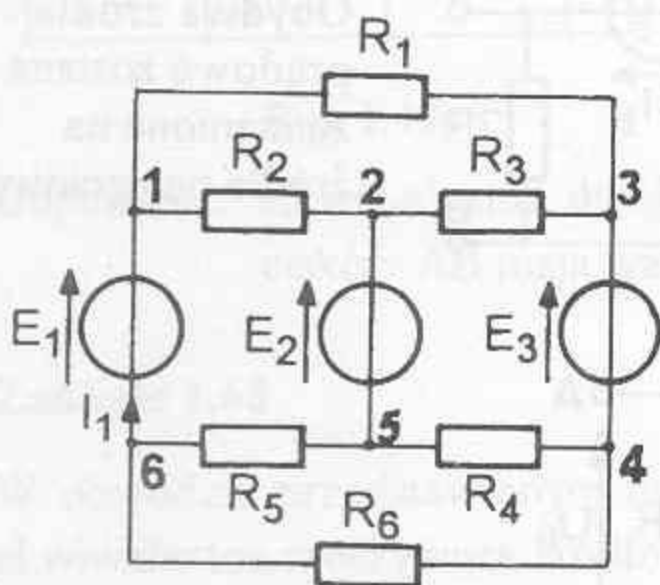
**Odpowiedź:**  $U_0 = 45V, \quad R_0 = 4\Omega, \quad I_0 = 11,25A.$

### Zadanie 1.69

Rozwiązać zadanie 1.68 stosując do obliczenia napięcia  $U_0$  metodę potencjałów węzłowych.

**Wskazówka:** Uziemić węzeł B.

### Zadanie 1.70



Rys. 1.50a

W obwodzie przedstawionym na rys. 1.50a parametry elementów wynoszą  $E_1 = 24V, \quad E_3 = 5,5V, \quad R_1 = 2\Omega, \quad R_2 = 5\Omega, \quad R_3 = 1\Omega, \quad R_4 = 1\Omega, \quad R_5 = 1\Omega, \quad R_6 = 2\Omega$ . Obliczyć napięcie źródła  $E_2$  jeśli prąd płynący przez źródło  $E_1$  wynosi  $8A$ .

**Rozwiązanie:** Trójkąty rezystancji górny i dolny najlepiej przekształcić na równoważne gwiazdy. Schemat układu po przekształceniach przedstawiają rysunki 1.50b i c.

$$R_{10} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 5}{2 + 5 + 1} = 1,25\Omega,$$

$$R_{20} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{5}{8} = 0,625\Omega,$$

$$R_{30} = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2}{8} = 0,25\Omega,$$

$$R_{40} = \frac{R_6 R_4}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{2 \cdot 1}{1 + 1 + 2} = 0,5\Omega,$$

$$R_{50} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{1}{4} = 0,25\Omega,$$

$$R_{60} = \frac{R_5 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{2}{4} = 0,5\Omega.$$

$$R'_1 = R_{10} + R_{60} = 1,25 + 0,5 = 1,75\Omega,$$

$$R'_2 = R_{20} + R_{50} = 0,625 + 0,25 = 0,875\Omega,$$

$$R'_3 = R_{30} + R_{40} = 0,25 + 0,5 = 0,75\Omega.$$

Ponieważ znany jest prąd  $I_1$  to łatwo jest obliczyć potencjał  $V$  górnego węzła

$$V = E_1 - R_1 \cdot I_1 = 24 - 1,75 \cdot 8 = 10V.$$

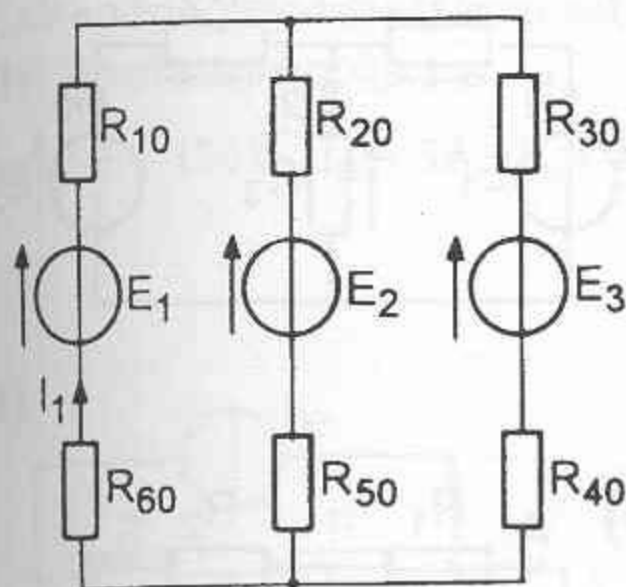
Równanie dla węzła górnego według metody potencjałów węzłowych przybiera następującą postać

$$(G'_1 + G'_2 + G'_3)V = G'_1 E_1 + G'_2 E_2 + G'_3 E_3,$$

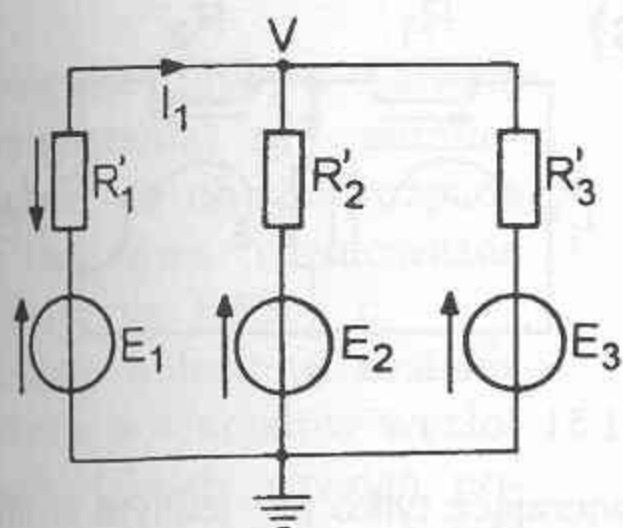
$$E_2 = \frac{(G'_1 + G'_2 + G'_3)V - G'_1 E_1 - G'_3 E_3}{G'_2},$$

$$E_2 = R'_2 [(G'_1 + G'_2 + G'_3)V - G'_1 E_1 - G'_3 E_3].$$

Po podstawieniu danych  $E_2 = 8,25V$ .



Rys. 1.50b



Rys. 1.50c

Odpowiedź: Napięcie źródłowe  $E_2 = 8,25V$ .



## 1.5. Zasada superpozycji

### Zadanie 1.71

Obliczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.51a stosując metodę superpozycji.

Dane:  $R_1 = 10\Omega$ ,  $R_2 = 2,5\Omega$ ,  $R_3 = 5\Omega$ ,  
 $E_1 = 15V$ ,  $E_2 = 12V$ .

Rozwiązanie: Po sformułowaniu równań według I i II prawa Kirchhoffa dla schematów zawierających tylko jedno źródło, wyglądają one następująco:

1	1	-1	$I_1'$	=	0
10	0	5	$I_2'$	=	15
0	2,5	5	$I_3'$	=	0

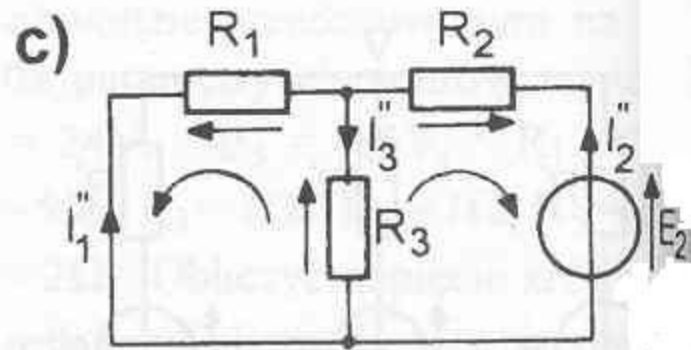
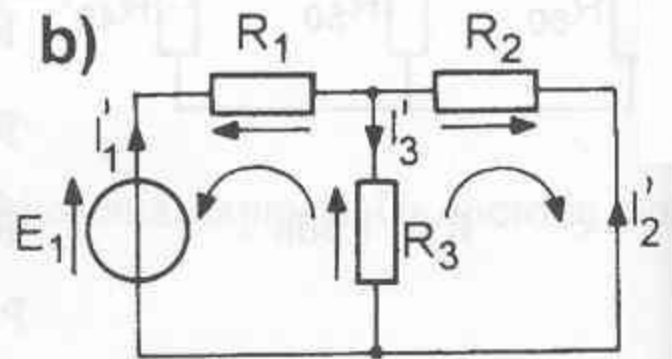
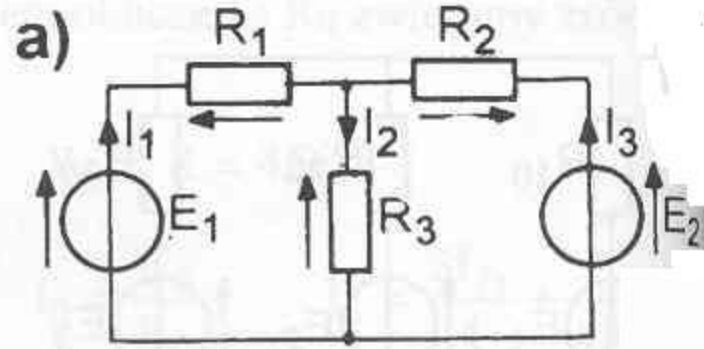
1	1	-1	$I_1''$	=	0
10	0	5	$I_2''$	=	0
0	2,5	5	$I_3''$	=	12

$$I_1' = 1,29A, \quad I_2' = -0,86A, \quad I_3' = 0,43A,$$

$$I_1'' = -0,69A, \quad I_2'' = 2,06A, \quad I_3'' = 1,37A,$$

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 0,6A, \quad I_2 = I_2' + I_2'' = 1,2A,$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 1,8A.$$



Rys. 1.51

Rozkład obwodu na układy elementarne zawierające tylko po jednym źródle przedstawiają rys. 1.51b i c. Strzałki w oczkach oznaczają ich dodatnie obiegi

Odpowiedź: Wyniki są zgodne z tymi z zadania 1.24.

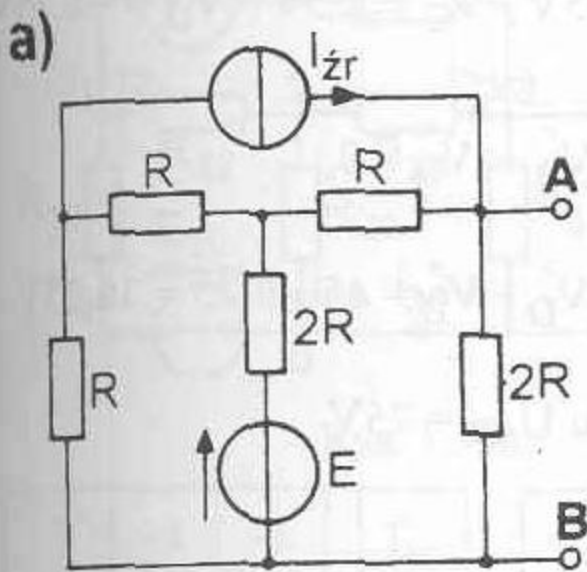
**Zadanie 1.72**

Obliczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.21 (zadanie 1.25) stosując zasadę superpozycji.

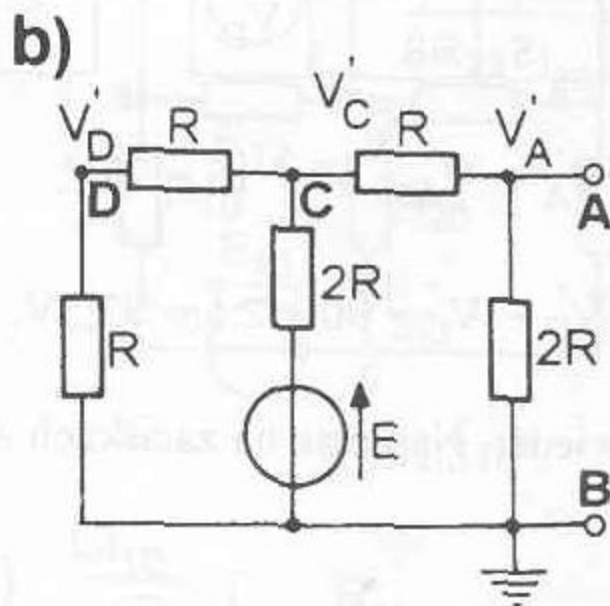
**Zadanie 1.73**

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1.52a obliczyć napięcie  $U_{AB}$  stosując zasadę superpozycji.

Dane:  $E = 120V$ ,  $I_{zr} = 5A$ ,  $R = 4\Omega$ .



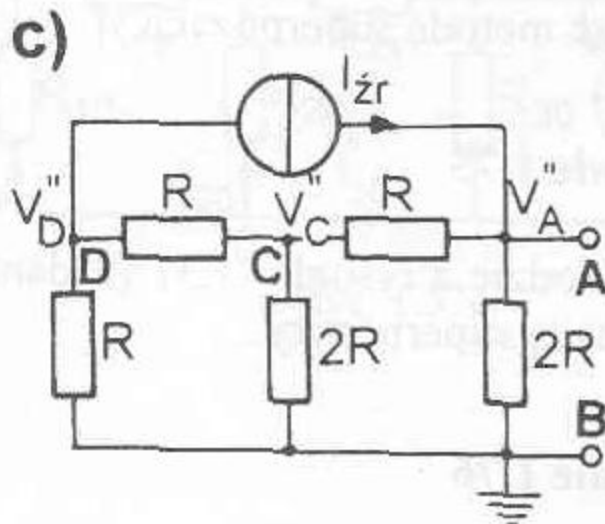
Rys. 1.52a



Rys. 1.52b

Ponieważ obydwa źródła (wymuszania) są autonomiczne, to obwód rozpada się na dwa równoważne układy rys. 1.52b i c.

Zadanie obliczone zostanie metodą potencjałów węzłowych. Układy równań podano od razu ze wstawionymi danymi liczbowymi:



Rys. 1.52c

$\frac{3}{8}$	$-\frac{2}{8}$	0
$-\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{2}{8}$
0	$-\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$

$V'_A$
$V'_C$
$V'_D$

 $=$ 

0
30
0

 $W' = \frac{1}{16},$   
 $W'_A = 3\frac{3}{4}, W'_C = 5\frac{5}{8}, W'_D = 2\frac{13}{16},$   
 $V'_A = 60V, V'_C = 90V, V'_D = 45V$

$\frac{3}{8}$	$-\frac{2}{8}$	0
$-\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{2}{8}$
0	$-\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$

$V''_A$
$V''_C$
$V''_D$

 $=$ 

5
0
-5

 $W'' = \frac{1}{16},$   
 $W''_A = \frac{15}{16}, W''_C = \frac{5}{32}, W''_D = -\frac{35}{64},$   
 $V''_A = 15V, V''_C = 2,5V, V''_D = -8,75$

$$V_A = V'_A + V''_A = 60 + 15 = 75V, \quad V_B = V'_B + V''_B = 0,$$

$$V_C = V'_C + V''_C = 90 + 2,5 = 92,5V, \quad V_D = V'_D + V''_D = 45 - 8,75 = 36,25V$$

**Odpowiedź:** Napięcie na zaciskach AB układu  $U_{AB} = 75V$ .

### Zadanie 1.74

Obliczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.29 (zadanie 1.34) stosując metodę superpozycji.

### Zadanie 1.75

W obwodzie z rysunku 1.31 (zadanie 1.38) obliczyć rozpyły prądów stosując zasadę superpozycji.

### Zadanie 1.76

W obwodzie z rysunku 1.32a obliczyć napięcie  $U_{A0}$  stosując zasadę superpozycji.

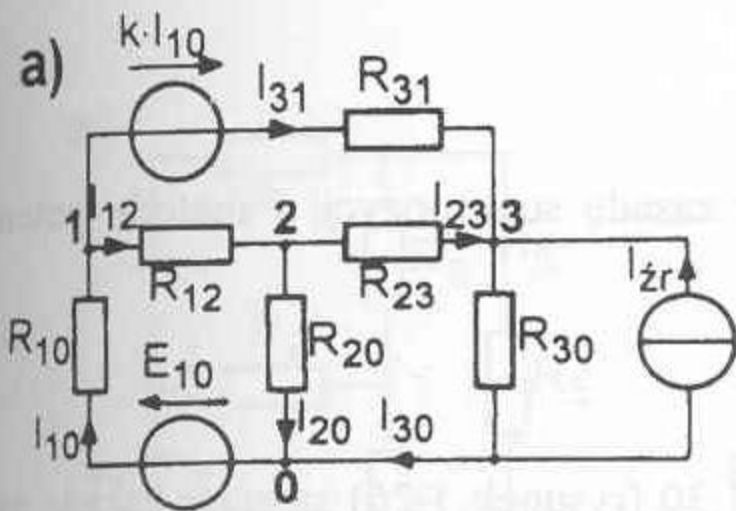
## Zadanie 1.77

W obwodzie z zadania 1.49 obliczyć rozptyw prądów stosując zasadę superpozycji i metodę prądów oczkowych.

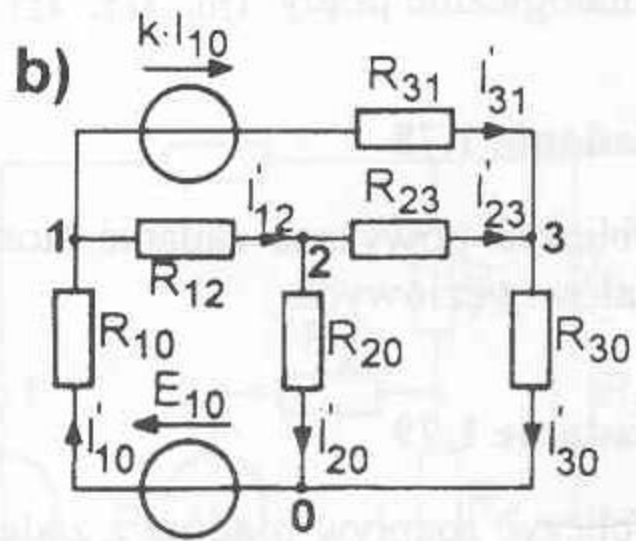
Dane:  $E_{10} = 4,5\text{V}$ ,  $I_{zr} = 3,75\text{A}$ ,  $R_{10} = 1\Omega$ ,  $R_{30} = 2\Omega$ ,  $R_{12} = R_{23} = 4\Omega$ ,  $R_{31} = 2\Omega$ ,  $k = 5,5\Omega$ .

Obwód z rysunku 1.53a posiada tylko dwa źródła autonomiczne rozpada się więc tylko na dwa niezależne obwody rysunki 1.53b i c.

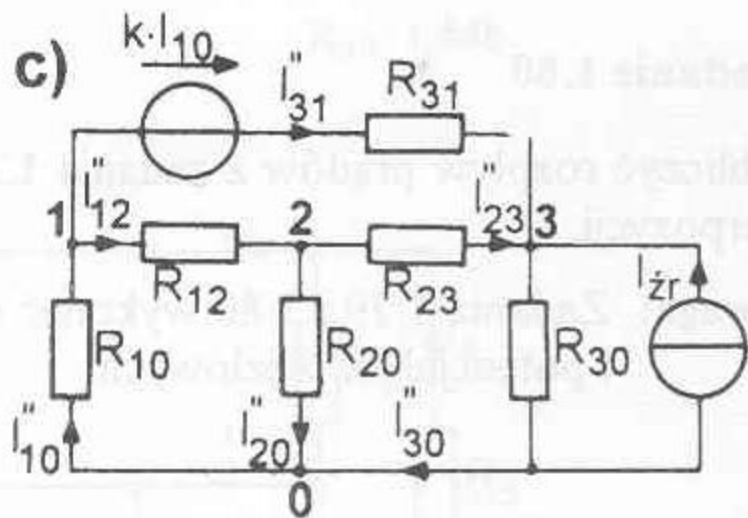
Rozwiązanie: Do poszczególnych układów równań wstawiono od razu wartości liczbowe.



Rys. 1.53a



Rys. 1.53b



Rys. 1.53c

7	-4	-1	$I'_{10}$	4,5
-9,5	10	-4	$I'_{31}$	0
-1	-4	7	$I'_{30}$	0

$$W' = 48, W'_1 = 243, W'_2 = 317,25,$$

$$W'_3 = 216, I'_{10} = 5,0625\text{A},$$

$$I'_{31} = 6,609375\text{A}, I'_{30} = 4,5\text{A}$$

7	-4	-1	$I''_{10}$	0
-9,5	10	-4	$I''_{31}$	0
-1	-4	7	$I''_{30}$	-7,5

$$W'' = 48, \quad W_1'' = -195, \quad W_2'' = -281,25, \quad W_3'' = -240.$$

$$I_{10}'' = -4,0625A, \quad I_{31}'' = -5,859375A, \quad I_{30}'' = -5A,$$

$$I_{10} = I_{10}' + I_{10}'' = 5,0625 - 4,0625 = 1A,$$

$$I_{31} = I_{31}' + I_{31}'' = 6,609375 - 5,859375 = 0,75A,$$

$$I_{30} = I_{30}' + I_{30}'' = 4,5 - 5 = -0,5A.$$

Analogicznie prądy  $I_{20}$ ,  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ .

### Zadanie 1.78

Obliczyć powyższe zadanie stosując zasadę superpozycji i metodę potencjałów węzłowych.

### Zadanie 1.79

Obliczyć rozptyw prądów z zadania 1.30 (rysunek 1.26) stosując zasadę superpozycji.

### Zadanie 1.80

Obliczyć rozptyw prądów z zadania 1.31 (rysunek 1.27) stosując zasadę superpozycji.

**Uwaga:** Zadania 1.79 i 1.80 wykonać stosując metody prądów oczkowych i potencjałów węzłowych.

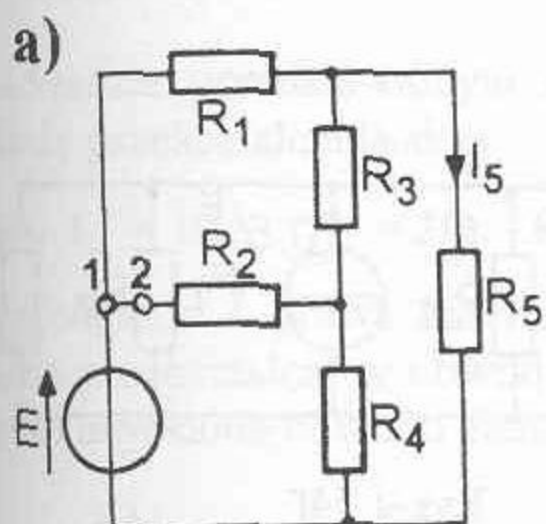
## 1.6. Metoda przekształceń sieci

### Zadanie 1.81

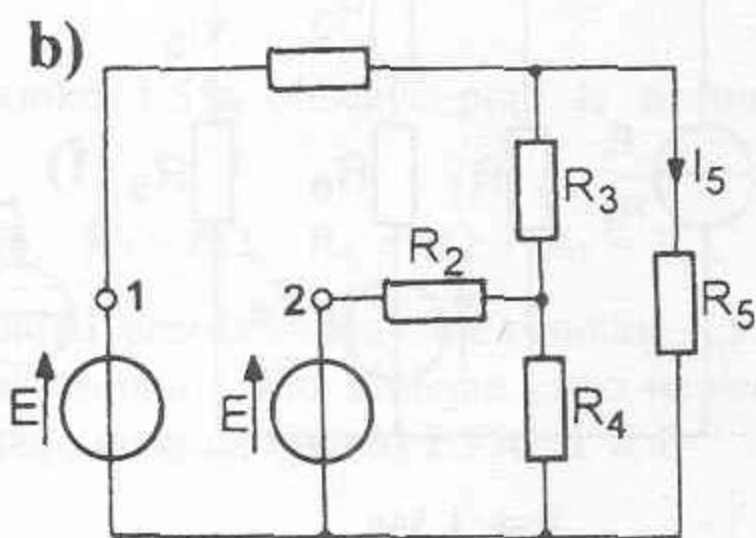
W układzie jak na rysunku 1.54a obliczyć prąd  $I_5$  stosując metodę kolejnych przekształceń sieci.

Dane:  $E = 20\text{V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_4 = 20\Omega$ ,  $R_3 = 10\Omega$ ,  $R_5 = 5\Omega$ .

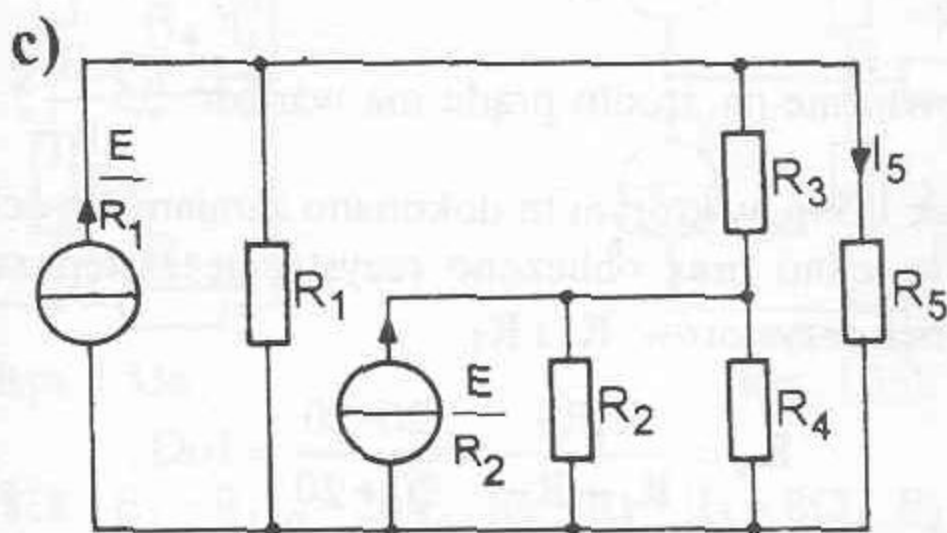
Korzystamy tu z zasady, że potencjały punktów 1 i 2 muszą pozostać takie same po usunięciu połączenia między nimi. Kolejne fazy przekształceń pokazują rysunki 1.54b, c, d, e, f, g, h.



Rys. 1.54a



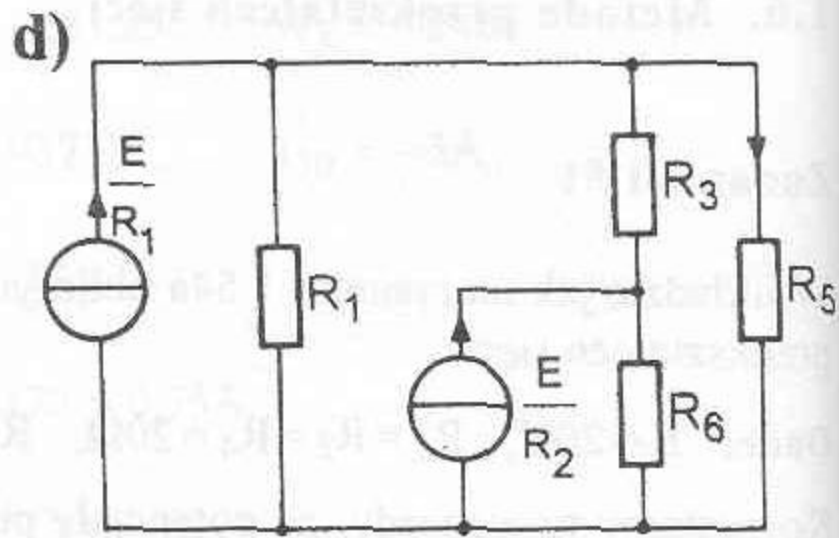
Rys. 1.54b



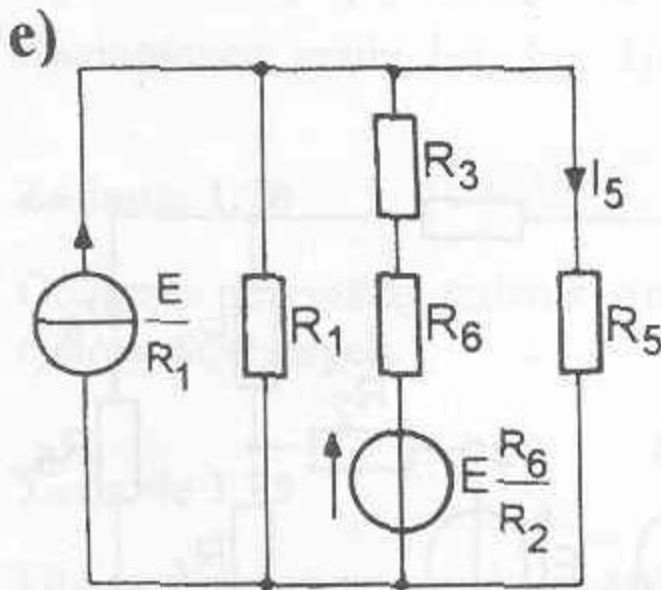
Rys 1.54c

Rezystancja  $R_6$  jest rezystancją zastępczą rezystorów  $R_2$  i  $R_4$  połączonych równolegle

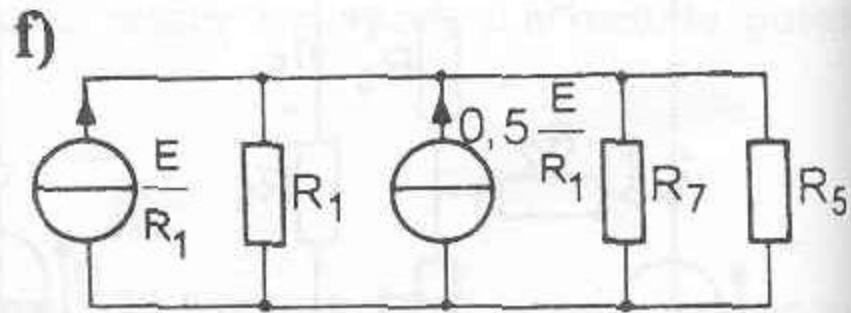
$$R_6 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10 \Omega.$$



Rys. 1.54d



Rys. 1.54e



Rys. 1.54f

W kolejnym kroku zastąpiono szeregowe połączenie rezystorów  $R_3$  i  $R_6$ ,  $R_7 = R_3 + R_6 = 20 \Omega$ . Ponieważ  $R_1 = 20 \Omega$  a  $\frac{R_6}{R_2} = 0,5$  to źródło napięcia

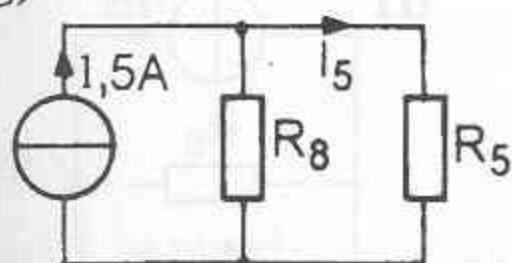
zamienione powtórnie na źródło prądu ma wartość  $0,5 \frac{E}{R_1}$ . Następny krok

ilustruje rysunek 1.54g, w którym to dokonano zamiany dwóch równoległych źródeł prądu w jedno oraz obliczono rezystancję zastępczą równoległego połączenia dwóch rezystorów  $R_1$  i  $R_7$ .

$$R_8 = \frac{R_1 R_7}{R_1 + R_7} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10 \Omega,$$

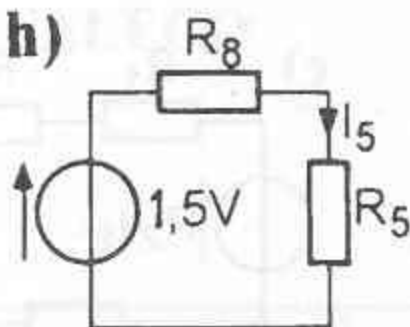
$$\frac{E}{R_1} + 0,5 \frac{E}{R_1} = 1,5 \frac{E}{R_1} = 1,5 A.$$

g)



Rys. 1.54g

h)



Rys. 1.54h

$$I_5 = 1,5 \frac{10}{10+5} = 1A, \quad I_5 = \frac{15}{10+5} = 1A.$$

Odpowiedź: Prąd płynący przez rezystor  $R_5$ ,  $I_5 = 1A$ .

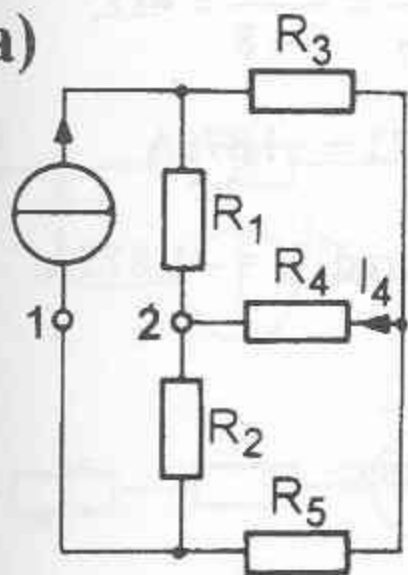
### Zadanie 1.82

W układzie przedstawionym na rysunku 1.55a obliczyć prąd  $I_4$  stosując metodę przekształcania sieci.

Dane:  $I_{zr} = 10A$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 5\Omega$ ,  $R_3 = 6\Omega$ ,  $R_4 = 4\Omega$  i  $R_5 = 3\Omega$ .

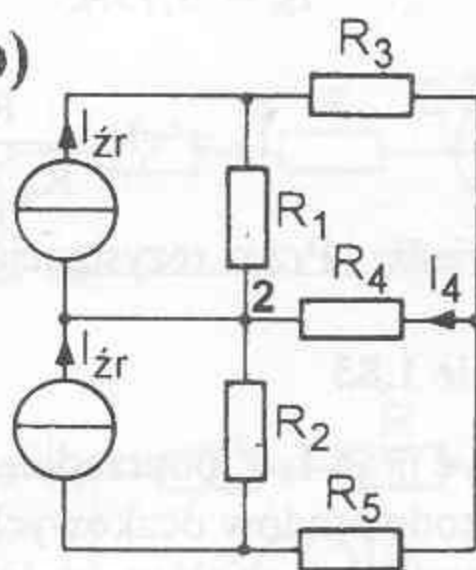
Korzystając z I prawa Kirchhoffa układ przedstawiony na rysunku 1.55a można przekształcić w obwód jak na rysunku 1.55b. Kolejne kroki na drodze do uzyskania obwodu elementarnego ilustrują rysunki 1.55c, d, e, f.

a)



Rys. 1.55a

b)

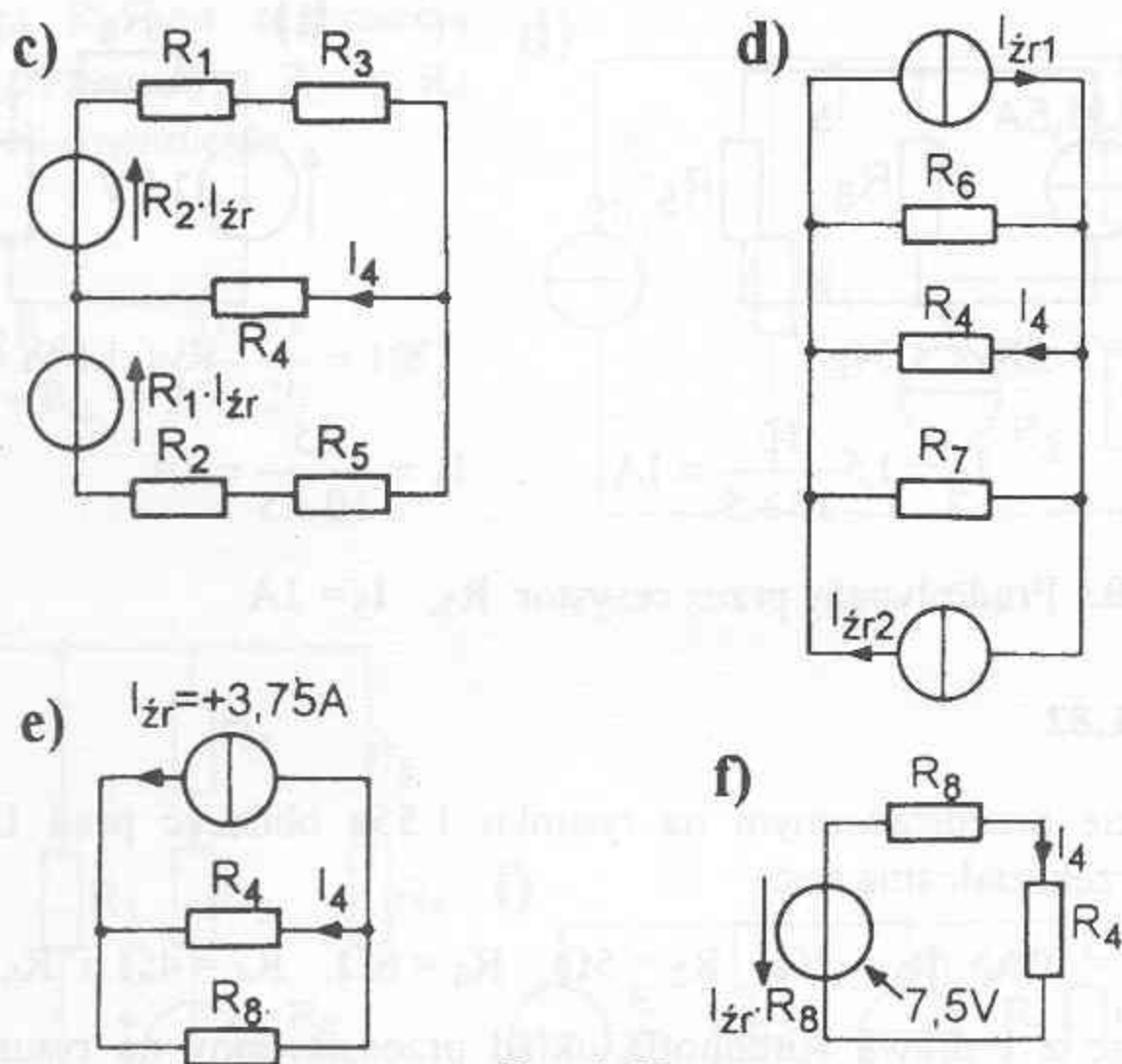


Rys. 1.55b

$$R_6 = R_1 + R_3 = 8\Omega, \quad E_1 = R_1 I_{zr} = 20V, \quad R_7 = R_2 + R_5 = 8\Omega, \quad E_2 = R_2 I_{zr} = 50V,$$

$$I_{zr1} = \frac{E_1}{R_6} = \frac{20}{8} = 2,5A, \quad I_{zr2} = \frac{E_2}{R_7} = \frac{50}{8} = 6,25A.$$





Rys. 1.55

$$I_{zr} = 3,75\text{A}, \quad R_8 = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4\Omega,$$

$$I_4 = -I_{zr} \frac{R_8}{R_4 + R_8} = -0,5 \cdot 3,75 = -1,875\text{A}.$$

**Odpowiedź:** Przez rezystancję  $R_4$  przepływa prąd  $I_4 = -1,875\text{A}$ .

### Zadanie 1.83

Obliczyć prąd  $I_4$  z poprzedniego zadania stosując:

- Metodę prądów oczkowych,
- metodę potencjałów węzłowych.

### Zadanie 1.84

Oblicz prąd  $I_5$  dla schematu z zadania 1.81 za pomocą:

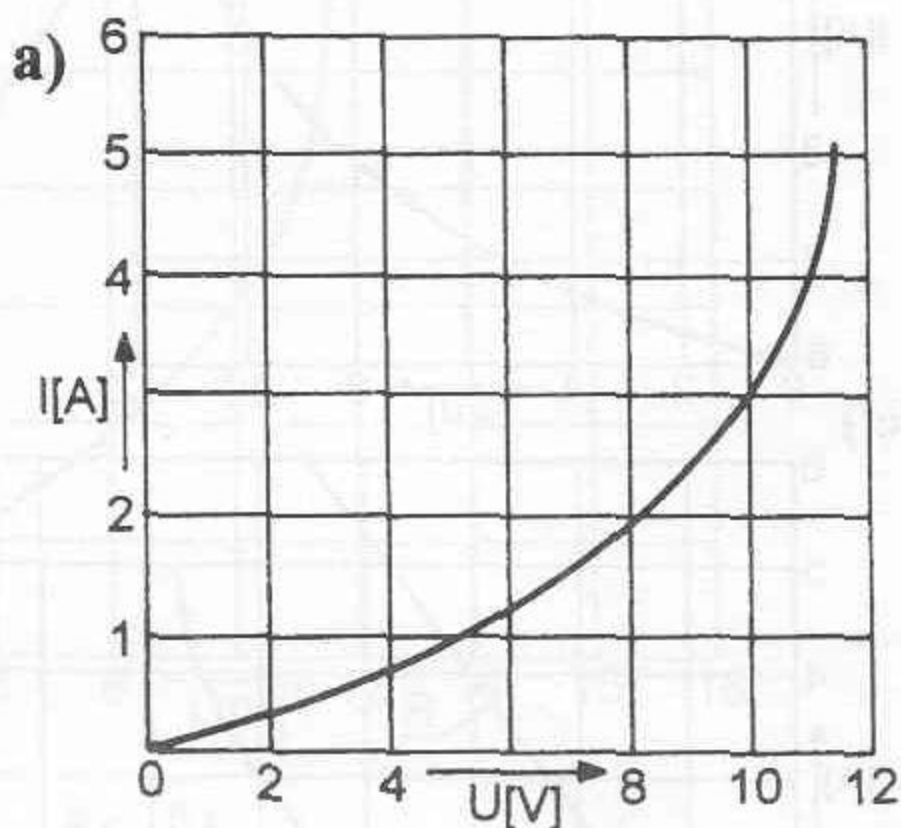
- Metody oczkowej,
- potencjałów węzłowych.

## 2. NIELINIOWE OBWODY PRĄDU STAŁEGO

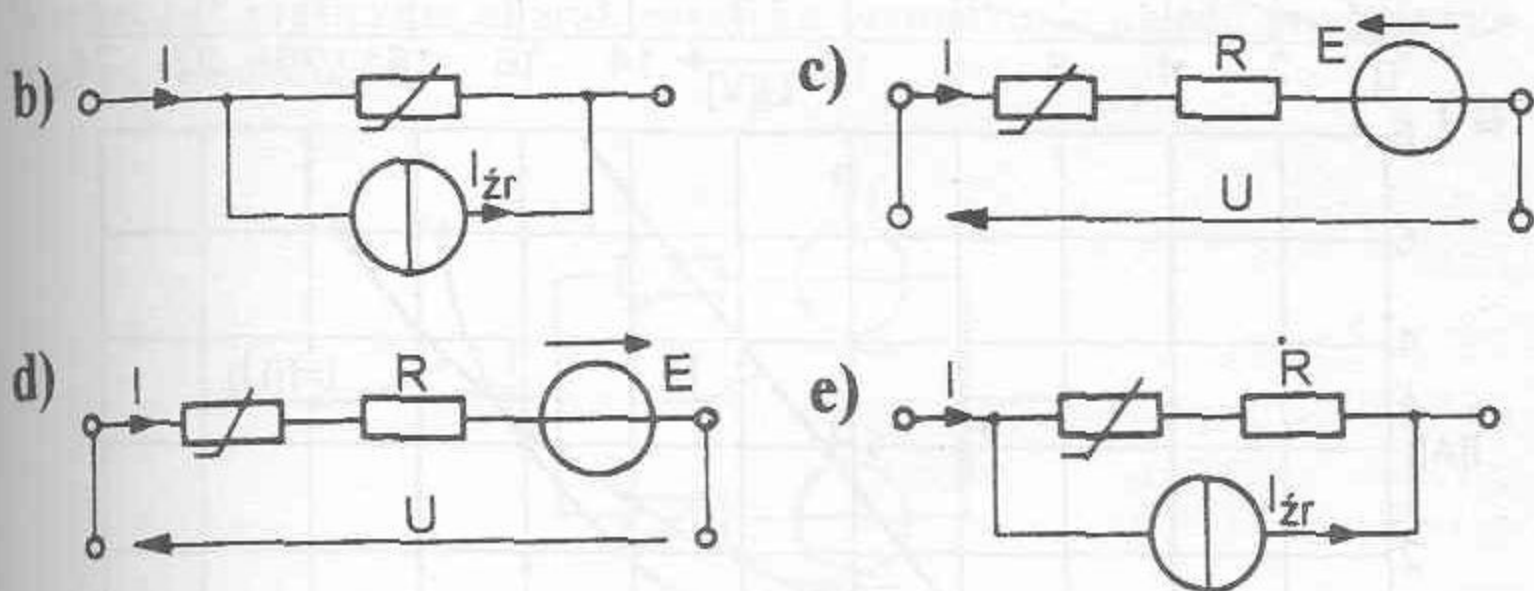
### Zadanie 2.1

Na rysunku 2.1a przedstawiono charakterystykę elementu nieliniowego. Wartość rezystora liniowego  $R=1,5\Omega$  natomiast wartości źródeł  $E=5V$ ,  $I_{zr}=6A$ .

Wyznaczyć graficznie charakterystyki dla podanych na rysunkach 2.1b, c, d, e gałęzi złożonych.

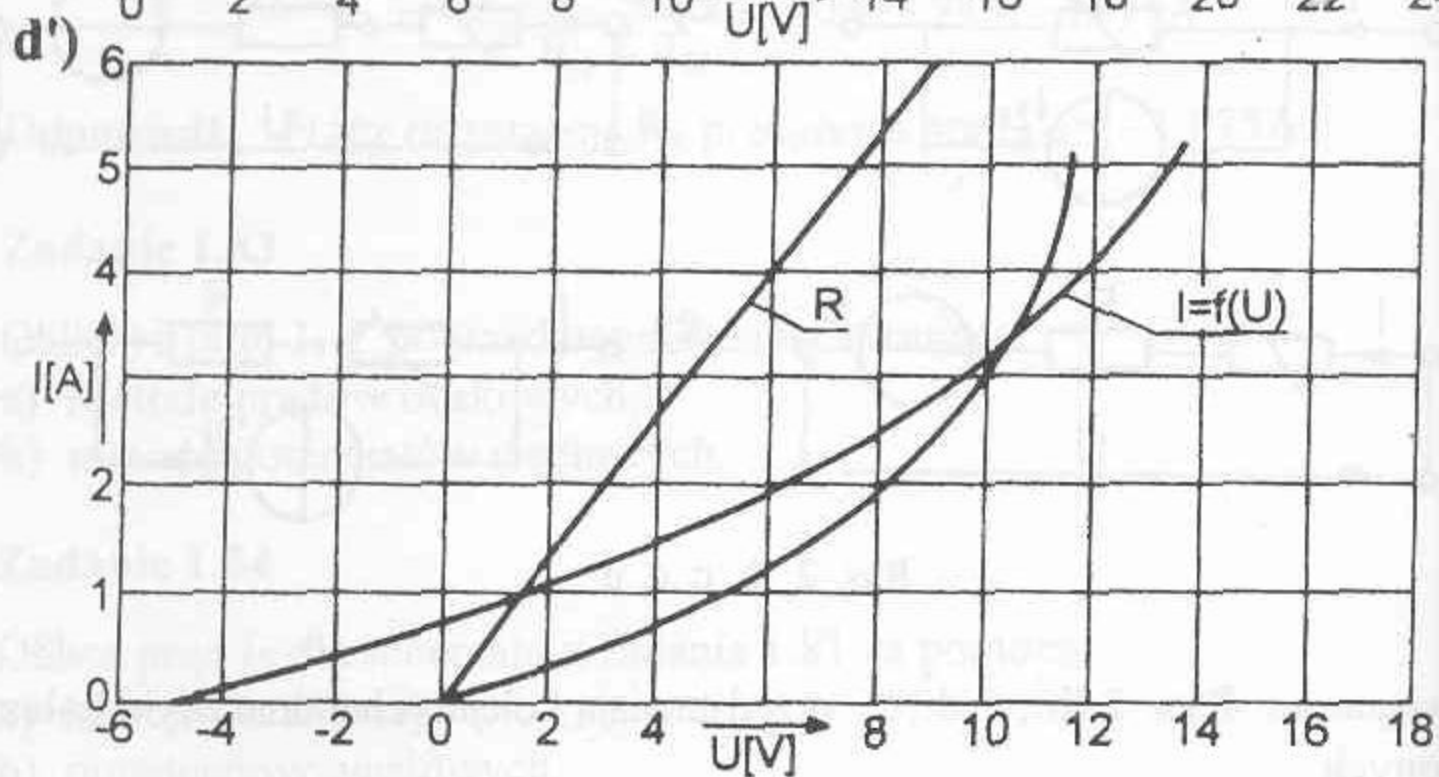
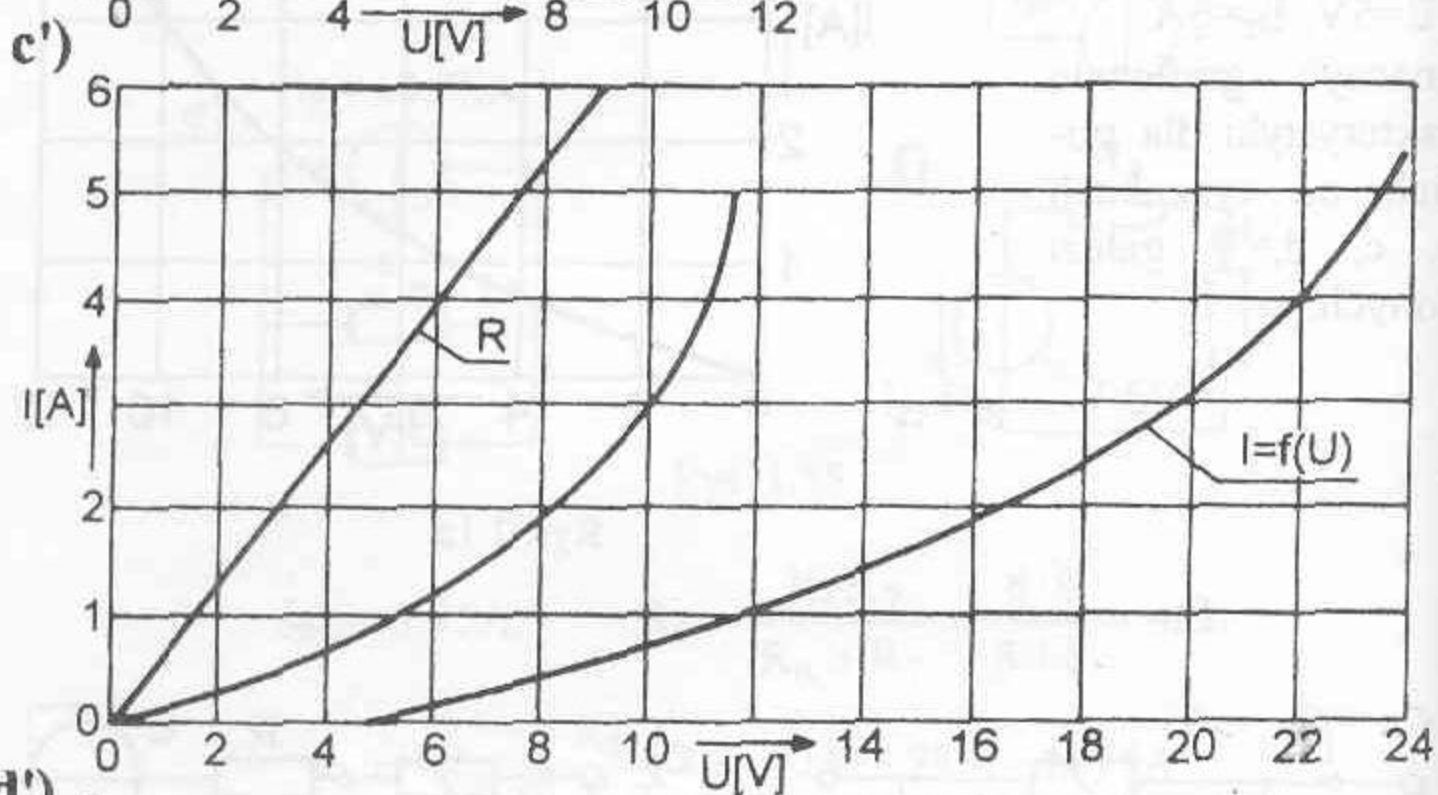
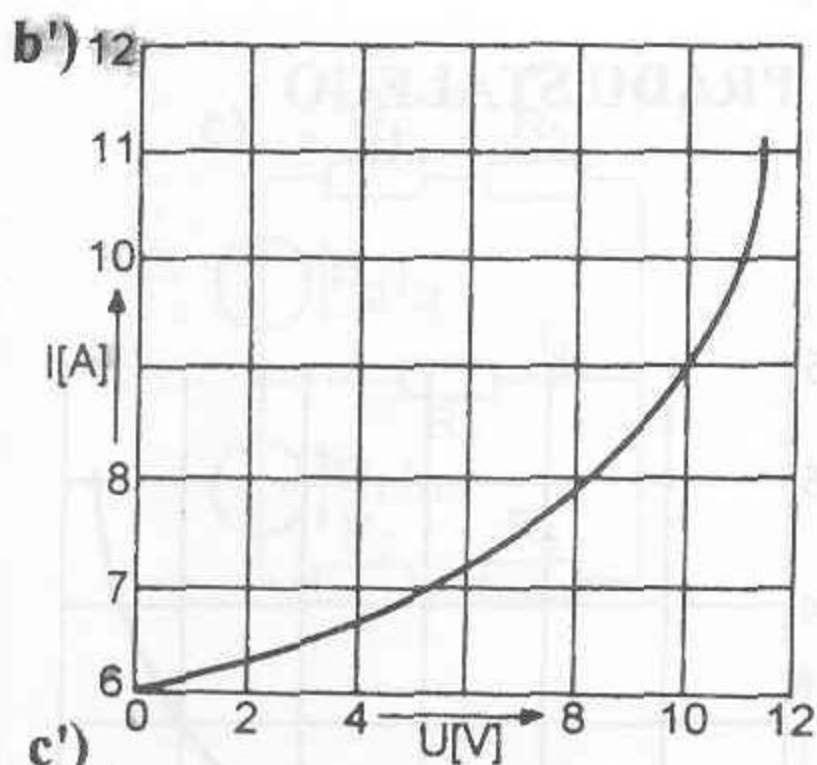


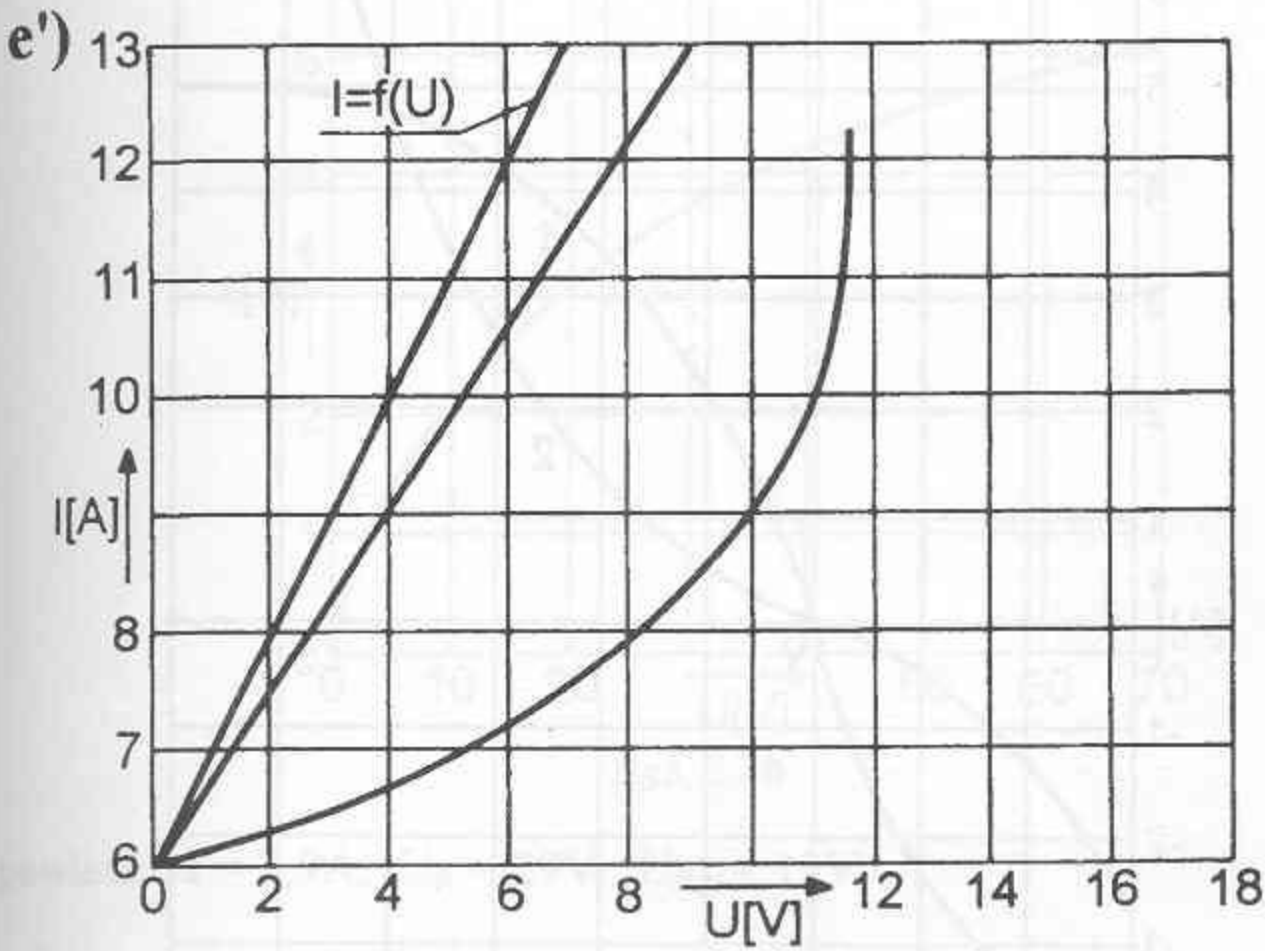
Rys. 2.1a



Rys. 2.1b, c, d, e

Rozwiązania: Rys. 2.1b', c', d', e' przedstawiają kolejno charakterystyki gałęzi złożonych.

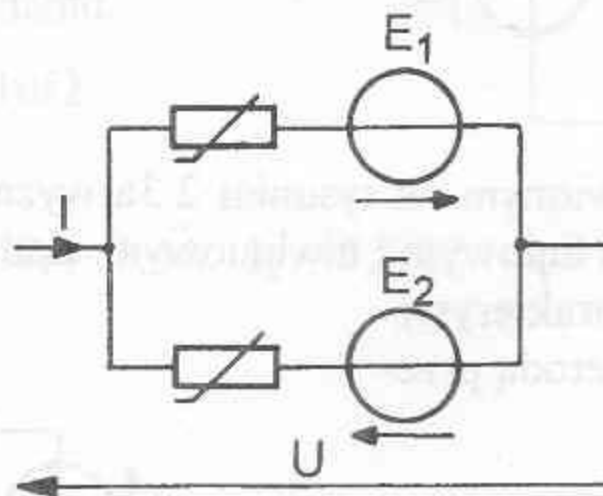




Rys. 2.1

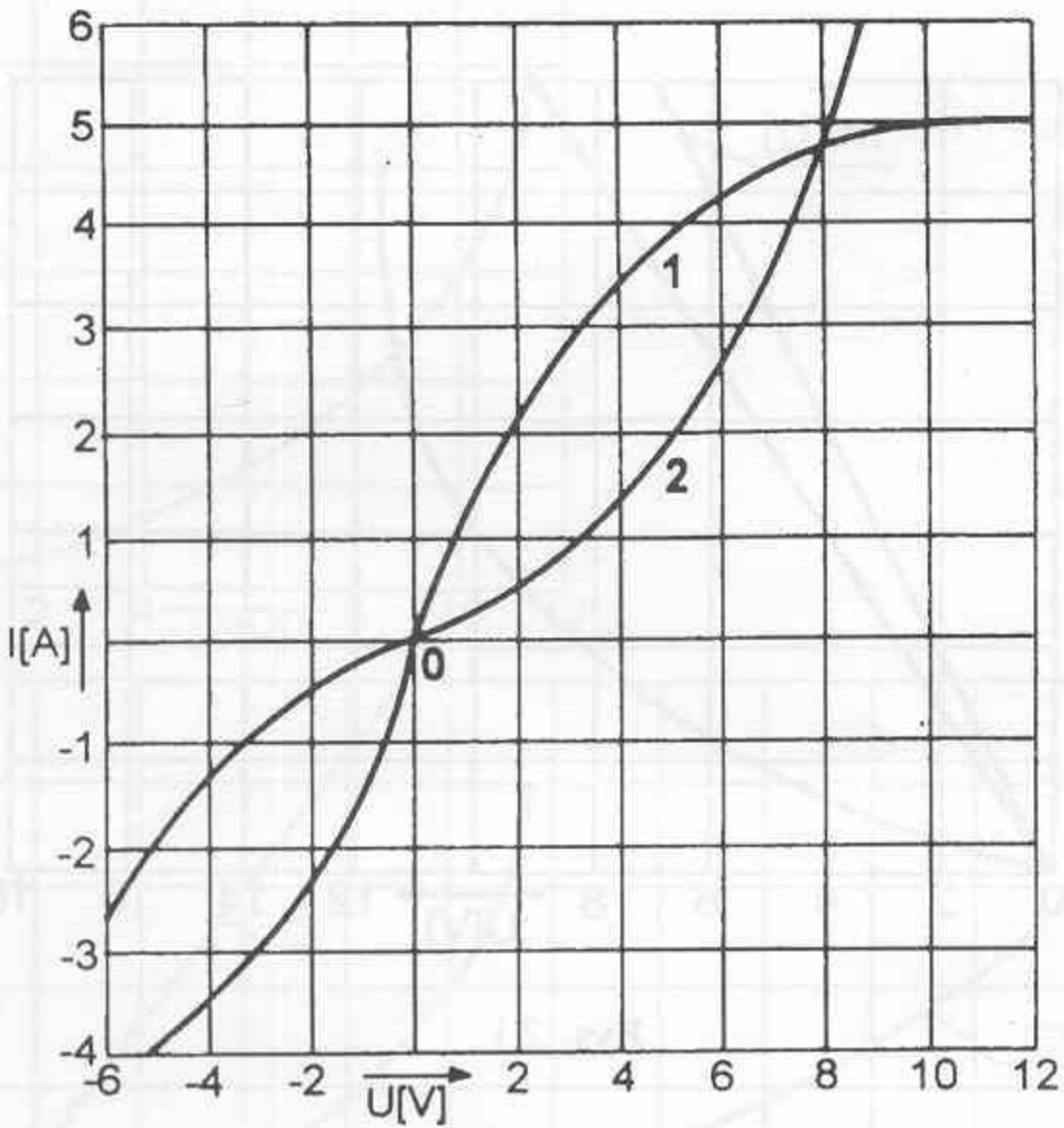
## Zadanie 2.2

Wyznaczyć graficznie charakterystykę wypadkową układu przedstawionego na rysunku 2.2a.



Rys. 2.2a

Dane:  $E_1 = 3\text{V}$ ,  $E_2 = 4\text{V}$ , a charakterystyki elementów nieliniowych przedstawia rysunek 2.2b.



Rys. 2.2b

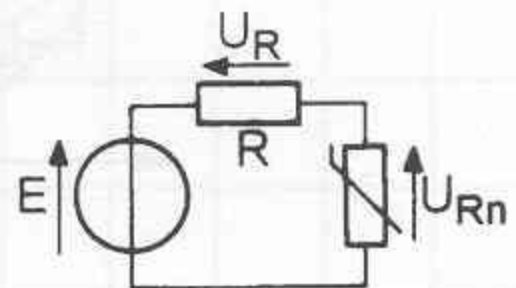
**Wskazówka:** Wyznaczyć najpierw charakterystyki gałęzi szeregowych (dla stałych wartości prądów) a następnie wypadkową charakterystykę układu (dla stałych wartości napięcia).

### Zadanie 2.3

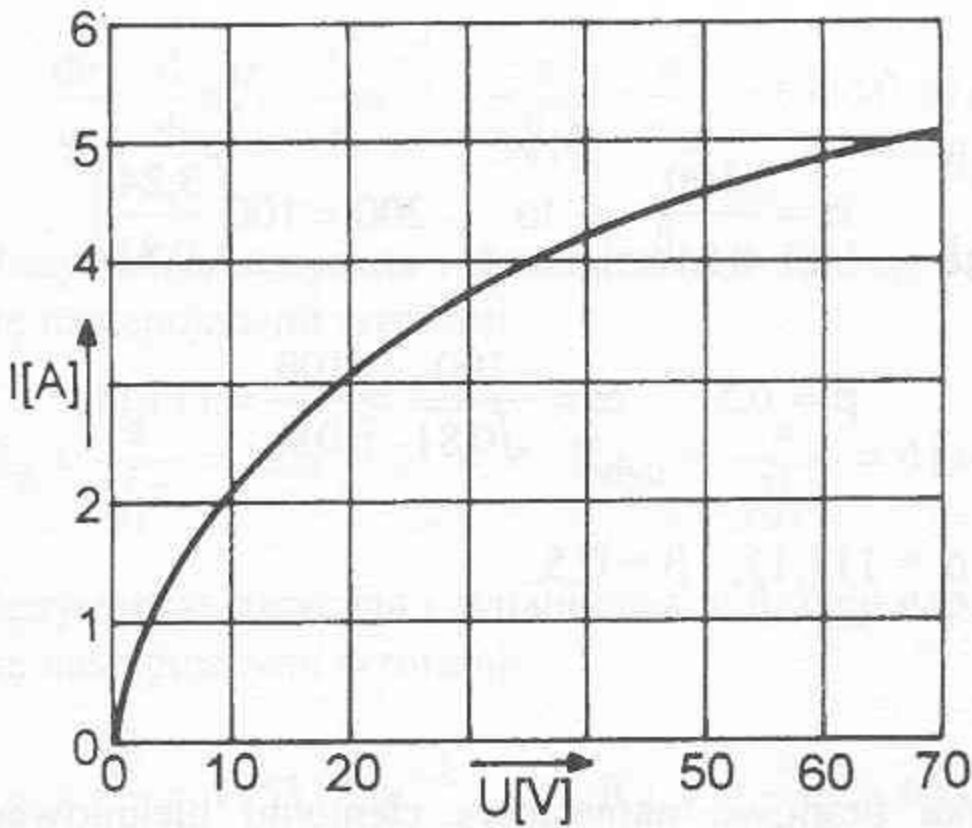
W obwodzie przedstawionym na rysunku 2.3a wyznaczyć prąd oraz spadki napięcia na rezystorach liniowym i nieliniowym. Zadanie rozwiązać dwoma metodami, metodą charakterystyki wypadkowej oraz metodą przecięcia charakterystyk.

**Dane:**  $E = 48\text{V}$ ,  $R = 10\Omega$ .

Charakterystykę elementu nieliniowego przedstawia rysunek 2.3b.



Rys. 2.3a



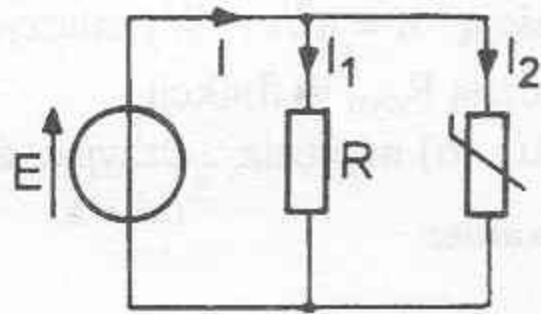
Rys. 2.3b

Odpowiedź:  $I = 2,9\text{A}$ ,  $U_R = 29\text{V}$ ,  $U_{Rn} = 19\text{V}$ .

#### Zadanie 2.4

W obwodzie przedstawionym na rysunku 2.4 wyznaczyć prądy  $I$ ,  $I_1$  oraz  $I_2$ . Charakterystyka elementu nieliniowego jest taka jak na rysunku 2.3b w poprzednim zadaniu.

Dane:  $E = 24\text{V}$ ,  $R = 10\Omega$



Rys. 2.4

Odpowiedź:  $I = 5,7\text{A}$ ,  $I_1 = 2,4\text{A}$ ,  $I_2 = 3,3\text{A}$ .

#### Zadanie 2.5

Charakterystyka prądowo napięciowa elementu nieliniowego przedstawiona jest zależnością  $U = \alpha I^\beta$ . Obliczyć wartości stałych  $\alpha$  i  $\beta$ , jeżeli przy napięciu 100V prąd wynosi 0,81A, a przy napięciu 200V, 3,24A.

**Rozwiązanie:**

$$\begin{cases} 100 = \alpha 0,81^\beta \\ 200 = \alpha 3,24^\beta \end{cases} \quad \alpha = \frac{100}{0,81^\beta} \quad \text{to} \quad 200 = 100 \left( \frac{3,24}{0,81} \right)^\beta, \quad 2 = 4^\beta,$$

$$\beta = 0,5, \quad \alpha = \frac{100}{\sqrt{0,81}} = \frac{100}{0,9} = 111,11.$$

**Odpowiedź:**  $\alpha = 111,11$ ,  $\beta = 0,5$ .

### Zadanie 2.6

Charakterystyka prądowo napięciowa elementu nieliniowego wyraża się zależnością  $U = aI^b$ . Jakie są wartości stałych  $a$  i  $b$  jeżeli przy napięciu 16V prąd wynosi 2A a przy napięciu 250V,  $I = 5A$ ?

**Odpowiedź:**  $a = 2$ ;  $b = 3$ .

### Zadanie 2.7

Charakterystyka prądowo - napięciowa elementu nieliniowego wyraża się zależnością  $u = a\sqrt[3]{i}$ . Wyznaczyć rezystancję statyczną  $R_s$  i rezystancję dynamiczną  $R_{dyn}$  w funkcji:

a) prądu; b) napięcia. Przyjąć, że  $a = 125$ .

**Rozwiązanie:**

$$R_s = \frac{u}{i} = \frac{a\sqrt[3]{i}}{i} = \frac{a}{\sqrt[3]{i^2}} = \frac{125}{\sqrt[3]{i^2}}, \quad \sqrt[3]{i} = \frac{u}{a} \quad \text{to} \quad \sqrt[3]{i^2} = \frac{u^2}{a^2},$$

$$R_s = \frac{aa^2}{u^2} = \frac{a^3}{u^2} = 1953125u^{-2},$$

$$R_{dyn} = \frac{du}{di} = \frac{d}{di} ai^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} ai^{-\frac{2}{3}} = \frac{a}{3\sqrt[3]{i^2}} = \frac{41,67}{\sqrt[3]{i^2}},$$

$$R_{\text{dyn}} = \frac{du}{di} = \frac{d}{di} a\sqrt[3]{i} = \frac{1}{3} ai^{-\frac{2}{3}} = \frac{a}{3\sqrt[3]{i^2}} = \frac{a^3}{3u^2} = 652041,67u^{-2}.$$

**Odpowiedź:** Rezystancja statyczna i dynamiczna w funkcji prądu wyrażają się następującymi wzorami:

$$R_S = \frac{a}{\sqrt[3]{i^2}} = 125i^{-\frac{2}{3}}, \quad R_{\text{dyn}} = \frac{a}{3\sqrt[3]{i^2}} = 41,67i^{-\frac{2}{3}}.$$

Rezystancje statyczna i dynamiczna w funkcji napięcia wyrażają się następującymi wzorami:

$$R_S = \frac{a^3}{u^2} = 1953125u^{-2}, \quad R_{\text{dyn}} = \frac{a^3}{3u^2} = 651041,67u^{-2}.$$

### Zadanie 2.8

Charakterystyka elementu nieliniowego wyraża się zależnością  $i = au + bu^3$ . Wyznaczyć rezystancję statyczną i rezystancję dynamiczną w funkcji napięcia. Obliczyć wartości  $R_S$  i  $R_{\text{dyn}}$  dla  $a = 0,05$ ,  $b = 0,001$  przy trzech wartościach napięcia:  $u \rightarrow 0$  oraz  $u = 10$  i  $u = 20V$ .

**Rozwiązanie:**

$$R_S = \frac{u}{i} = \frac{u}{au + bu^3} = \frac{1}{a + bu^2},$$

$$\frac{di}{du} = a + 3bu^2, \quad \text{to} \quad R_{\text{dyn}} = \frac{du}{di} = \frac{1}{a + 3bu^2}.$$

Jeżeli  $u \rightarrow 0$  to z analizy powyższych wzorów wynika, że  $R_S = R_d = 20\Omega$ .

Jeżeli  $u = 10V$  to  $R_S = 6,67\Omega$ ,  $R_{\text{dyn}} = 2,86\Omega$ .

Jeżeli  $u = 20V$  to  $R_S = 2,22\Omega$ ,  $R_{\text{dyn}} = 0,8\Omega$ .

**Odpowiedź:** a)  $R_S = R_{\text{dyn}} = 20\Omega$ , b)  $R_S = 6,67\Omega$ ,  $R_{\text{dyn}} = 2,86\Omega$ ,  
c)  $R_S = 2,22\Omega$ ,  $R_{\text{dyn}} = 0,8\Omega$ .



### Zadanie 2.9

W mostku Wheatstone'a jak na rys. 2.5 dwa przeciwległe ramiona stanowią rezystory liniowe o wartości  $R = 2\text{k}\Omega$ , a dwa pozostałe ramiona rezystory  $R(I)$  o charakterystykach  $U = 200\sqrt[4]{I}$ . Dla jakiej wartości  $E$  idealnego źródła zasilającego mostek będzie w równowadze?

**Rozwiązanie:** Z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że w stanie równowagi mostka  $E = 2RI$  tzn.  $E = 4000I$ . Ponieważ w środkowej gałęzi mostka podczas jego równowagi nie płynie prąd ( $I_0 = 0$ ) to ważne jest równanie  $RI - 200\sqrt[4]{I} = 0$ , czyli  $RI = 200\sqrt[4]{I}$

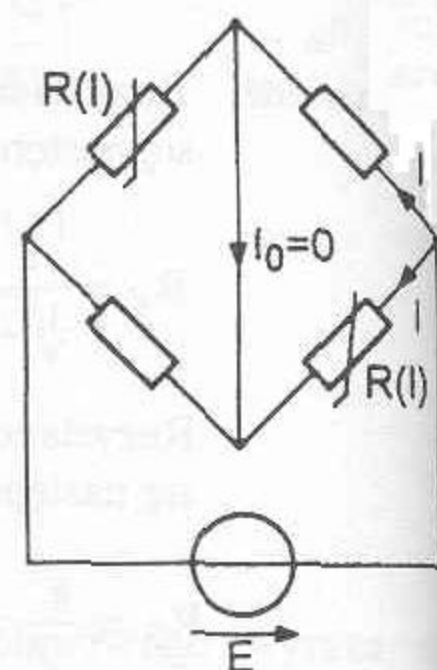
$$I = 10^{-1}\sqrt[4]{I} \quad \text{to} \quad I = 10^{-1}10^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{10} \frac{1}{\sqrt[3]{10}},$$

$$E = 4000 \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \frac{400}{\sqrt[3]{10}} = 185,66\text{V} \approx 186.$$

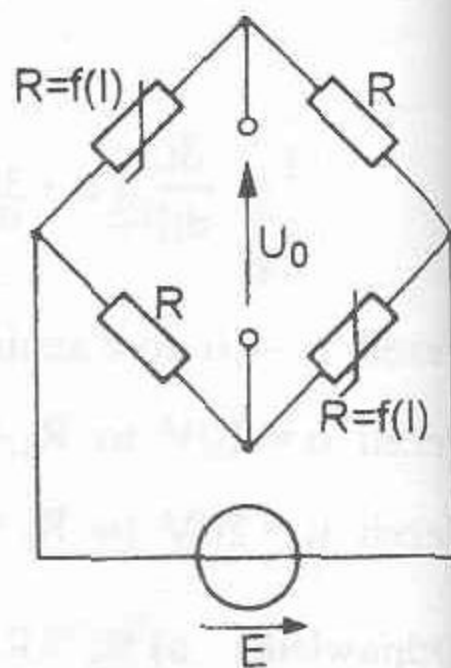
**Odpowiedź:** Mostek znajduje się w równowadze dla  $E \approx 186\text{V}$ .

### Zadanie 2.10

Rysunek 2.6 przedstawia mostek Wheatstone'a w którym zastosowano dwa identyczne rezystory liniowe oraz dwa identyczne rezystory nieliniowe  $R = f(I)$ . Charakterystyki rezystorów nieliniowych dane są wzorami  $U = kI^n$ . Przekątna mostka pozostaje nie obciążona a występujące na niej napięcie oznaczono jako  $U_0$ . Dla jakich wartości  $E$  wahania tego napięcia będą miały najmniejszy wpływ na napięcie  $U_0$ ?



Rys. 2.5



Rys. 2.6

**Dane:**  $R = 100\Omega$ ,  $k = 2,5$ ,  $n = 4$ .

**Rozwiązanie:** Z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że  $E = RI + kI^n$  natomiast  $U_0 = E - 2RI$ . Aby oddziaływanie zmian napięcia  $E$  na napięcie  $U_0$

było jak najmniejsze  $\frac{dU_0}{dE}$  musi przyjmować wartość równą zero  $\frac{dU_0}{dE} = 0$

to  $1 - 2R \frac{dI}{dE} = 0$  to  $\frac{dI}{dE} 2R = 1$ ,  $2R = \frac{dE}{dI}$ , z pierwszego równania

wynika, że  $\frac{dE}{dI} = R + nkI^{n-1}$  lub  $2R = R + nkI^{n-1}$ ,  $I = \left(\frac{R}{nk}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ ,

wyrażenie to odpowiada prądowi, przy którym układ wykazuje własności stabilizatora napięcia  $U_0$ .

$$E = RI + kI^n \quad \text{czyli} \quad E = \left(\frac{R^2}{nk}\right)^{\frac{1}{n-1}} + k\left(\frac{R}{nk}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$\text{Podstawiając dane} \quad E = \left(\frac{100^2}{4 \cdot 2,5}\right)^{\frac{1}{3}} + 2,5\left(\frac{100}{4 \cdot 2,5}\right)^{\frac{4}{3}} = 10 + 53,86 = 63,86 \text{ V}.$$

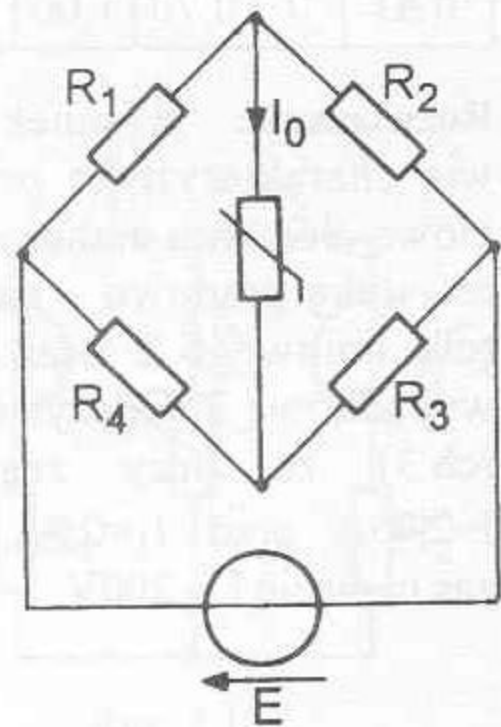
**Odpowiedź:**  $E = 63,86 \approx 64 \text{ V}$ .

### Zadanie 2.11

W mostku Wheatstone'a jak na rysunku 2.7a przekątną jest rezystor nieliniowy o charakterystyce przedstawionej na rysunku 2.7b. Obliczyć prąd  $I_0$  płynący przez ten rezystor jeżeli dane są:

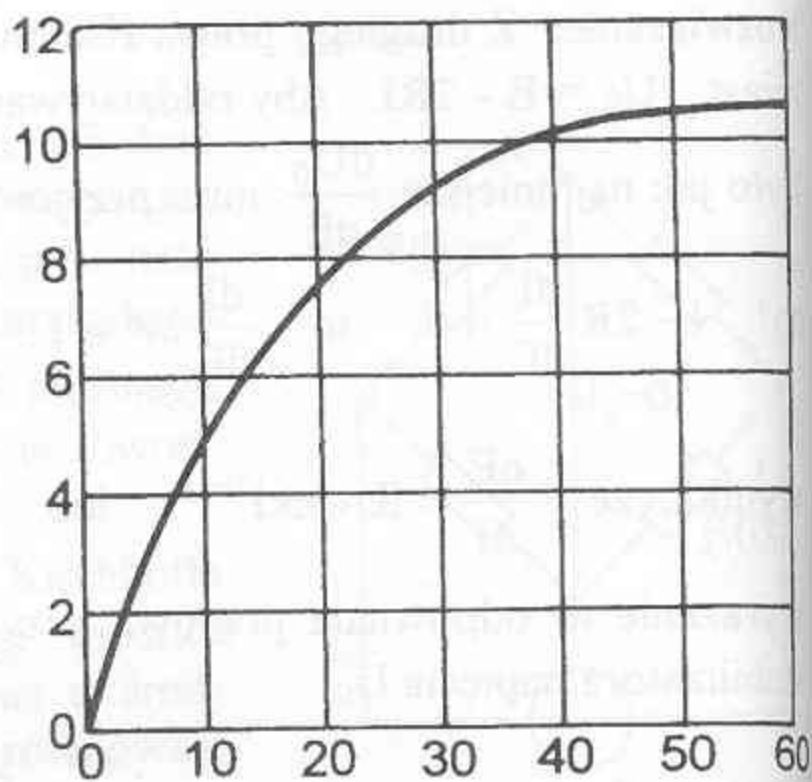
$$R_1 = 2\Omega, \quad R_2 = 3\Omega, \quad R_3 = 6\Omega,$$

$$R_4 = 9\Omega \quad \text{i} \quad E = 290 \text{ V}.$$



Rys. 2.7a

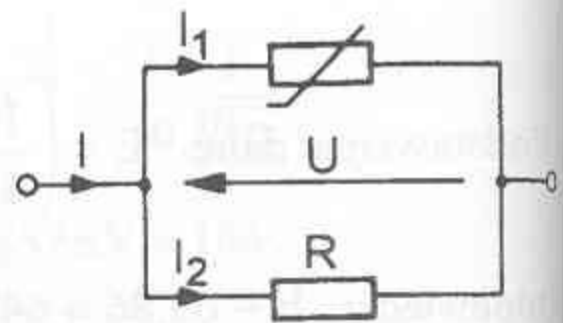
Rys. 2.7b



**Odpowiedź:**  $I_0 \approx 7,8A$ .

### Zadanie 2.12

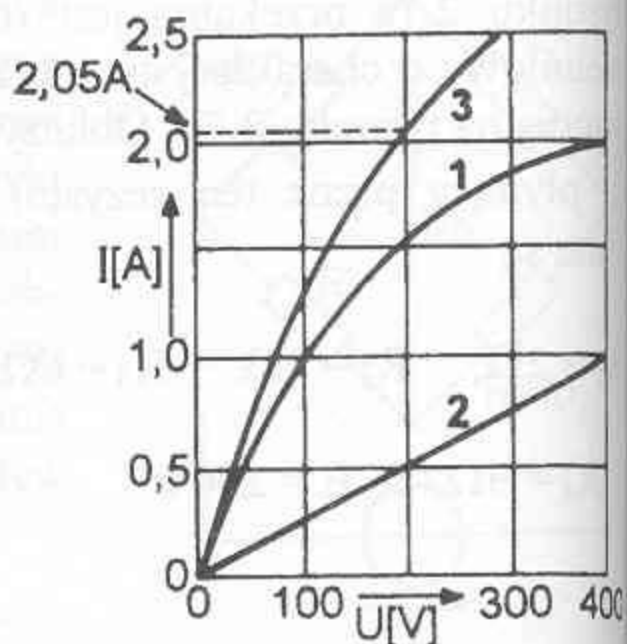
Prąd zasilający układ równoległy jak na rysunku 2.8a złożony z rezystora liniowego o rezystancji  $R = 400\Omega$  i elementu nieliniowego o charakterystyce podanej w tabeli wynosi  $I = 2,05A$ . Obliczyć prądy  $I_1$ ,  $I_2$  oraz napięcie  $U$ .



Rys. 2.8a

U [V]	0	50	100	150	200	300	400
I [A]	0	0,70	1,00	1,30	1,55	1,85	2,00

**Rozwiązanie:** Rysunek 2.8b przedstawia charakterystykę prądowo - napięciową elementu nieliniowego 1, charakterystykę prądowo - napięciową rezystora liniowego 2 oraz charakterystykę wypadkową 3. Odczytać z niej można (ch.3), że przy zasilaniu prądem  $I=2,05A$  prąd  $I_1=0,5A$ , prąd  $I_2=1,55A$  zaś napięcie  $U=200V$ .



Rys. 2.8b

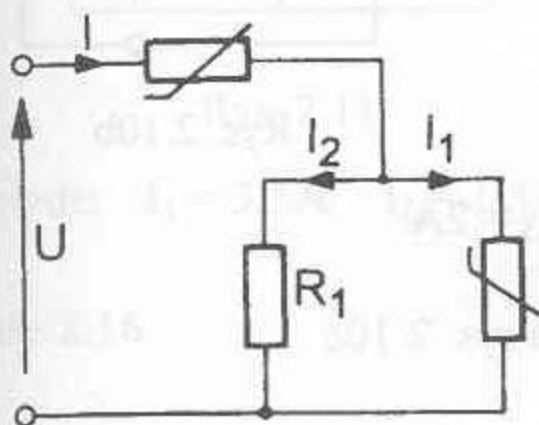
**Odpowiedź:**  $I_1=0,5A$ ,  $I_2=1,55A$ ,  $U=200V$ .

**Zadanie 2.13**

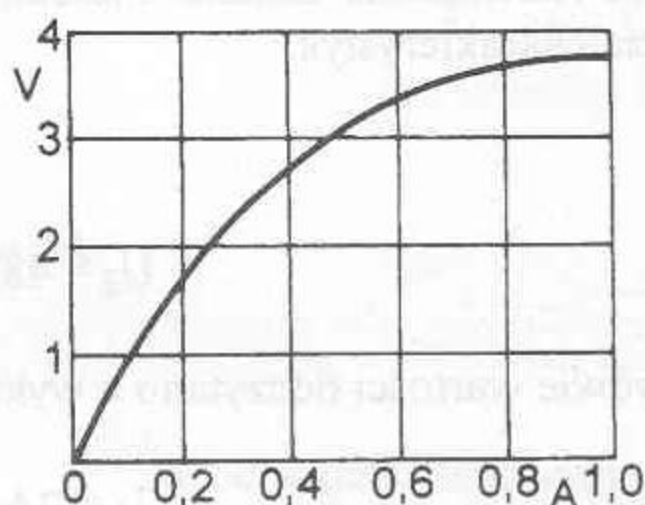
Układ przedstawiony na rysunku 2.9a złożony z rezystora liniowego o rezystancji  $R = 8\Omega$  i dwóch jednakowych rezystorów nieliniowych o charakterystyce podanej na rysunku 2.9b zasilano napięciem  $U = 6V$ . Obliczyć prądy  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I$ .

Zadanie rozwiązać dwoma metodami:

- metodą charakterystyki wypadkowej,
- metodą przecięcia charakterystyki.



Rys. 2.9a



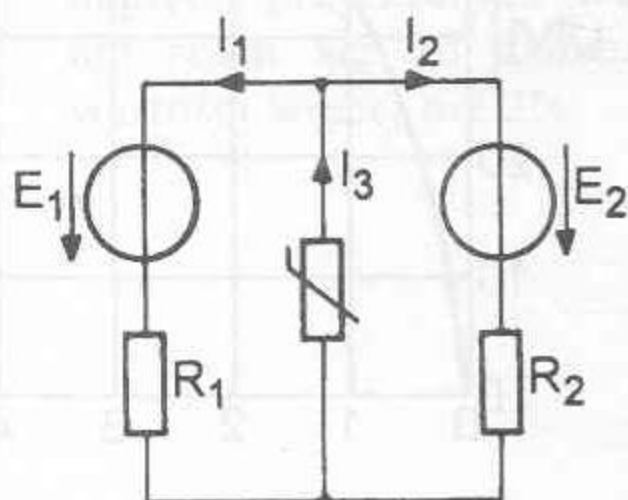
Rys. 2.9b

**Odpowiedź:**  $I_1 \approx 0,3125A$ ,  $I_2 \approx 0,3275A$ ,  $I \approx 0,64A$ .

**Zadanie 2.14**

W obwodzie przedstawionym na rys. 2.10a  $E_1 = 64V$ ,  $R_1 = 8\Omega$ ,  $E_2 = 48V$ ,  $R_2 = 24\Omega$  a charakterystyka elementu nieliniowego przedstawiona jest w tabeli. Wyznaczyć prądy gałęziowe  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .

$I [A]$	0	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
$U [V]$	0	35	42	48	54	58

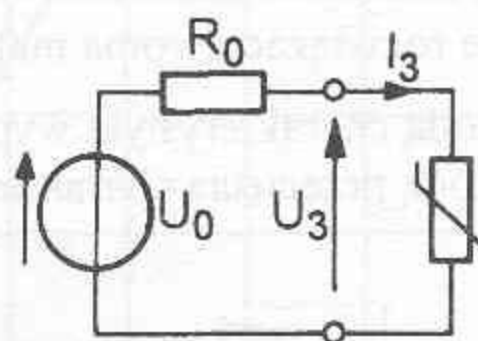


Rys. 2.10a

**Rozwiązanie:** W celu wyznaczenia prądu  $I_3$  zastosowane zostanie twierdzenie Thevenina

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8 \cdot 24}{8 + 24} = 6\Omega, \quad E_1 > E_2 \quad \text{to} \quad U_0 = 60V.$$

Rysunek 2.10b przedstawia „zwinięty” obwód z rysunku 2.10a zgodnie z twierdzeniem Thevenina, a rysunek 2.10c rozwiązanie zadania metodą przecięcia charakterystyk.

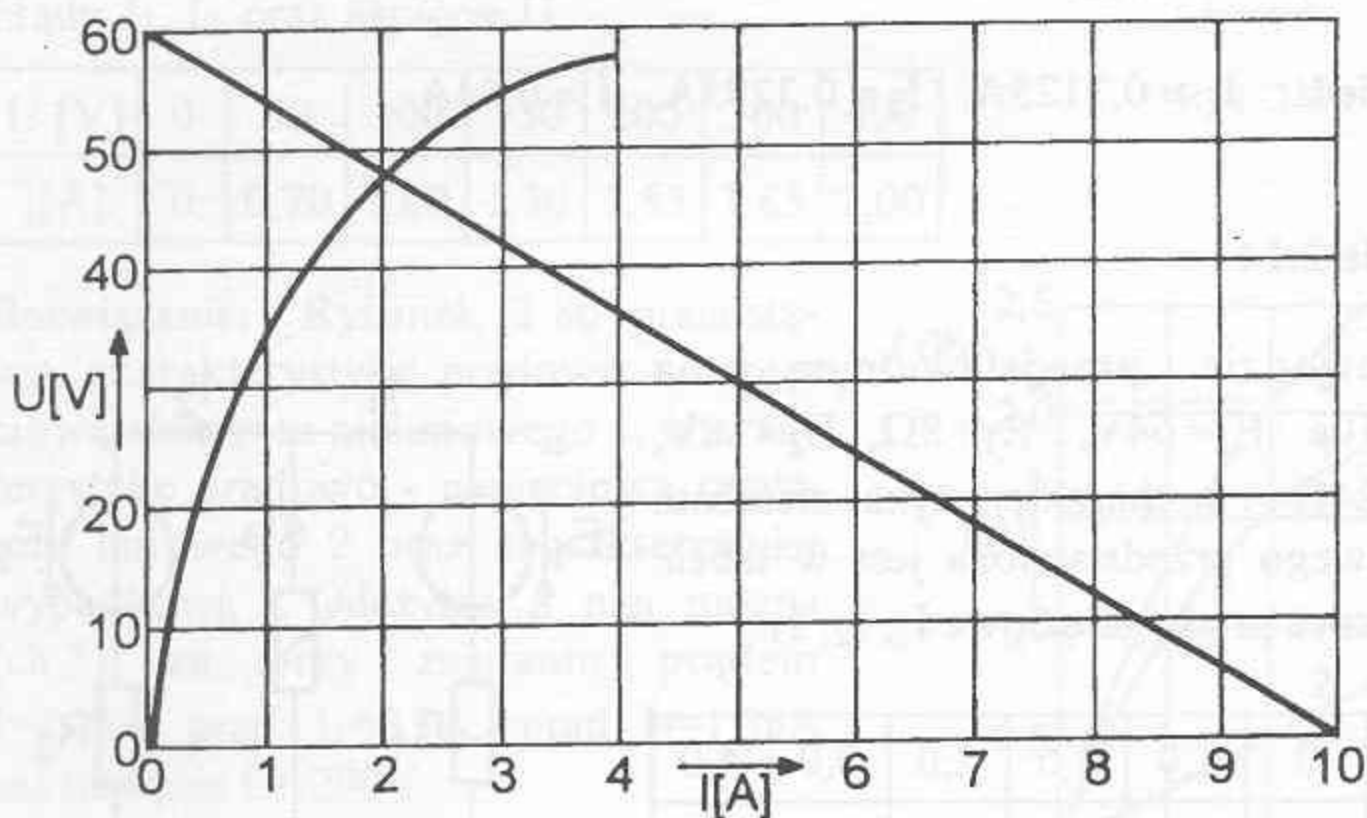


Rys. 2.10b

$$U_3 = 48V, \quad I_3 = 2A.$$

Obydwie wartości odczytano z wykresu na rys. 2.10c

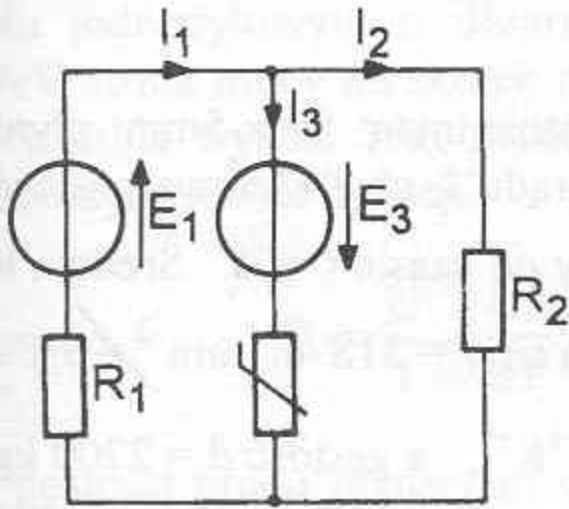
$$I_1 = 2A, \quad I_2 = 0A.$$



Rys. 2.10c

**Odpowiedź:**  $I_1 = 2A$ ,  $I_2 = 0A$ ,  $I_3 = 2A$ .

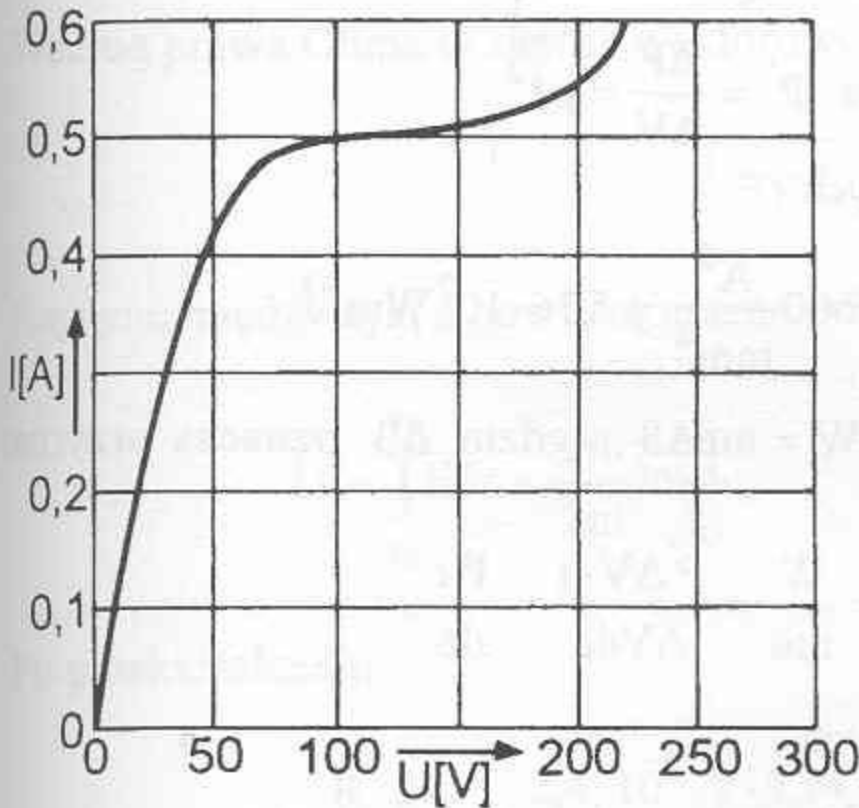
## Zadanie 2.15



Rys. 2.11

Odpowiedź:  $I_1 = 3,5\text{A}$ ,  $I_2 = 1,5\text{A}$ ,  $I_3 = 2\text{A}$ .

## Zadanie 2.16



Rys. 2.12

Odpowiedź: Napięcie zasilające może się wahać w przybliżeniu od 175 do 250V.

W układzie przedstawionym na rysunku 2.11 dane są  $E_1=64\text{V}$ ,  $R_1=8\Omega$ ,  $R_2=24\Omega$ ,  $E_3=12\text{V}$  oraz charakterystyka elementu nieliniowego identyczna jak w zadaniu 2.14. Wyznaczyć prądy  $I_1, I_2, I_3$ .

W odbiorniku liniowym o rezystancji  $R=200\Omega$  ma być utrzymany prąd  $I=0,5\text{A}$ . Odbiornik włączono do sieci o napięciu 220V w szereg z elementem, którego charakterystykę przedstawia rys. 2.12. Wyznaczyć zakres wahań napięcia przy których prąd nie różni się od zadanej wartości więcej niż 2%.

### 3. POLE PRZEPIYWOWE

#### Zadanie 3.1

Przez szynę aluminiową o przekroju prostokątnym  $50 \times 5\text{mm}$  płynie prąd o natężeniu  $I = 10\text{kA}$ . Obliczyć gęstość prądu  $J$ , objętościową gęstość pobieranej mocy  $P'$  oraz przyrost temperatury po czasie  $t = 2\text{s}$ . Średnia konduktywność aluminium w czasie nagrzewania się  $\gamma = 31\text{S} \cdot \text{m} \cdot \text{mm}^{-2} = 3,1 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ , ciepło właściwe aluminium  $c = 900\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ , a gęstość  $d = 2700\text{kg m}^{-3}$ .

**Rozwiązanie:** Moduł gęstości prądu

$$J = \frac{I}{S} = \frac{10^4}{5 \cdot 50} = 40 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} = 4 \cdot 10^7 \text{Am}^{-2}.$$

Moc w elemencie o objętości  $\Delta V = S\Delta l$ ;

$$\Delta P = R(\Delta I)^2 = \rho \frac{\Delta l}{S} (J \cdot S)^2 = \rho J^2 \Delta V.$$

natomiast jej gęstość objętościowa  $P' = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \rho J^2$ .

Po podstawieniu danych liczbowych

$$P' = \frac{1}{30} \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot 1600 \frac{\text{A}^2}{\text{mm}^4} = 5,16 \cdot 10^7 \text{Wm}^{-3}.$$

Energia zamieniona na ciepło  $W = mc\Delta\vartheta$ , gdzie  $\Delta\vartheta$  oznacza przyrost temperatury

$$\Delta\vartheta = \frac{W}{mc} = \frac{P' \Delta V \cdot t}{\Delta V dc} = \frac{P' t}{dc}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych

$$\Delta\vartheta = \frac{5,16 \cdot 10^7 \cdot 2}{2700 \cdot 900} = 42,47\text{K} \approx 42,5^\circ\text{C}.$$

**Odpowiedź:**  $J = 4 \cdot 10^7 \text{Am}^{-2}$ ,  $P' = 5,16 \cdot 10^7 \text{Wm}^{-3}$  a wzrost temperatury  $\Delta\vartheta = 42,5^\circ\text{C}$ .

## Zadanie 3.2

W kablu jednożyłowym o długości  $l = 300\text{m}$  włączonym na napięcie  $U = 60\text{kV}$  strata mocy na skutek niedoskonałej izolacji wynosi  $15\text{W}$ . Średnica żyły kabla wynosi  $2\text{cm}$ , średnica wewnętrzna powłoki kabla  $5,44\text{cm}$ . Jaka jest rezystywność izolacji?

Rozwiązanie: 
$$R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{\Delta P} = \frac{60^2 \cdot 10^6}{15} \approx 2,4 \cdot 10^8 \Omega.$$

Moduł gęstości prądu płynącego od żyły do powłoki można zapisać wzorem:

$$J = \frac{I}{2\pi r l},$$

gdzie:  $I$  - prąd upływu,  $2\pi r l$  - pole poboczniczy walca o promieniu  $r$  i długości  $l$ .

Według prawa Ohma w zapisie wektorowym

$$\vec{E} = \rho \vec{J}.$$

Napięcie między żyłą a powłoką można policzyć według wzoru

$$U = \int_{r_0}^{r_1} E dr = \frac{\rho I}{2\pi l} \ln \frac{r_1}{r_0}, \quad R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_1}{r_0}.$$

Po przekształceniu

$$\rho = \frac{R \cdot 2\pi l}{\ln \frac{r_1}{r_0}} = \frac{2,4 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 300}{\ln \frac{5,44}{2}} = 4,52 \cdot 10^{11} \Omega\text{m}.$$

Odpowiedź: Rezystywność izolacji kabla  $\rho = 4,52 \cdot 10^{11} \Omega\text{m}$ .



**Zadanie 3.3**

Rura o długości  $l=2\text{m}$  wykonana jest z metalu o średniej konduktancji

$$\gamma = 3,1 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

Promień wewnętrzny rury  $r_1 = 2,72\text{cm}$ , promień zewnętrzny  $r_2 = 5,44\text{cm}$ .

- a) Powierzchnie czołowe rury pokryto metalem o bardzo dobrej przewodności, obliczyć rezystancję rury pomiędzy tymi powierzchniami ( $R_1$ ),  
 b) wewnętrzną i zewnętrzną powierzchnię rury pokryto metalem o bardzo dobrej przewodności.

Obliczyć rezystancję ( $R_2$ ) pomiędzy powierzchniami zewnętrzną i wewnętrzną.

**Odpowiedź:**  $R_1 = \frac{l}{\gamma \pi (r_2^2 - r_1^2)} = 29,07 \cdot 10^{-6} \Omega = 29,07 \mu\Omega,$

$$R_2 = \frac{l \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi l \gamma} = 1,77 \cdot 10^{-9} \Omega = 1,77 \text{ n}\Omega.$$

**Zadanie 3.4.**

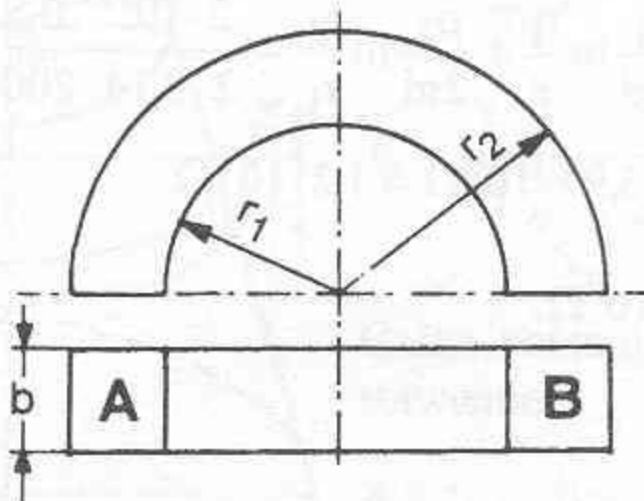
Dany jest przewodnik o kształcie półokręgu jak na rysunku 3.1 i przekroju prostokątnym. Przewodność elektryczna  $\gamma$  zależna jest od promienia według

funkcji  $\gamma(r) = \gamma_0 \left(1 + \frac{r}{r_1}\right)$ .

**Dane:**  $r_1 = 0,2\text{m}$ ,  $r_2 = 0,544\text{m}$ ,  $\gamma_0 = 18,2 \frac{\text{MS}}{\text{m}}$ ,  $b = 0,1\text{m}$ . Powierzchnie czołowe A i B pokryto idealnym przewodnikiem.

**Obliczyć:**

- a) Rezystancję między płaszczyznami A i B,  
 b) przewodność  $\gamma$  dla której przewodnik będzie posiadał identyczną rezystancję  $R_{AB}$  ale będzie ona stała w całym przekroju tzn. niezależna od promienia.



Rys. 3.1

Odpowiedź:  $R_{AB} = \frac{\pi r_1}{b \gamma_0 \left( r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + r_2 - r_1 \right)} = 63,5 \mu\Omega,$

$$\gamma = \gamma_0 \left( 1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} \right) = 49,47 \cdot 10^6 \frac{S}{m}.$$

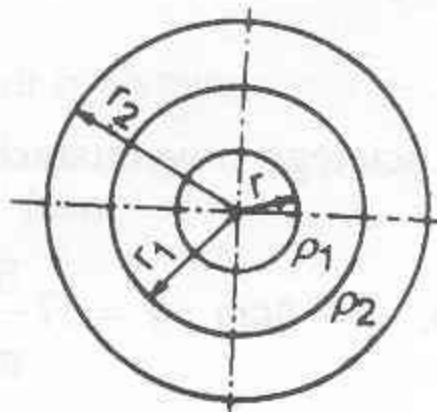
### Zadanie 3.5

Wyznaczyć rezystancję skrośną kabla jednożyłowego o izolacji dwuwarstwowej, którego przekrój pokazano na rysunku 3.2.

Dane: Długość kabla  $l = 200m$ ; promień żyły  $r = 1cm$ ; promień zewnętrzny pierwszej warstwy izolacji o rezystywności  $\rho_1 = 2 \cdot 10^{12} \Omega m$ ;  $r_1 = 1,65cm$ ; promień drugiej warstwy o rezystywności

$$\rho_2 = 2 \cdot 10^{12} \Omega m, \quad r_2 = 2,72cm, \quad \left( \frac{r_1}{r} = \frac{r_2}{r_1} \approx \sqrt{e} \right).$$

Rys. 3.2



**Rozwiązanie:** Korzystając z wyprowadzeń w zadaniu 3.2 można zapisać

$$R_S = R_1 + R_2 = \frac{\rho_1}{2\pi l} \ln \frac{r_1}{r} + \frac{\rho_2}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r} = \frac{2 \cdot 10^{12} \cdot 0,5}{2 \cdot 3,14 \cdot 200} + \frac{10^{12} \cdot 0,5}{2 \cdot 3,14 \cdot 200} =$$

$$= 7,96 \cdot 10^8 \Omega + 3,97 \cdot 10^8 \Omega \approx 1,2 \cdot 10^9 \Omega.$$

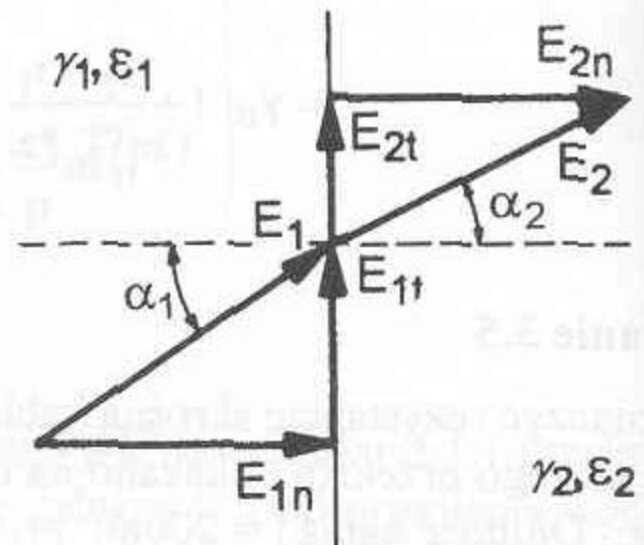
**Odpowiedź:**  $R_S = 1,2 \cdot 10^9 \Omega$ .

### Zadanie 3.6

W środowisku o parametrach  $\gamma_1$  i  $\epsilon_1$  linie pola elektrycznego tworzą z normalną do powierzchni granicznej kąt  $\alpha_1$ . Natężenie tego pola wynosi  $E_1 = 0,0167$  V/m. Drugie środowisko scharakteryzowane jest wielkościami  $\gamma_2$  i  $\epsilon_2$ .

**Dane:**  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\gamma_1 = 6 \cdot 10^7 \frac{S}{m}$ ,  
 $\epsilon_1 \approx \epsilon_0$ ,  $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{S}{m}$ ,  $\epsilon_2 \approx 10\epsilon_0$ .

**Obliczyć:** Gęstości prądu w środowisku drugim, gęstości ładunku powierzchniowego  $\sigma$  na granicy środowisk. Jak duży powinien być parametr  $\gamma_2$  przy zachowaniu pozostałych wielkości, aby nie tworzył się ładunek powierzchniowy.



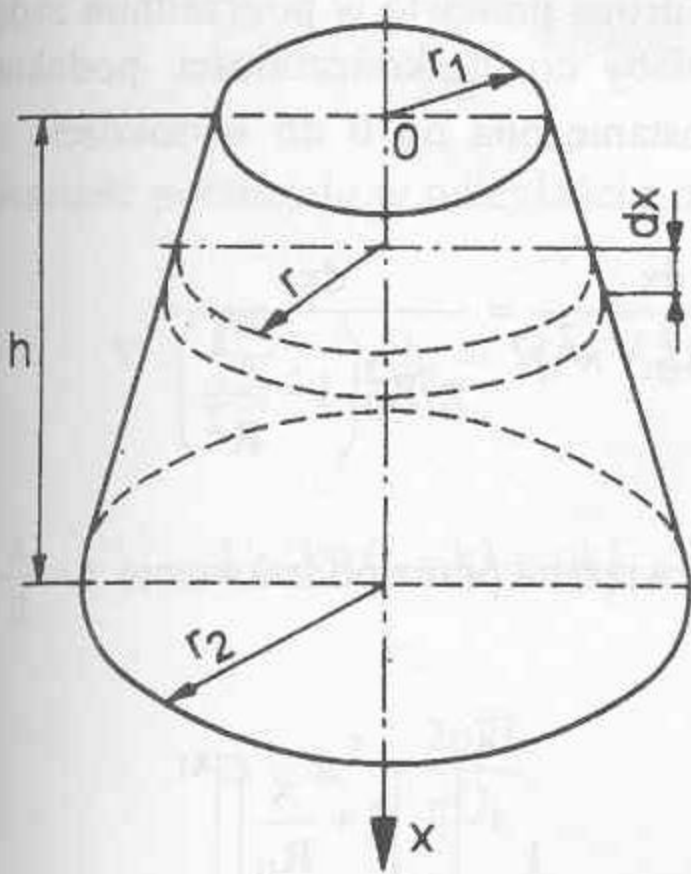
Rys. 3.3

**Odpowiedź:**  $J_2 \approx 86,6 \cdot 10^4 \frac{A}{m^2}$ ,  $\sigma \approx 38,5 mC$ ,  $\gamma_2 = 10\gamma_1 = 6 \cdot 10^8 \frac{S}{m}$ .

### Zadanie 3.7

Obliczyć rezystancję stożka ściętego o wymiarach jak na rysunku 3.4 i konduktywności  $\gamma$ .

**Dane:**  $r_1 = 1 cm$ ,  $r_2 = 2 cm$ ,  $h = 4 cm$ ,  $\gamma = 57 \frac{S \cdot m}{mm^2}$  (miedź).



Rys. 3.4

$$dR = \frac{dx}{\pi \gamma r^2}, \quad r = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x.$$

$$R = \frac{1}{\pi \gamma} \int_0^h \frac{dx}{\left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x \right)^2}$$

Całka zostanie obliczona przez podstawienie

$$a = r_1, \quad b = \frac{r_2 - r_1}{h}, \quad a + bx = t,$$

$$\frac{dt}{dx} = b, \quad dx = \frac{dt}{b},$$

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^2} = \int \frac{dt}{bt^2} = -\frac{1}{bt},$$

$$R = \frac{1}{\pi \gamma} \int_0^h \frac{dx}{\left( r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x \right)^2} = -\frac{h}{(r_2 - r_1) \pi \gamma} \left[ \frac{1}{r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} x} \right]_0^h,$$

$R = \frac{h}{\pi \gamma r_1 r_2}$  ten sam wynik otrzymuje się zakładając, że średni promień

stożka równy jest średniej geometrycznej promieni jego podstaw  $r = \sqrt{r_1 r_2}$ .

Po podstawieniu danych liczbowych:  $R = 1,12 \mu\Omega$ .

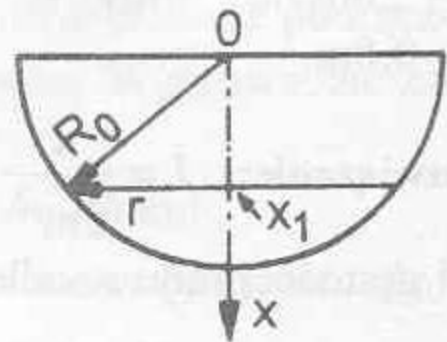
Odpowiedź: Rezystancja stożka  $R = 1,12 \mu\Omega$ .

### Zadanie 3.8

Obliczyć rezystancję półkuli o wymiarach jak na rysunku 3.5.

Dane:  $R_0 = 1,5 \text{ cm}$ ,  $x_1 = 1 \text{ cm}$ ,

$\gamma = 34,8 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2}$  (Al).



Rys. 3.5

**Rozwiązanie:** Zastosowanie znajduje tu droga przebyta w poprzednim zadaniu. Ponieważ rezystancja półkuli dążyłaby do nieskończoności, podobnie jak stożka nieściętego, to policzona zostanie ona od 0 do wysokości  $x_1$  (patrz rysunek).

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad dR = \frac{dx}{\pi\gamma(R_0^2 - x^2)} = \frac{dx}{\pi\gamma R_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)},$$

$$R = \frac{1}{\pi\gamma R^2} \int_0^{x_1} \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{R_0^2}}, \quad \text{całka zostanie rozwiązana przez podstawienie } t = \frac{x}{R_0}$$

$$dt = \frac{dx}{R_0}, \quad R = \frac{R_0}{\pi\gamma R_0^2} \int_0^{x_1} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2\pi\gamma R_0} \left[ \ln \left| \frac{1 + \frac{x}{R_0}}{1 - \frac{x}{R_0}} \right| \right]_0^{x_1}$$

Po podstawieniu danych otrzymuje się  $R = 490,6 \text{ n}\Omega \approx 0,49 \mu\Omega$ .

**Odpowiedź:**  $R = 0,49 \mu\Omega$ .

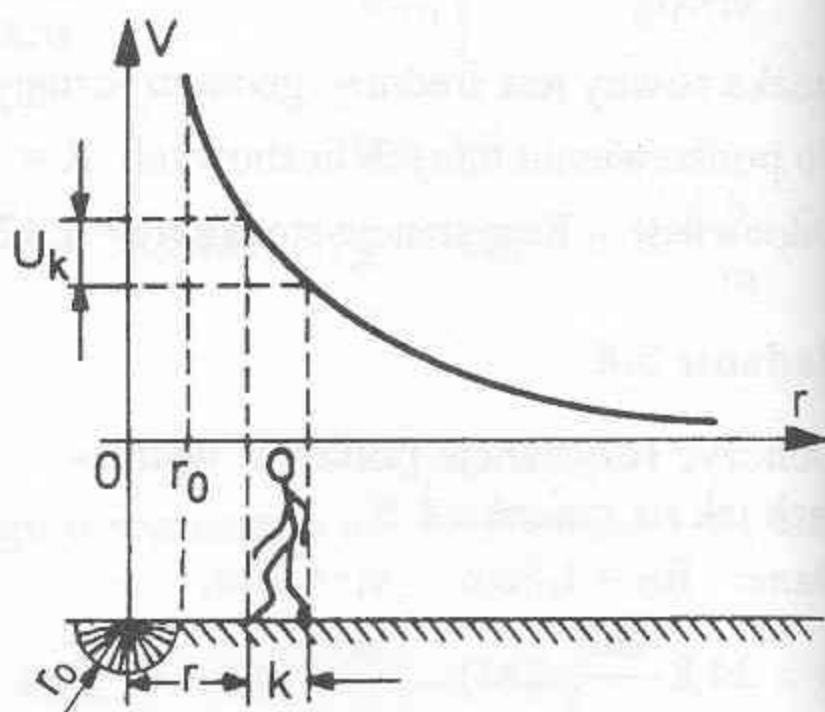
### Zadanie 3.9

Do uziomu półkulistego rysunek 3.6 dopływa prąd  $I=250\text{A}$ . W jakiej odległości  $x$  od środka uziomu napięcie krokowe nie przekroczy wartości  $U_k = 100\text{V}$ , jeżeli rezystywność gruntu  $\rho = 200\Omega\text{m}$ , długość kroku  $k = 0,8\text{m}$ .

**Rozwiązanie:**  $J = \frac{I}{2\pi r^2}$  - mo-

duł gęstości prądu w odległości

$r > r_0$  od środka elektrody,



Rys. 3.6

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{2\pi r^2} \text{ - moduł natężenia pola elektrycznego.}$$

Wartość potencjału w odległości  $r$  od środka uziomu

$$V = \frac{\rho I}{2\pi r}, \quad U_k = V_r - V_{r+k} = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+k} \right) = \frac{\rho k}{2\pi r(r+k)} I,$$

$$U_k 2\pi r(r+k) = \rho k I \quad \text{to} \quad r^2 + kr - \frac{\rho k I}{U_k 2\pi} = 0,$$

$$\Delta = k^2 + \frac{2\rho k I}{\pi U_k}, \quad r = \frac{1}{2} \left( \sqrt{k^2 + \frac{2\rho k I}{\pi U_k}} - k \right),$$

$$r = \frac{1}{2} \left( \sqrt{0,64\text{m}^2 + \frac{400\Omega\text{m} \cdot 0,8\text{m} \cdot 250\text{A}}{3,14 \cdot 100\text{V}}} - 0,8\text{m} \right) = 7,6\text{m}.$$

**Odpowiedź:** Napięcie krokowe będzie mniejsze od 100V w odległości  $r > 7,6\text{m}$  od środka uziomu.

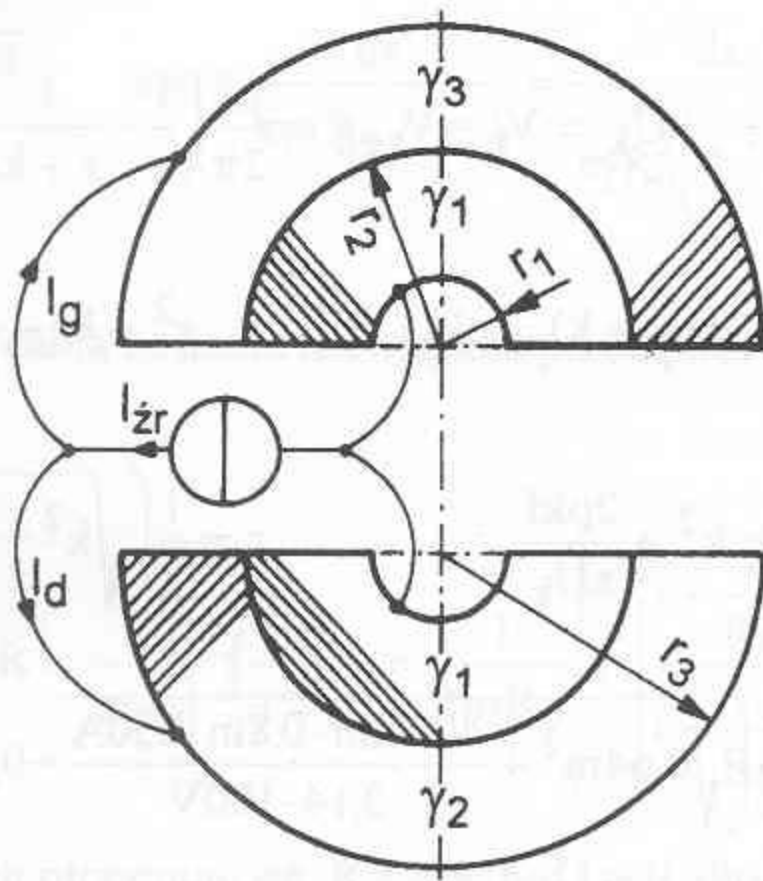
### Zadanie 3.10

Dwie jednakowej wielkości uwarstwione półkule składają się z materiałów o różnych przewodnościach  $\gamma$  rysunek 3.7. Warstwy wewnętrzne o grubości  $r_2 - r_1$  posiadają materiał o przewodności  $\gamma_1$ . Zewnętrzna warstwa dolnej półkuli wykonana jest z materiału o przewodności  $\gamma_2$  a górnej półkuli o przewodności  $\gamma_3$ . Zewnętrzne i wewnętrzne powierzchnie dolnej i górnej półkuli pokryto materiałami idealnie przewodzącymi. Obydwie półkule podłączono do idealnego źródła prądu  $I_{zr}$  jak pokazano na rysunku. Wyprowadzić zależności na:

- Gęstość prądu w funkcji promienia  $J(r)$  dla obydwu półkul,
- natężenie pola elektrycznego  $E(r)$  dla półkul wewnętrznych dolnej i górnej,

- c) napięcie panujące na źródle prądu ,  
 d) prądy płynące przez półkulę górną i dolną ,  
 e) rezystancje półkul.

Rys. 3.7



Odpowiedź: a)  $J_d(r) = \frac{I_d}{2\pi r^2}$ ,  $J_g(r) = \frac{I_g}{2\pi r^2}$ ,

b)  $E_{d1}(r) = \frac{I_d}{2\pi\gamma_1 r^2} = \frac{I}{1 + \left(\frac{I_d}{I_g}\right) 2\pi\gamma_1 r^2}$ ,

$E_{g1}(r) = \frac{I_g}{2\pi\gamma_1 r^2} = \frac{I}{1 + \left(\frac{I_g}{I_d}\right) 2\pi\gamma_1 r^2}$ ,

c)  $U = \frac{I_d}{2\pi r_2} \left( \frac{r_2 - r_1}{\gamma_1 r_1} + \frac{r_3 - r_2}{\gamma_2 r_3} \right) = \frac{I_g}{2\pi r_2} \left( \frac{r_2 - r_1}{\gamma_1 r_1} + \frac{r_3 - r_2}{\gamma_3 r_3} \right)$ ,

$$d) \quad I_g = \frac{I}{1 + \left(\frac{I_d}{I_g}\right)}, \quad I_d = I - I_g = \frac{I}{1 + \left(\frac{I_g}{I_d}\right)},$$

$$e) \quad R_d = \frac{1}{2\pi r_2} \left( \frac{r_2 - r_1}{\gamma_1 r_1} + \frac{r_3 - r_2}{\gamma_2 r_3} \right),$$

$$R_g = \frac{1}{2\pi r_2} \left( \frac{r_2 - r_1}{\gamma_1 r_1} + \frac{r_3 - r_2}{\gamma_3 r_3} \right),$$

$$\frac{I_d}{I_g} = \frac{\frac{r_2 - r_1}{\gamma_1 r_1} + \frac{r_3 - r_2}{\gamma_2 r_3}}{\frac{r_2 - r_1}{\gamma_1 r_1} + \frac{r_3 - r_2}{\gamma_3 r_3}}.$$

gdzie



## 4. POLE ELEKTROSTATYCZNE

### 4.1. Siły działające w polu elektrostatycznym, natężenie i potencjał pola

#### Zadanie 4.1

- a) Z jaką siłą przyciągają się w powietrzu dwie kuleczki o ładunkach  $Q_1 = 10^{-6} \text{C}$  i  $Q_2 = -2 \cdot 10^{-5} \text{C}$  z odległości  $r = 0,2 \text{m}$ ?
- b) Z jaką siłą odpychają się w powietrzu dwie bardzo małe kuleczki zawierające ładunki  $Q_1 = 16 \cdot 10^{-9} \text{C}$  i  $Q_2 = 28 \cdot 10^{-9} \text{C}$  z odległości  $r = 0,08 \text{m}$ ?

**Rozwiązanie:** Do obliczenia modułu siły przyciągania lub odpychania zastosowane zostanie prawo Coulomba

$$F = \frac{|Q_1 Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ponieważ ładunki znajdują się w obydwu przypadkach w powietrzu ( $\epsilon_{\text{rp}} \approx 1,0006$ ), to w mianowniku wzoru podstawić można

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

Po podstawieniu danych dla przypadku

$$\text{a) } F = \frac{|10^{-6} \cdot (-2 \cdot 10^{-5})|}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 4,5 \text{N},$$

$$\text{b) } F = \frac{16 \cdot 10^{-9} \cdot 28 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 64 \cdot 10^{-4}} = 63 \cdot 10^{-5} \text{N}.$$

**Odpowiedź:** Dla przypadku a) ładunki przyciągają się z siłą  $F = 4,5 \text{N}$ , dla przypadku b) ładunki odpychają się z siłą  $F = 63 \cdot 10^{-5} \text{N}$ .

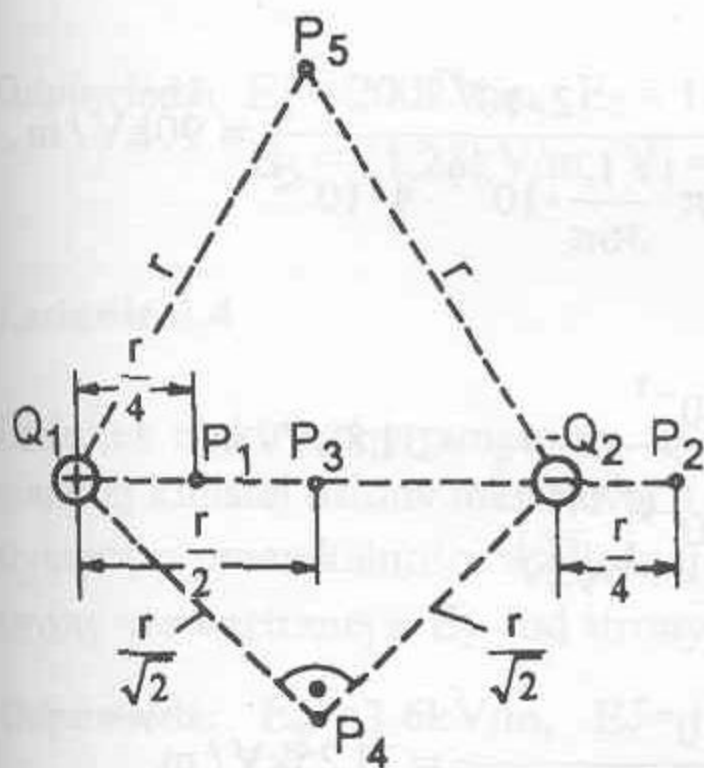
**Zadanie 4.2**

Trzy jednakowe ładunki ujemne  $Q = -2 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^{-7} \text{ C}$  znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Jaki ładunek  $Q_1$  należy umieścić w środku trójkąta, aby siły wywierane na poszczególne ładunki były równe zeru?

**Odpowiedź:** Ładunek dodatni o wartości  $Q_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ .

**Zadanie 4.3**

Dwa różnoimienne ładunki punktowe  $\pm Q = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ , są umieszczone w powietrzu w odległości  $r = 0,4 \text{ m}$  rys. 4.1. Wyznaczyć natężenia pola elektrycznego i potencjały w punktach  $P_1, P_2, P_3, P_4$  i  $P_5$  zaznaczonych na rysunku.



Rys. 4.1

**Rozwiązanie:** Na początku obliczone zostaną natężenia pola elektrycznego we wszystkich pięciu punktach. Zgodnie z umową, że linie natężenia pola elektrycznego (wielkość wektorowa) „wychodzą” z ładunków dodatnich a „wchodzą” do ładunków ujemnych można zauważyć, że kierunek działania wektora  $E$  będzie dla wszystkich pięciu punktów równoległy do prostej łączącej ładunki.

W zależności od zwrotów wektorów,

dla punktów  $P_1, P_2$  i  $P_3$  będzie obliczona ich suma lub różnica. Dla punktów  $P_4$  i  $P_5$  sumy geometryczne.  $E_{11}$  - moduł natężenia pola el. w punkcie  $P_1$  od ładunku  $Q_1$ ,  $E_{12}$  - moduł natężenia pola el. w punkcie  $P_1$  od ładunku  $Q_2$  itd.  $E_1$  - natężenie pola el. w punkcie  $P_1$ ,  $E_2$  - natężenie pola el. w punkcie  $P_2$  itd. Ogólny wzór na moduł natężenia pola elektrycznego od

$$\text{ładunku } Q, \quad E = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{dla próżni i powietrza.}$$

$$E_1 = E_{11} + E_{12} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-2}} + \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 180 + 20 = 200 \text{ kV/m},$$

$$E_2 = E_{22} - E_{21} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-2}} - \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 25 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 180 - 7,2 = 172,8 \text{ kV/m},$$

$$E_3 = E_{31} + E_{32} = 2E_{31} = 2E_{32} = 2 \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 90 \text{ kV/m},$$

$$E_4 = \sqrt{2}E_{41} = \sqrt{2}E_{42} = \sqrt{2} \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \left(\frac{0,4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 31,8 \text{ kV/m},$$

$$E_5 = E_{51} = E_{52} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 16 \cdot 10^{-2}} = 11,25 \text{ kV/m}.$$

Ogólny wzór na potencjał elektryczny od ładunku  $Q$ ,  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  dla próżni i powietrza.

**Uwaga!** Potencjał el. jest wielkością skalarną, stosujemy tu dodawanie algebraiczne. Dla punktów  $P_3$ ,  $P_4$  i  $P_5$ ,  $V_3 = V_4 = V_5 = 0$ . Punkty te leżą w identycznych odległościach od ładunku dodatniego  $Q_1$  i ujemnego  $Q_2$ .

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \frac{r}{4}} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \frac{3}{4}r} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-1}} - \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{-1}} =$$

$$= 18 - 6 = 12 \text{ kV},$$

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \frac{5}{4}r} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \frac{r}{4}} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-1}} - \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-1}} =$$

$$= 3,6 - 18 = -14,4 \text{ kV}.$$

**Odpowiedź:**  $E_1 = 200 \text{ kV/m}$ ,  $E_2 = 172,8 \text{ kV/m}$ ,  $E_3 = 90 \text{ kV/m}$ ,  $E_4 = 31 \text{ kV/m}$ ,  
 $E_5 = 11,25 \text{ kV/m}$ ,  $V_1 = 12 \text{ kV}$ ,  $V_2 = -14,4 \text{ kV}$ ,  $V_3 = V_4 = V_5 = 0$ .

#### Zadanie 4.4

Ładunek elektryczny punktowy  $Q = 10 \text{ nC}$  umieszczono w środku wewnątrz cienkiej kulistej osłony metalowej o średnicy  $d = 50 \text{ mm}$  i wypełnionej dielektrykiem o przenikalności względnej  $\epsilon_r = 4$ . Wyznaczyć natężenie pola  $E_w$  od strony wewnętrznej i  $E_z$  - od strony zewnętrznej przy powierzchni osłony.

**Odpowiedź:**  $E_w = 3,6 \text{ kV/m}$ ,  $E_z = 14,4 \text{ kV/m}$ .

#### Zadanie 4.5

Długi odosobniony przewód prostoliniowy o średnicy przekroju  $2r = 10 \text{ mm}$  znajduje się w powietrzu i ma ładunek elektryczny o gęstości liniowej  $l = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}$ . Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego:

a)  $E_1$  przy powierzchni przewodu,

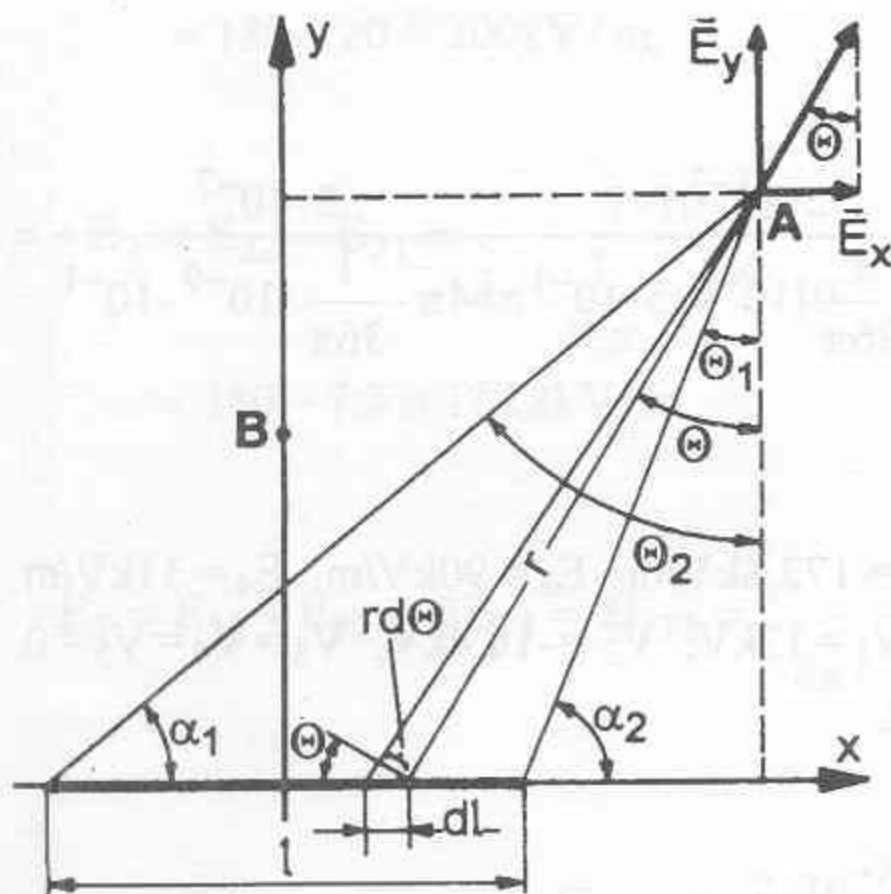
b)  $E_2$  w odległości  $0,2 \text{ m}$  od osi przewodu. Jakie jest napięcie  $U$  między przewodem a punktem odległym o  $1 \text{ m}$  od osi przewodu?

**Odpowiedź:**  $E_1 = 72 \text{ kV/m}$ ,  $E_2 = 1,8 \text{ kV/m}$ ,  $U = 1907,4 \text{ V}$ .

## Zadanie 4.6

Krótki przewód o przekroju okrągłym (znikomo małym) i gęstości liniowej

ładunku  $\tau = 10^{-8} \text{C/m}$  leży w osi  $x$  prostokątnego układu współrzędnych jak pokazano na rys. 4.2. Długość przewodu  $l = 4 \text{cm}$ . Obliczyć natężenie pola elektrycznego i potencjał w punktach  $A(4,5)$  i  $B(0,3)$ . Współrzędne podane są w centymetrach. Układ znajduje się w powietrzu.



Rys. 4.2

punktowy  $\tau dl$  wywoła w punkcie  $A$  o współrzędnych  $x$  i  $y$  natężenie pola elektrycznego o module  $dE$ .

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

którego składowe wynoszą odpowiednio

$$dE_x = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \Theta, \quad dE_y = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \Theta, \quad dl = \frac{rd\Theta}{\cos \Theta},$$

$$a \quad r = \frac{y}{\cos \Theta}, \quad dE_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 y} \sin \Theta d\Theta, \quad dE_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 y} \cos \Theta d\Theta,$$

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 y} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \sin \Theta d\Theta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 y} (\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2),$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 y} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \cos\Theta d\Theta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 y} (\sin\Theta_2 - \sin\Theta_1).$$

Ładunek punktowy  $\tau dl$  wywołuje np. w punkcie A o współrzędnych  $x, y$

potencjał o wartości  $dV = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau d\Theta}{4\pi\epsilon_0 \cos\Theta}$ , natomiast potencjał od całego

przewodu

$$V = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{d\Theta}{\cos\Theta} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \sqrt{\frac{1 + \sin\Theta}{1 - \sin\Theta}} \right]_{\Theta_1}^{\Theta_2},$$

$$V = \frac{\tau}{8\pi\epsilon_0} \left[ \ln \frac{1 + \sin\Theta_2}{1 - \sin\Theta_2} - \ln \frac{1 + \sin\Theta_1}{1 - \sin\Theta_1} \right].$$

W celu przejścia do współrzędnych prostokątnych dokonuje się następującego podstawienia

$$\sin\Theta_1 = \frac{x - 1/2}{\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}}, \quad \sin\Theta_2 = \frac{x + 1/2}{\sqrt{y^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}},$$

$$V = \frac{\tau}{8\pi\epsilon_0} \ln \frac{\left[ \left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{y^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \right] \left[ \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right]}{\left[ \left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \right] \left[ \sqrt{y^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]}$$

Ponieważ

$$\frac{\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{y^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{y^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)},$$

to ostatecznie

$$V = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x + \frac{1}{2} + \sqrt{y^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}}{x - \frac{1}{2} + \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}}.$$

Po podstawieniu danych:  $E_{xA} = 5,189 \text{ V/cm} = 518,9 \text{ V/m}$ ,

$E_{yA} = 7,142 \text{ V/cm} = 714,2 \text{ V/m}$ ,  $E_{xB} = 0$ ,  $E_{yB} = 19,962 \text{ V/cm} = 1996,2 \text{ V/m}$ ,

$V_A = 56,33 \text{ V}$ ,  $V_B = 285,1 \text{ V}$ .

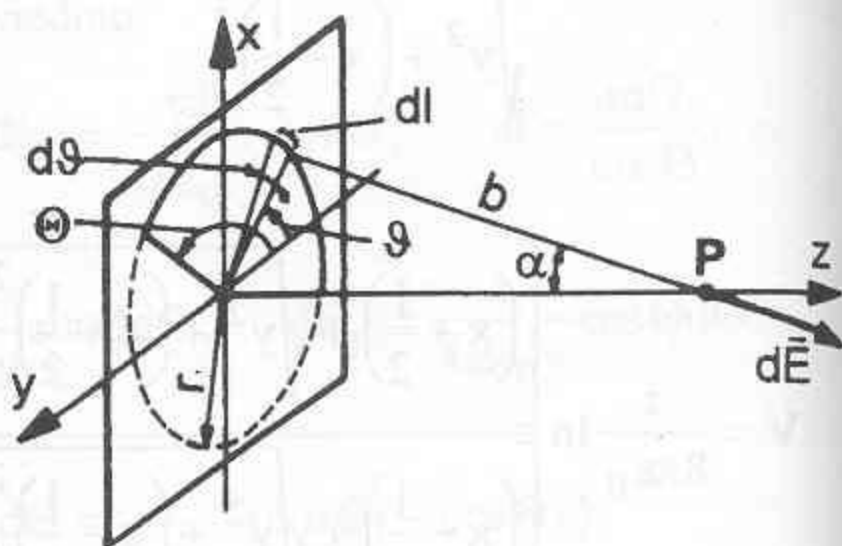
**Odpowiedź:**  $E_{xA} = 518,9 \text{ V/m}$ ,  $E_{yA} = 714,2 \text{ V/m}$ ,  $V_A = 56,33 \text{ V}$ ,

$E_{xB} = 0 \text{ V/m}$ ,  $E_{yB} = 1996,2 \text{ V/m}$ ,  $V_B = 285,1 \text{ V}$ .

#### Zadanie 4.7

Rysunek 4.3a przedstawia naładowany z gęstością liniową  $\tau$  przewód kołowy leżący w płaszczyźnie  $xy$ .

**Dane:**  $r = 10 \text{ cm}$ ,  $\tau = 10^{-8} \text{ C/m}$ .  
Wyprowadzić zależności na potencjał i natężenie pola elektrycznego dla punktu  $P$  leżącego w dowolnym miejscu na osi  $z$ . Dla jakiej współrzędnej  $z$  wypada maksimum potencjału, a dla jakiej maksimum natężenia pola elektrycznego. Układ znajduje się w powietrzu.



Rys. 4.3a

**Rozwiązanie:** Element  $dl$  okręgu traktowany jest tu jako ciało z ładunkiem punktowym  $dQ$ ,  $dQ = \tau dl = \tau r d\vartheta$  potencjał od tego ładunku w punkcie  $P$  leżącym na osi  $z$

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{\tau r d\vartheta}{4\epsilon_0 b} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \sin\alpha d\vartheta.$$

Potencjał od całego przewodu kołowego z ładunkiem  $Q$

$$V = \frac{\tau \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\Theta} d\vartheta = \frac{\tau \Theta \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0}, \quad \text{po podstawieniu } \Theta = 2\pi, \quad V = \frac{\tau}{2\epsilon_0} \sin\alpha,$$

$\sin\alpha = \frac{r}{b}$  przybiera największą wartość dla  $b = r$  czyli  $\alpha = 90^\circ$ , wtedy

$$V = \frac{\tau}{2\epsilon_0} \quad \text{a punkt } P \text{ leży w środku zwoju. } V_{\max} = 180\pi = 565,5V.$$

Moduł natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$  wywołanego elementarnym ładunkiem  $dQ$  wynosi

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{\tau r d\vartheta}{4\pi\epsilon_0 b^2},$$

a składowe skalarne w osiach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  odpowiednio:

$$dE_x = -\frac{\tau r d\vartheta}{4\pi\epsilon_0 b^2} \sin\alpha \sin\vartheta = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \sin^3\alpha \sin\vartheta d\vartheta,$$

$$dE_y = \frac{\tau r d\vartheta}{4\pi\epsilon_0 b^2} \sin\alpha \cos\vartheta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \sin^3\alpha \cos\vartheta d\vartheta,$$

$$dE_z = \frac{\tau r d\vartheta}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cos\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \sin^2\alpha \cos\alpha d\vartheta.$$

Całkowite składowe skalarne w osiach  $x$ ,  $y$  i  $z$  uzyskuje się po scałkowaniu w granicach od 0 do  $2\pi$  po kącie  $d\vartheta$ , dla  $\Theta = 2\pi$  otrzymuje się:

$$E_x = 0 \quad \text{i} \quad E_y = 0,$$

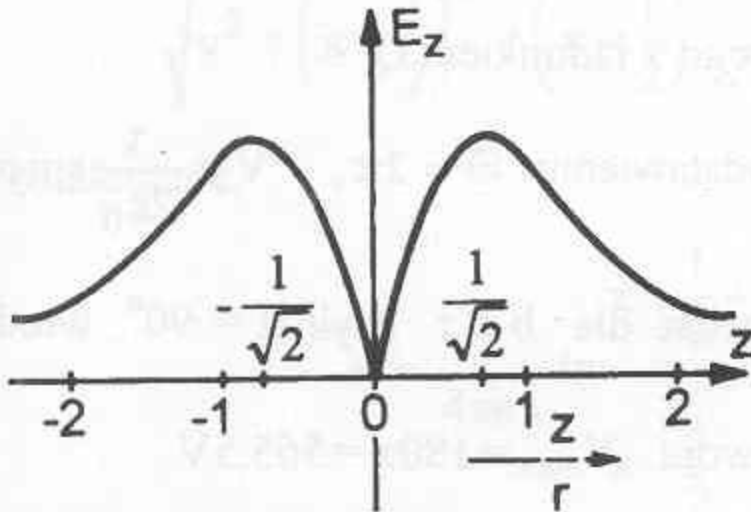
natomiast

$$E_z = \frac{\tau}{2\epsilon_0 r} \sin^2\alpha \cos\alpha.$$



Podstawiając:  $\cos\alpha = \frac{z}{b} = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$  i  $\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}$ ,

czyli  $\sin^2\alpha = \frac{r^2}{r^2 + z^2}$ , otrzymuje się  $E_z = \frac{\tau r z}{2\epsilon_0 \sqrt{(r^2 + z^2)^3}}$ .



Rys. 4.3b

Z badania tej funkcji dla zmiennej  $z$  wynika, że posiada ona maksimum dla

$$\frac{z}{r} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Orientacyjny przebieg natężenia pola elektrycznego w osi  $z$  przedstawia rysunek 4.3b.

**Odpowiedź:** Wyrażenia na potencjał i natężenie pola el. są następujące:

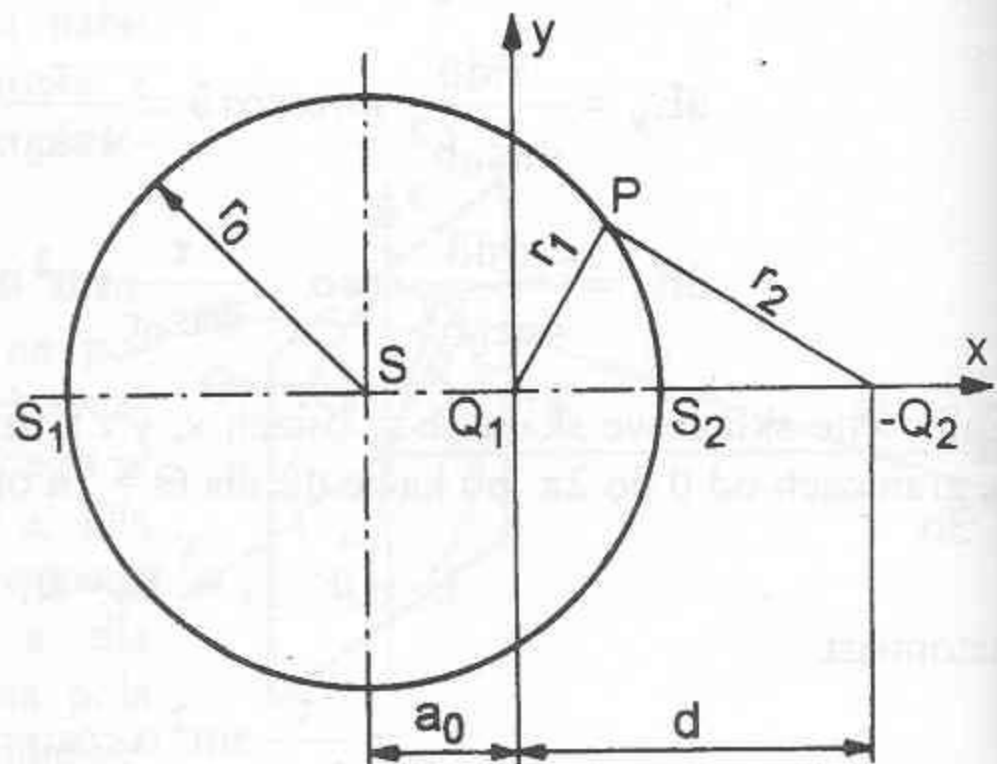
$$V = \frac{\tau}{2\epsilon_0} \sin\alpha, \quad E = E_z = \frac{\tau r z}{2\epsilon_0 \sqrt{(r^2 + z^2)^3}}.$$

Ich maksyma występują odpowiednio dla  $z=0$  i  $\frac{z}{r} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

#### Zadanie 4.8

Dwa różnoimienne ładunki  $Q_1$  i  $-Q_2$  ułożone są tak, że  $Q_1$  leży w początku układu współrzędnych, a  $-Q_2$  na osi  $x$ . Wyznaczyć równanie linii, dla której  $V = 0$ . Położenie ładunków przedstawia rys. 4.5. Układ znajduje się w powietrzu.

**Dane:**  $Q_1 = 10^{-6}\text{C}$ ,  
 $Q_2 = -2 \cdot 10^{-6}\text{C}$ ,  $d = 60\text{cm}$ .



Rys. 4.5

Zależności dla natężenia pola elektrycznego w punkcie P

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1}{r_1^3} \vec{r} - \frac{Q_2}{r_2^3} \vec{r} \right].$$

Natomiast dla potencjału  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2} \right]$ .

Szukamy linii ekwipotencjalnej  $V = 0$ . Wyrażenie w nawiasie kwadratowym powinno być równe zero. Według Apolloniusza

$$\frac{S_2 Q_2}{S_2 Q_1} = \frac{S_1 Q_2}{S_1 Q_1}, \quad \left| \frac{Q_1}{Q_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = m.$$

Obrazem linii ekwipotencjalnej na płaszczyźnie jest okrąg, którego promień  $r_0$  i współrzędne środka  $a_0$ , 0 wyznaczamy

$$r_1^2 = x^2 + y^2,$$

$$r_2^2 = (d - x)^2 + y^2,$$

$$\frac{x^2 + y^2}{(d - x)^2 + y^2} = m^2,$$

$$x^2 + y^2 = m^2 [(d - x)^2 + y^2],$$

$$x^2 + y^2 = m^2 (d^2 - 2dx + x^2 + y^2),$$

$$x^2 + y^2 = d^2 m^2 - 2dm^2 x + m^2 x^2 + m^2 y^2,$$

$$x^2 - m^2 x + y^2 - m^2 y^2 + 2dm^2 x = (dm)^2,$$

$$x^2(1 - m^2) + y^2(1 - m^2) + 2dm^2 x = (dm)^2,$$

$$x^2 + \frac{2dm^2}{1 - m^2} x + y^2 = \frac{(dm)^2}{1 - m^2}.$$

Równanie okręgu o promieniu  $r_0$  i środku  $S(a_0, 0)$  ma postać:

$$(x - a_0)^2 + y^2 = r_0^2, \quad x^2 - 2a_0x + a_0^2 + y^2 = r_0^2, \quad x^2 - 2a_0x + y^2 = r_0^2 - a_0^2.$$

Porównując odpowiednie wyrazy otrzymuje się:

$$-2a_0 = \frac{2dm^2}{1-m^2}, \quad \text{czyli} \quad a_0 = -\frac{dm^2}{1-m^2}, \quad b_0 = 0,$$

$$r_0^2 - a_0^2 = \frac{(dm)^2}{1-m^2}, \quad r_0^2 - \frac{(dm^2)^2}{(1-m^2)^2} = \frac{(dm)^2}{1-m^2}, \quad r_0^2 = \frac{(dm)^2}{1-m^2} + \left(\frac{dm^2}{1-m^2}\right)^2,$$

$$r_0^2 = \left(\frac{dm}{1-m^2}\right)^2, \quad r_0 = \left|\frac{dm}{1-m^2}\right| = \frac{|a_0|}{m}$$

**Dyskusja :** 1)  $|Q_1| < |Q_2|$ ,  $m < 1$ ,  $a_0 < 0$ ,  $r_0 > |a_0|$ ,  
2)  $|Q_1| > |Q_2|$ ,  $m > 1$ ,  $a_0 > 0$ ,  $r_0 < |a_0|$ .

W bardzo prosty sposób można uzyskać współrzędne punktów  $S_1$  i  $S_2$  wiedząc, że ich rzędne są równe zeru.

$$x^2 - 2a_0x + a_0^2 - r_0^2 = 0, \quad \Delta = 4r_0^2, \quad \sqrt{\Delta} = 2r_0,$$

$$x_1 = a_0 + r_0, \quad x_2 = a_0 - r_0.$$

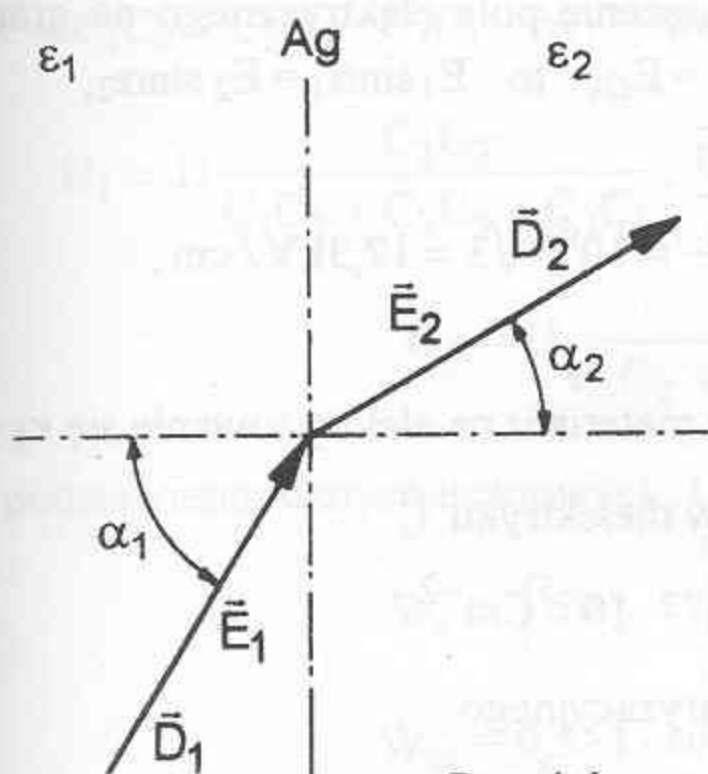
Podstawiając dane z zadania otrzymuje się:

$$a_0 = -\frac{60 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = -20, \quad r_0 = 40.$$

**Odpowiedź:** Współrzędne środka okręgu  $S(-20, 0)$  a jego promień  $r_0 = 40\text{cm}$ .

#### Zadanie 4.9

Na granicy dielektryka o przenikalności względnej  $\epsilon_{r1} = 3$  z powietrzem ( $\epsilon_{r2} \approx 1$ ) linie pola elektrycznego w dielektryku tworzą z normalną do powierzchni granicznej kąt  $\alpha_1 = 60^\circ$ , a natężenie pola  $E_1 = 10\text{kVcm}^{-1}$ .



Rys. 4.6

Wyznaczyć indukcję  $D_1$  i  $D_2$  w obu środowiskach, wektor  $E_2$  i kąt  $\alpha_2$  jaki tworzy on z normalną, polaryzację  $P_1$  w dielektryku oraz gęstość powierzchniową ładunku polaryzacyjnego  $\sigma_{\text{pol}}$ , na granicy obu środowisk. Rys. 4.6 przedstawia szkic przechodzenia linii pola elektrycznego i indukcji elektrycznej na granicy dwóch środowisk.

Rozwiązanie:

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 E_1 = 3 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 10^6 = 2,65 \cdot 10^{-5} \text{ Cm}^{-2},$$

$$10 \text{ kVcm}^{-1} = 1000 \text{ kVm}^{-1} = 10^6 \text{ Vm}^{-1}.$$

$D_{n1}$  - składowa normalna wektora indukcji elektrycznej,

$$D_{n1} = D_1 \cos \alpha_1 = 2,65 \cdot 10^{-5} \cdot 0,5 = 1,325 \cdot 10^{-5} \text{ Cm}^{-2}.$$

Z równości  $D_{n1} = D_{n2}$  otrzymujemy  $D_2 = D_1 \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}$ .

Natomiast z „prawa załamania” linii pola elektrostatycznego na granicy środowisk dielektrycznych

$$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}, \quad \text{tg} \alpha_2 = \text{tg} \alpha_1 \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,577 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{to } \alpha_2 = 30^\circ, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866,$$

$$D_2 = 2,65 \cdot 10^{-5} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2,65 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{3}} = 1,53 \cdot 10^{-5} \text{ Cm}^{-2}.$$

Z równości składowych stycznych natężenie pola elektrycznego na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych  $E_{t1} = E_{t2}$ , to  $E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$ ,

$$E_2 = E_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = 10^6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 10^6 \cdot \sqrt{3} = 17,3 \text{ kV/cm},$$

$\epsilon_r = 1 + \kappa$  to  $\kappa = \epsilon_r - 1$  - podatność materiału na elektryzowanie się  $\kappa_1 = 2$ .

$P_1$  - wektor (jego moduł) polaryzacji w dielektryku 1,

$$P_1 = \epsilon_0 \kappa_1 E_1 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^6 = 1,77 \cdot 10^{-5} \text{ Cm}^{-2}.$$

Gęstość powierzchniowa ładunku polaryzacyjnego

$$\sigma_{\text{pol}} = P_1 \cos \alpha_1 = 1,77 \cdot 10^{-5} \cdot 0,5 = 0,885 \cdot 10^{-5} \text{ Cm}^{-2}.$$

**Odpowiedź:**  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,  $D_1 = 13,25 \mu\text{Cm}^{-2}$ ,  $D_2 = 15,3 \mu\text{Cm}^{-2}$ ,  $E_2 = 17,3 \text{ kVcm}^{-1}$ ,  
 $P_1 = 17,7 \mu\text{Cm}^{-2}$ ,  $\sigma_{\text{pol}} = 8,85 \mu\text{Cm}^{-2}$ .

## 4.2. Kondensatory

### Zadanie 4.10

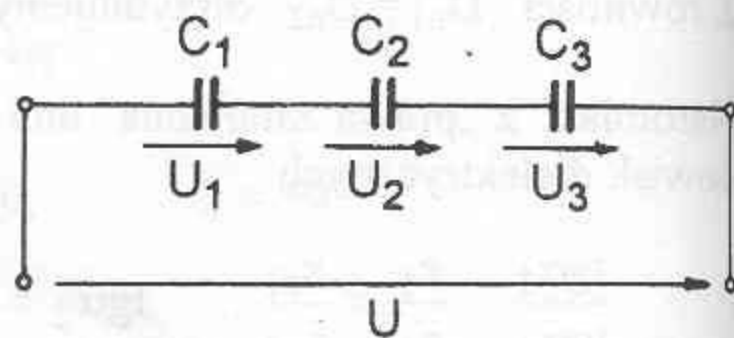
Trzy kondensatory o pojemnościach:

$$C_1 = 1 \mu\text{F}, \quad C_2 = 2 \mu\text{F}, \quad C_3 = 3 \mu\text{F},$$

połączono szeregowo i włączono na napięcie 22kV jak na rysunku 4.7.

Wyznaczyć napięcia  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  na poszczególnych kondensatorach oraz

energię  $W_{e1}$ ,  $W_{e2}$ ,  $W_{e3}$ .



Rys. 4.7

**Rozwiązanie:** Przy założeniu stałości ładunku dla połączenia szeregowego kondensatorów  $Q = \text{const.}$  otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline -C_1 & C_2 & 0 \\ \hline 0 & -C_2 & C_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline U_1 \\ \hline U_2 \\ \hline U_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline U \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$$W = C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1, \quad W_1 = UC_2C_3, \quad W_2 = UC_3C_1, \quad W_3 = UC_1C_2,$$

$$U_1 = U \frac{C_2C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}, \quad U_2 = U \frac{C_3C_1}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1},$$

$$U_3 = U \frac{C_1C_2}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych:  $U_1 = 12\text{kV}$ ,  $U_2 = 6\text{kV}$ ,  $U_3 = 4\text{kV}$ .

$$W_e = \int dW_e = \int_0^U C u du = \frac{1}{2} C U^2,$$

$$W_{e1} = 0,5 \cdot 1 \cdot 10^{-6} (12 \cdot 10^3)^2 = 72\text{J},$$

$$W_{e2} = 0,5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} (6 \cdot 10^3)^2 = 36\text{J},$$

$$W_{e3} = 0,5 \cdot 3 \cdot 10^{-6} (4 \cdot 10^3)^2 = 24\text{J}.$$

**Odpowiedź:**  $U_1 = 12\text{kV}$ ,  $U_2 = 6\text{kV}$ ,  $U_3 = 4\text{kV}$ ,  $W_{e1} = 72\text{J}$ ,  $W_{e2} = 36\text{J}$ ,  
 $W_{e3} = 24\text{J}$ .

#### Zadanie 4.11

Pojemność kondensatora obrotowego  $C_1$  może być nastawiona od 0 do 600pF ( $C_{1\text{max}}$ ) w sposób liniowy przez zmianę kąta  $\alpha$  w granicach od 0 do 180°. Obliczyć pojemność zastępczą dla połączeń:

a) równoległego,

b) szeregowego kondensatora  $C_1$  z kondensatorem o stałej pojemności  $C_2 = 200\text{pF}$ .

Przedstawić graficznie zależności  $C$  w funkcji kąta  $\alpha$  dla obydwu rodzajów połączeń.

**Rozwiązanie:** Pojemność kondensatora obrotowego można przedstawić za pomocą wzoru

$$C_1 = C_{1\text{max}} (\alpha/180^\circ) = 600\text{pF} (\alpha/180^\circ).$$

Dla połączenia równoległego:  $C = C_1 + C_2 = 600\text{pF} \frac{\alpha}{180^\circ} + 200\text{pF}$ .

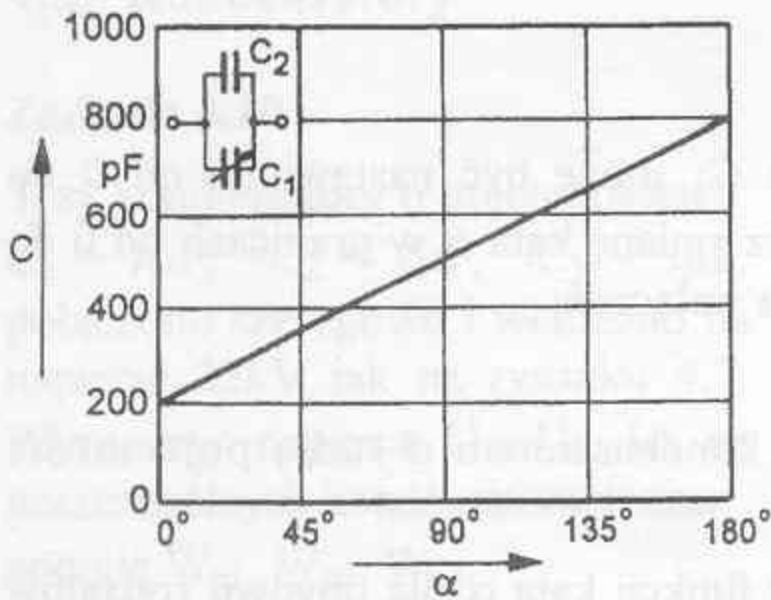
W celu sporządzenia wykresu dokonano przykładowych obliczeń  $C = f(\alpha)$

$\alpha [^\circ]$	0	45	90	135	180
$C_1 [\text{pF}]$	0	150	300	450	600
$C [\text{pF}]$	200	350	500	650	800

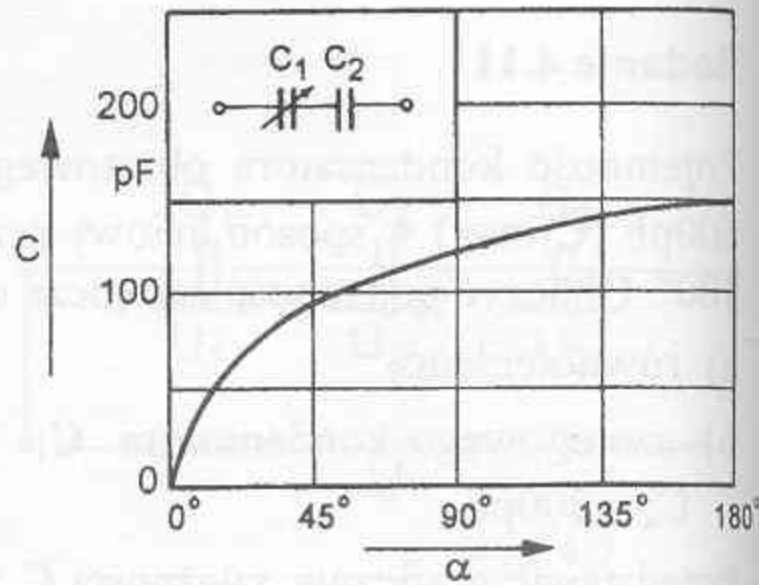
Pojemność zastępcza połączenia szeregowego

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{12 \cdot 10^4 \text{ pF}}{600 + 200 \cdot \frac{180^\circ}{\alpha}}$$

$\alpha [^\circ]$	0	45	90	135	180
$C_1 [\text{pF}]$	0	150	300	450	600
$C [\text{pF}]$	0	87,5	120	138,5	150



Rys. 4.8a

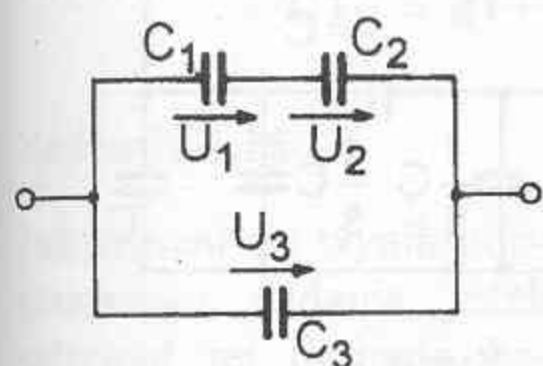


Rys. 4.8b

Rysunki 4,8a, b przedstawiają zależności  $C$  w funkcji kąta  $\alpha$  dla połączenia równoległego i szeregowego kondensatorów  $C_1$  i  $C_2$ . Dla połączenia równoległego funkcja  $C = f(\alpha)$  jest prostą przecinającą oś rzędnych w punkcie  $C = C_2 = 200\text{pF}$  rysunek 4.8a. Dla połączenia szeregowego funkcja  $C = f(\alpha)$  zaczyna się w punkcie 0 i zbliża asymptotycznie do wartości  $150\text{pF}$ , rys.4.8b.

**Zadanie 4.12**

Dla obwodu jak na rysunku 4.9 obliczyć:



Rys. 4.9

a) Pojemność zastępczą,

b) napięcia  $U_1$  i  $U_2$  jeżeli napięcie  $U = 100V$ .

Dane:  $C_1 = 2\mu F$ ,  $C_2 = 8\mu F$ ,  $C_3 = 4\mu F$ .

Rozwiązanie: a) Dla połączenia szeregowego kondensatorów  $C_1$  i  $C_2$ .

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 8}{2 + 8} \mu F = 1,6 \mu F.$$

Dla układu równoległego  $C_{12}$  i  $C_3$

$$C_{123} = C_{12} + C_3 = 1,6 \mu F + 4 \mu F = 5,6 \mu F,$$

b) dla połączenia szeregowego kondensatorów ładunek na nich  $Q = \text{const}$ .

W związku z tym

1	1
$-C_1$	$C_2$

$U_1$
$U_2$

 $=$ 

$U$
$0$

 $W = C_1 + C_2, \quad W_1 = UC_2, \quad W_2 = UC_1.$

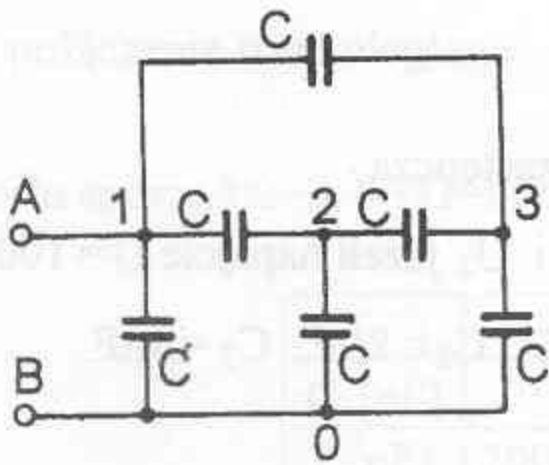
$$U_1 = U \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{8}{10} \cdot 100 = 80V, \quad U_2 = U \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2}{10} \cdot 100 = 20V.$$

**Odpowiedź:** Pojemność zastępcza układu kondensatorów  $C_{123} = 5,6 \mu F$   
a napięcia odpowiednio:  $U_1 = 80V$  i  $U_2 = 20V$ .

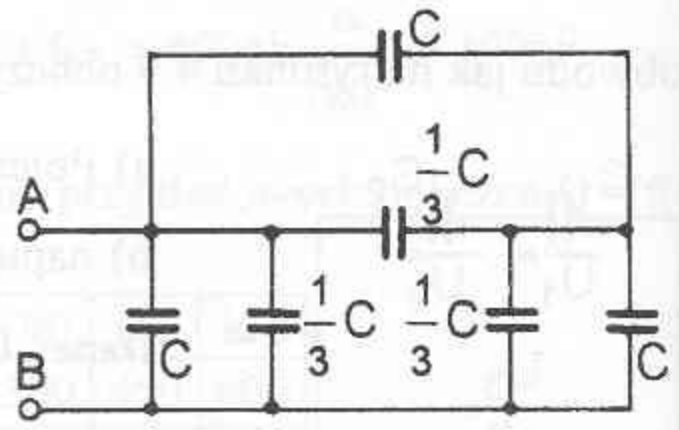
**Zadanie 4.13**

Obliczyć pojemność zastępczą układu kondensatorów na zaciskach AB. Wartości wszystkich kondensatorów wynoszą  $C = 0,5 \mu F$ . Schemat przedstawiony jest na rysunku 4.10a.



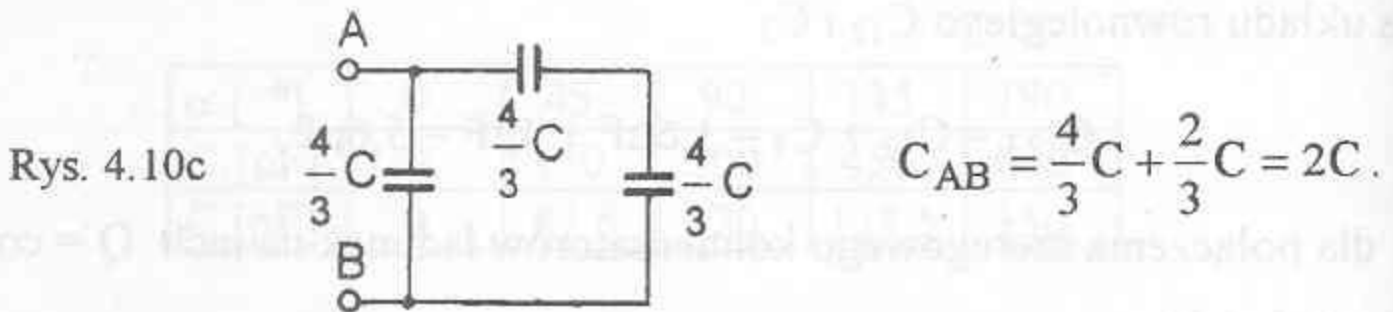


Rys. 4.10a



Rys. 4.10b

**Rozwiązanie:** Wykorzystując wzory na przekształcenie gwiazdy pojemności na równoważny trójkąt, otrzymujemy schemat jak na rysunku 4.10b  $C_g = 3C_t$ , gdzie  $C_g$  - pojemność kondensatora gwiazdy,  $C_t$  - pojemność kondensatora trójkąta. Po następnym przekształceniu otrzymujemy schemat z rysunku 4.10c



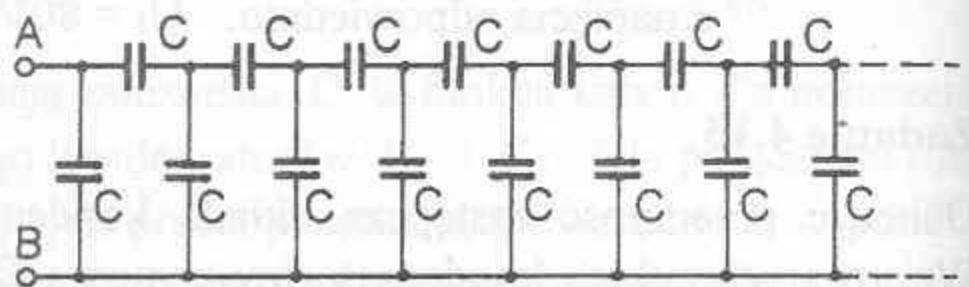
Po podstawieniu danych liczbowych  $C_{AB} = 1\mu\text{F}$ .

#### Zadanie 4.14

Obliczyć ponownie pojemność zastępczą układu kondensatorów z zadania 4.13, stosując przekształcenie górnego trójkąta pojemności, na równoważną gwiazdę.

#### Zadanie 4.15

Obliczyć pojemność zastępczą nieskończonej długiej drabinki kondensatorów o jednostkowej pojemności  $C = 2\mu\text{F}$  rysunek 4.11.



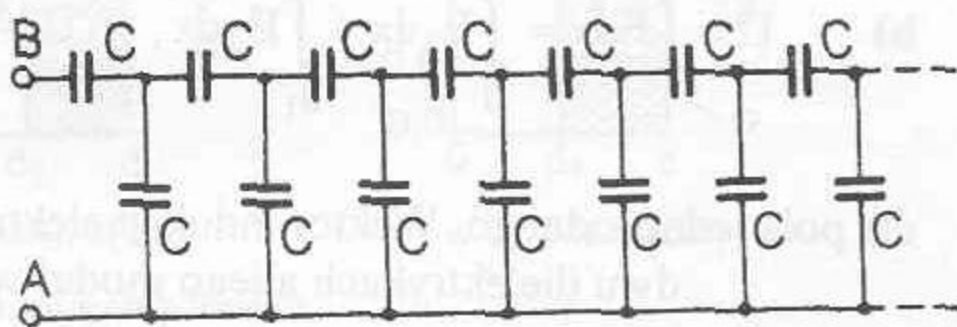
Rys. 4.11

Odpowiedź:  $C_{AB} = \frac{C + C\sqrt{5}}{2} = \frac{C}{2}(1 + \sqrt{5})$ . Po podstawieniu danych

$$C_{AB} = 1(1 + \sqrt{5})\mu\text{F} = 3,236\mu\text{F}.$$

#### Zadanie 4.16

Jak zmieni się wynik poprzedniego zadania jeżeli schemat tej drabinki będzie wyglądał jak na rysunku 4.12.



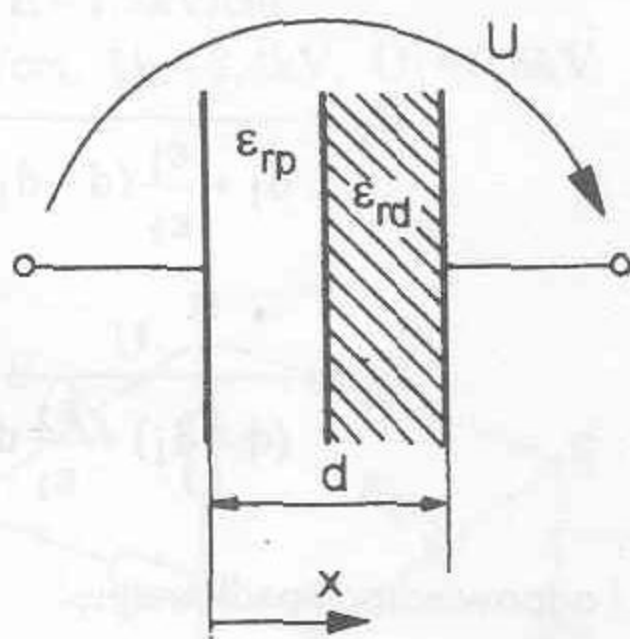
Odpowiedź:  $C_{AB} = 1,236\mu\text{F}$ .

Rys. 4.12

#### Zadanie 4.17

Do dwóch kwadratowych płytek metalowych o boku  $a = 10\text{cm}$  i oddalonych od siebie na odległość  $d = 2\text{cm}$  przyłożono napięcie  $U = 3\text{kV}$  rysunek 4.13a.

- Obliczyć pojemność, ładunek oraz natężenie pola elektrycznego pomiędzy płytkami, jeżeli dielektrykiem jest powietrze o przenikalności względnej  $\epsilon_{rp} \approx 1$ .
- Połowę przestrzeni między płytkami zostało wypełnione dielektrykiem o przenikalności względnej  $\epsilon_{rd} = 4$ . Obliczyć i narysować przebiegi natężenia pola elektrycznego oraz napięcia i porównać z przypadkiem a).
- Jaki ładunek i jaką pojemność posiada kondensator z przypadku b) ?



Rys. 4.13a

$$\text{a) } C = \epsilon \frac{S}{d} = \epsilon_0 \epsilon_{rp} \frac{a^2}{d},$$

$$C = 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \frac{10^2 \text{cm}^2}{2\text{cm}} = 4,43 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 4,43\text{pF},$$

$$Q = CU = 4,43 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{V}} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{V} = 13,29 \cdot 10^{-9} \text{As} = 13,29\text{nC}.$$

Dla pola jednorodnego w kondensatorze płaskim niuwarstwionym

$$E = \frac{U}{d} = \frac{3\text{kV}}{2\text{cm}} = 1,5\text{kV/cm}.$$

$$\text{b) } U = \int E dx = \int_0^{d_1} E_1 dx + \int_{d_1}^d E_2 dx, \quad U = E_1 d_1 + E_2 (d - d_1)$$

dla pola jednorodnego. Wektor indukcji elektrycznej jest jednakowy w obydwu dielektrykach a jego moduł wyraża się wzorem

$$D = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{rp}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{rd},$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 \quad \text{to} \quad U = E_1 d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 (d - d_1),$$

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (d - d_1)} = \frac{3\text{kV}}{1\text{cm} + \frac{1}{4} \cdot 1\text{cm}} = 2,4\text{kV/cm},$$

$$E_2 = \frac{U}{(d - d_1) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} d_1} = \frac{3\text{kV}}{1\text{cm} + 4 \cdot 1\text{cm}} = 0,6\text{kV/cm}$$

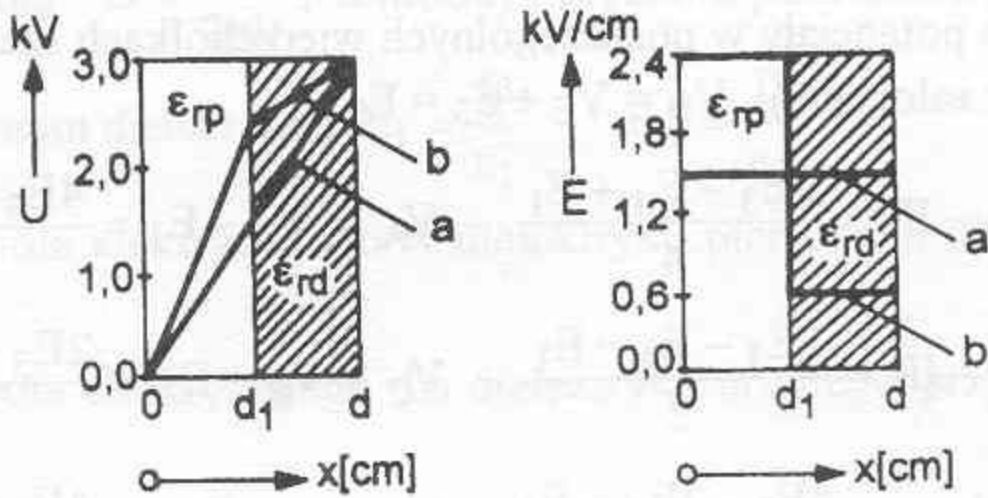
i odpowiednio spadki napięć:

$$U_1 = \int_0^{d_1} E_1 dx = E_1 d_1 = 2,4 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} \cdot 1\text{cm} = 2,4\text{kV},$$

$$U_2 = \int_{d_1}^d E_2 dx = E_2 (d - d_1) = 0,6 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} \cdot 1\text{cm} = 0,6\text{kV}.$$

Napięcie i natężenie pola elektrycznego w kondensatorze uwarstwionym (b) i niuwarstwionym (a) przedstawia rysunek 4.13b.

Rys. 4.13b



c) Ładunek w kondensatorze uwarstwionym:

$$Q = D \cdot S = \epsilon_1 E_1 S = 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 2,4 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} \cdot 100 \text{cm}^2 = 21,26 \text{nC}$$

oraz pojemności

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{21,26 \cdot 10^{-9} \text{As}}{3 \cdot 10^3 \text{V}} = 7,1 \cdot 10^{-12} \text{As/V} = 7,1 \text{pF}.$$

Odpowiedź: a)  $C = 4,43 \text{pF}$ ,  $Q = 13,29 \text{nC}$ ,  $E = 1,5 \text{kV/cm}$ ,

b)  $E_1 = 2,4 \text{kV/cm}$ ,  $E_2 = 0,6 \text{kV/cm}$ ,  $U_1 = 2,4 \text{kV}$ ,  $U_2 = 0,6 \text{kV}$ ,

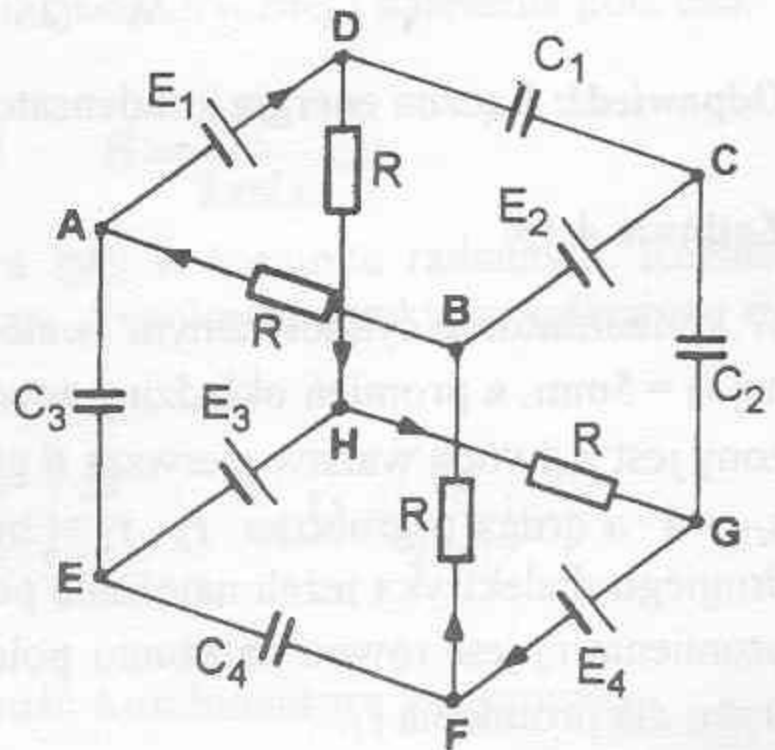
c)  $Q = 21,26 \text{nC}$ ,  $C = 7,1 \text{pF}$ .

#### Zadanie 4.18

Obliczyć energię jaka dopłynęła ze źródeł napięcia stałego  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  i  $E_4$ , do kondensatorów  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  oraz  $C_4$  w przypadku, gdy są one połączone tak jak na rysunku 4.14. Wszystkie rezystory mają jednakową wartość  $R$ .

Dane liczbowe:  $E_1 = 4 \text{V}$ ,  $E_2 = 8 \text{V}$ ,  
 $E_3 = 12 \text{V}$ ,  $E_4 = 16 \text{V}$ ,  
 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \mu\text{F}$ .

Rozwiązanie: Przyjmując, że potencjał w punkcie E równa się zero, prąd płynie wzdłuż drogi ADHGFBA, a jego natężenie wynosi



Rys. 4.14

$$I = \frac{E_4 - E_1}{4R}$$

Obliczone potencjały w poszczególnych wierzchołkach sześcianu wynoszą  $V_E = 0$  (z założenia),  $V_H = V_E + E_3 = E_3$ ,

$$V_D = V_H - IR = \frac{4E_3 - E_4 + E_1}{4}, \quad V_A = V_D - E_1 = \frac{4E_3 - E_4 - 3E_1}{4},$$

$$V_B = V_A - IR = \frac{2E_3 - E_4 - E_1}{2}, \quad V_C = V_B + E_2 = \frac{2E_3 + 2E_2 - E_4 - E_1}{2},$$

$$V_F = V_B - IR = \frac{4E_3 - 3E_4 - E_1}{4}, \quad V_G = V_F + E_4 = \frac{4E_3 + E_4 - E_1}{4}.$$

Po podstawieniu danych  $V_E = 0$ ,  $V_A = 5V$ ,  $V_B = 2V$ ,  $V_C = 10V$ ,  
 $V_D = 9V$ ,  $V_F = -1V$ ,  $V_G = 15V$ ,  $V_H = 12V$ .

Łączna energia wszystkich kondensatorów wynosi:

$$W = \frac{1}{2}C_1(V_D - V_C)^2 + \frac{1}{2}C_2(V_C - V_G)^2 + \\ + \frac{1}{2}C_3(V_A - V_E)^2 + \frac{1}{2}C_4(V_E - V_F)^2.$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$W = 26 \cdot 10^{-6} \text{J}.$$

**Odpowiedź:** Łączna energia kondensatorów wynosi  $26 \cdot 10^{-6} \text{J}$ .

#### Zadanie 4.19

W kondensatorze cylindrycznym (walcowym) promień okładziny wewnętrznej  $r_1 = 5 \text{mm}$ , a promień okładziny zewnętrznej  $r_3 = 10 \text{mm}$ . Dielektryk złożony jest z dwóch warstw pierwsza o grubości  $r_2 - r_1 = 3 \text{mm}$  i przenikalności  $\epsilon_{r1} = 4$  a druga o grubości  $r_3 - r_2 = 2 \text{mm}$ . Jaka jest przenikalność względna drugiego dielektryka jeżeli natężenie pola elektrycznego w tym materiale dla promienia  $r_2$  jest równe natężeniu pola elektrycznego w pierwszym dielektryku dla promienia  $r_1$ .

**Rozwiązanie:** Dla kondensatora warstwowego walcowego modułu wektora indukcji elektrycznej  $D = \frac{Q}{2\pi lr}$ , a moduł natężenia pola elektrycznego

w pierwszym i drugim dielektryku  $E_1 = \frac{D}{\epsilon_1}$  i  $E_2 = \frac{D}{\epsilon_2}$ .

$E_{11}$  - natężenie pola elektrycznego w dielektryku pierwszym dla promienia  $r_1$ .

$E_{22}$  - natężenie pola elektrycznego dla dielektryka drugiego przy promieniu  $r_2$ .

$E_{11} = E_{22}$  (z założenia)  $\frac{Q}{2\pi\epsilon_1 r_1 l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 r_2 l}$ , wynika z tego, że  $\frac{1}{\epsilon_1 r_1} = \frac{1}{\epsilon_2 r_2}$ ,

$\epsilon_{r2} = \epsilon_{r1} \frac{r_1}{r_2}$ . Po podstawieniu danych liczbowych  $\epsilon_{r2} = 2,5$ .

**Odpowiedź:** Przenikalność względna drugiego dielektryka wynosi 2,5.

#### Zadanie 4.20

Kabel jednożyłowy o promieniu żyły  $r = 0,5\text{cm}$  i promieniu wewnętrznym powłoki  $R = 2\text{cm}$  jest wypełniony dielektrykiem o wtrzymałości izolacji  $E_{\max} = 200\text{kVcm}^{-1}$ . Przy jakim napięciu nastąpi przebicie izolacji?

**Rozwiązanie:** Moduły wektorów indukcji elektrycznej i natężenia pola elektrycznego wynoszą odpowiednio

$$D = \frac{Q}{2\pi lx} \quad \text{i} \quad E = \frac{Q}{2\pi\epsilon lx},$$

gdzie  $x$  oznacza odległość od środka żyły w kierunku radialnym. Różnica potencjałów - napięcie między dwoma dowolnymi punktami odległymi od osi o  $r$  i  $R$  wynosi:

$$V_r - V_R = U = \int_r^R E dx = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \int_r^R \frac{dx}{x}, \quad U = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{R}{r},$$

natomiast  $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R}{r}}$  - pojemność kondensatora walcowego.

Wyprowadzając z ostatniego wzoru zależność na ładunek  $Q$  i przekształcając ogólny wzór na pojemność otrzymuje się

$$U_{\max} = \frac{Q}{C} = \frac{2E_{\max}\pi\epsilon l r}{2\pi\epsilon l} = E_{\max} r \ln \frac{R}{r}$$

Podstawiając dane liczbowe

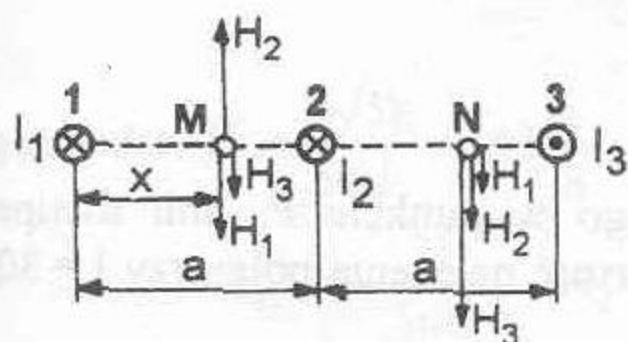
$$U_{\max} = 200 \text{ kV cm}^{-1} \cdot 0,5 \text{ cm} \ln \frac{2}{0,5} = 138 \text{ kV}$$

**Odpowiedź:** Przebiecie izolacji nastąpi przy napięciu wyższym od 138 kV.

## 5. POLE MAGNETOSTATYCZNE

### Zadanie 5.1

W trzech długich prostoliniowych przewodach o przekroju kołowym ułożonych równolegle do siebie w jednej płaszczyźnie rys. 5.1, płyną prądy



Rys. 5.1

$I_1 = I$ ,  $I_2 = I$  oraz  $I_3 = I_1 + I_2 = 2I$  w kierunku przeciwnym do  $I_1$  i  $I_2$ . W płaszczyźnie tej wyznaczyć położenie prostej, wzdłuż której natężenie pola magnetycznego  $H=0$ ,  $a=60\text{cm}$ .

**Rozwiązanie:** Punkt, w którym możliwa jest sytuacja, że  $H=0$  może znajdować się pomiędzy przewodami 1 i 2 (patrz rysunek), natomiast między

przewodami 2 i 3 wektory  $\vec{H}_1$ ,  $\vec{H}_2$  i  $\vec{H}_3$  zwrócone są w tą samą stronę.

$$\vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 = 0, \quad \frac{I}{2\pi x} - \frac{I}{2\pi(a-x)} + \frac{2I}{2\pi(2a-x)} = 0,$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a-x} + \frac{2}{2a-x} = 0, \quad (a-x)(2a-x) - x(2a-x) + 2x(a-x) = 0,$$

$$2a^2 - ax - 2ax + x^2 - 2ax + x^2 + 2ax - 2x^2 = 0, \quad 2a^2 = 3ax, \quad x = \frac{2}{3}a.$$

**Odpowiedź:** Prosta ta oddalona jest o 40 cm od przewodu 1 i o 20 cm od przewodu drugiego. Sprawdzić czy istnieć mogą inne proste położone na zewnątrz przewodów 1 i 3, dla których  $H=0$ .

### Zadanie 5.2

Obliczyć rozkład natężenia pola magnetycznego w nieskończenie długim kablu koncentrycznym, w funkcji odległości od osi kabla. Prądy żyły wewnętrznej i powłoki zewnętrznej są równe, lecz skierowane przeciwnie i wynoszą  $I = 5\text{A}$ . Wymiary kabla są następujące: promień żyły wewnętrznej  $r_1 = 2\text{mm}$ , wewnętrzny promień powłoki  $r_2 = 7\text{mm}$ , zewnętrzny promień powłoki  $r_3 = 8\text{mm}$ . Rozwiązanie zilustrować wykresem.



Odpowiedź: Dla przedziałów:

$$1) r < r_1, \quad H = \frac{Ir}{2\pi r_1^2},$$

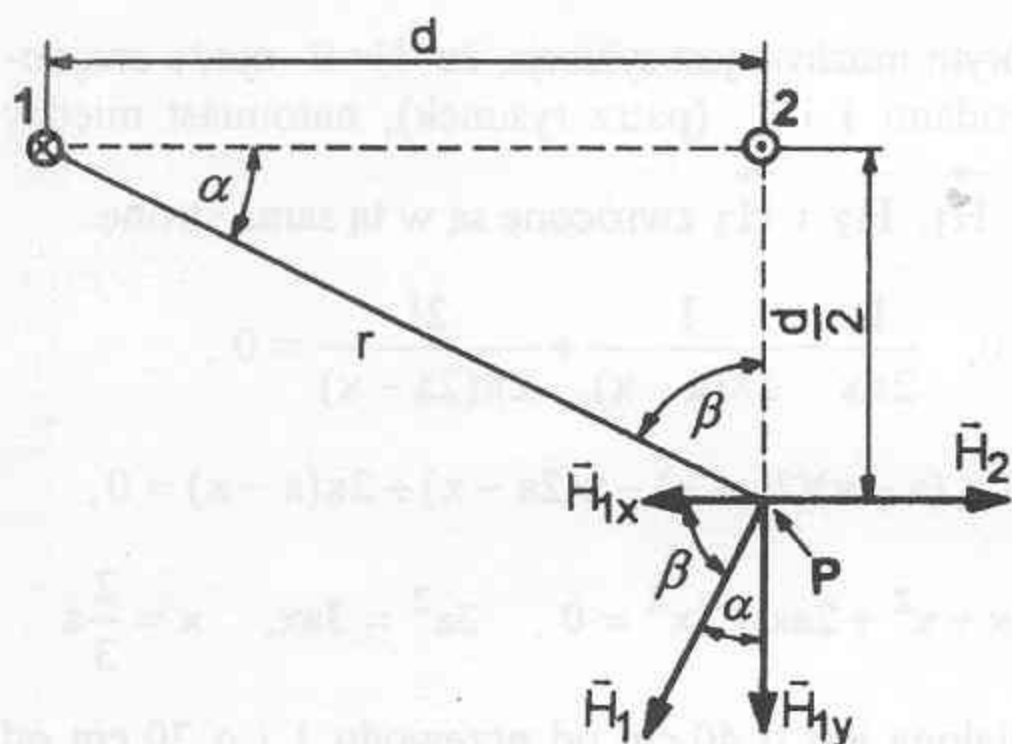
$$2) r_1 \leq r < r_2, \quad H = \frac{I}{2\pi r},$$

$$3) r_2 \leq r \leq r_3, \quad H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2},$$

$$4) r > r_3, \quad H = 0.$$

### Zadanie 5.3

Wyznaczyć natężenie pola magnetycznego w punkcie P, linii dwuprzewodowej jak na rysunku 5.2. Jaka jest wartość natężenia pola przy  $I = 300\text{A}$  i  $d = 60\text{cm}$ ?



Rys. 5.2

$$r = \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos\alpha = \frac{d}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\beta = \frac{d}{2r} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Rozwiązanie:

$$H_1 = \frac{2I}{2\pi d\sqrt{5}} = \frac{I}{\pi d\sqrt{5}}, \quad H_{1x} = H_1 \cos\beta = \frac{I}{\pi d\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{I}{5\pi d}$$

$$H_{1y} = H_1 \cos\alpha = \frac{I}{\pi d\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2I}{5\pi d}, \quad H_2 = H_{2y} = \frac{2I}{2\pi d} = \frac{I}{\pi d}$$

$$H = \sqrt{(H_2 - H_{1x})^2 + H_{1y}^2} = \sqrt{\left(\frac{I}{\pi d} - \frac{I}{5\pi d}\right)^2 + \left(\frac{2I}{5\pi d}\right)^2} =$$

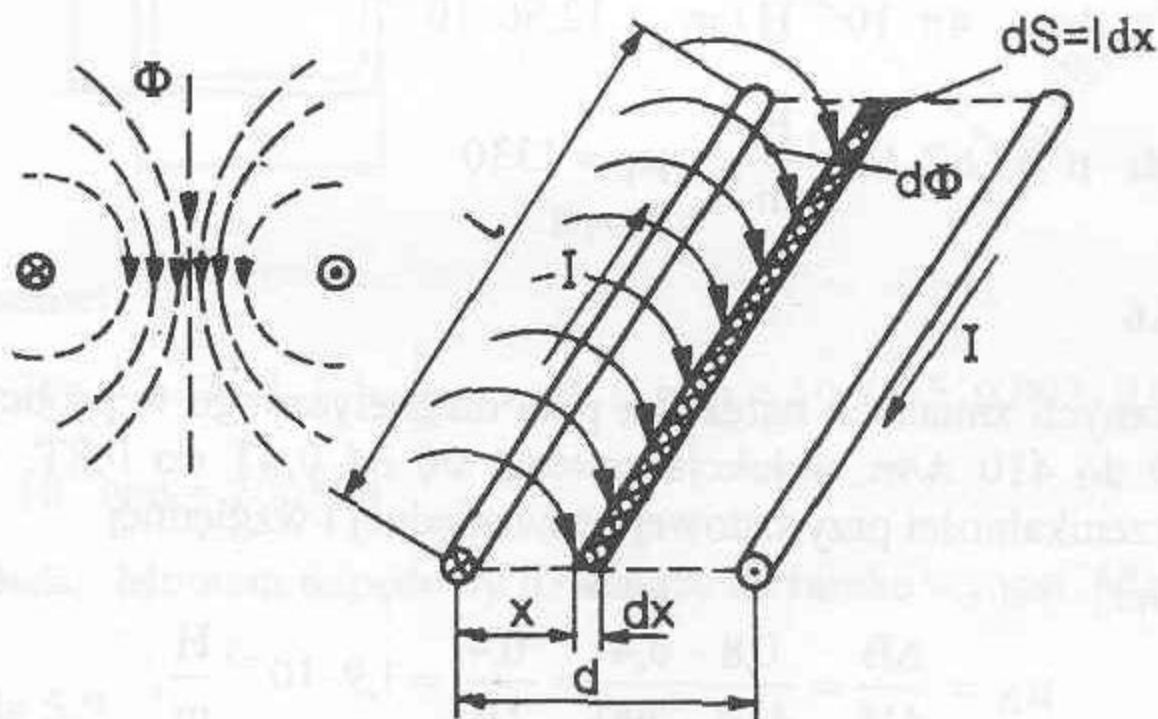
$$= \sqrt{\frac{20I^2}{(5\pi d)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5\pi d} I = \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 300}{5 \cdot 3,14 \cdot 0,6} = 63,7\sqrt{5} \approx 142 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Odpowiedź:  $H = \frac{2\sqrt{5}I}{5\pi d} = 142 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ ,  $H_1 = \frac{I}{\sqrt{5}\pi d}$ ,  $H_{1x} = -\frac{I}{5\pi d}$ ,

$$H_{1y} = -\frac{2I}{5\pi d}, \quad H_2 = \frac{I}{\pi d}$$

#### Zadanie 5.4

Obliczyć strumień magnetyczny między przewodami linii napowietrznej dwuprzewodowej o długości  $l = 500\text{m}$ , średnicy przewodów  $2r = 1,4\text{cm}$ , oddalonymi od siebie o  $d = 70\text{cm}$ . Prąd linii  $I = 200\text{A}$ . Szkic linii przedstawia rysunek 5.3.



Rys. 5.3

**Rozwiązanie:** Załóżmy, że strumień magnetyczny przenika tylko przestrzeń powietrzną między przewodami.

$$\text{Dla } x > r, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \quad \Phi = 2 \int_r^d B dS = \frac{2\mu_0 I \pi}{2\pi} \int_r^d \frac{dx}{x} = \frac{2\mu_0 I \pi}{2\pi} \ln \frac{d}{r},$$

$$\Phi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 500}{\pi} \ln 100 = 0,04 \cdot 4,6 = 0,184 \text{ Wb} = 184 \text{ mWb}.$$

**Odpowiedź:** Strumień między przewodami półkilometrowego odcinka linii o danych jak wyżej wynosi  $\Phi = 184 \text{ mWb}$ .

### Zadanie 5.5

Na krzywej magnesowania materiału ferromagnetycznego odczytano, że indukcja  $B = 1 \text{ T}$  odpowiada natężeniu pola magnetycznego  $H = 600 \text{ A/m}$ . Obliczyć wartości przenikalności bezwzględnej i przenikalności względnej danego materiału.

**Rozwiązanie:**

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1 \text{ T}}{600 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ H/m},$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1,67 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}} = \frac{1,67 \cdot 10^{-3}}{12,56 \cdot 10^{-7}} = 1,33 \cdot 10^3 = 1330.$$

**Odpowiedź:**  $\mu = 1,67 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{m}}, \quad \mu_r = 1330$

### Zadanie 5.6

Przy cyklicznych zmianach natężenia pola magnetycznego w próbce w granicach 200 do 410 A/m, indukcja zmienia się od 0,4 T do 0,8 T. Obliczyć wartości przenikalności przyrostowej bezwzględnej i względnej.

**Rozwiązanie:**

$$\mu_{\Delta} = \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{0,8 - 0,4}{410 - 200} = \frac{0,4}{210} = 1,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{m}},$$

$$\mu_{\Delta r} = \frac{\mu_{\Delta}}{\mu_0} = \frac{1,9 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}}{12,56 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}} = 0,15 \cdot 10^4 = 1500.$$

**Odpowiedź:**  $\mu_{\Delta} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}, \quad \mu_{\Delta r} = 1500.$

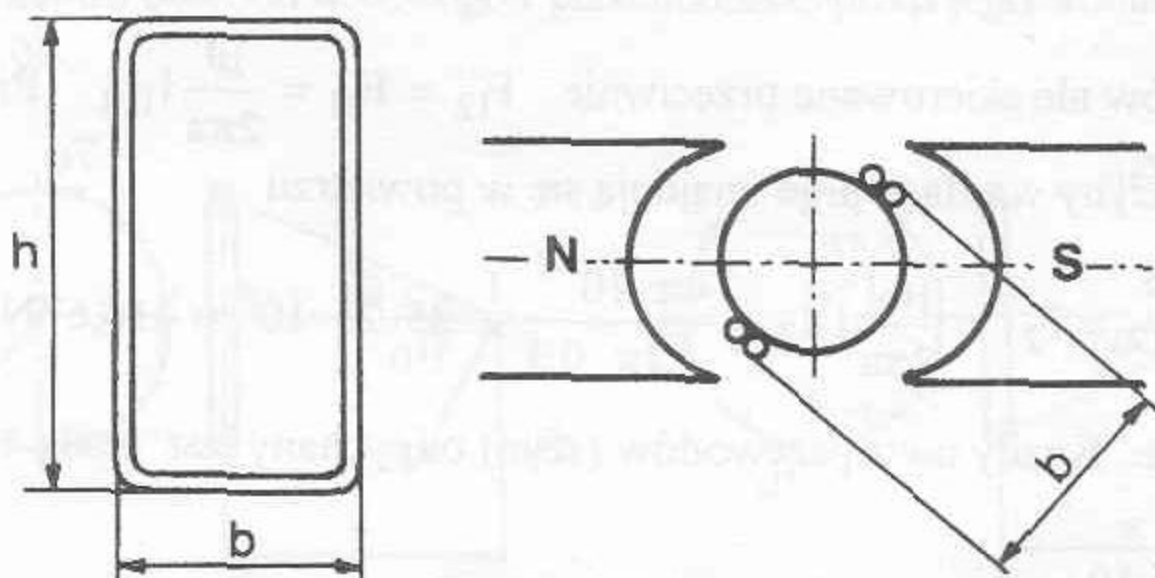
**Zadanie 5.7**

Pręt sztywny o długości  $l = 10\text{cm}$  umieszczony jest w powietrzu w polu magnetycznym  $795775\text{A/m}$  prostopadle do linii pola. Jaka siła będzie działać na pręt, gdy przepuścimy przez niego prąd  $I = 10\text{A}$ .

**Odpowiedź:**  $F = 1\text{N}$ .

**Zadanie 5.8**

Cewka przyrządu magnetoelektrycznego o liczbie zwojów  $z = 50$ , wykonana jest w postaci ramki o długości  $h = 40\text{mm}$  i szerokości  $b = 20\text{mm}$ , umieszczona jest w szczelinie magnesu o indukcji  $B = 0,25\text{T}$ , jak pokazano na rysunku 5.4. Obliczyć moment napędowy cewki, gdy płynie przez nią prąd  $I = 2\text{mA}$ .



Rys. 5.4

**Rozwiązanie:**

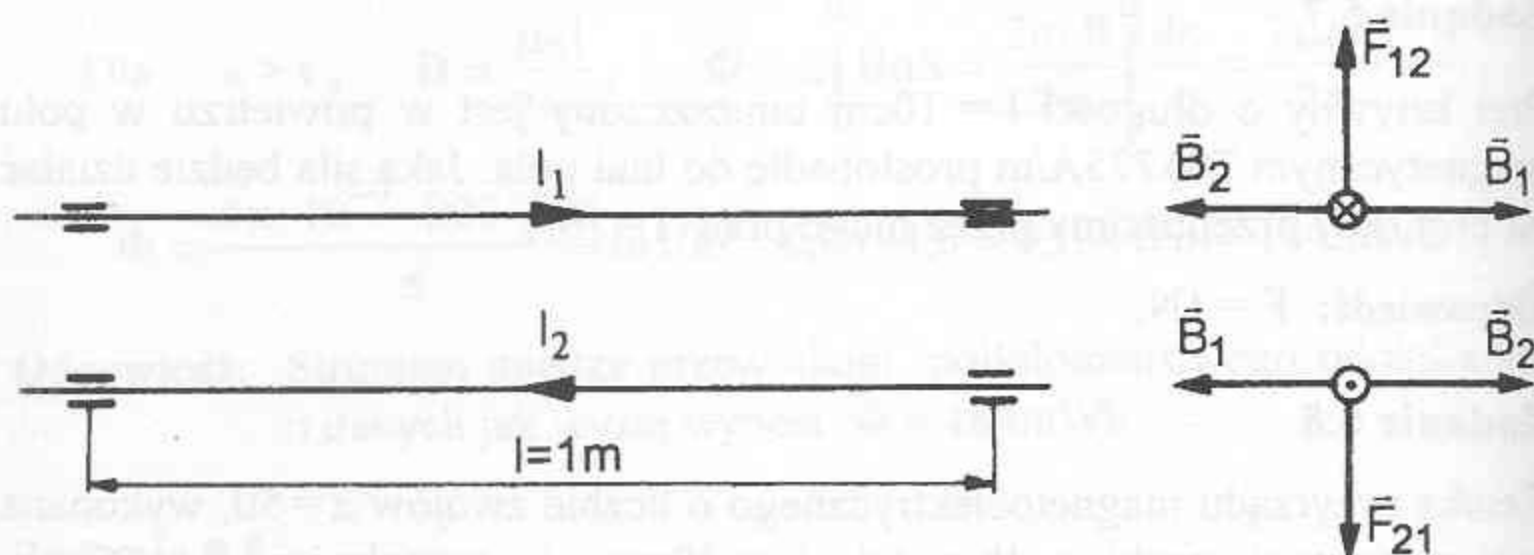
$$M = z \cdot 2Fr = z \cdot 2 \cdot B \cdot I \cdot h \cdot \frac{b}{2} = z \cdot B \cdot I \cdot h \cdot b = 50 \cdot 0,25 \cdot 0,002 \cdot 0,04 \cdot 0,02,$$

$$M = 2 \cdot 10^{-5} \text{Nm} = 20 \mu\text{Nm}.$$

**Odpowiedź:** Moment napędowy działający na ramkę wynosi  $M = 20 \mu\text{Nm}$ .

**Zadanie 5.9**

Przez dwa przewody szynowe równoległe do siebie i oddalone o  $d = 30\text{cm}$  umocowane na izolatorach co  $1\text{m}$ , jak pokazano na rysunku 5.5, płyną prądy  $I_1 = I_2 = 25\text{kA}$  o zwrotach przeciwnych. Z jaką siłą oddziałują na siebie te przewody?



Rys. 5.5

**Rozwiązanie:** Zapisy działających na przewody sił w postaci wektorowej są następujące  $\vec{F}_{12} = I_1(\vec{l} \times \vec{B}_2)$ ;  $\vec{F}_{21} = I_2(\vec{l} \times \vec{B}_1)$ . Siły te są równe co do modułów ale skierowane przeciwnie  $F_{12} = F_{21} = \frac{\mu l}{2\pi a} I_1 I_2$ . Przy założeniu, że szyny wiodące prąd znajdują się w powietrzu

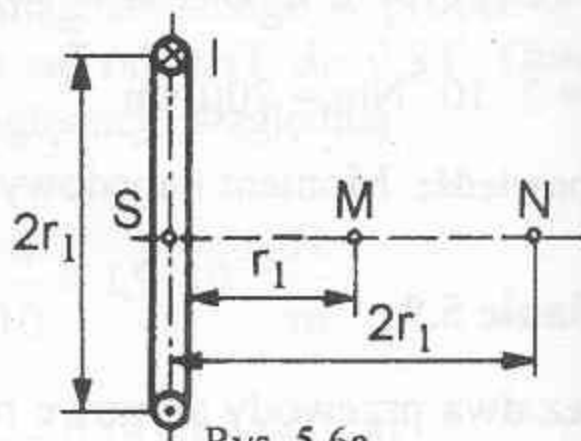
$$F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 l}{2\pi a} I_1 I_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2\pi \cdot 0,3} \cdot 25 \cdot 25 \cdot 10^6 = 416,67\text{ N}.$$

**Odpowiedź:** Każdy metr przewodów (szyn) odpychany jest z siłą 416,67N.

### Zadanie 5.10

Ile wynosi natężenie pola magnetycznego w polu wytworzonym przez prąd  $I = 10\text{ A}$ , płynący w przewodzie kołowym o promieniu  $r_1 = 5\text{ cm}$ :

- W środku S zwoju,
- W punkcie M oddalonym o  $r_1$ ,
- W punkcie N oddalonym o  $2r_1$  od płaszczyzny zwoju jak zaznaczono na rysunku 5.6a.



Rys. 5.6a

**Rozwiązanie:** Wzór na obliczenie indukcji magnetycznej i natężenia pola magnetycznego w danym punkcie pola wytworzonego przez dowolnie ukształtowany obwód elektryczny podał Laplace:

$$\vec{dB} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

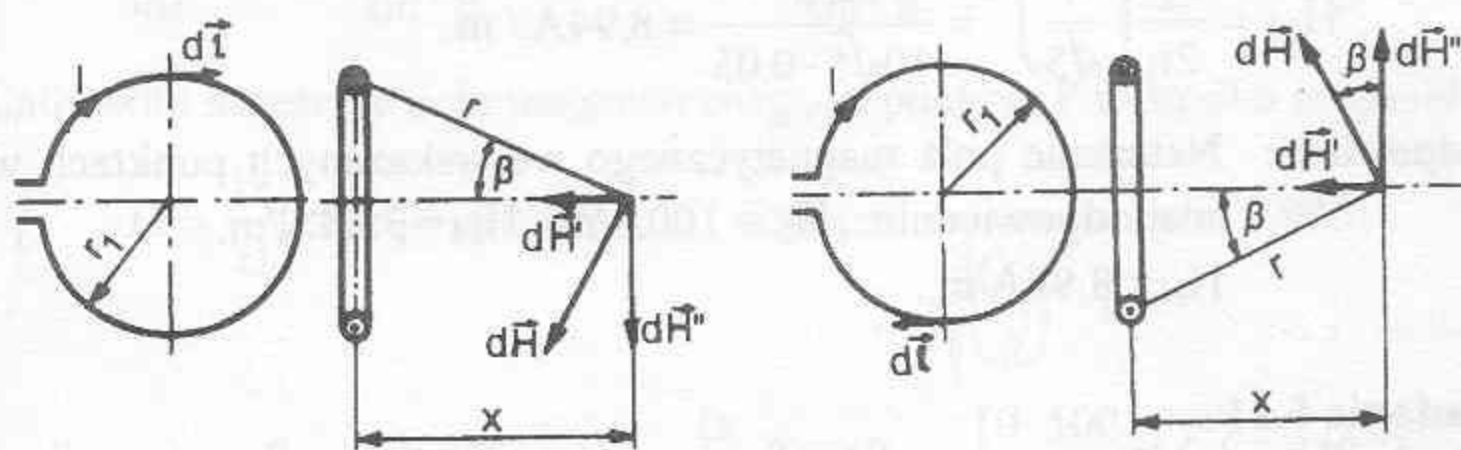
moduły tych wektorów:

$$dB = \frac{\mu I dl}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad dH = \frac{I dl}{4\pi r^2} \sin \alpha.$$

Natężenia pola  $H$  w danym punkcie  $P$  wytworzone przez cały obwód elektryczny jednowymiarowy (o nieskończenie małych rozmiarach liniowych przekroju), wyraża się wzorem całkowym

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Szkice objaśniające wyznaczenie pola magnetycznego w odległości  $x$  na prostej prostopadłej do obwodu kołowego i przechodzącej przez jego środek, przedstawia rys. 5.6b.



Rys. 5.6b

- a) Natężenie pola magnetycznego w środku płaskiego zwoju kołowego  $\alpha = 90^\circ$  i  $r = \text{const}$ .

$$H = \frac{I}{4\pi r_1^2} \oint dl = \frac{I}{4\pi r_1^2} 2\pi r_1 = \frac{I}{2r_1} = \frac{10\text{A}}{10\text{cm}} = 1 \frac{\text{A}}{\text{cm}} = 100\text{A/m}.$$

- b) i c) Natężenie pola magnetycznego w punkcie leżącym na osi zwoju w odległości  $x$  od środka

$$dH = \frac{I \cdot dl}{4\pi r^2}, \quad (dl \perp r),$$

$$dH' = \frac{I dl}{4\pi r^2} \sin \beta \quad - \text{moduł składowej osiowej},$$

$dH'' = \frac{Idl}{4\pi r^2} \cos\beta$  - składowa promieniowa ulegająca redukcji od leżących na przeciw siebie elementów  $dl$ ,

$$H = \frac{I \sin\beta}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{Ir_1}{2r^2} \sin\beta, \quad r = \frac{r_1}{\sin\beta}, \quad H = \frac{I}{2r_1} \sin^3\beta,$$

dla punktu M  $\sin\beta = \frac{r_1}{r} = \frac{r_1}{r_1\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$$H_M = \frac{I}{2r_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{10}{4\sqrt{2} \cdot 0,05} = 35,4 \text{ A/m},$$

dla punktu N  $\sin\beta = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + 4r_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$

$$H_N = \frac{I}{2r_1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{10}{10\sqrt{5} \cdot 0,05} = 8,94 \text{ A/m}.$$

**Odpowiedź:** Natężenie pola magnetycznego we wskazanych punktach wynosi odpowiednio:  $H_S = 100 \text{ A/m}$ ,  $H_M = 35,4 \text{ A/m}$ ,  $H_N = 8,94 \text{ A/m}$ .

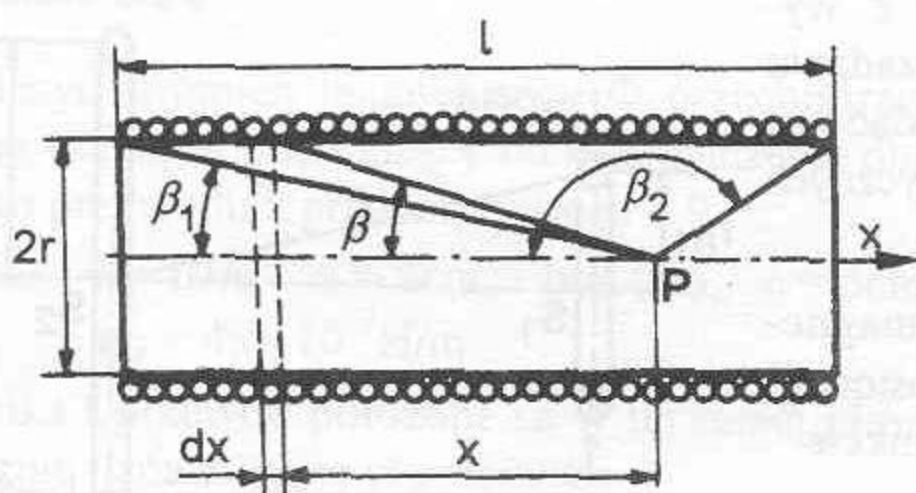
### Zadanie 5.11

Na rurce z materiału nieferromagnetycznego (rurka bez rdzenia) o średnicy 60mm, nawinięta jest równomiernie jedna warstwa drutu o średnicy 1,2mm. Jakie jest natężenie pola  $H_1$  na osi rury w środku jej długości i  $H_2$  na końcach nawinięcia, jeżeli liczba zwojów wynosi 500, długość nawinięcia 600mm a prąd w uzwojeniu  $I = 10 \text{ A}$  (można nie uwzględniać średnicy nawinięcia). Szkic solenoidu przedstawia rysunek 5.7.

$\frac{Iz}{l} dx$  - pojedynczy zwoj z prądem,

$\frac{z}{l}$  - liczba zwojów na jednostkę długości solenoidu,

P - początek układu współrzędnych.



Rys. 5.7

Z zadania 5.10 wiadomo, że natężenie pola magnetycznego w punkcie P pochodzące od pojedynczego zwoju wynosi (moduł  $dH'$  składowej osiowej):

$$dH = \frac{Iz}{2rl} \sin^3 \beta dx, \quad x = -r \operatorname{ctg} \beta, \quad x = -r \frac{\cos \beta}{\sin \beta},$$

$$\frac{dx}{d\beta} = r \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta}, \quad dx = \frac{r d\beta}{\sin^2 \beta}, \quad dH = \frac{Iz}{2l} \sin \beta d\beta.$$

Całkowite natężenie pola magnetycznego w punkcie P w środku solenoidu

$$H = \frac{Iz}{2l} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2), \quad \cos \beta_1 = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2}} = 0,995,$$

$$\cos \beta_2 = -\cos \beta_1 = -0,955, \quad H_1 = \frac{Iz}{2l} \cdot 2 \cos \beta_1 = \frac{10 \cdot 500}{2 \cdot 0,6} \cdot 1,99 = 8292 \text{ A/m},$$

$$\text{Na końcach solenoidu, } \cos \beta_1 = 0, \quad \cos \beta_2 \approx 1, \quad H_2 = 4146 \text{ A/m}.$$

**Odpowiedź:** Natężenie pola magnetycznego na osi solenoidu dokładnie w jego środku wynosi  $H_1 = 8292 \text{ A/m}$ , a na krańcach  $H_2 = 4146 \text{ A/m}$ .

### Zadanie 5.12

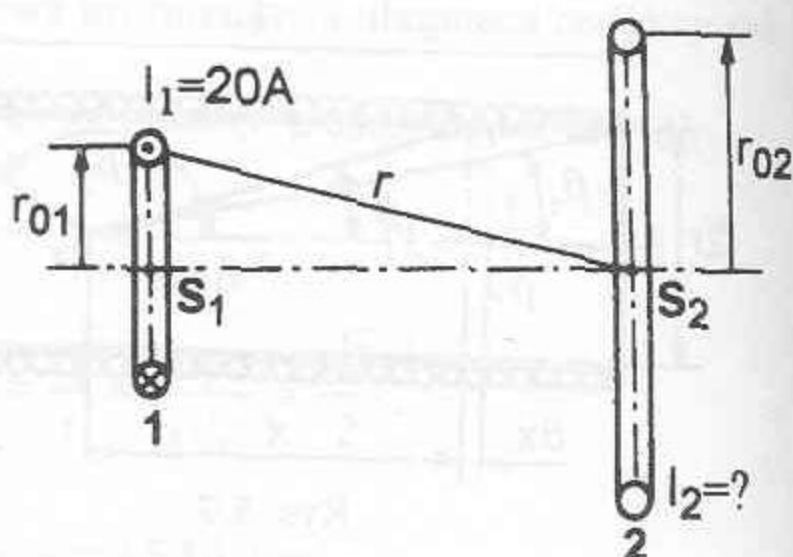
Obliczyć prąd  $I_2$  w zwoju kołowym drugim wiedząc, że natężenie pola magnetycznego w środku tego zwoju (punkt  $S_2$ ) wynosi  $0 \text{ A/m}$ ,  $I_1 = 20 \text{ A}$ ,  $r_{01} = 10 \text{ cm}$ ,  $r = 20 \text{ cm}$ ,  $r_{02} = 20 \text{ cm}$ . Zaznaczyć na rysunku 5.8 kierunek przepływu tego prądu.



**Rozwiązanie:** Korzystając z wyprowadzeń w poprzednim zadaniu można napisać wzory na składowe osiowe natężeń pól magnetycznych w punkcie  $S_2$ .

$H_1$  - moduł natężenia pola magnetycznego (składowej osiowej) zwoju pierwszego w punkcie  $S_2$ .

$H_2$  - moduł natężenia pola magnetycznego (składowej osiowej) zwoju drugiego w jego środku.



Rys. 5.8

$$H_1 = \frac{I_1 r_{01}^2}{2r^3}, \quad H_2 = \frac{I_2}{2r_{02}}, \quad H_1 - H_2 = 0, \quad \frac{I_2}{4r_{01}} = \frac{I_1 r_{01}^2}{2r^3},$$

$$I_2 = 2I_1 \frac{r_{01}^3}{r^3} = 40 \frac{1000}{8000} = 5A.$$

Sprawdzenie:

$$H_1 = \frac{20 \cdot 10^2}{2 \cdot 8000} = 0,125A/cm, \quad H_2 = \frac{5}{40} = 0,125A/cm.$$

**Odpowiedź:** Prąd w zwoju drugim  $I = 5A$ .

### Zadanie 5.13

Dwa pierścienie kołowe o średnicach  $d_1 = 20cm$  i  $d_2 = 25cm$  umieszczono w płaszczyznach prostopadłych do siebie w taki sposób, że ten sam punkt stanowi środek tych pierścieni. Prądy w obydwu przewodach są równe i wynoszą  $I = 30A$ . Obliczyć natężenie pola magnetycznego we wspólnym środku tych pierścieni.

**Odpowiedź:**  $H = I \sqrt{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}} = 192,1A/m.$

**Zadanie 5.14**

Obliczyć strumień magnetyczny  $\Phi$  przechodzący przez ramkę, a pochodzący od nieskończenie długiego przewodu z prądem, rysunek 5.9.

**Dane:**  $I = 10\text{A}$ ,  $a = 2\text{cm}$ ,  $b = 4\text{cm}$ ,  $c = 6\text{cm}$ ,  
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{H/m}$ .

Ramka i przewód położone są w tej samej płaszczyźnie i znajdują się w powietrzu.

**Rozwiązanie:** Według prawa przepływu Ampera indukcja magnetyczna (jej moduł) w punkcie odległym o  $x$  od osi przewodu wynosi:

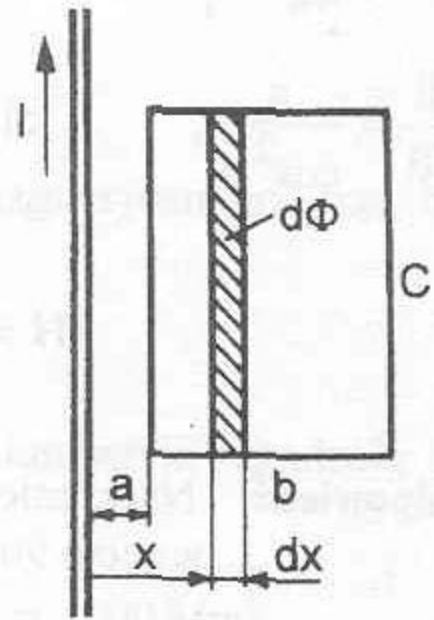
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \text{ natomiast elementarny strumień } d\Phi$$

w zakresowym pasku ramki  $d\Phi = BdS$ ,  $dS = cdx$ ,

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I c dx}{2\pi x}, \quad \Phi = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x}, \quad \Phi = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a},$$

$$\Phi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-1}}{2\pi} \ln 3 = 12 \cdot 10^{-8} \cdot 1,1 = 1,318 \text{ nWb}.$$

**Odpowiedź:** Strumień przechodzący przez prostokątną ramkę  
 $\Phi = 1,318 \text{ nWb}$ .



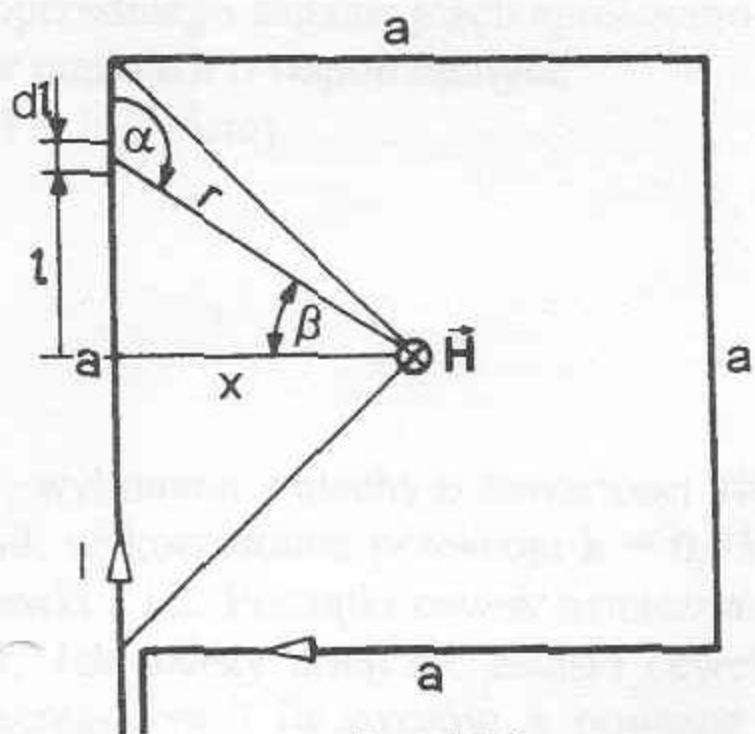
Rys. 5.9

**Zadanie 5.15**

Obliczyć moduł natężenia pola magnetycznego w środku kwadratowej ramki przez którą przepływa prąd  $I$  o natężeniu  $I = 100\text{A}$  rys. 5.10, długość boku ramki  $a = 1\text{m}$ .

Jak wynika z rysunku  $\alpha = \beta + \pi/2$ ,  
 $\sin \alpha = \cos \beta$ .

**Rozwiązanie:** Skalarny zapis prawa Biota i Savarta dla danego przypadku, gdy brany jest pod uwagę tylko lewy bok ramki:



Rys. 5.10

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{dl \cos\beta}{r^2}, \quad \frac{l}{x} = \operatorname{tg}\beta \quad \text{to} \quad l = x \operatorname{tg}\beta \quad \text{to} \quad l = x \frac{\sin\beta}{\cos\beta},$$

$$\frac{dl}{d\beta} = \frac{x}{\cos^2\beta}, \quad dl = \frac{x d\beta}{\cos^2\beta}, \quad r = \frac{x}{\cos\beta}, \quad dH = \frac{I}{4\pi x} \cos\beta d\beta,$$

$$H = \frac{2I}{\pi} \left[ \sin\beta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I = 90 \text{ A/m}.$$

**Odpowiedź:** Natężenie pola magnetycznego wewnątrz ramki w punkcie P wynosi 90 A/m.

### Zadanie 5.16

Obwód prostokątny o bokach  $a = 0,5 \text{ m}$  i  $b = 0,3 \text{ m}$  opływany jest przez prąd o natężeniu  $I = 10 \text{ A}$ . Jakie jest natężenie pola magnetycznego w środku tego prostokąta?

**Odpowiedź:**  $H = \frac{1}{\pi} I \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} = 12,37 \text{ A/m}.$



## 6. OBWODY MAGNETYCZNE

### Zadanie 6.1

Charakterystyka magnesowania materiału ferromagnetycznego ma być aproksymowana wyrażeniem:

$$H = \alpha B + \beta B^5,$$

Wyznaczyć współczynnik  $\alpha$  i  $\beta$  tak, aby obie charakterystyki zgadzały się przy wartościach indukcji

$$B = 0,6\text{T}(H = 295\text{A/m}) \quad \text{i} \quad B = 1,2\text{T}(H = 1000\text{A/m}).$$

Rozwiązanie:

0,6	0,6 <sup>5</sup>	=	295	W = 1,40,	W <sub>1</sub> = 656,29
1,2	1,2 <sup>5</sup>				

$\alpha$
$\beta$

1000	W <sub>2</sub> = 246,	$\alpha = 469,$	$\beta = 176$
------	-----------------------	-----------------	---------------

Odpowiedź:  $\alpha = 469,$   $\beta = 176.$

### Zadanie 6.2

Jak duże będą współczynniki  $\alpha$  i  $\beta$  z poprzedniego zadania jeżeli aproksymowana charakterystyka ma być zgodna w punktach o współrzędnych:

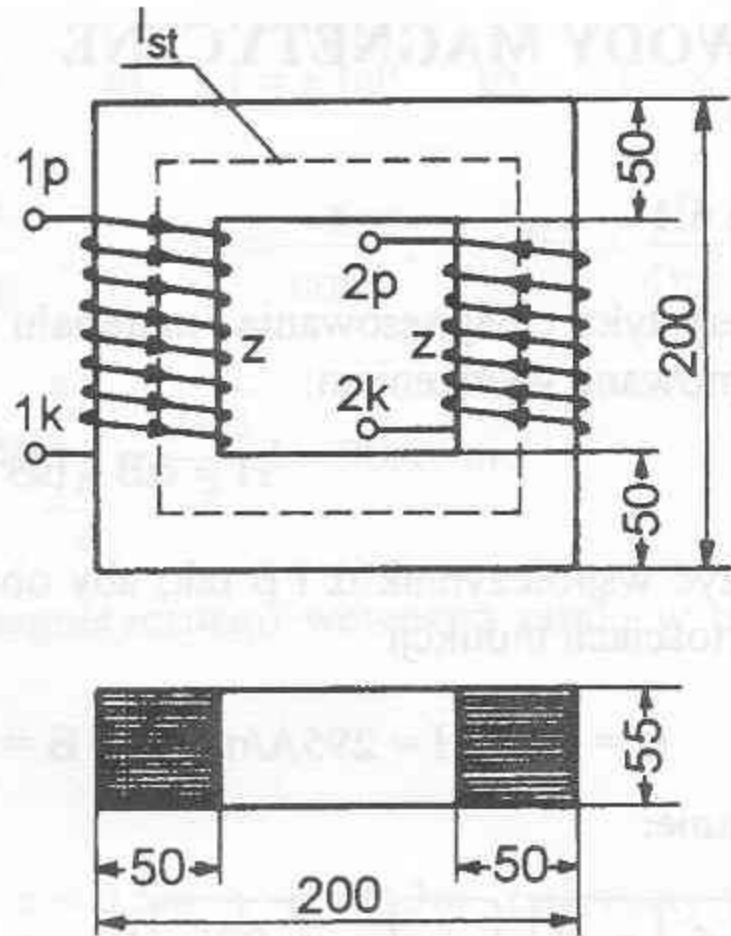
$$B = 0,8\text{T}(H = 410\text{A/m}) \quad \text{i} \quad B = 1,3\text{T}(H = 1300\text{A/m}).$$

Odpowiedź:  $\alpha = 431,6,$   $\beta = 199,6$

### Zadanie 6.3

Rdzeń o wymiarach jak na rysunku 6.1, wykonano z blachy o zawartości 4% Si i grubości  $d = 0,5\text{mm}$ . Współczynnik wykorzystania przekroju  $k = 0,91$ . Na rdzeń nawinięto dwie jednakowe cewki 1 i 2. Początki cewek oznaczono wskaźnikami p, końce wskaźnikami k. Jak należy połączyć zaciski cewek jeżeli mają one pracować w układzie szeregowym? Ile zwojów z powinna

mieć każda cewka, jeżeli prąd zasilający  $I = 0,5\text{A}$ , a wymagany strumień  $\Phi = 3 \cdot 10^{-3}\text{Wb}$ ? Fragment charakterystyki magnesiania blachy magnetycznej o czteroprocentowej zawartości krzemu i grubości  $0,5\text{mm}$  przedstawia poniższa tabela:



Rys. 6.1

B[T]	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
H[A/m]	50	60	80	100	140	190	280	400	700

$$a = 50\text{mm}, \quad b = 55\text{mm}$$

**Rozwiązanie:**

$$B_{st} = \frac{\Phi}{kab} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{0,91 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 55 \cdot 10^{-3}} = \frac{3 \cdot 10^3}{0,91 \cdot 50 \cdot 55} = 1,198 \approx 1,2\text{T}.$$

Z tabeli odczytujemy, że natężenie pola magnetycznego w rdzeniu dla takiej wartości indukcji  $H_{st} = 400\text{A/m}$ .

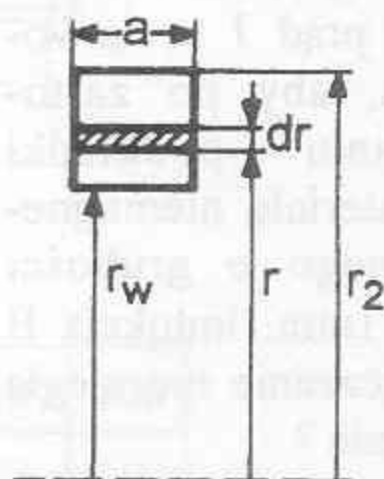
$$\Theta = H_{st}l_{st}, \quad \Theta = 400 \cdot 0,6 = 240\text{A}, \quad \Theta = 2zI \quad \text{to} \quad z = \frac{\Theta}{2I} = 240.$$

**Odpowiedź:** Należy połączyć ze sobą oba początki lub oba końce uzwojenia, a pozostałe zaciski ze źródłem napięcia,  $z = 240$ .

**Zadanie 6.4**

Na rdzeń pierścieniowy o przekroju prostokątnym, wykonany z blachy o promieniu wewnętrznym  $r_w = 8\text{cm}$  i promieniu zewnętrznym  $r_z = 12\text{cm}$ , w formie pakietu o grubości  $a = 5\text{cm}$ , rysunek 6.2, nawinięto  $z = 600$  zwojów. Współczynnik wykorzystania przekroju  $k = 0,92$ . Przenikalność względna materiału rdzenia  $\mu_r = 3000$ . Obliczyć strumień magnetyczny w rdzeniu dla prądu  $I = 1\text{A}$  dwoma sposobami:

- metodą przybliżoną posługując się średnią wartością natężenia pola magnetycznego w rdzeniu,
- metodą dokładną uwzględniającą nierównomierność natężenia pola w przekroju rdzenia.



Rys. 6.2

**Rozwiązanie:**

$$\text{a) } \Phi = BS, \quad S = a(r_z - r_w)k, \quad B = \mu_r \mu_0 H, \quad H = \frac{Iz}{l}$$

$$l = \pi(r_w + r_z), \quad H = \frac{Iz}{\pi(r_w + r_z)}, \quad B = \frac{\mu_r \mu_0 Iz}{\pi(r_w + r_z)}$$

$$\Phi = k \frac{\mu_r \mu_0 Iza(r_z - r_w)}{\pi(r_w + r_z)}, \quad \text{po wstawieniu danych}$$

$$\Phi = 0,92 \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 600 \cdot 5 \cdot 10^{-2} (12 - 8) \cdot 10^{-2}}{\pi(8 + 12) \cdot 10^{-2}} = 6,624\text{mWb}.$$

$$\text{b) } B = \frac{\mu_r \mu_0 Iz}{2\pi r}, \quad d\Phi = BdS, \quad dS = adr, \quad \Phi = k \frac{\mu_r \mu_0 Iza}{2\pi} \ln \frac{r_z}{r_w}$$

$$\Phi = 0,92 \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 600 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2\pi} \ln \frac{12}{8} = 6,715\text{mWb}.$$

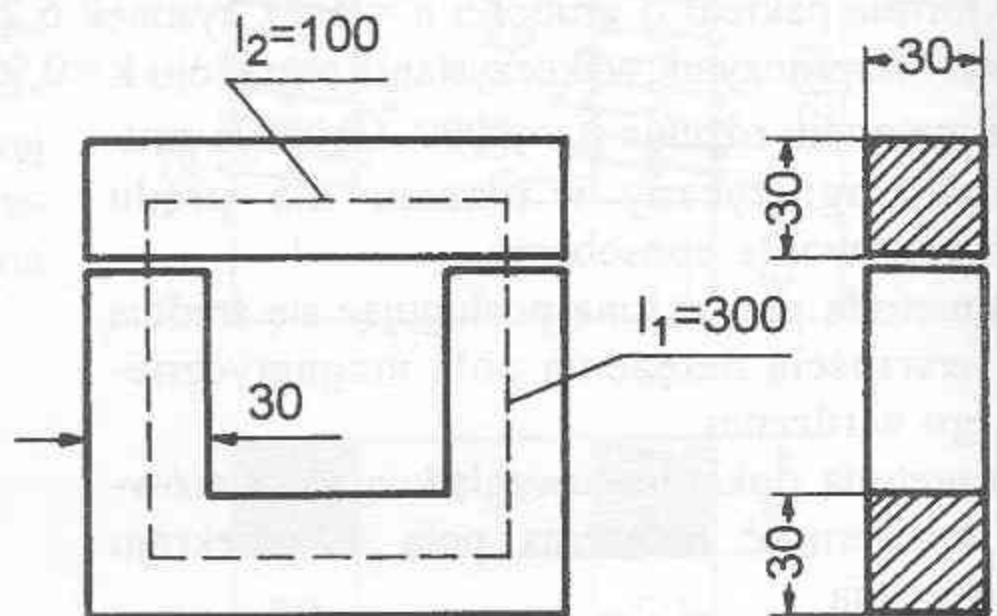
**Odpowiedź:** a)  $\Phi = 6,624\text{mWb}$ , b)  $\Phi = 6,715\text{mWb}$ , różnice są mniejsze niż 2%.

**Zadanie 6.5**

W rdzeniu wykonanym ze staliwa (o wymiarach podanych na rysunku 6.3) indukcja magnetyczna przy przylegającej zworze (szczelina stykowa  $\delta = 0,05\text{mm}$ )

$$B = 1\text{T} (H = 800\text{A/m}).$$

Ile razy trzeba zwiększyć prąd  $I$  w uzwojeniu, aby po zastosowaniu podkładki z materiału niemagnetycznego o grubości  $\delta_1 = 1\text{mm}$ , indukcja  $B$  w szczelinie nie uległa zmianie?



Rys. 6.3

**Rozwiązanie:**

$$H_{st} = 800\text{A/m}, \quad H_p = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 8 \cdot 10^5\text{A/m}.$$

W obydwu przypadkach ważne są prawa przepływu.

$$I_1 z = H_{st} l_{st} + 2\delta_1 H_p, \quad I_2 z = H_{st} l_{st} + 2\delta H_p,$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{320 + 1600}{320 + 80} = \frac{1920}{400} = 4,8.$$

**Odpowiedź:** 4,8 razy.

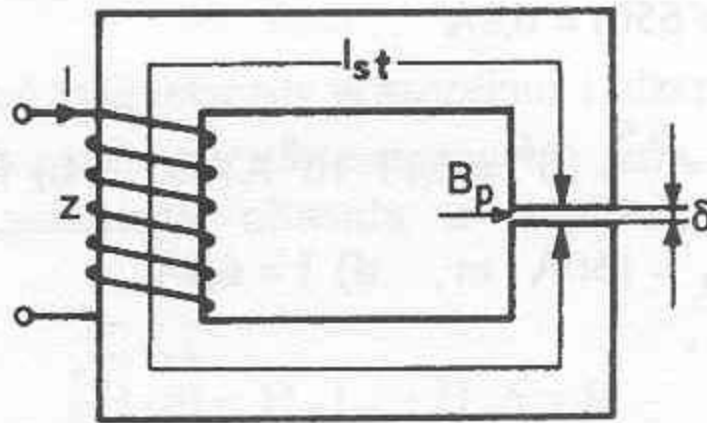
**Zadanie 6.6**

Rysunek 6.4 przedstawia prosty obwód magnetyczny (jednooczkowy). Przekrój rdzenia  $S$  jest jednakowy na całej długości a jego średnia długość wynosi  $l_{st}$ . Nieliniowa charakterystyka magnesowania przedstawiona jest w tabeli.

**Dane:**  $\delta = 0,4 \cdot \pi\text{mm}$ ,  $l_{st} = 20\text{cm}$ ,  $z = 100$ ,  $B_p = 0,65 \frac{V_s}{\text{m}^2}$ ,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{H/m}.$$

W szczelinie powietrznej panuje indukcja  $B_p$ . Należy przyjąć że strumień w szczelinie nie ulega rozproszeniu



Rys. 6.4

H[A/m]	50	100	150	200	250	300
B[T]	0,25	0,50	0,65	0,76	0,85	0,93

- Obliczyć:**
- Natężenie pola magnetycznego  $H_p$  w szczelinie powietrznej,
  - Indukcję magnetyczną w rdzeniu  $B_{st}$ ,
  - Natężenie pola magnetycznego w rdzeniu,
  - Prąd  $I$  płynący przez uzwojenie.

**Rozwiązanie:**

Natężenie pola magnetycznego w szczelinie powietrznej

$$H_p = \frac{B_p}{\mu_0} = \frac{0,65}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 5,17 \cdot 10^5 \text{ A/m} = \frac{6,5}{4\pi} \cdot 10^6 \text{ A/m}.$$

Ponieważ nie występuje strumień rozproszenia indukcja magnetyczna w rdzeniu  $B_{st} = B_p = 0,65\text{T}$ . Z tabeli odczytujemy, że dla takiej indukcji magnetycznej natężenie pola magnetycznego w stali wynosi  $H_{st} = 150\text{A/m}$ . W celu obliczenia prądu  $I$  w uzwojeniu wykorzystuje się prawo przepływu

$$\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = Iz.$$

Przy założeniu niezmienności natężeń pola magnetycznego w rdzeniu i w szczelinie, równanie powyższe przyjmuje postać  $H_{st}l_{st} + H_p\delta = Iz$



$$I = \frac{1}{z} (H_{st} l_{st} + H_p \delta) = \frac{1}{100} \left( 150 \cdot 0,2 + \frac{6,5}{4\pi} \cdot 10^6 \cdot 0,4\pi \cdot 10^{-3} \right) =$$

$$= \frac{1}{100} (30 + 650) = 6,8 \text{ A}$$

Odpowiedź: a)  $H_p = \frac{6,5}{4\pi} \cdot 10^6 = 5,17 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ , b)  $B_{st} = 0,65 \text{ T}$ ,  
c)  $H_{st} = 150 \text{ A/m}$ , d)  $I = 6,8 \text{ A}$ .

### Zadanie 6.7

Przez uzwojenie nawinięte na rdzeniu o wymiarach jak w poprzednim zadaniu przepływa prąd  $I = 5,2 \text{ A}$ . Liczba zwojów nie uległa zmianie. Obliczyć wartości indukcji magnetycznej i natężenia pola magnetycznego w rdzeniu i w szczelinie powietrznej.

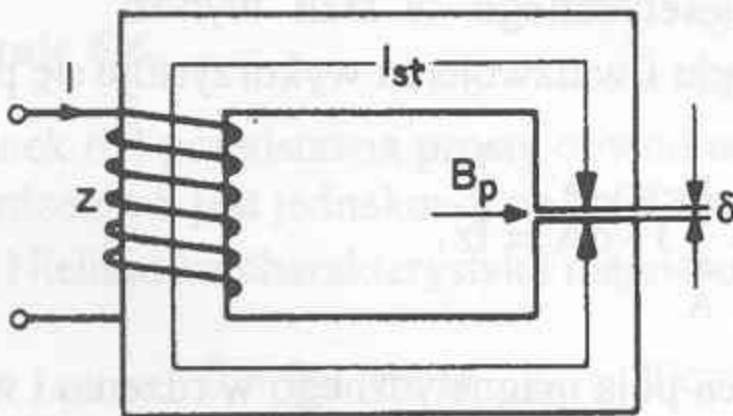
Odpowiedź:  $B_{st} = B_p = 0,5 \text{ T}$ ,  $H_{st} = 100 \text{ A/m}$ ,  $H_p = \frac{5 \cdot 10^6}{4\pi} = 3,98 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ .

### Zadanie 6.8

Rysunek 6.5 przedstawia jednooczkowy obwód magnetyczny ze szczeliną powietrzną. Przekrój rdzenia stalowego jest jednakowy na całej swej długości. Długość drogi magnetycznej w rdzeniu wynosi  $l_{st}$ . Charakterystykę magnesowania rdzenia przedstawiono w tabeli.

Dane:  $\delta = 0,4 \cdot \pi \text{ mm}$ ,  $l_{st} = 20 \text{ cm}$ ,  $S = 400 \text{ mm}^2$ ,  $z = 100$ ,  $I = 8 \text{ A}$

$$i \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$



Rys. 6.5

W szczelinie powietrznej nie występuje rozproszenie strumienia magnetycznego.

Obliczyć strumień magnetyczny w rdzeniu.

H[A/m]	100	150	200	250
B[T]	0,50	0,65	0,76	0,85

**Rozwiązanie:** Strumień magnetyczny w szczelinie i rdzeniu dany jest wzorem  $\Phi = B_p S = B_{st} S$ . Związek między natężeniem pola magnetycznego w poszczególnych fragmentach obwodu a prądem przedstawia prawo przepływu.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{st} l_{st} + H_p \delta = I z.$$

Wyrażając natężenie pola magnetycznego przez indukcję magnetyczną otrzymuje się

$$I z = H_{st} l_{st} + \frac{B_p}{\mu_0} \delta = H_{st} l_{st} + \frac{B_{st}}{\mu_0} \delta,$$

ponieważ indukcja w rdzeniu jest identyczna jak w szczelinie

$$B_{st} = \frac{\mu_0}{\delta} (I z - H_{st} l_{st}).$$

Gdyby istniała graficzna zależność B od H dla stali to zadanie można by rozwiązać graficznie. W innym przypadku należy podstawić do powyższego wzoru kolejne wartości  $H_{st}$  z tabeli i porównywać z wartościami  $B_{st}$ .

$$B_{st} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{0,4 \cdot \pi \cdot 10^{-3}} (800 - H_{st} \cdot 0,2) = 10^{-3} (800 - H_{st} \cdot 0,2),$$

$$B_{st} = (0,8 - H_{st} \cdot 2 \cdot 10^{-5}) \text{T}.$$

Wstawiając wartości natężeń pola magnetycznego z poprzedniej tabeli do powyższego wzoru otrzymuje się

H[A/m]	100	150	200	250
B[T]	0,50	0,65	0,76	0,85
$\frac{\mu_0}{\delta} \cdot H_{st} \cdot l_{st}$	0,02	0,03	0,04	0,05
B <sub>st</sub> [T]	0,78	0,77	0,76	0,75

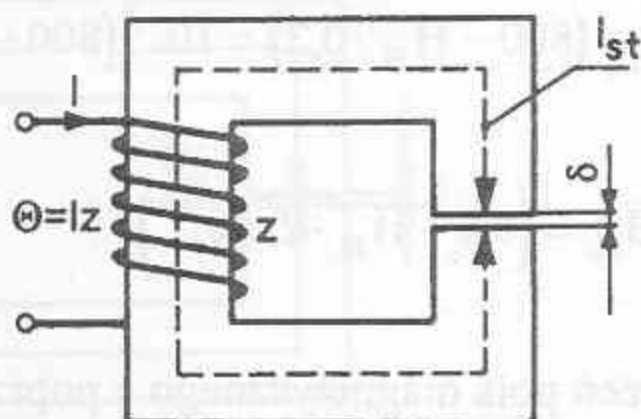
Dla trzeciej kolumny indukcja magnetyczna z charakterystyki magnesowania zgadza się z obliczoną. W rdzeniu stalowym i w szczelinie powietrznej panuje więc indukcja magnetyczna  $B = 0,76\text{T}$ . Wyznaczony strumień magnetyczny  $\Phi = B \cdot S = 0,76 \cdot 400 \cdot 10^{-6} = 3,04 \cdot 10^{-4}\text{Wb}$ .

**Odpowiedź:** Strumień magnetyczny w rdzeniu i w szczelinie powietrznej wynosi  $3,04 \cdot 10^{-4}\text{Wb}$ .

### Zadanie 6.9

W szczelinie powietrznej elektromagnesu z rysunku 6.6 wymagana jest indukcja  $B = 1\text{T}$ . Obliczyć przepływ potrzebny do wytworzenia takiej indukcji, jeżeli  $l_{st} = 1\text{m}$ ,  $\delta = 1\text{mm}$ . Charakterystykę magnesowania zestawiono w tabeli

B[T]	0,05	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
H[A/m]	70	136	165	200	245	295	350	410	495	600
B[T]	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,85	
H[A/m]	755	1000	1300	1820	2500	4000	6500	10000	12000	



Rys. 6.6

**Odpowiedź:**  $\Theta \approx 1396\text{A}$

**Zadanie 6.10**

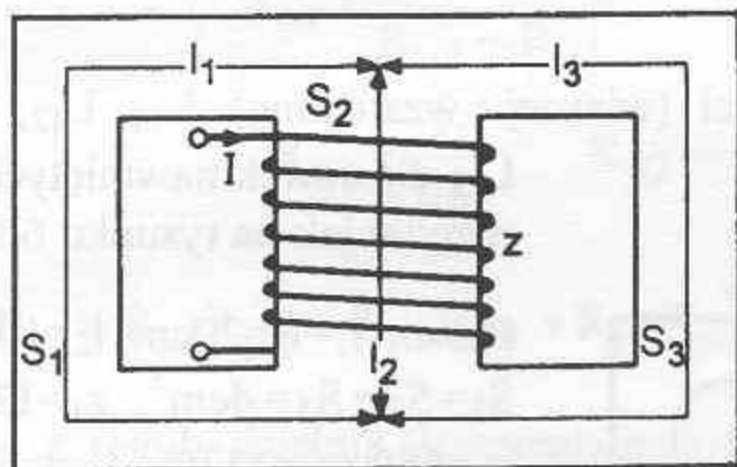
Obliczyć strumień magnetyczny dla rdzenia o wymiarach jak w zadaniu 6.9 przy założeniu, że przekrój rdzenia  $S = 16\text{cm}^2$ , ilość zwojów  $z = 300$ , a prąd uzwojenia  $I = 9,78\text{A}$

**Odpowiedź:**  $\Phi = 224 \cdot 10^{-5}\text{Wb}$ .

**Zadanie 6.11**

Obliczyć indukcyjność statyczną cewki z rdzeniem ferromagnetycznym przy prądzie cewki, odpowiednio:

a)  $I = 0,35\text{A}$ , b)  $I = 4\text{A}$ ,  
c)  $I = 10\text{A}$ . Liczba zwojów cewki  $z = 1000$ . Rdzeń cewki wykonano ze stali o charakterystyce jaką podano w zadaniu 6.9. Wymiary rdzenia pokazanego na rys. 6.7 wynoszą:  $l_1 = l_3 = 70\text{cm}$ ,  $l_2 = 30\text{cm}$ ,  $S_1 = S_3 = 32\text{cm}^2$  a  $S_2 = 64\text{cm}^2$ . Ponieważ rdzeń



Rys. 6.7

środkowej kolumny, to można go zastąpić rdzeniem jednooczkowym o długości  $l = l_1 + l_2 = 1\text{m}$  i przekroju  $S = S_2 = 64\text{cm}^2$

**Rozwiązanie:**

$$\text{a) } \Theta = Iz = 350\text{A}, \quad H = \frac{\Theta}{l} = 350\text{A/m}, \quad B = 0,7\text{T},$$

$$\Phi = BS = 0,7 \cdot 64 \cdot 10^{-4} = 44,8 \cdot 10^{-4}\text{Wb},$$

$$L = \frac{z\Phi}{I} = \frac{44,8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{0,35} = 12,8\text{H}.$$

$$\text{b) } \Theta = Iz = 4000, \quad H = \frac{\Theta}{l} = 4000\text{A/m}, \quad B = 1,6\text{T},$$

$$\Phi = BS = 1,6 \cdot 64 \cdot 10^{-4} = 102,4 \cdot 10^{-4}\text{Wb},$$

$$L = \frac{z\Phi}{I} = \frac{102,4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{4} = 2,56\text{H}.$$

$$\text{c) } \Theta = Iz = 10000\text{A}, \quad H = \frac{\Theta}{l} = 10000\text{A/m}, \quad B = 1,8\text{T},$$

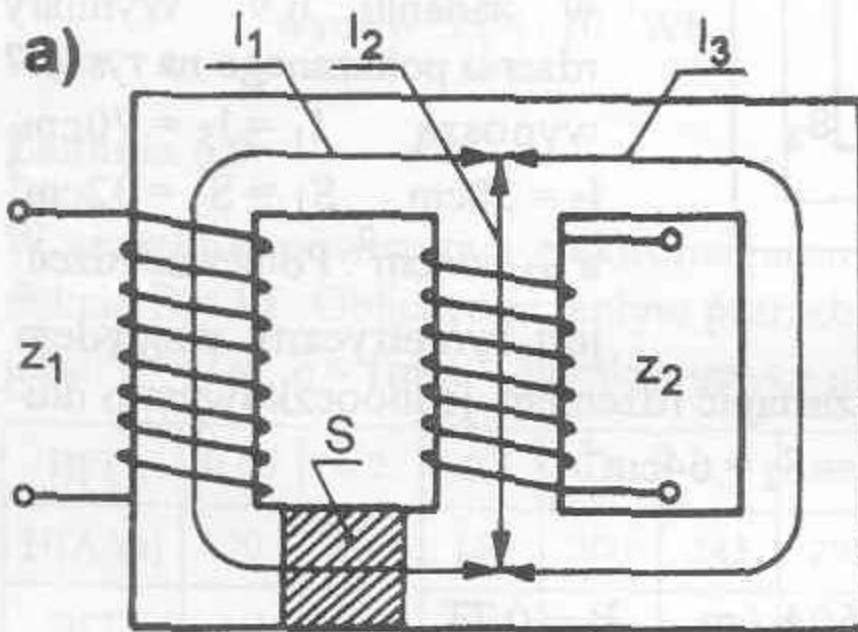
$$\Phi = BS = 1,8 \cdot 64 \cdot 10^{-4} = 115,2 \cdot 10^{-4}\text{Wb},$$

$$L = \frac{z\Phi}{I} = \frac{115,2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{10} = 1,152\text{H}.$$

**Odpowiedź:** a)  $L = 12,8\text{H}$ , b)  $L = 2,56\text{H}$ , c)  $L = 1,152\text{H}$ .

### Zadanie 6.12

Obliczyć współczynniki indukcyjności (własnej i wzajemnej)  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{21}$ ,  $L_{22}$  dla cewek nawiniętych na rdzeniu jak na rysunku 6.8a.



Rys. 6.8a

**Dane:**  $l_1 = l_3 = 20\text{cm}$ ,  $l_2 = 10\text{cm}$ ,  
 $S_1 = S_2 = S_3 = 4\text{cm}^2$ ,  $z_1 = 1200$ ,  
 $z_2 = 800$ ,  $\mu_r = 1330$ .

**Rozwiązanie:**

$$L_{11} = \left( \frac{\Psi_1}{i_1} \right)_{i_2=0} = \frac{z_1 \Phi_1}{i_1},$$

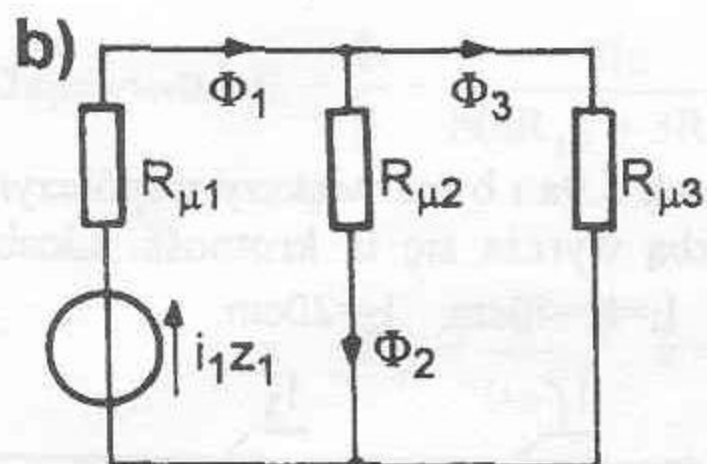
$$L_{12} = \left( \frac{\Psi_2}{i_1} \right)_{i_2=0} = \frac{z_2 \Phi_2}{i_1},$$

$$L_{21} = \left( \frac{\Psi_1}{i_2} \right)_{i_1=0} = \frac{z_1 \Phi_1}{i_2},$$

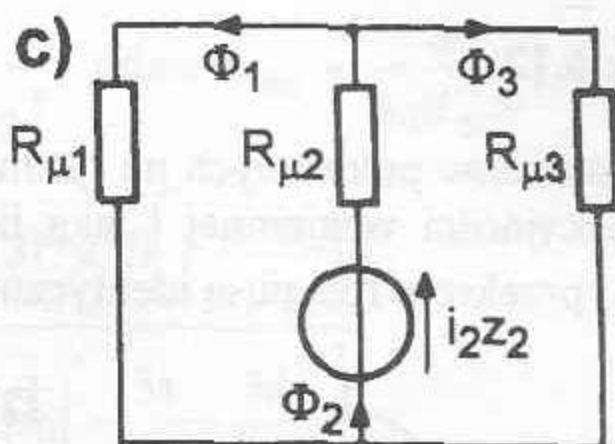
$$L_{22} = \left( \frac{\Psi_2}{i_2} \right)_{i_1=0} = \frac{z_2 \Phi_2}{i_2}.$$

Do obliczenia odpowiednich strumieni pomocne będą rysunki 6.8 b i c, gdzie zasilane są poszczególne uzwojenia z osobna.

Do obliczenia indukcyjności  $L_{11}$  i  $L_{12}$  zostanie wykorzystany schemat 6.8b, a do obliczenia indukcyjności  $L_{21}$  i  $L_{22}$  schemat 6.8c. Obliczanie  $L_{11}$  i  $L_{12}$ :



Rys. 6.8b



Rys. 6.8c

$$\Phi_1 = \frac{i_1 z_1}{R_{\mu 1} + \frac{R_{\mu 2} \cdot R_{\mu 3}}{R_{\mu 2} + R_{\mu 3}}} = \frac{i_1 z_1 (R_{\mu 2} + R_{\mu 3})}{R_{\mu 1} R_{\mu 2} + R_{\mu 2} R_{\mu 3} + R_{\mu 3} R_{\mu 1}},$$

$$R_{\mu 1} = \frac{l_1}{\mu S_1}, \quad R_{\mu 2} = \frac{l_2}{\mu S_2}, \quad R_{\mu 3} = \frac{l_3}{\mu S_3},$$

$$R_{\mu} = R_{\mu 1} R_{\mu 2} + R_{\mu 2} R_{\mu 3} + R_{\mu 3} R_{\mu 1}, \quad L_{11} = \frac{z_1 \Phi_1}{i_1} = \frac{z_1^2 (R_{\mu 2} + R_{\mu 3})}{R_{\mu}},$$

$\Phi_2$  z reguły dzielnik strumienia magnetycznego

$$\Phi_2 = \Phi_1 \frac{R_{\mu 3}}{R_{\mu 2} + R_{\mu 3}} = \frac{z_1 i_1 R_{\mu 3}}{R_{\mu}}, \quad L_{12} = \frac{z_2 \Phi_2}{i_1} = \frac{z_1 z_2 R_{\mu 3}}{R_{\mu}}.$$

Obliczanie  $L_{21}$  i  $L_{22}$

$$\Phi_2 = \frac{i_2 z_2}{R_{\mu 2} + \frac{R_{\mu 3} R_{\mu 1}}{R_{\mu 3} + R_{\mu 1}}} = \frac{i_2 z_2 (R_{\mu 3} + R_{\mu 1})}{R_{\mu 1} R_{\mu 2} + R_{\mu 2} R_{\mu 3} + R_{\mu 3} R_{\mu 1}},$$

$$\Phi_1 = \frac{i_2 z_2 (R_{\mu 3} + R_{\mu 1})}{R_{\mu}} \frac{R_{\mu 3}}{R_{\mu 3} + R_{\mu 1}} = \frac{i_2 z_2 R_{\mu 3}}{R_{\mu}},$$

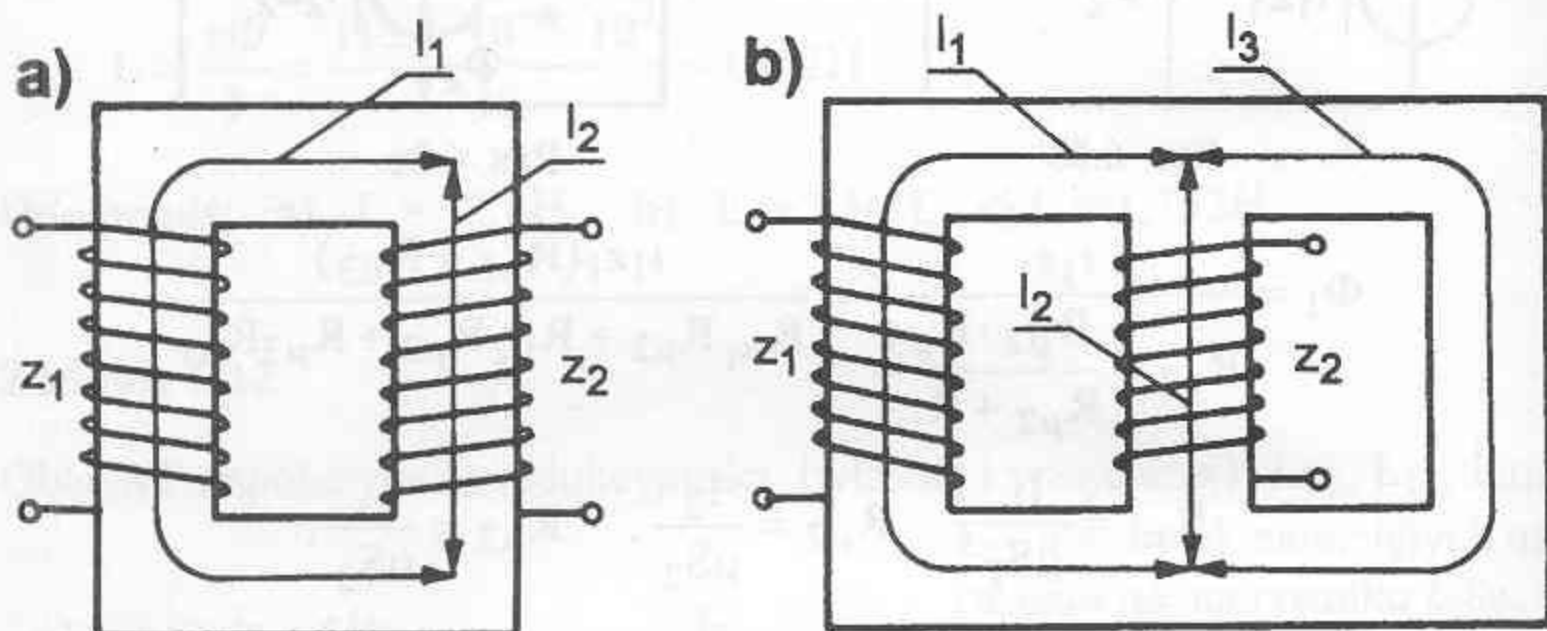
$$L_{21} = \frac{z_1 \Phi_1}{i_2} = \frac{z_1 z_2 R_{\mu 3}}{R_{\mu}} = L_{12}, \quad L_{22} = \frac{z_2 \Phi_2}{i_2} = \frac{z_2^2 (R_{\mu 1} + R_{\mu 3})}{R_{\mu}},$$

Po wstawieniu danych uzyskuje się  $L_{11}=3,6\text{H}$ ,  $L_{12}=L_{21}=1,6\text{H}$ ,  $L_{22}=2,13\text{H}$ .

**Odpowiedź:**  $L_{11}=3,6\text{H}$ ,  $L_{12}=L_{21}=1,6\text{H}$ ,  $L_{22}=2,13\text{H}$ .

**Zadanie 6.13**

Który z układów pokazanych na rysunkach 6.9a i b ma większy współczynnik indukcyjności wzajemnej i jaką liczbą wyraża się ta krotność. Liczby zwojów i przekroje rdzeni są identyczne  $l_1=l_3=40\text{cm}$ ,  $l_2=20\text{cm}$ .

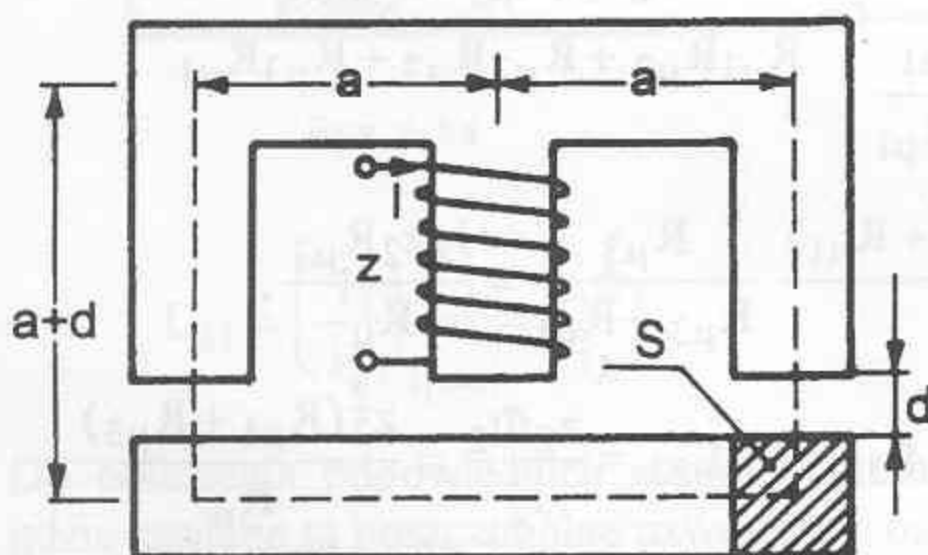


Rys.6.9

**Odpowiedź:** Układ z rysunku a) 1,33 razy.

**Zadanie 6.14**

Przedstawiony na rysunku 6.10 elektromagnes posiada rdzeń o jednakowych przekrojach w każdym jego miejscu. Przenikalność względna żelaza  $\mu_{rz} \gg 1$ . Dane są wszystkie wymiary. Wyprowadzić zależności na:



- indukcję magnetyczną w środkowej szczelinie,
- siłę przyciągania belki dolnej.

Rys.6.10. Chwytnik elektromagnetyczny

Odpowiedź:  $B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2Iz}{S(5R_{\mu z} + 3R_{\mu p})}$ , gdzie  $R_{\mu z} = \frac{a}{\mu_0 \mu_{rz} S}$ ,

$$a \quad R_p = \frac{d}{\mu_0 S}, \quad F = \frac{3I^2 z^2 S \left(1 - \frac{1}{\mu_{rz}}\right)}{\mu_0 \left(\frac{5a}{\mu_0 \mu_{rz}} + \frac{3d}{\mu_0}\right)^2}.$$



## DODATEK

### ALGORYTMY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH OPISUJĄCYCH LINIOWE OBWODY ELEKTRYCZNE

W przeważającej liczbie zadań zamieszczonych w skrypcie występują zagadnienia związane z rozwiązywaniem liniowego algebraicznego układu równań.

Problem ten jest prosty jeżeli obliczający dysponuje układem o postaci  $Ax = b$ , do rozwiązywania którego istnieje duża liczba algorytmów uwzględniających przede wszystkim charakter macierzy  $A$ . Przy nauczaniu podstaw elektrotechniki w zakresie teorii obwodów wystarczy rozróżnić dwa przypadki. Stosując metodę potencjałów węzłowych lub prądów oczkowych dla obwodów i sieci zawierających źródła napięcia i prądu o stałych wartościach otrzymujemy symetryczną macierz współczynników  $a_{ik} = a_{ki}$ . Natomiast dla obwodów ze źródłami sterowanymi stosując w/w metody otrzymuje się niesymetryczną macierz  $A$ . Macierz ta jest również niesymetryczna niezależnie od charakteru wymuszeń przy stosowaniu praw Kirchhoffa. W celu optymalizacji czasu obliczeń dla większych układów równań (zazwyczaj wygenerowanych przez inny program) dobrze jest posiadać w bibliotece programów dwa oddzielne podprogramy ułożone według wspomnianego kryterium.

Dla niesymetrycznej macierzy  $A$  można stosować algorytm Gaussa-Jordana. Jego zalety są powszechnie znane. Natomiast dla układu opisanego macierzą symetryczną algorytm Choleskego. Polega on na zastąpieniu macierzy  $A$  iloczynem macierzy trójkątnych  $A = C^T C$  i podstawieniu  $b = C^T c$   $C^T C x = C^T c$  i ostatecznie  $Cx = c$ . Sposób wyznaczania elementów  $c$  wynika wprost z reguły mnożenia macierzy.

Poniżej podane zostaną listy procedur Gaussa-Jordana i Choleskego. Napisane są one w języku BASIK i mogą być łatwo „przetłumaczone” na używane obecnie języki programowania TURBO PASCAL, FORTRAN czy C. Na pewno będą one dużym ułatwieniem, przy obliczeniach zadań nie tylko z tego skryptu.

## PROCEDURA GAUSSA-JORDANA

```

10 REM: Program „Gauss” do rozwiązywania liniowego
20 REM układu równań algebraicznych rzędu n
30 REM z niesymetryczną macierzą współczynników
40 INPUT "rząd układu równań=";n
50 DIM a(n,n+1)
60 PRINT "wprowadzenie rozszerzonej macierzy współczynników-
wierszami"
70 FOR k=1 TO n
80 FOR i=1 TO n+1
90 INPUT a(k,i)
100 NEXT i
110 NEXT k
120 GOSUB 1000
130 REM: wydruk wyników
140 PRINT "wektor wyników x(i):"
150 FOR i=1 TO n
160 PRINT "x(";i;")=";a(i,n+1)
170 NEXT i
180 END
1000 REM: Procedura Gaussa-Jordana
1010 REM: test czy a(k,k) nierówne zero
1020 FOR k=1 TO n
1030 FOR i=k TO n
1040 IF a(i,k) <> 0 THEN GOTO 1090
1050 NEXT i
1060 PRINT "brak rozwiązania-sprawdzić macierz współczynników !"
1070 GOTO 180
1080 REM: zamiana wierszy jeżeli a(k,k)=0
1090 FOR j=1 TO n+1
1100 s=a(k,j)
1110 a(k,j)=a(i,j)
1120 a(i,j)=s
1130 NEXT j
1140 REM: tworzenie równania eliminacyjnego
1150 t=1/a(k,k)
1160 FOR j=1 TO n+1

```

```

1170 a(k,j)=t*a(k,j)
1180 NEXT j
1190 REM: odejmowanie równania eliminacyjnego
1200 REM: od pozostałych równań
1210 FOR i=1 TO n
1220 IF i=k THEN GOTO 1270
1230 t=a(i,k)
1240 FOR j=1 TO n+1
1250 a(i,j)=a(i,j)-t*a(k,j)
1260 NEXT j
1270 NEXT i
1280 NEXT k
1290 RETURN

```

**PROCEDURA CHOLESKEGO**

```

10 REM: Program "Cholesky" do rozwiązywania liniowego
20 REM układu równań algebraicznych rzędu k
30 REM z symetryczną macierzą współczynników
40 INPUT "rząd układu równań=";k
50 DIM m(k,k+1), w(k)
60 PRINT "wprowadzenie rozszerzonej górnej macierzy";
65 PRINT "trójkątnej-wierszami"
70 FOR i=1 TO k
80 FOR j=1 TO k+1
90 INPUT m(i,j)
100 IF j<=k THEN LET m(j,i)=m(i,j)
110 NEXT j
120 NEXT i
130 GOSUB 2000
140 PRINT "wektor wyników :";
150 FOR i=1 TO k
160 PRINT "w(";i;")=";w(i)
170 NEXT i
180 END
2000 REM: Procedura Choleskego
2010 FOR i=1 TO k
2020 w(i)=0
2030 NEXT i
2040 FOR i=1 TO k
2050 w(i)=1
2060 s=m(i,i)
2070 FOR j=1 TO i-1
2080 IF w(j)=0 THEN s=s+m(j,i)*m(j,i)
2090 IF w(j)=1 THEN s=s-m(j,i)*m(j,i)
2100 NEXT j
2110 IF s>=0 THEN GOTO 2140
2120 s=-s
2130 w(i)=0
2140 IF s<1E-15 THEN PRINT "macierz współczynników singularna"
2150 m(i,i)=SQR(s)
2160 FOR l=i+1 TO k+1

```

```

2170 s=m(i,l)
2180 FOR j=1 TO i-1
2190 IF w(j)=0 THEN s=s+m(j,i)*m(j,l)
2200 IF w(j)=1 THEN s=s-m(j,i)*m(j,l)
2210 NEXT j
2220 IF w(i)=0 THEN s=-s
2230 m(i,l)=s/m(i,i)
2240 NEXT l
2250 NEXT i
2260 FOR i=1 TO k
2270 w(i)=0
2280 NEXT i
2290 FOR i=k TO 1 STEP -1
2300 s=m(i,k+1)
2310 FOR j=i+1 TO k
2320 s=s-w(j)*m(i,j)
2330 NEXT j
2340 w(i)=s/m(i,i)
2350 NEXT i
2360 RETURN

```

## LITERATURA

- [1] Cichowska Z., Pasko M., Litwinowicz E.: Przykłady i zadania z elektrotechniki teoretycznej Część I. Obwody rezystancyjne i obwody z kondensatorami. Politechnika Śląska Skrypty Uczelniane, nr 1823, Gliwice 1993.
- [2] Claussnitzer H.: Einführung in die Elektrotechnik 7. Durchgesehene Auflage VEB Verlag Technik, Berlin 1980.
- [3] Gorzkowski W.: Zadania z fizyki z całego świata z rozwiązaniami (20 lat Międzynarodowych Olimpiad Fizycznych) Wydanie I Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994.
- [4] Grafe u.a., Grundlagen der Elektrotechnik, Band 1 Gleichspannungstechnik 13, durchgesehene Auflage, VEB Verlag Technik, Berlin 1988.
- [5] Jeżewski M.: Fizyka (podręcznik dla wyższych szkół technicznych). Wydanie drugie poprawione, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970.
- [6] Kurdziel R.: Podstawy elektrotechniki. Wydanie II całkowicie zmienione. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1972.
- [7] Mattes H.: Übungskurs Elektrotechnik 1. Felder und Gleichstromnetze Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1992.
- [8] Mikołajuk K., Trzaska Z.: Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1973.
- [9] Oswald B., Schubert P., Bunzel E., Kunckel K.-H., Münch U., Paulig E.: Lösung linearer Gleichungssysteme am Beispiel einfacher Netzwerke ELEKTRIE, Berlin 39(1985)6 s.229÷232.
- [10] Philippow E.: Grundlagen der Elektrotechnik. 8 bearbeitete Auflage VEB Verlag Technik, Berlin 1988.
- [11] Poradnik Inżyniera Elektryka tom 1. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne Warszawa 1994.
- [12] Przytułski A.: Algorytmy rozwiązywania układów równań algebraicznych opisujących liniowe obwody elektryczne. Materiały XI Międzynarodowej Konferencji Naukowej PROBLEMY KSZTAŁCENIA I DOSKONALENIA NAUCZYCIELI TECHNIKI, Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Powstańców Śląskich w Opolu, Opole-Głuchoczołazy, 3÷4 czerwca 1993, (abstrakt str.47).