

**ROZKŁADY  
PRAWDOPODOBIENSTWA  
W OCENIE SUSZY  
HYDROLOGICZNEJ**



**WOJCIECH JAKUBOWSKI**

**ROZKŁADY  
PRAWDOPODOBIENSTWA  
W OCENIE SUSZY  
HYDROLOGICZNEJ**

**WROCŁAW 2011** 

*Opiniodawca*

dr hab. inż. Stanisław Węglarczyk, prof. nadzw.

*Redaktor merytoryczny*

dr hab. inż. Krzysztof Pulikowski, prof. nadzw.

*Opracowanie redakcyjne i korekty*

Ewa Jaworska

Magdalena Kozińska

*Łamanie*

Wojciech Jakubowski

*Projekt okładki*

Stanisław Rogowski

Monografie CXVI

© Copyright by Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu,  
Wrocław 2011

ISSN 2083-5531

ISBN 978-83-7717-080-9

**WYDAWNICTWO UNIwersYTETU PRZYRODnicZEGO WE WROCLAWIU**

**Redaktor Naczelny – prof. dr hab. Andrzej Kotecki**

**ul. Sopotka 23, 50-344 Wrocław, tel. 71 328-12-77**

**e-mail: wyd@up.wroc.pl**

---

Nakład 100 + 16 egz. Ark. wyd. 10,5. Ark. druk. 11,25

Druk i oprawa: F.P.H. „ELMA”

## SPIS TREŚCI

<b>1. Wprowadzenie</b>	7
<b>2. Cel i zakres pracy oraz metodyka badań</b>	12
<b>3. Definicje niżówki</b>	15
<b>4. Dane źródłowe</b>	24
<b>5. Jednowymiarowe rozkłady charakterystyk niżówek maksymalnych</b>	33
5.1. Model Zelenhasicia i Salvai (ZS)	34
5.2. Model Zelenhasicia i Salvai – estymacja parametrów rozkładów	35
5.3. Model Zelenhasicia i Salvai – przykłady zastosowań	37
5.3.1. Niżówki wyznaczone metodą POT	37
5.3.2. Niżówki wyznaczone metodą SPA	50
5.4. Uogólniony rozkład Pareto (GPD)	60
5.5. Uogólniony rozkład Pareto – przykłady zastosowań	63
5.6. Model Zelenhasicia i Salvai, uogólniony rozkład Pareto – porównanie estymowanych rozkładów	83
<b>6. Dwuwymiarowy rozkład charakterystyk niżówek</b>	88
6.1. Dwuwymiarowy rozkład log-normalny	89
6.2. Intensywność niżówki	104
6.3. Zmienność rozkładu intensywności niżówek	111
6.3.1. Rozkład normowanych intensywności niżówek w czasie	112
6.3.2. Zmienność normowanych intensywności niżówek w profilu podłużnym Nisy Kłodzkiej	122
<b>7. Dwuwymiarowy rozkład charakterystyk maksymalnych niżówek</b>	129
7.1. Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Pareto	129
7.2. Estymacja łącznego rozkładu maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki	133
7.2.1. Estymacja parametrów dwuwymiarowego uogólnionego rozkładu Pareto	133
7.2.2. Zastosowanie dwuwymiarowego uogólnionego rozkładu Pareto do wyznaczenia rozkładów maksymalnych charakterystyk niżówek	134
7.3. Wpływ przepływu granicznego na rozkład charakterystyk niżówek maksymalnych	144
<b>8. Podsumowanie i wnioski</b>	154
<b>Piśmiennictwo</b>	157
<b>Dodatek A. Estymatory największej wiarygodności</b>	162
A.1. Estymatory największej wiarygodności stosowanych rozkładów jednowymiarowych	162
A.1.1. Estymatory największej wiarygodności uogólnionego jednowymiarowego rozkładu Pareto	162
A.1.2. Estymatory największej wiarygodności innych rozkładów używanych w modelu Zelenhasicia i Salvai	163

A.2. Estymatory największej wiarygodności dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego . . . . .	164
A.3. Estymatory największej wiarygodności dwuwymiarowego uogólnionego rozkładu Pareto . . . . .	165
<b>Dodatek B. Niektóre własności rozkładów dwuwymiarowych . . . . .</b>	<b>168</b>
B.1. Rozkład log-normalny – obszar najbardziej prawdopodobny . . . . .	168
B.2. Rozkład log-normalny – warunkowe wartości oczekiwane . . . . .	169
B.3. Rozkład ilorazu w dwuwymiarowym rozkładzie log-normalnym . . . . .	170
B.4. Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Pareto – współczynnik korelacji . . . .	170

# 1. WPROWADZENIE

W rozdziale zdefiniowano zjawisko niżówki i omówiono: suszę meteorologiczną, hydrologiczną i gospodarczą, znaczenie retencji wody w środowisku przyrodniczym. Przedstawiono dane historyczne występowania suszy w Polsce, uwytklając ich przebieg na Śląsku.

Polska cierpi na często występujące braki wody. Susze atmosferyczne i wywołane przez nie susze hydrologiczne pojawiają się w wielu regionach kraju. Dokładne rozpoznanie ich zasięgu oraz intensywności pozwoliłoby na poprawienie gospodarki ograniczonymi zasobami wodnymi [Dubicki 2002].

W literaturze znanych jest wiele definicji suszy, np. według „Handbook of Hydrology” [Maidment 1993] suszę definiuje się w zależności od rozpatrywanych zjawisk przyrodniczych czy procesów gospodarczych. Ze względu na warunki meteorologiczne, klimatyczne, hydrologiczne, problemy rolnicze czy skutki gospodarcze wyróżnia się susze [Łabędzki 2006]:

- meteorologiczną (klimatyczną), powstającą w wyniku długotrwałych, wielomiesięcznych okresów z bardzo niskimi wartościami opadu albo wręcz bezopadowych;
- glebową, charakteryzującą się zmniejszeniem uwilgotnienia gleby poniżej pewnej wartości progowej;
- hydrologiczną, odnoszącą się do okresów, gdy przepływ w rzekach waha się w strefie stanów niskich, a w okresach przedłużającej się suszy wywołuje znaczne obniżenie poziomu zalegania wód podziemnych;
- rolniczą, definiowaną jako okres, w którym wilgotność gleby jest zbyt niska, aby zaspokoić potrzeby wodne roślin;
- w sensie gospodarczym, będącą skutkiem wyżej wymienionych susz.

W Polsce, oceniając intensywność suszy atmosferycznej, stosuje się metody:

- Kaczorowskiej [Kaczorowska 1962] – dla całego kraju;
- Schmucka [Schmuck i Koźmiński 1967] – dla dorzecza środkowej Odry.

Intensywność suszy oceniana jest ze względu na wartość ilorazu sumy opadów z danego okresu i średniej sumy z wielolecia, wyrażoną w % opadu normalnego  $PN$ . Kaczorowska wprowadza następujące wartości graniczne względnych niedoborów opadów dla miesiąca ( $Pm$ ) lub sezonu ( $Ps$ ). Wydziela 3 klasy intensywności suszy:

- sucha –  $50\% \leq \frac{Pm}{PN} \leq 74\%$ , ( $75\% \leq \frac{Ps}{PN} \leq 89\%$ );
- bardzo sucha –  $25\% \leq \frac{Pm}{PN} < 50\%$ , ( $50\% \leq \frac{Ps}{PN} < 75\%$ );
- skrajnie sucha –  $\frac{Pm}{PN} < 25\%$ , ( $\frac{Ps}{PN} < 50\%$ );

Według Schmucka sezonem suchym jest miesiąc (rok), w którym suma opadów stanowi mniej niż 75% średniej sumy wieloletniej i w zależności od czasu trwania okresów bezopadowych wyróżnia się ich trzy rodzaje:

- posucha – ciąg bezopadowy trwający od 9 do 17 dni;
- posucha umiarkowana – od 18 do 28 dni;
- posucha długotrwała – ponad 28 dni.

Do kompleksowych wskaźników charakteryzujących stopień uwilgotnienia (suchości) atmosfery należą między innymi:

- klimatyczny bilans wodny [Bac i Rojek 1999] wyznaczany jako różnica pomiędzy opadem a parowaniem;
- współczynnik hydrotermiczny Sielianinowa [Radomski 1973] wyrażony jako iloraz wysokości miesięcznej sumy opadów atmosferycznych i sumy średnich dobowych temperatur powietrza w danym miesiącu;
- wskaźnik suchości Gaussena będący kombinacją wilgotności względnej oraz liczby dni z opadem i rosą;
- Palmer Drought Index – wskaźnik Palmera<sup>1</sup> [1965] stosowany głównie w USA oraz ostatnio w Chinach, oparty na obserwowanych wysokościach opadu i temperatury. Obecnie w wyniku standaryzacji oryginalny wskaźnik przyjmuje wartości od -4 do 4, przy czym wartości ujemne mówią o skali intensywności suszy, zaś dodatnie – uwilgoceniu. Kompleksowy przegląd wskaźników suszy, stosowanych głównie w Stanach Zjednoczonych, jest zawarty w pracy Heima [2002].

Kolejne etapy rozwoju suszy oddziałują na warunki przepływu wody w środowisku. Długo trwająca susza atmosferyczna poprzez wzrost parowania wywołuje zmniejszenie zasobów wody w glebie (susza glebowa). Obniżanie się zasobów łatwo dostępnej wody w glebie powoduje spadek poziomu wód gruntowych, a w konsekwencji występują ograniczenia zasilania rzek wodami podziemnymi. Każdy z tych procesów może zostać przerwany na skutek zmiany czynników klimatycznych. Wzrost ilości opadów lub zmiana warunków termicznych mogą doprowadzić do osłabienia procesów wysychania środowiska, a nawet do ich przerwania. Jak widać, susza hydrologiczna przejawiająca się długotrwałym obniżeniem stanu wód powierzchniowych i gruntowych jest konsekwencją wcześniej występujących susz atmosferycznych oraz glebowych.

Związane z suszą zjawisko obniżenia stanu wody w rzekach nazywane jest niżówką. Według Dębskiego [1970] niżówka rozwija się, narasta w następujących fazach:

- suszy atmosferycznej (brak opadów, wysoka temperatura powietrza),
- suszy glebowej (wysokie parowanie i transpiracja),
- obniżenia poziomu wód gruntowych (zmniejszenia zasilania podziemnego rzek),
- obniżenia stanów wody w sieci rzecznej drenującej zlewnie (wysychanie źródeł i małych cieków wodnych).

Skumulowaną charakterystyczną cechą czwartej fazy jest niżówka. Jej parametry wyznacza się na podstawie pomiarów hydrometrycznych, a więc w takim ujęciu zasadne jest traktowanie niżówki jako charakterystyki suszy hydrologicznej.

W podobny sposób definiowane są niżówki w programie FRIEND [Tallaksen i van Lanen 2004]. Mianem suszy określa się zjawisko o charakterze „ciągłym, o zasięgu regionalnym, związane z obniżeniem się zasobów wodnych poniżej wartości średnich”. Dotyczy to zarówno wielkości opadów, wilgotności glebowej, położenia

---

<sup>1</sup> Stały monitoring wskaźników Palmera można znaleźć pod adresem:  
<http://lwf.ncdc.noaa.gov/oa/climate/research/prelim/drought/palmer.html>



zwierciadła wody gruntowej, jak i przepływów w rzekach. Taka definicja określa pewne poziomy graniczne rozdzielające stan suszy od stanu jej braku. Korzystając z nich, można wyznaczać charakterystyki suszy: czas trwania, wielkość, moment pojawienia czy jej zasięg. W przypadku suszy hydrologicznej poziomem granicznym staje się przepływ graniczny  $Q_g$ , określany na podstawie obserwowanego lub symulowanego szeregu czasowego codziennych przepływów.

Susza oraz związane z nią przepływy niżówkowe są odzwierciedleniem stanu niskiego uwilgocenia całej zlewni. Dokładniej stan ten można opisać, rozważając obieg wody w przyrodzie. Cykl hydrologiczny stanowi zespół licznych dróg, którymi krążąca woda w przyrodzie podlega transformacji i w uogólnionej formie wyrażany jest [Soczyńska 1997] w postaci równania bilansu wodnego zlewni:

$$P = E + R + G + \Delta S \quad (1.1)$$

gdzie:

- $P$  – całkowity opad na obszarze zlewni;
- $E$  – całkowite parowanie z obszaru zlewni;
- $R$  – całkowity odpływ powierzchniowy z terenu zlewni;
- $G$  – całkowity odpływ podziemny ze zlewni;
- $\Delta S$  – zmiana retencji zlewni.

Istotną rolę w ocenie bilansu wodnego zlewni odgrywają różnego rodzaju retencje. Do najważniejszych Mioduszewski [1994] zalicza:

- glebową;
- leśną;
- wód gruntowych i podziemnych;
- koryt i dolin rzecznych.

Retencja glebowa [Drabiński 2006] występuje w strefie nienasyconej profilu glebowego i ma działanie najbardziej przestrzenne. Jej wielkość uzależniona jest od rodzaju, składu mechanicznego i struktury gleby. Praktycznie retencja glebowa – użyteczna dla roślin – waha się od około 15–25 mm słupa wody w glebach przepuszczalnych, do około 50–65 mm w zwięzłych.

Las wpływa korzystnie na podniesienie retencji zlewni, posiada wysoką zdolność magazynowania wody, największą mają lasy jodłowe i świerkowe bo do 40–45% opadu rocznego, natomiast najmniejszą sosnowe i bukowe (15–27%). Istotne znaczenie w bilansie wodnym ma akumulacja śniegu. Jego powolniejsze topnienie, opóźniając odpływ wiosenny, zwiększa możliwości retencyjne lasów. Z badań krajowych [Soczyńska 1997] wynika, że przyrost retencji glebowej powodowany zarzewnieniami na glebach lekkich kształtuje się przeciętnie na wysokości 5–7 mm, zaś maksymalnie, wiosną, dochodzi nawet do 25 mm.

Retencja wód gruntowych i podziemnych odgrywa zasadniczą rolę w gospodarce wodnej zlewni. Wody gruntowe, zalegające na niedużych głębokościach (1,2–1,5 m), zasilają strefę aeracji, wpływając na wzrost retencji glebowej. Oznacza to, że kształtowanie poziomu wód gruntowych na odpowiedniej do określonych siedlisk i upraw głębokości wpływa korzystnie na wzrost i rozwój roślin. Na ilość,

jakość i dynamikę wód podziemnych, zarówno tych płytkich, jak i głębiej zalegających (poniżej 1,5 m) wpływają warunki naturalne (geomorfologiczne, meteorologiczne czy hydrologiczne) oraz antropogeniczne (urządzenia wodno-melioracyjne, ujęcia wód podziemnych). Modelowaniem retencji, wykorzystując konceptualne modele zlewni, zajmował się między innymi Miler [1994].

Zwierciadło płytkich wód gruntowych, będące przedmiotem zainteresowania rolnictwa, w warunkach naturalnych podlega corocznym, sezonowym, a także wieloletnim (cyklicznym) wahaniom. Coroczne zmiany wynikają z bilansowej przewagi opadów nad parowaniem w półroczu zimowym i odwrotnie: bilansowej przewagi parowania nad opadem – w letnim. Efektem tego jest wzrost zasobów wodnych i podnoszenie się poziomu wód gruntowych poza okresem wegetacyjnym. Zjawisku letniego spadku wód gruntowych można zapobiegać poprzez odpowiednią eksploatację urządzeń nawadniających i odwadniających, w tym także służących do regulowania odpływu wody w ciekach. W cyklach wieloletnich zmiany poziomu wód podziemnych są efektem zmienności klimatycznej. Występujące serie lat mokrych lub serie lat suchych powodują znaczące zmiany w poziomach zalegania płytkich i głębokich wód.

W ostatnich latach [Kwartalny biuletyn informacyjny..., Rocznik hydrogeologiczny] obserwowany jest spadek poziomu wód podziemnych. Przyczyny tego są różne. Między innymi są to nadmierna eksploatacja wód podziemnych (studnie głębinowe) i wzrost zużycia przez środowisko przyrodniczo-rolnicze. Należy przy tym zaznaczyć, że intensyfikacja produkcji przyczyniająca się do wzrostu plonów, zwiększa ewapotranspirację. Zmiany te następują w tempie mniejszym w stosunku do przyrostu plonu, co oznacza podniesienie produktywności wody. Wszelkie działania zwiększające infiltrację do warstw wodonośnych przyczyniają się do odbudowy zasobów wód gruntowych i podziemnych.

Retencję koryt i dolin rzecznych ocenia się na podstawie wypełnienia cieku i doliny wodą. W lokalnych zagłębieniach na terenach zalewowych tworzą się oczka wodne. Zgromadzona w nich woda zwiększa zasoby retencji gruntowej doliny, a także zasila koryto rzeczne, zwiększając odpływ w okresach bezopadowych. Retencja ta tworzy się w zalewanych pradolinach i dolinach oraz na terenach polderowych. Jej zasięg ograniczany jest przez budowę wałów przeciwpowodziowych. Retencję koryt i dolin rzecznych można zwiększyć przez odpowiednią zabudowę koryta urządzeniami piętrzącymi (jazy, zastawki itp.).

Okres suszy ma na zdecydowany wpływ na wszystkie rodzaje retencji. Powoduje ich znaczne obniżenie, czasami wręcz doprowadzając do katastrofy. W niniejszej pracy badano zagadnienia związane z oszacowaniem – estymacją prawdopodobieństwa wystąpienia suszy hydrologicznej o określonym niedoborze (deficycie odpływu) lub czasie trwania.

To, że susze hydrologiczne mają wpływ na codzienne życie w Polsce, widać również w opracowaniach historycznych [Dębski 1970]. Opis zjawisk klimatyczno-meteorologicznych w wiekach XVI i XVII znajduje się w kronikach klęsk elementarnych w Polsce, uwzględniających również teren Śląska, opracowanych przez Walawendera [1932] i Namaczyńską [1937]. Sporo informacji można znaleźć między

innymi w pracach: Fal [2004], Mokwa i Radczuk [2005], Girguś i Strupczewski [1965]. Późniejsze źródła, szczególnie dotyczące Śląska, zawarte w kronikach miast śląskich, a opracowane na zlecenie śląskich władz prowincjonalnych na początku XIX w. są naprawdę bogate. Szeroki przegląd takich zdarzeń zawiera monografia opracowana pod redakcją Stefana Inglota [Inglot 1968]. Według niej w XVI w. było 30 lat posusznych, zaś rok 1540 wszystkie kroniki określiły jako rok „wielkiej posuchy”. W ciągu 6 miesięcy było tak mało opadów, że rzeki powysychały, a Odrę można było przejść bez trudu w każdym miejscu. Również w 1561 r. zanotowano bardzo niski poziom wody w Odrze i wyschnięcie wielu studzien. W 1590 r. powysychały rzeki: Bóbr, Kwisa, Kaczawa, Widawa, Oława. Odra zaś była tak płytka, że w wielu miejscach można było ją przejść w bród. Podobnie było również w 1599 r. Przez całe lato, aż do początku września, nie padał deszcz. Woda w dolnośląskich rzekach, z wyjątkiem Bobru, wyschła. W XVII w. wystąpiły 23 lata posuszne, na Śląsku szczególnie w okresie 1679–1682. W wieku XVIII kroniki zarejestrowały 22 lata posuszne. Na Dolnym Śląsku były to lata: 1719, 1726–1727, 1759, 1772–1776, 1782, 1786, 1795, 1800. Na początku XIX w. szczególnym rokiem był 1811, kiedy woda w Odrze pod Wrocławiem była tak niska, że można było przejść ją pieszo. W latach 1850–1950 na Dolnym Śląsku było aż 25 lat posusznych. W drugiej połowie XX wieku Dubicki [2002] wymienia następujące lata suche: 1951, 1953, 1959, 1963, 1964, 1976, 1982–1983, 1989, 1991–1992. Szczegółowy opis okresów posusznych w Polsce w latach 1951–1990 jest opisany w „Materiałach Badawczych IMGW” [Kowalczak 1995]. Początek wieku XXI także można uznać za suchy, szczególnie dotyczy to lat 2003–2005.

## 2. CEL I ZAKRES PRACY ORAZ METODYKA BADAŃ

Omówiono cel pracy oraz metody, jakimi został on osiągnięty. Krótko odniesiono się do literatury, a następnie omówiono podstawowe rozdziały pracy. Przedstawiono zastosowane metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej do estymacji rozkładów prawdopodobieństwa charakterystyk niżówki.

Celem pracy jest przedstawienie metod probabilistycznych i statystycznych do oceny przepływów niżówkowych, które mogłyby być stosowane w większości polskich zlewni. Tak postawiony cel obejmuje dwa zasadnicze zadania:

- opis proponowanych modeli i rozkładów z przedstawieniem sposobów estymacji nieznanymi parametrów;
- określenie warunków niezbędnych do stosowania proponowanych metod.

Zbadano następujące charakterystyki niżówki:

- niedobór przepływów – podany w  $m^3$ ;
- czas trwania – wyrażony w dobach;
- intensywność – obliczaną w  $m^3/\text{dobę}$ .

Dwie charakterystyki: niedobór oraz intensywność badano w ich normowanej wersji. Normą jest średni dobowy przepływ z wielolecia. Oznacza to, że:

- normowany niedobór jest wyrażany w dobach średniego przepływu;
- normowana intensywność jest charakterystyką bezwymiarową.

Zakres przeprowadzonych badań obejmował:

1. Estymację jednowymiarowych oraz dwuwymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa charakterystyk niżówki. W szczególności przedstawiono sposoby:
  - wyznaczania estymatorów parametrów przesunięcia rozkładu Pareto, zarówno w jego jedno-, jak i dwuwymiarowej wersji – wówczas gdy badane są rozkłady charakterystyk maksymalnych;
  - stosowania dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego do estymacji rozkładu niedoboru przepływów i czasu trwania niżówki.
2. Ocena niejednorodności niżówek ze względu na czas ich trwania.
3. Określenie wpływu przepływu granicznego na rozkład charakterystyk maksymalnych niżówek.
4. Zasady aplikacji badanych metod i rozkładów (na przykładach testowych oraz leżących w zlewni Nysy Kłodzkiej profili wodowskazowych).

W literaturze spotkać można dwie zasadniczo różne metody estymowania jednowymiarowych rozkładów charakterystyk niżówek maksymalnych:

1. Opartą na metodzie zaproponowanej w 1987 r. w pracy Zelenhasić i Salvai [1987].
2. Wykorzystująca albo uogólniony rozkład Pareto, albo uogólniony rozkład wartości ekstremalnych, związana z klasyczną teorią rozkładów wartości ekstremalnych [Hisdal i in. 2002, Engeland i in. 2004, Coles 2001].

W rozdziale 5. obie metody zastosowano do estymowania rozkładów maksymalnych

czasów trwania i objętości niżówki. Przeprowadzona analiza wykazuje ich nienajlepsze dopasowanie do danych empirycznych. Szczególnie jest ono widoczne, gdy rozważane są wysokie prawdopodobieństwa nieprzekroczenia. W związku z tym podjęto próbę estymowania jednowymiarowych rozkładów normowanego niedoboru przepływów i czasu trwania niżówki jako rozkładów brzegowych. Założono, iż lepsze dopasowanie (w sensie  $p$ -wartości testu zgodności) otrzymamy, badając dwuwymiarowe rozkłady prawdopodobieństwa obu charakterystyk<sup>2</sup>. W rozdziale 6. zastosowano dwuwymiarowy rozkład log-normalny do estymacji rozkładu normowanego niedoboru przepływów i czasu trwania niżówki. Przeprowadzone testy statystyczne sugerują istnienie pewnej niejednorodności obserwowanych charakterystyk. Okazuje się, że dla płytkich niżówek, z czasem trwania nieprzekraczającym dwudziestu kilku dni, tempo przyrostu normowanego niedoboru przepływów zmienia się wraz ze wzrostem czasu trwania. Dopiero w przypadku głębszych niżówek związek staje się liniowy. Niejednorodność ta, w dużej mierze związana z zasilaniem cieku wodami gruntowymi, może być przyczyną nienajlepszego dopasowania rozkładów w modelach jednowymiarowych.

Założenie log-normalności obu charakterystyk prowadzi do wyznaczenia rozkładu normowanej intensywności, również log-normalnego. Dużą część rozdziału 6. poświęcono konsekwencji dobrego dopasowania obserwowanych normowanych intensywności do rozkładu teoretycznego.

Drugim z dwuwymiarowych rozkładów jest uogólniony rozkład Pareto. Zastosowano go do estymacji rozkładu maksymalnego normowanego niedoboru przepływów i maksymalnego czasu trwania niżówki. W rozdziale 7. podjęto próbę dopasowania uogólnionego rozkładu Pareto do danych empirycznych. I tak, jak w przypadku rozkładu log-normalnego wyniki estymacji wskazują na wyraźny rozdział pomiędzy krótko-, a długoterminowymi niżówkami – co również wskazuje na istnienie niejednorodności. Sprawdzono również, jaki wpływ na rozkłady maksymalnych charakterystyk ma wybór przepływu granicznego definiującego niżówkę.

Każdy z rozdziałów (5–7) zawiera:

- przedstawienie opisywanego modelu (rozkładu) charakterystyk niżówki;
- określenie sposobu estymacji nieznanymi parametrów;
- dopasowanie modelu, rozkładu do obserwowanych niedoborów przepływów oraz czasów trwania w czterech testowych profilach: Zbytowa, Międzyzlesie, Kuripapango oraz Colwick (rozd. 4).

W końcowych częściach rozdziałów 6. i 7. pokazano przykładowe zastosowania proponowanych metod. Wykorzystano wtedy dane ze zlewni górnej Nysy Kłodzkiej, w profilach wodowskazowych: Międzyzlesie, Bystrzyca Kłodzka, Kłodzko i Bardo. Rozdział 6. poświęcono badaniu jednorodności opracowanych niżówek, zaś rozdział 7. wpływowi wyboru poziomu przepływu granicznego  $Q_g$  na jednowymiarowe, brzegowe rozkłady badanych charakterystyk ekstremalnych.

W pracy przedstawiono tylko część z wielu wariantów obliczeń przeprowa-

---

<sup>2</sup> Estymowane rozkłady brzegowe rozkładu dwuwymiarowego nie muszą być identyczne z estymowanymi rozkładami jednowymiarowymi [Feller 1969].

dzonych przez autora. Ograniczono się do jednego standardowego kryterium uściślającego sposób wyznaczania niżówek – definiowaniu niżówki poświęcony jest rozdział 3. Wybór innego zestawu parametrów z reguły nie zmienia charakteru otrzymywanych wyników. Wszystkie obliczenia teoretyczne, związane z metodami estymacji, a także z prezentacją wyników, zostały przedstawione w rozdziałach dodatkowych A i B. W dodatku A przedstawiono estymatory największej wiarygodności parametrów badanych rozkładów. W dodatku B opisano sposoby wyznaczania niektórych parametrów badanych rozkładów. Obliczenia komputerowe, a także większość prezentowanych wykresów zostały wykonane przy użyciu kolejnych wersji programu Nizowka2003 [Jakubowski i Radczuk 2004].

### 3. DEFINICJE NIŻÓWKI

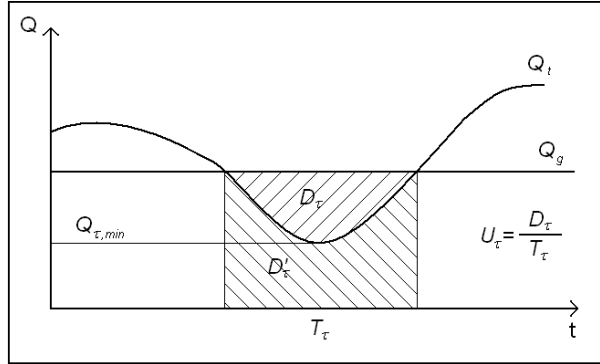
Przedstawiono dwie definicje procesu przepływów niżówkowych: POT (Peak Over Threshold) oraz SPA (Sequence Peak Algorithm). Obie opierają się na analizie przepływów niższych od pewnego przepływu granicznego  $Q_g$ . Podano dodatkowe kryteria uściślające sposób wyznaczania niedoborów przepływów i czasów trwania niżówek. Na przykładach obserwowanych charakterystyk pokazano ich asymetryczność. Przedstawiono krytyczną ocenę stosowania obu definicji. Opisano również maksymalne charakterystyki niżówki.

Ogólnie stosowany w hydrologii termin niżówka jest pojęciem umownym, interpretującym sytuację w rzekach w odniesieniu do ilości przepływającej wody [Ozga-Zielińska i Brzeziński 1997]. W literaturze można prześledzić ewolucję, jaką przeszły zarówno definicja niżówki, jak i kryteria jej wydzielenia. Autorzy nowszych pozycji Ozga-Zielińska [1990], Ozga-Zielińska i Brzeziński [1997], a także Tallaksen i van Lanen [2004] oraz Bonacci [1993] proponują prostą i jednoznaczną definicję: „Niżówka jest to okres, w którym przepływy są równe lub niższe od przyjętego przepływu granicznego  $Q_g$ ”. „Przy określeniu przepływu granicznego [Ozga-Zielińska i Brzeziński 1997] mogą być stosowane różne kryteria. Są to kryteria bądź hydrologiczne, bądź gospodarcze. Rodzaj przyjętego kryterium zależy od celu opracowania i powinien być merytorycznie uzasadniony, a uzyskane wyniki powinny być w odpowiedni sposób zinterpretowane”. W literaturze polskiej [Ozga-Zielińska i Brzeziński 1997, Tlałka 1979] przyjmowano poziom  $Q_g$  jako jeden z przepływów charakterystycznych, najczęściej był to przepływ  $WNQ$  – najwyższy z przepływów minimalnych rocznych. Przyjmowane są także inne statystyki, wyznaczane z ciągu minimalnych rocznych przepływów. Są nimi:  $ZNQ$  – mediana,  $SNQ$  – średnia [Stachy 1990], czy też jak w pracy Tokarczyk i Jakubowskiego [Tokarczyk i Jakubowski 2006] pierwszy kwartyl. W międzynarodowym projekcie hydrologicznym FRIEND<sup>3</sup> (IHP - UNESCO), po licznych dyskusjach, przyjęto jako poziomy odcięcia przepływy graniczne  $Q_{70\%}$  albo  $Q_{90\%}$ , wyznaczone z krzywej sum czasów trwania przepływu [Tallaksen i van Lanen 2004]. Tak definiowana, obserwowana  $\tau$ -ta niżówka posiada następujące charakterystyki (parametry ilościowe) – schematycznie zaznaczone je na rysunku 1:

- deficyt odpływu:  $D'_\tau$  w  $m^3$  – objętość odpływu poniżej założonego przepływu granicznego;
- niedobór przepływów:  $D_\tau$  w  $m^3$  – różnica pomiędzy graniczną objętością odpływu, a deficytem odpływu;
- czas trwania:  $T_\tau$  w dobach;
- intensywność:  $U_\tau = \frac{D'_\tau}{T_\tau}$  w  $m^3/\text{dobę}$ ;
- minimalny przepływ:  $Q_{\tau, \min}$  w  $m^3/s$  lub w  $m^3/\text{dobę}$ ;
- średni przepływ:  $Q_{\tau, sr}$  w  $m^3/s$ .

Pomiędzy charakterystykami zachodzi oczywisty związek:  $Q_g T_\tau = D'_\tau + D_\tau$ .

<sup>3</sup> Flow Regimes from International Experimental and Network Data.



Rys. 1. Charakterystyki niżówki

Fig. 1. Low flow characteristics

Dwa parametry: niedobór przepływów  $D_\tau$  oraz czas trwania  $T_\tau$  charakteryzują niżówkę i są podstawowymi charakterystykami badanymi w pracy, trzeci, będący ich ilorzem [Yevjevich 1967] zostanie wykorzystany do oceny zmienności suszy hydrologicznej w czasie, zmienności wieloletniej oraz sezonowej.

Ponieważ niedobór przepływów  $D_\tau$  oraz intensywność  $U_\tau$  zależą od wielkości przepływu i są charakterystyczne dla badanego profilu wodowskazowego, w pracy wykorzystano ich normowane odpowiedniki. Normą jest średni przepływ z wielolecia wyrażany w  $\text{m}^3/\text{dobę}$ . Oznacza to, że normowany niedobór przepływów, oznaczany dalej przez  $\bar{D}_\tau$ , jest wyrażany w dobach średniego przepływu, zaś normowana intensywność  $\bar{U}_\tau$  jest wielkością bezwymiarową.

Tallaksen i van Lanen [2004] proponują dwie metody definiowania niedoboru przepływów i czasu trwania niżówki. Obie w różny sposób wykorzystują przyjęty *a priori* poziom przepływu granicznego  $Q_g$ . W obu obniżenie się przepływu poniżej  $Q_g$  oznacza początek niżówki. Jednakże tylko w pierwszej z metod jej zakończenie jednoznacznie wiąże się ze wzrostem przepływu ponad poziom  $Q_g$ . Zgodnie z drugą definicją jej koniec następuje w momencie wyrównania powstałego niedoboru przepływem wyższym niż  $Q_g$ . W obu metodach definiowane są dwie charakterystyki: niedobór przepływów oraz czas trwania niżówki.

Definicje:

1. POT (Peak Over Threshold – Ekstremum Ponad Przepływem Granicznym):  
– niedobór przepływów

$$D_\tau = \int_{t_p}^{t_k} (Q_g - Q(t)) dt \text{ w } [\text{m}^3] \quad (3.1)$$

wyznaczany jest jako objętość deficytu;  $Q(t)$  oznacza wartość przepływu,  $Q_g$  przepływ graniczny, zaś  $t_p$  początek, a  $t_k$  koniec  $\tau$ -tej niżówki.



- czas trwania  $T_\tau = t_k - t_p + 1$  [w dniach] – określany jest jako czas z przepływem stale niższym lub równym zadanemu poziomowi odcięcia  $Q_g$ .
- Standardowo zakłada się, że przepływ graniczny  $Q_g = \text{const}$ . Jednakże Engeland i in. [2004] przyjmują, iż  $Q_g$  również może być zmienny i zależeć od pory roku.
2. SPA (Sequent Peak Algorithm – Algorytm Kolejnych Szczytów) [Tallaksen i in. 1997]. Niech  $Q(t)$  oznacza dobowy dopływ do teoretycznego zbiornika, a  $Q_g$  jego pożądaną wysokość. Wtedy dla przepływu  $Q(t)$  i ustalonego przepływu granicznego  $Q_g$  z zależności:

$$S(t) = \begin{cases} S(t-1) + Q_g - Q(t) & \text{gdy: } S(t-1) + Q_g - Q(t) > 0 \\ 0 & \text{gdy: } S(t-1) + Q_g - Q(t) \leq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

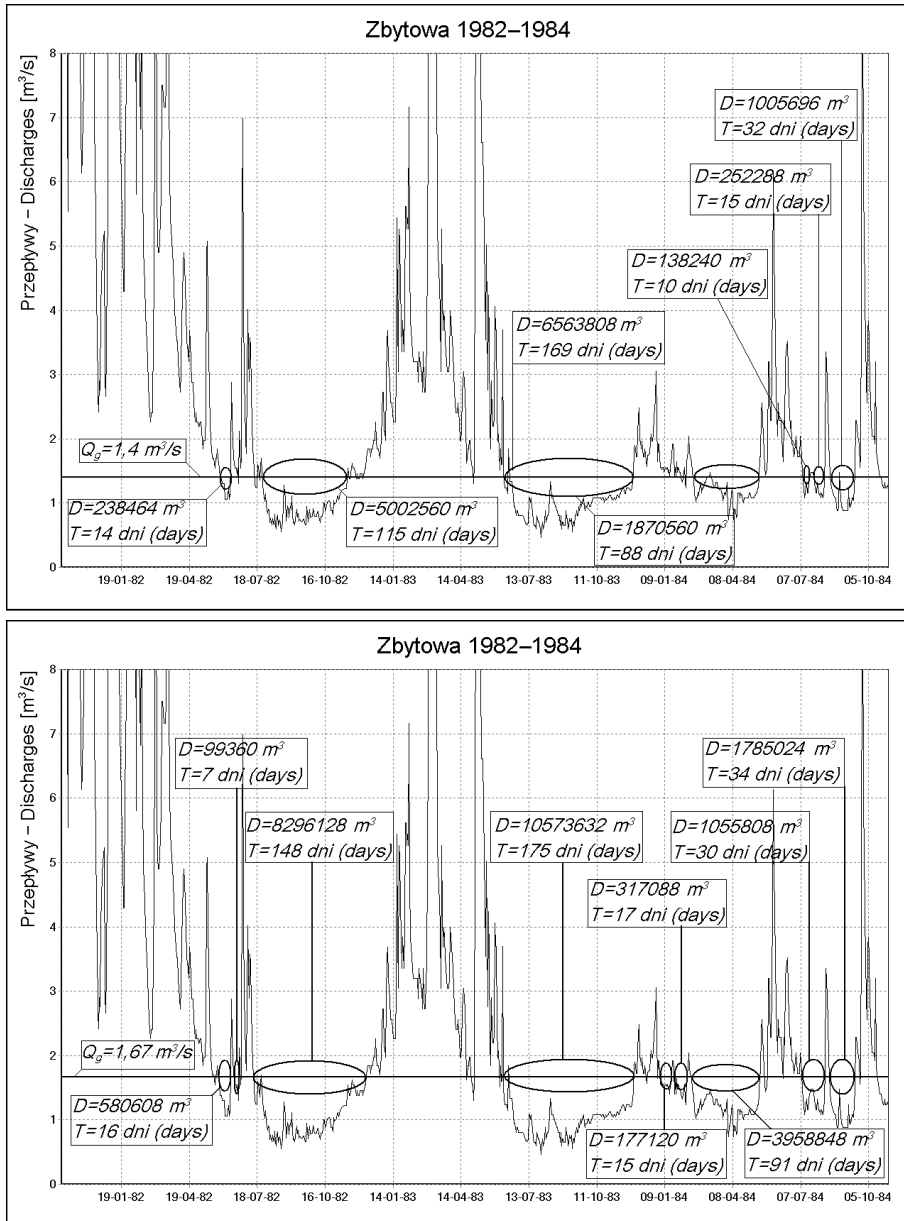
wylicza się sumaryczny niedobór wody dopływającej do zbiornika. Na podstawie wzoru (3.2) definiuje się charakterystyki:

- niedobór przepływów  $D_\tau = S(t_{\max}) = \max_{t=t_p, \dots, t_k} S_t$  jest maksymalną objętością deficytu wpływającej do zbiornika wody;  $t_{\max}$  określa moment wystąpienia najwyższej wartości  $S_t$ ;  $t = t_p$  oraz  $t = t_k$  oznaczają pierwszy i ostatni dzień, w którym  $S(t) > 0$ ;
- czas trwania  $T_\tau = t_{\max} - t_p + 1$ .

Łatwo zauważyć, że zgodnie z tą definicją przewyższenie przepływu granicznego  $Q_g$  nie musi wyznaczać momentu zakończenia niżówki. Tu jej zakończeniem będzie takie przewyższenie przepływu  $Q_g$ , po którym, w myśl warunku 3.2, kolejne obniżania się przepływu nie spowodują wzrostu  $D_\tau$ .

Obie definicje generują podobne, jednakże niepokrywające się ze sobą ciągi obserwowanych niżówek. Różnią się one głównie liczbą obserwowanych zdarzeń, a także wielkością niedoboru przepływów i czasu trwania. Wynika to z następującego faktu. W metodzie POT każdy wzrost ponad próg  $Q_g$  automatycznie kończy stan niskiego przepływu w rzece. W algorytmie SPA stan ten kończy się w momencie zrównoważenia wcześniejszych wartości niższych niż  $Q_g$ , przepływami wyższymi od przepływu granicznego  $Q_g$ . Oznacza to, że metodzie SPA wszystkie płytkie niżówki występujące w krótkim czasie po głębszej niżówce nie są uwzględniane. Stąd też widać, że w porównaniu do POT, metoda ta ogranicza liczbę obserwowanych niżówek, z możliwym zwiększaniem ich niedoborów przepływów oraz czasów trwania.

W praktyce, otrzymane w powyższy sposób (zarówno metodą POT jak i SPA) obserwowane ciągi charakterystyk niżówek muszą zostać poddane dodatkowemu opracowaniu. Przede wszystkim zawarte są w nim obserwacje zależne. Szczególnie w metodzie POT często, kolejno występujące po sobie niżówki rozdzielone są krótkimi, jedno-, dwudobowymi okresami z przepływem wyższym od poziomu  $Q_g$ . Oznacza to, że takie niżówki są zależne, a to nie pozwala w dalszych obliczeniach uważać ich za pary niezależnych zdarzeń losowych. (Z definicji metody SPA wynika ich częściowe pominięcie.) Nadto, w ciągu obserwacji występuje znaczna liczba krótkotrwałych niżówek, o małych niedoborach przepływów, nieistotnych



Rys. 2. Przykłady obserwowanych charakterystyk niżówek; metoda POT dla poziomów odcięcia:  $Q_{70\%}$  – górny wykres oraz  $Q_{60\%}$  – dolny

Fig. 2. An example of the low flow indices, the POT method; threshold levels:  $Q_{70\%}$  – upper graph and  $Q_{60\%}$  – lower one

podczas opracowywania rozkładów charakterystyk zjawisk ekstremalnych. Dlatego też zgodnie z pracą Zelenhasić i Salvai [1987] wprowadzono dodatkowe kryteria uściślające sposób wyznaczania niżówek. Do kolejnych niżówek określa się:

- $m_c$  – minimalny czas pomiędzy sąsiadującymi niżówkami [w dniach];
- $m_t$  – minimalny czas trwania niżówki [w dniach];
- minimalny niedobór przepływów [w m<sup>3</sup>] - zgodnie z którym niżówki o niedoborze mniejszym niż  $\alpha_0 D_{\max}$  są usuwane z ciągu danych. Standardowo parametr  $\alpha_0 = 0,005; 0,01; D_{\max}$  oznacza największy zaobserwowany niedobór.

Pierwsze kryterium eliminuje opisane wyżej zależności, pozostałe wykluczają nieistotne obserwacje. Zasady działania kryteriów są następujące:

- krok 1 – kolejne dwie niżówki spełniające pierwszy z warunków są łączone w jedną;
- krok 2 – pojedyncze niżówki spełniające pozostałe dwa kryteria są usuwane z zestawu danych.

W trakcie łączenia wyznaczanie sumarycznego czasu trwania zależnych od siebie niżówek może być dwuwariantowe, z uwzględnieniem lub bądź bez uwzględnienia czasu trwania krótkiego przepływu przewyższającego  $Q_g$ . W prezentowanej pracy, w sumarycznym czasie trwania niżówki czas takich przepływów (przewyższających  $Q_g$ ) nie będzie uwzględniany. Szczegółową analizę kryteriów stosowanych podczas wyznaczania charakterystyk niżówki przedstawiono w artykule Fleig i in. [2006].

Przykładowe niżówki wyznaczone metodą POT w dwóch wybranych przepływach granicznych przedstawiono na rysunku 2. Elipsami zaznaczono niżówki istotne dla  $Q_{70\%}$  – górny wykres oraz  $Q_{60\%}$  – dolny. Przyjęto, że minimalny czas pomiędzy sąsiadującymi niżówkami wynosi  $m_t = 3$  dni, minimalny czas trwania niżówki:  $m_c = 5$  dni, a parametr  $\alpha_0 = 0,005$ . Wartości te przyjęto na podstawie pracy Zelenhasić i Salvai [1987], w której estymowano rozkłady prawdopodobieństwa charakterystyk przepływów minimalnych w profilu wodowskazowym St. Mitrovica na rzece Sawie. Sugerowano w niej przyjęcie minimalnego odstępu pomiędzy niżówkami nie dłuższego niż 6 dni. Podobnie krótkie minimalne czasy sugerują Tallaksen i van Lanen [2004]. W cytowanych przykładach obliczeniowych przyjęto, że minimalny czas pomiędzy kolejnymi niżówkami wynosi 2 dni, a minimalny czas ich trwania – 5 dni. Całkowicie odmienne podejście jest obserwowane w literaturze polskiej. Podczas wyznaczania rozkładów charakterystyk niżówki Zielińska [1963] przyjęła, że czas pomiędzy sąsiadującymi niżówkami nie może być krótszy niż 15 dni. Z kolei Kowalczak [1995] zakładał, że czas trwania niżówki jest nie mniejszy niż 20 dni.

Wybór wartości przepływu granicznego  $Q_g$  ma duży wpływ na parametry obserwowanych niżówek. Ze wzrostem wartości  $Q_g$  rośnie nie tylko niedobór przepływów i zwiększa się czas trwania obserwowanych niżówek, zmienia się też ich liczba. Zwiększanie wartości przepływu granicznego  $Q_g$  powoduje, iż niektóre z niżówek łączą się ze sobą, pojawiają się także nowe okresy niżówkowe. Nawet niewielki wzrost  $Q_g$  może całkowicie zmienić obraz obserwowanych niżówek (tab. 1–2).

W analizowanym przykładzie, przyjmując oba poziomy odcięcia, w każdym

roku, korzystając z algorytmu SPA, wyodrębnione zostały tylko po trzy niżówki. Przy czym trzecia w kolejności przedłużyła się na następne, z niskimi przepływami, dni roku 1984 – tabela 2. Ten fakt został wyraźnie zaznaczony dopiero przy analizie przepływów na poziomie odcięcia  $Q_{60\%}$ . Przy niższym przepływie granicznym ( $Q_{70\%}$ ) wyznaczone metodą POT cztery ostatnie niżówki roku 1984 są konsekwencją niskich przepływów roku poprzedniego – nie są zatem uwzględniane w dalszych obliczeniach. Różnica w czasie trwania niżówki roku 1983 jest efektem połączenia się dwóch niżówek rozdzielonych dwudniowym przepływem przekraczającym przepływ  $Q_{70\%}$ . Przy metodzie SPA przepływ ten nie jest uwzględniany.

Tabela 1. Metoda POT. Wpływ przyjęcia przepływu granicznego na niedobór przepływów i czas trwania niżówki – rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej, niżówki z lat 1982–1984

Table 1. The POT method. An influence of the threshold level value on the low flow deficits and durations – Widawa River, Zbytowa profile, low flows from the years 1982–1984

Przepływ $Q_g$ Threshold level $Q_g$	Termin niżówki Drought term	Niedobór $d$ [tys. m <sup>3</sup> ] Deficit vol. $d$ [1000 m <sup>3</sup> ]	Normowany niedobór $\bar{d}$ [doby] Relative deficit vol. $\bar{d}$ [days]	Czas trwania $t$ [doby] Duration $t$ [days]
$Q_{70\%}$	30.05–12.06.1982	238,5	0,83	14
	25.07–18.11.1982	5002,6	17,42	115
	10.06–27.11.1983	6563,8	22,86	169
	15.02–13.05.1984	1870,6	6,51	88
	10.07–19.07.1984	138,2	0,48	10
	24.07–07.08.1984	252,3	0,88	15
	15.08–16.09.1984	1005,7	3,50	32
$Q_{60\%}$	28.05–12.06.1982	580,6	2,02	16
	18.06–26.06.1982	99,4	0,35	7
	14.07–09.12.1982	8296,1	28,89	148
	04.06–28.11.1983	10573,6	36,82	175
	03.01–17.01.1984	177,1	0,62	15
	22.01–07.02.1984	317,1	1,10	17
	13.02–13.05.1984	3958,8	13,79	91
	09.07–07.08.1984	1055,8	3,68	30
	15.08–17.09.1984	1785,0	6,22	34

Wyliczone dwiema metodami rozkłady częstości charakterystyk niżówki wykazują znaczną asymetrię. W hydrogramach codziennych przepływów, (rys. 3) w przeważającej liczbie występują niżówki o relatywnie niewysokich niedoborach przepływów i niedługich czasach trwania. Na rysunku 3 przedstawiono histogramy niedoborów przepływów i czasów trwania niżówek uzyskanych dla poziomu odcięcia

$Q_{70\%}$ . W każdym z histogramów znacząca większość z zaobserwowanych niżówek mieści się w pierwszej klasie. Oznacza to, że w 10% zmienności mieści się przeważająca liczba obserwacji. Taki układ danych występuje w większości polskich i światowych profili wodowskazowych.

Tabela 2. Metoda SPA. Wpływ przyjęcia przepływu granicznego na niedobór przepływów i czas trwania niżówki – rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej, niżówki z lat 1982–1984

Table 2. The SPA method. An influence of the threshold level value on the low flow deficits and durations – Widawa River, Zbytowa profile, low flows from the years 1982–1984

Przepływ $Q_g$ Threshold level $Q_g$	Termin niżówki Drought term	Niedobór $d$ [tys. m <sup>3</sup> ] Deficit vol. $d$ [1000 m <sup>3</sup> ]	Normowany niedobór $\bar{d}$ [doby] Relative deficit vol. $\bar{d}$ [days]	Czas trwania $t$ [doby] Duration $t$ [days]
$Q_{70\%}$	30.05–12.06.1982	238,5	0,83	14
	25.07–14.11.1982	4999,1	17,41	113
	10.06–27.11.1983	6508,5	22,67	171
$Q_{60\%}$	28.05–12.06.1982	580,6	2,02	16
	14.07–09.12.1982	8293,5	28,88	149
	09.06–13.05.1984	14000,3	48,75	340

Taki asymetryczny, rozłożony w czasie układ danych niżówkowych sugeruje konieczność sprawdzania jednorodności opracowywanych danych. Z założenia statystycznego badana próba (czyli obserwowane charakterystyki) powinna stanowić próbę prostą. Oznacza to, że pobrane obserwacje muszą posiadać następujące własności [Greń 1987]:

- mierzone są w niezmiennych się, jednorodnych warunkach hydrologicznych;
- między sobą są niezależne.

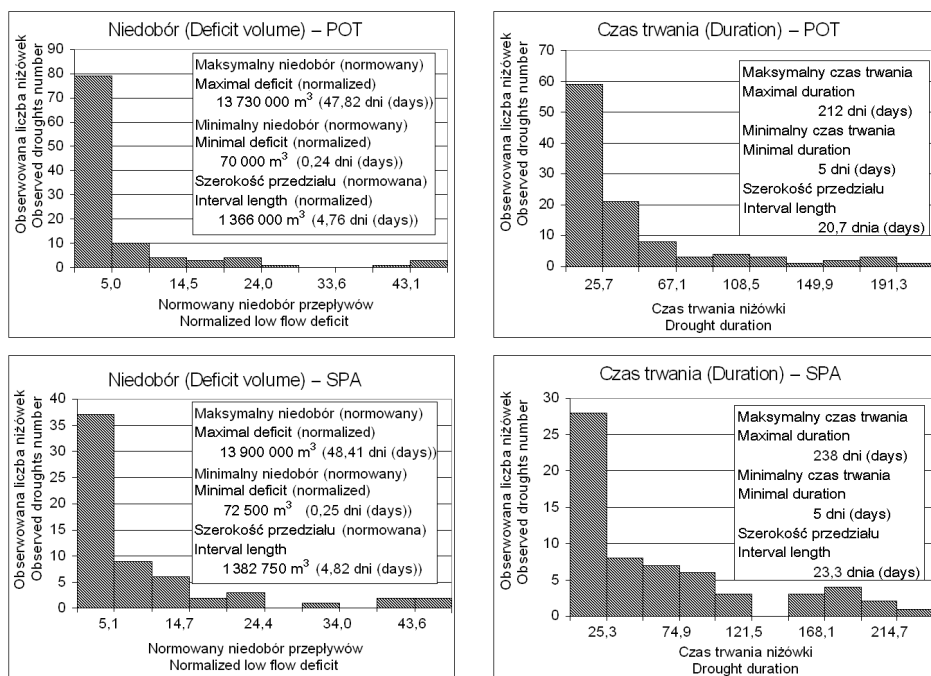
Pierwszy z warunków zakłada, iż procesy hydrologiczne wywołujące niżówkę powinny zachodzić w mało zmieniającym się środowisku przyrodniczym. Stąd wynikają następujące ograniczenia:

1. Badane szeregi czasowe codziennych przepływów nie mogą być zbyt długie. W pracy zakłada się [Tallaksen i in. 1997], że nie powinny one przekraczać 40 lat.
2. Powinien być określony wpływ sezonowości – rozdział na niżówki letnie i zimowe.
3. Obserwowaną niżówkę powinny generować takie same procesy hydrologiczne.

Dwa pierwsze warunki można sprawdzić metodami statystycznymi. Gorzej jest z trzecim. W zasadzie, z szeregu czasowego codziennych przepływów niżówki wyznaczone są w sposób automatyczny – wystarczy, że przepływ przez jakiś czas spadnie poniżej przepływu granicznego  $Q_g$ . W taki sposób nie można określić,

czy dana niżówka powstała w wyniku drenowania łatwo dostępnych wód podpowierzchniowych, czy też jest efektem innych procesów. Pewnym remedium odrzucającym płytkie niżówki jest wprowadzony w pracy Zelenhasicia i Salvai [Zelenhasić i Salvai 1987] parametr  $\alpha_0$ .

Warunek niezależności, sprawdzalny statystycznie, jest wymuszany w definicji niżówki poprzez ustanowienie minimalnego odstępu pomiędzy niżówkami.



Rys. 3. Histogram niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki; rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej, przepływy z wielolecia 1966–2005

Fig. 3. Histogram of low flow deficit amounts and durations; Widawa River, Zbytowa profile, the 1966–2005 runoffs

Dodatkowym problemem tak definiowanych niżówek jest ich długotrwałość oraz sezonowość zjawisk przyrodniczych. Przedstawiane powyżej obserwowane niżówki (tab. 1–2) stanowią dobry tego przykład. Wyznaczona metodą POT długotrwała niżówka obserwowana była przez 169 dni – od czerwca do końca listopada 1983 r. W półroczu letnim, do końca października, trwała ona przez 142 dni, w następnym, zimowym – 27 dni. To, do którego z półroczy należałoby ją przypisać, zależy od przyjętej metody opracowywania danych. Zelenhasić i Salvai [1987] uznaliby ją za niżówkę letnią roku 1983. Warto dodać, że długotrwałe niżówki nie są zjawiskiem sporadycznym. W badanym profilu wodowskazowym, przy przepływie granicznym  $Q_{70\%}$ , w latach 1966–2005 czterokrotnie wystąpiły długotrwałe,

ponad półroczne niżówki. Najdłuższa, z roku 2003 (25 maja–24 grudnia) liczyła aż 212 dni. Podobnie długotrwała była niżówka wyznaczona metodą SPA (1 maja–24 grudnia) – 238 dni. Oznacza to, że teoretycznie wyznaczone kwantyle rozkładów maksymalnych czasów trwania mogą przekraczać nawet 365 dni. Dokładniejsze informacje o badanych w pracy profilach wodowskazowych przedstawiono w rozdziale 4.

## 4. DANE ŹRÓDŁOWE

Opisano charakterystyki hydrologiczne profili wodowskazowych wykorzystanych do testowania i ilustrowania stosowności proponowanych rozkładów. Przedstawiono kryteria wyznaczania niżówek w tych profilach oraz liczebność otrzymanych ciągów normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania. Opisano wyniki testów o losowości i braku trendu w otrzymanych próbach. Omówiono zależności pomiędzy badanymi charakterystykami.

W pracy wykorzystano hydrogramy codziennych przepływów z następujących profili wodowskazowych dorzecza Odry<sup>4</sup>: Międzylesie, Bystrzyca Kłodzka, Kłodzko, Bardo i Zbytowa oraz z dwóch profili leżących poza Polską<sup>5</sup>: Kuripapango (Nowa Zelandia) i Colwick (Wielka Brytania). Szczegółowe informacje o zlewniach zamykanych przez powyższe profile wodowskazowe zawarto w tabeli 3.

Tabela 3. Posterunki wodowskazowe i ich charakterystyki

Table 3. Profiles and their characteristics

Rzeka River Wodowskaz Profile	Pow. zlewni [km <sup>2</sup> ] Catchment area	Poziom zera wod. m n.p.m. Profile altitude m.a.s.l.	Km położenia Situation	Lata obserwacji Observa- tion years
Widawa Zbytowa	721,0	126,78	41,2	1966–2005
Nysa Kłodzka Międzylesie	49,7	425,93	167,0	1956–2005
Nysa Kłodzka Bystrzyca Kłodzka	260,0	337,68	260,0	1956–2005
Nysa Kłodzka Kłodzko	1 084,0	281,48	127,4	1956–2005
Nysa Kłodzka Bardo	1 744,0	256,08	111,4	1956–2005
Ngaruroro (Nowa Zelandia) Kuripapango	370,0	b/d n/a	b/d n/a	1965–2000
Trent (Wielka Brytania) Colwick	7 486,0	16,00	b/d n/a	1959–2000

b/d: brak danych, n/a: not available

<sup>4</sup> Dane z dorzecza Odry zostały udostępnione przez IMGW Oddział we Wrocławiu.

<sup>5</sup> Dane pochodzą ze Światowego Banku Danych [Servat i Demuth 2006] prowadzonego przez projekt ASTHyDA.



W tabeli 4 przedstawiono przepływy charakterystyczne notowane w tych profilach. W polskich wodowskazach przepływy charakterystyczne zostały obliczone na podstawie obserwacji z lat 1966–2005.

Tabela 4. Przepływy charakterystyczne w badanych profilach wodowskazowych [m<sup>3</sup>/s]

Table 4. Characteristic flow values at the profiles under study

Rzeka – River Wodowskaz – Profile	SNQ	SSQ	SWQ	NNQ	WWQ
Widawa Zbytowa	0,67	3,32	22,25	0,14	39,80
Nysa Kłodzka Międzylesie	0,13	0,69	7,30	0,05	41,70
Nysa Kłodzka Bystrzyca Kłodzka	0,70	4,25	54,74	0,28	282,00
Nysa Kłodzka Kłodzko	3,73	13,23	126,36	1,68	693,00
Nysa Kłodzka Bardo	5,62	18,94	213,48	2,84	1430,00
Ngaruroro Kuripapango	4,11	17,33	172,50	2,60	301,54
Trent Colwick	27,47	83,80	445,11	14,7	854,90

SNQ – Średnia z najniższych przepływów rocznych – Average Annual Minimum Flow  
 SSQ – Średnia ze średnich przepływów rocznych – Average Annual Average Flow  
 SWQ – Średnia z największych przepływów rocznych – Average Annual Maximum Flow  
 NNQ – Najniższy przepływ z wielolecia – Minimal Flow of whole period  
 WWQ – Najwyższy przepływ z wielolecia – Maximal Flow of whole period

W badanych zlewniach średni roczny opad waha się od 570 mm (zlewnia Widawy) do około 2000 mm (Ngaruroro River). Pozostałe wartości średniego rocznego opadu wyniosły: 760 mm – Trent River oraz 860 mm – w Kotlinie Kłodzkiej.

Obserwowane przepływy ze zlewni Nysy Kłodzkiej pochodzą z lat 1956–2005. Jednakże w żadnym przypadku nie opracowywano całego ciągu obserwacji. Najdłuższymi opracowywanymi seriami przepływów były ciągi 40-letnie. Z dłuższych serii przepływów wyznaczone charakterystyki mogą już nie być próbą prostą. Przeprowadzone testy wykazują (tab. 9, 10), że w przypadku standardowo wyznaczonych charakterystyk niżówki w profilu wodowskazowym Międzylesie, przy przepływach z lat 1956–2005, założenie o próbie prostej należy odrzucić.

W pracy posiadany materiał obserwacyjny podzielono na dwie części:

- **część I** to cztery profile wodowskazowe: Zbytowa, Międzylesie (przepływy z lat 1966–2005), Kuripapango oraz Colwick. Wybrano je jako wodowskazy testowe do weryfikacji poprawności oraz pokazania uniwersalności proponowanych me-

tod. Międzylesie jest reprezentantem zlewni górskiej, Zbytowa – zlewni nizinnej z charakterystycznym dla niej okresowym, silnym zarastaniem cieku (zarastanie cieku w okresie wegetacji ma niewątpliwy wpływ na warunki przepływu, szczególnie – w strefie stanów niskich). Dwa pozostałe profile wodowskazowe przedstawiają diametralnie różne zlewnie. Profil wodowskazowy w Colwick zamykający w mieście Nottingham (środkowa Anglia) górny i środkowy bieg rzeki Trent stanowi przykład częściowo zurbanizowanej (8% powierzchni zlewni), mocno zabudowanej obiektami hydrotechnicznymi zlewni nizinnej zachodniej Europy. Z kolei wodowskaz w Kuripapango zamykający górną część zlewni rzeki Ngaururo – Nowa Zelandia jest przykładem prawie całkowicie zalesionej zlewni górskiej [Tallaksen i van Lanen 2004]. Zlewnia ta nigdy nie była użytkowana rolniczo, a porastający ją las bukowy jest częścią rezerwatu Kaweka Forest Park, a więc posiada znamiona zlewni naturalnej.

- **część II** to profile wodowskazowe położone wzdłuż Nysy Kłodzkiej (Międzylesie, Bystrzyca Kłodzka, Kłodzko, Bardo), a także Zbytowa. Wybrano je do prezentacji możliwości stosowania proponowanych metod. W profilach wodowskazowych z Kotliny Kłodzkiej opracowywano przepływy z lat 1956–2005.

Zaproponowane w rozdziale 3. definicje POT oraz SPA wyznaczania obserwowanych niżówek wymagają określenia wysokości przepływu granicznego. W pracy, opierając się na sugestjach Tallaksen i van Lanen [2004], przepływ graniczny  $Q_g$  ustalono na poziomie  $Q_{70\%}$ . Jego wartość określono na podstawie przebiegu krzywych sum czasów trwania przepływów. W tabeli 5 przedstawiono przepływy graniczne uzyskane w badanych profilach wodowskazowych podane w  $\text{m}^3/\text{s}$  lub bezwymiarowo – jako przepływ graniczny  $Q_{70\%}$  podzielony przez średni dobowy przepływ. W dorzeczu Nysy Kłodzkiej przepływ graniczny  $Q_{70\%}$  wyznaczono na podstawie obserwacji z lat 1966–2005.

Tabela 5. Przepływy graniczne  $Q_{70\%}$  w  $[\text{m}^3/\text{s}]$  i bezwymiarowo

Table 5. Threshold runoffs  $Q_{70\%}$  in  $[\text{m}^3/\text{s}]$  and dimensionless

Wodowskaz Profile	$Q_{70\%}$ $[\text{m}^3/\text{s}]$	$\bar{Q}_{70\%}$ $[-]$
Zbytowa	1,40	0,421
Międzylesie	0,30	0,438
Bystrzyca Kłodzka	1,61	0,378
Kłodzko	6,70	0,507
Bardo	10,30	0,544
Kuripapango	8,44	0,486
Colwick	42,74	0,510

W każdym z profili, zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 3, wyznaczono niżówki letnie, zimowe oraz roczne. Otrzymano je, stosując poniższe restrykcje:

- minimalny czas pomiędzy sąsiadującymi niżówkami:  $m_t = 3$  dni;

- minimalny czasu trwania niżówki:  $m_c = 5$  dni;
- parametr redukujący nieistotne niżówki, o ile nie zostanie to wyraźnie zaznaczone:  $\alpha_0 = 0,005$ .

W przypadku zlewni europejskich za niżówki letnie uważane są te przepływy niskie, których większa frakcja czasu trwania przebiegała pomiędzy 1 maja a 31 października. W zlewni Ngaruroro jest to okres od 1 listopada do 30 czerwca (8 miesięcy). Pozostałe są niżówkami zimowymi.

Otrzymano dwa ciągi  $\{\bar{d}_i\}, \{t_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n_s$  obserwowanych normowanych niedoborów przepływów  $\bar{d}_i$  oraz czasów trwania  $t_i$  o liczebnościach przedstawionych w tabelach 6–7. W profilach wodowskazowych Zbytowa oraz Kuripapango niżówek zimowych było zbyt mało i zostały pominięte w dalszych obliczeniach.

Tabela 6. Liczba obserwowanych niżówek  $n_s$  (POT) – przepływ graniczny  $Q_{70\%}$

Table 6. Observed low flows number  $n_s$  (POT) – threshold level  $Q_{70\%}$

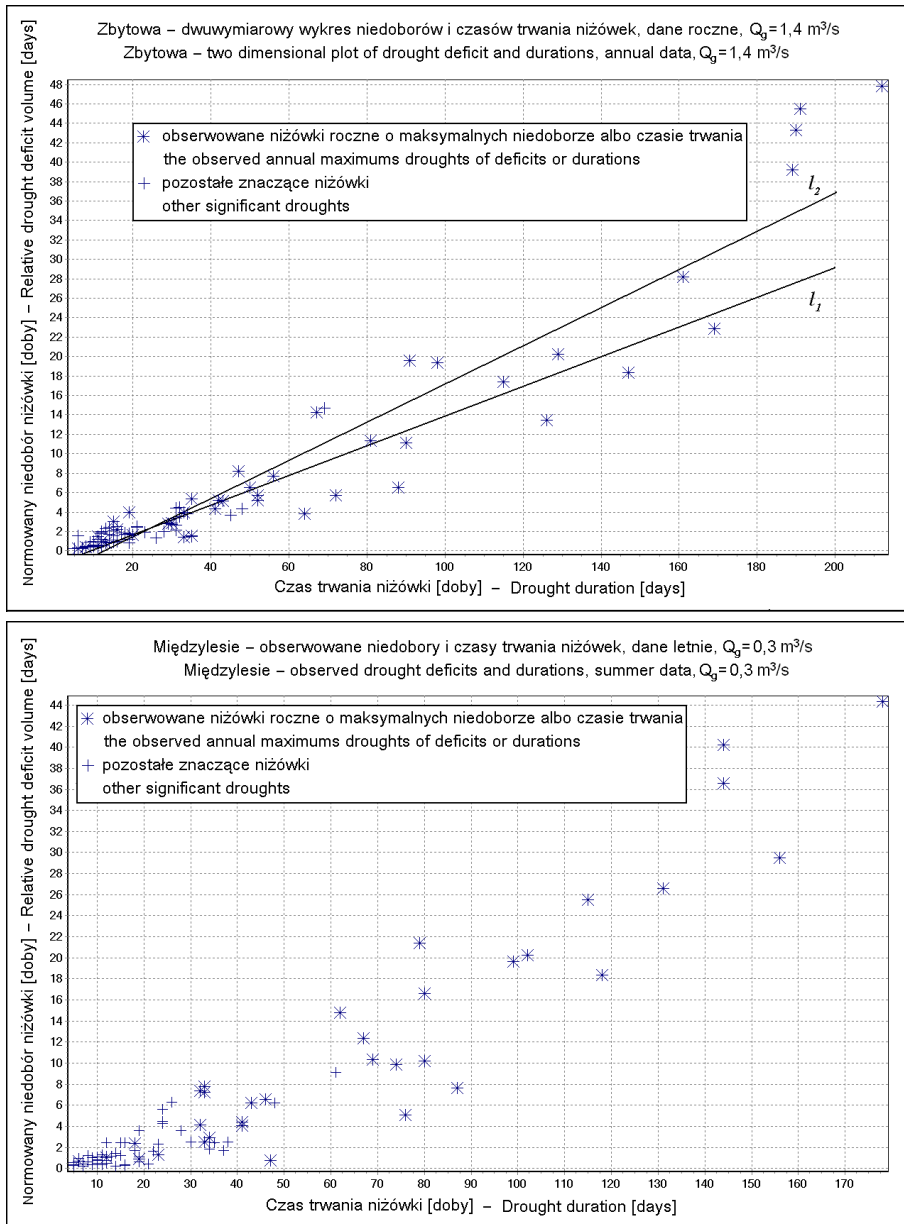
Wodowskaz Profile	Niżówki roczne Annual low flows	Niżówki letnie Summer low flows	Niżówki zimowe Winter low flows
Zbytowa	105	84	21
Międzylesie	140	83	57
Bystrzyca Kłodzka	168	96	72
Kłodzko	136	65	71
Bardo	133	68	65
Kuripapango	170	149	21
Colwick	165	136	29

Tabela 7. Liczba obserwowanych niżówek  $n_s$  (SPA) – przepływ graniczny  $Q_{70\%}$

Table 7. Observed low flows number  $n_s$  (SPA) – threshold level  $Q_{70\%}$

Wodowskaz Profile	Niżówki roczne Annual low flows	Niżówki letnie Summer low flows	Niżówki zimowe Winter low flows
Zbytowa	62	56	6
Międzylesie	99	61	38
Kuripapango	112	95	17
Colwick	85	79	6

Jak wykazano w rozdziale 3. (rys. 3) rozkłady częstości obserwowanych niedoborów przepływów i czasu trwania niżówki są mocno asymetryczne, zatem interesująca jest ich łączna analiza, szczególnie gdy oceniane są wysokie wartości charakterystyk. Przykładowe zależności są przedstawione na rysunku 4. Zaznaczono



Rys. 4. Zależność pomiędzy obserwowanymi normowanymi niedoborami przepływów oraz czasami trwania rocznej niżówki – rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej (wykres górny) i letniej niżówki – rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu (wykres dolny)

Fig. 4. The dependence between observed low flows characteristics – annual data, the Widawa River, Zbytowa Profile (upper figure) and summer data, the Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile (bottom figure)

na nim roczne niżówki obserwowane w Zbytowej oraz z sezonu letniego w Międzyzlesiu. Na osiach poziomych przedstawiono czasy trwania w dniach, zaś na pionowych normowane niedobory przepływów wyrażone w dobach średniego przepływu. Obserwacje zaznaczono gwiazdkami lub krzyżykami. Gwiazdki oznaczają maksymalne niżówki w roku (sezonie) liczone albo ze względu na niedobór przepływów, albo czas trwania; krzyżyki – pozostałe niżówki. Tak jak można było się spodziewać, im dłuższy jest czas trwania niżówki, tym większy jest niedobór. Wzrost jednak nie jest liniowy. Widoczna jest tu pewna genetyczna niejednorodność. Spowolnienie prędkości przyrostu niedoboru przepływów sugeruje wyczerpywanie się łatwo dostępnych wód podziemnych. Zmieniają się zatem warunki hydrologiczne w zlewni. Taka niejednorodność pojawia się niezależnie od tego, czy rozpatrywane są niżówki roczne, czy też sezonowe.

Tabela 8. Największe głębokie niżówki obserwowane w Zbytowej i Międzyzlesiu

Table 8. Maximal large low flows observed in Zbytowa and Międzyzlesie

Wodowskaz Profile	Termin niżówki Low flow term	Niedobór $d$ [tys. m <sup>3</sup> ] Deficit vol. $d$ [1000m <sup>3</sup> ]	Normowany niedobór $\bar{d}$ [doby] Relative deficit vol. $\bar{d}$ [days]	Czas trwania $t$ [doby] Duration $t$ [days]
Zbytowa	25.05–24.12.2003	13 732	47,82	212
	07.05–13.11.1992	13 062	45,49	191
	03.05–08.11.2004	12 432	43,30	190
	11.05–17.11.1990	11 263	39,22	189
	10.06–27.11.1983	6 563	22,86	169
	19.06–27.11.2002	8 098	28,20	161
Międzyzlesie	29.05–26.11.1983	2 625	44,33	178
	05.07–25.11.1992	2 382	40,23	144
	17.06–09.11.2004	2 165	36,56	144
	10.05–21.10.1993	1 745	29,47	156

Analiza danych wykazuje, że w zestawie danych występuje kilka, rzadziej kilkanaście niżówek o długości czasu trwania dochodzącej nawet do całego roku kalendarzowego! W przykładowych polskich profilach wodowskazowych (tab. 8) maksymalny czas trwania zaobserwowanych niżówek jest rzędu 200 dni. Powstawanie tak głębokich, długotrwałych niżówek, mających charakter przedłużającej się suszy wydaje się być efektem zupełnie innych procesów hydrometeorologicznych czy hydrogeologicznych niż tych krótszych trwających do kilkudziesięciu dni [Dracup 1980], [Dubicki 2002]. Warto również zauważyć, że wszystkie przedstawiane niżówki rozpoczynają się w maju, czerwcu lub na początku lipca. W dotychczasowych badaniach, z powodu zbyt krótkich ciągów jednorodnych przepływów, problem tak dużych niżówek, w statystycznym opisie zjawiska, był dotychczas pomijany.

Potwierdzeniem tej niejednorodności mogą być proste obliczenia przeprowadzone na obserwowanych czasach trwania i normowanych niedoborach przepływów w Zbytowej. Jeśli nie uwzględnimy czterech największych niżówek, charakterystyki pozostałych aproksymujemy prostą  $l_1$  (górny wykres rys. 4), to średniokwadratowy błąd normowanych niedoborów wynosi 52,8 tys. m<sup>3</sup>. Dla pominiętych niżówek błąd względem prostej  $l_1$  to aż 2 262 tys. m<sup>3</sup>. Podczas podobnej aproksymacji charakterystyk wszystkich niżówek (rys. 4 prosta  $l_2$ ) odpowiedni średniokwadratowy błąd wynosi 80,7 tys. m<sup>3</sup> – ponad 50% więcej niż podczas estymacji prostą  $l_1$ .

Tabela 9. Obserwowane niżówki (metoda POT) –  $p$ -wartości testu współczynnika korelacji rangowej Spearmana na trend wartości średniej

Table 9. Observed low flows (POT method) –  $p$ -values of the Spearman's rank correlation test of mean value trend signification

Wodowskaz Profile Lata Years	Normowany niedobór Relative deficit volume				Czas trwania – Duration			
	Cały rok Annual		Lato Summer		Cały rok Annual		Lato Summer	
$\alpha_0 =$	0,005	0,030	0,005	0,020	0,005	0,030	0,005	0,020
Zbytowa	0,054	0,432	0,052	0,321	0,146	0,852	0,053	0,652
Międzylesie 1966–1995		0,300		0,247		0,891		0,961
Międzylesie 1966–2005	0,071	0,170	0,053	0,252	0,362	1,000	0,565	0,616
Międzylesie 1956–2005	<i>0,0008</i>	0,093	<i>0,0003</i>	0,237	0,090	1,000	0,114	0,995
Bystrzyca Kł. 1956–1995		0,510		0,440		0,675		0,383
Bystrzyca Kł. 1966–2005		0,095		0,421		0,233		0,507
Kłodzko 1956–1995		0,629		0,663		0,366		0,127
Kłodzko 1966–2005		0,723		0,661		0,912		0,624
Bardo 1956–1995		0,455		0,772		0,611		0,672
Bardo 1966–2005		0,708		0,393		0,914		0,790
Kuripapango	0,318	0,997	0,340	0,943	0,209	0,795	0,241	0,917
Colwick	0,443	0,202	0,386	0,488	0,888	0,070	0,920	0,786

Z drugiej strony standardowe statystyczne testy nieparametryczne generalnie nie sugerują występowania niejednorodności. Obserwowane ciągi niedoborów

przepływów oraz czasów trwania badano ze względu na ich jednorodność oraz występowanie trendu wartości średniej. W tym celu zastosowano test serii oraz test współczynnika korelacji rangowej Spearmana na trend wartości średniej.

Tabela 10. Obserwowane niżówki (metoda POT) –  $p$ -wartości testu serii losowości obserwowanych niżówek

Table 10. Observed low flows (POT method) –  $p$ -values of the runs test of the randomness of observed low flows

Wodowskaz Profile Lata Years	Normowany niedobór Deficit volume				Czas trwania – Duration			
	Cały rok Annual		Lato Summer		Cały rok Annual		Lato Summer	
$\alpha_0 =$	0,005	0,030	0,005	0,020	0,005	0,030	0,005	0,020
Zbytowa	0,769	0,810	0,826	0,614	0,389	0,229	0,661	0,131
Międzylesie 1966–1995		0,730		0,220		0,575		0,874
Międzylesie 1966–2005	0,865	0,301	0,911	0,155	0,396	0,423	0,151	0,912
Międzylesie 1956–2005	0,152	1,000	0,693	0,328	0,151	0,402	0,018	0,007
Bystrzyca Kł. 1956–1995		0,101		0,306		0,101		1,000
Bystrzyca Kł. 1966–2005		0,921		0,717		0,141		0,397
Kłodzko 1956–1995		1,000		0,127		0,442		0,067
Kłodzko 1966–2005		0,900		0,324		0,689		0,742
Bardo 1956–1995		0,201		0,230		0,081		0,085
Bardo 1966–2005		0,261		0,463		0,107		0,185
Kuripapango	0,218	0,500	0,681	0,456	0,284	0,924	0,287	0,997
Colwick	0,310	0,586	0,106	0,289	0,947	0,327	0,302	0,289

W testowych profilach wodowskazowych (Zbytowa, Międzylesie, Kuripapango oraz Colwick), korzystając z 40-letnich obserwacji przepływów, badano niżówki wyznaczone przy parametrze redukującym  $\alpha_0 = 0,005$ . Przeprowadzona w następnych rozdziałach pracy analiza zarówno w przypadku 40-, jak i 30-letnich ciągów sugeruje zwiększenie wartości parametru  $\alpha_0$ . We wszystkich badanych profilach wodowskazowych testowano również jednorodność oraz występowanie trendu wartości średniej gdy  $\alpha_0 = 0,03$  – niżówki roczne oraz  $\alpha_0 = 0,02$  – niżówki letnie. W tabelach 9–10, przedstawiono odpowiednie  $p$ -wartości rozpatrywanych testów.

Dodatkowo w profilu wodowskazowym Międzylesie testowano również ciągi 50-letnie dla przepływów z lat 1956–2005. W tym przypadku hipotezę o braku trendu, liczoną przy parametrze redukującym  $\alpha_0 = 0,005$ , należy odrzucić. Istnienie trendu spowodowało, iż w danych testowych wykorzystanych w części I ograniczono długości opracowywanych ciągów przepływów do 40 lat.

Tylko w jednym przypadku – przepływów niskich wyznaczonych metodą POT z parametrem redukującym  $\alpha_0 = 0,005$  w profilu wodowskazowym w Zbytowej – obliczona  $p$ -wartość statystyki testowej na trend wartości średniej jest bliska 0,05. W pozostałych przypadkach  $p$ -wartości są wyższe i hipotezę o istotności liniowego trendu należało odrzucić. W przypadku drugiej z hipotez – o losowości pobranych niedoborów przepływów i czasów trwania (tab. 10) w żadnym z badanych posterunków wodowskazowych nie było podstaw do odrzucenia hipotez o braku losowości badanych prób.

Podobne wyniki otrzymano, testując charakterystyki niżówek uzyskane metodą SPA.

Tak przygotowane dane wykorzystano do estymacji rozkładów oraz rozkładów maksymalnych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówek. W rozdziale 5. przedstawiono estymację jednowymiarowych rozkładów charakterystyk maksymalnych – każdej z charakterystyk oddzielnie. W kolejnych rozdziałach (6, 7) zajęto się estymowaniem ich dwuwymiarowej postaci.



## 5. JEDNOWYMIAROWE ROZKŁADY CHARAKTERYSTYK NIŻÓWEK MAKSYMALNYCH

W rozdziale przedstawiono dwie metody estymacji jednowymiarowych rozkładów maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki; pierwszą jest model Zelenhasicia i Salvai (ZS), drugą – uogólniony rozkład Pareto (GPD). Opisano metody dopasowania modeli do obserwowanych charakterystyk maksymalnych dla niżówek wyznaczonych definicjami: POT i SPA. W końcu rozdziału porównano otrzymane obydwojma metodami rozkłady oraz skomentowano wyniki dopasowania obu estymatorów kwantyli wyznaczanych dla wysokich prawdopodobieństw nieprzekroczenia.

Niech ciąg zmiennych losowych  $A_1, A_2, \dots, A_n$  opisuje jedną z badanych charakterystyk niżówki. Oznacza to, że gdy  $A_i = \overline{D}_i$ , to opisywany jest normowany niedobór przepływów, natomiast gdy  $A_i = T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , to badany jest czas trwania niżówki. Zakłada się, że  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie  $F(x) = \Pr(A_i \leq x)$ .

W wielu zadaniach, a także w tej pracy, rozważa się rozkład zmiennej losowej

$$M_n = \max_{i=1, \dots, n} A_i \quad (5.1)$$

maksymalnych wartości charakterystyki  $A_i$ . Indeks  $n$  mówi o liczbie powtórzeń zdarzenia ( $A_i \leq x$ ). W zależności od przyjętego modelu  $n$  może być zmienne – wtedy jest zmienną losową, lub ustalone. Rozważana jest również sytuacja, gdy wartość  $n$  dąży do nieskończoności (można wtedy mówić o charakterystykach maksymalnych).

Jeśli dystrybuanta  $F$  byłaby znana, to dla ustalonego  $n$ , przy założeniu niezależności zmiennych losowych  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , można łatwo pokazać, że

$$H(x) = \Pr(M_n \leq x) = F^n(x). \quad (5.2)$$

W praktyce rozkład  $F$  jest nieznan, może być tylko estymowany z próby obserwowanych charakterystyk niżówki. Oznacza to, że przy dużych  $n$  wzór 5.2 nie może być stosowany [Coles 2001] – nawet niewielki błąd estymatora  $\hat{F}$  powoduje już znaczący błąd estymatora  $\hat{F}^n$ . Dlatego też rozkład maksymalnych wartości charakterystyki  $A_i$  wyznaczany jest w sposób „okrężny”. W literaturze proponowane są dwie metody:

1. Model Zelenhasicia i Salvai [Zelenhasić i Salvai 1987]. W tym modelu bezpośrednio estymuje się rozkład  $F(x)$ , jednocześnie mocno ograniczając wartość  $n$  – badana jest wtedy liczba wystąpień niżówki w zadanym okresie czasu, z reguły nie dłużym niż 1 rok.
2. Metoda wynikająca z klasycznego twierdzenia o granicznym rozkładzie zmiennej losowej  $M_n$  [Coles 2001]. W tym przypadku rezygnuje się z estymacji rozkładu  $F$  na korzyść bezpośredniej estymacji granicznej postaci ( $n \rightarrow \infty$ ) rozkładu  $F^n$ . Takiej estymacji można dokonywać na dwa sposoby:

- wykorzystując uogólniony rozkład wartości ekstremalnych (GEV);
- korzystając z przybliżenia rozkładu GEV – uogólnionym rozkładem Pareto (GPD).

Obie metody mają swoje specyficzne uwarunkowania. W pierwszej estymowane są rozkłady prawdopodobieństw rocznych czy sezonowych maksymalnych charakterystyk – inaczej mówiąc, prowadzi ona do wyznaczania klasycznego estymatora  $m$ -letniej maksymalnej charakterystyki niżówki. Metoda ta, co zostanie pokazane poniżej, jest uogólnieniem standardowego podejścia, opracowywania jednego zjawiska rocznie (sezonowo). Druga z metod mówi o rozkładach maksymalnych charakterystyk, odchodzi od umiejscowienia obserwowanej niżówki w czasie. Znaczenie ma tylko wielkość obserwowanej charakterystyki – bezpośrednio poszukiwana jest graniczna postać rozkładu 5.2. Zatem w obu metodach rozpatrywane są inne zmienne losowe, mimo że opisywane jest to samo zjawisko. Przejście pomiędzy metodami nie następuje automatycznie. Wykorzystując estymatory rozkładów ekstremalnych, można próbować stosować je bezpośrednio w modelu Zelenhasicia i Salvai, podstawiając w miejsce dystrybuanty  $F(x)$  jej graniczną postać. W przeciwnym kierunku przejście nie wydaje się możliwe.

W dalszej części pracy niżówkę o maksymalnych charakterystykach, spełniającą warunek (5.1) ( $n$  ograniczone) lub jego graniczną postać ( $n \rightarrow \infty$ ), nazwano niżówką maksymalną. Oznacza to, że w zależności od rozważanej metody opracowywania danych pojęcie niżówki maksymalnej ulega modyfikacji.

Zastosowanie modelu Zelenhasicia i Salvai oraz rozkładu GPD do estymacji rozkładów maksymalnych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki przedstawiono w poniższym rozdziale.

## 5.1. Model Zelenhasicia i Salvai (ZS)

Niech  $A_\tau, \tau = 1, 2, \dots$  oznacza pewną, badaną w przedziale czasowym  $[0, T_C]$ , jednowymiarową charakterystykę. Rozkład  $F_\tau(x) = \Pr(A_\tau \leq x)$  – używany był do wyznaczenia rozkładu charakterystyki maksymalnej zgodnie z formułą podaną w pracy Todorowicia i Zelenhasicia [1970]:

$$\begin{aligned} & \Pr \left( \sup_{\tau} A_\tau \leq x, t(\tau) < T_C \right) \\ &= \Pr(E = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Pr \left( \bigcap_{\tau=1}^n (A_\tau \leq x) \cap (E = n) \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

gdzie: czas  $t(\tau)$  – oznacza środek  $\tau$ -tej niżówki, a zmienna losowa  $E$  – liczbę niżówek w przedziale czasowym  $[0, T_C]$ . Przedział  $[0, T_C]$  powinien być tak dobrany, aby uwzględniana była przynajmniej roczna cykliczność zjawisk przyrodniczych. Może być on również ograniczany do pewnego okresu w roku, w którym obserwowane niżówki są genetycznie jednorodne. Często przyjmuje się, że  $[0, T_C]$  określa cały rok (niżówki roczne) lub jedno z półroczy (niżówki sezonowe – letnie albo zimowe).

Ozga-Zielińska [Zielińska 1963, 1964] sugeruje, że wpływ jednorodności sezonowej jest tak wysoki, iż należałoby rozpatrywać tylko niżówki sezonowe. Oczywiście, przy takich założeniach, z powodu rocznej periodyczności nie można wydłużyć przedziału  $[0, T_C]$  ponad jeden rok.

W formule (5.3) prawdopodobieństwo iloczynu  $\bigcap_{\tau=1}^n (A_\tau \leq x) \cap (E = n)$  jest trudne do wyznaczenia, przeto nakłada się na występujące w nim zmienne losowe oraz ich rozkłady różne ograniczenia. Przyjmując za Zelenhasiciem i Salvai [1987], że w przedziale czasowym  $[0, T_C]$  charakterystyki wszystkich niżówek są niezależne od siebie, mają ten sam rozkład  $F_\tau(x) = F(x)$  oraz nie zależą od liczby niżówek w  $[0, T_C]$ , rozkład (5.3) można zapisać w postaci:

$$H(x) = \Pr(E = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} F^n(x) \Pr(E = n), \quad (5.4)$$

gdzie  $H(x)$ , zdefiniowane w (5.2), jest dystrybuantą charakterystyki maksymalnej. W programie Nizowka2003 [Jakubowski i Radczuk 2004] powyższy wzór został wykorzystany do wyznaczania rozkładów maksymalnych niedoborów przepływów oraz maksymalnych czasów trwania niżówek wyznaczonych metodą POT. W dalszej części pracy wzór (5.4) nazwany jest modelem Zelenhasicia i Salvai (modelem ZS).

Dalej idące uproszczenie zakłada, że prawdopodobieństwo (5.4) można zapisać formułą:

$$H_1(x) = \Pr(E = 0) + G(x) \Pr(E > 0) \quad (5.5)$$

gdzie  $G(x)$  oznacza rozkład maksymalnej charakterystyki w przedziale czasowym  $[0, T_C]$ . Jeśli poziom odcięcia definiujący niżówkę położyć tak wysoko, aby  $\Pr(E = 0)$  było bliskie 0, to można przyjąć, że rozkład  $H_1(x) = G(x)$ . Takie uproszczenie odpowiada standardowemu podejściu – pobierania pojedynczej obserwacji w roku (półroczu) i na tej podstawie oceniania poszukiwanych prawdopodobieństw maksymalnych.

## 5.2. Model Zelenhasicia i Salvai – estymacja parametrów rozkładów

Zgodnie z przyjętą definicją niżówki (rozdz. 3), przy określonych kryteriach uściślających [Zelenhasić i Salvai 1987] z ciągu codziennych obserwowanych przepływów wyznacza się dwa ciągi charakterystyk: normowanych niedoborów przepływów oraz czasów trwania. Następnie obliczana jest liczba niżówek w każdym przedziale czasowym  $[0, T_C]$ . Tak wyznaczone charakterystyki niżówek są poddawane estymacji statystycznej. Aby obliczyć podany formułą (5.4) rozkład  $H(x)$ , należy dopasować do danych empirycznych rozkłady dwóch zmiennych losowych: liczby niżówek w przedziale czasowym  $[0, T_C]$  oraz zamiennie albo ich normowane

niedobory przepływów, albo ich czasy trwania. Testowane są następujące rozkłady [Jakubowski 2005a], w odniesieniu do liczby niżówek w  $[0, T_C]$ :

– Poissona z parametrem  $\lambda$ :

$$Pr(E = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.6)$$

– Pascala (ujemny dwumianowy) z parametrami  $v$  i  $p$ :

$$Pr(E = n) = (-1)^k \binom{-v}{n} p^n q^v, \quad p + q = 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.7)$$

oraz do charakterystyk niżówek  $A = A_\tau$  rozkłady o funkcjach gęstości  $f(x)$ :

– Gamma (Pearsona III typu) z parametrami  $\alpha$  i  $\nu$ :

$$f(x) = \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0 \quad (5.8)$$

– Weibulla z parametrami  $\alpha$  i  $\lambda$ :

$$f(x) = \alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}, \quad x > 0 \quad (5.9)$$

– Logarytmiczno-normalny z parametrami  $\mu$  i  $\sigma$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln \frac{x-\mu}{2\sigma^2})^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0 \quad (5.10)$$

– Johnsona [Johnson 1949] z parametrami  $\mu$  i  $\sigma$  oraz  $a$  i  $b$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{b-a}{(x-a)(b-x)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln \frac{x-a}{b-x} - \mu)^2}, \quad a < x < b \quad (5.11)$$

– Podwójnie wykładniczy (Gumbela) z parametrami  $\alpha$  i  $\mu$ :

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha(x-\mu)} e^{-e^{-\alpha(x-\mu)}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (5.12)$$

– Uogólniony Pareto (GP) z parametrami  $\alpha$  i  $\kappa$ ,  $\kappa < 0$ :

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \kappa \frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\kappa}-1}, \quad x > 0 \quad (5.13)$$

Estymację nieznanymi parametrów przeprowadzono metodą największej wiarygodności (dodatek A.1). Jedynie w przypadku rozkładu Johnsona parametry przesunięcia  $a$  i  $b$  dobierane są tak, aby minimalizowana była wartość kryterium Akaike [1974] – pozostałe dwa parametry są estymowane metodą największej wiarygodności. Do oceny hipotezy o zgodności obserwowanych charakterystyk niżówki z rozkładami teoretycznymi użyto testu  $\chi^2$ . Do wyznaczania rozkładu maksymalnej charakterystyki niżówki wykorzystano tylko te rozkłady, w których obliczona

$p$ -wartość statystyki testowej  $\chi^2$  ( $p = \Pr(\chi^2 \geq \chi_{obl}^2)$ ) była nie mniejsza niż 0,05. Do dalszych obliczeń program Nizowka2003 [Jakubowski i Radczuk 2004] proponuje wybór tego z rozkładów, w którym prawdopodobieństwo  $p$  jest największe. Po dokonaniu estymacji i podstawieniu otrzymanych rozkładów do formuły (5.4) wyznaczono rozkład maksymalnej charakterystyki. Do jego obliczenia wykorzystano fakt, że przyjęcie za estymator rozkładu liczby niżówek rozkładu Poissona sprowadza wzór (5.4) do postaci:

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^n(x) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda(1-F(x))} \quad (5.14)$$

zaś rozkładu Pascala do postaci:

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^n(x) (-1)^n \binom{-v}{n} p^n q^v = \left( \frac{q}{1-pF(x)} \right)^v \quad (5.15)$$

### 5.3. Model Zelenhasicia i Salvai – przykłady zastosowań

Model Zelenhasicia i Salvai testowano w przykładowych, opisanych w rozdziale 4. profilach wodowskazowych – Zbytowa, Międzylesie, Kuripapango oraz Colwick.

#### 5.3.1. Niżówki wyznaczone metodą POT

Dla każdego z profili, do niżówek wyznaczonych metodą POT, stosując opisane w rozdziale 4. restrykcje, wyodrębnione zostały dwa ciągi obserwowanych charakterystyk:

- normowanych niedoborów przepływów  $\bar{d}_i$ ;
- czasów trwania  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Podczas testowania wszystkie czasy trwania obniżono o  $m_c - 1$ , gdzie  $m_c$  jest minimalnym czasem ustalonym w kryterium, uściślającym sposób wyznaczania niżówki (w badanych przykładach  $m_c = 5$ ). W tabelach 11–12 przedstawione są wyniki dopasowania obserwowanych charakterystyk do teoretycznego rozkładu (5.4). Dla każdego z profili wyznaczono niżówki letnie, zimowe oraz roczne.

W przypadku zlewni polskich w żadnym z badanych profili nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności teoretycznych rozkładów liczby niżówek w roku (sezonie), ich niedoborów przepływów oraz czasów trwania (tab. 11, 12). Obliczone  $p$ -wartości testu  $\chi^2$  były nie mniejsze niż 0,05. Jedynie w Zbytowej w sezonie zimowym, z powodu zbyt małej liczby zaobserwowanych niżówek, nie można było przeprowadzić estymacji. W tabelach 11–12 nie większa niż 0,05, zapisana kursywą  $p$ -wartość statystyki testowej  $\chi^2$  oznacza odrzucenie hipotezy o zgodności testowanego rozkładu teoretycznego z badaną próbą. W Colwick brak jest dopasowania

liczby rocznych niżówek zarówno do rozkładu Pascala, jak i Poissona. Złe dopasowanie można także zaobserwować w profilu Kuripapango. Dotyczy ono również liczby niżówek w sezonie letnim. Jak to będzie widoczne poniżej (rozdz. 6. i 7.), to złe dopasowanie w dużej mierze jest wynikiem pewnej niejednorodności próby obserwowanych niżówek, chociaż, jak to było widać w rozdziale 4., proste metody statystyczne nie stwierdzają takiej niejednorodności.

Korzystając ze wzorów 5.14 i 5.15 oraz z dopasowanych do danych empirycznych rozkładów teoretycznych, łatwo wyznaczyć estymowane rozkłady maksymalnych charakterystyk niżówki. Rysunki 5–12 przedstawiają dopasowane krzywe rozkładu maksymalnych normowanych niedoborów przepływów (górne wykresy) oraz czasów trwania niżówek (dolne wykresy) wszystkich rozważanych profili. Gwiazdkami zaznaczone są maksymalne w sezonie obserwowane charakterystyki. Każdego roku (półroczna) wyznaczana jest tylko jedna maksymalna obserwacja. Liniami ciągłymi przedstawiony jest poszukiwany rozkład. Na osi poziomej zaznaczone jest wyrażone w % prawdopodobieństwo nieprzekroczenia, na osi pionowej – albo normowany średnim dobowym odpływem niedobór przepływów niżówki, albo czas jej trwania.

Dobroć dopasowania, mierzona testem zgodności  $\lambda$  Kołmogorowa, przedstawiono w tabeli 13 (liczebności prób obserwowanych charakterystyk zostały przedstawione w tabeli 6). Na poziomie istotności  $\alpha_{\text{kryt}} = 0,05$  hipotezę o zgodności należy odrzucić, gdy obliczona wartość statystyki testowej jest wyższa niż 1,36. Dlatego też w profilu Kuripapango podczas testowania rozkładu czasów trwania niżówki nie można stosować modelu Zelenhasicia i Salvai. W tabeli 13 takie niedopasowanie także zostało zaznaczone italiakiem, a w sezonach i profilach, gdzie hipotezę o zgodności obserwowanych charakterystyk do rozkładów teoretycznych należało odrzucić (por. tab. 11, 12), obliczona wartość statystyki testowej  $\lambda$  Kołmogorowa została pogrubiona. W tych przypadkach także zgodność z teoretycznym rozkładem (5.4) należy odrzucić. Widać stąd, że w profilu Kuripapango (rys. 10), model Zelenhasicia i Salvai przy poziomie odcięcia  $Q_{70\%}$  nie powinien być w ogóle stosowany. Podobnie jest z rocznymi niżówkami w Colwick. To niedopasowanie potwierdzają przebiegi wykresów estymowanych rozkładów. Ich linie przebiegają znacznie poniżej obserwowanych charakterystyk niżówek.

Na wszystkich wykresach można zauważyć, iż przy wysokich, przekraczających 50% prawdopodobieństwach nieprzewyższenia dopasowanie danych do estymowanego rozkładu nie jest najlepsze. W przypadku prawdopodobieństw nieprzewyższenia rzędu 60%–80% wyniki estymacji są niedoszacowane, kiedy zaś przekraczają 90% – przeszacowane. Prawdopodobne powody takiego zachowania się estymowanych rozkładów są następujące:

- w obserwowanym ciągu charakterystyk występuje zbyt duża liczba płytkich, o niskim niedoborze przepływów i krótkim czasie trwania niżówek;
- nie do końca jest rozpoznana niejednorodność przepływów niskich.

Należy dodać, że stan przeszacowania jest obserwowany zarówno przy ocenie prawdopodobieństw niżówek wyznaczonych z rocznych, jak i sezonowych danych. Co więcej, dobroć dopasowania nie poprawia się, jeśli rozważane są tylko niżówki sezonowe. Jedynie, gdy estymowane są rozkłady niżówek zimowych (tab. 13), to ob-

liczona wartość statystyki testowej  $\lambda$  Kołmogorowa jest niższa niż rocznych. W pozostałych przypadkach wartość statystyki testowej obliczona dla niżówek letnich jest porównywalna albo wyższa niż obliczana dla niżówek rocznych. Sugerowałoby to, że niejednorodność sezonowa nie jest główną przyczyną powodującą trudności z dopasowaniem teoretycznych rozkładów charakterystyk niżówek. Oznacza to, że istnieją inne czynniki przyrodnicze (hydrologiczne, meteorologiczne itp.) w różny sposób wpływające na ich wielkość i czas trwania.

Tabela 11. Estymacja rozkładów maksymalnego normowanego niedoboru przepływów i maksymalnego czasu trwania niżówki (POT) – część I

Table 11. Estimation of low flows (POT) maximal relative deficit volume and maximal duration distributions – part I

Wodowskaz /rzeka Profile /river	Sezon Season	Charakte- rystyki Indices	Estymowane rozkłady Estimated distributions	$p$ -wartość testu $\chi^2$ $\chi^2$ test $p$ -value	
Zbytowa /Widawa	Letni Summer	L. niżówek w sezonie <sup>1</sup>	Poisson	0,3374	
		Normowany niedobór <sup>2</sup>	G. Pareto	0,1293	
		Czas trwania <sup>3</sup>	G. Pareto	0,4286	
	Zimowy Winter	Rozkład nieokreślony <sup>4</sup>			
	Roczny Annual	L. niżówek w sezonie	Poisson	0,8992	
		Normowany niedobór	G. Pareto	0,1363	
		Czas trwania	G. Pareto	0,4515	
	Międzylesie /Nysa Kłodzka	Letni Summer	L. niżówek w sezonie	Poisson	0,3598
			Normowany niedobór	G. Pareto	0,6309
Czas trwania			G. Pareto	0,1730	
Zimowy Winter		L. niżówek w sezonie	Pascal	0,0973	
		Normowany niedobór	G. Pareto	0,5795	
		Czas trwania	log-normal	0,8129	
Roczny Annual		L. niżówek w sezonie	Pascal	0,0774	
		Normowany niedobór	G. Pareto	0,8189	
		Czas trwania	G. Pareto	0,5146	

<sup>1</sup> Low flow number during the season

<sup>2</sup> Relative deficit volume

<sup>3</sup> Duration

<sup>4</sup> Unspecified distribution.



Tabela 12. Estymacja rozkładów maksymalnego normowanego niedoboru przepływów i maksymalnego czasu trwania niżówki (POT) – część II

Table 12. Estimation of low flows (POT) maximal relative deficit volume and maximal duration distributions – part II

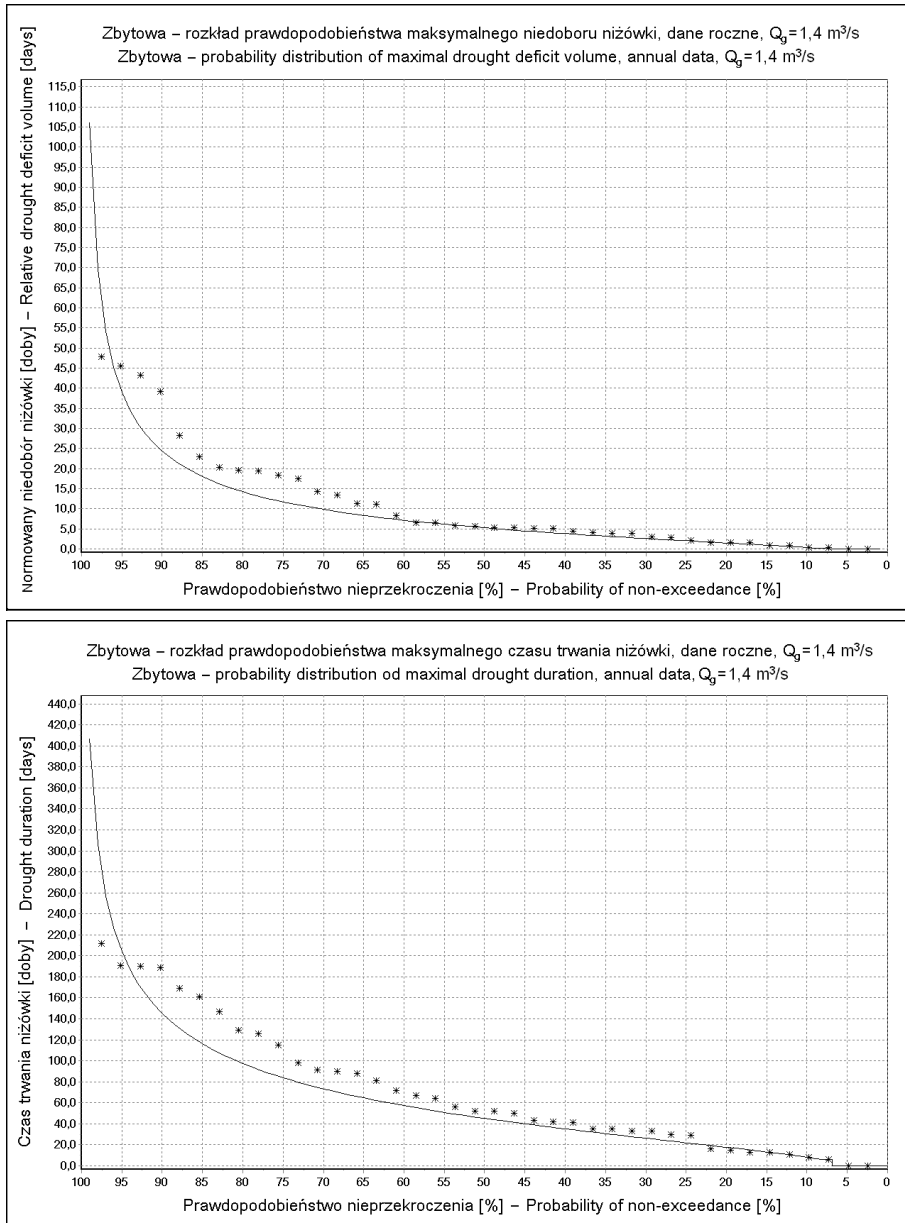
Wodowskaz /rzeka Profile /river	Sezon Season	Charakte- rystyki Indices	Estymowane rozkłady Estimated distributions	<i>p</i> -wartość testu $\chi^2$ $\chi^2$ test <i>p</i> -value	
Kuripapango /Ngaruroro River	Letni Summer	L. niżówek w sezonie <sup>1</sup>	Poisson	0,0090	
		Normowany niedobór <sup>2</sup>	G. Pareto	0,6115	
		Czas trwania <sup>3</sup>	Weibull	0,9820	
	Zimowy Winter	Rozkład nieokreślony <sup>4</sup>			
	Roczny Annual	L. niżówek w sezonie	Poisson	0,1123	
		Normowany niedobór	G. Pareto	0,6269	
		Czas trwania	G. Pareto	0,8928	
	Colwick /Trent River	Letni Summer	L. niżówek w sezonie	Poisson	0,0692
			Normowany niedobór	G. Pareto	0,0911
Czas trwania			G. Pareto	0,4495	
Zimowy Winter		L. niżówek w sezonie	Pascal	0,8959	
		Normowany niedobór	log-normal	0,5062	
		Czas trwania	Pearson	0,8225	
Roczny Annual		L. niżówek w sezonie	Poisson	0,0226	
		Normowany niedobór	G. Pareto	0,1137	
		Czas trwania	log-normal	0,5395	

<sup>1</sup> Low flow number during the season

<sup>2</sup> Relative deficit volume

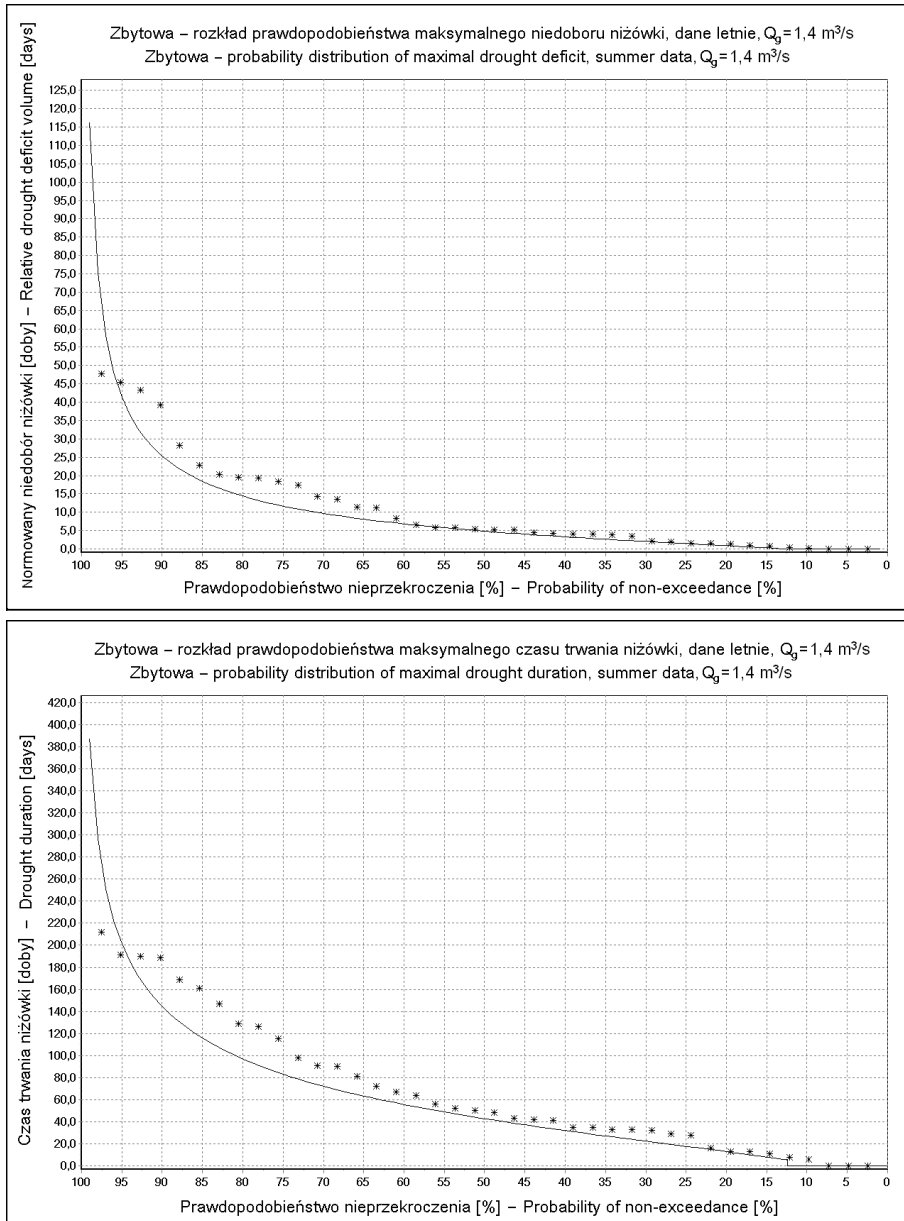
<sup>3</sup> Duration

<sup>4</sup> Unspecified distribution



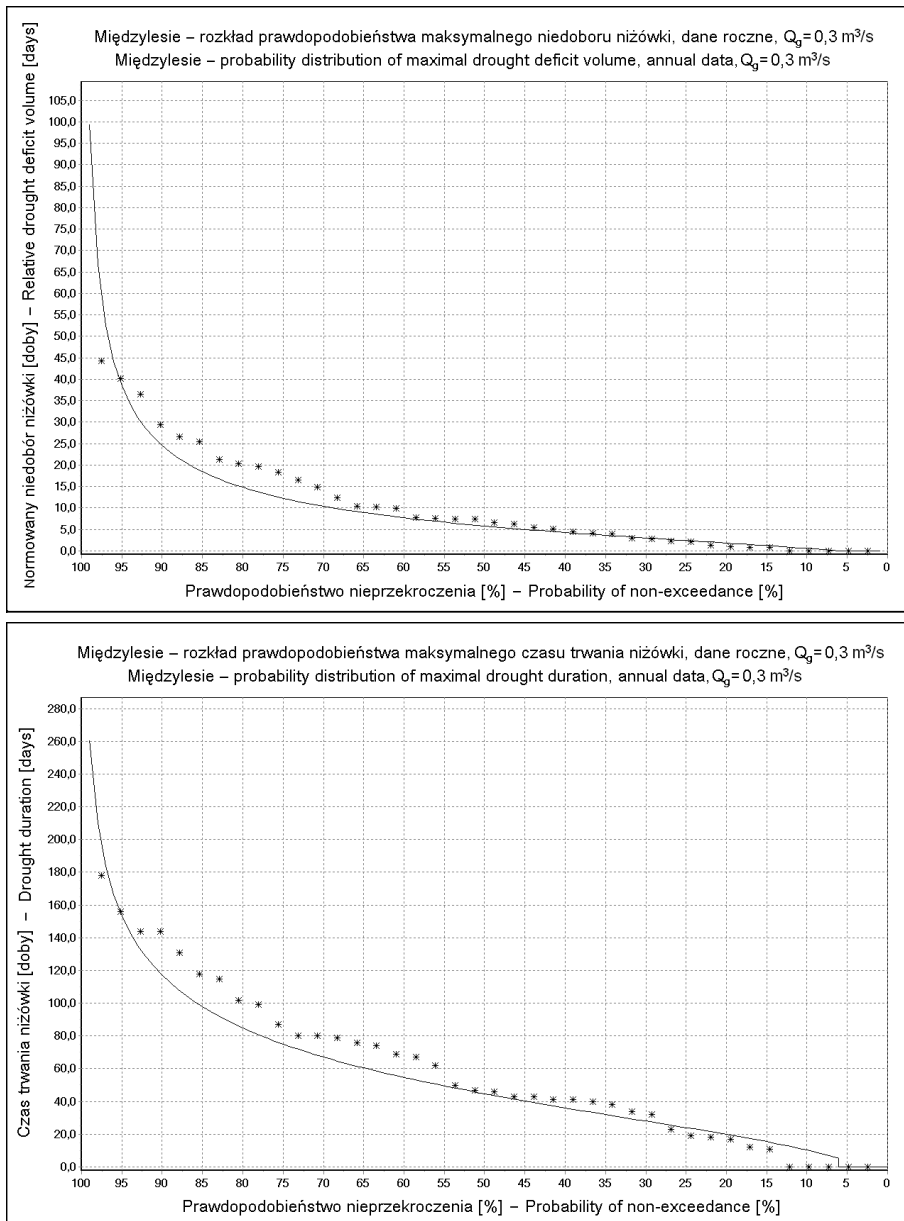
Rys. 5. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki (POT), rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 5. Estimated distribution (ZS method) of the maximal annual low flow (POT) indices, Widawa River, Zbytowa Profile



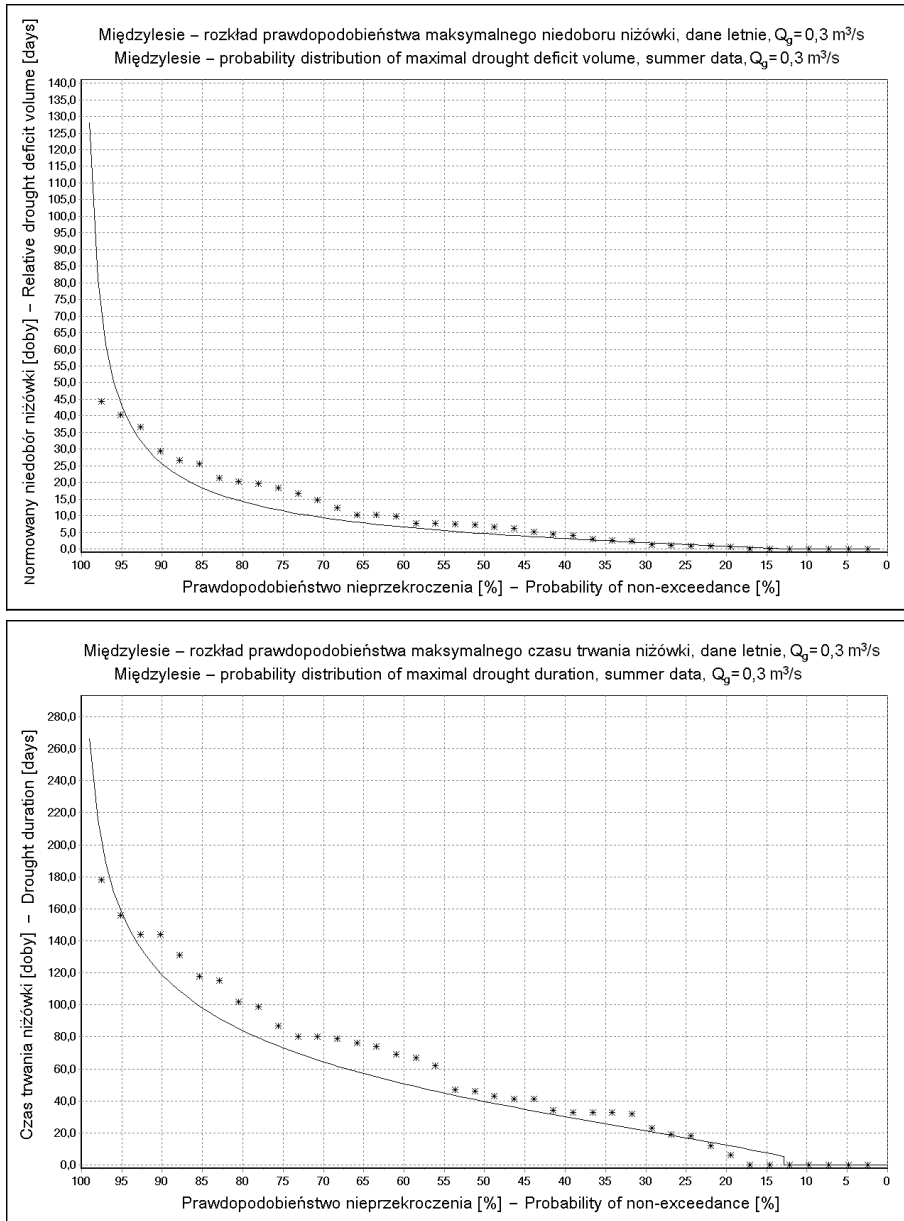
Rys. 6. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk letniej niżówki (POT), rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 6. Estimated distribution (ZS method) of the maximal summer low flow (POT) indices, Widawa River, Zbytowa Profile



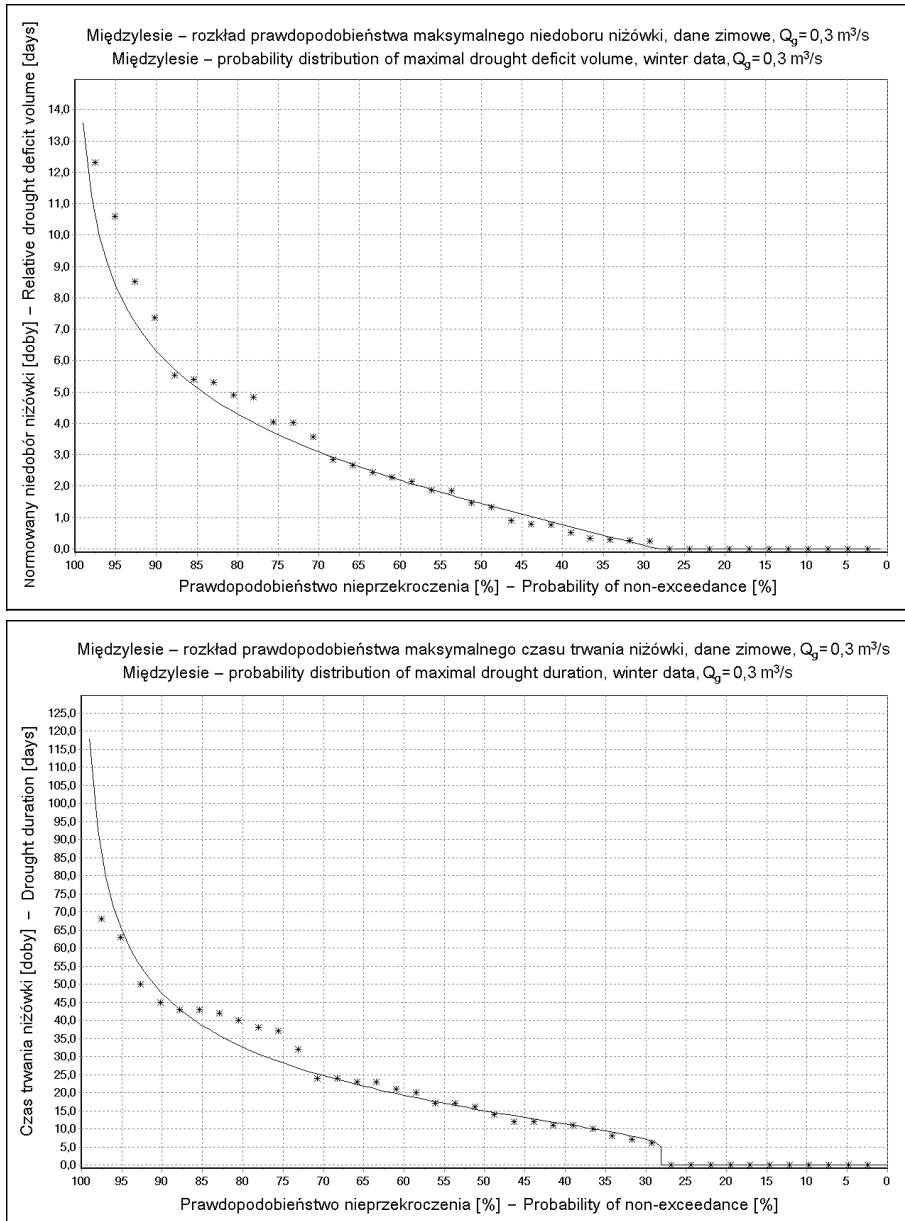
Rys. 7. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki (POT), rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzylesiu

Fig. 7. Estimated distribution (ZS method) of the maximal annual low flow (POT) indices, Nysa Kłodzka River, Międzylesie Profile



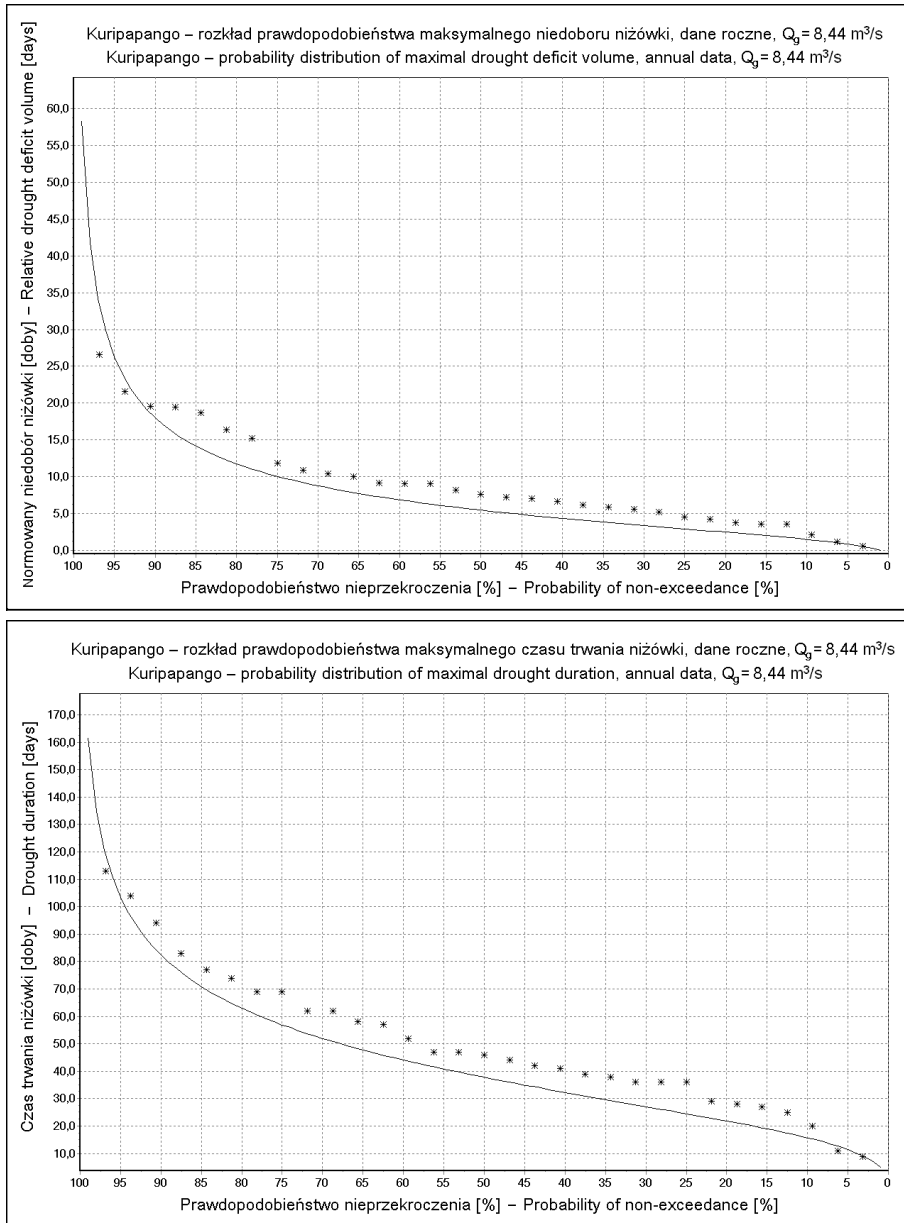
Rys. 8. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk letniej niżówki (POT), rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzylesiu

Fig. 8. Estimated distribution (ZS method) of the maximal summer low flow (POT) indices, Nysa Kłodzka River, Międzyzylesie Profile



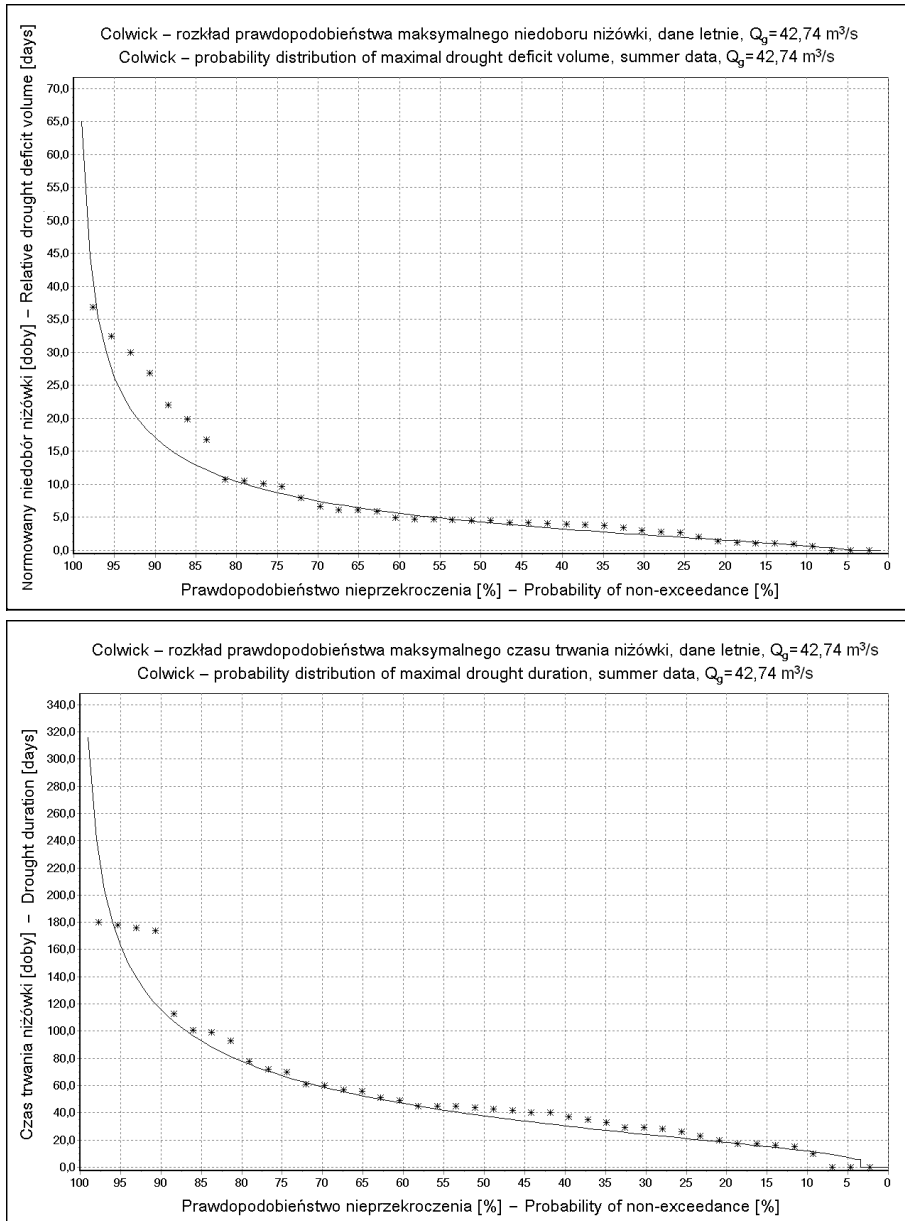
Rys. 9. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk zimowej niżówki (POT), rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzylesiu

Fig. 9. Estimated distribution (ZS method) of the maximal winter low flow (POT) indices, Nysa Kłodzka River, Międzylesie Profile



Rys. 10. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki (POT), rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango

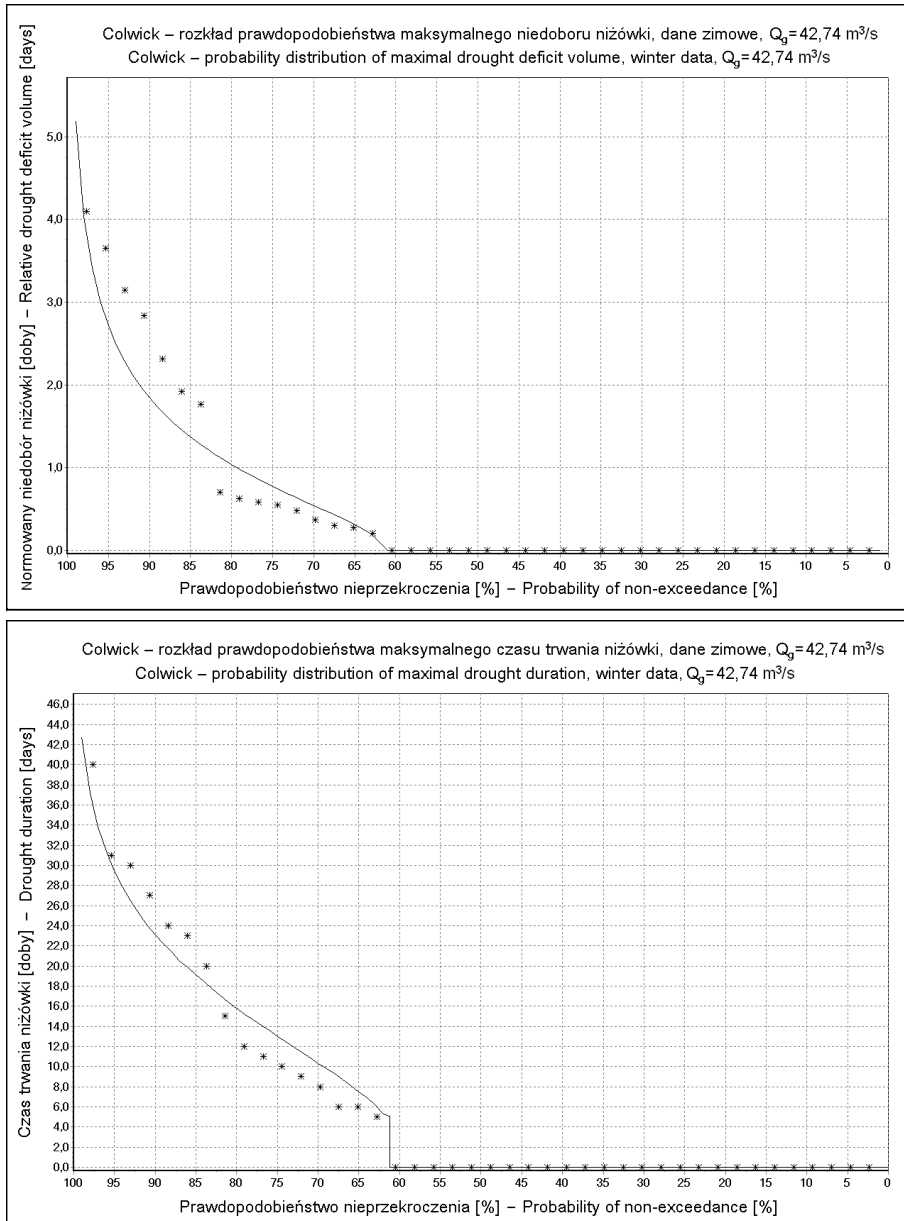
Fig. 10. Estimated distribution (ZS method) of the maximal annual low flow (POT) indices, Ngaruroro River, Kuripapango Profile



Rys. 11. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk letniej niżówki (POT), rzeka Trent, wodowskaz w Colwick

Fig. 11. Estimated distribution (ZS method) of the maximal summer low flow (POT) indices, Trent River, Colwick Profile





Rys. 12. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk zimowej niżówki (POT), rzeka Trent, wodowskaz w Colwick

Fig. 12. Estimated distribution (ZS method) of the maximal winter low flow (POT) indices, Trent River, Colwick Profile

Tabela 13. Test zgodności  $\lambda$  Kołmogorowa estymowanych metodą ZS rozkładów maksymalnych normowanego niedoboru przepływów oraz czasów trwania z obserwowanymi rocznymi lub sezonowymi wartościami maksymalnych charakterystyk.  $\bar{D}$  oznacza normowany niedobór przepływów, a  $T$  czas trwania niżówki (POT)

Table 13. The  $\lambda$  Kolmogorov goodness-of-fit test of the extreme distributions estimated by ZS method to the extreme annual or seasonal observed low flow (POT) indices.  $\bar{D}$  denotes low flow relative deficit volume and  $T$  its duration

Wodowskaz Profile	Charakterystyka Index	Lato Summer	Zima Winter	Rok Annual
Zbytowa	$\bar{D}$	0,673	x	0,7
	$T$	0,7383	x	0,6907
Międzylesie	$\bar{D}$	0,7181	0,3314	0,593
	$T$	0,8329	0,5266	0,7255
Kuripapango	$\bar{D}$	<b>1,1019</b>	x	1,0983
	$T$	<b>1,6382</b>	x	<b>1,6831</b>
Colwick	$\bar{D}$	0,6932	0,5014	<b>0,5674</b>
	$T$	1,0564	0,52	<b>1,0143</b>

### 5.3.2. Niżówki wyznaczane metodą SPA

Analogicznie jak w metodzie POT w każdym z profili wyodrębnione zostały dwa ciągi obserwowanych charakterystyk niżówek: normowane niedobory przepływów  $\bar{d}_i$  oraz ich czasy trwania  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Podobnie jak w przypadku niżówek wyznaczonych metodą POT, najpierw należy estymować parametry rozkładu 5.4. Rozpatrywano zarówno niżówki sezonowe, jak i roczne. Wyniki dopasowania (obliczone wartości testu  $\chi^2$ ) są przedstawione w tabelach 14–15. Z powodu niewystarczającej liczby zaobserwowanych niżówek w sezonie zimowym (tab. 7) można było estymować poszukiwany rozkład tylko w profilu Międzylesie. W żadnym z badanych przypadków nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności – obliczone  $p$ -wartości testu  $\chi^2$  przewyższają poziom krytyczny  $\alpha_{\text{kryt}} = 0,05$ .

Korzystając ze wzorów 5.14 i 5.15 oraz z dopasowanych do danych empirycznych rozkładów teoretycznych, wyznaczono rozkłady charakterystyk maksymalnych. Dobroć dopasowania, podobnie jak w przypadku charakterystyk niżówek wyznaczanych metodą POT, mierzono testem  $\lambda$  Kołmogorowa. Obliczone wyniki testu zostały przedstawione w tabeli 16 – liczebności prób obserwowanych charakterystyk zawarto w tabeli 7. Tak jak poprzednio, poza profilem w Kuripapango nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności – przebieg dobrze dopasowanych rozkładów niedoboru przepływów i czasu trwania niżówek przedstawiono na rysunkach 13–19.

Tabela 14. Estymacja rozkładów maksymalnego normowanego niedoboru przepływów i maksymalnego czasu trwania niżówki (SPA) – część I

Table 14. Estimation of low flows (SPA) maximal relative deficit volume and maximal duration distributions – part I

Wodowskaz /rzeka Profile /river	Sezon Season	Charakte- rystyki Indices	Estymowane rozkłady Estimated distributions	<i>p</i> -wartość testu $\chi^2$ $\chi^2$ test <i>p</i> -value	
Zbytowa /Widawa	Letni Summer	L. niżówek w sezonie <sup>1</sup>	Poisson	0,0528	
		Normowany niedobór <sup>2</sup>	log-normal	0,6905	
		Czas trwania <sup>3</sup>	log-normal	0,0514	
	Zimowy Winter	Rozkład nieokreślony <sup>4</sup>			
	Roczny Annual	L. niżówek w sezonie	Poisson	0,1110	
		Normowany niedobór	log-normal	0,8521	
		Czas trwania	log-normal	0,2027	
	Międzylesie /Nysa Kłodzka	Letni Summer	L. niżówek w sezonie	Poisson	0,8227
			Normowany niedobór	log-normal	0,2411
Czas trwania			Pearson III	0,7226	
Zimowy Winter		L. niżówek w sezonie	Poisson	0,5924	
		Normowany niedobór	G. Pareto	0,7206	
		Czas trwania	log-normal	0,4265	
Roczny Annual		L. niżówek w sezonie	Poisson	0,5540	
		Normowany niedobór	log-normal	0,3747	
		Czas trwania	log-normal	0,3995	

<sup>1</sup> Low flows number during the season

<sup>2</sup> Relative deficit volume

<sup>3</sup> Duration

<sup>4</sup> Indeterminable distribution.

Tabela 15. Estymacja rozkładów maksymalnego normowanego niedoboru przepływów i maksymalnego czasu trwania niżówki (SPA) – część II

Table 15. Estimation of low flows (SPA) maximal relative deficit volume and maximal duration distributions – part II

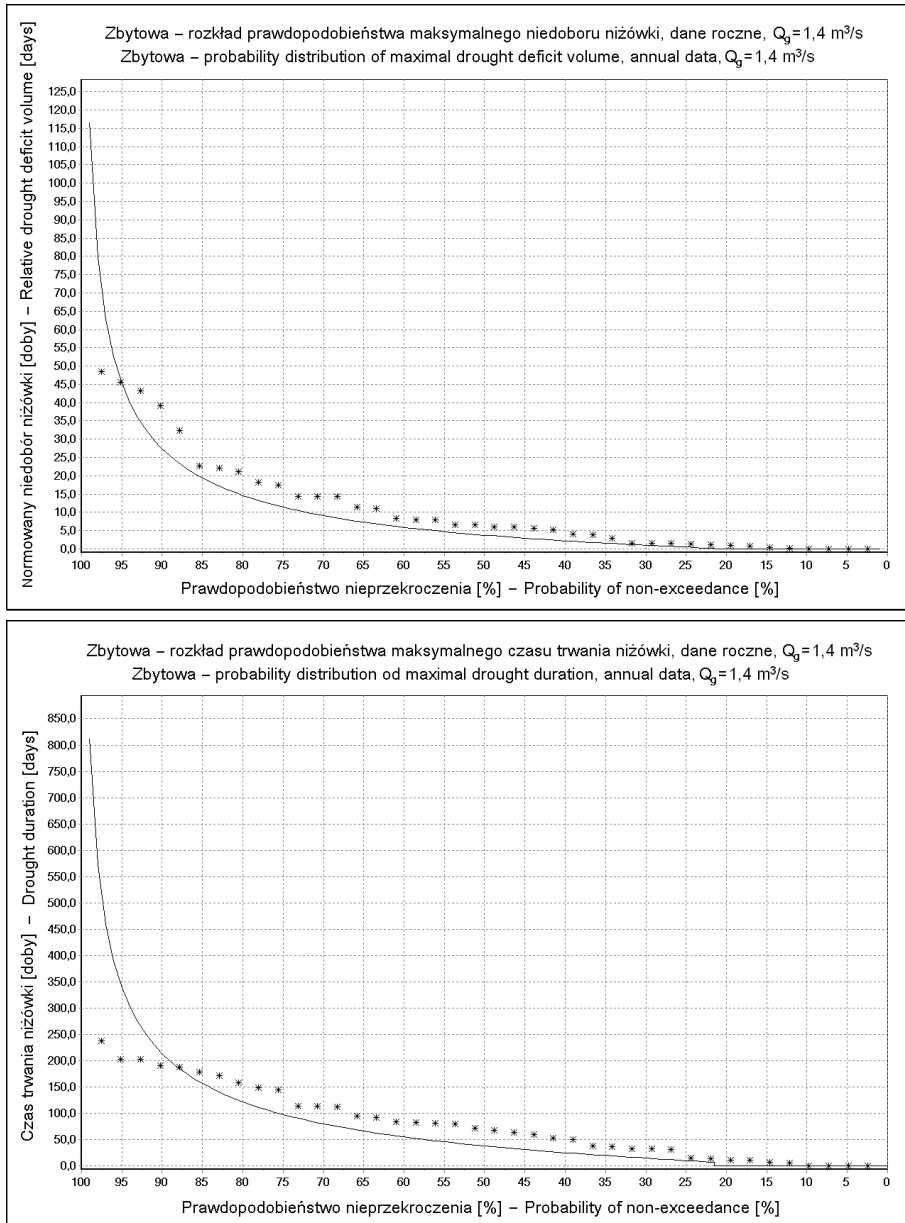
Wodowskaz /rzeka Profile /river	Sezon Season	Charakte- rystyki Indices	Estymowane rozkłady Estimated distributions	<i>p</i> -wartość testu $\chi^2$ $\chi^2$ test <i>p</i> -value	
Kuripapango /Ngaruroro River	Letni Summer	L. niżówek w sezonie <sup>1</sup>	Poisson	0,1085	
		Normowany niedobór <sup>2</sup>	log-normal	0,1119	
		Czas trwania <sup>3</sup>	G. Pareto	0,4944	
	Zimowy Winter	Rozkład nieokreślony <sup>4</sup>			
	Roczny Annual	L. niżówek w sezonie	Poisson	0,2428	
		Normowany niedobór	G. Pareto	0,0837	
		Czas trwania	G. Pareto	0,6057	
	Colwick /Trent River	Letni Summer	L. niżówek w sezonie	Poisson	0,4601
			Normowany niedobór	G. Pareto	0,8143
Czas trwania			G. Pareto	0,0628	
Zimowy Winter		Rozkład nieokreślony			
Roczny Annual		L. niżówek w sezonie	Poisson	0,5414	
		Normowany niedobór	log-normal	0,3642	
		Czas trwania	log-normal	0,1455	

<sup>1</sup> Low flows number during the season

<sup>2</sup> Relative deficit volume

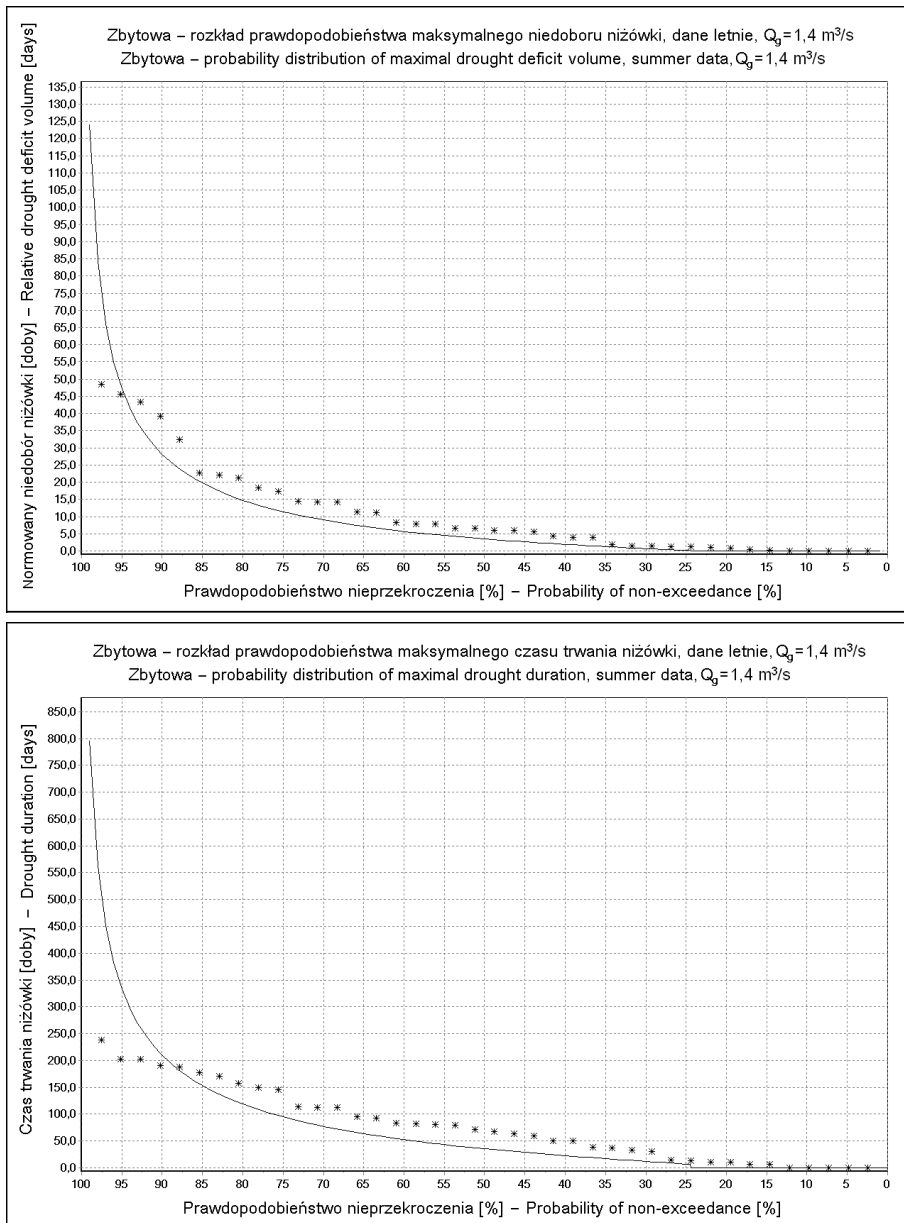
<sup>3</sup> Duration

<sup>4</sup> Indeterminable distribution.



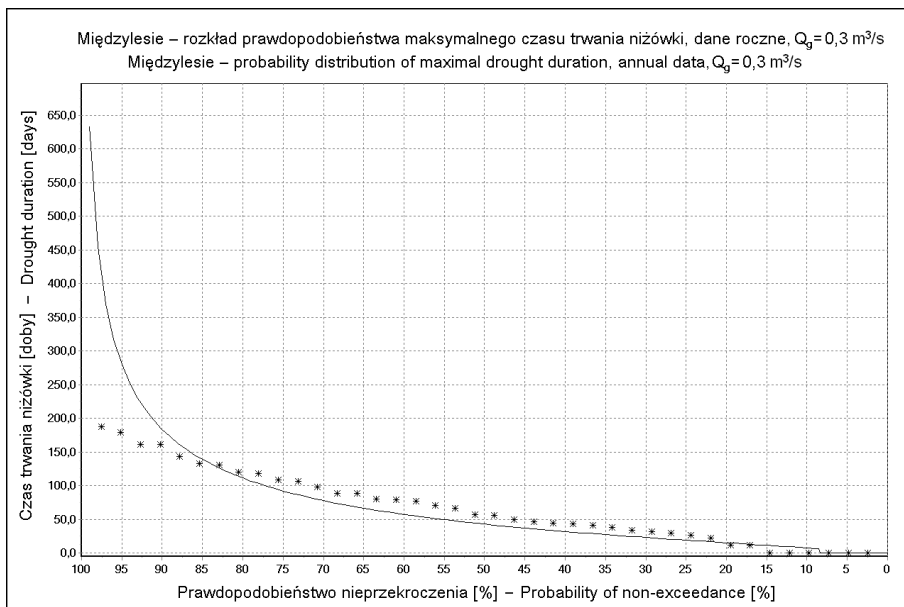
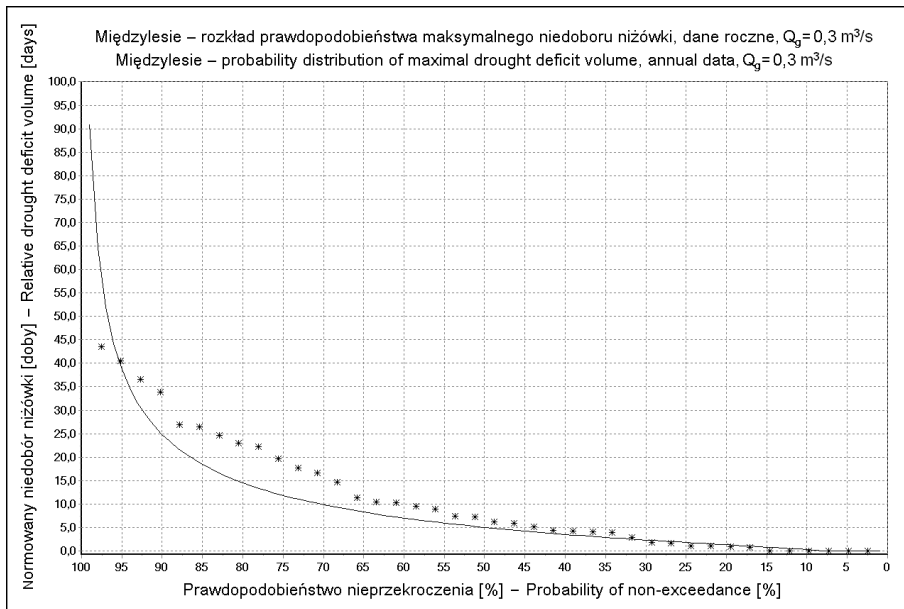
Rys. 13. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki (SPA), rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 13. Estimated distribution (ZS method) of the maximal annual low flow (SPA) indices, Widawa River, Zbytowa Profile



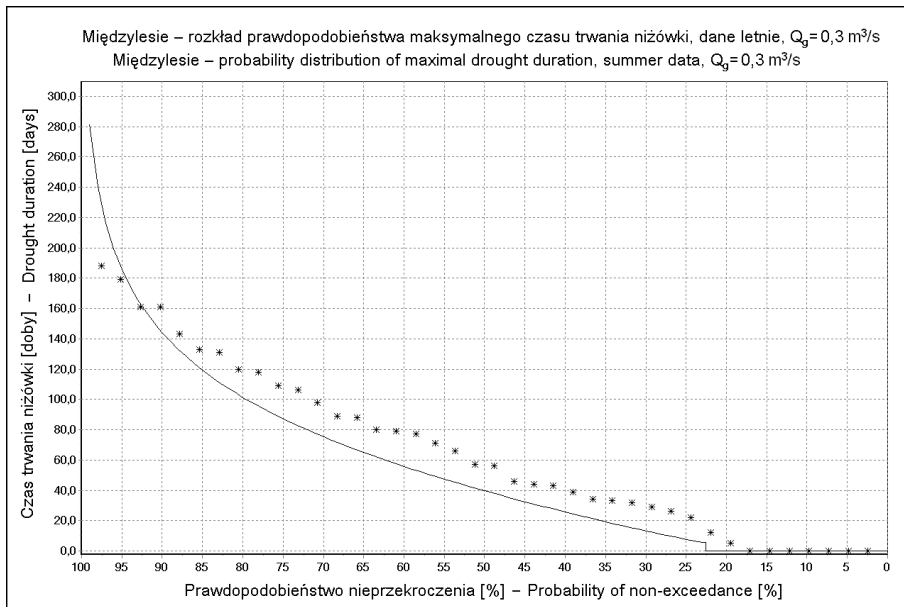
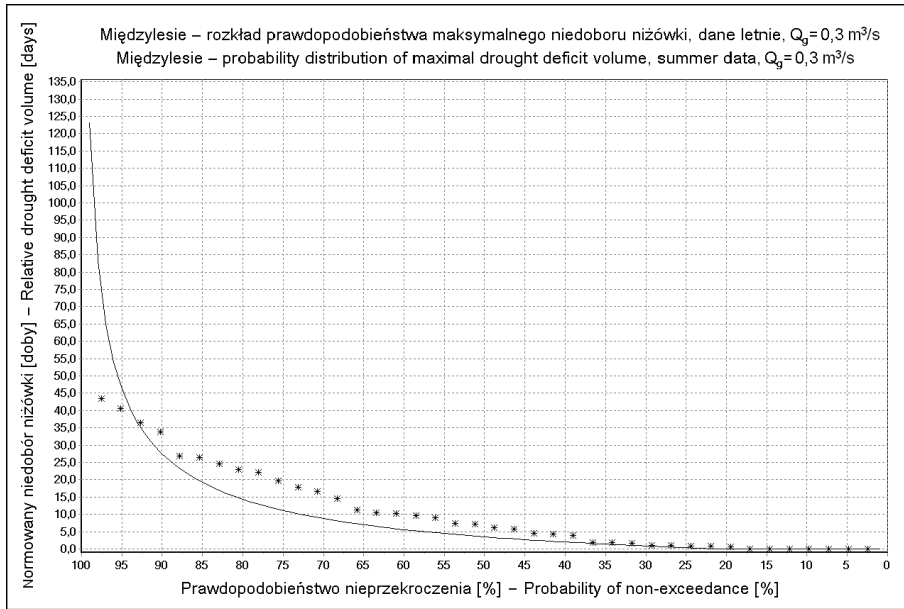
Rys. 14. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk letniej niżówki (SPA), rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 14. Estimated distribution (ZS method) of the maximal summer low flow (SPA) indices, Widawa River, Zbytowa Profile



Rys. 15. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki (SPA), Rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzylesiu

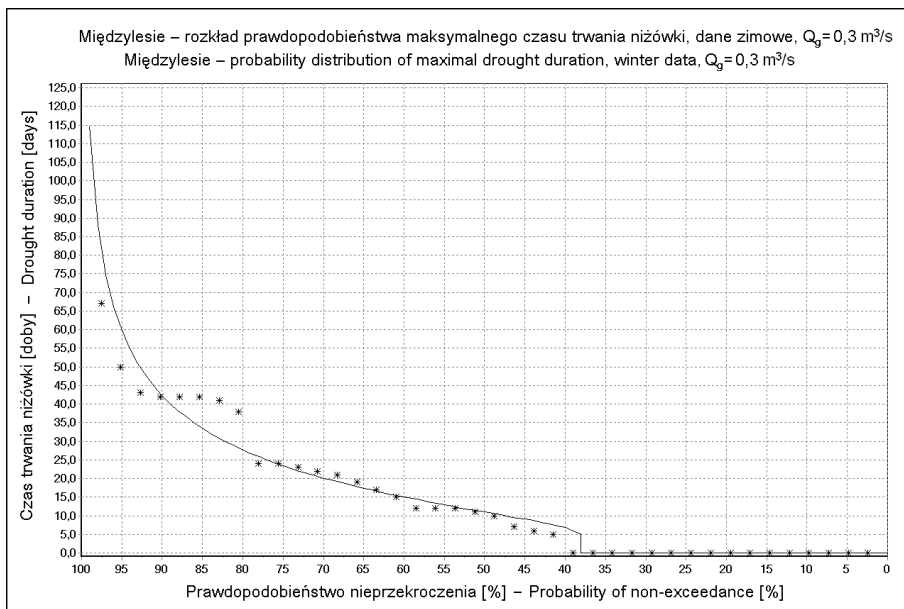
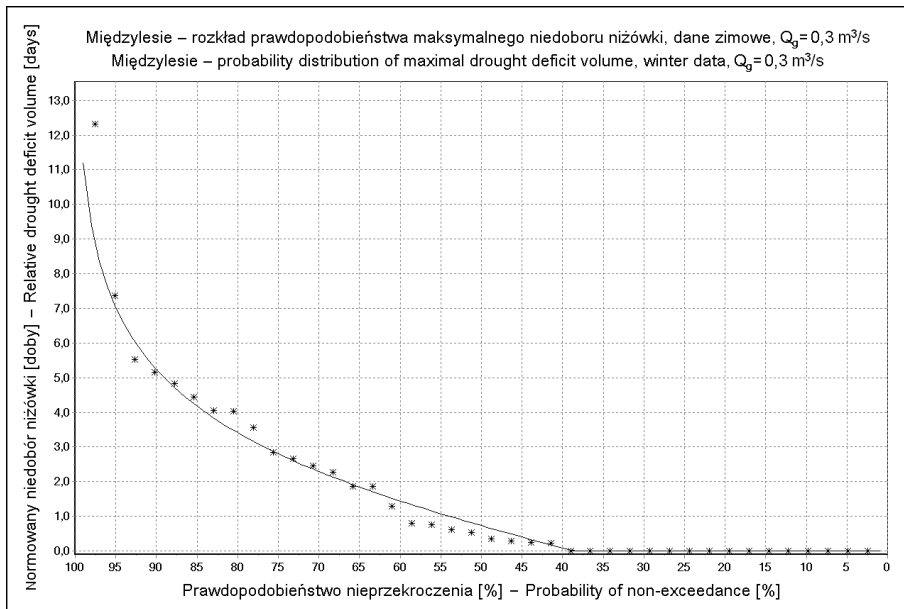
Fig. 15. Estimated distribution (ZS method) of the maximal annual low flow (SPA) indices, Nysa Kłodzka River, Międzylesie Profile



Rys. 16. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk letniej niżówki (SPA), rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzylesiu

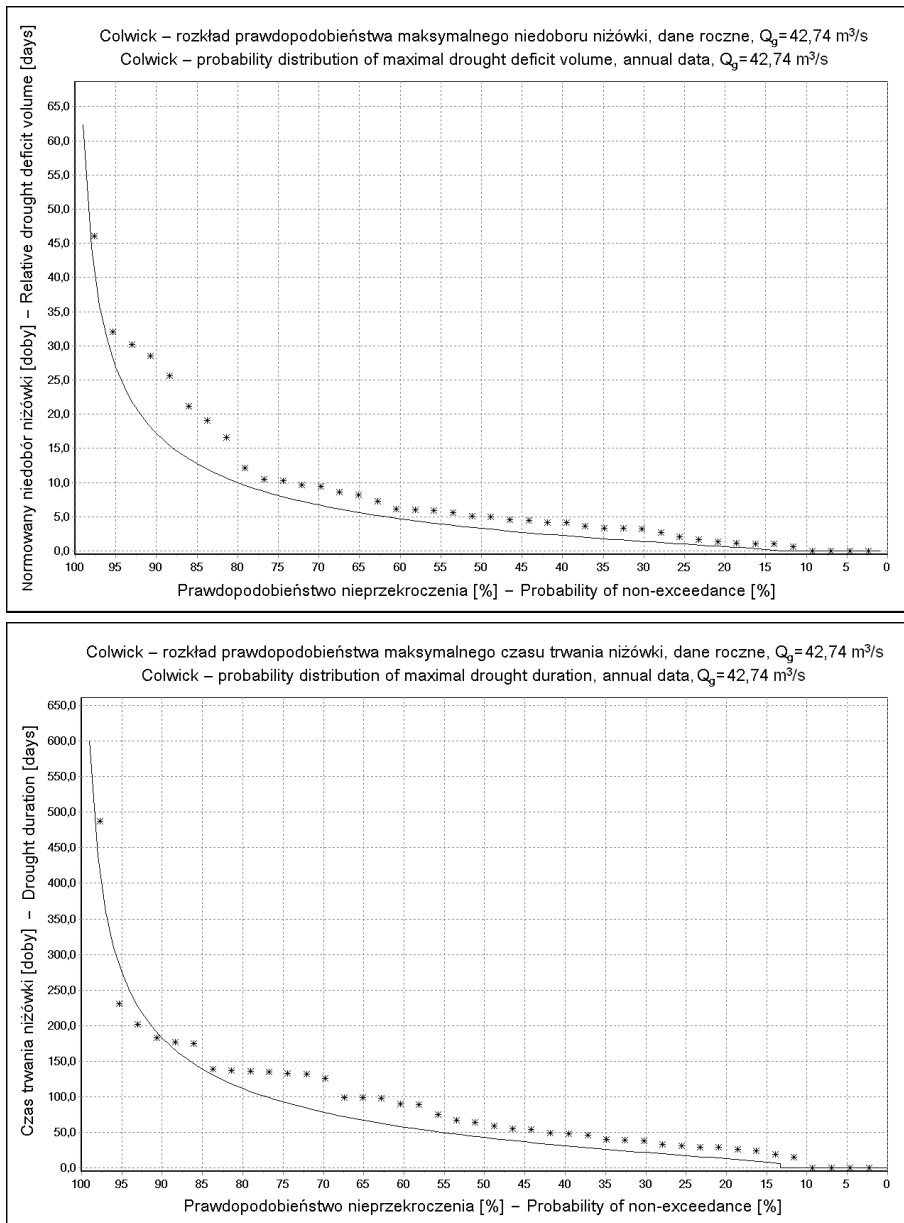
Fig. 16. Estimated distribution (ZS method) of the maximal summer low flow (SPA) indices, Nysa Kłodzka River, Międzylesiu Profile



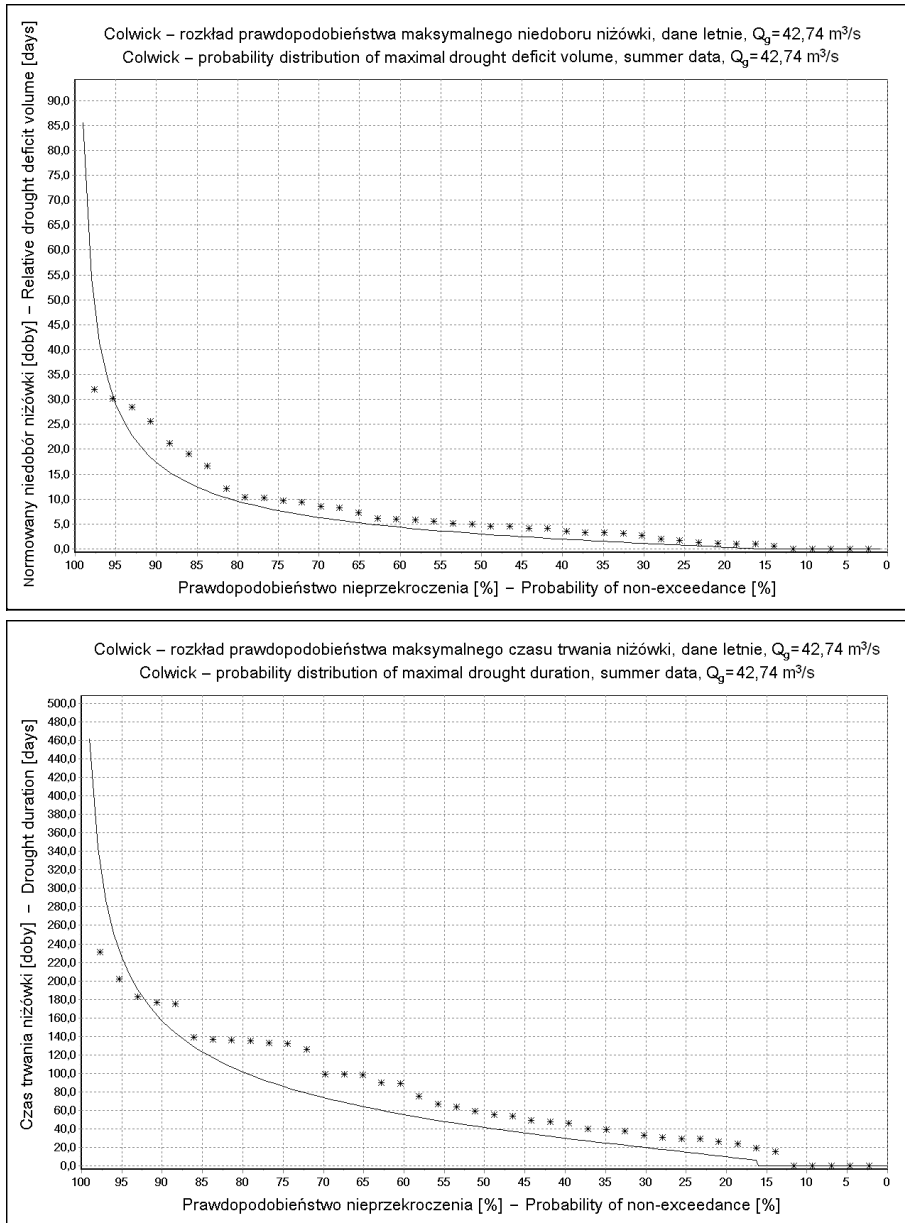


Rys. 17. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk zimowej niżówki (SPA), rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzylesiu

Fig. 17. Estimated distribution (ZS method) of the maximal winter low flow (SPA) indices, Nysa Kłodzka River, Międzylesie Profile



Rys. 18. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki (SPA), rzeka Trent, wodowskaz w Colwick  
 Fig. 18. Estimated distribution (ZS method) of the maximal annual low flow (SPA) indices, Trent River, Colwick Profile



Rys. 19. Estymowany metodą ZS rozkład maksymalnych charakterystyk letniej niżówki (SPA), rzeka Trent, wodowskaz w Colwick

Fig. 19. Estimated distribution (ZS method) of the maximal summer low flow (SPA) indices, Trent River, Colwick Profile

Tabela 16. Test zgodności  $\lambda$  Kolmogorowa estymowanych metodą ZS rozkładów maksymalnego normowanego niedoboru przepływów oraz czasu trwania niżówki z obserwowanymi rocznymi lub sezonowymi wartościami maksymalnych charakterystyk.  $\bar{D}$  oznacza normowany niedobór przepływów, a  $T$  czas trwania niżówki (SPA)

Table 16. The  $\lambda$  Kolmogorov goodness-of-fit test of the extreme distributions estimated by ZS method to the extreme annual or seasonal observed low flow (SPA) indices.  $\bar{D}$  denotes low flow relative deficit volume and  $T$  its duration

Wodowskaz Profile	Charakterystyka Index	Lato Summer	Zima Winter	Cały rok Annual
Zbytowa	$\bar{D}$	0,9524	x	0,9402
	$T$	1,2594	x	1,1848
Międzylesie	$\bar{D}$	0,7649	0,5502	0,8902
	$T$	0,7581	0,4719	0,855
Kuripapango	$\bar{D}$	<b>2,0125</b>	x	<b>1,9780</b>
	$T$	<b>1,8854</b>	x	<b>1,8854</b>
Colwick	$\bar{D}$	1,1661	x	1,1058
	$T$	1,0396	x	1,1140

Wykresy rozkładów obu maksymalnych charakterystyk (wyznaczanych metodą SPA) przebiegają bardzo podobnie jak w przypadku niżówek wyznaczanych metodą POT. Tu także można zauważyć, iż przy wysokich, przekraczających 50%, prawdopodobieństw nieprzewyższenia dopasowanie estymowanych rozkładów nie jest najlepsze. Przy prawdopodobieństwach rzędu 50–80% wyniki estymacji są niedoszacowane, zaś przy bardzo wysokich – mocno przeszacowane (z powodu całkowicie odmiennej metody definiowania obu charakterystyk metodami POT i SPA nie ma możliwości porównywania ich wykresów).

#### 5.4. Uogólniony rozkład Pareto (GPD)

Podobnie jak w modelu Zelenhasicia i Salvai (rozdz. 5.1) niech  $A_\tau, \tau = 1, 2, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie  $F(x) = \Pr(A_\tau \leq x) = \Pr(A \leq x)$  (zmienna losowa  $A$  zamiennie albo jest normowanym niedoborem przepływów  $\bar{D}$ , albo czasem trwania niżówki  $T$ ). Dalej niech  $M_n = \max(A_1, \dots, A_n)$ , wtedy  $\Pr(M_n \leq x) = F^n(x)$ .

Jeśli założymy, że:

1. istnieją dwa ciągi  $a_n > 0$  oraz  $b_n$  takie, że:  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$ ;
2.  $G(x)$  jest niezdegenerowaną dystrybuantą,

to z klasycznego twierdzenia o wartościach ekstremalnych [Feller 1969, Coles 2001] wynika, że  $G(x)$ , nazywane uogólnionym rozkładem wartości ekstremalnych, ma postać:

$$G(x) = \exp \left\{ - \left( 1 - \gamma \frac{x - \mu}{\sigma} \right)_+^{\frac{1}{\gamma}} \right\} \quad (5.16)$$

gdzie  $\sigma > 0, \mu, \gamma$  są parametrami, a  $z_+ = \max(z, 0)$  oznacza wybór tylko nieujemnych wartości  $z$ . W zależności od wartości parametrów  $G$  jest jednym z rozkładów: Fréchéta, Weibulla albo Gumbela.

Dla  $\kappa < 0$  oraz  $x > 0$  uogólniony rozkład Pareto (GPD – Generalized Pareto Distribution) jest zdefiniowany następująco:

$$H(x, \kappa, \sigma) = 1 - \left( 1 - \kappa \frac{x}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad \kappa < 0, x \geq 0 \quad (5.17)$$

Rozkład ten definiowany jest również dla  $\kappa > 0$ , wtedy jego nośnik (dziedzina) ogranicza się tylko do zamkniętego przedziału  $[0, \frac{\sigma}{\kappa}]$ . W specjalnym przypadku – gdy  $\kappa = 0$ , sprowadza się on do rozkładu wykładniczego. W poniższych zastosowaniach uogólniony rozkład Pareto będzie wykorzystywany tylko w przypadku, gdy  $\kappa < 0$ .

Jeśli przez  $F_b(x) = \Pr(A \leq x + b | A > b)$  oznaczymy warunkowy rozkład nieprzewyższenia przez zmienną losową  $A$  pewnego poziomu  $x + b$ , to zgodnie z pracą Pickandsa [1975] dla pewnego  $\kappa$  granica:

$$\lim_{b \rightarrow x_F} \inf_{0 < \sigma < \infty} \sup_{0 \leq x < \infty} |F_b(x) - H(x, \kappa, \sigma)| = 0 \quad (5.18)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $F$  ma niezdegenerowany uogólniony rozkład wartości ekstremalnych (5.16), a  $x_F = \sup(x : F(x) < 1)$ . Ponieważ rozważane mają być tylko rozkłady, gdy  $\kappa < 0$ , to we wzorze 5.18 wartość graniczna  $b \rightarrow \infty$ . Graniczny związek (5.18) oznacza, że dla dużych wartości przesunięcia  $b$  rozkład warunkowy  $F_b$  oraz uogólniony rozkład Pareto są bliskie sobie, dlatego w dalszych obliczeniach do estymacji rozkładów maksymalnych normowanych niedoborów przepływów oraz maksymalnych czasów trwania niżówki zostanie wykorzystany uogólniony rozkład Pareto.

Do dalszych obliczeń wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech

$$H_1(x, \kappa, \alpha) = 1 - (1 - \alpha \kappa(x + b))^{\frac{1}{\kappa}}, \quad x \geq -b, \alpha > 0, \kappa < 0 \quad (5.19)$$

będzie trzyparametrowym GPD, gdzie:

- $\alpha = \frac{1}{\sigma}$  jest parametrem skali;
- $\kappa$  – parametr kształtu;
- $b$  – przesunięcie,

a  $H(x, \kappa, \alpha) = H_1(x, \kappa, \alpha)|_{b=0}$ , (dla  $\kappa < 0$  rozkład  $H$  jest określony gdy  $x \geq 0$ ).  
Rozkład warunkowy:

$$\begin{aligned} \Pr(A \leq x + \beta | A > \beta) &= \frac{H_1(x + \beta, \kappa, \alpha) - H_1(\beta, \kappa, \alpha)}{1 - H_1(\beta, \kappa, \alpha)} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha\kappa(b + \beta)}\kappa x\right)^{\frac{1}{\kappa}} = H(x, \kappa, \alpha_\beta) \end{aligned} \quad (5.20)$$

jest nieprzesuniętym rozkładem GPD z nowym parametrem skali:

$$\alpha_\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha\kappa(b + \beta)}, \quad (5.21)$$

oraz z niezmiennym parametrem kształtu  $\kappa$ . Formalnie jest on rozkładem dwuparametrowym, jednakże rozkład (5.20) opisuje zmienną losową  $A$  zmniejszoną o nieznaną wartość przesunięcia  $\beta$  (ponieważ rozważane są rozkłady warunkowe (5.20), to nie zmniejszając ogólności, można przyjąć, że określony w (5.19), a wynikający z warunku (5.18) parametr  $b = 0$ ).

Powyższe związki oznaczają, że estymację rozkładów maksymalnych charakterystyk niżówek można przeprowadzać, korzystając ze standardowo uzyskanych danych. Jedynym problemem jest estymacja parametru przesunięcia określającego nowy, drugi już poziom odcięcia  $\beta$ . Musi być on tak dobrany, aby graniczny warunek (5.18) mógł być spełniony przynajmniej w przybliżeniu. Stąd wynika, że mamy do czynienia z trzy-parametrowym rozkładem z trudno estymowalnym parametrem  $\beta$ .

Nowy poziom odcięcia  $\beta$  nie ma związku z poziomem odcięcia  $Q_g$  definiującym niżówki. Poziom  $\beta$  wyznaczany dla danej charakterystyki rozdziela obserwowane niżówki na dwie części:

- niżówki biorące udział w estymacji parametrów  $\alpha, \kappa$  rozkładu  $H$  – uogólnionego rozkładu Pareto;
- niżówki pomijane w dalszych obliczeniach.

Oznacza to, że poziom odcięcia  $\beta$  jest dodatkowym kryterium eliminującym nieistotne niżówki (patrz definicja niżówki zawarta w rozdz. 3.). Uogólniając, niżówki, których obserwowane charakterystyki są uwzględniane w estymacji nieznanymi parametrów badanego rozkładu, zostaną nazwane niżówkami głębokimi, pozostałe – niżówkami płytkimi.

Wartości oczekiwane rozpatrywanej zmiennej o rozkładzie  $H(x, \kappa, \alpha_\beta)$  są następujące:

$$\begin{aligned} EA &= \int_0^\infty xh(x, \kappa, \alpha_\beta)dx = \frac{1}{\alpha_\beta(\kappa+1)} & \text{dla } \kappa \in (-1, 0) \\ EA^2 &= \int_0^\infty x^2h(x, \kappa, \alpha_\beta)dx = \frac{2}{\alpha_\beta^2(\kappa+1)(2\kappa+1)} & \text{dla } \kappa \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$E(A|A > \beta) = \frac{1 - \alpha_\beta\kappa\beta}{\alpha_\beta(\kappa + 1)} = EA - \frac{\kappa}{\kappa + 1}\beta \quad \text{dla } \kappa \in (-1, 0) \quad (5.23)$$

Ze wzoru 5.22 wynika, że uogólniony rozkład Pareto można stosować tylko przy parametrze kształtu  $\kappa$  leżącym w przedziale  $(-\frac{1}{2}; 0)$ . Trudno bowiem rozważać charakterystyki niżówek, których wartości oczekiwane lub wariancje nie są skończone.

Łatwo także zauważyć, że warunkowa wartość oczekiwana  $E(A|A > \beta)$  jest rosnącą funkcją liniową parametru przesunięcia  $\beta$  [Hisdal i in. 2002, Coles 2001]. Wystarczy podstawić w (5.23) formułę wyznaczającą  $\alpha_\beta$  (5.21):

$$E(A|A > \beta) = \frac{1}{\alpha(\kappa + 1)} - \frac{2\kappa}{\kappa + 1}\beta \quad (5.24)$$

Oznacza to, że wartość oczekiwana  $EA$ , otrzymana dla różnych przesunięć  $\beta$ , powinna rosnąć podobnie do warunkowej wartości oczekiwanej  $E(A|A > \beta)$  – tę własność wykorzystano do estymacji przesunięcia  $\beta$ .

## 5.5. Uogólniony rozkład Pareto – przykłady zastosowań

Tak jak w rozdziale 5.3, przy przepływie granicznym  $Q_{70\%}$ , w czterech testowych profilach, metodą POT z restrykcjami opisanymi w rozdziale 4, zostały wyodrębnione dwa ciągi obserwowanych charakterystyk niżówek:

- normowanych niedoborów przepływów  $\bar{d}_i$ ;
- czasów trwania  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Opracowywano przede wszystkim niżówki roczne. Podstawowym powodem tego ograniczenia jest zbyt niska liczba zimowych niżówek (tab. 6). W trakcie estymacji nieznanymi parametrami rozkładu przyjmowana jest wartość parametru przesunięcia  $\beta$ . O tę wielkość pomniejszane są kolejne charakterystyki. A ponieważ opracowywane dane muszą być dodatnie (5.19), to w trakcie estymacji pomijane są wszystkie normowane niedobory przepływów lub czasy trwania niżówki mniejsze niż odpowiednie im  $\beta$ . Co więcej, zgodnie ze wzorem (5.18), podczas poszukiwania najlepszego zestawu estymatorów nieznanymi parametrami rozkładu wzrasta przesunięcie  $\beta$ . Oznacza to, że w przypadku niżówek zimowych szybko obniża się liczba danych do progu, w którym nie da się już poprawnie przeprowadzić wnioskowania statystycznego. Tylko w profilu wodowskazowym Międzyzlesie, gdzie przy wysokiej liczbie rocznych niżówek są one w miarę równomiernie rozłożone, opracowane są również niżówki letnie.

Również niska liczebność niżówek otrzymanych metodą SPA (tab. 7) była także powodem tego, iż w dalszych obliczeniach zrezygnowano z estymacji rozkładów takich charakterystyk maksymalnych.

Należy tu dodać, że zmiana definiującego niżówkę przepływu granicznego  $Q_g$  nie zwiększa znacząco liczby zaobserwowanych niżówek. Wobec tego jedyną możliwością podwyższenia liczebności próby jest wydłużenie szeregu czasowego opracowywanego ciągu przepływów. Jednakże z powodu zmian środowiskowych w zlewni, nie można zbyt mocno rozszerzać przedziału czasowego danych [Stachy 1990].

Dłuższe niż 40-letnie ciągi przepływów z dużym prawdopodobieństwem mogą być niejednorodne (porównaj z obliczeniami z rozdz. 4.).

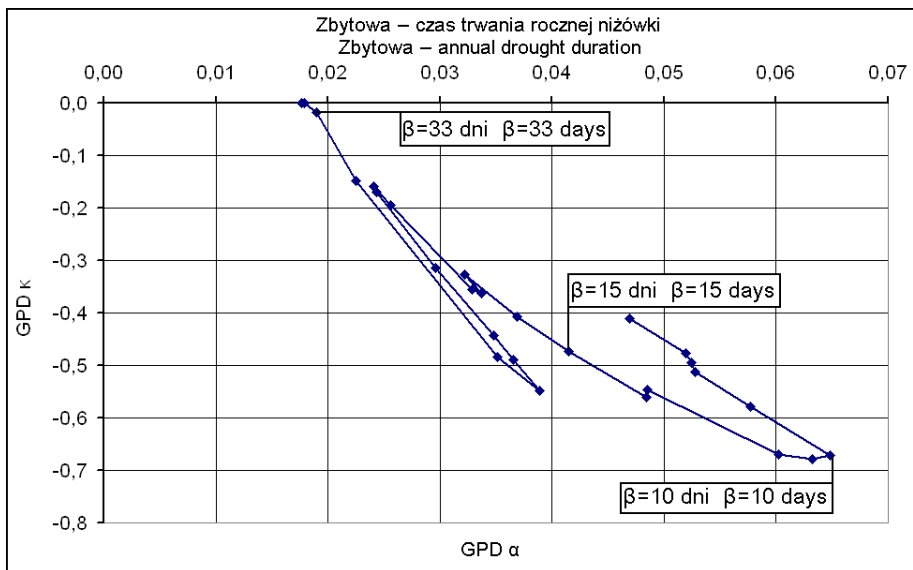
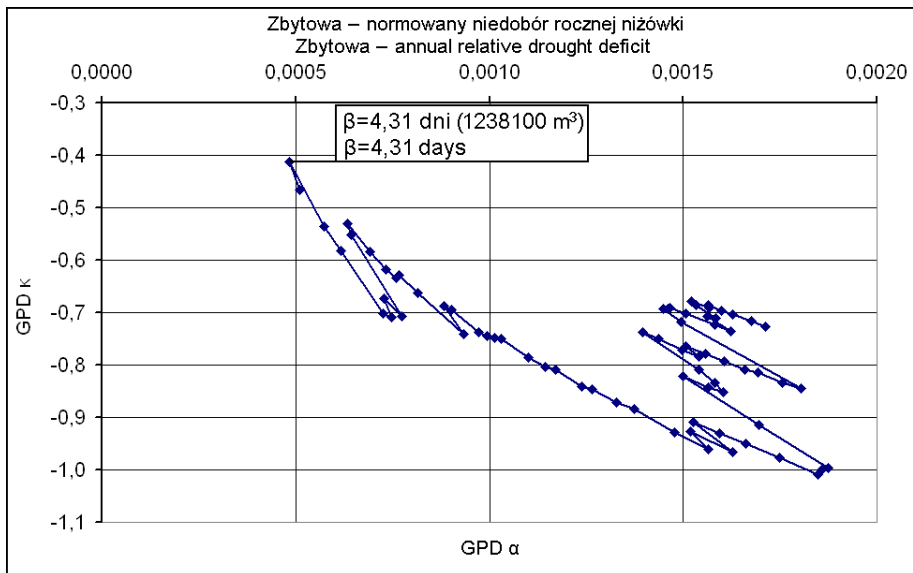
W poniższych obliczeniach przyjęto [Jakubowski 2006], że kolejne wartości przesunięć  $\beta = \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $k < n$  będą równe uporządkowanym rosnąco kolejnym obserwowanym wartościom charakterystyk;  $k$  oznacza liczbę różnych przesunięć  $\beta_i$  i zostało dobrane tak, aby można było przetestować zgodności estymowanych rozkładów. Podczas badania obydwóch charakterystyk – normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania, zadając przesunięcia  $\beta_i$  estymatory pozostałych dwóch parametrów zostały wyznaczone metodą największej wiarygodności (formuły obliczeniowe zostały przedstawione w dodatku A.1.1).

Opisujący przesunięcie parametr  $\beta$ , formalnie niebędący parametrem rozkładu, nie może być estymowany żadną ze standardowych metod (zgodnie z (5.21) estymowany parametr  $\alpha$  jest funkcją  $\beta$ ). Można jedynie tak go dobrać, aby linia warunkowej wartości oczekiwanej (5.23) pokrywała się ze zmieniającą się, w zależności od  $\beta$ , wartością oczekiwaną (5.22). Dodatkowym problemem jest ograniczenie zmienności estymatora  $\hat{\kappa}$ . Smith [1985] pokazał, że tylko dla  $\kappa \in (-1, 0)$  istnieją estymatory największej wiarygodności, przy czym dla  $\kappa \in (-\frac{1}{2}, 0)$  są one regularne. Oznacza to, że otrzymane metodą największej wiarygodności estymatory  $\hat{\kappa} < -\frac{1}{2}$  winny zostać odrzucone. Zgodnie z (5.22), a także z wynikami Smitha [1985], takie estymatory nie zostaną zastosowane do dalszych obliczeń.

Przy zadanych  $\beta_i$  dobroć dopasowania badano testem zgodności  $\chi^2$ . W każdym przypadku nieodrzuconych estymatorów na poziomie istotności  $\alpha_{\text{kryt}} = 0,05$  nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności przesuniętych o  $\beta_i$  charakterystyk z uogólnionym rozkładem Pareto. Odpowiadające  $\beta_i$ , estymowane w badanych profilach zestawy par  $(\hat{\alpha}_{\beta_i}, \hat{\kappa}_i) = (\hat{\alpha}_i, \hat{\kappa}_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $k < n$  pokazane zostały na rysunkach 20–24. Górne wykresy przedstawiają estymatory parametrów rozkładu normowanego niedoboru przepływów niżówki, dolne – ich czasów trwania. Odcinki linii prostej łączącej estymowane pary  $(\hat{\alpha}_i, \hat{\kappa}_i)$ ,  $i = 1 \dots k$  odpowiadają porządkowi parametrów przesunięcia. Zaznaczone w ramach przesunięcia  $\beta_i$  odpowiadają granicznym wartościom  $\hat{\kappa}_i$  np. bliskim  $-0,5$  czy ostatnimi (przy najwyższych przesunięciach  $\beta$ ) estymowanymi ich wartościami.

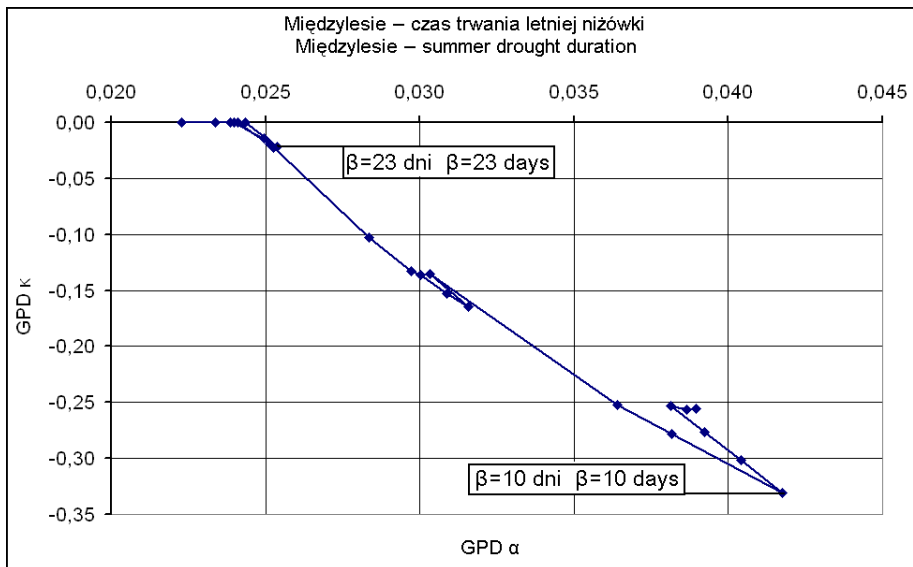
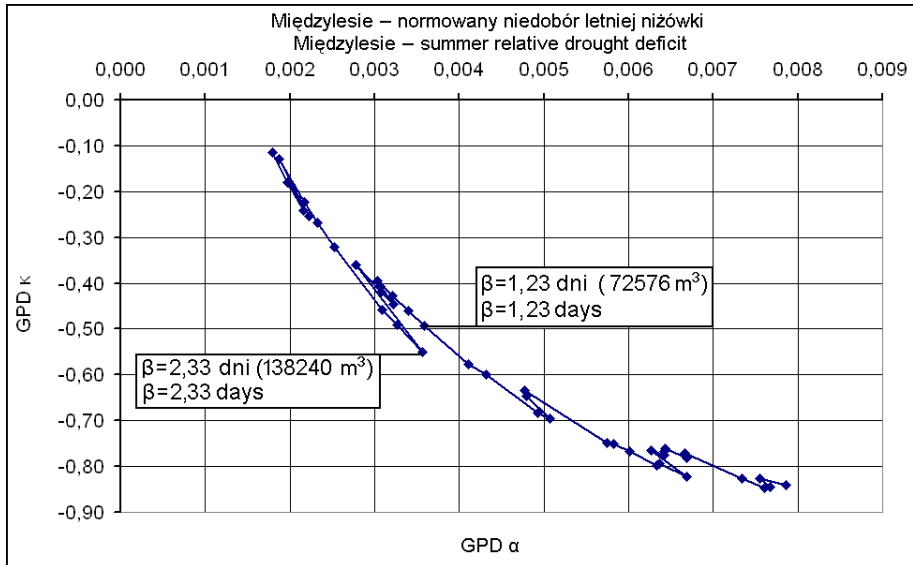
Podczas estymacji parametrów rozkładu normowanego niedoboru przepływów niżówki występują trudności z wyznaczeniem rozkładów charakterystyk maksymalnych przy niskich wartościach przesunięcia  $\beta_i$ . Wtedy, we wszystkich badanych profilach wodowskazowych obliczony estymator  $\hat{\kappa}_i < -0,5$ . W skrajnym przypadku rocznych normowanych niedoborów w Zbytowej (rys. 20), tylko przy dwóch ostatnich przesunięciach  $\beta_i$  estymowane  $\hat{\kappa}_i > -0,5$ .





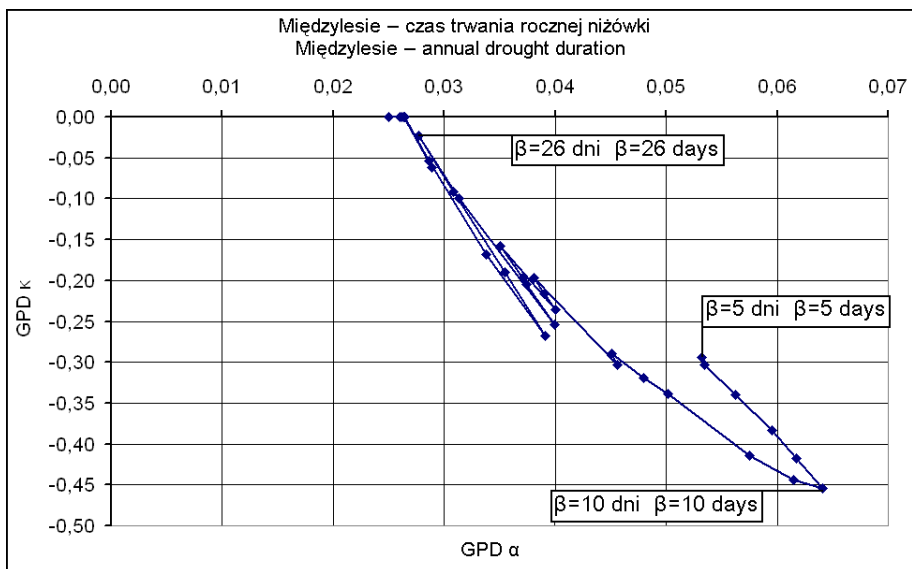
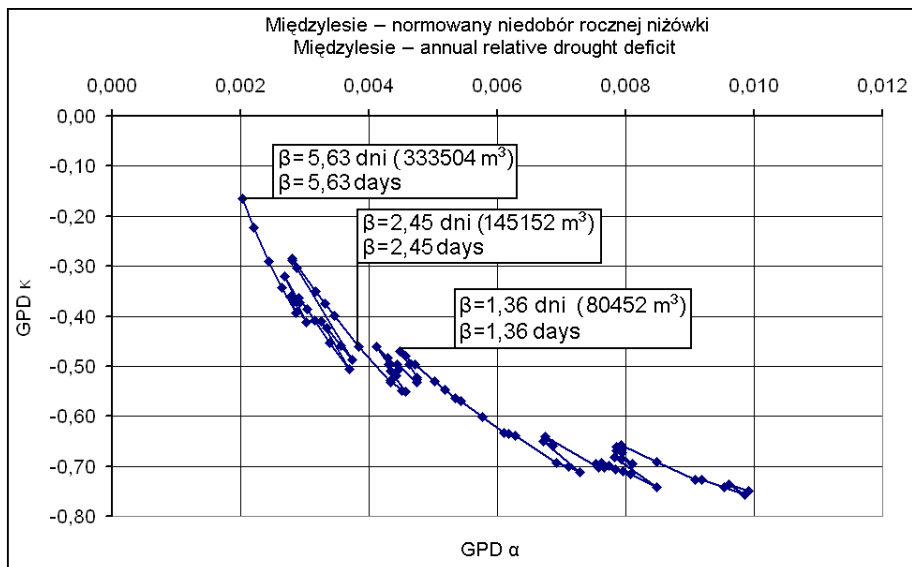
Rys. 20. Zmienność estymatorów parametrów GPD w zależności od przesunięcia  $\beta$  podczas estymacji rozkładów normowanego niedoboru przepływów oraz czasu trwania rocznej niżówki, rzeka Widawa, przekrój w Zbytowej

Fig. 20. The variability of the estimated GPD parameters in dependence of the shift parameter  $\beta$  for the annual low flow relative deficit volume and duration, Widawa River, Zbytowa Profile



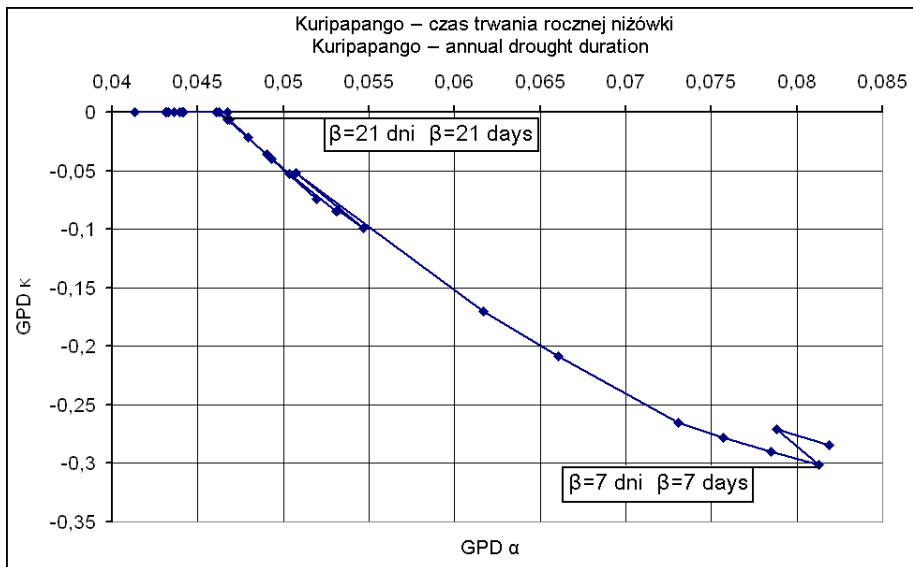
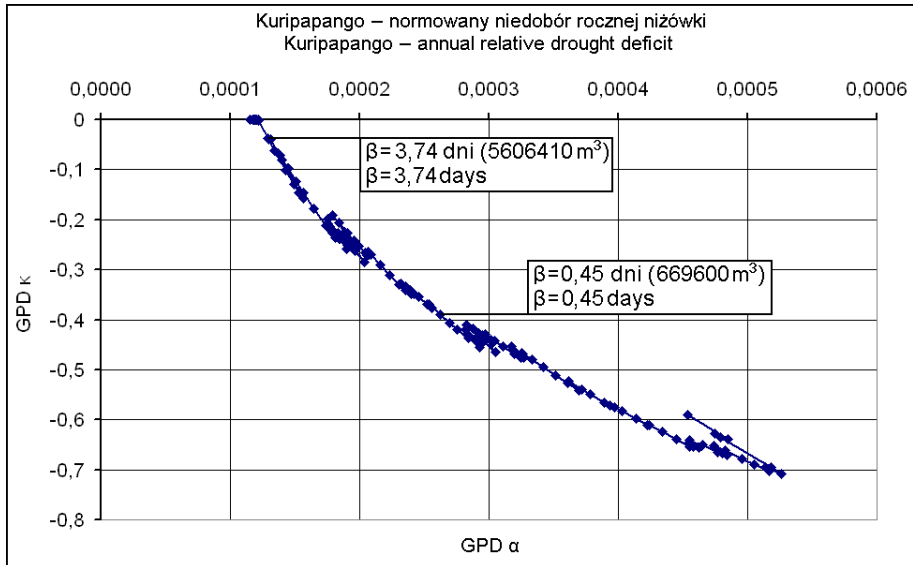
Rys. 21. Zmienność estymatorów parametrów GPD w zależności od przesunięcia  $\beta$  podczas estymacji rozkładów normowanego niedoboru przepływów oraz czasu trwania letniej niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, przekrój w Międzyzlesiu

Fig. 21. The variability of the estimated GPD parameters in dependence of the shift parameter  $\beta$  for the summer low flow relative deficit volume and duration, Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



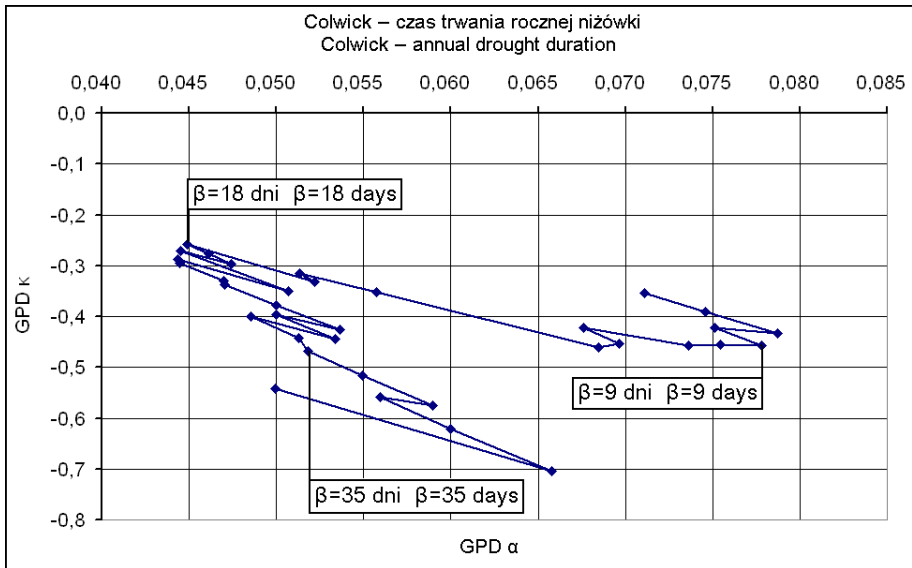
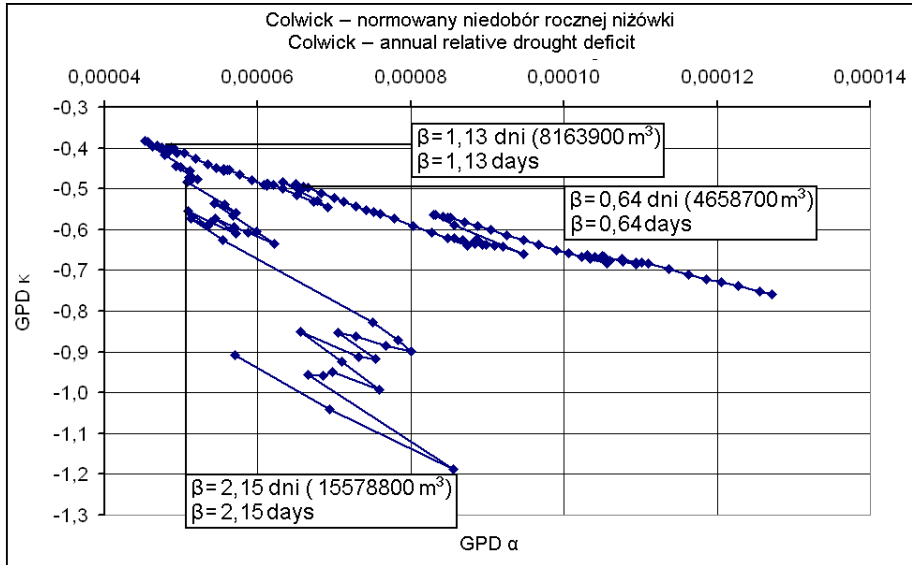
Rys. 22. Zmienność estymatorów parametrów GPD w zależności od przesunięcia  $\beta$  podczas estymacji rozkładów normowanego niedoboru przepływów oraz czasu trwania rocznej niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, przekrój w Międzyzlesiu

Fig. 22. The variability of the estimated GPD parameters in dependence of the shift parameter  $\beta$  for the annual low flow relative deficit volume and duration, Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



Rys. 23. Zmienność estymatorów parametrów GPD w zależności od przesunięcia  $\beta$  podczas estymacji rozkładów normowanego niedoboru przepływu oraz czas trwania rocznej niżówki, rzeka Ngaruroro, przekrój w Kuripapango

Fig. 23. The variability of the estimated GPD parameters in dependence of the shift parameter  $\beta$  for the annual low flow relative deficit volume and duration, Ngaruroro River, Kuripapango Profile



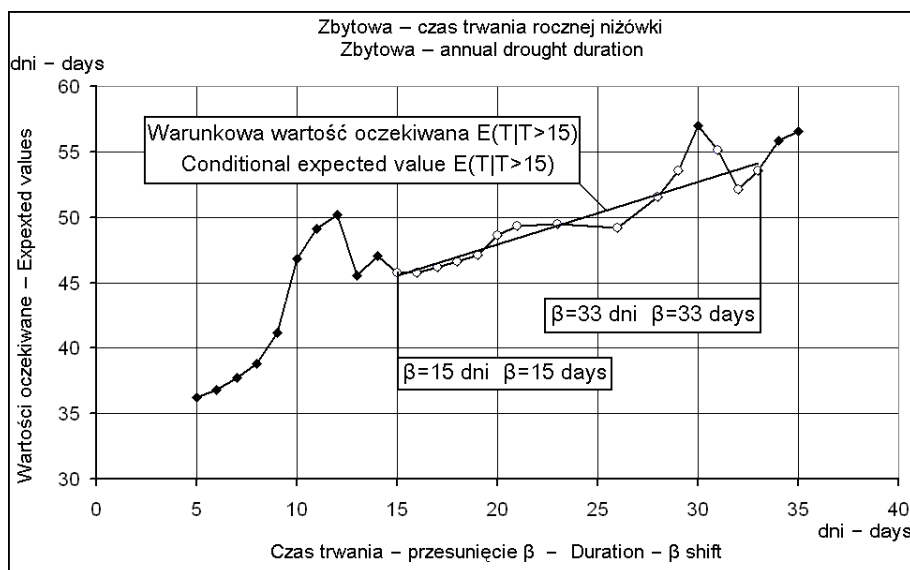
Rys. 24. Zmienność estymatorów parametrów GPD w zależności od przesunięcia  $\beta$  podczas estymacji rozkładów normowanego niedoboru przepływów oraz czas trwania rocznej niżówki, rzeka Trent, przekrój w Colwick

Fig. 24. The variability of the estimated GPD parameters in dependence of the shift parameter  $\beta$  for the annual low flow relative deficit volume and duration, Trent River, Colwick Profile

Poza profilem w Colwick (rys. 24), przy wysokich  $\beta_i$  estymatory  $\hat{\kappa}_i$  obliczanych rozkładów czasów trwania niżówek, zbliżając się do 0, nie wykraczają poza przedział  $(-\frac{1}{2}; 0)$ . Nawet te bliskie zera są nadal ujemne. Do dalszych obliczeń będą brane pod uwagę tylko estymatory  $\hat{\kappa}_i \in (-\frac{1}{2}, 0)$ , różniące się od 0 przynajmniej o wielkość błędu maszynowego<sup>6</sup> [Ralston 1983]. W profilu wodowskazowym w Colwick zarówno dla niskich, jak i wysokich wartości  $\beta_i$  odpowiedni estymator  $\hat{\kappa}_i$  obniża się poniżej  $-0,5$ . Pojawianie się na wykresach takich niskich wartości  $\hat{\kappa}$  wynika tylko z przyjętej metody prezentacji wyników.

Dodatkowy problem pojawia się podczas estymacji parametrów rozkładu czasów trwania niżówki. Przy początkowych wartościach  $\beta_i$ , kierunek narastania estymatorów przebiega przeciwnie niż w przypadku wyższych  $\beta_i$  – taka zmiana tendencji może świadczyć o istnieniu pewnej niejednorodności opracowywanych danych.

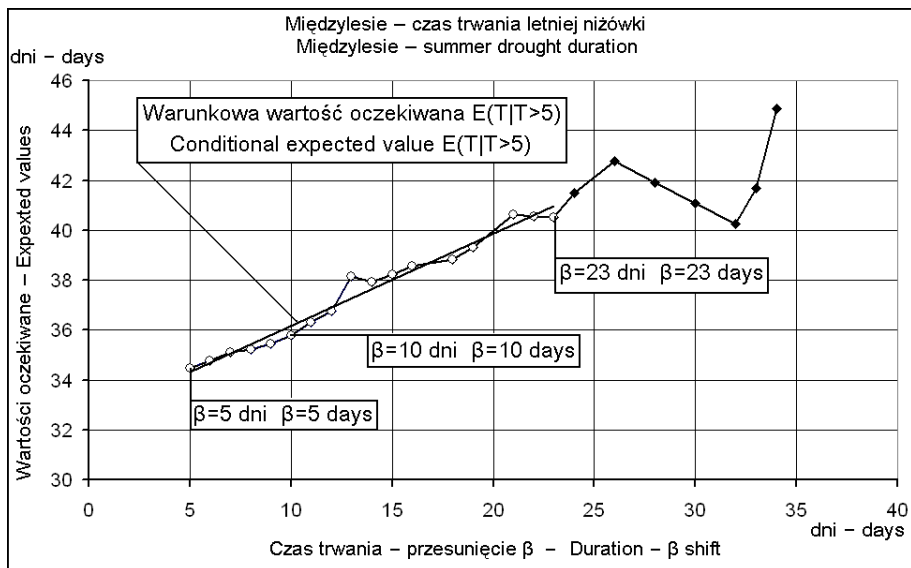
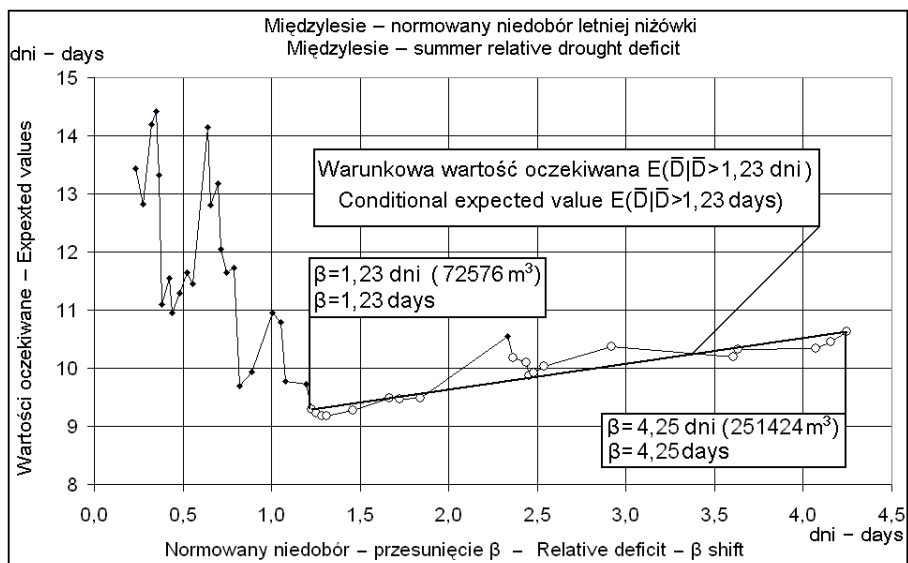
Kolejnym problemem jest zmienność estymatorów  $\hat{\kappa}_i$ . Z formuły (5.23) wynika, że wraz ze zmianą  $\beta$  powinien on pozostawać na stałym, niezmiennym poziomie. Na rysunkach 20–23 kolejne wartości  $\hat{\kappa}_i$  rosną i wraz ze wzrostem  $\beta_i$  zmierzają do zera.



Rys. 25. Estymowany rozkład GPD wartości oczekiwane w zależności od parametru przesunięcia  $\beta$  – czas trwania rocznej niżówki, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

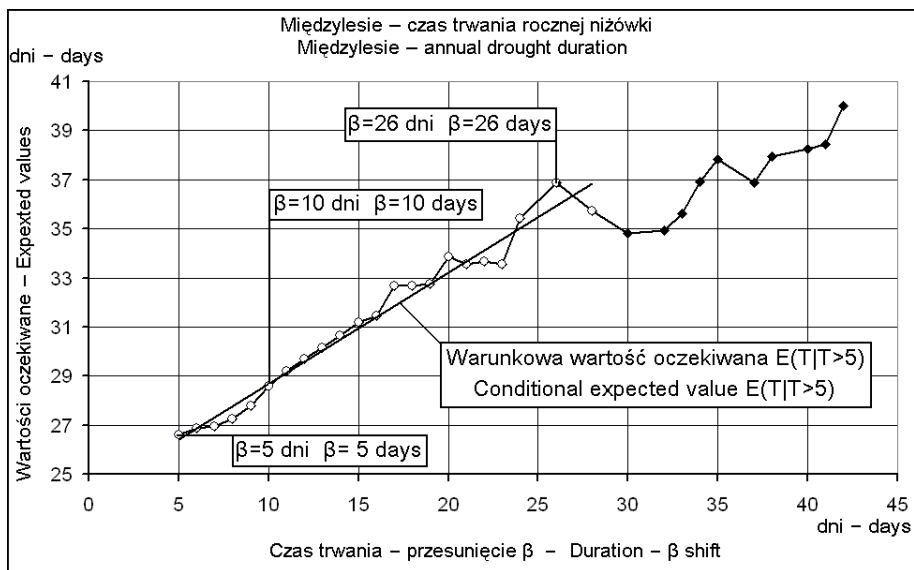
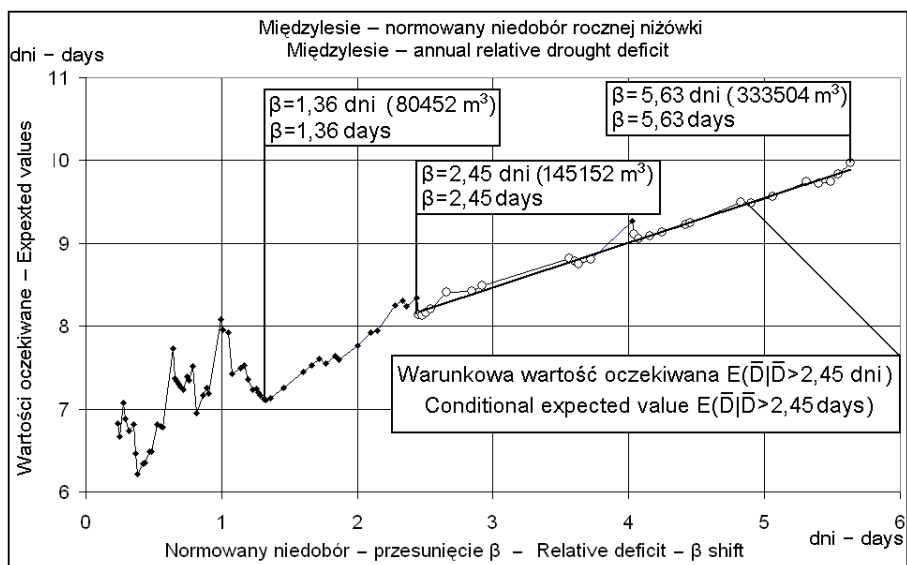
Fig. 25. Estimated GPD expected values versus shift parameter  $\beta$  – annual low flow duration, Widawa River, Zbytowa Profile

<sup>6</sup> Wszystkie obliczenia wykonywano z dokładnością 14–16 miejsc znaczących. Podczas skomplikowanych obliczeń numerycznych na liczbach rzędu jednostek, wielkości rzędu  $10^{-10}$  mogą już być obciążone istotnym błędem maszynowym.



Rys. 26. Estymowany rozkład GPD wartości oczekiwane w zależności od parametru przesunięcia  $\beta$  – niedoboru przepływów oraz czasu trwania letniej niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu

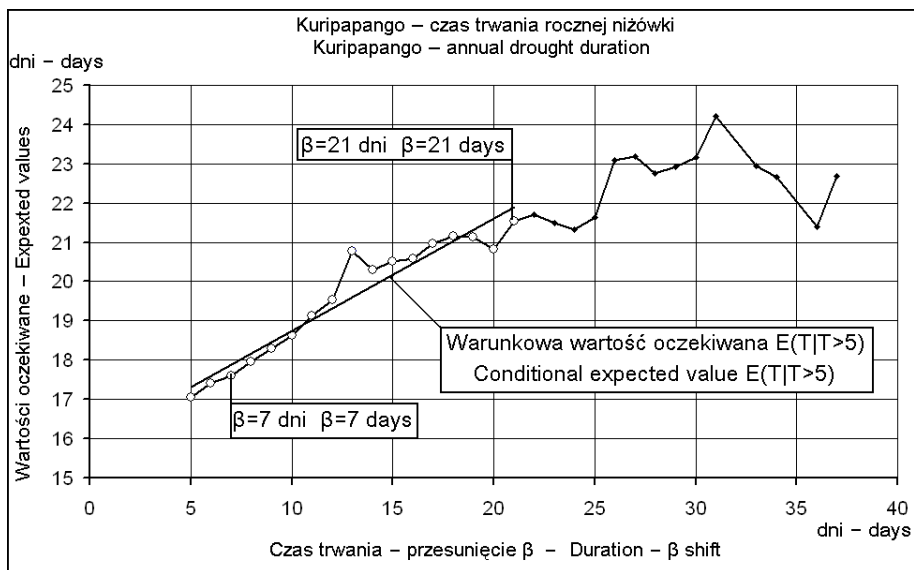
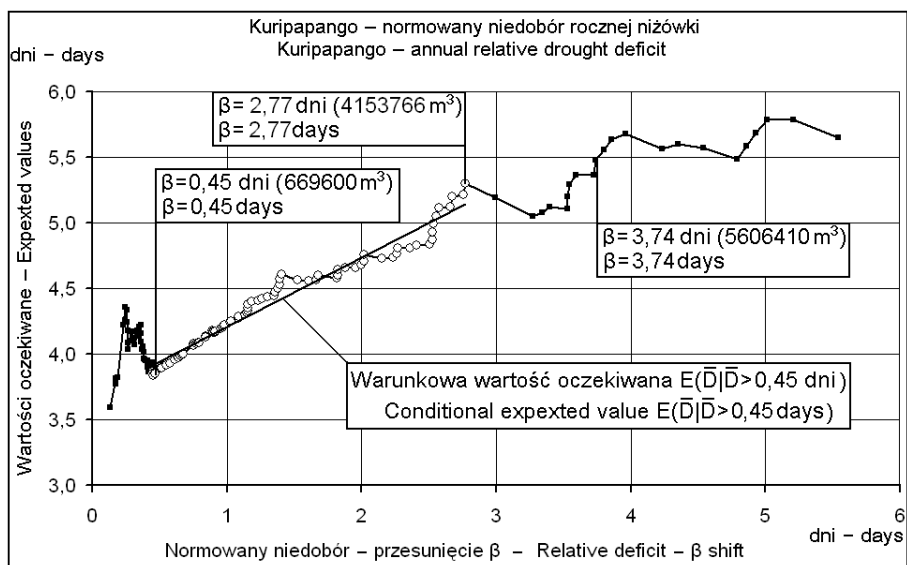
Fig. 26. Estimated GPD expected values versus shift parameter  $\beta$  – summer low flow deficit volume or duration, Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



Rys. 27. Estymowany rozkład GPD wartości oczekiwane w zależności od parametru przesunięcia  $\beta$  – niedoboru przepływów oraz czasu trwania rocznej niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzylesiu

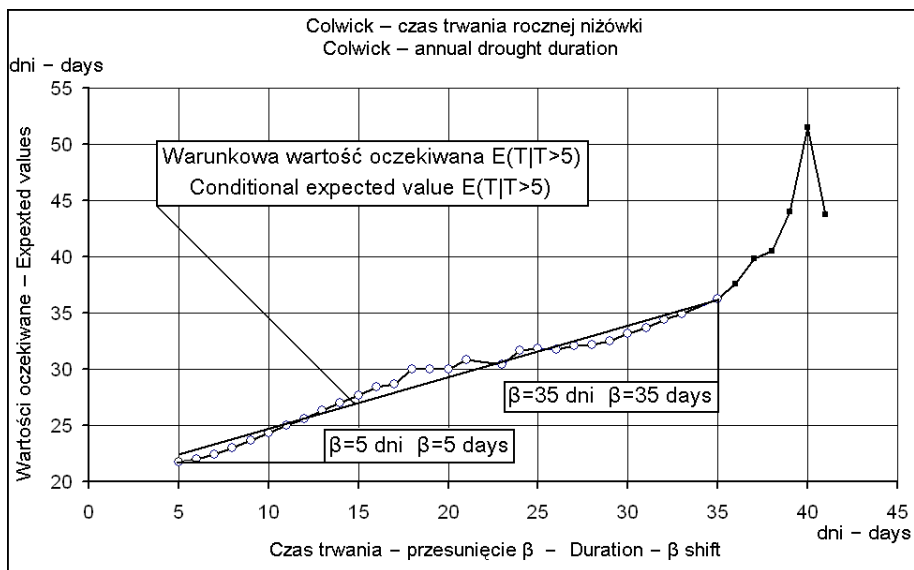
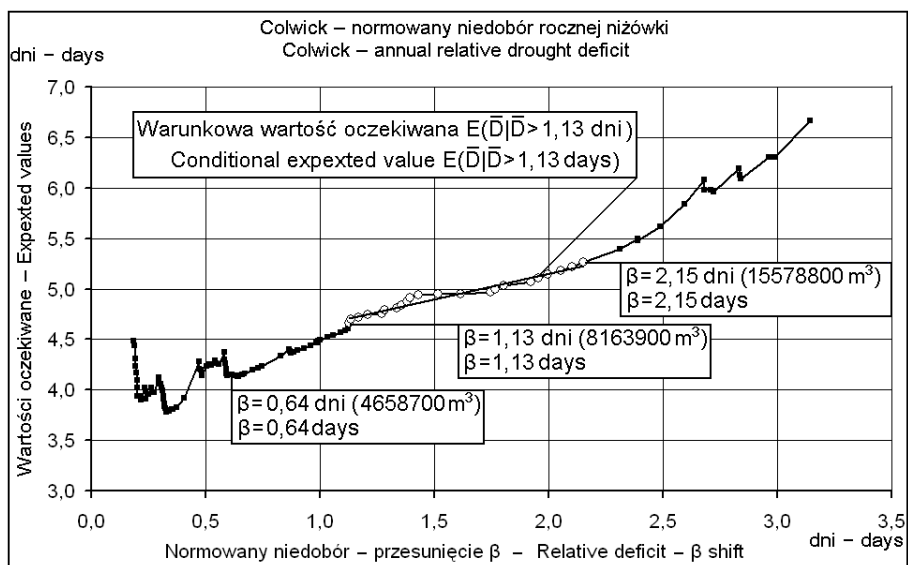
Fig. 27. Estimated GPD expected values versus shift parameter  $\beta$  – annual low flow deficit volume or duration, Nysa Kłodzka River, Międzylesie Profile





Rys. 28. Estymowany rozkład GPD wartości oczekiwane w zależności od parametru przesunięcia  $\beta$  – niedoboru przepływów oraz czasu trwania rocznej niżówki, rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango

Fig. 28. Estimated GPD expected values versus shift parameter  $\beta$  – annual low flow deficit volumes or durations, Ngaruroro river, Kuripapango Profile



Rys. 29. Estymowany rozkład GPD wartości oczekiwane w zależności od parametru przesunięcia  $\beta$  – niedoboru przepływów oraz czasu trwania rocznej niżówki, rzeka Trent, wodowskaz w Colwick

Fig. 29. Estimated GPD expected values versus shift parameter  $\beta$  – annual low flow deficit volumes or durations, Trent river, Colwick profile

Korzystając z wyznaczonych estymatorów  $\hat{\alpha}_i, \hat{\kappa}_i$ , zgodnie z liniowością wartości oczekiwanej (5.23), można przystąpić do wyznaczenia estymatora  $\hat{\beta}$ . Za dobry estymator można uznać taki parametr przesunięcia  $\beta_i$ , który minimalizuje średniokwadratową odległość  $R(\beta_i)$  – warunek (5.25) – pomiędzy warunkową wartością oczekiwaną liczoną w punktach  $\beta_j, j > i$  a wartością oczekiwaną liczoną dla przesunięcia  $\beta_j$  [Engeland i in. 2004].

$$\begin{aligned} R(\beta_i) &= \frac{1}{n-i} \sum_{j=i+1}^n (\mathbb{E}(A|A > \beta_i) - \mathbb{E}A_{\beta_j})^2 \\ &= \frac{1}{n-i} \sum_{j=i+1}^n \left( \mathbb{E}A_{\beta_i} - \frac{\kappa}{\kappa+1}\beta_i - \mathbb{E}A_{\beta_j} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Do obliczeń należy wykorzystywać tylko takie pary estymatorów  $(\hat{\alpha}_i, \hat{\kappa}_i)$ , gdzie  $\hat{\kappa}_i \in (-\frac{1}{2}; 0)$ . We wszystkich zbadanych przykładach wraz ze wzrostem  $\beta_i$  odległość  $R$  maleje, dochodząc przy  $i = n - 1$  do 0. Jednak za każdym razem, dla pewnego  $n_0 < n$ , udało się wyznaczyć dobrze zaznaczone, jednoznaczne, lokalne minimum. Parametry najlepszych, w średniokwadratowym sensie (5.25), przesunięć wraz z liniami warunkowych wartości oczekiwanych zawarto w tabeli 17 oraz na rysunkach 25–29. Brak jest jedynie wykresu normowanego niedoboru przepływów niżówki w Zbytowej. Trudno, bowiem wyznaczać zgodnie z formułą (5.25) najlepszą wartość  $\beta_i$ , wtedy gdy dostępne są tylko dwie możliwości – dwie pary estymatorów  $(\hat{\alpha}_i, \hat{\kappa}_i)$ , dla których  $\hat{\kappa}_i \in (-\frac{1}{2}, 0)$ . Dlatego też do dalszych obliczeń za estymator  $\hat{\beta}$  została wybrana ta wartość  $\beta_i$ , przy której otrzymano najlepsze dopasowanie uogólnionego rozkładu Pareto do obserwowanych niedoborów przepływów niżówek.

Tabela 17. Estymowane poprzez minimalizację sumy (5.25) wartości parametru  $\beta$

Table 17. Estimated values of  $\beta$  parameter by the minimalization of the sum (5.25)

Wodowskaz Profile	Sezon Season	Normowany niedobór [doby] Relative deficit volume [days]	Niedobór [tys. m <sup>3</sup> ] Deficit volume [1000m <sup>3</sup> ]	Czas trwania [doby] Duration [days]
Zbytowa	Cały rok /Annual	4,31	1 238	15
Międzylesie	Cały rok /Annual	2,45	145	5
	Letni /Summer	1,23	73	5
Kuripapango	Cały rok /Annual	0,45	670	5
Colwick	Cały rok /Annual	1,13	8 164	5

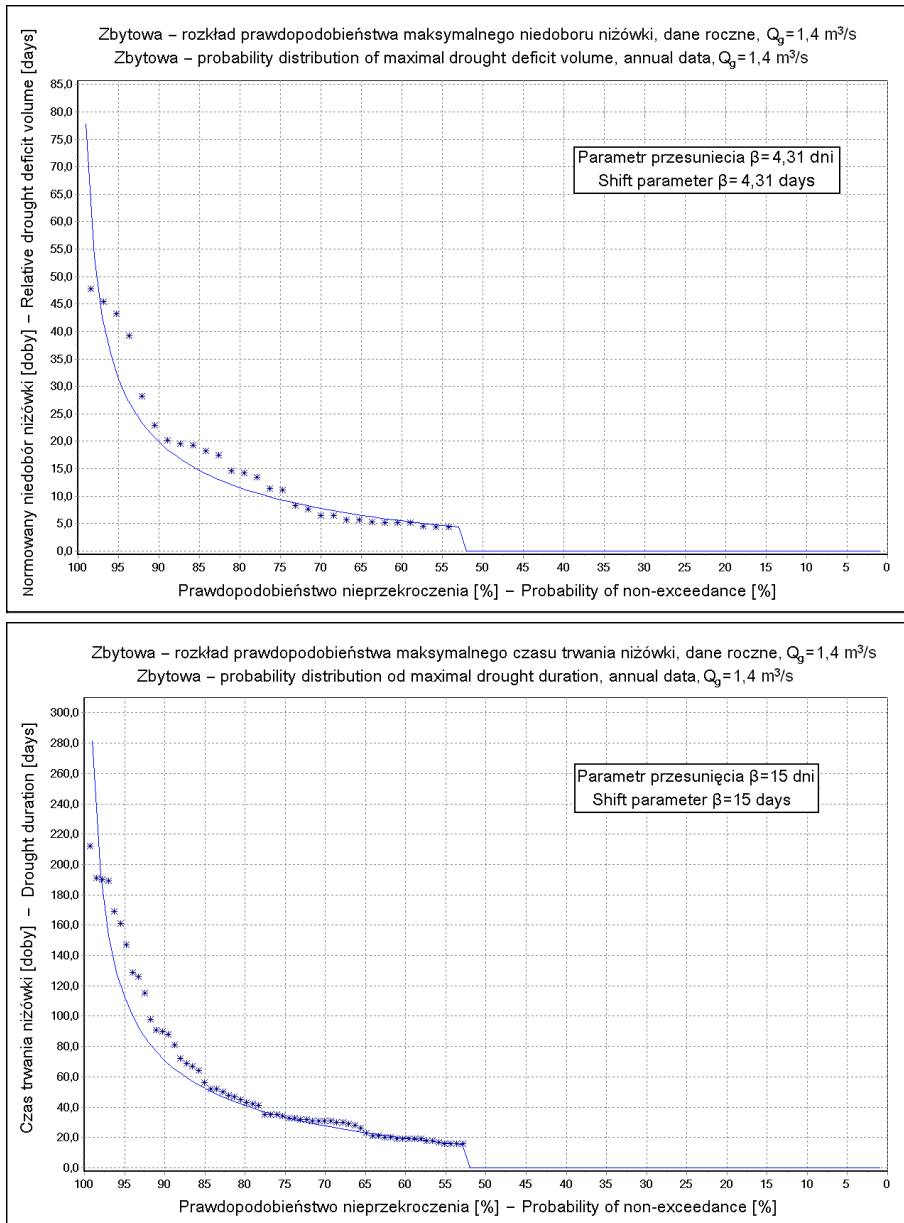
Przedstawione na wykresach (25 - 29) punkty oznaczają związek pomiędzy przesunięciem  $\beta_i$  – oś odciętych a obliczonymi warunkowymi wartościami oczekiwanymi – oś rzędnych. Zaznaczone są warunkowe wartości oczekiwane, przy których:

- $\hat{\kappa}_i \in (-0,9, -\frac{1}{2})$  – romby;
- $\hat{\kappa}_i \in (-\frac{1}{2}, 0)$  – kółka;
- $\hat{\kappa}_i \in (-\frac{1}{2}, 0)$  – romby (w sytuacji, gdy nie wchodzi one do obliczania najlepszej wartości  $\hat{\beta}_i$ , zgodnie ze wzorem (5.25)).

Z powodu szybkiego wzrostu warunkowych wartości oczekiwanych do nieskończoności, dla  $\hat{\kappa}_i < -0,9$  (wzór 5.23) zostały one pominięte na wykresach. Odcinkami linii prostych zaznaczono najlepsze w średniokwadratowym sensie (5.25) odcinki linii warunkowej wartości oczekiwanej. Są one obliczane dla najmniejszej zaznaczonej na wykresie wartości przesunięcia – przykładowo dla czasów trwania w Zbytowej jest to 15 dni, zaś normowanego niedoboru przepływów niżówki w Międzyzlesiu 1,23 dnia ( $72 \cdot 576\text{m}^3$ ). Należy dodać, że obliczana warunkowa wartość oczekiwana jest tylko oczekiwanym przyrostem ponad wartość przesunięcia.

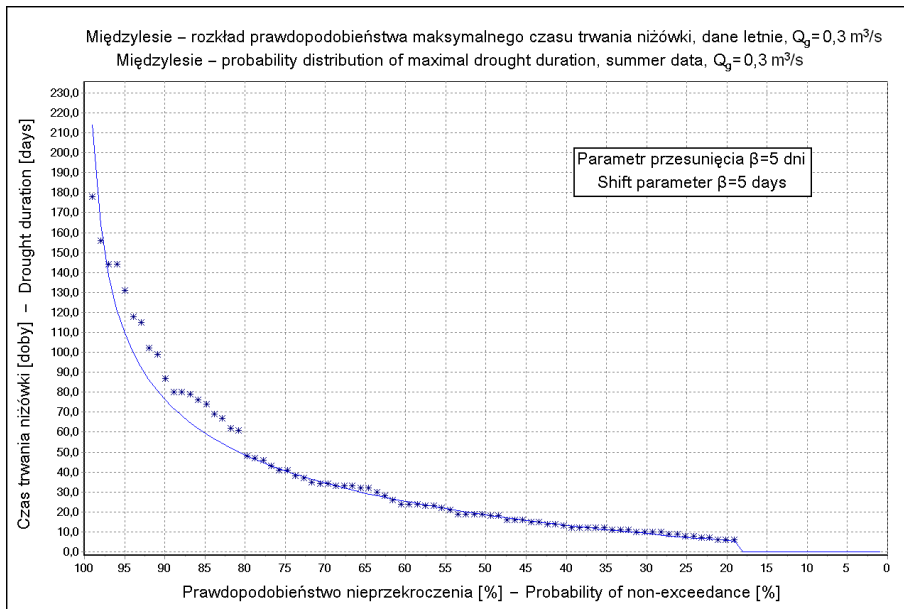
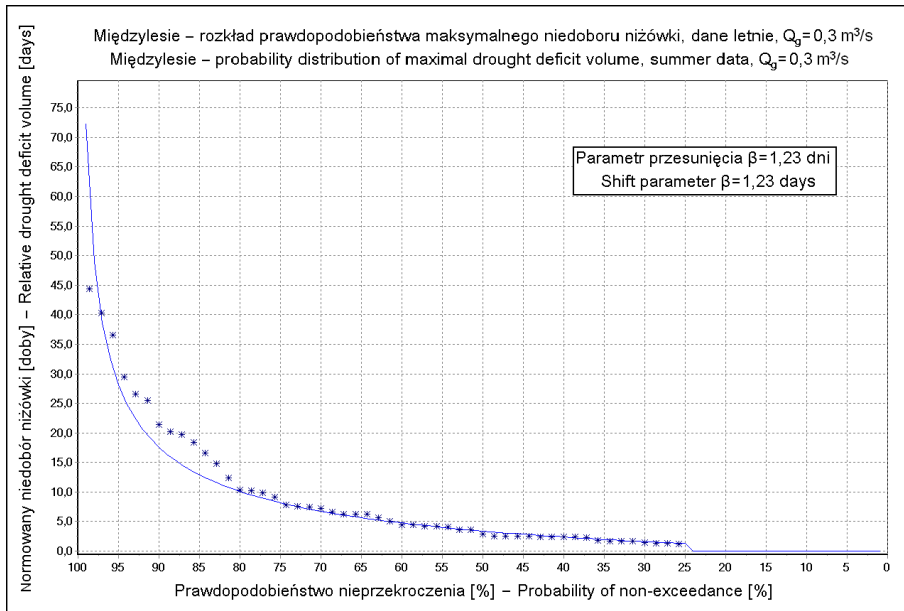
Na wszystkich górnych wykresach – normowanych niedoborów przepływów niżówki, po zaburzeniach początkowych przesunięć  $\beta_i$ , wartości oczekiwane układają się wzdłuż linii warunkowej wartości oczekiwanej. Z kolei na dolnych wykresach – czasów trwania dopasowanie jest poprawne już przy początkowych wartościach  $\beta_i$ . We wszystkich profilach, poza warunkowymi wartościami oczekiwanymi normowanych niedoborów przepływów niżówki w Międzyzlesiu (rys. 26–27), pojawia się nieliniowość przy wysokich przesunięciach  $\beta_i$ . Może ona wynikać ze zbyt małej liczby niżówek uczestniczących w estymacji parametrów  $\alpha_\beta$  i  $\kappa$ .

Po obliczeniu estymowanych parametrów uogólnionego rozkładu Pareto łatwo można wyznaczyć rozkłady charakterystyk niżówek maksymalnych (rys. 30–34). Należy tylko pamiętać, że zgodnie z (5.21), estymowana wartość parametru  $\hat{\alpha}_\beta$  dla przesuniętych o  $\beta_i$  charakterystyk niżówek jest związana z estymatorem  $\hat{\alpha}$  związkiem (5.21). Na rysunkach 30–34 na osi poziomej zaznaczone jest wyrażone w % prawdopodobieństwo nieprzewyższenia, zaś na osi pionowej albo czas trwania (dolne), albo unormowany średnim dobowym odpływem niedobór przepływów niżówki (górne wykresy). Linia ciągłą zaznaczony jest poszukiwany rozkład, zaś gwiazdkami wszystkie obserwowane charakterystyki większe od estymatora przesunięcia  $\hat{\beta}_i$ . Dobroć dopasowania oceniono testem zgodności  $\lambda$  Kołmogorowa, wyniki zamieszczone zostały w tabeli 18. W żadnym z rozpatrywanych przypadków nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności teoretycznego uogólnionego rozkładu Pareto do obserwowanych charakterystyk. W porównaniu z metodą Zelenhasicia i Salvai, gdzie w przypadku rocznych obserwacji z Kuripapango i Colwick hipotezę o zgodności należało odrzucić, zastosowany uogólniony rozkład Pareto wykazuje wyraźnie lepsze dopasowanie. Co więcej, we wszystkich obliczanych profilach obliczona wartość statystyki testowej jest niższa niż w wypadku odpowiednich wartości liczonych dla modelu ZS. Dlatego też krzywa estymowanego rozkładu przebiega znacznie bliżej obserwowanych charakterystyk.



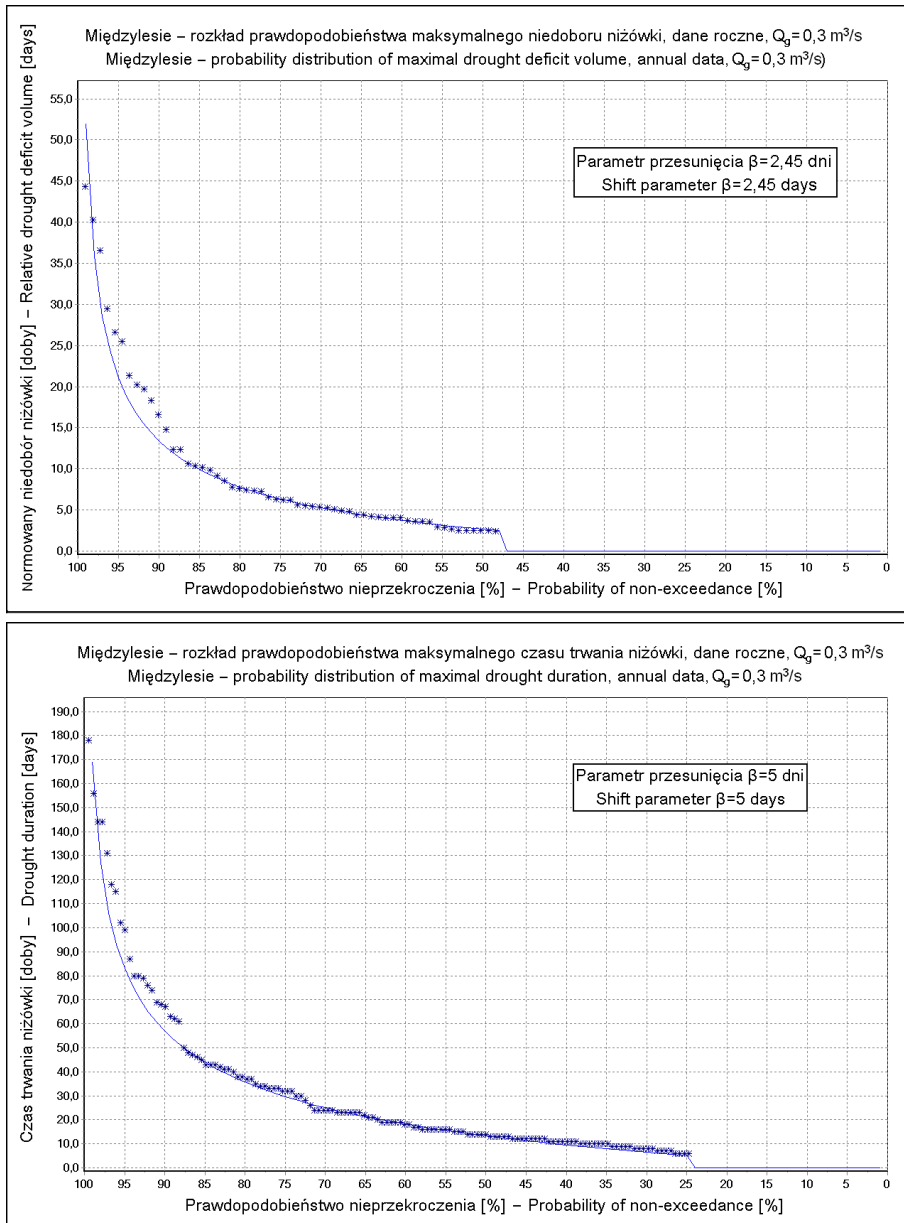
Rys. 30. Estymowany rozkład GPD – maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 30. Estimated GPD distribution of the maximal annual low flow indices, Widawa River, Zbytowa Profile



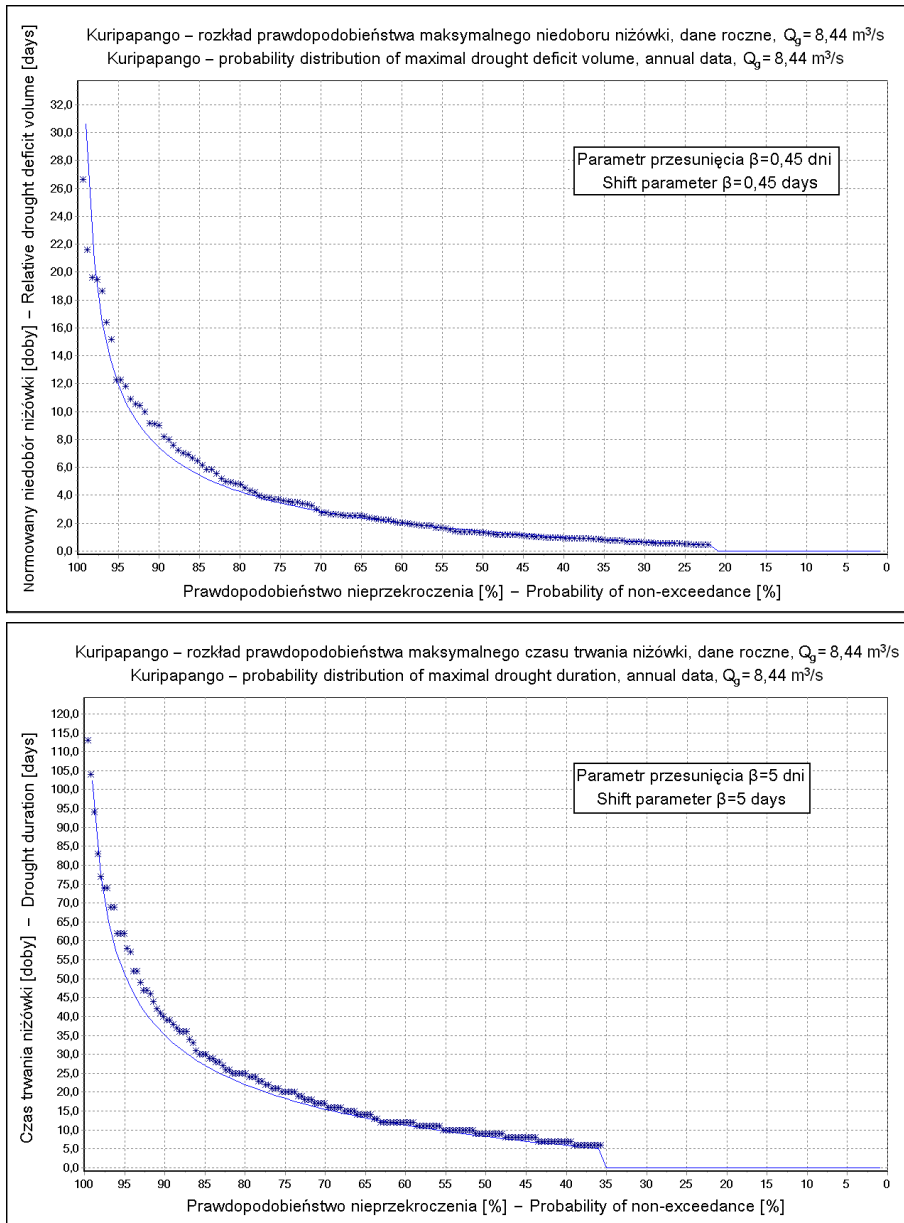
Rys. 31. Estymowany rozkład GPD – maksymalnych charakterystyk letniej niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzylesiu

Fig. 31. Estimated GPD distribution of the maximal summer low flow indices, Nysa Kłodzka River, Międzylesie Profile



Rys. 32. Estymowany rozkład GPD – maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu

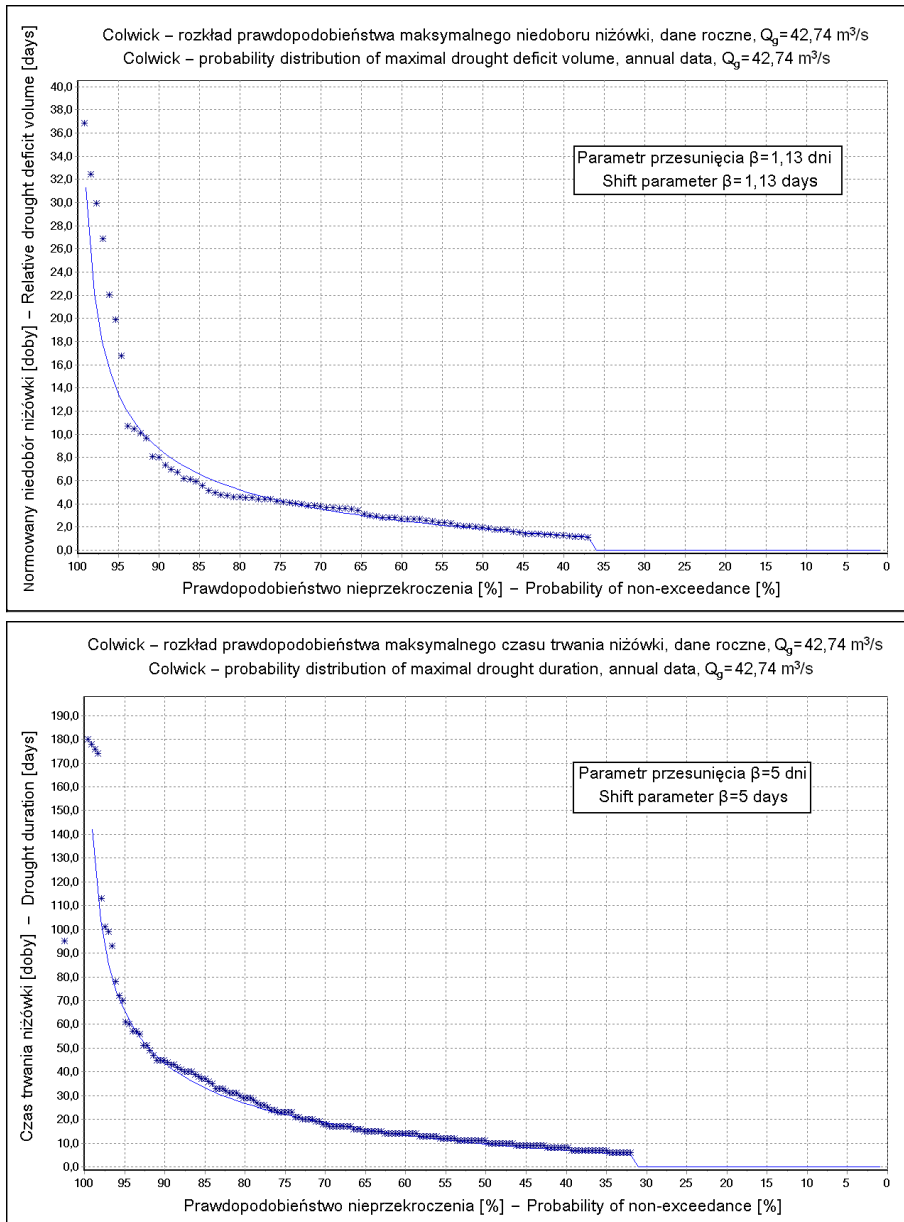
Fig. 32. Estimated GPD distribution of the maximal annual low flow indices, Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



Rys. 33. Estymowany rozkład GPD – maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki, rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango

Fig. 33. Estimated GPD distribution of the maximal annual low flow indices, Ngaruroro River, Kuripapango Profile





Rys. 34. Estymowany rozkład GPD – maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki, rzeka Trent, wodowskaz w Colwick

Fig. 34. Estimated GPD distribution of the maximal annual low flow indices, Trent River, Colwick Profile

Przy ocenie wyników należy wziąć pod uwagę graniczny warunek Pickands'a (5.18). Założeniu, że zmierzające do nieskończoności przesunięcie  $\beta$  jest estymowane przez  $\hat{\beta}$  spełniające warunek (5.25) powoduje, że estymowany rozkład może być dość odległy od granicznego rozkładu wartości ekstremalnych. Oznacza to, że estymowany za pomocą GPD rozkład ogranicza od dołu rozkład wartości ekstremalnych. Inaczej mówiąc – krzywa rozkładu leży poniżej teoretycznej krzywej rozkładu wartości ekstremalnych. Jego kwantyle oceniają minimalną wartość charakterystyki niżówki.

Przy takim podejściu do estymacji powstaje problem określenia prawdopodobieństwa  $\Pr(A \leq \hat{\beta})$ . Może być ono obarczone dość znacznym, trudnym do weryfikacji błędem. W dodatku niewielka zmiana wartości  $\hat{\beta}$  nie uniemożliwia dobrego dopasowania rozkładu GPD do obserwowanych charakterystyk. Niestety taka zmiana wywołuje dość mocne rozciągnięcie lub zawężenie krzywej rozkładu. Ma to niebagatelne znaczenie przy obliczaniu wysokich prawdopodobieństw nieprzekroczenia. Co więcej, do wyznaczenia  $\Pr(A \leq \hat{\beta})$  użyto estymatorów  $\hat{\alpha}$  otrzymanych w wyniku przeliczenia formuły (5.21) przy niezmiennym  $\hat{\kappa}$ . Jak wynika z rysunków 22–24 zmienność  $\hat{\kappa}$  w zależności od zmiany przesunięcia  $\beta_i$  jest dość znaczna. Trudno więc przyjąć założenie o braku zmienności estymatora  $\hat{\kappa}$ . Oznacza to, że teoretyczna krzywa rozkładu może być albo mocniej rozciągnięta, albo też zawężona. Z tym wiąże się możliwa niedokładność wyznaczenia kwantyli wysokich prawdopodobieństw nieprzewyższenia.

Tabela 18. Test zgodności  $\lambda$  Kołmogorowa uogólnionego rozkładu Pareto z obserwowanymi rocznymi lub sezonowymi wartościami maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki

Table 18. The  $\lambda$  Kolmogorov goodness-of-fit test of the Generalized Pareto Distribution to the extreme annual or seasonal observed low flow relative deficits and durations

Wodowskaz Profile	Sezon Season	Niedobór Deficit volume	Czas trwania Duration
Zbytowa	Cały rok Annual	0,3065	0,3531
Międzylesie	Cały rok Annual	0,3350	0,7508
	Letni Summer	0,4998	0,4273
Kuripapango	Cały rok Annual	0,4565	0,6884
Colwick	Cały rok Annual	0,4156	0,6833

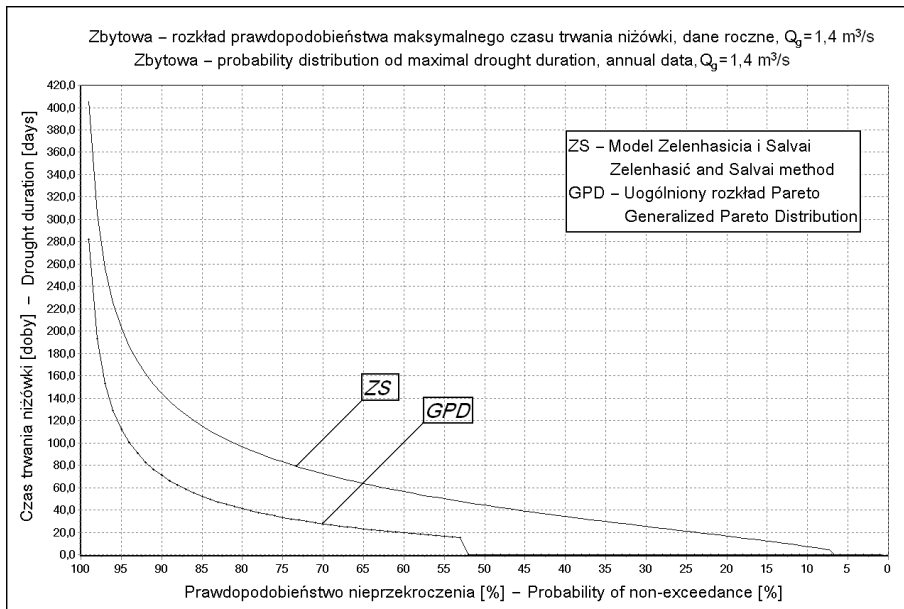
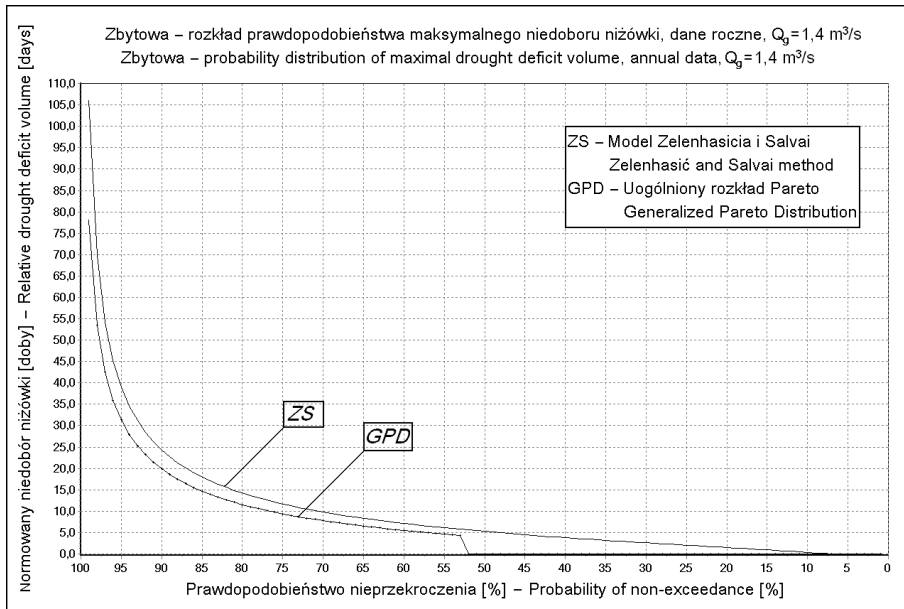
## 5.6. Model Zelenhasicia i Salvai, uogólniony rozkład Pareto – porównanie estymowanych rozkładów

Stosując obydwie metody estymacji rozkładów maksymów charakterystyk, korzystano z takich samych ciągów przepływów i takich samych jak proponowane w rozdziale 5.3. restrykcji – można je porównywać między sobą. Szczególnie interesujące winny być porównania wysokich prawdopodobieństw nieprzekroczenia. Na wspólnych rysunkach 35–38 przedstawiono rozkłady maksymalnych charakterystyk rocznych (Zbytowa, Międzylesie, Kuripapango) oraz niżówek letnich (Międzylesie). Tak jak poprzednio – wykresy leżące powyżej przedstawiają rozkłady maksymalnych normowanych niedoborów przepływów, zaś dolne maksymalnych czasów trwania niżówki. Dla charakterystyk niżówek w Colwick, z powodu złego dopasowania modelu Zelenhasicia i Salvai, porównane nie zostało przeprowadzone. We wszystkich przypadkach linia rozkładu otrzymanego metodą ZS przebiega powyżej linii wyznaczonej przez uogólniony rozkład Pareto. Jest to zgodne z wnioskami przedstawionymi w poprzednich rozdziałach mówiącymi, że estymowany model Zelenhasicia i Salvai ogranicza od góry, a uogólniony rozkład Pareto ogranicza od dołu rzeczywiste rozkłady charakterystyk maksymalnych. Niestety różnica w oszacowaniu kwantyli obu rozkładami jest znaczna. W przypadku czasów trwania niżówki różnice pomiędzy nimi przekraczają nawet 50% wartości. Dzieje się tak mimo dobrego dopasowania danych empirycznych do obu rozkładów teoretycznych (tab. 13, 18).

Porównując wykresy rozkładów maksymalnych charakterystyk rocznych i sezonowych niżówek w Międzylesiu (rys. 36–37), łatwo zauważyć wpływ sezonowości na przebieg krzywych. Oznacza to, iż pojawiają się profile, w których występuje wysoki wpływ sezonowości na postać rozkładów charakterystyk maksymalnych niżówki, co potwierdza wniosek zawarty w pracy autora [Jakubowski 2005a].

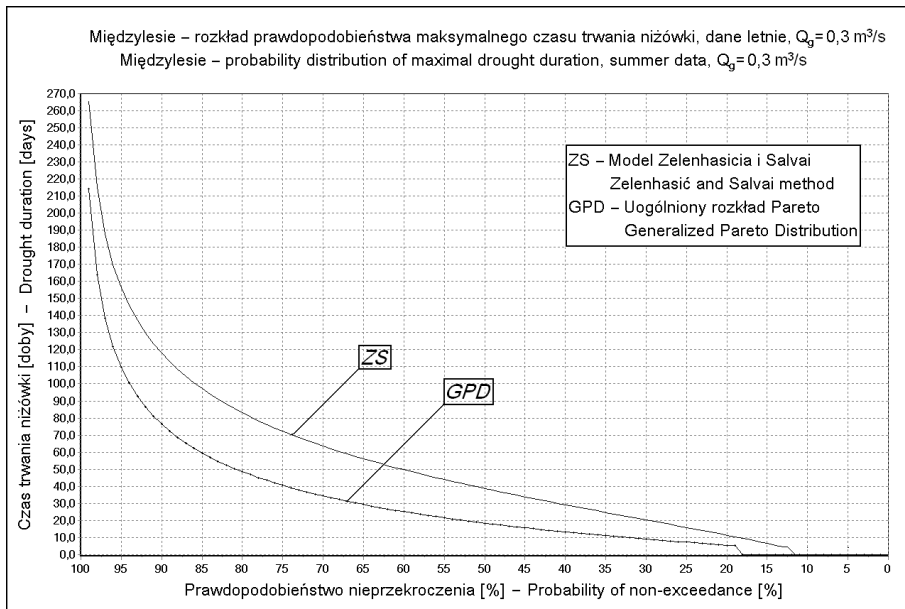
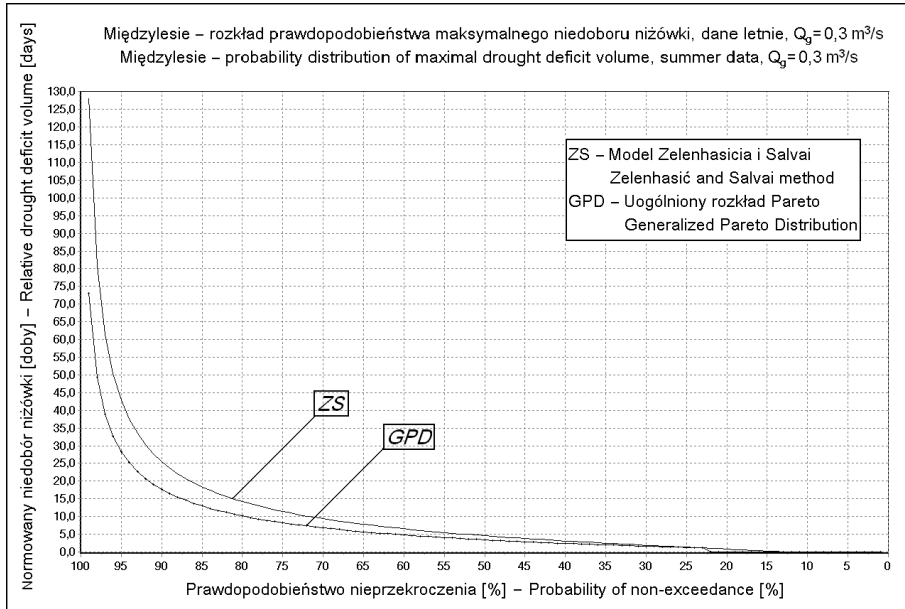
Inne przykłady stosowania modelu Zelenhasicia i Salvai można znaleźć w pracach: Biba i in. [2007], Fleig [2004], Birkel i Demuth [2006] czy Tomaszewski [2008].

W tym rozdziale charakterystyki maksymalnych niżówek rozpatrywane były oddzielnie. Podczas estymacji nie bierze się pod uwagę oczywistego związku (określonego w definicjach POT oraz SPA: 3.1–3.2) między obydwojema charakterystykami. W następujących dwóch rozdziałach to założenie zostanie odrzucone. W rozdziale 6. rozważane będą dwuwymiarowe rozkłady obu charakterystyk, a w następnym obu charakterystyk maksymalnych.



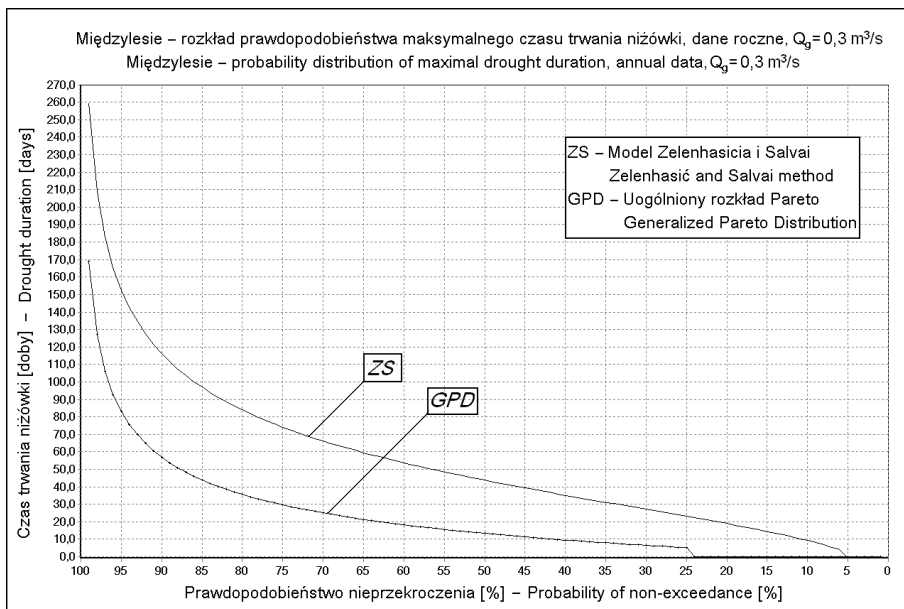
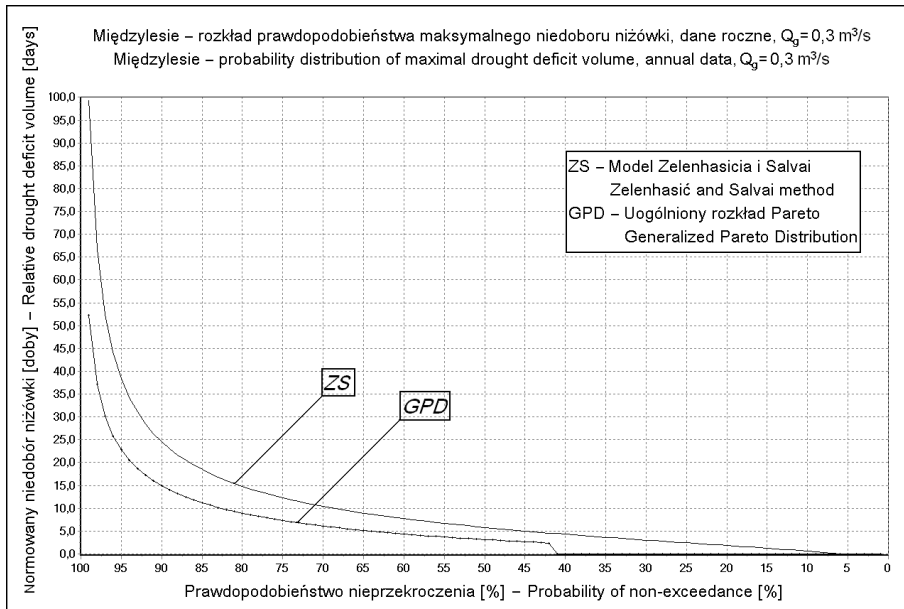
Rys. 35. Porównanie estymowanych rozkładów maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 35. Comparison of the annual extreme low flow indices estimated distributions, Widawa River, Zbytowa Profile



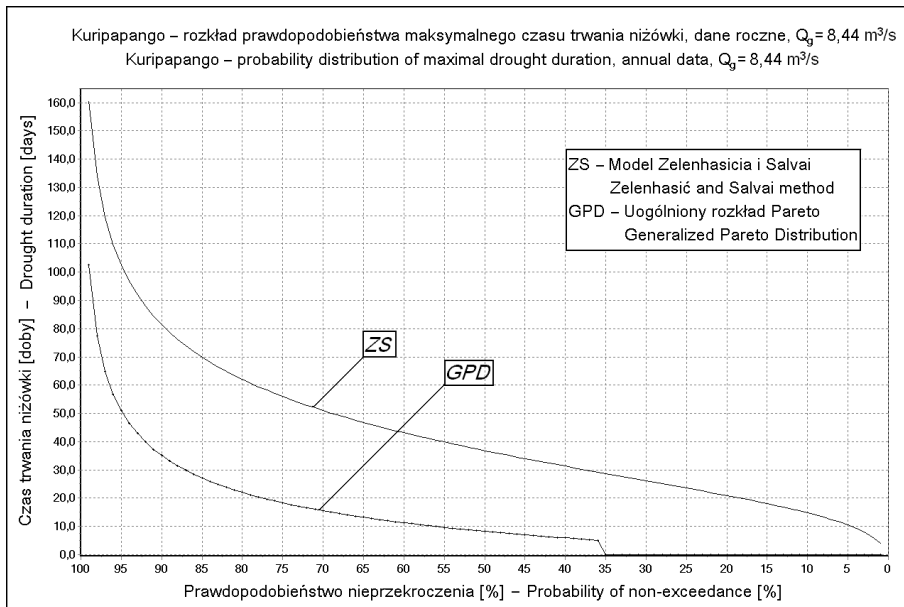
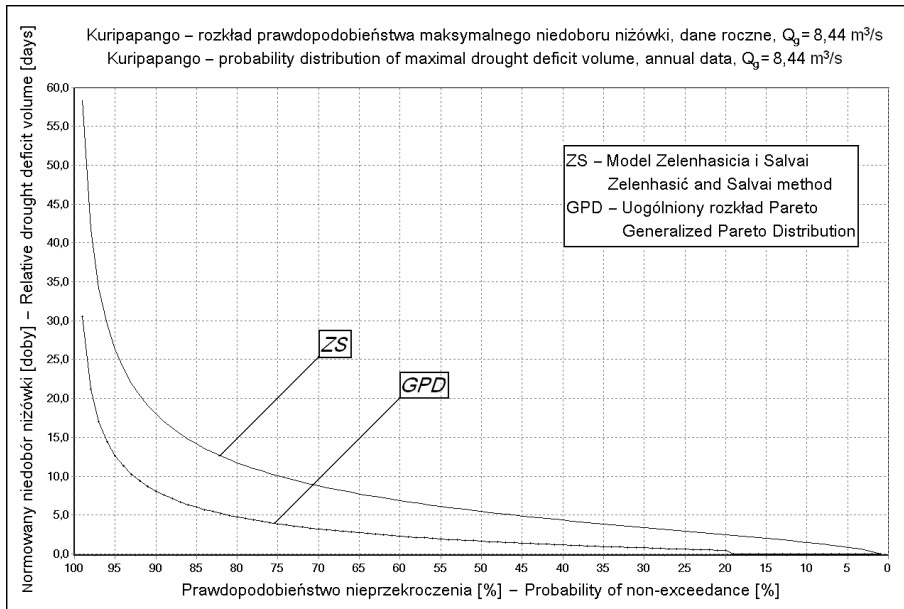
Rys. 36. Porównanie estymowanych rozkładów maksymalnych charakterystyk letniej niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu

Fig. 36. Comparison of the annual extreme low flow indices estimated distributions, Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



Rys. 37. Porównanie estymowanych rozkładów maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu

Fig. 37. Comparison of the annual extreme low flow indices estimated distributions, Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



Rys. 38. Porównanie estymowanych rozkładów maksymalnych charakterystyk rocznej niżówki, rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango

Fig. 38. Comparison of the annual extreme low flow indices estimated distributions, Ngaruroro River, Kuripapango Profile

## 6. DWUWYMIAROWY ROZKŁAD CHARAKTERYSTYK NIŻÓWEK

W prezentowanym rozdziale do estymacji normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki zastosowano dwuwymiarowy rozkład log-normalny. Zauważona niejednorodność obserwowanych niżówek, ze względu na ich wielkość, jest przyczyną częstego odrzucania hipotezy o zgodności rozkładu charakterystyk z jednowymiarowym rozkładem log-normalnym. Wobec tego dokonano heurystycznego podziału niżówek na dwa podzbiory:

- niżówki głębokie (długie) – mówiące o rozwoju suszy regionalnej;
- niżówki płytkie (krótkie) – mówiące o rozwoju suszy lokalnej.

Po odrzuceniu płytkich niżówek przeprowadzono ponowną estymację parametrów rozkładu. W większości badanych profili wodowskazowych nie było już podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności. W drugiej części rozdziału, przy założeniu log-normalności, estymowano rozkład intensywności niżówki. Przedstawiono przykłady zmienności rozkładu intensywności w czasie oraz w profilu podłużnym cieków.

Wielowymiarowe rozkłady charakterystyk niżówek ostatnio wzbudzają dość duże zainteresowanie. Badania dotyczą głównie zastosowania rozkładów typu „copula” do dwuwymiarowej estymacji czasu trwania i niedoboru przepływów niżówki [Shiau 2006, Shiau i in. 2007]. W tych rozkładach metodą największej wiarygodności estymuje się rozkłady brzegowe, a następnie, również metodą największej wiarygodności, funkcję zależności charakterystyk. Na przykład Shiau [2006] zakładał, że czas trwania niżówki ma rozkład wykładniczy, zaś niedobór przepływów – rozkład gamma. Zależności pomiędzy obiema charakterystykami opisywane są również w pracy Clausen i Pearson [1995].

W Polsce dwu- i trzywymiarowe rozkłady charakterystyk niżówki badane były już w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku przez Ozgę-Zielińską [Zielińska 1963, 1964]. W swoich badaniach do oceny charakterystyk niżówki wykorzystywała rozkład normalny, który z powodu swojej symetryczności, tylko w nielicznych przypadkach bez normalizacji daje się dobrze dopasować do danych obserwacyjnych.

W pracy przyjęto, że rozkładami brzegowymi są:

- rozkłady log-normalne – podczas estymowania charakterystyk niżówki;
- uogólnione rozkłady Pareto – gdy badane są charakterystyki maksymalne.

Wobec tego w dalszych badaniach wykorzystano tylko takie rozkłady, których rozkłady brzegowe są albo log-normalne, albo uogólnione Pareto. Również w porównaniu do prac Ozgi-Zielińskiej [Zielińska 1963, 1964] przyjęto inne restrikcje rozdziałające obserwowane niżówki.



## 6.1. Dwuwymiarowy rozkład log-normalny

Rozważmy dwuwymiarową zmienną losową  $(\bar{D}, T)$  –  $\bar{D}$  oznacza normowany niedobór przepływów, a  $T$  czas trwania niżówki. Załóżmy, że rozkład  $(\bar{D}, T)$  jest logarymiczno normalny o funkcji gęstości:

$$f(d, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_d\sigma_t\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{\ln d - \mu_d}{\sigma_d} \right)^2 - 2\rho \frac{(\ln d - \mu_d)(\ln t - \mu_t)}{\sigma_d\sigma_t} + \left( \frac{\ln t - \mu_t}{\sigma_t} \right)^2 \right]} \quad (6.1)$$

określony dla  $d, t > 0$  z parametrami:

- $\mu_d, \mu_t$  – wartości średnie liczone dla logarytmowanych normowanych niedoborów przepływów  $d$  oraz czasów trwania  $t$ ;
  - $\sigma_d, \sigma_t$  – odpowiednie odchylenia standardowe;
  - $\rho$  – współczynnik korelacji zlogarytmowanych zmiennych  $\bar{D}, T$
- oraz dystrybuantą:

$$F(d, t) = \int_0^d \int_0^t f(c, s) dc ds \quad (6.2)$$

Łatwo można udowodnić [Jakubowski i Tokarczyk 2008], że rozkłady brzegowe są również log-normalne o parametrach  $\mu_d, \sigma_d$  – gdy rozważany jest normowany niedobór przepływów oraz  $\mu_t, \sigma_t$  – w przypadku czasu trwania. Oznacza to, że oba brzegowe rozkłady nie zależą od współczynnika korelacji  $\rho$ . Zastosowana do rozkładu dwuwymiarowego metoda największej wiarygodności (dodatek A.2) pozwala na wyznaczenie wartości estymatorów nieznanymi parametrów dla każdego z rozkładów brzegowych oddzielnie. Natomiast estymator współczynnika korelacji obliczany jest w standardowy sposób (więcej o sposobach estymacji parametrów wielowymiarowego rozkładu log-normalnego można znaleźć np. w pracy Kaczmarska [1967]).

Korzystając z dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego, można uogólnić opisany w rozdziale 5.1 model Zelenhasicia i Salvai, na rozkłady dwuwymiarowe – wystarczy we wzorach 5.14, 5.15 w miejsce dystrybuanty rozkładu jednowymiarowego wstawić dystrybuantę rozkładu 6.2. Jednakże samo zastosowanie tak rozszerzonego modelu nie poprawia uzyskanej tam dokładności estymacji rozkładów brzegowych maksymalnych charakterystyk niżówki.

W rozpatrywanych profilach dobroć dopasowania rozkładu dwuwymiarowego oraz rozkładów brzegowych do danych przedstawiona została w tabeli 19. Badane są niżówki wyznaczone używając standardowych parametrów określonych w rozdziale 4. (minimalny czas pomiędzy sąsiadującymi niżówkami:  $m_t = 3$  dni, minimalny czas trwania niżówki:  $m_c = 5$  dni oraz parametr odrzucający nieistotne niżówki:  $\alpha_0 = 0,005$ ). Dopasowanie pokazane zostało zarówno w odniesieniu do danych z sezonu letniego, jak i rocznych. W teście zgodności rozkładu dwuwymiarowego podział na klasy przeprowadzony został zgodnie z procedurą zaproponowaną w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku przez Judah Rosenblatt [1962]. użytym testem zgodności był test  $\chi^2$  Pearsona. Uzyskano następujące wyniki:

- Na poziomie istotności  $\alpha_{\text{kryt}} = 0,05$ , w przypadku niżówek letnich z Międzylesia oraz rocznych z Kuripapango nie było podstaw do odrzucenia trzech hipotez o zgodności rozkładu log-normalnego z obserwowanymi jedno- i dwuwymiarowymi próbami charakterystyk niżówki.
- Na poziomie istotności  $\alpha_{\text{kryt}} = 0,01$  nie było podstaw do ich odrzucenia w odniesieniu do rocznych niżówek w Międzylesiu oraz rocznych i letnich w Colwick.
- W profilu w Zbytowej zarówno w przypadku danych rocznych, jak i letnich, hipotezy o zgodności należy odrzucić.

W tabeli 19 zaznaczono kursywą te obliczone  $p$ -wartości testu  $\chi^2$ , przy których hipotezę o zgodności należy odrzucić (są mniejsze niż 0,05).

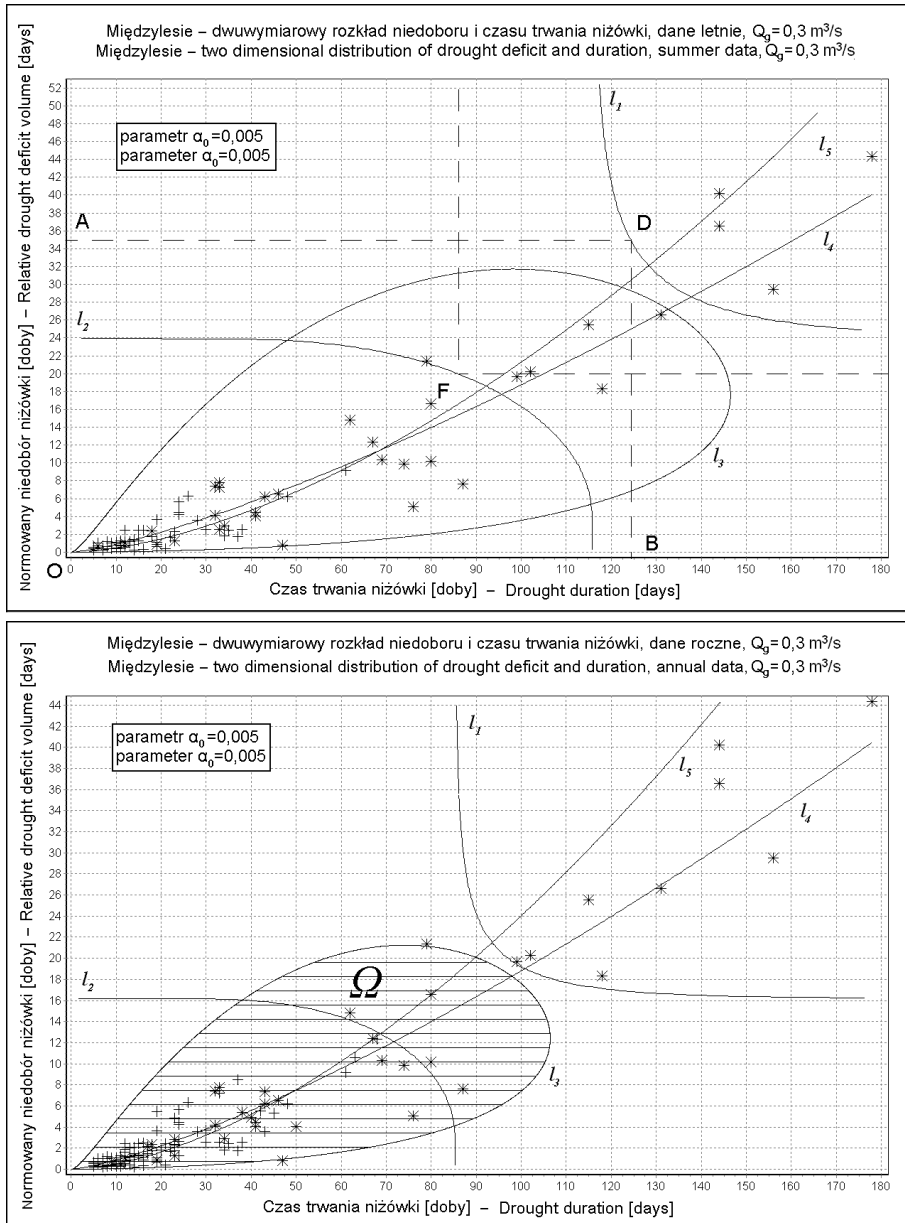
Tabela 19. Test zgodności  $\chi^2$  obserwowanych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania z jedno- i dwuwymiarowym rozkładem log-normalnym

Table 19. The  $\chi^2$  goodness-of-fit test of the observed relative deficits and durations to one and two-dimensional lognormal distributions

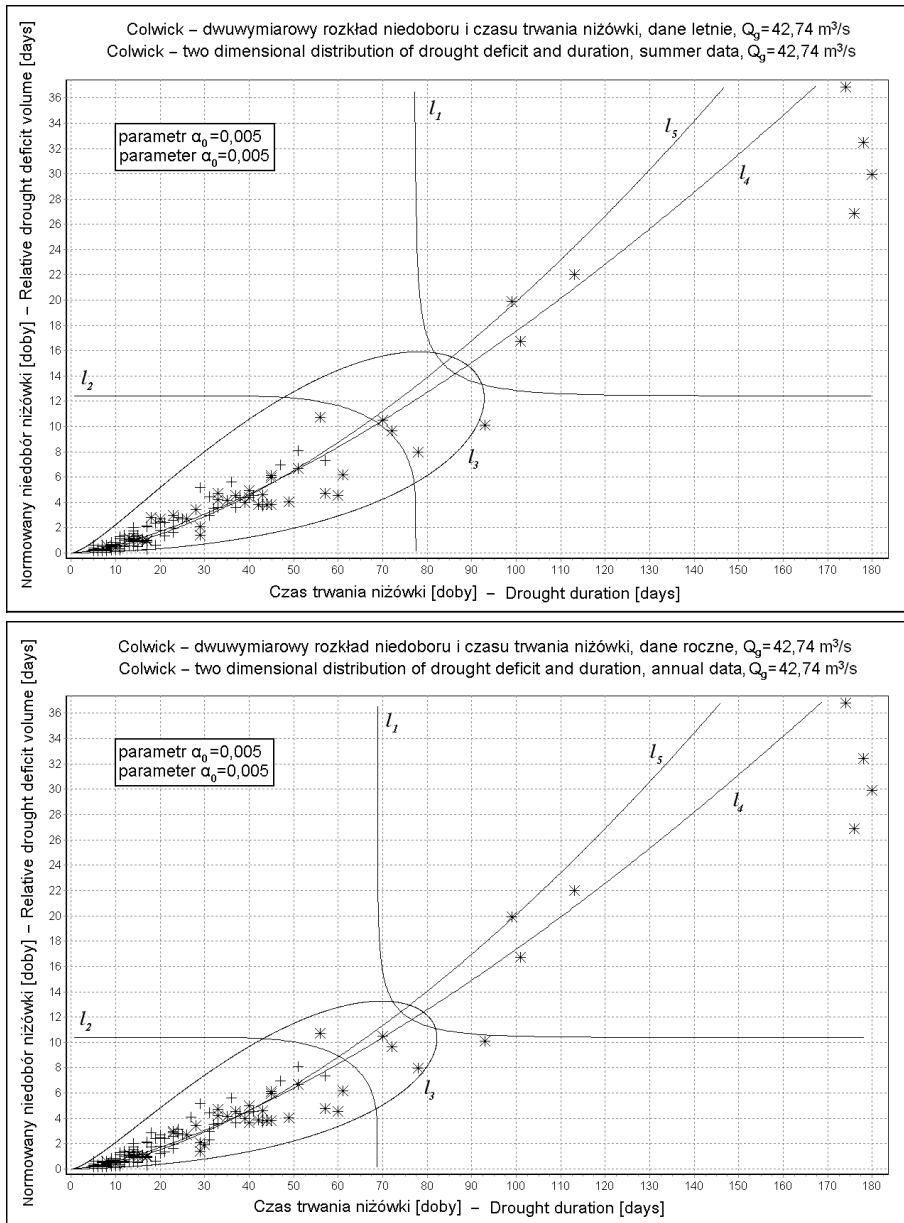
Wodowskaz Profile	Sezon Season	$p$ -wartości testu $\chi^2$ $p$ -values of the $\chi^2$ test		
		Normowany niedobór Relative deficit	Czas trwania Duration	Dwa wymiarów Two dimensions
Zbytowa	Cały rok – Annual	<i>0,0020</i>	<i>0,0021</i>	<i>0,0004</i>
	Letni – Summer	0,0781	<i>0,0023</i>	<i>0,0005</i>
Międzylesie	Cały rok – Annual	<i>0,0400</i>	0,0636	0,0543
	Letni – Summer	0,2758	0,3231	0,2637
Kuripapango	Cały rok – Annual	0,4490	0,1808	0,0772
Colwick	Cały rok – Annual	<i>0,0125</i>	<i>0,0362</i>	<i>0,0196</i>
	Letni – Summer	<i>0,0108</i>	0,0566	<i>0,0261</i>

W przypadku czasów trwania obliczone  $p$ -wartości mogą różnić się od wyników przedstawionych w tabelach 11–12. Obecnie podczas estymacji nie obniżano czasów trwania niżówki o minimalny czas trwania  $m_c - 1$ .

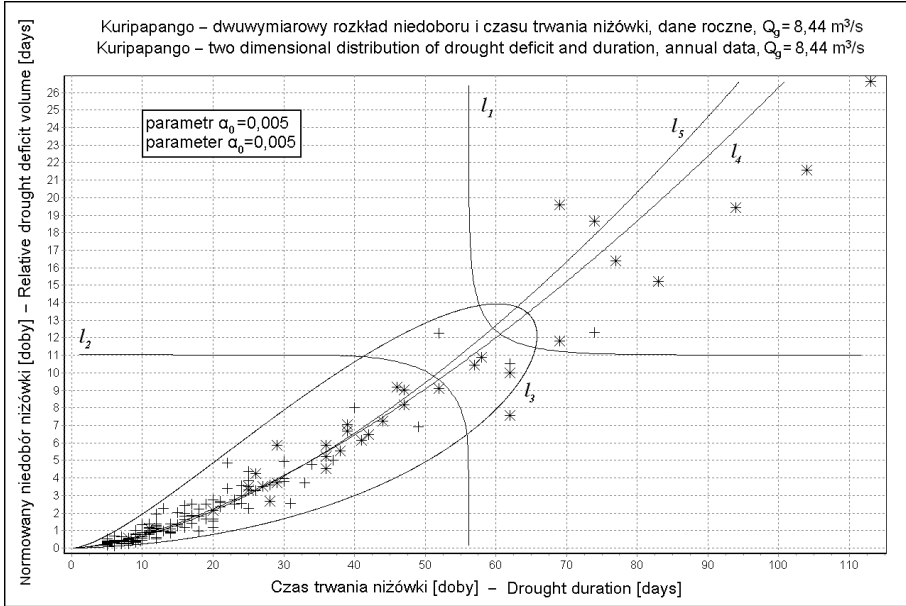
Prezentację graficzną dopasowania rozkładów log-normalnych do danych empirycznych przedstawiono na rysunkach 39–41. Oprócz obserwowanych charakterystyk zaznaczono na nich pięć linii:  $l_i, i = 1, \dots, 5$ . Gwiazdki przedstawiają maksymalne ze względu na niedobór przepływów lub czas ich trwania niżówki roczne lub sezonowe, krzyżyki – pozostałe niżówki; linie  $l_i, i = 1, \dots, 5$  wyznaczają:



Rys. 39. Estymowany dwuwymiarowy log-normalny rozkład charakterystyk niżówki: górny wykres – letniej, dolny – rocznej, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu  
Fig. 39. Estimated two-dimensional lognormal distribution of summer (upper) and annual (lower figure) low flow indices, Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



Rys. 40. Estymowany dwuwymiarowy log-normalny rozkład charakterystyk niżówki: górny wykres – letniej, dolny – rocznej, rzeka Trent, wodowskaz w Colwick  
 Fig. 40. Estimated two-dimensional lognormal distribution of summer (upper) and annual (lower figure) low flow indices, Trent River, Colwick Profile



Rys. 41. Estymowany dwuwymiarowy log-normalny rozkład charakterystyk rocznej niżówki, rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango

Fig. 41. Estimated two-dimensional lognormal distribution of annual low flow indices, Ngaruroro River, Kuripapango Profile

- $l_1 = l_1(d, t)$  - linia prawdopodobieństwa nieprzewyższenia - każdy punkt krzywej opisuje prostokąt  $P_{d,t}$  o wierzchołkach  $\mathbf{O}(0, 0)$ ,  $\mathbf{A}(d, 0)$ ,  $\mathbf{B}(0, t)$ ,  $\mathbf{D}(d, t)$  i bokach równoległych do osi układu współrzędnych taki, że:

$$\Pr((\bar{D}, T) \in P_{d,t}) = \Pr(\bar{D} \leq d, T \leq t) = \int_0^d \int_0^t f(c, s) dc ds = 0,95 \quad (6.3)$$

Jeden z takich prostokątów  $P_{d,t}$  zaznaczono na górnym wykresie rysunku 39.

- $l_2 = l_2(d, t)$  - linia prawdopodobieństwa przewyższenia - każdy punkt krzywej opisuje taki kąt prosty  $K_{d,t}$ , o wierzchołku  $\mathbf{F}(d, t)$  i równoległymi do osi układu, skierowanymi ku nieskończoności ramionami, taki, że:

$$\Pr((\bar{D}, T) \in K_{d,t}) = \Pr(\bar{D} \geq d, T \geq t) = \int_d^\infty \int_t^\infty f(c, s) dc ds = 0,05 \quad (6.4)$$

Jeden z takich kątów prostych  $K_{d,t}$  również zaznaczono na górnym wykresie rysunku 39.

- $l_3 = l_3(d, t)$  – poziomicą stałej gęstości prawdopodobieństwa – wyznacza obszar  $\Omega$ , taki, że na jego brzegu wartość funkcji gęstości jest stała, a:

$$\Pr((\bar{D}, T) \in \Omega) = \iint_{\Omega} f(c, s)dc ds = 0,95 \quad f(d, t)|_{\partial\Omega} = \text{const.} \quad (6.5)$$

Szczegóły wyznaczania obszaru całkowania  $\Omega$  zawarto w dodatku B.1, a jego graficzną reprezentację zaznaczono na dolnym wykresie rysunku 39.

Zgodnie z definicją nieprzesuniętego rozkładu log-normalnego figura  $\Omega$  zawiera się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych (dla  $d, t > 0$ ). Na wykresach przedstawiających obszar  $\Omega$  linia ograniczająca go od dołu i z prawej strony przebiega powyżej oraz na prawo od osi czasu trwania i normowanego niedoboru przepływów, chociaż z powodu skali i rozdzielczości mogłoby się wydawać, że obie leżą na osiach. Odklejanie się tego obszaru od osi układu współrzędnych jest bardziej widoczne na rysunku 45.

- krzywe  $l_4$  oraz  $l_5$  przedstawiają warunkowe wartości oczekiwane (wyprowadzenia wzorów 6.6–6.7 znajdują się w Dodatku B.2):

$$l_4 : E(\bar{D}|T = t) = t \frac{\sigma_d}{\sigma_t} \rho e^{\mu_d + \frac{\sigma_d^2(1-\rho^2)}{2}} - \frac{\sigma_d}{\sigma_t} \rho \mu_t \quad (6.6)$$

$$l_5 : E(T|\bar{D} = d) = d \frac{\sigma_t}{\sigma_d} \rho e^{\mu_t + \frac{\sigma_t^2(1-\rho^2)}{2}} - \frac{\sigma_t}{\sigma_d} \rho \mu_d \quad (6.7)$$

Łatwo można zauważyć wyraźną asymetryczność (w sensie geometrycznym asymetryczność, rozumianą jako brak symetrii) krzywych, szczególnie ograniczająca figurę  $\Omega$  linia  $l_3$  ciężka w kierunku wyższych czasów trwania. Niestety kształt obszaru  $\Omega$  jest inny w każdym z dopasowywanych profili wodowskazowych. W przypadku niżówek z Międzylesia jest mocniej odchylony od warunkowych wartości oczekiwanych, zaś w Colwick i w Kuripapango układa się wzdłuż nich, odwzorowując coraz szybszy przyrost niedoboru przepływów wraz ze wzrostem czasów trwania. Kształt obszaru  $\Omega$  jest związany z dwiema zależnymi od siebie wielkościami:

- współczynnikiem korelacji  $\rho$ ;
- warunkowymi wariancjami  $\text{Var}(\bar{D}|T = t)$  oraz  $\text{Var}(T|\bar{D} = d)$ .

Im słabszy jest związek korelacyjny i im większe są warunkowe wariancje, tym szerzej rozłożony jest obszar  $\Omega$ . Dla rozkładu log-normalnego warunkowa wariancja (Dodatek B.2) wynosi:

$$\text{Var}(\bar{D}|T = t) = t^2 \frac{\sigma_d}{\sigma_t} \rho e^{2\mu_d + \sigma_d^2(1-\rho^2) - 2\frac{\sigma_d}{\sigma_t} \rho \mu_t} \left( e^{\sigma_d^2(1-\rho^2)} - 1 \right) \quad (6.8)$$

Wariancję  $\text{Var}(T|\bar{D} = d)$  wyznacza się symetrycznie. Wykresy estymowanych warunkowych odchyłek standardowych przedstawiono na rysunkach 46–48.

Wartość współczynnika korelacji (tab. 20) ma duży wpływ na przebieg krzywych  $l_1$  oraz  $l_2$ . Im bardziej odbiegają one od kąta prostego, tym słabszy jest

związek korelacyjny<sup>7</sup> pomiędzy logarytmem normowanego niedoboru przepływów a logarytmem czasu trwania niżówki. Wykresy krzywych  $l_1, \dots, l_5$  pokazują również nieliniową zależność pomiędzy obu charakterystykami. Najmocniej jest ona widoczna podczas analizy linii warunkowych wartości oczekiwanych  $l_4, l_5$ . Zmiana przyrostu jest widoczna, szczególnie w krótkich czasach trwania – wówczas krzywe  $l_4, l_5$  mocno odchylają się od linii prostych. Wraz ze wzrostem czasu trwania niżówki stopniowo ustala się średni przyrost normowanego niedoboru. Zatem potwierdzone zostaje prawo Mailleta [Soczyńska 1997] mówiące o wykładniczym związku pomiędzy gruntowym zasilaniem cieką a czasem trwania przepływu niżówkowego – ze wzrostem czasu trwania niżówki asymptotycznie do pewnej stałej maleje dopływ wód gruntowych do cieką. Oznacza to, że niedobór przepływów krótkotrwałych niżówek zależy od sposobu szczypania się łatwo dostępnymi wód podpowierzchniowych. Z kolei niedobór przepływów dłuższych, przynajmniej kilkudziesięciodobowych niżówek zależy od stanu zlewni, jej biosfery, stosunków wodnych oraz właściwości środowiska przyrodniczego.

Tabela 20. Estymator współczynnika korelacji  $\hat{\rho}$  logarytmów normowanego niedoboru przepływów i czasu trwania niżówek w dwuwymiarowym rozkładzie log-normalnym

Table 20. Estimated correlation coefficient  $\hat{\rho}$  of the logarithms of low flow relative deficits and durations in two-dimensional log-normal distribution

Wodowskaz Profile	Sezon Season	Współczynnik korelacji $\hat{\rho}$ Correlation coefficient $\hat{\rho}$
Międzylesie	Cały rok – Annual	0,8917
	Letni – Summer	0,8939
Kuripapango	Cały rok – Annual	0,9699
Colwick	Cały rok – Annual	0,9483
	Letni – Summer	0,9483

Geometryczna asymetryczność wykresów 39–41 i związana z prawem Mailleta, wyraźnie zaznaczająca się dla niewielkich niżówek, nieliniowość związku normowany niedobór przepływów – czas trwania mówi o zmienności procesów hydrologicznych powodujących przepływy niżówkowe. Statystycznie nie daje się ich opisać, korzystając jedynie z jednowymiarowych rozkładów pojedynczych charakterystyk. W znaczny, niełatwy do zmierzenia sposób utrudniają one dopasowanie rozkładów pojedynczych charakterystyk. Remedium na uniknięcie takich trudności może być odrzucenie płytkich niżówek. Najłatwiej to zrobić, zwiększając określony przy definiowaniu niżówki parametr  $\alpha_0$ . Podobne postępowanie można zauważyć w pracy Zielińskiej [1983]. Uzyskała to w sposób pośredni, unikając definiowania

<sup>7</sup> Gdy  $\rho = 1$ , to dwuwymiarowy rozkład lognormalny zmiennych losowych  $(X, Y)$  degeneruje się do rozkładu jednowymiarowego określonego na krzywej  $\ln X = a + b \ln Y$  [Radhakrishna Rao 1982]. Dwuwymiarowa dystrybuanta zmienia wartość tylko w punktach leżących na powyższej linii, a wykres poziomnic dystrybuanty sprowadza się do kątów prostych z wierzchołkami na niej leżącymi i bokami równoległymi do osi układu współrzędnych.

samego  $\alpha_0$ , a stosując łączenie niżówek rozdzielanych nawet 15-dniowymi przepływami wyższymi niż poziom odcięcia i niższymi niż SSQ (średni roczny przepływ z wielolecia).

Problemem, jaki tu się pojawia, jest wybór wartości parametru  $\alpha_0$ . Za najlepsze  $\alpha_0$  przyjęto jego najmniejszą wartość, w odniesieniu do której nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności z odpowiednim dwuwymiarowym rozkładem log-normalnym. W tabeli 21 przedstawione są obliczone wartości testów do tak heurystycznie dobranych  $\alpha_0$  oraz obliczone wartości testów zgodności  $\chi^2$ .

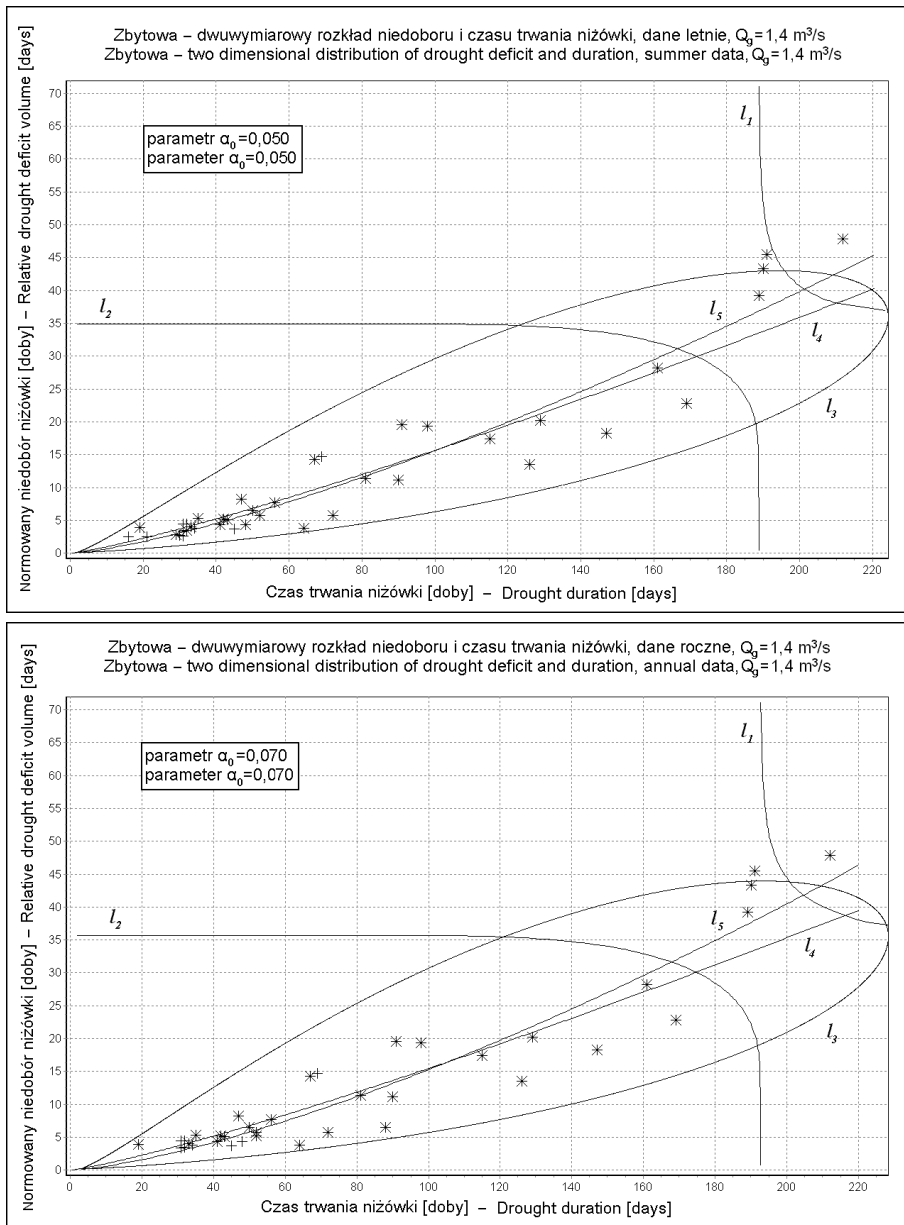
Tabela 21. Test zgodności  $\chi^2$  obserwowanych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania z jedno- i dwuwymiarowym rozkładem log-normalnym; przyjęto parametr odrzucający płytkie niżówki  $\alpha_0 > 0,005$

Table 21. The  $\chi^2$  goodness-of-fit test of the observed relative deficits and durations to one and two-dimensional log-normal distributions, for parameter  $\alpha_0 > 0,005$

Wodowskaz Profile	Sezon Season	Wspól. Coeff. $\alpha_0$	$p$ -wartość testu $\chi^2$ $p$ -values of the $\chi^2$ test		
			Norm. niedobór Relative deficit	Czas trwania Dura- tion	Dwa wymia- ry Two dimens.
Zbytowa	Cały rok – Annual	0,07	<i>0,0394</i>	0,3219	<i>0,0398</i>
	Letni – Summer	0,05	<i>0,0110</i>	0,2315	<i>0,0229</i>
Międzylesie	Cały rok – Annual	0,07	0,1123	0,5091	0,1219
	Letni – Summer	0,02	0,3692	0,3008	0,1168
Kuripa- pango	Cały rok – Annual	0,09	0,1818	0,3242	0,0610
Colwick	Cały rok – Annual	0,03	<i>0,0052</i>	0,4515	0,2082
	Letni – Summer	0,03	<i>0,0045</i>	0,5919	0,2927

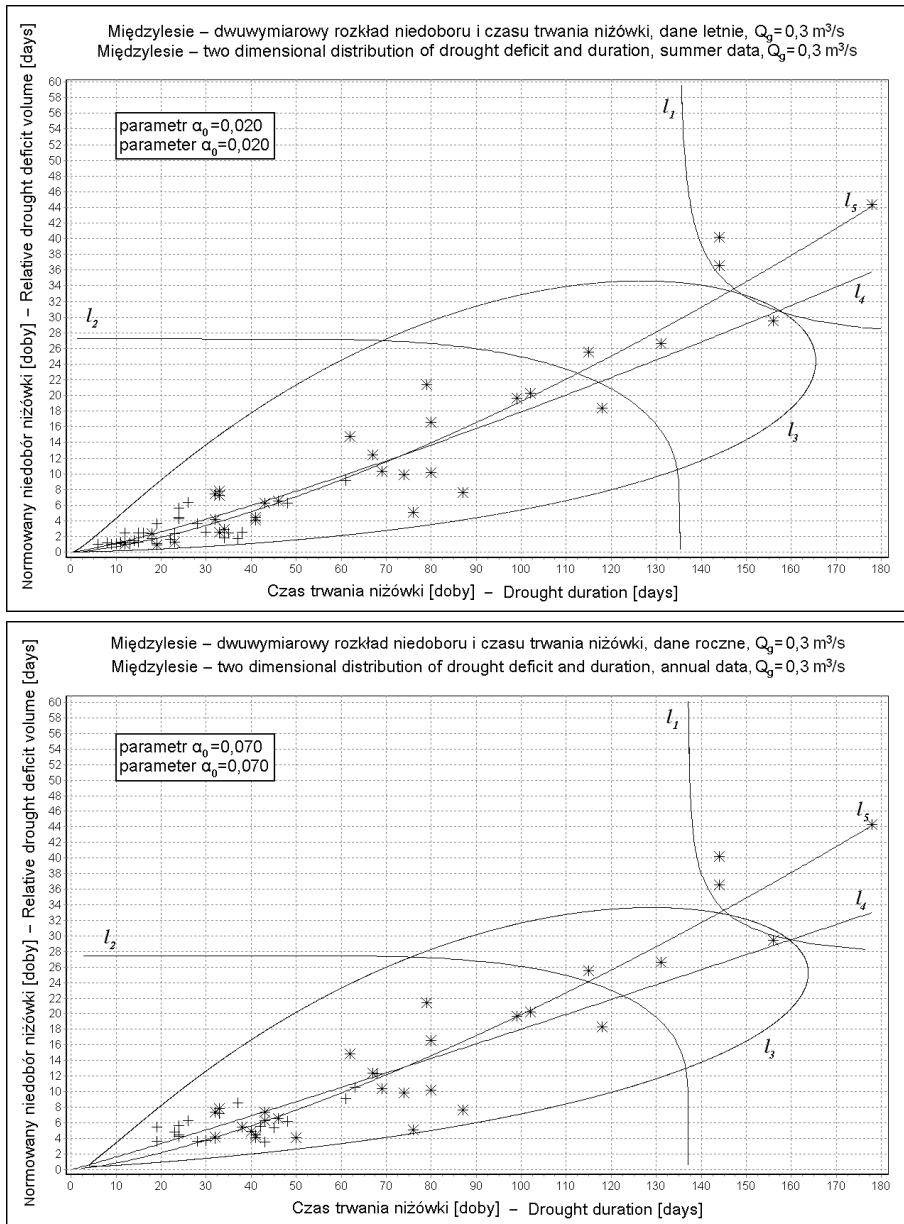
Złe dopasowanie odpowiadające  $p$ -wartości testu  $\chi^2$  mniejszej od 0,01, odrzucające hipotezę o zgodności rozkładu normowanego niedoboru przepływów niżówki z rozkładem log-normalnym zaobserwowano w przekroju wodowskazowym w Colwick. Dzieje się tak mimo dobrego dopasowania rozkładów: dwuwymiarowego oraz czasu trwania. Wytlumaczenie jest dość proste – cztery długotrwałe prawie półroczne niżówki są mocno odstające od pozostałych – rysunek 44, (więcej o podatności na odstawanie można znaleźć w pracy doktorskiej Brzezińskiego [2007]). Nienajlepsze dopasowanie występuje również w Zbytowej – w tym profilu obliczona  $p$  wartość testu zgodności  $\chi^2$  niedoboru przepływów oraz dwuwymiarowych obserwacji z rozkładami log-normalnymi jest większa od 0,01 lecz mniejsza niż 0,05. Tu także cztery „głębokie” – „wielkie”, prawie 200-dniowe niżówki odstają od pozostałych. Formalnie takie dopasowanie należałoby także odrzucić.





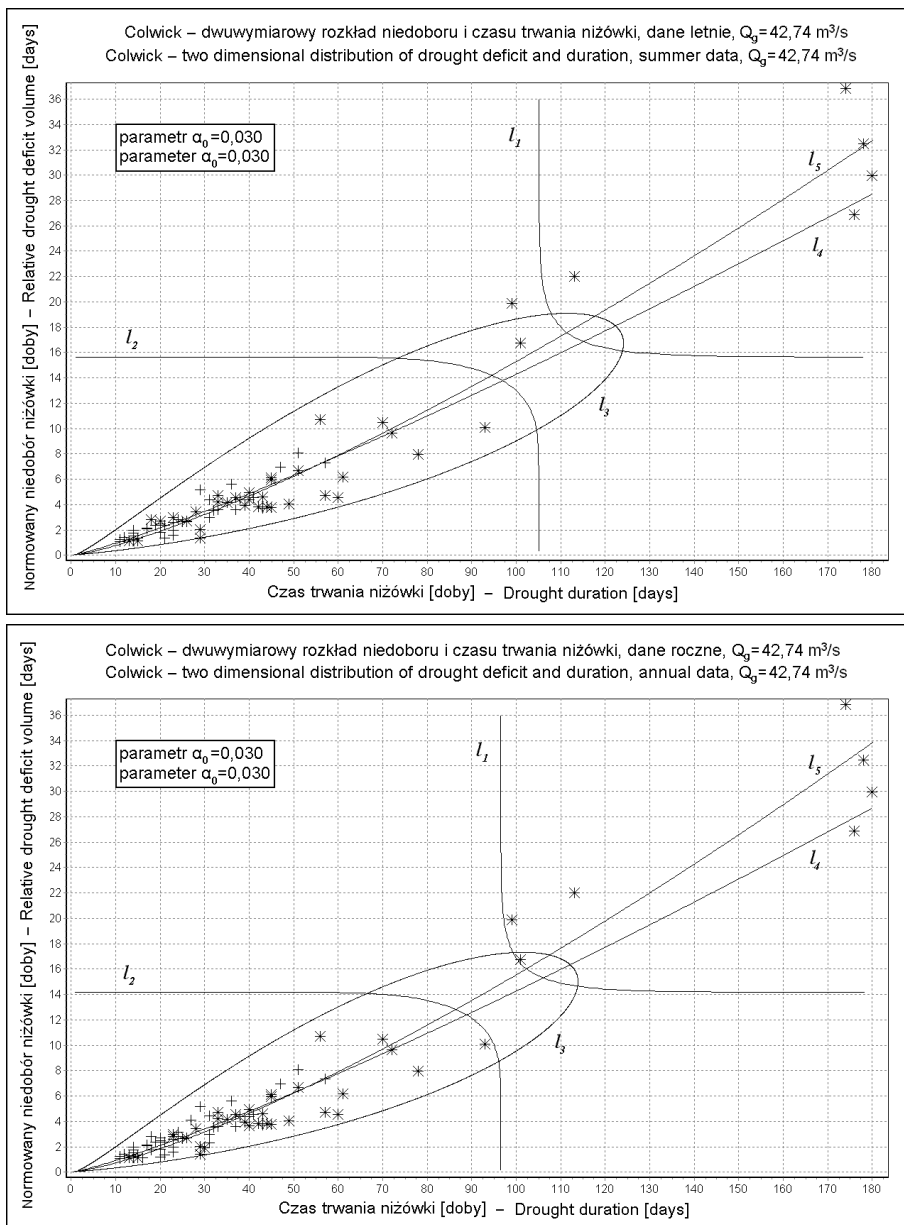
Rys. 42. Estymowany dwuwymiarowy log-normalny rozkład charakterystyk niżówki: górny wykres – letniej ( $\alpha_0 = 0,05$ ), dolny – rocznej ( $\alpha_0 = 0,07$ ), rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 42. Estimated two-dimensional lognormal distribution of summer ( $\alpha_0 = 0,05$ ) – upper, and annual ( $\alpha_0 = 0,07$ ) – lower figure, low flow indices, Widawa River, Zbytowa Profile



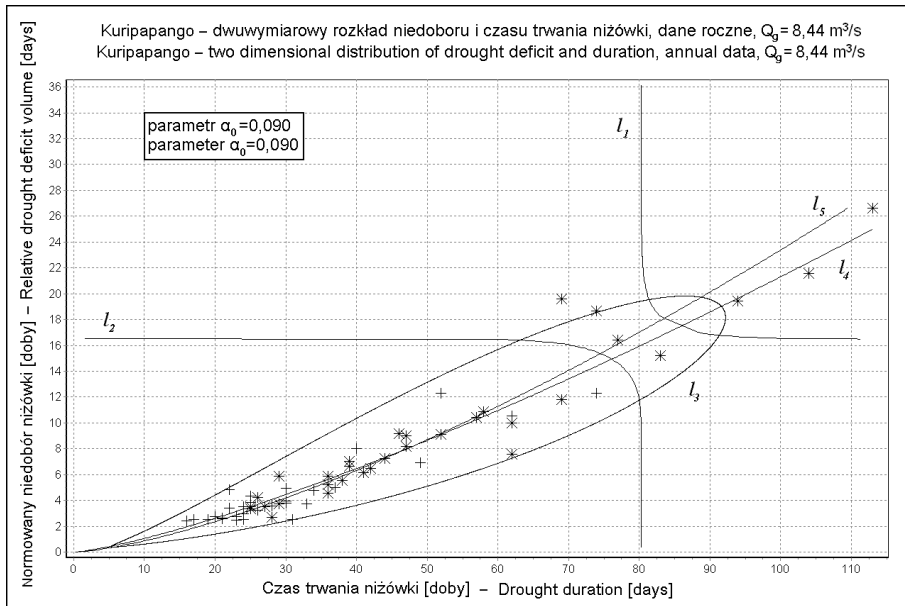
Rys. 43. Estymowany dwuwymiarowy log-normalny rozkład charakterystyk niżówki: górny wykres – letniej ( $\alpha_0 = 0,02$ ), dolny – rocznej ( $\alpha_0 = 0,07$ ), rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzylesiu

Fig. 43. Estimated two-dimensional lognormal distribution of summer ( $\alpha_0 = 0,02$ ) – upper, and annual ( $\alpha_0 = 0,07$ ) – lower figure, low flow indices, Nysa Kłodzka River, Międzyzylesie Profile



Rys. 44. Estymowany dwuwymiarowy log-normalny rozkład charakterystyk niżówki: górny wykres – letniej ( $\alpha_0 = 0,03$ ), dolny – rocznej ( $\alpha_0 = 0,03$ ), rzeka Trent, wodowskaz w Colwick

Fig. 44. Estimated two-dimensional lognormal distribution of summer ( $\alpha_0 = 0,03$ ) – upper, and annual ( $\alpha_0 = 0,03$ ) – lower figure, low flow indices, Trent River, Colwick Profile



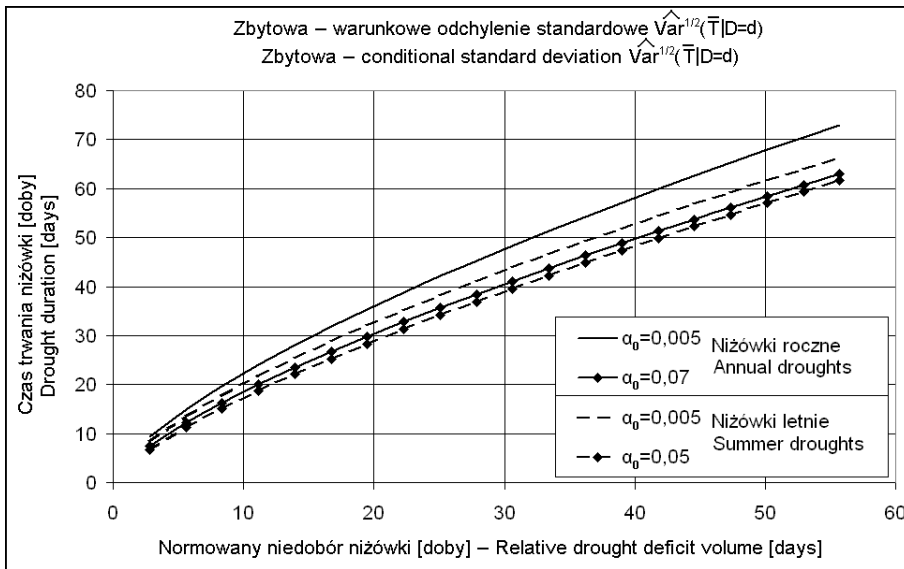
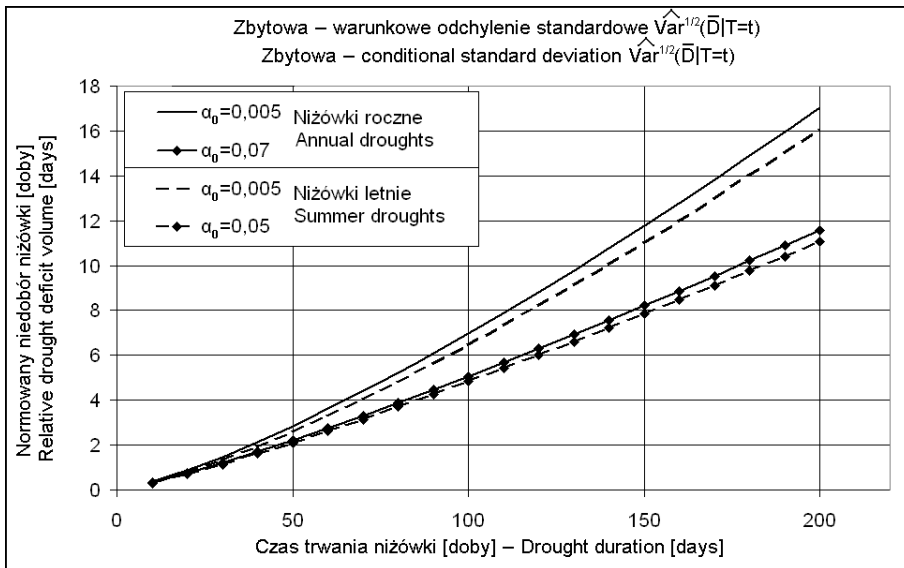
Rys. 45. Estymowany dwuwymiarowy log-normalny rozkład charakterystyk rocznej niżówki ( $\alpha_0 = 0,09$ ), rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango

Fig. 45. Estimated two-dimensional lognormal distribution of annual ( $\alpha_0 = 0,09$ ) low indices, Ngaruroro River, Kuripapango Profile

Na rysunkach 42–45 zaprezentowano wszystkie wykresy rozkładów dwuwymiarowych, aby pokazać tendencje zmian zachodzących w przebiegu krzywych  $l_1, \dots, l_5$ , podczas wzrostu  $\alpha_0$  – parametru redukującego nieistotne niżówki.

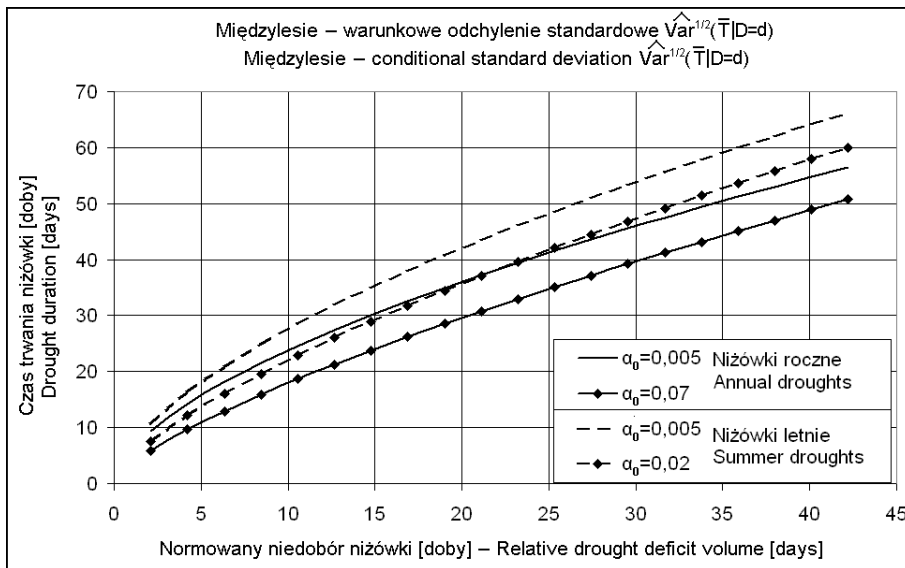
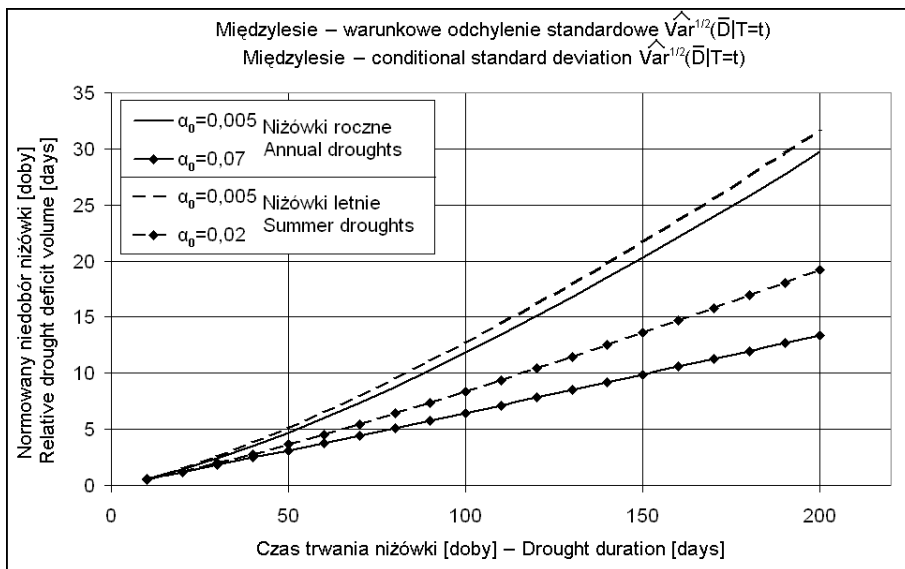
Z porównania przebiegu krzywych  $l_1, l_2, \dots, l_5$  zamieszczonych na wykresach 42–45 wynika, że:

1. Rozciągnięcie obszaru  $\Omega$  wzdłuż linii warunkowych wartości oczekiwanych  $l_4, l_5$  powoduje zmianę prawdopodobieństwa pojawiania się niżówek – odrzucenie płytkich niżówek automatycznie powoduje wzrost takiego prawdopodobieństwa, jednakże skala zmian nie jest jednakowa – wraz ze wzrostem niedoboru i czasu trwania szybciej wzrasta odpowiednie prawdopodobieństwo.
2. Wyprostowywanie się linii  $l_4, l_5$  wynika ze zwiększenia się jednorodności obserwowanych niżówek. Na przykład podniesienie wartości  $\alpha_0$  do 0,07 w profilu Międzylesie w przypadku danych rocznych spowodowało, że odrzucone zostały wszystkie kilku- i kilkunastodniowe niżówki. Najkrótszymi uwzględnionymi przy estymacji były dwie 19-dniowe zimowe niżówki z 1985 r. Natomiast w badanych przykładach wzrost  $\alpha_0$  nie powodował zmiany współczynnika korelacji.
3. Zawężenie obszaru ograniczonego krzywą  $l_3$  poziomicy stałej gęstości prawdopodobieństwa jest związane z obniżeniem się warunkowej wariancji (6.8).



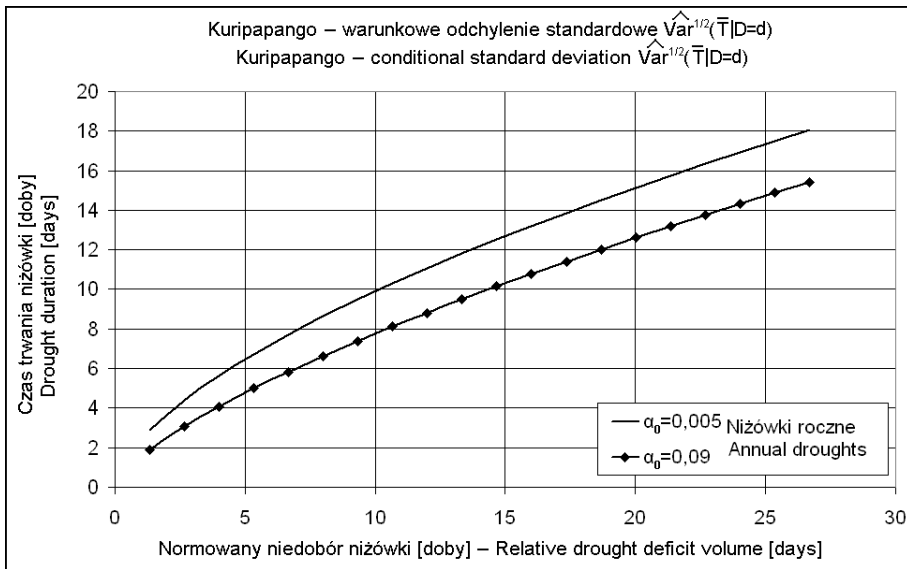
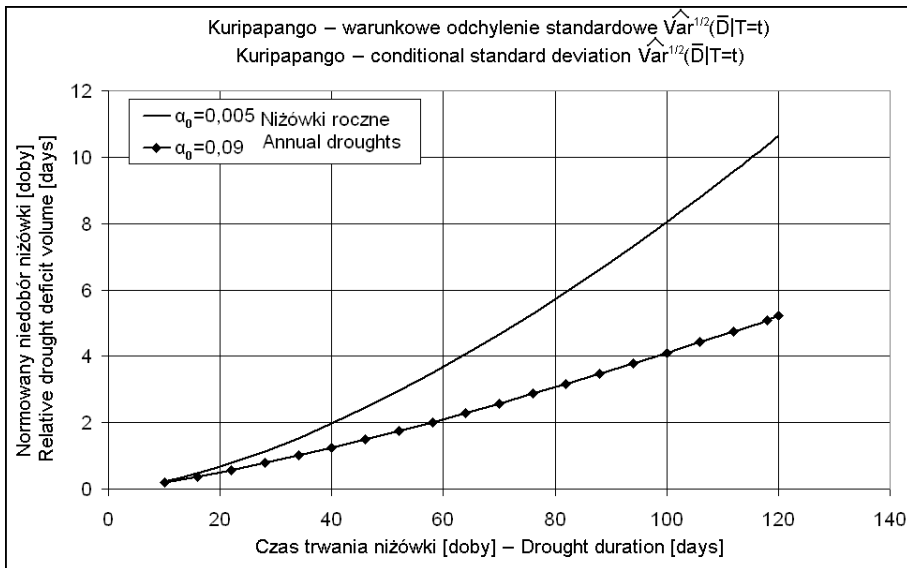
Rys. 46. Estymowane warunkowe odchylenia standardowe  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(\bar{D}|T = t)$  – górny,  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(T|\bar{D} = d)$  – dolny wykres, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 46. Estimated conditional standard deviation  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(\bar{D}|T = t)$  – upper figure,  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(T|\bar{D} = d)$  – lower one, Widawa River, Zbytowa Profile



Rys. 47. Estymowane warunkowe odchylenia standardowe  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(\bar{D}|T = t)$  – górny,  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(T|\bar{D} = d)$  – dolny wykres, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzylesiu

Fig. 47. Estimated conditional standard deviation  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(\bar{D}|T = t)$  – upper figure,  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(T|\bar{D} = d)$  – lower one, Nysa Kłodzka River, Międzylesie Profile



Rys. 48. Estymowane warunkowe odchylenia standardowe  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(\bar{D}|T = t)$  – górny,  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(T|\bar{D} = d)$  – dolny wykres, rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango

Fig. 48. Estimated conditional standard deviation  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(\bar{D}|T = t)$  – upper figure,  $\widehat{\text{Var}}^{1/2}(T|\bar{D} = d)$  – lower one, Ngaruroro River, Kuripapango Profile

Wykresy zmian estymowanych warunkowych odchyłeń standardowych w profilach: Międzyzlesie, Zbytowa oraz Kuripapango przedstawiono na rysunkach 46–48. Można na nich zauważyć wyraźne obniżenie linii estymowanego odchylenia standardowego w stosunku do odchylenia obliczanego, gdy parametr  $\alpha_0 = 0,005$ . Jeszcze raz potwierdzona została teza o konieczności separacji płytkich niżówek, o niskich normowanych niedoborach przepływów z przygotowywanego zestawu danych. Przeprowadzone obliczenia pokazują, że dzieje się tak niezależnie od wyboru przepływu granicznego  $Q_g$  definiującego niżówkę (rozd. 3). Obliczenia wykonano przy wyborze różnych przepływów granicznych  $Q_g$ , ich wartość zmieniała się od  $Q_{85\%}$  do  $Q_{60\%}$ .

Dodatkowego komentarza wymagają wykresy otrzymane dla przepływów w Zbytowej i w Międzyzlesiu (rys. 46–47). Na obu wykresach przerywanymi liniami zaznaczone zostały estymowane warunkowe odchylenia standardowe charakterystyk letnich niżówek. W obu profilach ich przebieg jest odmienny. W Zbytowej, tak jak należało się tego spodziewać, obie linie, gdy  $\alpha_0 = 0,005$  lub  $\alpha_0 = 0,05$  leżą bezpośrednio pod odpowiednimi liniami danych rocznych. Sugeruje to, że niżówki zimowe nie mają większego znaczenia i przepływy niskie mogą być w tym profilu rozpatrywane albo z perspektywy rocznej, albo sezonu letniego. Zupełnie odwrotne wnioski wypływają z analizy rysunku 47. W Międzyzlesiu właściwie nie powinno się rozpatrywać niżówek rocznych, a jedynie sezonowe. Występująca tu wysoka liczba bardzo podobnych do siebie niżówek zimowych powoduje znaczne obniżenie rocznej warunkowej wariancji – wykres estymowanego odchylenia standardowego rocznych niżówek przebiega wyraźnie poniżej odpowiedniego wykresu otrzymanego przy opracowywaniu niżówek letnich. Oznacza to, że estymowane probabilistyczne charakterystyki rocznych niżówek nie odzwierciedlają przebiegu procesu występowania niżówek w obserwowanej rzeczywistości. Aby lepiej zrozumieć pojawiające się niejednorodności w przebiegu warunkowych odchyłeń standardowych, w dalszej kolejności rozpatrzono nową charakterystykę niżówki – intensywność.

## 6.2. Intensywność niżówki

Rozpatrzmy nową zmienną losową – normowaną intensywność  $\bar{U} = \bar{D}/T$  mówiącą o średnim dobowym normowanym niedoborze przepływów w czasie [Yevjevich 1967]. Intensywność  $U$  czy jej normowany odpowiednik  $\bar{U}$  nie były wykorzystywane podczas analizy zjawisk maksymalnych. Używane są głównie do określenia, często stosowanego w Stanach Zjednoczonych, wskaźnika suszy [Palmer Drought Index 1965], określanego w znacznie dłuższym niż jedna doba kroku czasowym.

Jeśli przyjmiemy założenie, że rozkład  $(\bar{D}, T)$  jest zgodny z dwuwymiarowym rozkładem log-normalnym (6.1), to rozkład normowanej intensywności  $\bar{U}$  jest również log-normalny, ze średnią  $\mu_u = \mu_d - \mu_t$  oraz wariancją  $\sigma_u^2 = \sigma_d^2 - 2\rho\sigma_t\sigma_d + \sigma_t^2$  (wyprowadzenie tej własności zawarto w dodatku B.3). Estymacji nieznanymi parametrów  $(\mu_u, \sigma_u)$  można dokonać bezpośrednio z próby, stosując metodę największej



szej wiarygodności lub wykorzystując estymatory otrzymane podczas estymacji parametrów dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego (rozdz. 6.1). Wartości tak otrzymanych estymatorów są jednakowe [Bartoszewicz 1989].

Z poprzedniego rozdziału wynika, że dobór parametru  $\alpha_0$  odcinającego płytkie niżówki ma wpływ na postać estymowanych rozkładów. Trudno jednak zakładać, że ustalany w poprzednim rozdziale parametr  $\alpha_0$  przenosił się na rozkład normowanej intensywności. Dlatego też w badanych wodowskazach przeprowadzono estymację rozkładu  $\bar{U}$  dla  $\alpha_0 = 0,005; 0,01; 0,02; \dots$ . Dobroć dopasowania –  $p$ -wartości testu  $\chi^2$  zawarto w tabeli 22.

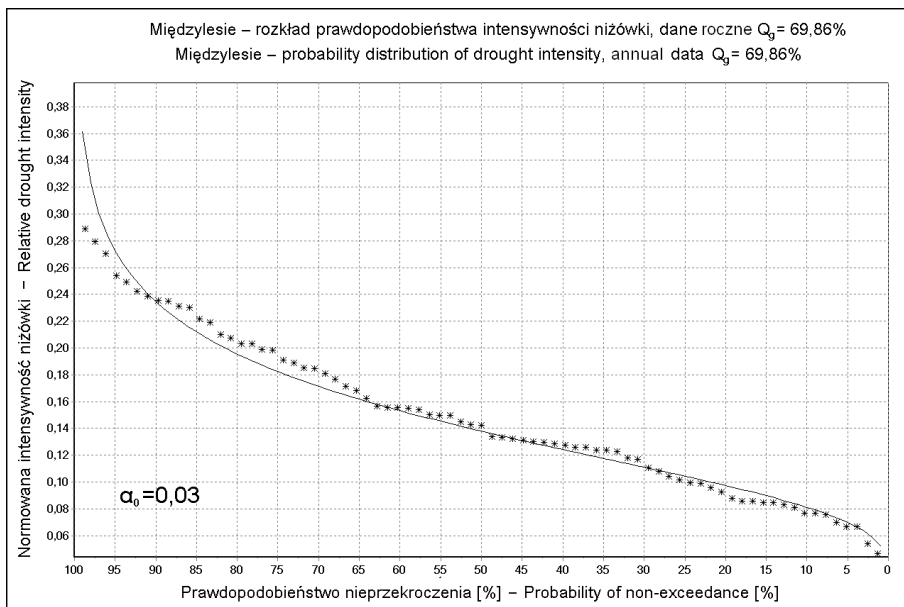
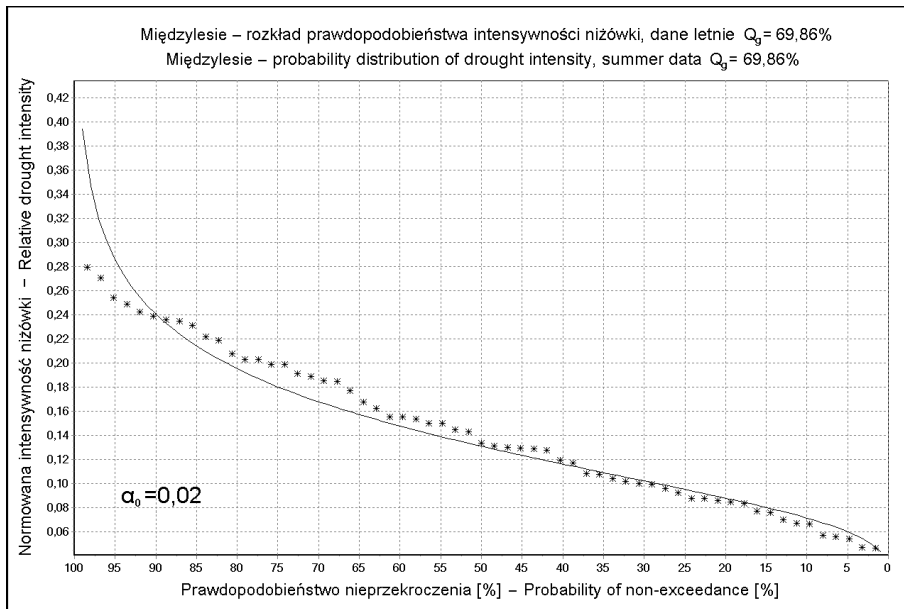
Tabela 22.  $p$ -wartości testu zgodności  $\chi^2$  rozkładu normowanej intensywności niżówki z rozkładem log-normalnym obliczonym dla różnych parametrów  $\alpha_0$

Table 22.  $p$ -values of the  $\chi^2$  goodness-of-fit test of the low flow relative intensity to the lognormal distribution, for different  $\alpha_0$  parameters

$\alpha_0$	Zbytowa		Międzyzlesie		Kuripa- pango	Colwick	
	Rok Annual	Letni Summer	Rok Annual	Letni Summer	Rok Annual	Rok Annual	Letni Summer
0,005	0,1473	0,6255	0,0533	0,5026	0,3768	<i>0,0165</i>	0,0523
0,010	0,5603	0,6841	0,1696	0,5538	0,3600	0,1719	0,4362
0,020	0,4621	0,7238	<i>0,0465</i>	0,4477	0,6068	0,6744	0,1711
0,030	0,4012	0,6053	0,7160	0,1089	0,3995	0,7481	0,5386
0,040	0,5837	0,2933	0,4873	<i>0,0307</i>	0,4143	0,2071	0,1271
0,050	0,8234	0,1974	0,6605	<i>0,0382</i>	0,3580	0,3414	0,5974
0,060	0,4466	0,3499	0,0697	0,1941	0,3952	0,5488	0,6084
0,070	0,3931	0,3499	0,1409	0,1830	0,2022	0,7360	0,5863
0,080	0,3931	0,3499	0,4634		0,2510	0,9470	0,9050
0,090	0,2106	0,1634	0,1727		0,2841	0,7529	0,8003
0,100	0,0988		0,2319		0,6865	0,7859	0,8727
0,110			0,1826		0,6787		
0,120					0,6614		
0,130					0,6301		
0,140					0,5051		

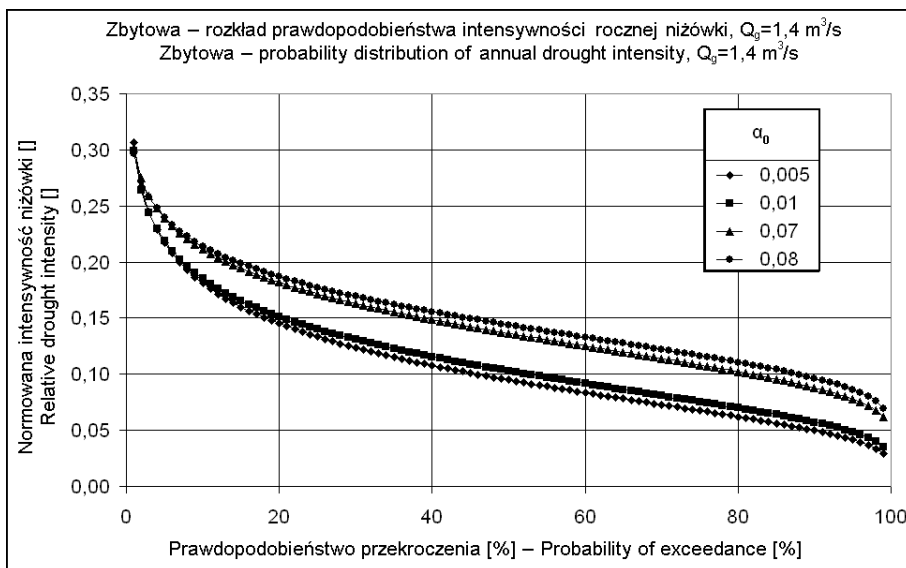
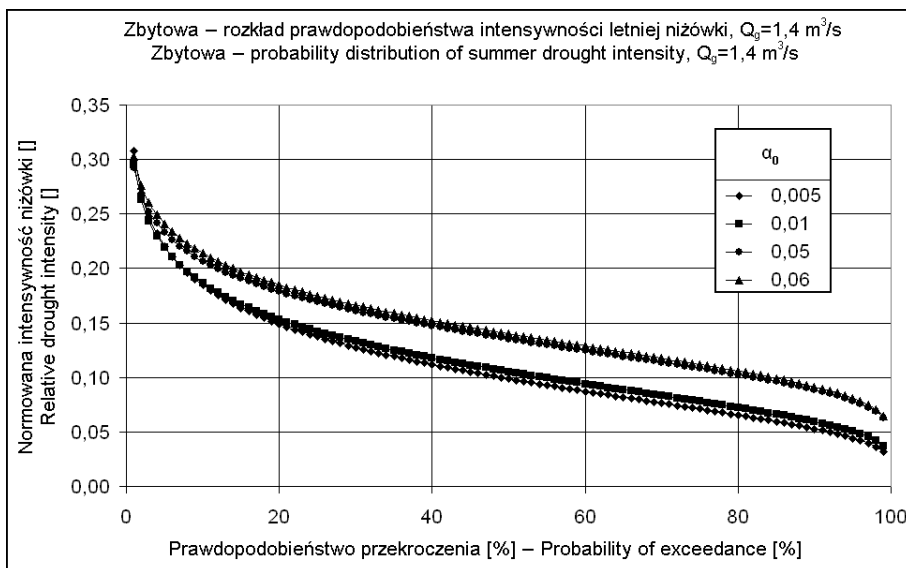
Hipotezę o zgodności obserwowanych normowanych intensywności niżówek z rozkładem log-normalnym odrzucono tylko w czterech przypadkach. Obliczone  $p$ -wartości testu  $\chi^2$  są mniejsze od 0,05 w profilach wodowskazowych:

- Międzyzlesie – gdy niżówki letnie wyznaczono przy  $\alpha_0 = 0,04; 0,05$  oraz niżówki roczne przy  $\alpha_0 = 0,02$ ;
- Colwick – w przypadku niżówek rocznych, gdy  $\alpha_0 = 0,005$ .



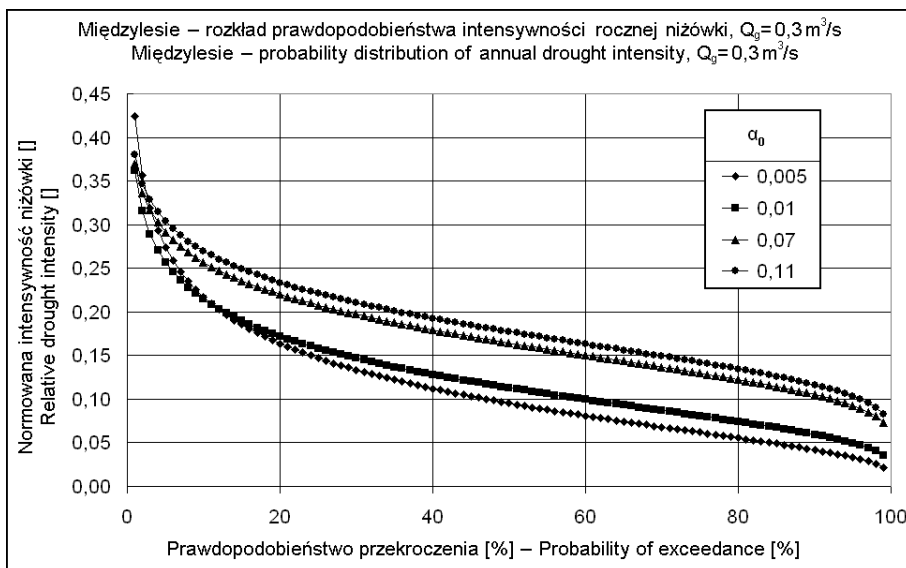
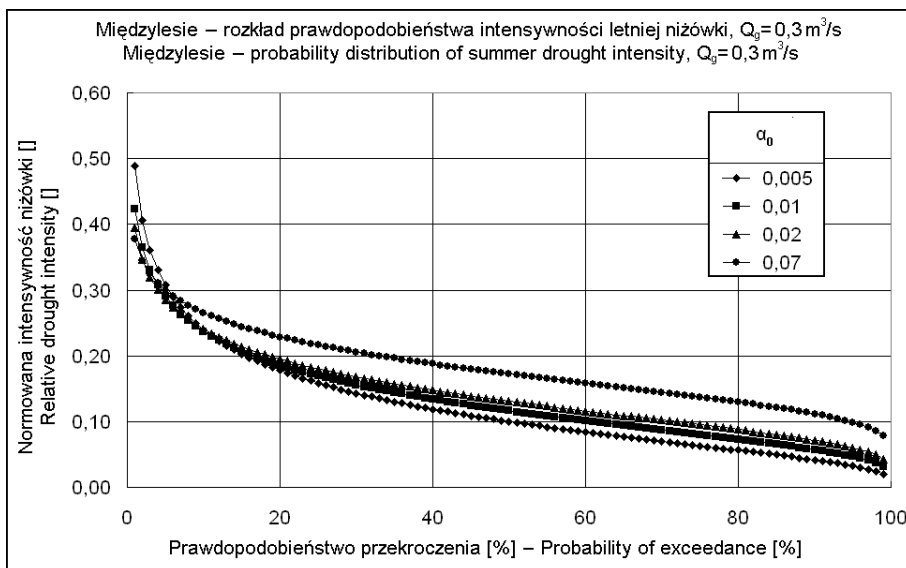
Rys. 49. Estymowany log-normalny rozkład intensywności niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzylesiu

Fig. 49. Estimated log-normal distribution of the low flow intensity, Nysa Kłodzka River, Międzyzylesie Profile



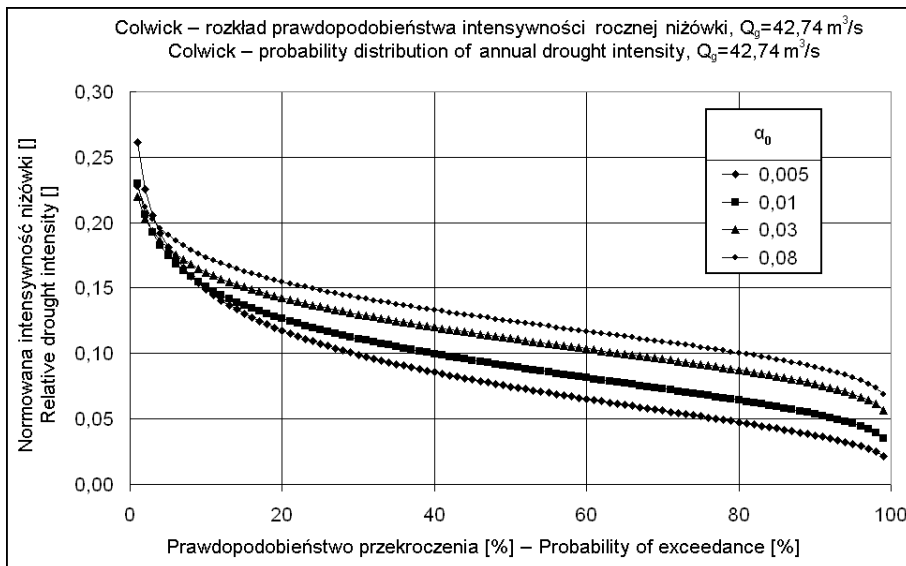
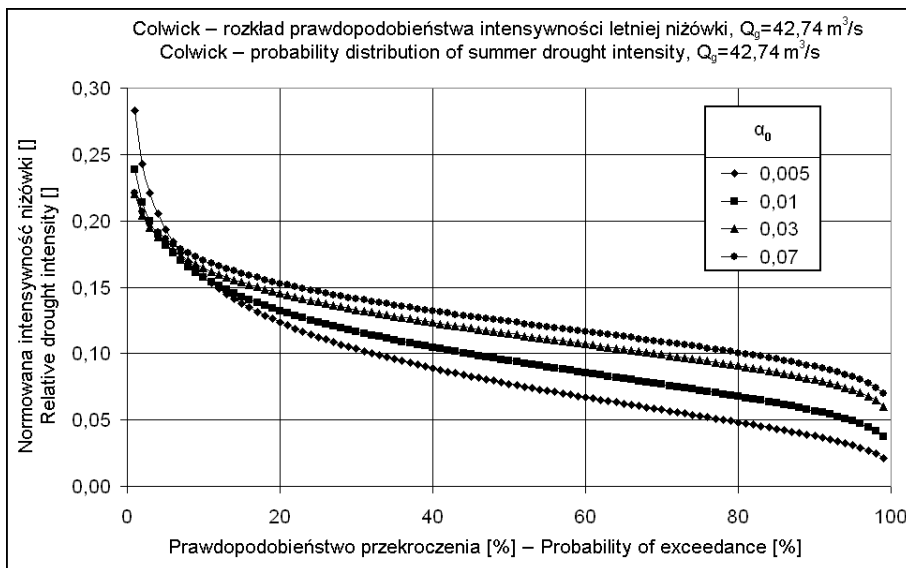
Rys. 50. Estymowane log-normalne rozkłady intensywności niżówki, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 50. Estimated log-normal distributions of the low flow intensity, Widawa River, Zbytowa Profile



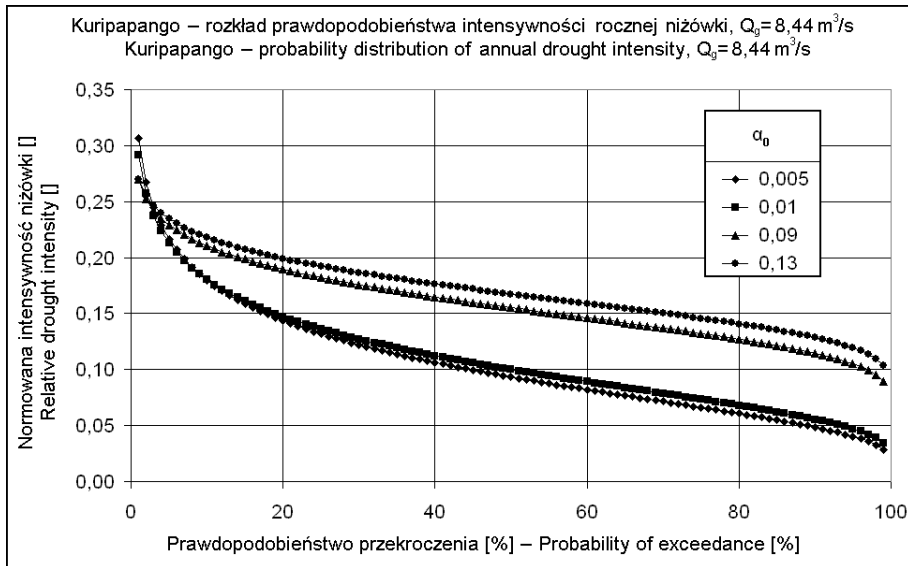
Rys. 51. Estymowane log-normalne rozkłady intensywności niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu

Fig. 51. Estimated log-normal distributions of the low flow intensity, Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



Rys. 52. Estymowane log-normalne rozkłady intensywności niżówki, rzeka Trent, wodowskaz w Colwick

Fig. 52. Estimated log-normal distributions of the low flow intensity, Trent River, Colwick Profile



Rys. 53. Estymowane log-normalne rozkłady intensywności rocznej niżówki, rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango

Fig. 53. Estimated log-normal distributions of the annual low flow intensity, Ngaruroro River, Kuripapango Profile

W pozostałych przypadkach nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności. Jest to znacznie lepsze dopasowanie niż otrzymane przy testowaniu zgodności z rozkładem log-normalnym pozostałych badanych charakterystyk. Wynika to z samej istoty intensywności niżówki. Maksymalne obserwowane niedobory przepływów oraz czasy trwania rzadko przenoszą się na maksymalne wartości intensywności. Szczególnie ma to znaczenie, gdy tak jak w Zbytowej czy w Colwick, kilka maksymalnych niżówek (rys. 42, 44) odstaje od pozostałych obserwacji. Przykład dopasowania obserwowanych normowanych intensywności w profilu wodowskazowym w Międzyzlesiu do rozkładu log-normalnego ukazano na rysunku 49. Górny z wykresów przedstawia letnie normowane intensywności wyznaczone dla współczynnika  $\alpha_0 = 0,02$ , dolny – roczne, obliczane, gdy  $\alpha_0 = 0,03$ . Wykresy w pozostałych profilach wodowskazowych mają podobny przebieg.

Na rysunkach 50–53 przedstawiono zmianę rozkładu normowanej intensywności wraz ze wzrostem  $\alpha_0$ . Wykreślono rozkłady, gdy:

- $\alpha_0 = 0,005$  (także dla rocznych niżówek w Colwick, mimo odrzucenia hipotezy o zgodności – tab. 22);
- $\alpha_0 = 0,01$ ;
- $\alpha_0$ , do którego wcześniej dopasowano rozkłady normowanego niedoboru przepływów i czasu trwania (tab. 21);
- przedostatnie  $\alpha_0$ , w odniesieniu do którego można było estymować rozkłady intensywności.

Na wszystkich wykresach można zauważyć pewne prawidłowości:

- kolejne krzywe leżą równolegle jedna pod drugą;
- im wyższa jest wartość parametru  $\alpha_0$ , tym wyżej położona jest krzywa rozkładu. Jedynie w przypadku wysokich prawdopodobieństw nieprzekroczenia (rzędu 5%), tendencja jest przeciwna.

Tylko gdy  $\alpha_0 = 0,005$  wykres krzywych odbiega od pozostałych, szczególnie jest to widoczne na wykresach rozkładów normowanych intensywności w profilach wodowskazowych Międzylesie (rys. 51) oraz Colwick (rys. 52). Jest to kolejna przesłanka wskazująca na konieczność odrzucenia z zestawu danych wszystkich płytkich niżówek.

### 6.3. Zmienność rozkładu intensywności niżówek

W rozdziale tym rozważone zostaną dwa przykłady. W pierwszym analizowana jest zmienność rozkładów normowanych intensywności niżówki w czasie. Za pomocą drugiego przedstawiona zostanie zmienność rozkładu normowanych intensywności w profilach wodowskazowych górnej Nysy Kłodzkiej. Badane są przepływy z lat 1956–2005 w profilach: Międzylesie, Bystrzyca Kłodzka, Kłodzko oraz Bardo.

W pierwszym przykładzie opracowane zostały przepływy niskie w dwóch grupach danych:

- I grupa: lata 1956–1995 oraz 1966–2005;
- II grupa: lata 1956–1985 oraz 1976–2005.

W drugim tylko do danych I grupy.

Tabela 23. Przepływy graniczne w kolejnych profilach Nysy Kłodzkiej

Table 23. Threshold levels in the successive the Nysa Kłodzka River profiles

Wodowskaz Profile	$Q \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$	Przepływ graniczny w [%] Threshold level in [%]			
		1956 –1995	1966 –2005	1956 –1985	1976 –2005
Międzylesie	0,30	69,15	69,86	71,18	71,76
Bystrzyca Kłodzka	1,61	70,92	69,78	72,24	64,70
Kłodzko	6,72	68,83	70,00	69,25	67,65
Bardo	10,30	67,74	70,24	67,05	69,38

Grupy danych zostały tak dobrane, aby w żadnym z badanych przypadków nie było podstaw do odrzucenia hipotez o losowości i braku trendu obserwowanych niżówek (tab. 9 – 10). W każdej z grup danych wybrano przepływ graniczny na poziomie  $Q_{70\%}$  – tabela 23; oraz parametr  $\alpha_0 = 0,02; 0,03$ , gdy rozpatrywane były niżówki letnie lub  $\alpha_0 = 0,06$ , gdy badane były niżówki roczne. Prezentowa-

ne w pracy wykresy rozkładów normowanej intensywności (rys. 54–59) dotyczą intensywności z normą równą średniemu dobowemu przepływowi z lat 1966–2005.

### 6.3.1. Rozkład normowanych intensywności niżówek w czasie

Badając rozkład normowanych intensywności niżówek w czasie, uwzględniono dwa rodzaje niejednorodności statystycznej:

- sezonową,
- wynikającą z coraz częściej obserwowanych zmian klimatycznych i działalności gospodarczej człowieka.

Badaniem wpływu zmian klimatu na częstotliwość i objętość wezbrań zajmowali się Kundzewicz [2004], oraz Radziejewski i Kundzewicz [2004]. Więcej o aspektowości pojęcia niejednorodności w hydrologii można przeczytać w licznych pracach [Węglarczyk 1998, Ozga-Zielińska 1984, Ozga-Zielińska i Brzeziński 1997], zaś o metodach badania niejednorodności w czasie, szczególnie tej obserwowanej w ostatnich latach, w artykule [Kundzewicz i Radziejewski 2006].

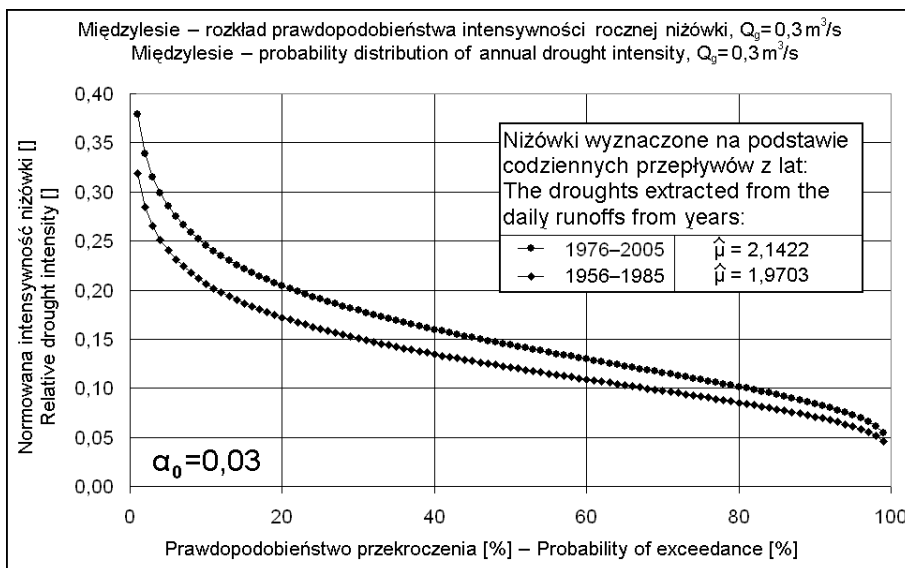
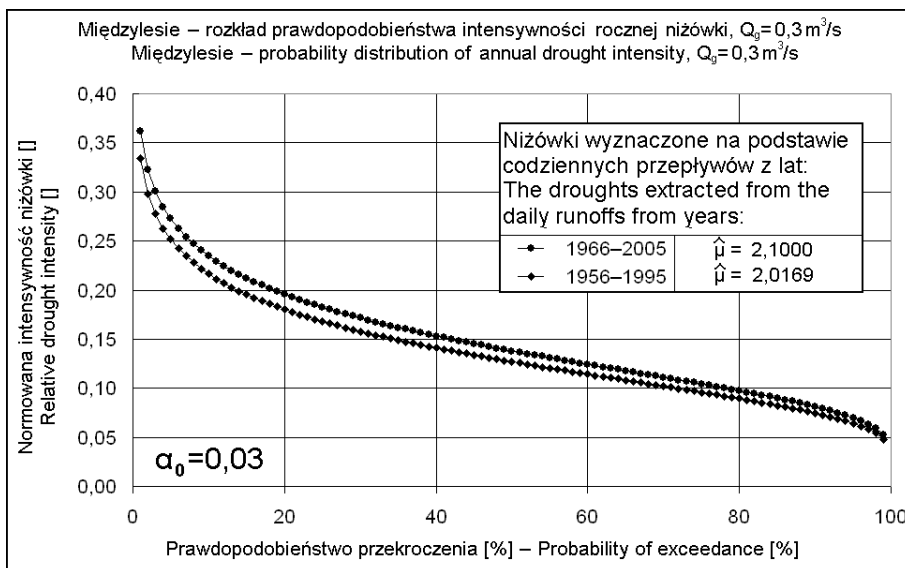
W rozdziale 6.2 wykazano, że rozkład log-normalny nieźle dopasowuje się do obserwowanych normowanych intensywności niżówek. Na rysunkach 54–59 porównano przebieg, estymowanych metodą największej wiarygodności, rozkładów unormowanej intensywności niżówek z I i II grupy danych. Górne wykresy przedstawiają dwie dystrybuanty estymowane z 40-letnich ciągów przepływów przesuniętych wzajemnie o 10 lat, dolne zaś podobne 30-letnie wykresy przesunięte wzajemnie o 20 lat. Pierwsze trzy pary przedstawiają rozkład normowanych intensywności w Międzyzlesiu. Przygotowano je, gdy parametr  $\alpha_0$  odrzucający płytkie niżówki ustalono na poziomie 0,03 lub 0,06 przy przepływach rocznych, oraz  $\alpha_0 = 0,02$  przy przepływach letnich. Następne trzy pary przedstawiają rozkłady normowanych intensywności w pozostałych przekrojach górnej Nysy Kłodzkiej. W tych przypadkach wybrano  $\alpha_0 = 0,06$ . Taki wybór parametru  $\alpha_0$  był podyktowany jedynie dobrocią dopasowania. Należało go tak dobrać, aby był on jednakowy dla porównywanych profili i aby we wszystkich rozpatrywanych przykładach nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności.

Na wszystkich rysunkach 54–56 krzywa rozkładu lat późniejszych przebiega powyżej krzywej lat wcześniejszych. Oznacza to, że z upływem lat normowana intensywność wzrasta. Powstaje pytanie, czy ta tendencja jest tylko incydentalnym zaburzeniem, czy też ma charakter głębszego trendu. Aby to sprawdzić, przeprowadzono prosty statystyczny test. Stawiamy zatem hipotezę:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_0 &= \mu_1 \\ H_1 : \mu_0 &\neq \mu_1, \end{aligned} \tag{6.9}$$

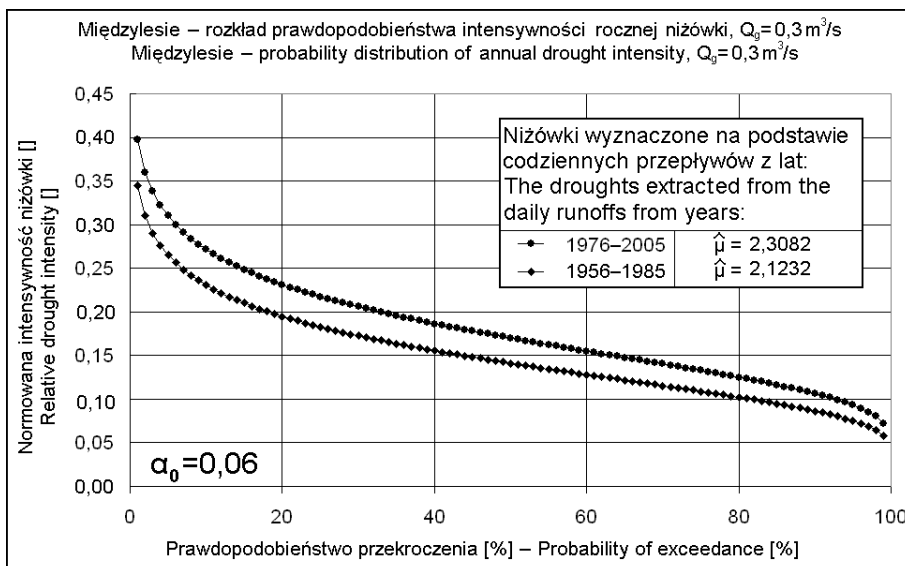
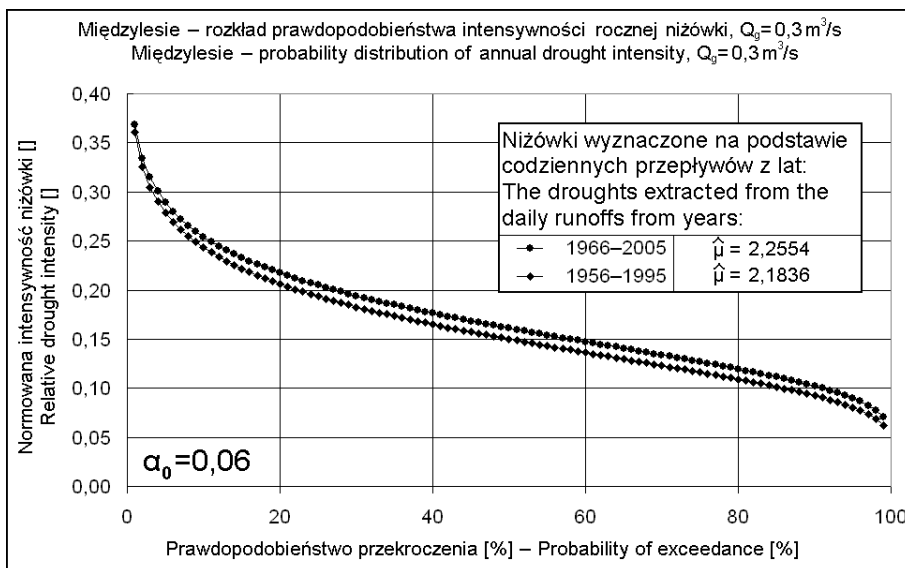
gdzie  $\mu_0$  jest średnią logarytmowanych normowanych intensywności lat późniejszych, zaś  $\mu_1$  jest odpowiednią średnią z lat wcześniejszych. Ponieważ badane charakterystyki są od siebie zależne (lata obserwacji nie są rozłączne), to hipotezę (6.9) testowano korzystając z metody bootstrap – Efron i Tibshirani [1993]. Przedstawiona tam procedura testowania jest następująca:





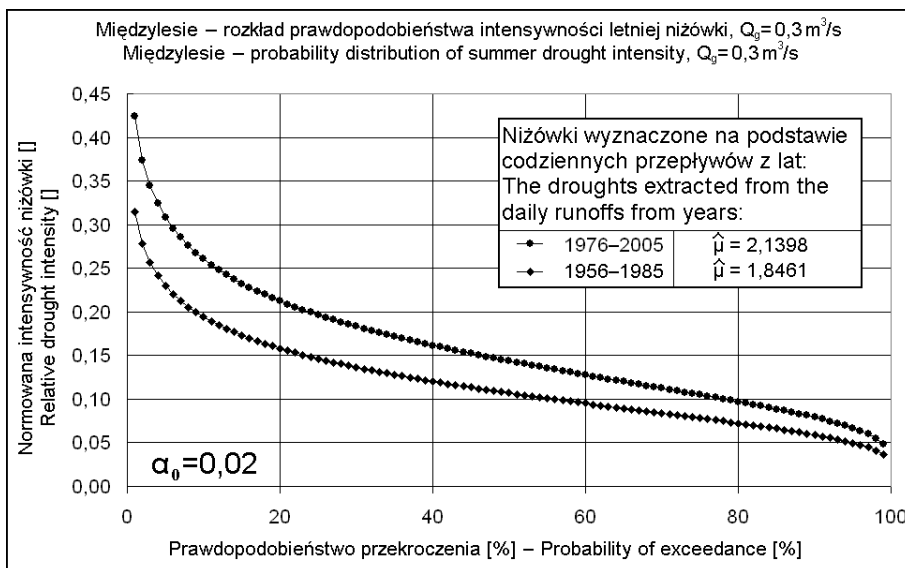
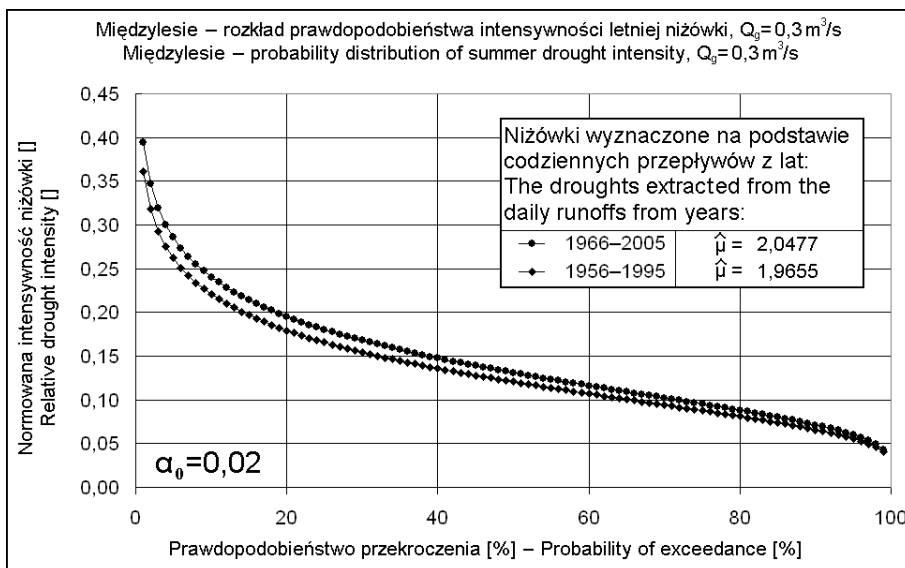
Rys. 54. Estymowane log-normalne rozkłady normowanych intensywności rocznych niżówek,  $\alpha_0 = 0,03$ , rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu

Fig. 54. Estimated log-normal distributions of the annual low flow relative intensity,  $\alpha_0 = 0,03$ , Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



Rys. 55. Estymowane log-normalne rozkłady normowanych intensywności rocznych niżówek,  $\alpha_0 = 0,06$ , rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu

Fig. 55. Estimated log-normal distributions of the annual low flow relative intensity,  $\alpha_0 = 0,06$ , Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile



Rys. 56. Estymowane log-normalne rozkłady normowanych intensywności letnich niżówek,  $\alpha_0 = 0,02$ , rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu

Fig. 56. Estimated log-normal distributions of the summer low flow relative intensity,  $\alpha_0 = 0,02$ , Nysa Kłodzka River, Międzyzlesie Profile

1. Połącz próbę obserwowanych  $n$  normowanych intensywności wcześniejszego okresu z próbą  $m$  normowanych intensywności z lat późniejszych. Utworzona próba  $\mathbf{x}$  ma  $n + m$  obserwacji.
2. Z  $\mathbf{x}$  wylosuj z powtórzeniami  $B$  prób  $\mathbf{x}_b$ ,  $b = 1, \dots, B$  o liczebności  $n + m$  każda. Pierwsze  $n$  obserwacji stanowi próbę  $\mathbf{y}_b$ , kolejne  $m$  próbę  $\mathbf{z}_b$ .
3. Dla każdej pary  $(\mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)$  wyznacz statystykę:

$$t_b = \frac{\bar{y}_b - \bar{z}_b}{\sqrt{\frac{s_{y_b}^2}{n} + \frac{s_{z_b}^2}{m}}}, \quad b = 1, \dots, B. \quad (6.10)$$

4. Oblicz  $ASL$  (achieved significance level) – osiągnięty poziom istotności:

$$\widehat{ASL} = \frac{\#\{t_b \geq t_{obs}\}}{B} \quad (6.11)$$

gdzie  $\#$  oznacza liczbę zdarzeń sprzyjających, a  $t_{obs}$  obserwowaną wartość statystyki (6.10). Wartość  $\widehat{ASL}$  niższa od 0,05 stanowi o odrzuceniu hipotezy  $H_0$ .

Obliczone wartości  $\widehat{ASL}$  przeprowadzone w opracowywanych poziomach  $\alpha_0$  w obu grupach danych przedstawiono w tabeli 24. Obliczenia wykonano również wtedy, gdy na poziomie istotności  $\alpha_{kryt} = 0,05$  hipotezę o zgodności obserwowanych normowanych intensywności z rozkładem log-normalnym należało odrzucić – w teście bootstrap nie ma założenia o postaci rozkładu badanej próby. Wolne pola oznaczają, iż z powodu zbyt małej liczby zaobserwowanych niżówek (poniżej 35) nie dokonano estymacji rozkładu log-normalnego. Obliczone wartości  $\widehat{ASL}$  mniejsze niż 0,05 zaznaczono itałikiem.

Tabela 24. Obliczone wartości  $\widehat{ASL}$  testu bootstrap hipotezy (6.9) równości średnich zlogarytmowanych normowanych intensywności niżówek w Międzyzlesiu

Table 24. Computed values  $\widehat{ASL}$  of bootstrap test of the hypothesis (6.9) of the equality of the average logarithmic relative low flow intensities at the Międzyzlesie profile

$\alpha_0$	Cały rok – Annual		Letni – Summer	
	Okres – Period			
	1966 – 2005 1956 – 1995	1976 – 2005 1956 – 1985	1966 – 2005 1956 – 1995	1976 – 2005 1956 – 1985
0,005	<i>0,0171</i>	<i>0,0001</i>	<i>0,0095</i>	<i>0,0002</i>
0,010	<i>0,0477</i>	<i>0,0011</i>	<i>0,0282</i>	<i>0,0002</i>
0,020	0,1224	<i>0,0038</i>	0,1038	<i>0,0064</i>
0,030	0,1138	<i>0,0204</i>	0,1608	
0,040	0,1484	0,1256	0,1983	
0,050	0,1091	0,0915	0,1159	
0,060	0,1253	<i>0,0493</i>	0,1450	
0,070	0,1809	<i>0,0406</i>	0,1309	

W przypadku danych z II grupy, oprócz średnich zlogarytmowanych intensywności liczonych dla  $\alpha_0 = 0,04$ , i  $\alpha_0 = 0,05$ , hipotezę  $H_0$  należy odrzucić.

Oznacza to, że założenie o wieloletniej jednorodności przepływów niżówkowych w Międzyzlesiu w pięćdziesięcioleciu 1956–2005 jest nieprawdziwe – istnieją dotąd nierozpoznane procesy w zlewni, związane m. in. z działalnością gospodarczą człowieka, stymulujące zwiększanie się normowanej intensywności niżówek.

Przeprowadzono podobne rozumowanie, postawienia hipotez (6.9) dotyczących równości zlogarytmowanych normowanych niedoborów przepływów oraz czasów trwania niżówek. Testowanie prowadzono przy takich samych parametrach  $\alpha_0$ , jak w tabeli 24. We wszystkich przypadkach nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy  $H_0$  o równości odpowiednich średnich. Obliczone wartości  $\widehat{ASL}$  testu bootstrap są większe niż 0,05. Wytłumaczenie tej rozbieżności jest stosunkowo proste. W rozkładzie log-normalnym współczynnik zmienności określający względne zróżnicowanie rozkładu cechy  $C_v = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$  zależy tylko wariancji rozkładu. W rozdziale 6.2 pokazano, że wariancja zlogarytmowanej normowanej intensywności wynosi  $\sigma_u^2 = \sigma_d^2 - 2\rho\sigma_t\sigma_d + \sigma_t^2$ . Ponieważ estymowany współczynnik korelacji  $\rho$  przeważnie nie maleje poniżej 0,9, to  $\sigma_u^2$  jest niewiele większa niż  $(\sigma_d - \sigma_t)^2$ . Oznacza to wyraźne obniżenie współczynnika zmienności normowanej intensywności  $C_v(u)$  w stosunku do odpowiednich współczynników zmienności normowanego niedoboru i czasu trwania niżówki:  $C_v(d)$  i  $C_v(t)$ . Wiąże się to również z zawężeniem szerokości przedziału ufności dla średniej  $\mu_u$  w stosunku do szerokości przedziałów ufności dla pozostałych średnich.

Podobną hipotezę o równości średnich w obu grupach danych przetestowano w celu zbadania, czy średnie zlogarytmowane normowanych intensywności niżówek rocznych są równe średnim normowanym intensywnościom niżówek letnich. Testowano hipotezę:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_0 &= \mu_1 \\ H_1 : \mu_0 &\neq \mu_1, \end{aligned} \tag{6.12}$$

gdzie  $\mu_0$  jest średnią z rocznych logarytmowanych normowanych intensywności, zaś  $\mu_1$  – średnią ich letnich wartości. Niestety, z powodu zbyt małej liczby obserwowanych zimowych niżówek nie można testować równości średnich intensywności niżówek sezonowych. Już w przypadku parametru  $\alpha_0 = 0,03$  liczba obserwowanych niżówek zimowych rzadko kiedy przekracza 20 zdarzeń.

W tabeli 25 zawarto obliczone wartości  $\widehat{ASL}$  testu bootstrap. Żadna z nich nie jest niższa od poziomu istotności testu  $\alpha_{\text{kryt}} = 0,05$ . Oznacza to, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o równości badanych średnich zlogarytmowanych intensywności. Ten wniosek wcale nie dowodzi, że sezonowość nie ma wpływu na rozkład niżówek. Mówi tylko o bliskości średnich. Jednakże jeśli porównamy wnioski z testowania hipotezy (6.12) z wnioskami z testowania hipotezy (6.9), to wyraźnie widać, że zmiany zachodzące w wieloleciu w zlewni Nysy Kłodzkiej, powyżej profilu w Międzyzlesiu, mają większy wpływ na rozkład intensywności niżówek, a zatem na postać samych niżówek, niż zmienność sezonowa.

Zmienność normowanej intensywności niżówek w czasie w pozostałych 3 profilach: Bystrzyca Kłodzkiej, Kłodzku oraz w Bardzie bardzo odbiega od opisywanej powyżej zmienności w Międzyzlesiu. Na rysunkach 57–59 porównano estymowane

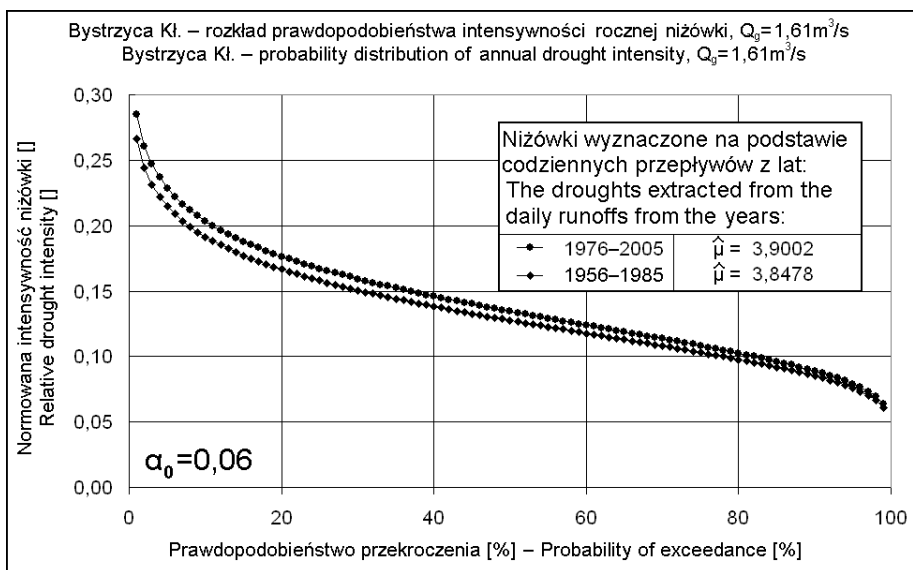
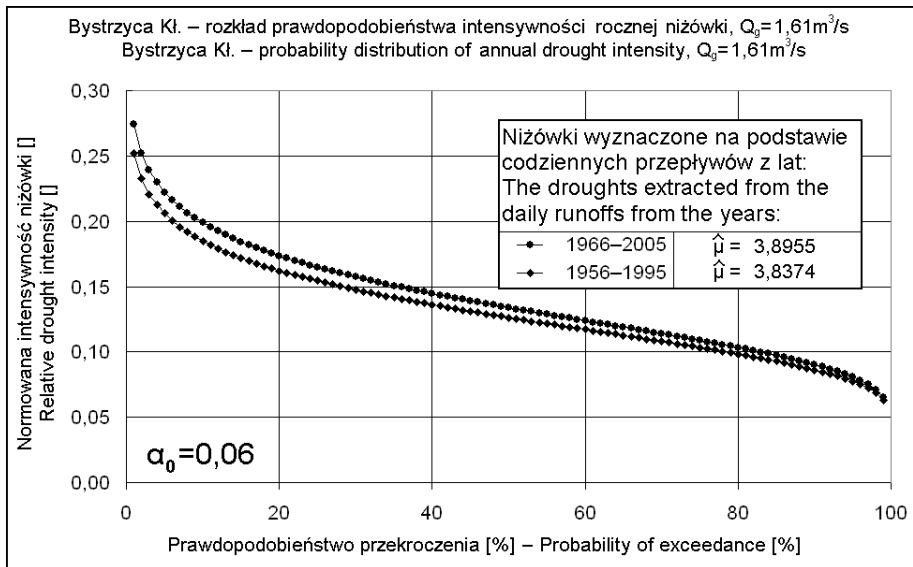
log-normalne rozkłady wyznaczone, gdy parametr  $\alpha_0 = 0,06$ . Już sama analiza wykresów pozwala stwierdzić, że otrzymane krzywe rozkładu leżą bliżej siebie. Nie ma aż tak dużych rozbieżności. Potwierdzają to przeprowadzone testy. Tylko w dwóch przypadkach (Bystrzyca Kłodzka – niżówki wyznaczone, gdy  $\alpha_0 = 0,03$ ;  $0,04$  hipotezy (6.9) o równości odpowiednich średnich należało odrzucić (odpowiednio  $\widehat{ASL} = 0,0393$ ;  $0,0276$ ). W pozostałych badanych przypadkach  $\widehat{ASL}$  było wyższe od  $0,05$ .

Tabela 25. Obliczone wartości  $\widehat{ASL}$  testu bootstrap hipotezy (6.12) równości średnich rocznych i letnich zlogarytmowanych normowanych intensywności niżówek w Międzylesiu  
 Table 25. Computed values  $\widehat{ASL}$  of bootstrap test of the hypothesis (6.12) of the equality of the annual and summer averages of the logarithmic low flow relative intensities in the Międzylesie profile

$\alpha_0$	Okres – Period			
	1966–2005	1956–1995	1976–2005	1956–1985
0,005	0,1029	0,0546	0,0652	0,2263
0,010	0,1472	0,0682	0,1852	0,3503
0,020	0,2177	0,3141	0,3013	0,2584
0,030	0,2977	0,0798	0,3750	
0,040	0,3112	0,2129		
0,050	0,3084	0,3344		
0,060	0,2421	0,2454		
0,070	0,3144	0,2239		

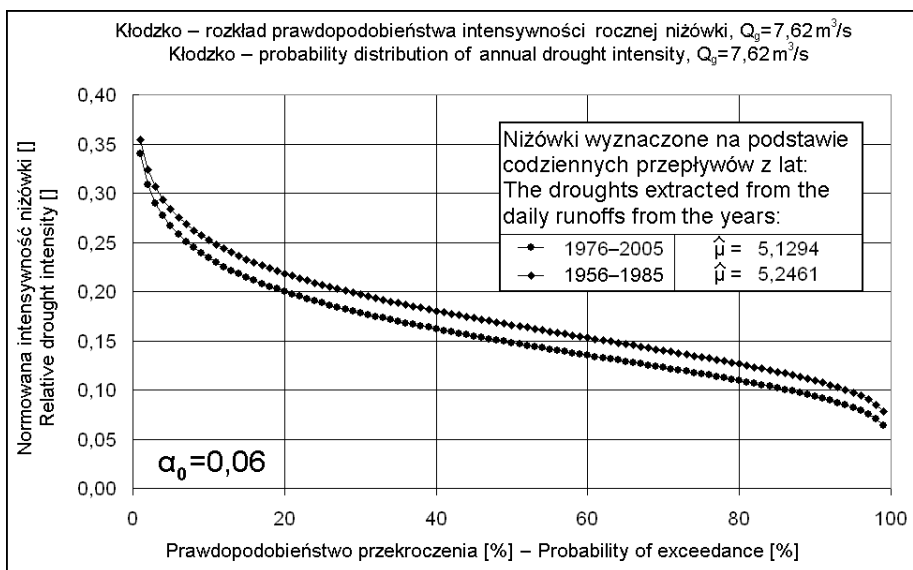
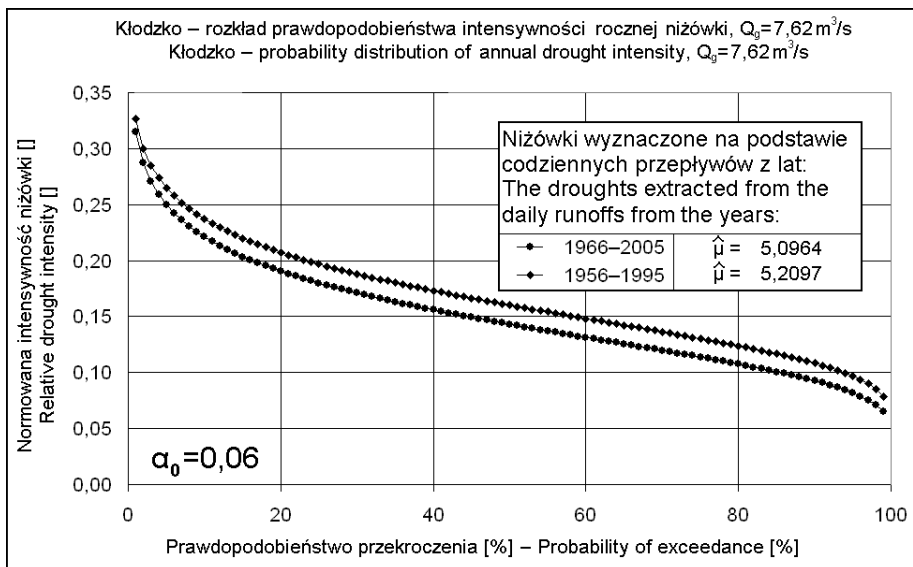
Należy także przyjrzeć się rozkładom normowanych intensywności w Kłodzku (rys. 58) – przebieg krzywych rozkładu jest inny niż w pozostałych profilach. W przeciwieństwie do pozostałych posterunków, krzywe rozkładu lat późniejszych leżą poniżej krzywych lat wcześniejszych. Po postawieniu hipotezy (6.12), gdzie tak jak poprzednio  $\mu_0$  jest średnią zlogarytmowanych normowanych intensywności lat późniejszych, zaś  $\mu_1$  jest odpowiednią średnią z lat wcześniejszych, w żadnym z testowanych przykładów nie stwierdzono podstaw do odrzucenia hipotezy o równości średnich zlogarytmowanych normowanych intensywności w badanych grupach danych. Najgorsza – najmniejszy obliczona wartość  $\widehat{ASL}$  była wyższa od  $0,5$ .

Otrzymane wyniki świadczą o znaczącym wpływie budowy hydrogeologicznej Kotliny Kłodzkiej na zmienność czasową niżówek. A ta jest bardzo zróżnicowana – [Fabiszewski 2005, Tokarczyk i in. 2005]. Szczegółowsze informacje można znaleźć również w pracach: Bocheńska [2002] czy Marszałek i Wąsik [2004]. Oznacza to, że otrzymane wyniki testów statystycznych wskazują na istotne zachodzące zmiany w strefie przepływów niskich.



Rys. 57. Estymowane log-normalne rozkłady normowanych intensywności rocznych niżówek,  $\alpha_0 = 0,06$ , rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Bystrzycy Kłodzkiej

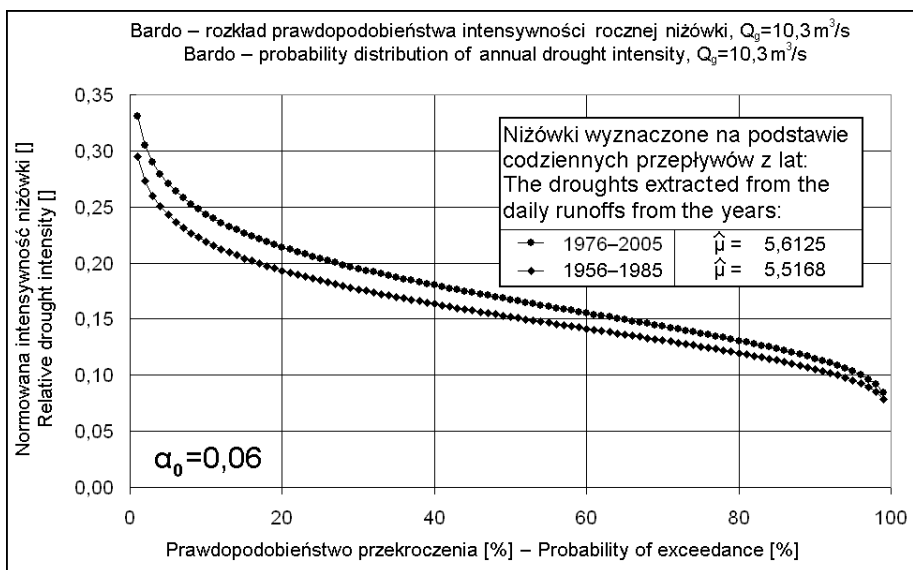
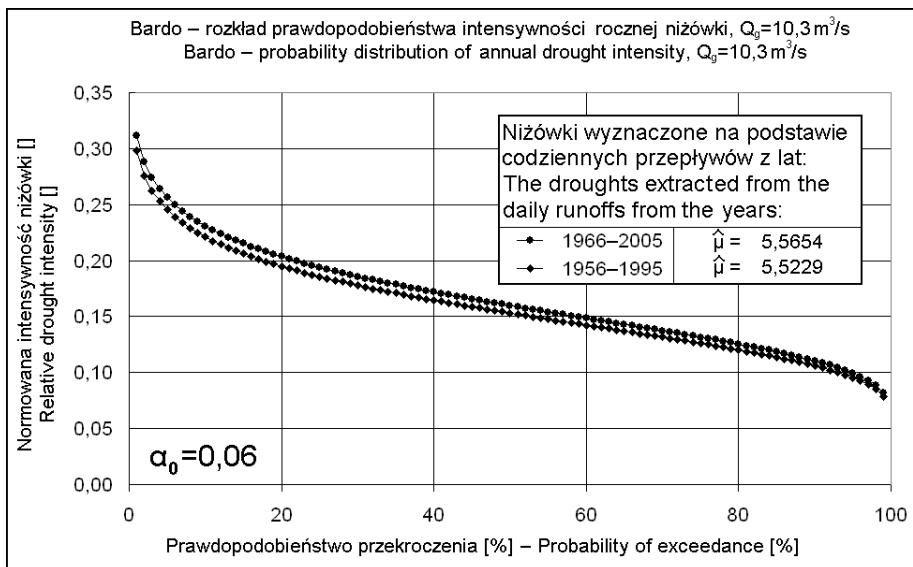
Fig. 57. Estimated log-normal distributions of the annual low flow relative intensity,  $\alpha_0 = 0,06$ , Nysa Kłodzka River, Bystrzyca Kłodzka Profile



Rys. 58. Estymowane log-normalne rozkłady normowanych intensywności rocznych niżówek,  $\alpha_0 = 0,06$ , rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Kłodzku

Fig. 58. Estimated log-normal distributions of the annual low flow relative intensity,  $\alpha_0 = 0,06$ , Nysa Kłodzka River, Kłodzko Profile





Rys. 59. Estymowane log-normalne rozkłady normowanych intensywności rocznych niżówek,  $\alpha_0 = 0,06$ , rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Bardzie

Fig. 59. Estimated log-normal distributions of the annual low flow relative intensity,  $\alpha_0 = 0,06$ , Nysa Kłodzka River, Bardo Profile

### 6.3.2. Zmienność normowanych intensywności niżówek w profilu podłużnym Nysy Kłodzkiej

Estymowane log-normalne rozkłady normowanych intensywności niżówek w kolejnych profilach górnej Nysy Kłodzkiej pozwalają na ich porównanie. Podobnym problemem zajmowali się również Chełmicki i Bieńkowski. Porównywali niżówkowe niedobory przepływów w zlewni Dunajca w przekrojach wodowskazowych Nowy Targ Kowaniec oraz Krościenko [Chełmicki i Bieńkowski 2004].

Rysunki 60–61 przedstawiają estymowane rozkłady log-normalne normowanych intensywności przepływów w wodowskazach: Międzylesie, Bystrzyca Kłodzka, Kłodzko oraz Bardo. Z czterech rozkładów, jeden, opisujący normowane intensywności w Bystrzycy Kłodzkiej wyraźnie odróżnia się od pozostałych. Szczególnie jest to widoczne w odniesieniu do przepływów z lat 1956–1995 – górne wykresy rysunków 60–61. Wobec tego można postawić hipotezę:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1 : \text{Przynajmniej dwie średnie nie równają się sobie} \end{aligned} \quad (6.13)$$

gdzie średnie:  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  są rocznymi albo letnimi średnimi logarytmowanych normowanych intensywności – odpowiednio w Międzylesiu, Bystrzycy Kłodzkiej, Kłodzku i Bardzie. Jak zauważono powyżej normowanie polega na podzieleniu intensywności przez średni dobowy przepływ, który jest również zmienną losową o nieznanym rozkładzie. Jednakże tu będzie traktowany jako stała wielkość charakteryzująca zlewnię zamkniętą badanym profilem wodowskazowym.

Niech zmienna losowa  $U$  oznacza normowaną intensywność niżówki, nowa zmienna  $V = U/B$ , gdzie  $B$  jest stałą wielkością normującą – odpowiadającą średniemu dobowemu przepływowi. Oznacza to, że wartość oczekiwana  $EU = EBV = BEV$ . Podobnie wariancja  $D^2U = D^2BV = B^2D^2V$ . Ponieważ:

$$EU = e^{\mu_u + \frac{\sigma_u^2}{2}}; \quad D^2U = e^{2\mu_u + \sigma_u^2} (e^{\sigma_u^2} - 1) \quad (6.14)$$

to parametry rozkładu log-normalnego zmiennej losowej  $V$  wynoszą  $\mu_v = \mu_u - \ln(B)$  oraz  $\sigma_v = \sigma_u$ , a ich estymatory odpowiednio  $\hat{\mu}_v = \hat{\mu}_u - \ln(B)$  oraz  $\hat{\sigma}_v = \hat{\sigma}_u$ . W celu sprawdzenia hipotezy użyty został test jednoczynnikowej analizy wariancji. Obliczone  $p$ -wartości testu  $F$ , a także estymowane  $\hat{\mu}_v$  oraz  $\hat{\sigma}_v$  poszczególnych profili przedstawiono w tabeli 26.

We wszystkich testowanych przypadkach należy odrzucić hipotezę o równości średnich zlogarytmowanych normowanych intensywności w kolejnych profilach górnej Nysy Kłodzkiej. Potwierdzają się zatem wyniki uzyskane w pracy Jakubowskiego [2005b], gdzie stosowany był model Zelenhasicia i Salvai do porównania rozkładów niedoborów przepływów i czasów trwania w profilach górnej Nysy Kłodzkiej.

Graficznie zmienność rozkładów zlogarytmowanych unormowanych intensywności w profilu górnej Nysy Kłodzkiej przedstawiono na rysunkach 62–63. Na wszystkich wykresach widać, potwierdzoną powyższymi testami, zmianę normowanej intensywności pomiędzy wodowskazami Międzylesie – Bystrzyca Kłodzka.

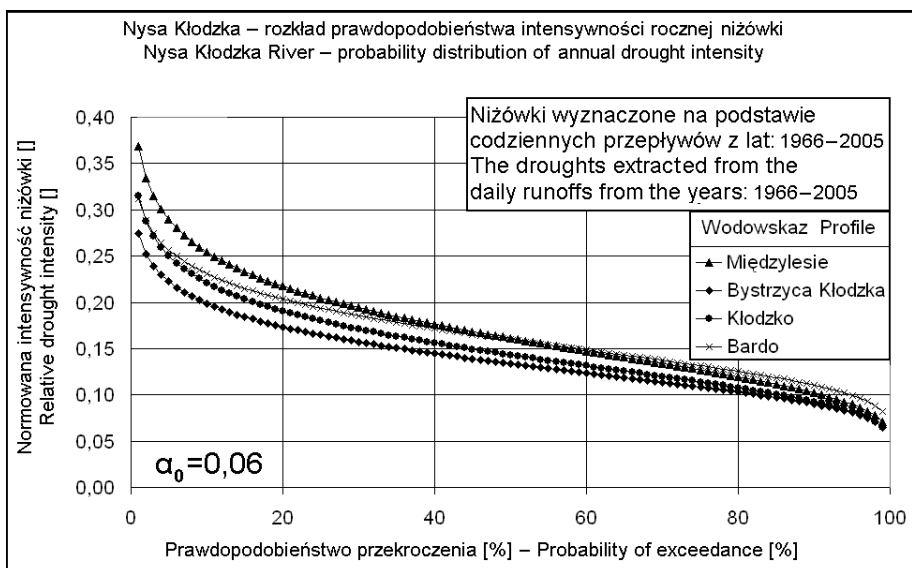
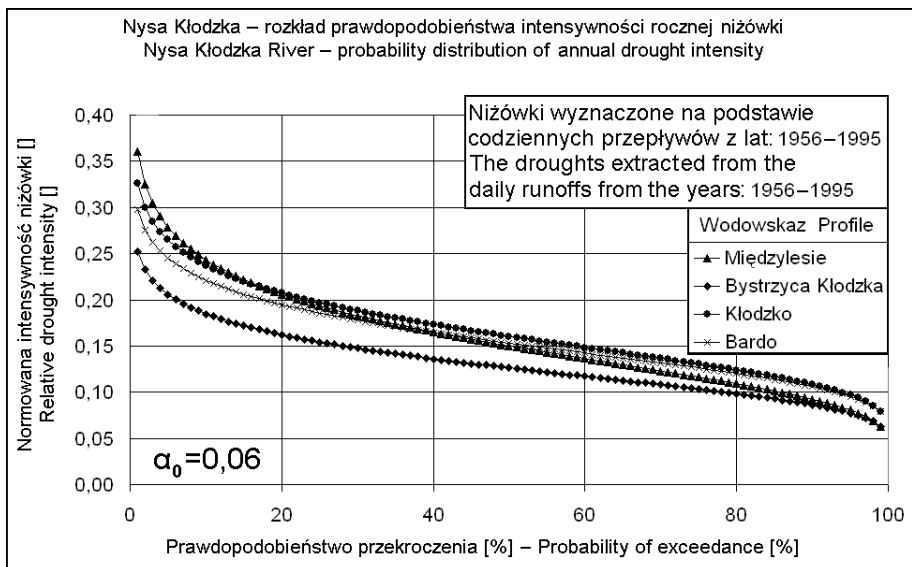
Tabela 26. Test  $F$  hipotezy 6.13 równości średnich logarytmowanych normowanych intensywności w kolejnych profilach górnej Nysy Kłodzkiej

Table 26. Profiles of the upper River Nysa Kłodzka, the  $F$  test of the hypothesis 6.13 of the equality of the averages of the logarithmic of the low flow relative intensity

Wodowskaz Profile	Niżówki Low flows	Roczne – Annual $\alpha_0 = 0,06$		$p$ -wartość testu $F$ $p$ -values of the $F$ test
		Letnie – Summer $\alpha_0 = 0,02$		
		$\hat{\mu}_v$	$\hat{\sigma}_v$	
Międzylesie Bystrzyca Kłodzka Kłodzko Bardo	Roczne Annual 1966 –2005	-1,8257 -2,0113 -1,9448 -1,8347	0,3558 0,3085 0,3396 0,2878	<i>0,0051</i>
Międzylesie Bystrzyca Kłodzka Kłodzko Bardo	Letnie Summer 1966 –2005	-2,0335 -2,2558 -2,1339 -2,0513	0,4746 0,4369 0,4231 0,4047	<i>0,0004</i>
Międzylesie Bystrzyca Kłodzka Kłodzko Bardo	Roczne Annual 1956 –1995	-1,8976 -2,0694 -1,8315 -1,8772	0,3775 0,2973 0,3059 0,2868	<i>0,0210</i>
Międzylesie Bystrzyca Kłodzka Kłodzko Bardo	Letnie Summer 1966 –1995	-2,1156 -2,3136 -2,1096 -2,0533	0,4722 0,3977 0,4406 0,3630	<i>0,0053</i>

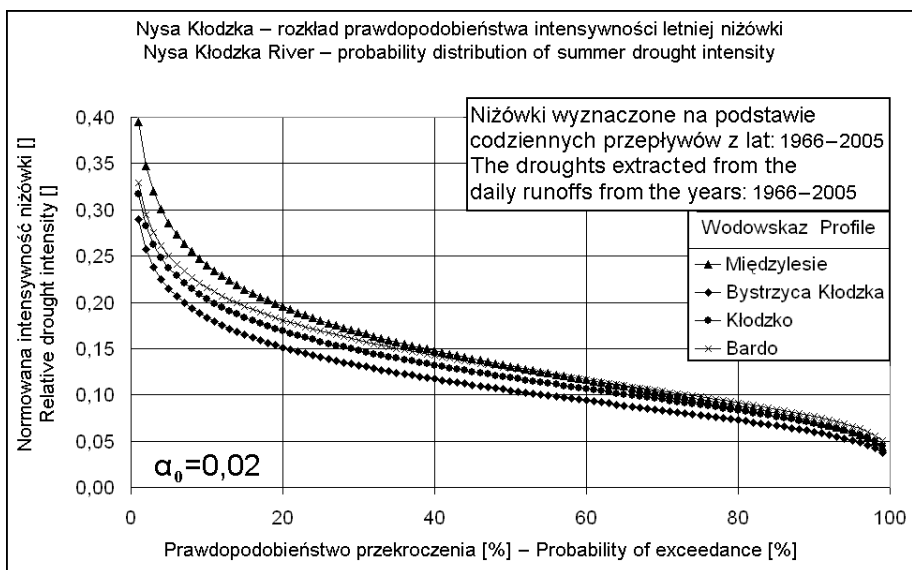
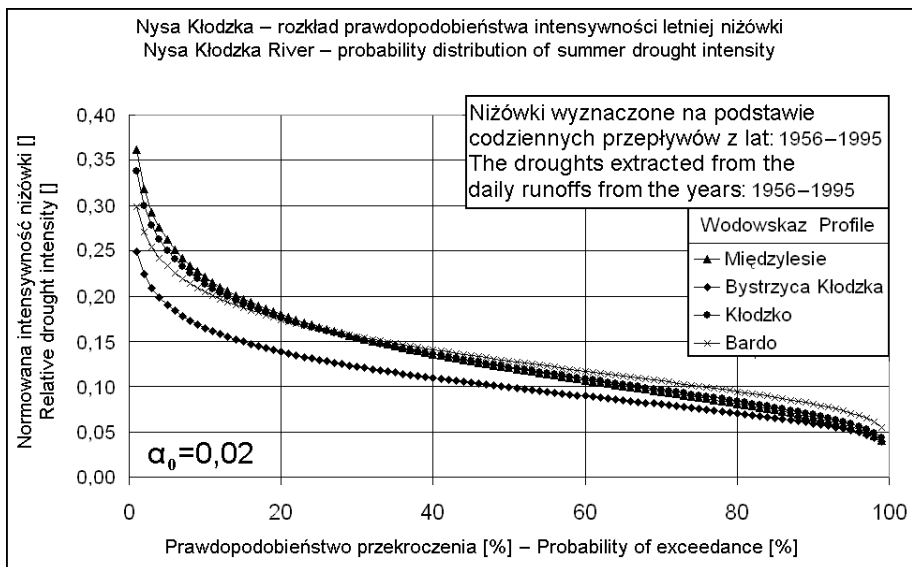
Odrzucenie hipotezy (6.13) sugeruje postawienie pytania, w których profilach normowana intensywność niżówki przebiega inaczej niż w pozostałych. W tym celu, stosując hipotezę (6.12), testowane były równości odpowiednich średnich w kolejnych profilach położonych wzdłuż Nysy Kłodzkiej. Rozważano pary wodowskazów: Międzylesie – Bystrzyca Kłodzka, Bystrzyca Kłodzka – Kłodzko oraz Kłodzko – Bardo. Wobec tego w hipotezie (6.12)  $\mu_0$  jest średnią z logarytmowanych normowanych intensywności obliczoną w profilu położonym powyżej, zaś  $\mu_1$  położonym poniżej.

W tabeli 27 przedstawione zostały obliczone  $p$ -wartości testu  $t$  Studenta. W odniesieniu do średnich zlogarytmowanych unormowanych intensywności w Międzylesiu i Bystrzycy Kłodzkiej hipotezę o równości należy odrzucić. Niejednorodność badanych średnich można obserwować w latach 1956–1995 również w Bystrzycy Kłodzkiej i Kłodzku. Wyraźnie widać, jak niejednorodnie zachowują się przepływy niskie w profilu podłużnym Nysy Kłodzkiej. Potwierdza to bardzo zmienną strukturę hydrogeologiczną kotliny. Złożoności tej struktury, występujące spękania są opisane w pracy Staški [1996].



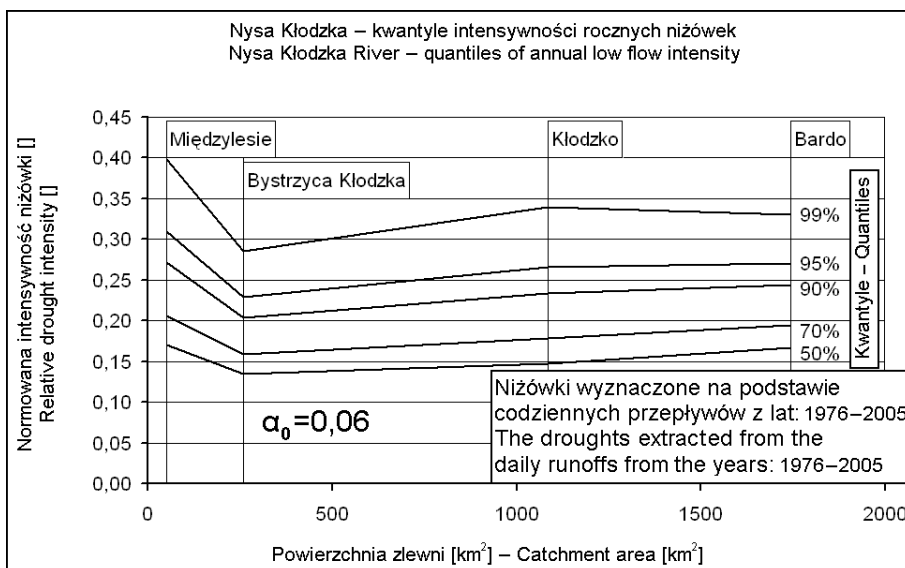
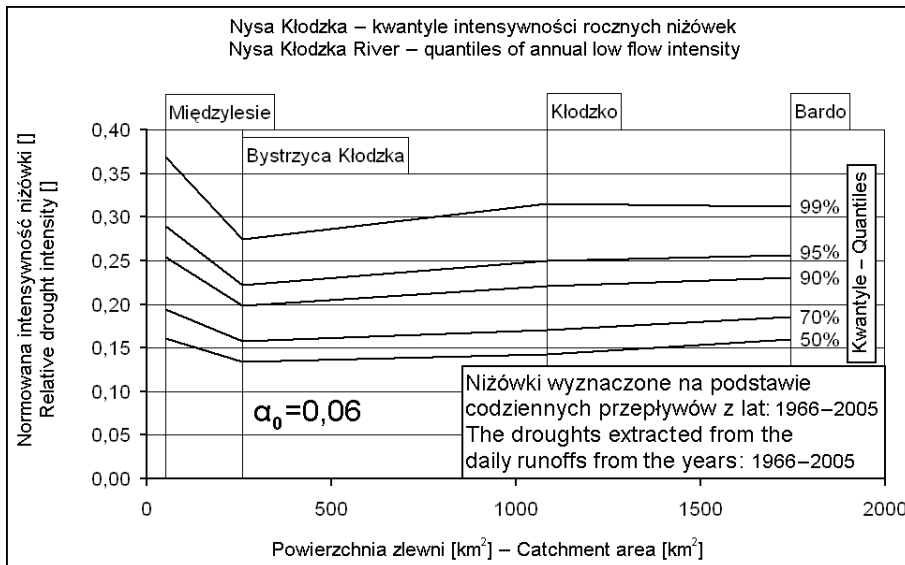
Rys. 60. Estymowane log-normalne rozkłady normowanych intensywności rocznych niżówek,  $\alpha_0 = 0,06$ , dorzecze górnej Nysy Kłodzkiej

Fig. 60. Estimated log-normal distributions of the annual low flow relative intensity,  $\alpha_0 = 0,06$ , upper Nysa Kłodzka River basin



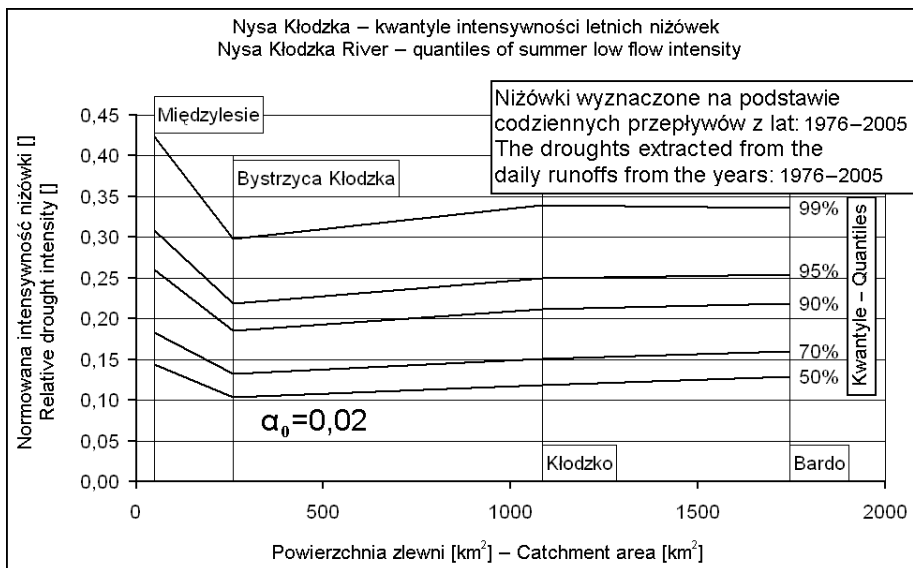
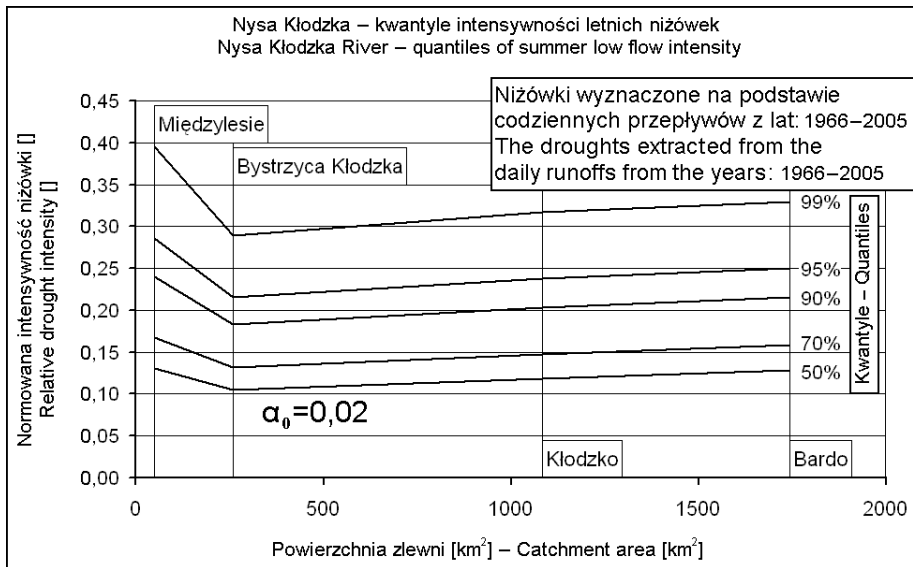
Rys. 61. Estymowane log-normalne rozkłady normowanych intensywności letnich niżówek,  $\alpha_0 = 0,02$ , dorzecze górnej Nysy Kłodzkiej

Fig. 61. Estimated log-normal distributions of the summer low flow relative intensity,  $\alpha_0 = 0,02$ , upper Nysa Kłodzka River basin



Rys. 62. Estymowane kwantyle log-normalnych rozkładów normowanych intensywności rocznych niszówek, profil podłużny górnej Nysy Kłodzkiej

Fig. 62. Estimated quantiles of log-normal distributions of the annual low flow relative intensity, upper Nysa Kłodzka River basin



Rys. 63. Estymowane kwantyle log-normalnych rozkładów normowanych intensywności letnich niżówek, profil podłużny górnej Nysy Kłodzka

Fig. 63. Estimated quantiles of log-normal distributions of the summer low flow relative intensity, upper Nysa Kłodzka River basin

Tabela 27.  $p$ -wartości testu  $t$  Studenta hipotezy (6.12) równości średnich rocznych i letnich logarytmowanych normowanych intensywności niżówek w kolejnych profilach Nysy Kłodzkiej

Table 27.  $p$ -values of the  $t$  Student test of the hypothesis (6.12) of the equality of the annual and summer averages of the logarithmic low flow relative intensities in the successive profiles of the Nysa Kłodzka River

Profile Profiles	Okres – Period			
	1966–2005		1956–1995	
	Roczne Annual	Letnie Summer	Roczne Annual	Letnie Summer
Międzylesie – Bystrzyca Kł.	<i>0,0027</i>	<i>0,0066</i>	<i>0,0086</i>	<i>0,0162</i>
Bystrzyca Kł. – Kłodzko	0,2821	0,1695	<i>0,0001</i>	<i>0,0148</i>
Kłodzko – Bardo	0,1112	0,3674	0,4495	0,4853

Podsumowując, w ciekach górskich o tak mocno zróżnicowanej hydrogeologii zlewni badanie zjawiska suszy hydrologicznej musi odbywać się tylko w pomierzonych profilach wodowskazowych. Nie można przenosić otrzymanych miar charakterystyk na inne niekontrolowane zlewnie, a dwuwymiarowy rozkład log-normalny, po odrzuceniu pewnej grupy płytkich niżówek, dość dobrze estymuje charakterystyki pozostałych przepływów niskich.



## 7. DWUWYMIAROWY ROZKŁAD CHARAKTERYSTYK MAKSYMALNYCH NIŻÓWEK

W rozdziale podano definicję rozkładu Pareto [Tajvidi 1996] – BGPD oraz metodę estymacji jego parametrów. Zastosowano rozkład BGPD do estymacji rozkładu charakterystyk maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówek w czterech testowych wodowskazach. Wyznaczone estymatory parametrów przesunięcia rozdzielają niżówki na głębokie (długie) – wpływające na rozkłady charakterystyk maksymalnych – oraz pozostałe. Badano także wpływ wyboru poziomu odcięcia  $Q_g$  na rozkład charakterystyk maksymalnych. Pozwoliło to na określenie przedziałów przepływów granicznych, w których estymowane rozkłady są niestabilne.

### 7.1. Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Pareto

Niech  $\{A_i^{(1)}, A_i^{(2)}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  będzie ciągiem dwuwymiarowych wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie  $F(x, t)$ . Tak jak w przypadku jednowymiarowym opisanym w rozdziale 5.4 definiujemy dwuwymiarową zmienną losową wartości maksymalnych:

$$\left(M_n^{(1)}, M_n^{(2)}\right) = \left\{ \max_{i=1, \dots, n} A_i^{(1)}, \max_{i=1, \dots, n} A_i^{(2)} \right\}. \quad (7.1)$$

Jeśli dla pewnych  $a_n^{(1)} > 0$ ,  $a_n^{(2)} > 0$ ,  $b_n^{(1)}$ ,  $b_n^{(2)}$  istnieje granica:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{M_n^{(1)} - b_n^{(1)}}{a_n^{(1)}} \leq x, \frac{M_n^{(2)} - b_n^{(2)}}{a_n^{(2)}} \leq t \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n \left( a_n^{(1)}x + b_n^{(1)}, a_n^{(2)}t + b_n^{(2)} \right) = G(x, t) \end{aligned} \quad (7.2)$$

i jeżeli  $G(x, t)$  jest niezdegenerowaną dystrybuantą, wtedy  $G(x, t)$  jest uogólnionym dwuwymiarowym rozkładem wartości ekstremalnych [Resnick 1987, Coles 2001]. Na podstawie przejścia granicznego, ze wzoru (7.2) wynika, że dla dużych  $n$  zachodzi:

$$F^n \left( a_n^{(1)}x + b_n^{(1)}, a_n^{(2)}t + b_n^{(2)} \right) \approx G(x, t). \quad (7.3)$$

Po obustronnym zlogarytmowaniu i wykorzystaniu rozwinięcia Taylora funkcji  $\ln F \approx -\{1 - F\} = -\bar{F}$  mamy:

$$n\bar{F} \left( a_n^{(1)}x + b_n^{(1)}, a_n^{(2)}t + b_n^{(2)} \right) \approx -\ln G(x, t), \quad (7.4)$$

gdzie  $\bar{F}(x, t) = \Pr \left( (A_n^{(1)}, A_n^{(2)}) \not\leq (x, t) \right)$ .

Stąd prawdopodobieństwo warunkowe:

$$\begin{aligned} \Pr \left( (A_n^{(1)}, A_n^{(2)}) \not\leq (x + x_0, t + t_0) \mid (A_n^{(1)}, A_n^{(2)}) \not\leq (x_0, t_0) \right) \\ = \frac{\overline{F}(x+x_0, t+t_0)}{\overline{F}(x_0, t_0)} \approx \frac{-\ln G(x+x_0, t+t_0)}{-\ln G(x_0, t_0)} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Przy jego wyprowadzeniu wykorzystywana jest max-stabilność rozkładu  $G$ . Zgodnie z Tajvidi [1996] wzór (7.5) definiuje dwie rodziny uogólnionych dwuwymiarowych rozkładów Pareto:

1. o nośniku dodatnim:  $(x, t) \geq (0, 0)$ ;
2. o pełnym nośniku:  $(x, t) \not\leq (0, 0)$ .

Rozkład  $H(x, t)$  należy do rodziny o nośniku dodatnim, gdy:

$$\begin{aligned} \overline{H}(x, t) &= \frac{-\ln G(x+x_0, t+t_0)}{-\ln G(x_0, t_0)}, \quad (x, t) \geq (0, 0), \\ H(x, t) &= \begin{cases} 1 - \overline{H}(x, t), & \text{gdy } (x, t) \geq (0, 0), \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.6)$$

dla pewnego rozkładu wartości ekstremalnych  $G$  z punktem  $(x_0, y_0)$  leżącym w nośniku  $G$ . Podobnie definiuje się rozkład o pełnym nośniku, zmieniając w powyższej definicji nierówność  $(x, t) \geq (0, 0)$  na  $(x, t) \not\leq (0, 0)$ . Oczywiście zmiana nośnika zmienia dziedzinę rozkładu.

Postaci rozkładu  $H$  jest wiele, ich przegląd można znaleźć w pracy Tajvidi [1996]. Do opisu dwuwymiarowego rozkładu zdarzeń ekstremalnych Tajvidi stosuje rozkład o nośniku dodatnim (dalej nazywany rozkładem BGPD – uogólnionym dwuwymiarowym rozkładem Pareto):

$$\overline{H}(x, t) = \left( \frac{\overline{F}_d^p(x) + k\overline{F}_d^{p/2}(x)\overline{F}_t^{p/2}(t) + \overline{F}_t^p(t)}{\overline{F}_d^p(0) + k\overline{F}_d^{p/2}(0)\overline{F}_t^{p/2}(0) + \overline{F}_t^p(0)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (x, t) \geq (0, 0) \quad (7.7)$$

gdzie:

- $\overline{F}_d(x) = 1 - F_d(x) = (1 - \alpha_d \kappa_d (b_d + x))^{1/\kappa_d}$
- $\overline{F}_t(t) = 1 - F_t(t) = (1 - \alpha_t \kappa_t (b_t + t))^{1/\kappa_t}$
- $0 \leq k \leq 2(p-1)$ ,  $p \geq 2$ ,  $\kappa_d, \kappa_t \in (-1; 0)$ ,  $\alpha_d, \alpha_t > 0$

$F_d, F_t$  są jednowymiarowymi trzyparametrowymi uogólnionymi rozkładami Pareto (5.19) opisującymi każdą ze zmiennych losowych  $A_n^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  osobno. Parametry przesunięcia  $b_d$  oraz  $b_t$  odpowiadają parametrom  $x_0, t_0$  z definicji (7.6), a to oznacza, iż oba są dodatnie.

Przyjmując, że:

- $D_M = \max(\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n)$  jest maksymalnym normowanym niedoborem przepływów niżówki;
- $T_M = \max(T_1, \dots, T_n)$  jest jej maksymalnym czasem trwania;

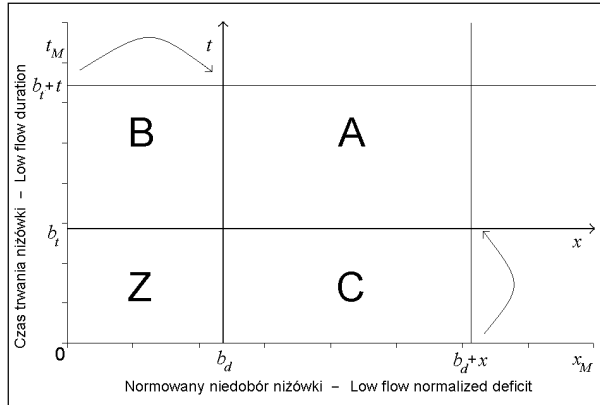
to prawdopodobieństwo  $\Pr((D_M, T_M) \preceq (x + b_d, t + b_t))$  można estymować, wykorzystując rozkład (7.7). Inaczej mówiąc, przyjęto, że:

$$\begin{aligned} \Pr((D_M, T_M) \preceq (x + b_d, t + b_t)) &= 1 - \Pr((D_M, T_M) \leq (x + b_d, t + b_t)) \\ &= \left( \frac{\overline{F}_d^p(x) + k\overline{F}_d^{p/2}(x)\overline{F}_t^{p/2}(t) + \overline{F}_t^p(t)}{\overline{F}_d^p(0) + k\overline{F}_d^{p/2}(0)\overline{F}_t^{p/2}(0) + \overline{F}_t^p(0)} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (7.8)$$

gdzie:

- $F_d, F_t$  są jednowymiarowymi trzyparametrowymi uogólnionymi rozkładami Pareto (5.19) opisującymi każdą ze zmiennych losowych  $\overline{D}_i, T_i$  osobno.
- $b_d, b_t$  są parametrami przesunięcia, które zgodnie z definicją (7.7) rozdzielają niżówki na dwie klasy:
  - o nieistotne podczas estymacji rozkładów niżówek maksymalnych;
  - o pozostałe niżówki.

Zatem rozkład (7.8), zgodnie z definicją (7.5), jest przybliżeniem rozkładu warunkowego  $\Pr((\overline{D}_n, T_n) \preceq (x + b_d, t + b_t) | (\overline{D}_n, T_n) \preceq (b_d, b_t))$



Rys. 64. Dziedzina uogólnionego dwuwymiarowego rozkładu Pareto Tajvidi [1996]

Fig. 64. Support of the Bivariate Generalized Pareto Distribution Tajvidi [1996]

Rozkład (7.7 – 7.8) posiada następujące własności:

1. Dodatnie wartości parametrów  $b_d$  i  $b_t$ , zaznaczone na rysunku 64 jako wzajemnie prostopadłe i równoległe do osi układu linie  $x_M = b_d$  oraz  $t_M = b_t$  określają dziedzinę  $(x_M, t_M) \in \mathbf{R}_+^2$  rozkładu  $H(x, t)$ <sup>8</sup>. Badany obszar podzielony jest na cztery podobszary A, B, C, Z. Punkty, dla których:
  - $x_M > b_d$  oraz  $t_M > b_t$  - obszar A, należą do dziedziny rozkładu;
  - $x_M \leq b_d$  oraz  $t_M > b_t$  - obszar B, lub  $x_M > b_d$  oraz  $t_M \leq b_t$  - obszar C, są zrzucone odpowiednio na linie proste  $x_M = b_d$  lub  $t_M = b_t$  (zrzu-

<sup>8</sup> Z (7.7) wynika, że  $x_M = x + b_d$  oraz  $t_M = t + b_t$ .

wanie obszarów  $B$  i  $C$  na odpowiednie proste wynika z definicji rozkładu, z dodatnich wartości nośnika rozkładu<sup>9</sup>);

–  $x_M \leq b_d$  oraz  $t_M \leq b_t$  – obszar  $Z$  nie należy do dziedziny rozkładu.

Dlatego też zwiększanie wartości parametrów przesunięcia zmniejsza liczbę zdarzeń – obserwowanych niżówek biorących udział w estymacji parametrów rozkładu.

2. Funkcja gęstości uogólnionego dwuwymiarowego rozkładu Pareto  $H(x, t)$  składa się z trzech składników:  $h(x, t)$ ,  $h(x, 0)$ ,  $h(0, t)$ . Pierwszy jest dwuwymiarową funkcją gęstości, pozostałe dwa są jednowymiarowe, określone na liniach przesunięcia  $x_M = b_d$ ,  $t_M = b_t$ . Gęstości  $h(x, 0)$ ,  $h(0, t)$  wyznacza się bezpośrednio z gęstości dwuwymiarowej, jednakże na liniach  $x_M = b_d$ ,  $t_M = b_t$  obserwowana jest nieciągłość funkcji  $h(x, t)$  stąd całki:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(x, t) dx dt = \frac{\bar{F}_d(0) + \bar{F}_t(0)}{V} - 1; \quad (7.9)$$

$$\int_0^{\infty} h(x, 0) dx = 1 - \frac{\bar{F}_t(0)}{V}; \quad \int_0^{\infty} h(0, t) dt = 1 - \frac{\bar{F}_d(0)}{V}$$

gdzie

$$V = \left( \bar{F}_d^p(0) + k \bar{F}_d^{p/2}(0) \bar{F}_t^{p/2}(0) + \bar{F}_t^p(0) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (7.10)$$

wyznaczają prawdopodobieństwo każdego z obszarów  $A, B, C$  – dodatek B.4.

3. Rozkłady brzegowe: w formule (7.7) dążąc z  $t$  do nieskończoności mamy:

$$\bar{H}(x, \infty) = \Pr(D_M > x) = \frac{\bar{F}_d(x)}{V} \quad (7.11)$$

Oznacza to, że rozkład brzegowy  $H(x, \infty)$  ma dodatnią wartość (skok prawdopodobieństwa) dla  $x = 0$ . Łatwo zauważyć, że postać rozkładu (7.11) różni się od estymowanego rozkładu  $\bar{F}_d(x)$ . Wynika to z kształtu zaznaczonej na rysunku 64 dziedziny rozkładu. Niezawarty w dziedzinie prostokąt  $Z$  powoduje, że:

$$\int_0^{\infty} h(x, t) dt \neq f_d(x) \quad (7.12)$$

gdzie:

- $h(x, t)$  jest funkcją gęstości rozkładu dwuwymiarowego (7.7);
- $f_d(x)$  jest funkcją gęstości jednowymiarowego uogólnionego rozkładu Pareto o dystrybuancie  $F_d(x)$ .

W przypadku rozkładu maksymalnego czasu trwania niżówki obliczenia przeprowadza się w podobny sposób.

<sup>9</sup> Dziedziną rozkładów o pełnym nośniku jest obszar  $A \cup B \cup C$ .

4. Rozkład warunkowy:

$$\Pr[(D_M, T_M) \leq (x + x_0, t + t_0) | (D_M, T_M) \leq (x, t)] = \frac{\overline{H}(x + x_0, t + t_0)}{\overline{H}(x_0, t_0)} \quad (7.13)$$

jest również uogólnionym dwuwymiarowym rozkładem Pareto z parametrami przesunięcia  $b_d + x_0$  oraz  $b_t + t_0$ . Własność ta została wykorzystana podczas estymacji parametrów przesunięcia.

5. Współczynnik korelacji  $r_{\overline{D}T}$  pomiędzy normowanym niedoborem przepływów niżówki a jej czasem trwania w rozkładzie  $H(x, t)$  (szczegółowe obliczenia zawarto w dodatku B.4) wyprowadzono tylko w obszarze  $A$ . Zostanie on poniżej wykorzystany do estymacji parametrów przesunięcia. Standardowymi metodami można otrzymać:

$$\begin{aligned} ED_M &= \int_0^\infty \int_0^\infty xh(x, t) dx dt & \text{dla } \kappa_d \in (-1; 0) \\ ED_M^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 h(x, t) dx dt & \text{dla } \kappa_d \in (-\frac{1}{2}; 0) \\ ED_M T_M &= \int_0^\infty \int_0^\infty xth(x, t) dx dt & \text{dla } \kappa_d + \kappa_t \in (-1; 0) \end{aligned} \quad (7.14)$$

gdzie  $h(x, t)$  jest dwuwymiarową funkcją gęstości rozkładu  $H(x, t)$ . Wartości oczekiwane (7.14) zależą od całek:

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\alpha (1 + kt + t^2)^\beta t^\gamma dt \quad (7.15)$$

oraz jednowymiarowych uogólnionych rozkładów Pareto:  $\overline{F}_d, \overline{F}_t$ .

Momenty  $ET_M, ET_M^2$  wyznacza się w podobny sposób. Stąd wynika, że współczynnik korelacji jest określony tylko dla  $\kappa_d, \kappa_t \in (-\frac{1}{2}; 0)$ .

## 7.2. Estymacja łącznego rozkładu maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki

### 7.2.1. Estymacja parametrów dwuwymiarowego uogólnionego rozkładu Pareto

Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Pareto (7.7) zależy od ośmiu parametrów. Sześć z nich jest związane z dwoma trójparametrowymi, jednowymiarowymi, uogólnionymi rozkładami Pareto. Pozostałe dwa  $p, k$  – z dwuwymiarową postacią rozkładu. W pracy przyjęto następującą procedurę estymacji:

1. Przy ustalonych parametrach przesunięcia  $b_d, b_t$  pozostałe cztery ( $\hat{\alpha}_d, \hat{\kappa}_d, \hat{\alpha}_t, \hat{\kappa}_t$ ) estymowano metodą największej wiarygodności osobno do każdego z jednowymiarowych rozkładów  $F_d(x)$  i  $F_t(t)$  – porównaj rozdział 5.5 oraz dodatek A.1.1. Każdy z ciągów normowanych niedoborów przepływów oraz czasów trwania zmniejszono o odpowiednie parametry przesunięcia  $b_d, b_t$ . Dobroć dopasowania badano testem zgodności  $\chi^2$ . Aby powrócić do wejściowych wartości (nieprzesuniętych), estymowany parametr  $\hat{\alpha}$  przeliczano do  $\hat{\alpha}_\beta$ , wykorzystując wzór prawdopodobieństwa warunkowego (5.21). Do dalszej estymacji przyjęto tylko te parametry przesunięcia, co do których nie została odrzucona hipoteza o zgodności obu rozkładów jednowymiarowych. Pozostałe dwa parametry  $\hat{p}, \hat{k}$  estymowano również metodą największej wiarygodności. Formalne wyprowadzenie wzorów przedstawiono w dodatku A.3.

Założono, że kolejne parametry przesunięcia są równe uporządkowanym rosnąco wartościom zaobserwowanych normowanych niedoborów przepływów lub czasów trwania.

2. Za najlepszą parę  $(b_d, b_t)$  przyjęto taką, która maksymalizuje estymator współczynnik korelacji  $\hat{r}_{DT}$ . To założenie wynika z postaci związku: normowany niedobór przepływów – czas trwania niżówki. Analizując zależność pomiędzy nimi (rozdz. 4. rys. 4), można zauważyć, że wraz ze wzrostem czasu trwania nieliniowo powiększa się normowany niedobór przepływów. Proces jest mocno widoczny podczas płytkich niżówek i zostaje wyhamowany po przekroczeniu pewnego progu czasowego. Zatem można założyć, że im silniejszy jest liniowy związek pomiędzy normowanym niedoborem przepływów i czasem trwania niżówki – tym mniej zaburzany jest proces zasilania rzeki wodami podziemnymi – po raz drugi potwierdzone zostaje prawo Mailleta [Soczyńska 1997].

Aby wyznaczyć współczynnik korelacji, należy obliczyć całki 7.15 – dodatek B.4. Do obliczeń zastosowano kwadraturę Gaussa – Jacobiego [Ralston 1983, Bjorck i Dahlquist 1987]. Wszystkie obliczenia przeprowadzano tylko do tych par przesunięć  $(b_d, b_t)$ , gdzie związane z nimi estymatory  $\hat{\kappa}_d, \hat{\kappa}_t$  są zawarte w przedziale  $(-\frac{1}{2}, 0)$ . Pozostałe pary, których przynajmniej jeden z estymatorów  $\hat{\kappa}$  pozostawał poza przedziałem  $(-\frac{1}{2}, 0)$ , zostały pominięte.

3. Dobroć dopasowania jednowymiarowych rozkładów brzegowych (7.11) do obserwowanych maksymalnych sezonowych lub rocznych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki otrzymano, stosując test zgodności  $\lambda$  Kołmogorowa.

### 7.2.2. Zastosowanie dwuwymiarowego uogólnionego rozkładu Pareto do wyznaczenia rozkładów maksymalnych charakterystyk niżówek

Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Pareto (7.7) zastosowano do estymacji łącznego rozkładu maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki. Obliczenia wykonano we wszystkich czterech testowych wodowskazach, rozważając tylko niżówki roczne. Niżówki wyznaczano na podstawie przepływów z lat 1966–2005, przy przepływie granicznym  $Q_g = Q_{70\%}$  oraz współ-

czynnika  $\alpha_0 = 0,005$ . Wyniki estymacji przedstawiono w tabelach 28, 29, zaś odpowiadające im wykresy rozkładów na rysunkach 65, 66. W żadnym z badanych przykładów nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności. Wszystkie obliczone  $p$ -wartości testu  $\chi^2$  były większe niż 0,05.

Tabela 28. Test zgodności  $\chi^2$  jednowymiarowych uogólnionych rozkładów Pareto z obserwowanymi normowanymi niedoborami przepływów i czasami trwania niżówek

Table 28. The  $\chi^2$  goodness-of-fit test of the observed low flow relative deficits and durations to one dimensional generalized Pareto distributions

Wodowskaz Profile	$p$ -wartości testu $\chi^2$ $p$ -values of $\chi^2$ test	
	Normowany niedobór Relative deficit	Czas trwania Duration
Zbytowa	0,1037	0,6964
Międzylesie	0,2215	0,6607
Kuripapango	0,3293	0,3563
Colwick	0,0924	0,3339

Tabela 29. Estymowane parametry przesunięcia rozkładu BGPD oraz wartości odpowiadającego im współczynnika korelacji

Table 29. Estimated shift parameters of the BGPD and the adequate correlation coefficient value

Wodowskaz Profile	$\hat{b}_d$			$\hat{b}_t$		Współ. korelacji Correlation coef.
	[tys. m <sup>3</sup> ] [1000 m <sup>3</sup> ]	[dni] [days]	$\alpha_0$	[dni] [days]	$\alpha_0$	
Zbytowa	1238,11	4,31	0,090	15	0,071	0,8419
Międzylesie	333,50	5,63	0,127	26	0,146	0,9117
Kuripapango	3990,21	2,66	0,100	21	0,186	0,9416
Colwick	8163,94	1,13	0,031	15	0,083	0,8928

W tabeli 29 zapisano tylko estymatory przesunięć  $\hat{b}_d, \hat{b}_t$  ( $\hat{b}_d$  podano w formie unormowanej i nieunormowanej). Są one odpowiednikami opisywanego w poprzednim rozdziale parametru  $\alpha_0$  (kolumna obok). Tworzą one granicę, poniżej której obserwowane normowane niedobory przepływów i czasy trwania niżówek nie są wykorzystywane do estymacji rozkładu BGPD. Wyznaczone podczas tej estymacji wartości przesunięć są znacznie wyższe niż proponowane w rozdziale 6. Sugerowałoby to podniesienie wartości heurystycznie wybranego  $\alpha_0$ . Jednakże przy tak wysokiej wartości  $\alpha_0$ , z powodu zbyt małej liczby obserwacji, nie byłoby możliwe przeprowadzenie poprawnej estymacji rozkładu log-normalnego. W przypadku rozkładu log-normalnego do estymacji były brane tylko takie pary obserwacji,

w których normowany niedobór przepływów oraz czas trwania przewyższają odpowiednie parametry odcięć. W przypadku rozkładu BGPD do estymacji nie są uwzględniane te obserwacje, których obie cechy są niższe niż odpowiednie parametry odcięć. Oznacza to, że biorą w niej udział także te niżówki, których jedna z charakterystyk jest mniejsza niż odpowiedni estymator przesunięcia.

W opracowywanych profilach wodowskazowych nie badano rozkładów niżówek sezonowych (letnich). W Międzyzlesiu i w Zbytovej, w ciągu 15 największych niżówek ze względu na normowany niedobór przepływów lub czas trwania, są tylko dwie kwalifikujące się jako zimowe. Obie są na czternastych miejscach w uporządkowanych ciągach czasów trwania. Pozostałe, rozpoczynające się późną wiosną, czy też wczesnym latem są niżówkami letnimi. Podobnie jest w Colwick – tylko jedna długotrwała niżówka (174 dni) rozpoczynająca się 31 marca 1976 r. jest generowana przez niskie zimowe przepływy. Reszta, z 14 największych, to typowe niżówki letnie. Takie rozłożenie w czasie obserwowanych maksymalnych niżówek powoduje, że w estymacji można ograniczyć się do niżówek letnich lub rocznych. Pominięcie sezonowości pozwala również na uniknięcie problemu długich, znacznie wykraczających poza sezon niżówek, np. obserwowanej w Zbytovej w 2003 roku niżówki trwającej się 25 maja do 24 grudnia. Formalnie większa jej część przebiega latem, jednak skutki niedoboru wody są widoczne również w listopadzie i w grudniu. Nierównomierne rozłożenie w czasie niżówek (suszy hydrologicznych) zostało także zauważone przez Kowalczaka [1995].

Estymowane rozkłady BGPD przedstawiono na rysunkach 65, 66. Wyróżniono na nich:

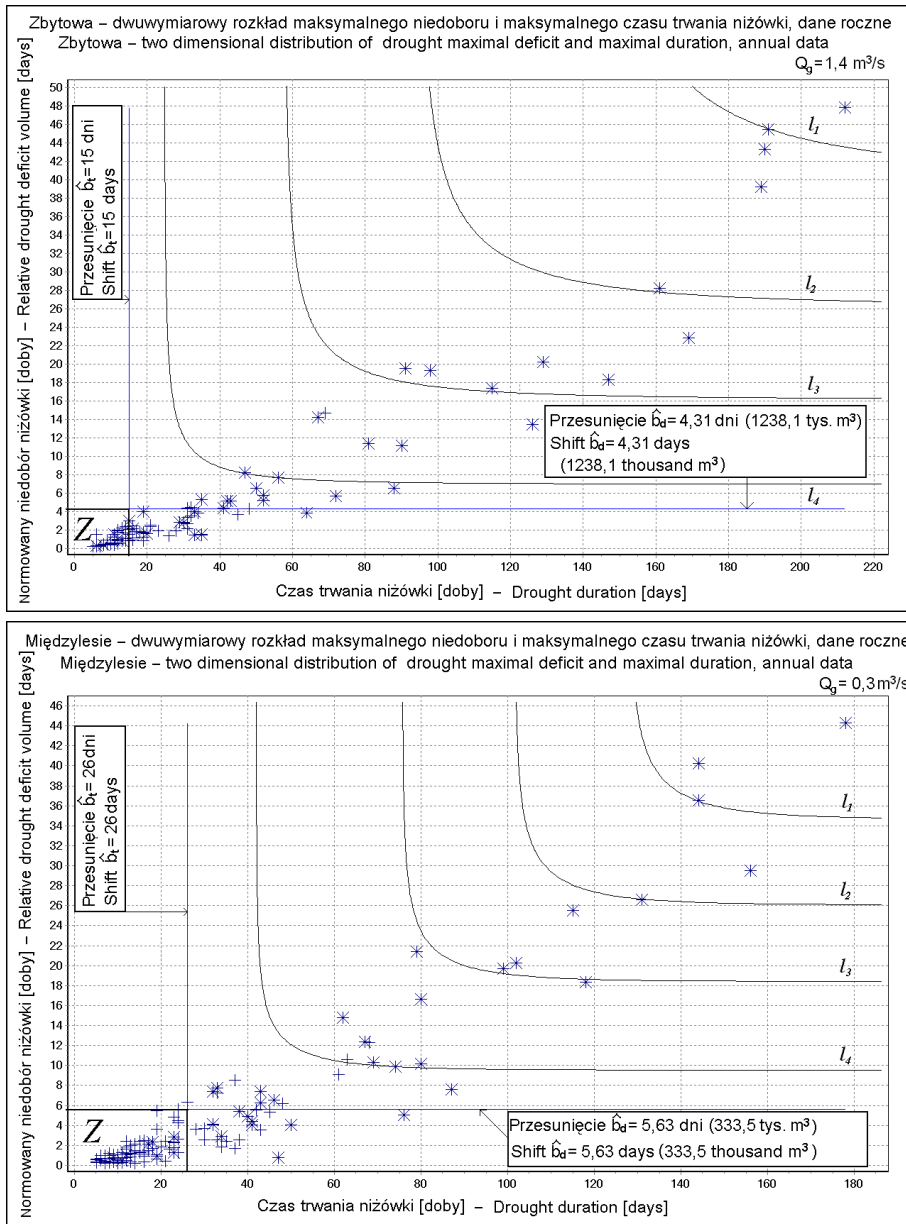
1. Prostopadłe do osi linie progów odcięcia  $\hat{b}_d, \hat{b}_t$ , zgodnie z definicją rozkładu BGPD (wzór 7.7, rys. 64), rozdzielają obszar zmienności niedoborów przepływów oraz czasów trwania na cztery części. Prostokąt  $Z$  (rys. 65–66) zawiera niżówki nieuwzględniane w dalszej estymacji. Obserwacje leżące poza  $Z$ , ale mające jedną z charakterystyk mniejszą niż próg odcięcia są zrzutowane na odpowiednie linie progów, a w estymacji uwzględniane są ich niezrzutowane charakterystyki.
2. Linie prawdopodobieństwa nieprzewyższenia  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Każdy punkt  $\mathbf{P}_i \in l_i$  wyznacza prostokąt  $P_{d,t}$  o wierzchołkach  $\mathbf{O}(0, 0)$ ,  $\mathbf{A}(d, 0)$ ,  $\mathbf{B}(0, t)$ ,  $\mathbf{P}_i(d, t)$  i bokach równoległych do osi układu współrzędnych taki, że:

$$\Pr((D_M, T_M) \in P_{d,t}) = \int_0^d \int_0^t h(c, s) dc ds = p_i \quad (7.16)$$

gdzie  $p_1 = 0,95$ ,  $p_2 = 0,90$ ,  $p_3 = 0,80$ ,  $p_4 = 0,50$  (linie  $l_i$  odpowiadają linii  $l_1$  z rysunków 39–44, a prostokąt  $P_{d,t}$  jest definiowany identycznie jak w 6.3).

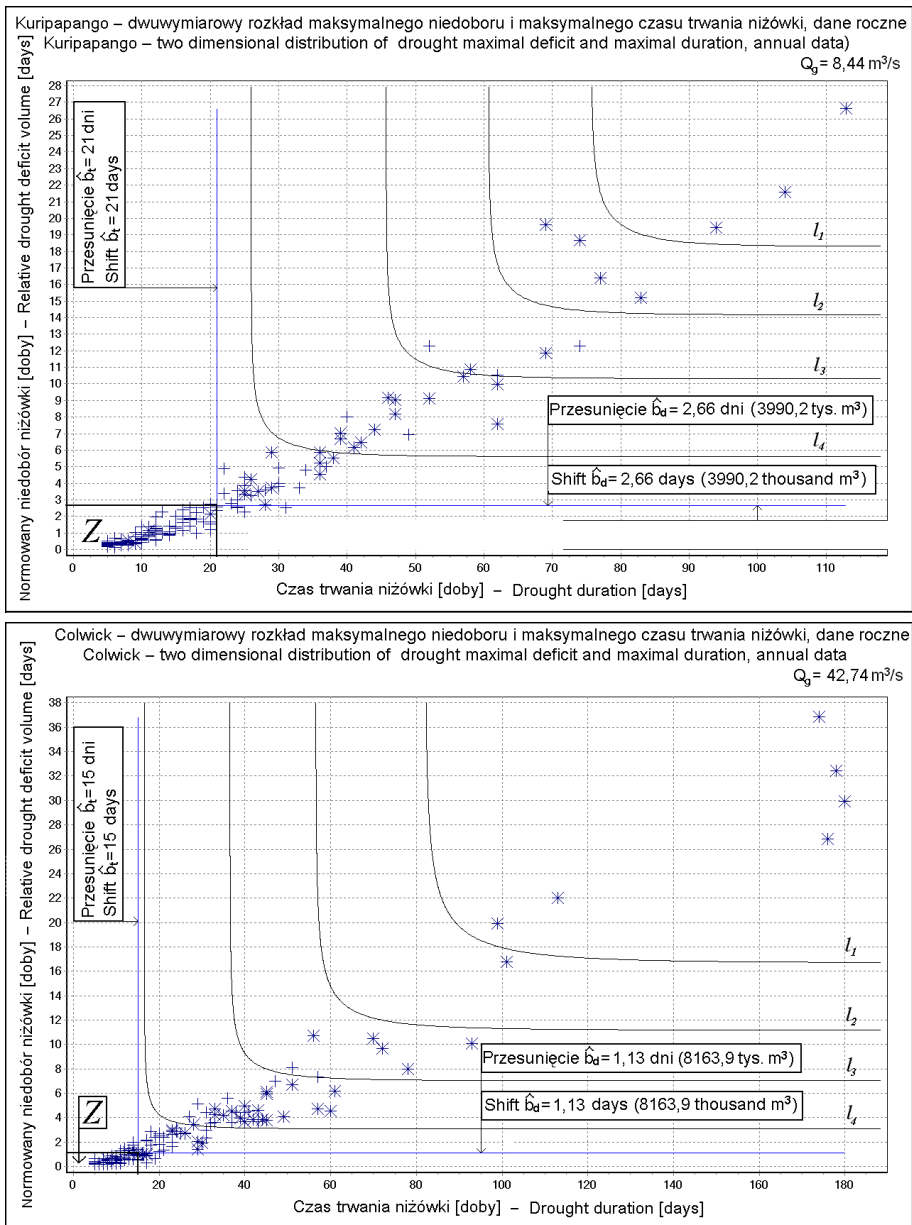
Tak jak w rozdziale 6, gwiazdkami zaznaczono niżówki maksymalne ze względu na niedobór przepływów lub czas ich trwania, krzyżykami pozostałe.





Rys. 65. Estymowane BGPD: roczne normowane niedobory przepływów i czasy trwania niżówki, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej oraz rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzlesiu

Fig. 65. The estimated BGPD of the annual low flow relative deficits and durations, Widawa River, profile Zbytowa and Nysa Kłodzka River profile Międzyzlesie



Rys. 66. Estymowane BGPD: roczne normowane niedobory przepływów i czasy trwania niżówki, rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango and rzeka Trent wodowskaz w Colwick

Fig. 66. The estimated BGPD of the annual low flow relative deficits and durations, Ngaruroro River, profile Kuripapango and Trent River, profile Colwick

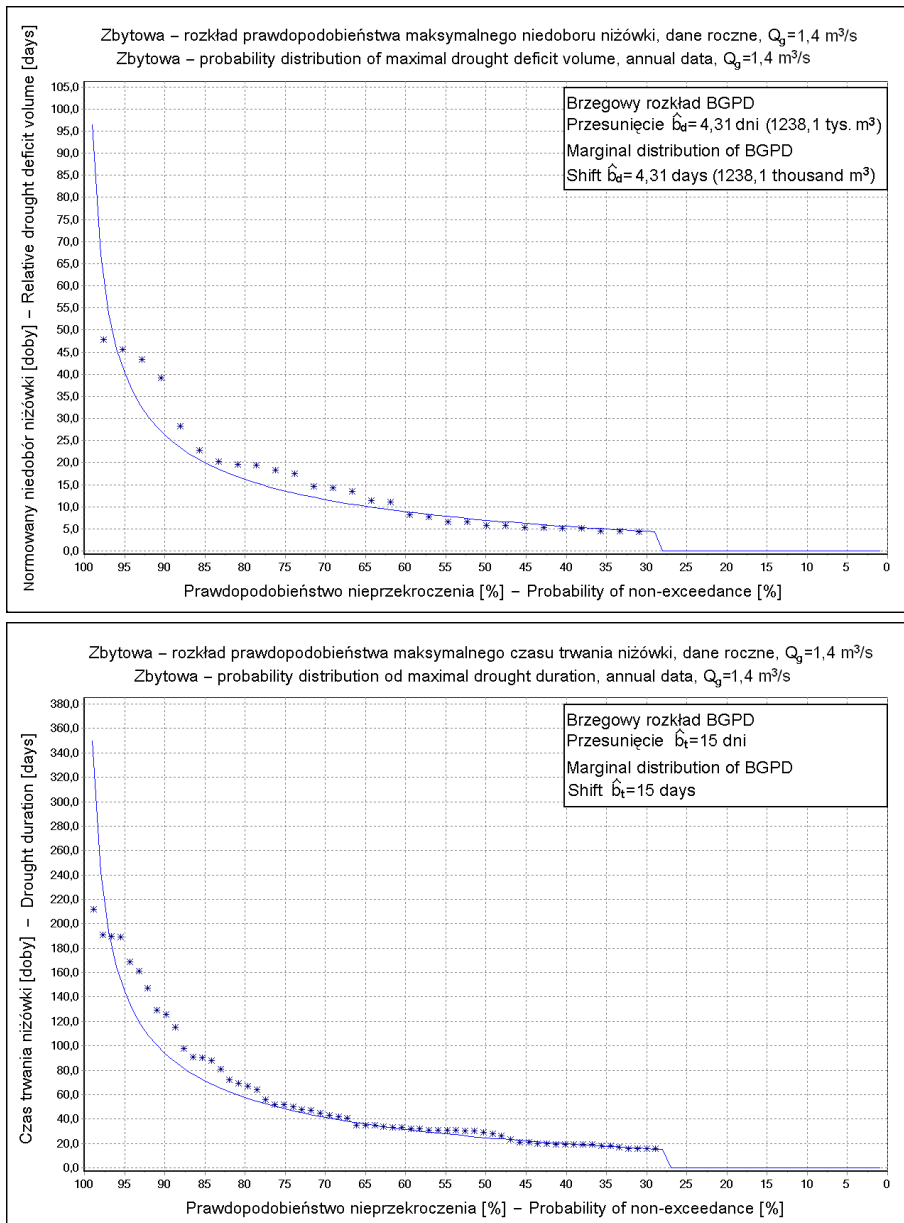
Analizując rysunki 65–66 można zauważyć, że pozostałe w najważniejszym, zdefiniowanym na rysunku 64 obszarze  $A$  obserwowane niżówki o najwyższych normowanych niedoborach przepływów i czasach trwania, układają się wzdłuż linii prostej. Najlepiej jest to widoczne w profilu Kuripapango. Wodowskaz ten leży w dolinie rzeki Ngaruroro w całkowicie zalesionym, naturalnym, nieskażonym gospodarką człowieka rejonie Nowej Zelandii [Tallaksen i van Lanen 2004, Clausen i Pearson 1997]. Ze wszystkich danych dostępnych w Global Data Set [Servat i Demuth 2006] profili wodowskazowych, dane z tej zlewni są najlepiej dopasowane do rozkładów teoretycznych. Wysoki współczynnik korelacji (tab. 29), wyznaczony podczas estymacji rozkładu BGPD, potwierdza przebieg linii  $l_i, i = 1, \dots, 4$  – kształt ich jest zbliżony do kąta prostego. Najtrudniejsze do estymacji są rozproszone normowane niedobory przepływów i czasy trwania w Zbytowej. Współczynnik korelacji jest rzędu 0,85, a przebieg linii  $l_i$  znacznie odbiega od kąta prostego – szczególnie widoczne jest to przy linii  $l_1$ . Taki kształt nie świadczy o złym dopasowaniu rozkładu teoretycznego, jedynie o zwiększonej wariancji, a zatem o większym błędzie, jaki może być popełniony podczas wyznaczania wysokich kwantyli przewyższenia.

Rozkład BGPD (7.6) estymowany był w celu wyznaczenia rozkładów brzegowych (7.11), maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania. Rysunki 67–70 pokazują ich dopasowanie do obserwowanych badanych charakterystyk niżówki. Dobroć dopasowania sprawdzono testem  $\lambda$  Kołmogorowa. Obliczone wartości testu przedstawione są w tabeli 30. Na poziomie istotności  $\alpha_{kryt} = 0,1$  nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności żadnej z badanych charakterystyk.

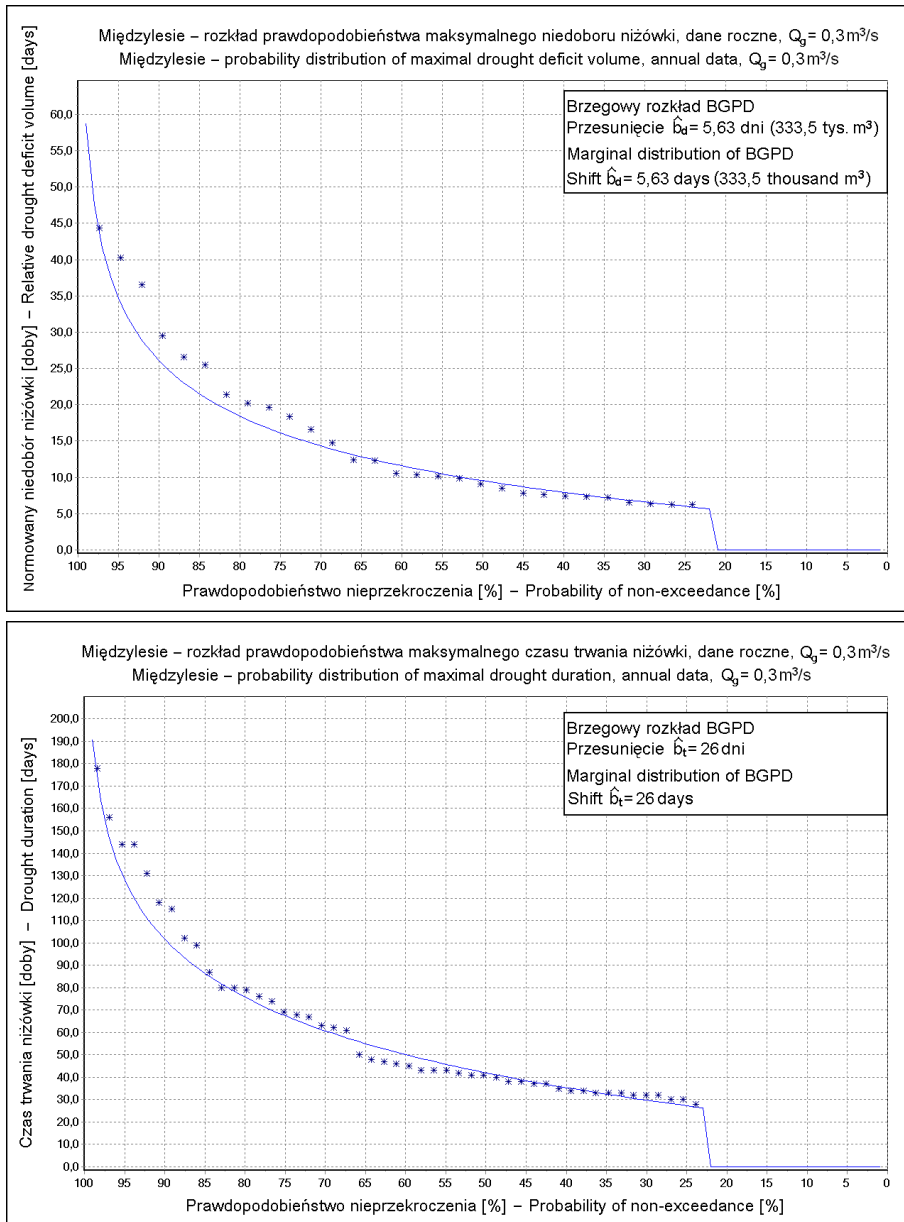
Tabela 30. Test zgodności  $\lambda$  Kołmogorowa rozkładów brzegowych uogólnionego rozkładu Pareto (BGPD) z obserwowanymi normowanymi niedoborami przepływów i czasami trwania niżówki

Table 30. The  $\lambda$  Kolmogorov goodness-of-fit test of the marginal BGPD distributions to the observed low flow relative deficits and durations

Wodowskaz Profile	Wartości testu $\lambda$ Kołmogorowa $\lambda$ Kolmogorov test values	
	Normowany niedobór Relative deficit	Czas trwania Duration
Zbytowa	0,4627	0,5331
Międzylesie	0,3323	0,4704
Kuripapango	0,3658	0,2915
Colwick	0,6075	0,4440

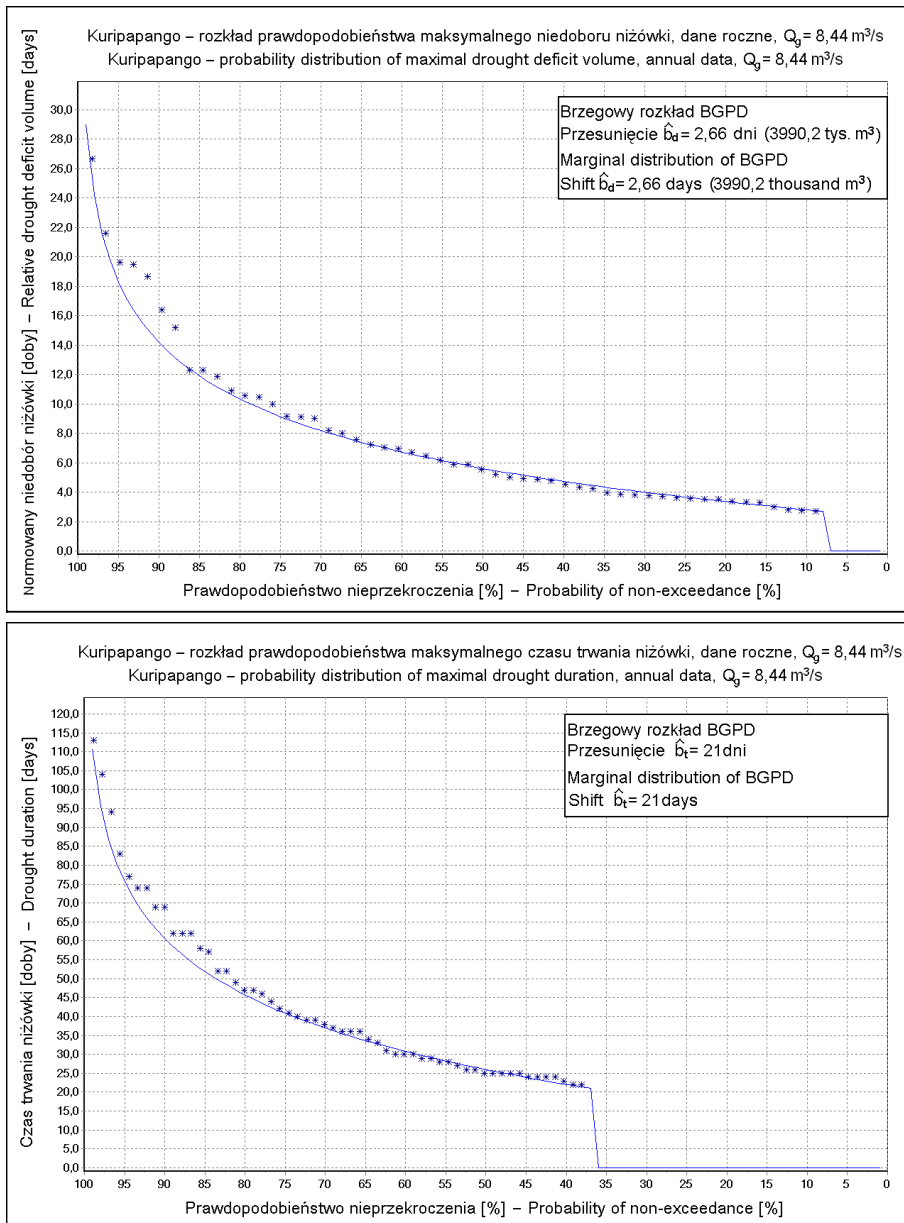


Rys. 67. Estymowane brzegowe rozkłady rocznych maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej  
 Fig. 67. Estimated marginal distributions of the annual extreme low flow relative deficits and durations, Widawa River, Zbytowa Profile



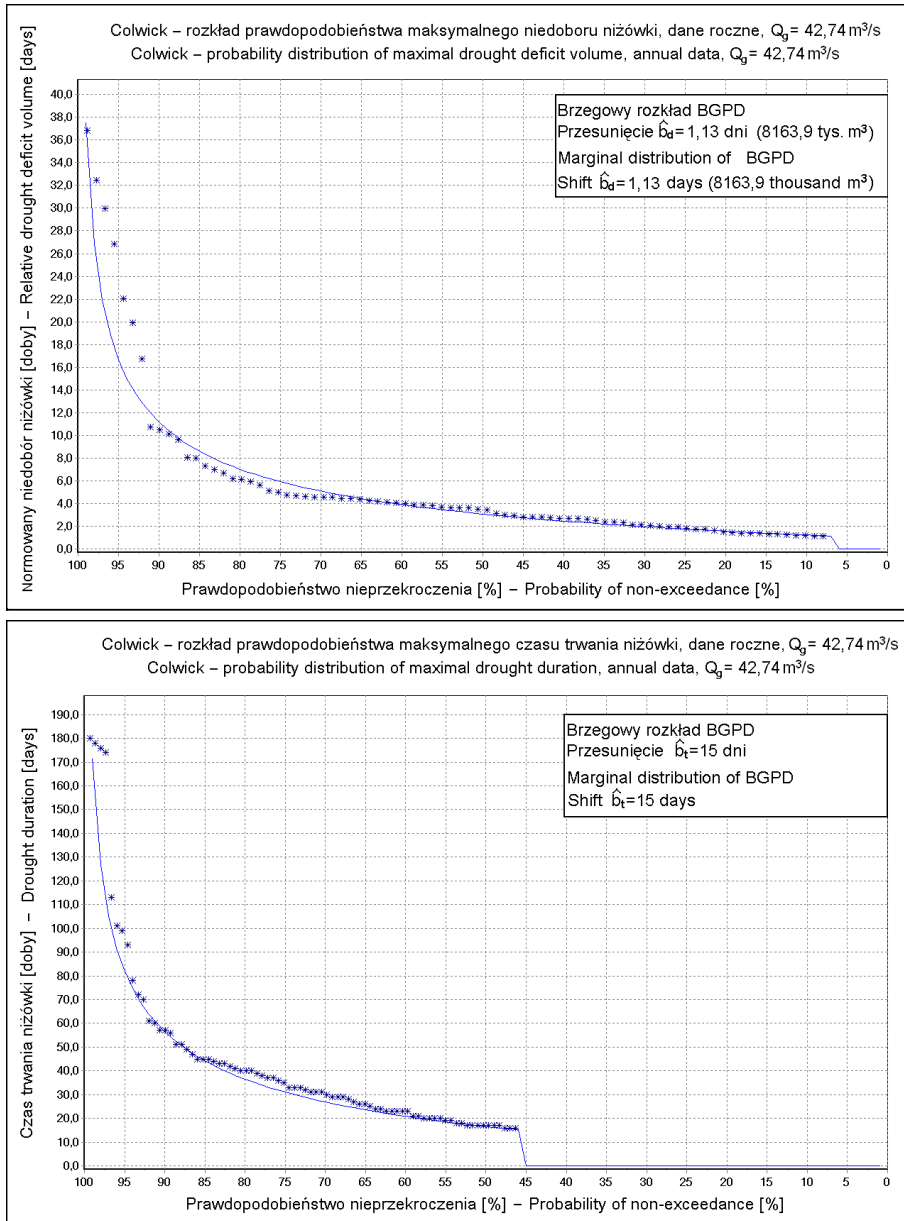
Rys. 68. Estymowane brzegowe rozkłady rocznych maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzyzylesiu

Fig. 68. Estimated marginal distributions of the annual extreme low flow relative deficits and durations, Nysa Kłodzka River, Międzyzylesie Profile



Rys. 69. Estymowane brzegowe rozkłady rocznych maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niszówki, rzeka Ngaruroro, wodowskaz w Kuripapango

Fig. 69. Estimated marginal distributions of the annual extreme low flow relative deficits and durations, Ngaruroro River, Kuripapango Profile



Rys. 70. Estymowane brzegowe rozkłady rocznych maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki, rzeka Trent, wodowskaz w Colwick  
 Fig. 70. Estimated marginal distributions of the annual extreme low flow relative deficits and durations, Trent River, Colwick Profile

Wyniki z tabeli 30 można porównać z obliczonymi wartościami otrzymanymi podczas estymacji jednowymiarowym uogólnionym rozkładem Pareto – tabela 18. W przypadku obu charakterystyk w Międzyzlesiu i w Kuripapango oraz czasu trwania w Colwick zastosowanie do estymacji rozkładów maksymalnych niedoborów przepływów i czasów trwania rozkładu BGPD wyraźnie poprawiło dobroć dopasowania. Obliczone wartości testu  $\lambda$  Kołmogorowa są znacząco niższe. Jedyne w przypadku charakterystyk niżówek obserwowanych w profilu wodowskazowym Zbytowa nie uzyskano poprawy – wysokie prawdopodobieństwa nieprzekroczenia wydają się być mocno przeszacowane. Przy 105 zaobserwowanych niżówkach estymowane 99% kwantyle nie mogą być dwukrotnie wyższe od największych zaobserwowanych charakterystyk. Podstawową przyczyną jest przenoszenie się na estymowane rozkłady pewnego rodzaju niestabilności obserwowanych niżówek. Niestabilności rozumianej jako duża wrażliwość (zmiennosc) estymowanych rozkładów na niewielką zmianę wysokości przepływu granicznego  $Q_g$ .

### 7.3. Wpływ przepływu granicznego na rozkład charakterystyk niżówek maksymalnych

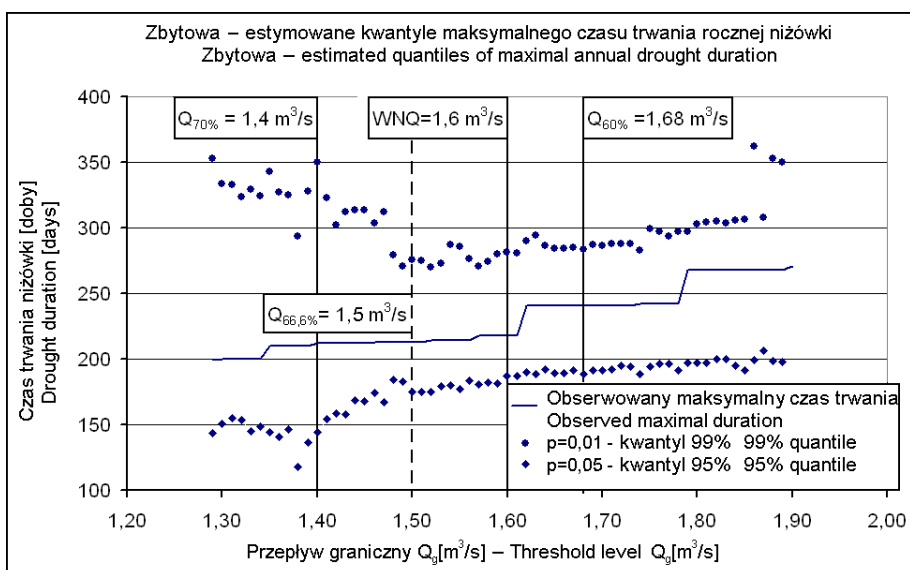
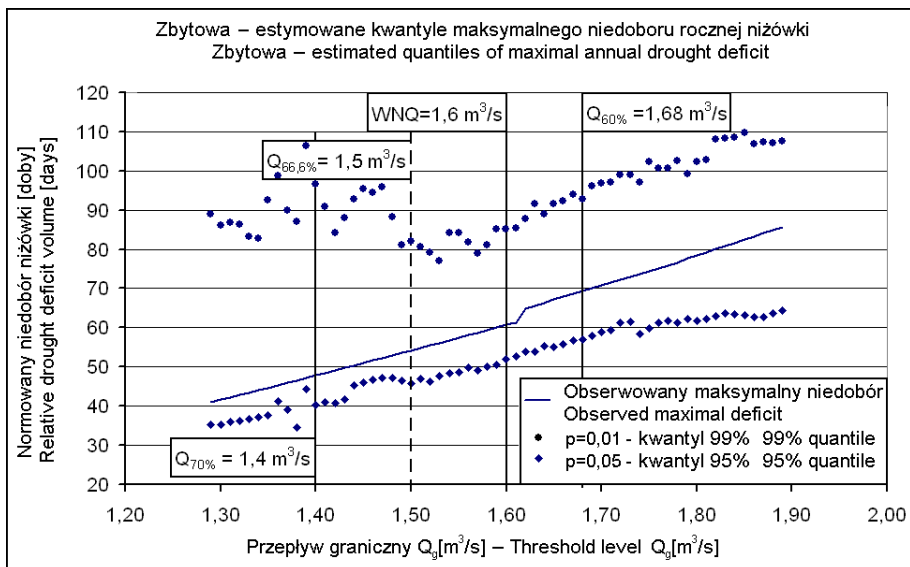
W trzech profilach wodowskazowych: Zbytowa (zlewnia nizinna), Międzyzlesie oraz Bystrzyca Kłodzka (zlewnia górską) sprawdzono wpływ przepływu granicznego  $Q_g$  na postać estymowanych rozkładów BGPD. Badano przepływy z lat 1966–2005. W eksperymencie zastosowano następujący algorytm. Uporządkowano wszystkie przepływy od najmniejszego do największego. Wyznaczono przepływy graniczne  $Q_{90\%}$  oraz  $Q_{50\%}$ . Kolejne uporządkowane wartości przepływów, począwszy od  $Q_{90\%}$ , a skończywszy na  $Q_{50\%}$  przyjęto jako kolejne przepływy graniczne  $Q_g$ .

Rysunki 71–73 przedstawiają wpływ przepływu granicznego na estymowane kwantyle wysokich prawdopodobieństw nieprzekroczenia. Na osi poziomej zaznaczono przepływ graniczny  $Q_g$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]. Na osi pionowej mamy albo unormowany niedobór przepływów – górne wykresy, albo czas trwania – dolne. Na tak przyjęty układ współrzędnych naniesiono:

- estymowane kwantyle prawdopodobieństw przekroczenia ( $p = 0,01$  – kółka;  $p = 0,05$  – romby);
- największe zaobserwowane charakterystyki (wyznaczone dla kolejnych przepływów granicznych  $Q_g$ ) w postaci linii ciągłej.

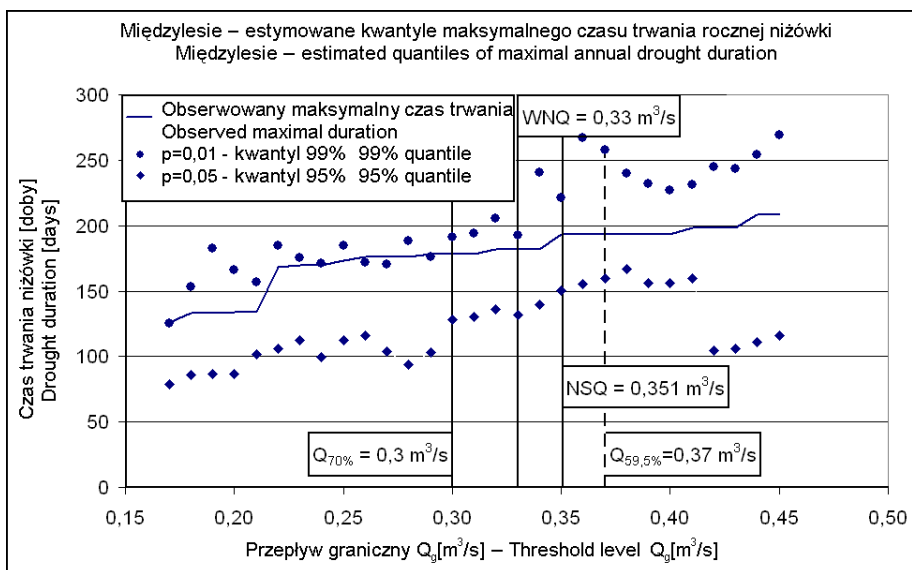
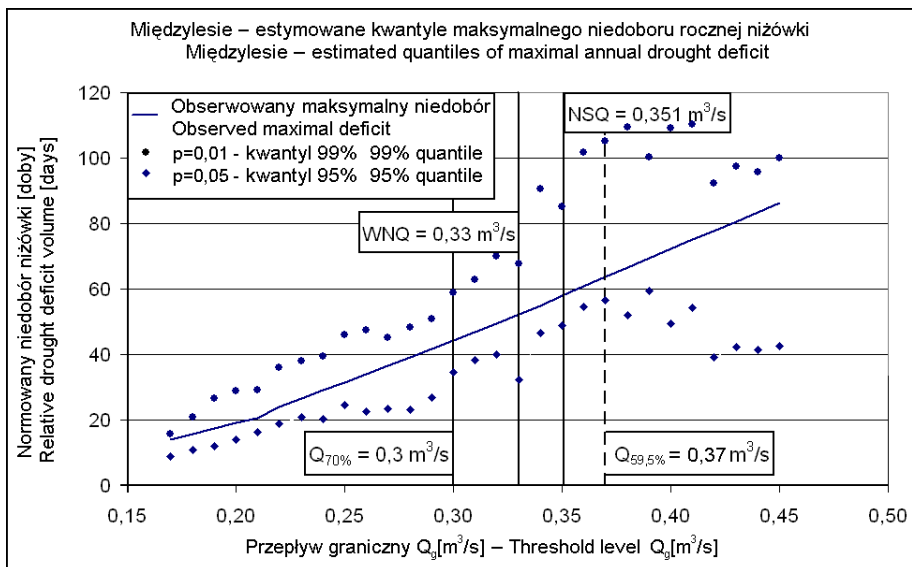
Zaznaczane są tylko te kwantyle, przy których nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności obserwowanych charakterystyk z estymowanymi rozkładami BGPD.



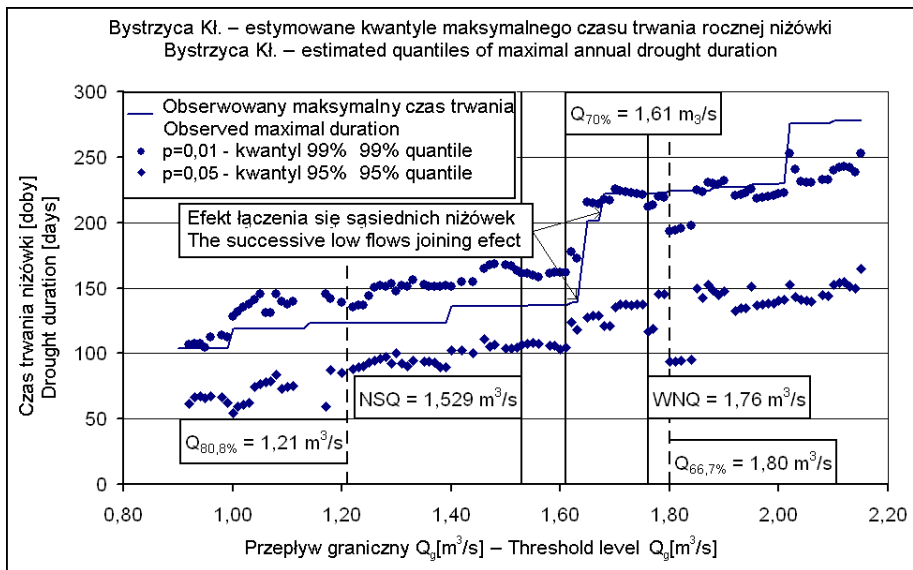
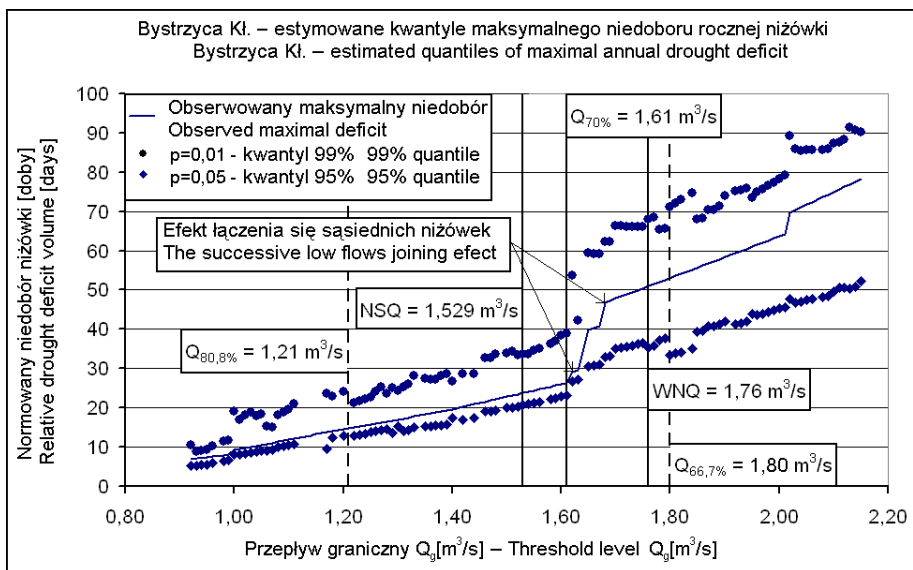


Rys. 71. Zależność pomiędzy przepływem granicznym  $Q_g$  a estymowanymi kwantylami rocznych charakterystyk maksymalnych, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Fig. 71. The dependency between threshold level  $Q_g$  and estimated quantiles of annual maximal characteristics, Widawa River, Zbytowa Profile



Rys. 72. Zależność pomiędzy przepływem granicznym  $Q_g$  a estymowanymi kwantylami rocznych charakterystyk maksymalnych, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Międzylesiu  
Fig. 72. The dependency between threshold level  $Q_g$  and estimated quantiles of annual maximal characteristics, Nysa Kłodzka River, Międzylesie Profile



Rys. 73. Zależność pomiędzy przepływem granicznym  $Q_g$  a estymowanymi kwantylami rocznych charakterystyk maksymalnych, rzeka Nysa Kłodzka, wodowskaz w Bystrzycy Kłodzkiej

Fig. 73. The dependency between threshold level  $Q_g$  and estimated quantiles of annual maximal characteristics, Nysa Kłodzka River, Bystrzyca Kłodzka Profile

Na rysunkach 71–73 zaznaczono także charakterystyczne przepływy roczne z lat 1966–2005 w postaci WNQ oraz NSQ (dla Zbytowej tylko WNQ). Odpowiadają one najwyższemu przepływowi minimalnemu oraz najniższemu przepływowi średniemu. Charakterystyki te nie wykraczają poza zakres zmienności rozważanego przepływu granicznego  $Q_g$ . Oznacza to, że wybór charakterystyki głównej WNQ jako przepływu granicznego  $Q_g$  [Ozga-Zielińska i Brzeziński 1997] ma również statystyczne uzasadnienie.

Z powodu dużych różnic pomiędzy wynikami w omawianych przekrojach wodowskazowych każdy z nich jest komentowany oddzielnie.

1. Wodowskaz Zbytowa – na obu rysunkach 71 przepływ graniczny ( $Q_{66,6\%} = 1,5 \text{ m}^3/\text{s}$ ), zaznaczono przerywaną pionową linią. Rozdziela on estymatory kwantyli na dwie części. Po lewej stronie otrzymane wyniki cechuje wysoka zmienność, mocno widoczna dla prawdopodobieństwa przekroczenia  $p = 0,01$ . Efekt ten można nazwać niestabilnością estymowanych rozkładów, która zdaniem autora jest cechą zlewni, obserwowanych przepływów, a nie własnością zastosowanego modelu. W pewnej mierze jest ona wynikiem zbudowanych powyżej wodowskazu w Zbytowej w latach 2000–2001 dwóch niewielkich zbiorników (Michalice i Stradomia) o powierzchni odpowiednio  $0,90$  i  $0,35 \text{ km}^2$ . Niestety po lewej stronie linii  $Q_{66,6\%}$  leży także badany w poprzednich rozdziałach przepływ graniczny  $Q_{70\%}$ . Ta niestabilność tłumaczy gorsze dopasowanie otrzymanych w rozdziale 7.2 rozkładów brzegowych. Można ją częściowo ograniczyć, na przykład zwiększając czas pomiędzy sąsiadującymi niżówkami do 14–15 dni [Zielińska 1963, 1964] lub podnosząc wysokość przepływu granicznego  $Q_g$ .

Na rysunkach 74–75 przedstawiono rozkłady brzegowe charakterystyk maksymalnych dla przepływu granicznego:

- $Q_{60\%}$  (rys. 74),
- $Q_{70\%}$  i parametrze rozdzielającym sąsiadujące niżówki równym 14 dni (rys. 75).

W przypadku wysokich prawdopodobieństw nieprzekroczenia widać znaczące obniżanie się krzywych rozkładu (w stosunku do przepływu granicznego  $Q_{70\%}$  – rys. 67), mimo że w przypadku  $Q_{60\%}$  podniesiony poziom odcięcia zwiększa zarówno czas trwania, jak i normowany niedobór przepływów niżówki. W tabeli 31 przedstawiono obliczone wartości testu  $\lambda$  Kolmogorowa oraz estymowane współczynniki korelacji  $\hat{\rho}$ . Szczególnie zwiększenie się  $\hat{\rho}$  sugeruje poprawę dopasowania.

2. Wodowskaz Międzyzylesie – przerywana linia przepływu granicznego  $Q_{59,5\%} = 0,37 \text{ m}^3/\text{s}$  (rys. 72) dzieli wykres na dwie części. Tym razem obszar niestabilności leży po jej prawej stronie i wydaje się być naturalnym progiem przepływu granicznego, powyżej którego przepływ nie jest już niżówkowy. Pewną niestabilność można zanotować przy przepływie granicznym  $Q_{63\%} = 0,33 \text{ m}^3/\text{s}$ . Prawdopodobnie jest ona efektem małej dokładności wyznaczania przepływu na podstawie notowanych stanów wody (ponad 3% wszystkich przepływów z 40-lecia wynosi  $0,32 \text{ m}^3/\text{s}$ , podczas gdy inne przepływy rzędu  $0,3 \text{ m}^3/\text{s}$  pojawiają się z częstotliwością wahającą się w granicach 1%).

3. Wodowskaz Bystrzyca Kłodzka – widoczne są dwa poziomy przepływy granicznych  $Q_{80,8\%} = 1,21 \text{ m}^3/\text{s}$  oraz  $Q_{66,7\%} = 1,76 \text{ m}^3/\text{s}$ . Na lewo od przerywanej linii  $Q_{80,8\%}$  występują trudności z dopasowaniem rozkładu, na prawo od  $Q_{66,7\%}$  obserwowana jest pewna niestabilność estymowanych prawdopodobieństw nieprzewyższenia. Pomiędzy obydwoma poziomami widoczne jest kilka szybkich wzrostów maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania. Związane są one z łączeniem się dużych niżówek. Efekt łączenia się niżówek wpływa na niestabilność rozkładów ekstremalnych – odzwierciedla się on wzrostem obu kwantyli. W przypadku kwantyla odpowiadającego prawdopodobieństwu nieprzekroczenia  $p = 0,01$  można nawet mówić o skoku wartości. Z punktu widzenia oceny zagrożenia suszą zjawisko szybkiego wzrostu kwantyla odpowiadającego prawdopodobieństwu  $p = 0,01$  jest wysoce niepożądane. Niestety związane jest ono z definicją samej niżówki. Trzeba tu także dodać, że zastosowanie definicji 3.2 – Algorytmu Kolejnych Szczytów SPA nie poprawia szybkiej zmienności kwantyli. Porównując, na rysunkach 76 przedstawiono estymatory obu kwantyli dla maksymalnych charakterystyk w Bystrzyce Kłodzkiej, obliczanych dla niżówek otrzymanych zgodnie z definicją 3.2.

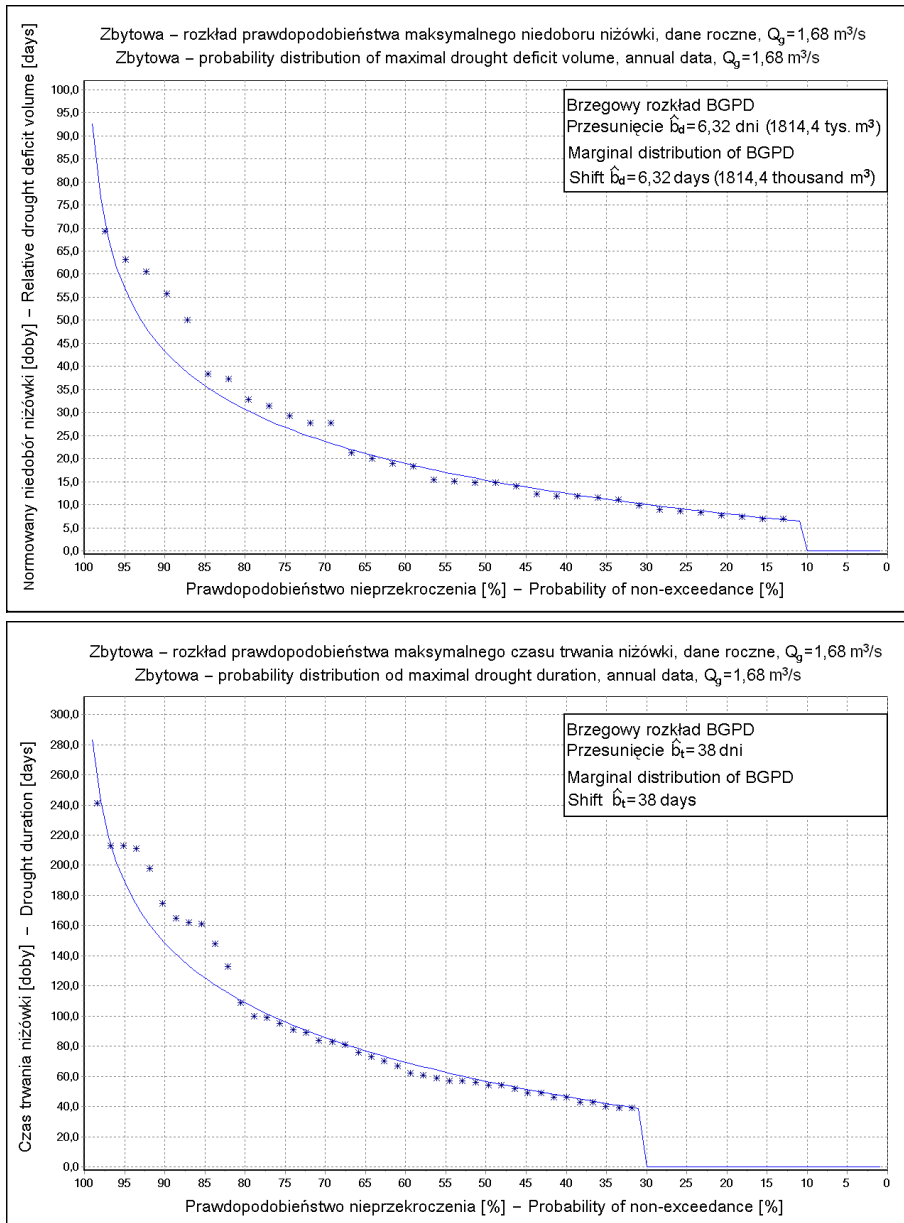
Tabela 31. Test  $\lambda$  Kołmogorowa oraz estymowane współczynniki korelacji, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej

Table 31. The  $\lambda$  Kolmogorov test and estimated correlation coefficients, Widawa River, Zbytowa Profile

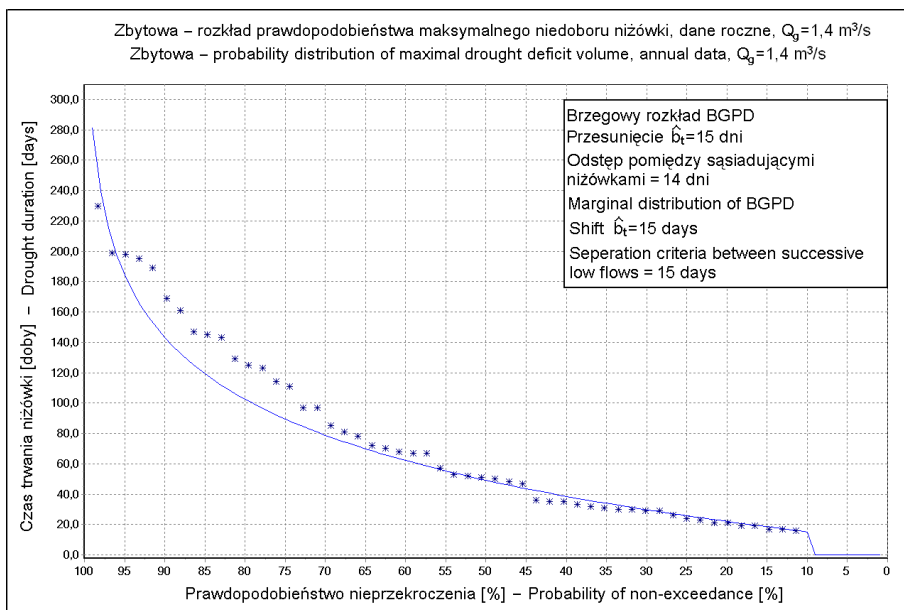
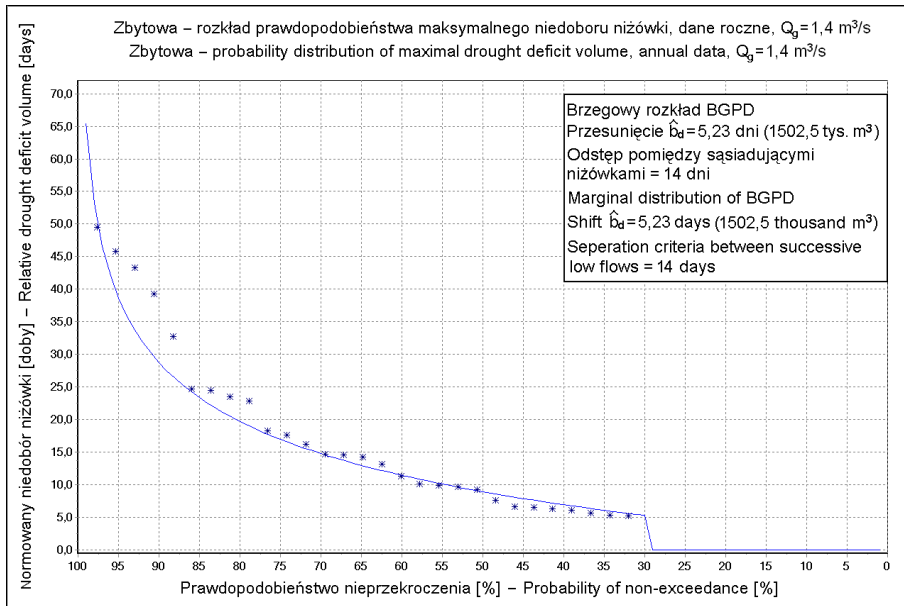
Przepływ graniczny $Q_g$ Threshold level $Q_g$	Kryterium rozdzielania Separation criterion	Wartości testu $\lambda$ $\lambda$ test values		Współczynnik korelacji Correlation coefficient
		Normowany niedobór Relative deficit	Czas trwania Duration	
$Q_{70\%}$	3	0,4627	0,5331	0,8419
$Q_{60\%}$	3	0,4097	0,4296	0,9330
$Q_{70\%}$	14	0,4286	0,6012	0,9285

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że zastosowany uogólniony dwuwymiarowy rozkład Pareto dobrze dopasowuje się do obserwowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki. Przeprowadzone obliczenia na dużym materiale danych pozwoliły na statystyczne udokumentowanie podziału na dwie klasy:

- niżówki głębokie – długie, o czasie trwania przekraczającym dwadzieścia kilka dni;
- niżówki płytkie – krótkie, trwające do dwudziestu kilku dni.

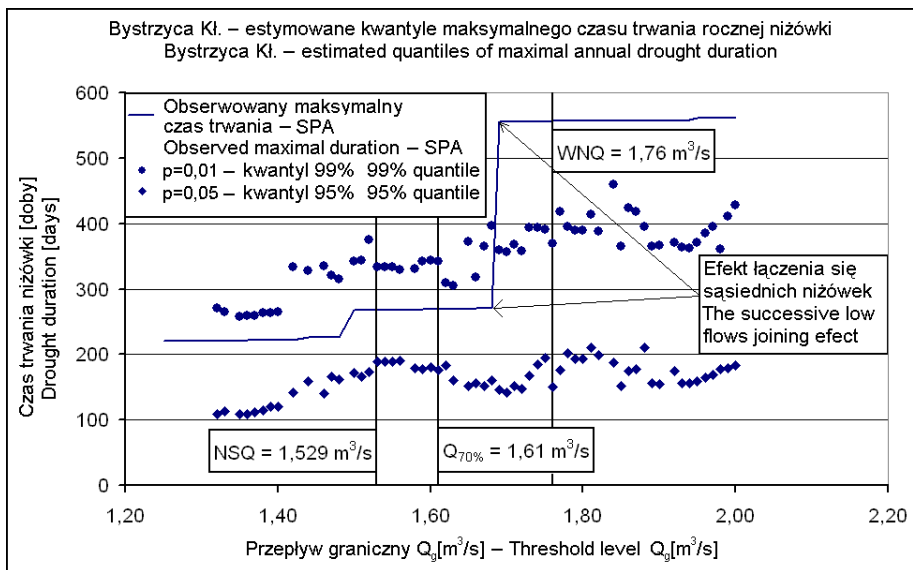
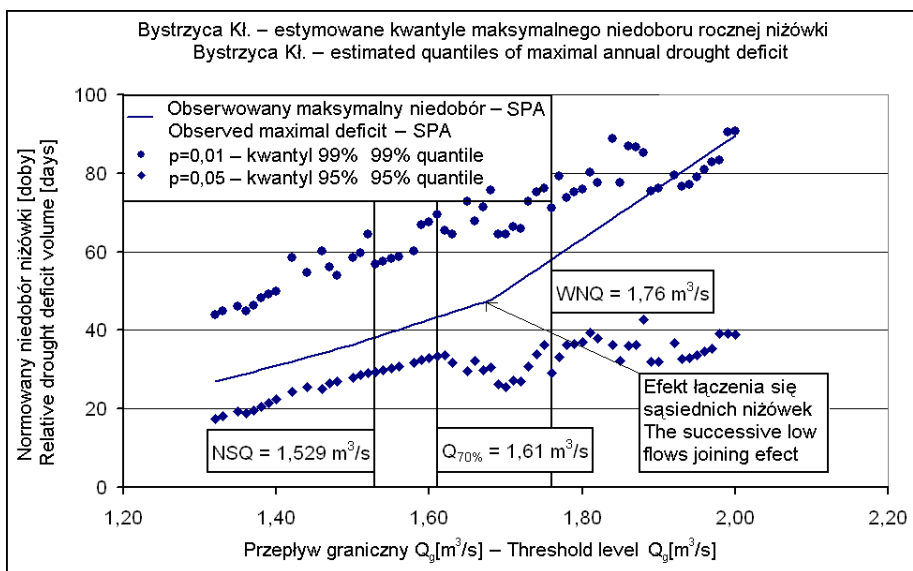


Rys. 74. Estymowane brzegowe rozkłady rocznych maksymalnych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej,  $Q_g = Q_{60\%}$   
 Fig. 74. Estimated marginal distributions of the annual extreme low flows deficits and durations, Widawa River, Zbytowa Profile  $Q_g = Q_{60\%}$



Rys. 75. Estymowane brzegowe rozkłady rocznych maksymalnych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki, rzeka Widawa, wodowskaz w Zbytowej,  $Q_g = Q_{70\%}$ , czas pomiędzy sąsiadującymi niżówkami – 14 dni

Fig. 75. Estimated marginal distributions of the annual extreme low flows deficits and durations, Widawa River, Zbytowa Profile,  $Q_g = Q_{70\%}$ , separation criteria is set at 14 days



Rys. 76. Zależność pomiędzy przepływem granicznym  $Q_g$  a estymowanymi kwantylami rocznych charakterystyk maksymalnych (SPA), rzeka Nysa Kłodzka, wodowszkaż w Bystrzycy Kłodzkiej

Fig. 76. The dependency between threshold level  $Q_g$  and estimated quantiles of annual maximal characteristics (SPA), Nysa Kłodzka River, Bystrzyca Kłodzka Profile



Rozdziału niżówek nie da się stosować automatycznie. Tak jak w przypadku dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego, każdy z opracowywanych wodowskazów winien być badany oddzielnie, uwzględniając miejscową zmienność warunków hydrologicznych.

Autor uważa, że przekształcanie się niżówek płytkich w głębokie generowane jest zarówno poprzez procesy meteorologiczne, hydrologiczne, jak i hydrogeologiczne. Oznacza to, że różne modele mogą prowadzić do wyznaczenia różnych progów rozdzielających oba podzbiory niżówek. Moment zakończenia szczywania dynamicznych zasobów wodnych opisuje krzywa zwaną krzywą recesji. O krzywych recesji, ich definicjach, zastosowaniach w analizie niżówek (suszy hydrologicznej) można przeczytać w wielu pracach [Vogel i Kroll 1996, Tallaksen 1995, Radczuk i Szarska 1989, Somorowska 2004, 2006].

## 8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Celem pracy było opracowanie metodyki wyznaczania rozkładów oraz rozkładów maksymalnych dwóch charakterystyk niżówek: normowanego niedoboru przepływów i czasu trwania. Po wprowadzeniu i przedstawieniu celu pracy w rozdziale 3. przedstawiono dwa sposoby definiowania niżówek (formuły 3.1–3.2): POT (Peak Over Threshold) oraz SPA (Sequence Peak Algorithm). Obie opierają się na analizie przepływów niższych od pewnego założonego przepływu granicznego  $Q_g$ . Na podstawie tych dwóch definicji w rozdziale 5. przedstawiono dwie metody estymacji jednowymiarowych rozkładów maksymalnych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki. Pierwszą jest model Zelenhasicia i Salvai (ZS), drugą – uogólniony rozkład Pareto (GPD). Opisane metody zastosowano do estymacji rozkładów charakterystyk maksymalnych niżówek wyznaczonych zgodnie z obydwoma definicjami. W podsumowaniu rozdziału 5. porównano otrzymane rozkłady oraz skomentowano nienajlepsze dopasowanie obu estymatorów kwantyli wyznaczanych przy założeniu wysokich prawdopodobieństw nieprzekroczenia.

Jednowymiarowe metody estymacji rozkładów charakterystyk maksymalnych zakładają, że każda z nich badana jest oddzielnie. W następnych dwóch rozdziałach to założenie zostało odrzucone. W rozdziale 6. rozważane były dwuwymiarowe rozkłady obu charakterystyk, a w rozdziale 7. – charakterystyk maksymalnych.

Do estymacji normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki zastosowano dwuwymiarowy rozkład log-normalny. Zauważona we wstępie rozdziału 6. niejednorodność obserwowanych niżówek ze względu na ich wielkość jest przyczyną częstego odrzucania hipotezy o zgodności rozkładu charakterystyk z rozkładem log-normalnym. Wobec tego dokonano heurystycznego podziału niżówek na dwa podzbiory:

- niżówki głębokie (długie) – mówiące o rozwoju suszy regionalnej;
- płytkie (krótkie) – mówiące o rozwoju suszy lokalnej.

Po odrzuceniu płytkich niżówek przeprowadzono ponowną estymację parametrów rozkładu. W większości badanych profili wodowskazowych nie było już podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności. W drugiej części rozdziału, przy założeniu log-normalności, estymowano rozkład intensywności niżówki. Przedstawiono przykłady zmienności rozkładu intensywności w czasie oraz w profilu podłużnym górnej Nysy Kłodzkiej.

W rozdziale 7. podano definicję rozkładu Pareto [Tajvidi 1996] – BGD oraz metodę estymacji nieznanego jego parametrów. Następnie zastosowano BGD do estymacji rozkładu charakterystyk maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówek w czterech testowych wodowskazach. Wyznaczone estymatory parametrów przesunięcia rozdzielają niżówki na głębokie (długie) – wpływające na rozkłady charakterystyk maksymalnych oraz pozostałe. Badano także wpływ wyboru poziomu odcięcia  $Q_g$  na rozkład charakterystyk maksymalnych. Pozwoliło to na określenie przedziałów przepływów granicznych, w których estymowane rozkłady są niestabilne.

W całej pracy rozważany niedobór przepływów jest uwzględniany w swojej unormowanej postaci. Normą jest średni dobowy przepływ z wielolecia – traktowany jako wielkość stała, charakteryzująca zlewnię zamkniętą danym profilem wodowskazowym. Oznacza to, że wszystkie wyznaczone własności normowanego niedoboru przepływów przenoszą się na jego nienormowane wartości.

Niniejsza praca ma w dużej części charakter metodologiczny, a przedstawiane przykłady mają pokazywać sposób stosowania proponowanych metod.

## Wnioski końcowe

1. Stosowane w hydrologii klasyczne metody jednowymiarowe wykazują nie zawsze dobre dopasowanie proponowanych modeli do obserwowanych maksymalnych charakterystyk niżówki. Szczególnie wyraźnie widać je, gdy rozważana jest estymacja kwantyli o wysokim prawdopodobieństwie nieprzekroczenia. Metoda Zelenhasicia i Salvai [1987] przeszacowuje estymatory tych kwantyli, a jednowymiarowy uogólniony rozkład Pareto ich nie doszacowuje.
2. Zastosowanie dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego do estymacji niedoboru przepływów i czasu trwania wykazało, że wraz ze wzrostem czasu trwania nierównomiernie zmienia się niedobór przepływów niżówki. Zależność niedobór przepływów niżówki – czas jej trwania staje się bliska liniowej, dopiero gdy czas trwania niżówki przekroczy dwadzieścia kilka dni. Dlatego obserwowane niżówki należy rozdzielić na dwie klasy:
  - niżówki głębokie (długie) – trwające dwadzieścia kilka dni i więcej;
  - niżówki płytkie (krótkie) – do dwudziestu kilku dni.Odrzucenie z zestawu danych płytkich niżówek znacznie poprawia dobroć dopasowania badanych rozkładów do obserwowanych charakterystyk niżówki.
3. Nieodrzućenie hipotezy o zgodności charakterystyk głębokich niżówek z dwuwymiarowym rozkładem log-normalnym prowadzi do rozważenia rozkładu ich normowanej intensywności. Charakterystyka ta jest również estymowana rozkładem log-normalnym o mocno obniżonym współczynniku zmienności w stosunku do współczynników zmienności obu charakterystyk – normowanego niedoboru przepływów niżówki oraz jej czasu trwania. Dlatego też normowana intensywność niżówki może być stosowana do testowania zmienności przepływów niżówkowych w czasie, jak i wzdłuż cieku.
4. Przeprowadzone obliczenia wykazały, że w ciekach górskich o mocno zróżnicowanej hydrogeologii zlewni badanie zjawiska suszy hydrologicznej musi odbywać się tylko w pomierzonych profilach. Nie można niestety przenosić otrzymanych miar charakterystyk na inne niekontrolowane zlewnie, nawet kiedy wydawałoby się, że porównywana zlewnia ma bardzo podobne własności.
5. Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Pareto (BGPD) dobrze estymuje łączny rozkład maksymalnych normowanych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki. Estymowane parametry przesunięcia  $\hat{b}_d$ ,  $\hat{b}_t$  rozdzielają niżówki na dwa podzbiory: głębokie i płytkie. Podział wynika z maksymalizacji estymowanego współczynnika korelacji pomiędzy niedoborem przepływów a czasem trwania

- głębokich niżówek. W ten sposób został przedstawiony algorytm rozdzielający niżówki na dwa podzbiory niżówek głębokich i płytkich.
- Rozkłady brzegowe rozkładu BGPD poprawnie estymują rozkłady maksymalnych niedoborów przepływów i czasów trwania niżówki.
6. W pracy stwierdzono, że rozkłady charakterystyk maksymalnych, w pewnych zakresach zmienności przepływu granicznego  $Q_g$ , są niestabilne. Niestabilność ta nie wynika z proponowanych modeli, jest cechą zlewni.  
W hydrologii przepływ graniczny wyznacza się na podstawie kryterium hydrologicznego lub kryterium gospodarczego. Oba kryteria nie mają uzasadnienia statystycznego. Przy niekorzystnym wyborze  $Q_g$  jego niewielka zmiana może spowodować na przykład połączenie dwóch dużych niżówek w jedną, mocno zmieniając największe obserwowane niedobory przepływów i czasy trwania. Aby rozpoznać tę niestabilność, należy estymację badanego rozkładu przeprowadzać również dla zaburzonych wartości  $Q_g$  oraz zmienionych parametrów uściślających niżówkę.
  7. W przypadku niżówek maksymalnych należy zrezygnować z podziału na niżówki letnie i zimowe na korzyść niżówek rocznych. W polskich warunkach znacząca większość głębokich, trwających ponad 100 dni niżówek rozpoczyna się w maju, czerwcu lub lipcu. Pominięcie sezonowości pozwala na uniknięcie problemu długich, znacznie wykraczających poza sezon niżówek.
  8. Wynikający z zastosowania dwuwymiarowych rozkładów: log-normalnego i uogólnionego Pareto podział niżówek na głębokie i płytkie mówi o ich statystycznej niejednorodności. Przyszłe badania powinny poszukiwać zależności pomiędzy głębokimi niżówkami a krzywymi recesji, opisującymi dynamiczny proces szczyptywania wód podziemnych.

## PIŚMIENNICTWO

- Akaike H., 1974. A new look at statistical model identification. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-19(16), 716–722.
- Bac S., Rojek M., 1999. *Meteorologia i klimatologia w inżynierii środowiska*. AR Wrocław.
- Bartoszewicz J., 1989. *Wykłady ze statystyki matematycznej*. PWN Warszawa.
- Biba M., Jakubowski W., Jařabáč M., Oceánská Z., Vícha Z., 2007. The evaluation of low flow discharges in two experimental watersheds in the Beskydy Mts. by Lowfestim model. *Beskydy* 20, 33–40.
- Birkel C., Demuth S., 2006. Drought in Costa Rica: temporal and spatial behaviour, trends and the relationship to atmospheric circulation patterns. *IAHS Publ.* 308, 338–343.
- Bjorck A., Dahlquist G., 1987. *Metody numeryczne*. PWN Warszawa.
- Bocheńska T., 2002. Wybrane problemy hydrogeologii regionalnej Dolnego Śląska. *Biuletyn PIG* 400.
- Bonacci O., 1993. Hydrological identification of drought. *Hydrological Processes* 7(3), 249–262.
- Brzeziński J., 2007. Wybór modelu probabilistycznego przepływów maksymalnych rocznych i propozycja metody ich estymacji. PhD thesis, Politechnika Warszawska.
- Chełmicki W., Bienkowski T., 2004. Przepływy niżówkowe w dorzeczu górnego Dunajca w 2003 roku na tle wielolecia 1951-2003. *Folia Geographica, series Geographica - Physica XXXV-XXXVI*, 65–75.
- Clausen B., P. Pearson C., 1995. Regional frequency analysis of annual maximum streamflow drought. *J. Hydrol.* 173, 111–130.
- Clausen B., P. Pearson C., 1997. How extreme was the drought? *Nordic Hydrology* 28(4/5), 297–306.
- Coles S., 2001. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer - Verlag London Limited.
- Drabiński A., edytor, 2006. Program małej retencji wodnej w województwie dolnośląskim. *Sejmik Województwa Dolnośląskiego*.
- Dracup J. A., 1980. On the definition on droughts. *Water Resour. Res.* 16(2), 297–302.
- Dubicki A., 2002. Zasoby wodne w dorzeczu górnej i środkowej Odry w warunkach suszy. *IMGW Warszawa, seria Atlasy i Monografie*.
- Dębski K., 1970. *Hydrologia*. ARKADY, Warszawa.
- Efron B., Tibshirani R.J., 1993 *An introduction to the bootstrap*. Chapman and Hall.
- Engeland K., Hisdal H., Frigessi A., 2004. Practical extreme value modelling of hydrological floods and droughts: A case study. *Extremes* 7, 5–30.
- Fabiszewski J., edytor, 2005. *Przyroda Dolnego Śląska*. Polska Akademia Nauk

- Oddział we Wrocławiu.
- Fal B., 2004. Czy niżówki ostatnich lat są zjawiskiem wyjątkowym? *Gazeta Obserwatora IMGW* 2004(3), 16–18.
- Feller W., 1969. *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. PWN Warszawa.
- Fisz M., 1967. *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. PWN Warszawa.
- Fleig A., 2004. Hydrological Drought – A comparative study using daily discharge series from around the world. PhD thesis, Institute fur Hydrologie, der Albert–Ludwigs–Universitat Freiburg.
- Fleig A., Tallaksen L. M., Hisdal H., Demuth S., 2006. A global evaluation of streamflow drought characteristics. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 10, 535–552.
- Girguś R., Strupczewski W., 1965. Wyjątki ze źródeł historycznych o nadzwyczajnych zjawiskach hydrologiczno – meteorologicznych na ziemiach polskich w wiekach od X do XVI. WKiŁ PIHM, Warszawa.
- Greń J., 1987. *Statystyka matematyczna*. PWN Warszawa.
- Heim R., 2002. A review of 20th century drought indices used in the United States. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 83, 1149–1165.
- Hisdal H., Tallaksen L. M., Frigessi A., 2002. Handling non-extreme evants in extreme value modelling of streamflow droughts. *IAHS Publ.* 274, 281–288.
- Hosking J., 1985. Algorithm AS215: Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme value distribution. *Appl. Stat. J. Roy. St. C*(34), 301–310.
- Ingłot S., 1968. Zjawiska klimatyczno-meteorologiczne na Śląsku od XVI do połowy XIX wieku. *Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, seria B*, 139.
- Jakubowski W., 2000. Ocena ryzyka wystąpienia zjawiska ekstremalnego. *ZNAR* 387, 35–45.
- Jakubowski W., 2005a. Rozkłady prawdopodobieństwa niżówek maksymalnych. *Przeg. Geof. L*(3–4), 229–248.
- Jakubowski W., 2005b. Zastosowanie uogólnionego rozkładu Pareto do wyznaczenia rozkładów maksymalnych charakterystyk niżówek. *ZNAR* 520, 29–41.
- Jakubowski W., 2006. An application of the Bivariate Generalized Pareto Distribution for the probabilities of low flow extremes estimation. *Hydrol. Earth Syst. Sci. Discuss.* 3, 859–893.
- Jakubowski W., Radczuk L., 2004. Nizowka2003 software in Tallaksen, L.M. i van Lanen, H.A.J. eds. *Hydrological Drought - Processes and Estimation Methods for Streamflow and Groundwater. Developments in Water Science*, 48. Amsterdam, Elsevier Science B.V.
- Jakubowski W., Tokarczyk T., 2008. Czasowa zmienność intensywności niżówek w zlewni Nysy Kłodzkiej. *Meteorologia, Hydrologia, Ochrona Środowiska kierunku badań i problemy, Monografie IMGW pod redakcją Alfreda Dubickiego*, 234–243.
- Johnson N. L., 1949. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biomterika* 36, 149–176.
- Kaczmarek Z., 1967. Ocena parametrów rozkładu logarytmiczno-normalnego

- na podstawie związków korelacyjnych pomiędzy zmiennymi. *Przeg. Geof.* XII(XX)(3-4), 331–342.
- Kaczorowska Z., 1962. Najsuchsze i najwilgotniejsze pory roku w Polsce w okresie 1900–1959. *Przeg. Geof.* VII(XV)(3), 175–178.
- Kowalczak P., edytor, 1995. Susze na obszarze Polski w latach 1951–1990, *Gospodarka Wodna i Ochrona Wód* 16, IMGW Warszawa.
- Kundzewicz Z. W., 2004. In search for a change in hydrological data. *Hydrol. Sci. J.* 49(1), 3–6.
- Kundzewicz Z. W., Radziejewski M., 2006. Methodologies for trend detection. *IAHS Publ.* 308, 538–549.
- Łabędzki L., 2006. Susze rolnicze. Zarys problematyki oraz metody monitorowania i klasyfikacji, *Woda–Środowisko–Obszary Wiejskie* 17, IMUZ Fałety.
- Maidment D. R., 1993. *Handbook of Hydrology*. Mc Graw Hill.
- Marszałek H., Wąsik M., 2004. Ocena zasilania wód podziemnych w wybranych zlewniach rzek Polski Zachodniej. *Acta Universitatis Wratislaviensis, Hydrogeologia*, 2729.
- Miler A., 1994. Modelowanie matematyczne zdolności retencyjnych małych zlewni nizinnych, *Rozprawy Naukowe* 258, Wydawnictwo Akademii Rolniczej w Poznaniu.
- Mioduszeński W., 1994. Ochrona i kształtowanie zasobów wodnych w małych rolniczych zlewniach rzecznych. metodyczne podstawy rozwoju małej retencji. *Mat. Inf.* 25. Wyd. IMUZ Fałety.
- Mokwa M., Radczuk L., 2005. Analiza stanów minimalnych dla wstępnej oceny przebiegu suszy hydrologicznej. *Przegląd Naukowy Inżynieria i Kształtowanie Środowiska*, XIV 1(31), 58–66.
- Namaczyńska S., 1937. Kronika klęsk elementarnych w Polsce i w krajach sąsiednich w latach 1649–1696. *Badania z dziejów społecznych i gospodarczych* pod red. prof. F. Bujaka, 23(1–2).
- Ozga-Zielińska M., 1984. Hydrologia jako źródło informacji dla potrzeb gospodarki. *Przeg. Geof.* XXIX(4), 437–454.
- Ozga-Zielińska M., 1990. Niżówki i wezbrania - ich definiowanie i modelowanie. *Przeg. Geof.* XXXV(1-2), 33–44.
- Ozga-Zielińska M., Brzeziński J., 1997. *Hydrologia stosowana*. PWN Warszawa.
- Palmer W. C., 1965. Meteorological drought. *U.S. Weather Bureau Research Paper* 45.
- Pickands J., 1975. Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Statist.* 3, 119–131.
- Kwartalny biuletyn informacyjny..., 2007. Kwartalny biuletyn informacyjny wód podziemnych państwowej służby hydrogeologicznej. PIG Warszawa.
- Rocznik hydrogeologiczny, 2007. *Rocznik hydrogeologiczny*. PIG Warszawa.
- Radczuk L., Szarska O., 1989. Use of the flow recession curve for the estimation of condition of river supply by underground water. *IAHS Publ.* 187, 67–74.
- Radhakrishna Rao C., 1982. *Modele liniowe statystyki matematycznej*. PWN Warszawa.

- Radomski C., 1973. Agrometeorologia. PWN Warszawa.
- Radziejewski M., Kundzewicz Z. W., 2004. Detectability of changes in hydrological records. *Hydrol. Sci. J.* 49(1), 39–51.
- Ralston A., 1983. Wstęp do analizy numerycznej. PWN Warszawa.
- Resnick S. I., 1987. Extreme values, Regular Variation and Point Processes. Berlin Springer-Verlag.
- Rosenblatt J., 1962. Note on multivariate goodness-of-fit tests. *Ann. Math. Statist.*, 33(2), 807–810.
- Schmuck A., Koźmiński G., 1967. Przestrzenny rozkład częstości posuch atmosferycznych na terenie Polski. *Czasopismo Geograficzne*, 38(3).
- Servat E., Demuth S., editorzy, 2006. FRIEND – a global perspective 2002–2006. IHP-HWRP Germany.
- Shiau J. T., 2006. Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas. *Water Resour. Managm.*, 20(5), 795–815.
- Shiau J. T., Feng S., Nadarajah S., 2007. Assessment of hydrological droughts for the Yellow River, China, using copulas. *Hydrological Processes*, 21(16), 2157–2163.
- Smith R. L., 1985. Maximum likelihood estimators in a class of non-regular cases. *Biometrika*, 72, 67–90.
- Soczyńska U., edytor, 1997. Hydrologia dynamiczna. PWN Warszawa.
- Somorowska U., 2004. Inferring changes in dynamic groundwater storage from recession curve analysis of discharge data. *Miscellanea Geographica* 11, 161–168.
- Somorowska U., 2006. Wpływ stanu retencji podziemnej na proces odpływu w zlewni nizinnej, *Hydrologia*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 473.
- Stachý J., 1990. Przepływ średni niski SNQ jako miarodajna charakterystyka projektowa. *Przeg. Geof.*, XXXV(1-2), 45–54.
- Staško S., 1996. Wody podziemne w skałach krystalicznych na podstawie badań wybranych obszarów Sudetów, *Prace geologiczno – mineralogiczne*, LIII, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, 1996.
- Tajvidi N., 1996. Characterisation and Some Statistical Aspects of Univariate and Multivariate Generalized Pareto Distribution. PhD thesis, Chalmers Institute of Technology, Goteborg.
- Tallaksen L. M., 1995. A review od baseflow recession analysis. *J. Hydrol.* 165, 349–370.
- Tallaksen L. M., van Lanen H. A. J. edytorzy, 2004. Hydrological Drought - Processes and Estimation Methods for Streamflow and Groundwater. *Developments in Water Science*, 48. Amsterdam, Elsevier Science B.V.
- Tallaksen L. M., Madsen H., Clausen B., 1997. On the definition and modelling of streamflow drought duration and deficit volume. *Hydrolog. Sci. J.*, 42(1), 15–33.
- Tlałka A., 1979. Ustalenie wartości granicznych dla okresów niżówkowych. *Prz. Geof.*, XXIV(1), 17–25.
- Todorović P., Zelenhasić E., 1970. A stochastic model for flood analysis. *Water Resour. Res.* 6(6), 1641–1646.
- Tokarczyk T., Jakubowski W., 2006. Temporal and spatial changeability of dro-



- ught in mountain catchments of Nysa Klodzka basin. IAHS Publ. 308, 139–144.
- Tokarczyk T., Bogusz A., Chudzik B., 2005. Zmienność odpływu podziemnego w górskich zlewniach dorzecza górnej i środkowej Odry. Ekstremalne zjawiska hydrologiczne i meteorologiczne. Polskie Towarzystwo Geofizyczne Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej, Warszawa, 2005.
- Tomaszewski E., 2008. Maksymalny czas trwania głębokich niżówek letnich w środkowej Polsce i jego uwarunkowania. *Folia Geographica Physica* 8, 89–98.
- Vogel R. M., Kroll C. N., 1996. Estimation of baseflow recession constants. *Water Resour. Manag.* 10, 303–320.
- Walawender A., 1932. Kronika klęsk elementarnych w Polsce i krajach sąsiednich w latach 1450 - 1586, T.1 Zjawiska meteorologiczne i pomory. Kasa im. Mianowskiego, Lwów.
- Węglarczyk S., 1998. Wybrane problemy hydrologii stochastycznej, *Inżynieria Sanitarna i Wodna*, Politechnika Krakowska, 235.
- Yevjevich V., 1967. An objective approach to definitions and investigations of continental hydrologic droughts, Hydrology paper 23, Colorado State University, Fort Collins.
- Zelenhasić E., Salvai A., 1987. A method of streamflow drought analysis. *Water Resour. Res.* 23(1), 156–168.
- Zielińska M., 1963. Statystyczne metody opracowywania niżówek – 1. *Przeg. Geof.* IX(1), 75–87.
- Zielińska M., 1964. Statystyczne metody opracowywania niżówek – 2. *Przeg. Geof.* X(1), 109–120.

## A. ESTYMATORY NAJWIĘKSZEJ WIARYGODNOŚCI

W dodatku zamieszczone zostało analityczne wyprowadzenie estymatorów nieznanymi parametrów rozkładów jednowymiarowych wykorzystywanych w modelu Zelenhasicia i Salvai oraz dwuwymiarowych: log-normalnego i uogólnionego Pareto.

### A.1. Estymatory największej wiarygodności stosowanych rozkładów jednowymiarowych

#### A.1.1. Estymatory największej wiarygodności uogólnionego jednowymiarowego rozkładu Pareto

Niech  $F(x) = 1 - (1 - \alpha\kappa x)^{\frac{1}{\kappa}}$  będzie uogólnionym rozkładem Pareto,  $f(x) = \alpha(1 - \alpha\kappa x)^{\frac{1}{\kappa} - 1}$  jego funkcją gęstości. Wtedy wiarygodność:

$$L(\alpha, \kappa) = n \ln \alpha + \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) \sum_{i=1}^n \ln(1 - \alpha\kappa x_i) \quad (\text{A.1})$$

gdzie  $x_1, \dots, x_n$  oznacza ciąg obserwacji, a  $n$  ich liczbę. Estymatory największej wiarygodności parametrów  $\alpha, \kappa$  otrzymuje się, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - (1 - \kappa) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - \alpha\kappa x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \kappa} = -\frac{1}{\kappa^2} \sum_i \ln(1 - \alpha\kappa x_i) - \alpha \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - \alpha\kappa x_i} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

W pierwszym równaniu, po podzieleniu przez  $\kappa n$ , otrzymujemy

$$\frac{1}{\alpha\kappa} + \frac{1}{n} \sum_i \frac{x_i}{1 - \alpha\kappa x_i} = \frac{1}{\kappa n} \sum_i \frac{x_i}{1 - \alpha\kappa x_i} \quad (\text{A.3})$$

skąd:

$$\kappa = \frac{\frac{1}{n} \sum_i \frac{x_i}{1 - \alpha\kappa x_i}}{\frac{1}{\alpha\kappa} + \frac{1}{n} \sum_i \frac{x_i}{1 - \alpha\kappa x_i}} \quad (\text{A.4})$$

Z drugiego równania, po pomnożeniu przez  $\kappa^2$  i uwzględnieniu pierwszego z równań wynika, że:

$$\kappa = -\frac{1}{n} \sum_i \ln(1 - \alpha\kappa x_i) \quad (\text{A.5})$$

Porównując powyższe do rozwiązania, pozostaje równanie zmiennej  $\alpha\kappa$

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_i \frac{x_i}{1 - \alpha\kappa x_i}}{\frac{1}{\alpha\kappa} + \frac{1}{n} \sum_i \frac{x_i}{1 - \alpha\kappa x_i}} + \frac{1}{n} \sum_i \ln(1 - \alpha\kappa x_i) = 0 \quad (\text{A.6})$$

### A.1.2. Estymatory największej wiarygodności innych rozkładów używanych w modelu Zelenhasicia i Salvai

Niech  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$  będzie badaną próbą losową. Estymatory największej wiarygodności nieznanymi parametrów badanych rozkładów wyznacza się następująco:

1. Rozkład Poissona (5.6):

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{A.7})$$

2. Rozkład Pascala (5.7):

Niech  $M = \max_{i=1, \dots, n} x_i$ , a  $n_j$  jest liczbę takich obserwacji, że  $x_i = j$ . Estymatory parametrów  $v, q$  wyznacza się, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M n_i \sum_{j=1}^i \frac{1}{v+j-1} + \ln q = 0 \\ q = \frac{v}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + v} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

3. Rozkład gamma (5.8):

Estymatory parametrów  $\alpha, \mu$  otrzymuje się, rozwiązując układ równań [Kaczmarek 1967, Jakubowski 2000]:

$$\begin{cases} \frac{\nu}{\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \ln \alpha - \psi(\nu) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

4. Rozkład Weibulla (5.9):

Estymatory parametrów  $\alpha, \nu$ , otrzymuje się, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \ln x_i = 0 \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

5. Rozkład podwójnie wykładniczy (5.12):

Aby otrzymać estymatory  $\alpha, \mu$ , należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} e^{\alpha\mu} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i}} \\ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i e^{-\alpha x_i}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\alpha x_i}} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Pozostałe rozkłady log-normalny (5.10) oraz Johnsona (5.11) są przekształconymi rozkładami normalnymi. Estymację parametrów  $\mu$  i  $\sigma$  przeprowadza się w standardowy sposób.

## A.2. Estymatory największej wiarygodności dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego

Niech  $f(d, t)$  będzie funkcją gęstości dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego (6.1) o średnich  $\mu_d, \mu_t$ , wariancjach  $\sigma_d, \sigma_t$  i współczynniku korelacji  $\rho$ . Wiarygodność:

$$L(\mu_d, \mu_t, \sigma_d, \sigma_t, \rho) = -n \ln(2\pi) - n \ln \sigma_d - n \ln \sigma_t - \frac{n}{2} \ln(1 - \rho^2) - \sum_{i=1}^n \ln(d_i t_i) - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\ln d_i - \mu_d}{\sigma_d} \right)^2 - 2\rho \sum_{i=1}^n \frac{(\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t)}{\sigma_d \sigma_t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\ln t_i - \mu_t}{\sigma_t} \right)^2 \right\} \quad (\text{A.12})$$

gdzie  $d_1, \dots, d_n, t_1, \dots, t_n$  są ciągami obserwacji, a  $n$  ich liczbą. Wyznaczając pochodne cząstkowe i przyrównując do 0, otrzymuje się układ równań:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ -\frac{2}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d) + \frac{2\rho}{\sigma_d \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t) \right\} \\ 0 = -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \frac{2\rho}{\sigma_d \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d) - \frac{2}{\sigma_t^2} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t) \right\} \\ 0 = -\frac{n}{\sigma_d} - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ -\frac{2}{\sigma_d^3} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)^2 + \frac{2\rho}{\sigma_d^2 \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t) \right\} \\ 0 = -\frac{n}{\sigma_t} - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \frac{2\rho}{\sigma_d \sigma_t^2} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t) - \frac{2}{\sigma_t^3} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t)^2 \right\} \\ 0 = -\frac{\rho}{(1-\rho^2)^2} \left\{ \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)^2 - \frac{2\rho}{\sigma_d \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t)^2 \right\} + \frac{n\rho}{1-\rho^2} + \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_d \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t) \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Po oczywistych uproszczeniach, A.13 przekształca się do układu równań:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{\sigma_d} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d) - \frac{\rho}{\sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t) \\ 0 = \frac{1}{\sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t) - \frac{\rho}{\sigma_d} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d) \\ 0 = -n(1 - \rho^2) + \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)^2 - \frac{\rho}{\sigma_d \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t) \\ 0 = -n(1 - \rho^2) - \frac{\rho}{\sigma_d \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t) + \frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t)^2 \\ 0 = n\rho - \frac{\rho}{(1-\rho^2)} \left\{ \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)^2 - \frac{2\rho}{\sigma_d \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t)^2 \right\} + \frac{1}{\sigma_d \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Wyznaczając z pierwszego z równań  $\sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t)$  i wstawiając do drugiego wyznaczamy:

$\hat{\mu}_d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln d_i$ . Podobnie postępując, otrzymujemy, że  $\hat{\mu}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i$ . Wstawiając do piątego równania trzecie i czwarte wyznaczamy ostateczne równanie:

$$n\rho - \frac{\rho}{(1-\rho^2)} \{n(1-\rho^2) + n(1-\rho^2)\} + \frac{1}{\sigma_d \sigma_t} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t) = 0 \quad (\text{A.15})$$

Stąd estymator  $\hat{\rho} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)(\ln t_i - \mu_t)}{\sigma_d \sigma_t}$ . Wstawiając (A.15) do trzeciego i czwartego z równań, otrzymujemy estymatory  $\hat{\sigma}_d^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln d_i - \mu_d)^2$  oraz  $\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu_t)^2$ .

### A.3. Estymatory największej wiarygodności dwuwymiarowego uogólnionego rozkładu Pareto

Niech  $h(x, t)$  będzie funkcją gęstości uogólnionego dwuwymiarowego rozkładu Pareto 7.7.

1. Dla  $x, t > 0$ .

$$\begin{aligned}
 h(x, t) &= \frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial x \partial t} \\
 &= \alpha_x \alpha_t \frac{\left( \left( \frac{\overline{F}_x(b_x+x)}{\overline{F}_t(b_t+t)} \right)^{\frac{p}{2}} + k + \left( \frac{\overline{F}_t(b_t+t)}{\overline{F}_x(b_x+x)} \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}-2} \overline{F}_x^{\frac{1}{2}-\kappa_x}(b_x+x) \overline{F}_t^{\frac{1}{2}-\kappa_t}(b_t+t)}{\left( \left( \frac{\overline{F}_x(b_x)}{\overline{F}_t(b_t)} \right)^{\frac{p}{2}} + k + \left( \frac{\overline{F}_t(b_t)}{\overline{F}_x(b_x)} \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \overline{F}_x^{\frac{1}{2}}(b_x) \overline{F}_t^{\frac{1}{2}}(b_t)} \\
 &* \left\{ \frac{k(p-2)}{4} \left( \left( \frac{\overline{F}_x(b_x+x)}{\overline{F}_t(b_t+t)} \right)^{\frac{p}{2}} + \left( \frac{\overline{F}_t(b_t+t)}{\overline{F}_x(b_x+x)} \right)^{\frac{p}{2}} \right) + \left( p - 1 - \frac{k^2}{4} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 - \overline{F}_x(x) &= 1 - F_x(x) = (1 - \alpha_d \kappa_d (b_d + x))^{1/\kappa_d} \\
 - \overline{F}_t(t) &= 1 - F_t(t) = (1 - \alpha_t \kappa_t (b_t + t))^{1/\kappa_t}
 \end{aligned}$$

są jednowymiarowymi uogólnionymi rozkładami Pareto. Przyjmując, że  $G(x, t) = \frac{\overline{F}_x(b_x+x)}{\overline{F}_t(b_t+t)}$  otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 h(x, t) &= \alpha_x \alpha_t \frac{\left( G^{\frac{p}{2}}(x, t) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x, t) \right)^{\frac{1}{p}-2} \overline{F}_x^{\frac{1}{2}-\kappa_x}(b_x+x) \overline{F}_t^{\frac{1}{2}-\kappa_t}(b_t+t)}{\left( G^{\frac{p}{2}}(x, t) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x, t) \right)^{\frac{1}{p}} \overline{F}_x^{\frac{1}{2}}(b_x) \overline{F}_t^{\frac{1}{2}}(b_t)} \\
 &* \left\{ \frac{k(p-2)}{4} \left( G^{\frac{p}{2}}(x, t) + G^{-\frac{p}{2}}(x, t) \right) + \left( p - 1 - \frac{k^2}{4} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

2. Dla  $x > 0, t = 0$

$$\begin{aligned}
 h(x, 0) &= \frac{dH(x, 0)}{dx} \\
 &= \alpha_x \frac{\left( G^{\frac{p}{2}}(x, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x, 0) \right)^{\frac{1}{p}-1} \overline{F}_x^{\frac{1}{2}-\kappa_x}(b_x+x)}{\left( G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0) \right)^{\frac{1}{p}} \overline{F}_x^{\frac{1}{2}}(b_x)} \left( G^{\frac{p}{2}}(x, 0) + \frac{k}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

3. Symetrycznie do A.18 wyznacza się  $h(0, t)$ .

Uogólniony dwuwymiarowy rozkład Pareto  $H(x, t)$  zależy od ośmiu parametrów. Sześć z nich jest związane z jednowymiarowymi uogólnionymi rozkładami Pareto. Estymacja ich parametrów została opisana w rozdziale 5.2 oraz w dodatku A.1.1 i jest

przeprowadzana oddzielnie. Do estymacji pozostały dwa parametry  $k, p$ . Stąd dla otrzymanej w (A.17) gęstości  $h(x, t)$ , rozpatrywano wiarygodność:

$$\begin{aligned}
L(k, p) &= n \ln(\alpha_x \alpha_t) + \left(\frac{1}{p} - 2\right) \sum_i \ln \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i) \right) \\
&- \frac{n}{p} \ln \left( G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0) \right) + \sum_i \ln \left( \frac{\overline{F}_x^{\frac{1}{2}-\kappa x}(b_x+x_i) \overline{F}_t^{\frac{1}{2}-\kappa t}(b_t+t_i)}{\overline{F}_x^{\frac{1}{2}}(b_x) \overline{F}_t^{\frac{1}{2}}(b_t)} \right) \\
&+ \sum_i \ln \left\{ \frac{k(p-2)}{4} \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i) \right) + \left( p-1 - \frac{k^2}{4} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Dla gęstości  $h(x, 0)$  wiarygodność  $L_x = L_x(k, p)$  wynosi:

$$\begin{aligned}
L_x(k, p) &= n \ln \alpha_x + \left(\frac{1}{p} - 1\right) \sum_i \ln \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, 0) \right) \\
&- \frac{n}{p} \ln \left( G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0) \right) + \sum_i \ln \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, 0) + \frac{k}{2} \right) \\
&+ \sum_i \ln \frac{\overline{F}_x^{\frac{1}{2}-\kappa x}(b_x+x_i)}{\overline{F}_x^{\frac{1}{2}}(b_x)}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Podobnie dla gęstości  $h(0, t)$ :

$$\begin{aligned}
L_t(k, p) &= n \ln \alpha_t + \left(\frac{1}{p} - 1\right) \sum_i \ln \left( G^{\frac{p}{2}}(0, t_i) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, t_i) \right) \\
&- \frac{n}{p} \ln \left( G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0) \right) + \sum_i \ln \left( G^{-\frac{p}{2}}(0, t_i) + \frac{k}{2} \right) \\
&+ \sum_i \ln \frac{\overline{F}_t^{\frac{1}{2}-\kappa t}(b_t+t_i)}{\overline{F}_t^{\frac{1}{2}}(b_t)}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Estymatory  $\hat{k}, \hat{p}$  otrzymano, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} W_1(k, p) = \frac{\partial L}{\partial k} + \frac{\partial L_x}{\partial k} + \frac{\partial L_y}{\partial k} = 0 \\ W_2(k, p) = \frac{\partial L}{\partial p} + \frac{\partial L_x}{\partial p} + \frac{\partial L_y}{\partial p} = 0 \end{cases} \tag{A.22}$$

Różniczkując w A.19, A.20 oraz w A.21 względem  $k$  oraz  $p$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial k} &= \left(\frac{1}{p} - 2\right) \sum_i \frac{1}{G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i)} - \frac{n}{p} \frac{1}{G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)} \\
&+ \sum_i \frac{\frac{p-2}{4} \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i) \right) - \frac{k}{2}}{\frac{k(p-2)}{4} \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i) \right) + \left( p-1 - \frac{k^2}{4} \right)} \\
\frac{\partial L}{\partial p} &= -\frac{1}{p^2} \sum_i \ln \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i) \right) + \frac{n}{p^2} \ln \left( G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0) \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - 2\right) \sum_i \frac{G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) - G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i)}{G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i)} \ln G(x_i, y_i) - \frac{n}{2p} \frac{G^{\frac{p}{2}}(0, 0) - G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)}{G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)} \ln G(0, 0) \\
&+ \sum_i \frac{\frac{k}{4} \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i) \right) + \frac{k(p-2)}{8} \ln G(x_i, y_i) \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) - G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i) \right) + 1}{\frac{k(p-2)}{4} \left( G^{\frac{p}{2}}(x_i, t_i) + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, t_i) \right) + \left( p-1 - \frac{k^2}{4} \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_x}{\partial k} &= \left(\frac{1}{p} - 1\right) \sum_i \frac{1}{G^{\frac{p}{2}}(x_i, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, 0)} - \frac{n}{p \left(G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)\right)} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{G^{\frac{p}{2}}(x_i, 0) + \frac{k}{2}} \\
\frac{\partial L_x}{\partial p} &= -\frac{1}{p^2} \sum_i \ln \left(G^{\frac{p}{2}}(x_i, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, 0)\right) + \frac{n}{p^2} \ln \left(G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)\right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - 1\right) \sum_i \frac{G^{\frac{p}{2}}(x_i, 0) - G^{-\frac{p}{2}}(x_i, 0)}{G^{\frac{p}{2}}(x_i, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(x_i, 0)} \ln G(x_i, 0) - \frac{n}{2p} \frac{G^{\frac{p}{2}}(0, 0) - G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)}{G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)} \ln G(0, 0) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_i \frac{G^{\frac{p}{2}}(x_i, 0)}{G^{\frac{p}{2}}(x_i, 0) + \frac{k}{2}} \ln G(x_i, 0) \\
\frac{\partial L_t}{\partial k} &= \left(\frac{1}{p} - 1\right) \sum_i \frac{1}{G^{\frac{p}{2}}(0, t_i) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, t_i)} - \frac{n}{p \left(G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)\right)} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{\frac{k}{2} + G^{-\frac{p}{2}}(0, t_i)} \\
\frac{\partial L_t}{\partial p} &= -\frac{1}{p^2} \sum_i \ln \left(G^{\frac{p}{2}}(0, t_i) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, t_i)\right) + \frac{n}{p^2} \ln \left(G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)\right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - 1\right) \sum_i \frac{G^{\frac{p}{2}}(0, t_i) - G^{-\frac{p}{2}}(0, t_i)}{G^{\frac{p}{2}}(0, t_i) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, t_i)} \ln G(0, y_i) - \frac{n}{2p} \frac{G^{\frac{p}{2}}(0, 0) - G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)}{G^{\frac{p}{2}}(0, 0) + k + G^{-\frac{p}{2}}(0, 0)} \ln G(0, 0) \\
&- \frac{1}{2} \sum_i \frac{G^{-\frac{p}{2}}(0, t_i) \ln G(0, y_i)}{\frac{k}{2} + G^{-\frac{p}{2}}(0, t_i)}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Układ równań (A.22) rozwiązywany jest dwuwymiarowym odpowiednikiem metody Newtona, metodą Newtona – Raphsona [Ralston 1983, Hosking 1985]. Początkowe przybliżenie rozwiązania poszukiwane jest metodą Monte Carlo, losując początkowe wartości estymatorów  $\hat{p}_0, \hat{k}_0$  w ich obszarze zmienności określonym w (7.7).

## B. NIEKTÓRE WŁASNOŚCI ROZKŁADÓW DWUWYMIAROWYCH

W dodatku wyprowadzone są pewne własności rozkładów dwuwymiarowych.

Dla rozkładu log-normalnego wyznaczono:

- poziomice funkcji gęstości;
- warunkowe wartości oczekiwane;
- rozkład ilorazu zmiennych.

Dla uogólnionego rozkładu Pareto – współczynnik korelacji.

### B.1. Rozkład log-normalny – obszar najbardziej prawdopodobny

Niech  $f(d, t)$  będzie funkcją gęstości dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego 6.1. Poszukiwany jest taki obszar  $\Omega_c$ , aby na jego brzegu wartość funkcji gęstości była stała. Można to zapisać:  $\Omega_c = \{(d, t) : f(d, t) \geq c\}$ . Oznacza to, że szukana jest krzywa zamknięta  $l = \partial\Omega_c$  taka, że  $f(d, t)|_{\partial\Omega_c} = c$ . Logarytmując równanie  $f(d, t) = c$ , otrzymamy:

$$0 = \ln(2\pi\sigma_d\sigma_t\sqrt{1-\rho^2}c) + \ln d + \ln t + \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left( \frac{\ln d - \mu_d}{\sigma_d} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{\ln d - \mu_d}{\sigma_d} \right) \left( \frac{\ln t - \mu_t}{\sigma_t} \right) + \left( \frac{\ln t - \mu_t}{\sigma_t} \right)^2 \right\} \quad (\text{B.1})$$

Po podstawieniu  $u = \frac{\ln d - \mu_d}{\sigma_d}$  oraz  $v = \frac{\ln t - \mu_t}{\sigma_t}$  obszar  $\Omega_c$  przekształca się do  $\Omega_1$  ograniczonego elipsą:

$$0 = \ln(2\pi\sigma_d\sigma_t\sqrt{1-\rho^2}c) + u\sigma_d + \mu_d + v\sigma_t + \mu_t + \frac{1}{2(1-\rho^2)} \{u^2 - 2\rho uv + v^2\} \quad (\text{B.2})$$

Obracając o kąt  $45^\circ$ , podstawiając:

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{2}}{2}s - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ v = \frac{\sqrt{2}}{2}s + \frac{\sqrt{2}}{2}z \end{cases}$$

mamy  $\Omega_2$  wyznaczony przez elipsę:

$$0 = \ln(2\pi\sigma_d\sigma_t\sqrt{1-\rho^2}c) + \mu_d + \mu_t + \frac{\sqrt{2}}{2}s(\sigma_d + \sigma_t) + \frac{\sqrt{2}}{2}z(\sigma_t - \sigma_d) + \frac{s^2}{2(1+\rho)} + \frac{z^2}{2(1-\rho)} \quad (\text{B.3})$$

W końcu podstawiając  $s = \sqrt{2}p\sqrt{1+\rho}$  oraz  $z = \sqrt{2}q\sqrt{1-\rho}$ , mamy równanie okręgu:

$$0 = \ln(2\pi\sigma_d\sigma_t\sqrt{1-\rho^2}c) + \mu_d + \mu_t + p\sqrt{1+\rho}(\sigma_d + \sigma_t) + q\sqrt{1-\rho}(\sigma_t - \sigma_d) + p^2 + q^2 \quad (\text{B.4})$$



wyznaczającego koło  $\Omega_3$ , o środku w  $S\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1+\rho}(\sigma_d + \sigma_t), -\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho}(\sigma_t - \sigma_d)\right)$ , odległym od początku układu współrzędnych o  $a = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_d^2 + 2\rho\sigma_d\sigma_t + \sigma_t^2)}$  oraz promieniu:

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{4}(1+\rho)(\sigma_d + \sigma_t)^2 + \frac{1}{4}(1-\rho)(\sigma_t - \sigma_d)^2 - \ln(2\pi\sigma_d\sigma_t\sqrt{1-\rho^2}c) - \mu_d - \mu_t \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_d^2 + 2\rho\sigma_d\sigma_t + \sigma_t^2) - \ln(2\pi\sigma_d\sigma_t\sqrt{1-\rho^2}c) - \mu_d - \mu_t \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć obszar  $\Omega_c$ , należy rozwiązać równanie:

$$\iint_{\Omega_c} f(x, y) dx dy = 1 - \alpha \quad (\text{B.5})$$

gdzie  $\alpha$  jest ustalonym parametrem, a  $c$  poszukiwanym rozwiązaniem. Przekształcając zgodnie z powyższym zaproponowanym algorytmem, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_c} f(x, y) dx dy &= \iint_{\Omega_1} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\{u^2 - 2\rho uv + v^2\}} dudv \\ &= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\{s^2(1-\rho) + z^2(1+\rho)\}} ds dz = \iint_{\Omega_3} \frac{1}{\pi} e^{-(p^2 + q^2)} dp dq \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych oraz zakładając, że początek układu współrzędnych leży wewnątrz koła  $\Omega_3$ , mamy:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_c} f(x, y) dx dy &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - a^2 \sin^2(\tau - \beta) - am \cos(\tau - \beta)}} re^{-r^2} dr d\tau \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(\sqrt{R^2 - a^2 \sin^2(\tau - \beta) - am \cos(\tau - \beta)})^2} d\tau \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

gdzie  $a$  i  $R$  zostały zdefiniowane powyżej, a  $\beta$  jest kątem nachylenia promienia wodzącego środka koła  $\Omega_3$  do osi  $OX$ . Współczynnik  $m = 1$ , gdy środek koła  $\Omega_3$  leży poniżej osi  $OX$ , w przeciwnym wypadku  $m = -1$ .

## B.2. Rozkład log-normalny – warunkowe wartości oczekiwane

Jeśli  $(X, Y)$  jest dwuwymiarowa zmienną losową o rozkładzie log-normalnym i funkcją gęstości  $f(x, y)$  podaną wzorem (6.1), to gęstość warunkowa:

$$f(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}\sqrt{1-\rho^2}x} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2} \left\{ \ln x - \left[ \mu_x + \frac{\sigma_x\rho}{\sigma_y} (\ln y - \mu_y) \right] \right\}^2}. \quad (\text{B.8})$$

Oznacza to, że  $f(x|Y = y)$  jest gęstością log-normalną o średniej  $\mu_w = \mu_x + \frac{\sigma_x\rho}{\sigma_y} (\ln y - \mu_y)$  i wariancji  $\sigma_w^2 = (1-\rho^2)\sigma_x^2$ . Stąd łatwo wyznaczyć, że:

$$\begin{aligned} E(X|Y = y) &= y \frac{\sigma_x\rho}{\sigma_y} e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2(1-\rho^2)}{2} - \frac{\sigma_x\rho}{\sigma_y}\mu_y} \\ D^2(X|Y = y) &= y^2 \frac{\sigma_x\rho}{\sigma_y} e^{2\mu_x - 2\frac{\sigma_x\rho}{\sigma_y}\mu_y + \sigma_x^2(1-\rho^2)} \left( e^{\sigma_x^2(1-\rho^2)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

### B.3. Rozkład ilorazu w dwuwymiarowym rozkładzie log-normalnym

Jeśli  $(D, T)$  jest dwuwymiarową zmienną losową o rozkładzie log-normalnym i funkcją gęstości  $f(x, t)$  podaną wzorem (6.1), to funkcję gęstości rozkład ilorazu  $U = \frac{D}{T}$  wylicza się zgodnie ze wzorem  $g(u) = \int_0^\infty f(xu, x)xdx$  Fisz [1967]. Podstawiając  $v = \ln x$ , mamy:

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_d\sigma_t\sqrt{1-\rho^2}u} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(v+\ln u-\mu_d)^2}{\sigma_d^2} - 2\rho\frac{(v+\ln u-\mu_d)(v-\mu_t)}{\sigma_d\sigma_t} + \frac{(v-\mu_t)^2}{\sigma_t^2}\right]} dv \quad (\text{B.10})$$

Podstawiając w całce (B.10) nową zmienną:

$$w = \frac{v - \mu_t + \frac{\sigma_t - 2\rho\sigma_t\sigma_d}{\sigma_d^2 - 2\rho\sigma_t\sigma_d + \sigma_t^2}(\ln u + \mu_t - \mu_d)}{\frac{\sigma_d\sigma_t\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\sigma_d^2 - 2\rho\sigma_t\sigma_d + \sigma_t^2}}}$$

otrzymujemy:

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{w^2}{2}} e^{-\frac{(\ln u - \mu_d + \mu_t)^2}{2(\sigma_d^2 - 2\rho\sigma_t\sigma_d + \sigma_t^2)}}}{2\pi\sqrt{\sigma_d^2 - 2\rho\sigma_t\sigma_d + \sigma_t^2}u} dw = \frac{e^{-\frac{(\ln u - \mu_d + \mu_t)^2}{2(\sigma_d^2 - 2\rho\sigma_t\sigma_d + \sigma_t^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_d^2 - 2\rho\sigma_t\sigma_d + \sigma_t^2}u}. \quad (\text{B.11})$$

Funkcja  $g(u)$  jest funkcją gęstości rozkładu log-normalnego ze średnią  $\mu_u = \mu_d - \mu_t$  oraz wariancją  $\sigma_u = \sigma_d^2 - 2\rho\sigma_t\sigma_d + \sigma_t^2$ .

### B.4. Dwuwymiarowy uogólniony rozkład Pareto – współczynnik korelacji

Niech  $(X, T)$  będzie dwuwymiarową zmienną losową o dwuwymiarowym uogólnionym rozkładzie Pareto. Współczynnik korelacji liczony dla zmiennej losowej  $(X, T)$  określonej na obszarze  $A$  (rozdz. 7.) wynosi:

$$r_{XT} = \frac{EXT - EXET}{\sqrt{(EX^2 - E^2X)(ET^2 - E^2T)}}. \quad (\text{B.12})$$

Aby obliczyć poszczególne momenty, należy wyznaczyć funkcję gęstości  $h(x, t)$  rozkładu  $H(x, t)$ . Po zrózniczkowaniu  $\bar{H}(x, t)$  określonego przez (7.7) otrzymamy:

$$h(x, t) = -\frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial x \partial t} = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\left(\bar{F}_d^p(x) + k\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(x)\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(t) + \bar{F}_t^p(t)\right)^{\frac{1}{p}-2}}{V} \bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(x)\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(t)(1-p)\left(1 - \frac{k^2}{4}\right) \\ & - \frac{\left(\bar{F}_d^p(x) + k\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(x)\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(t) + \bar{F}_t^p(t)\right)^{\frac{1}{p}-1}}{V} \left(\frac{(1-p)k}{2} + \frac{kp}{4}\right) \bar{F}_d'(x)\bar{F}_t'(t)\bar{F}_d^{\frac{p}{2}-1}(x)\bar{F}_t^{\frac{p}{2}-1}(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.13})$$

gdzie  $V$  jest określone jak w (7.10).

Całkując  $\int_0^\infty \int_0^\infty h(x,t) dx dt$  i podstawiając:

$$u = \overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(x) \quad \text{oraz} \quad u = \overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(t) \quad (\text{B.14})$$

wyznacza się masę prawdopodobieństwa obszaru  $A$ . Zatem:

$$\Pr((X, T) \in A) = \frac{\overline{F}_d(0) + \overline{F}_t(0)}{V} - 1 \quad (\text{B.15})$$

Aby policzyć masę prawdopodobieństwa obszarów  $B$  i  $C$ , wystarczy policzyć całki  $\int_0^\infty h(x,0) dx$  oraz  $\int_0^\infty h(0,t) dt$ .

Przy obliczaniu  $EX = \int_0^\infty x \int_0^\infty h(x,t) dt dx$  postępowanie jest podobne. Po podstawieniu takim jak w (B.14):

$$\begin{aligned} EX &= \frac{1 - \alpha_d \kappa_d}{\alpha_d \kappa_d} \left( \frac{\overline{F}_d(0) + \overline{F}_t(0)}{V} - 1 \right) \\ &+ \int_0^{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)} \int_0^{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)} \frac{u^{\frac{2\kappa_d}{p}}}{\alpha_d \kappa_d} \left\{ \frac{2k - kp}{p^2} \frac{(u^2 + kuv + v^2)^{\frac{1}{p} - 1}}{V} + \frac{4 - k^2}{p} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \frac{(u^2 + kuv + v^2)^{\frac{1}{p} - 2}}{V} uv \right\} dudv \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Zatem należy policzyć dwie całki:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)} \int_0^{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)} (u^2 + kuv + v^2)^{\frac{1}{p} - 1} u^{\frac{2\kappa_d}{p}} dudv \\ \text{oraz} & \\ I_2 &= \int_0^{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)} \int_0^{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)} (u^2 + kuv + v^2)^{\frac{1}{p} - 2} u^{\frac{2\kappa_d}{p} + 1} v dudv. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Pierwsza po przejściu do współrzędnych biegunowych  $(\rho, \varphi)$  wynosi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{p \overline{F}_d^{1 + \kappa_d}(0)}{2(1 + \kappa_d)} \int_0^{\arctg \frac{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}} (1 + k \sin \varphi \cos \varphi)^{\frac{1}{p} - 1} \cos^{-\frac{2}{p}} \varphi d\varphi \\ &+ \frac{p \overline{F}_t^{1 + \kappa_d}(0)}{2(1 + \kappa_d)} \int_{\arctg \frac{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + k \sin \varphi \cos \varphi)^{\frac{1}{p} - 1} \cos^{\frac{2\kappa_x}{p}} \varphi \sin^{-\frac{2}{p} - \frac{2\kappa_x}{p}} \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Następnie w B.18 podstawiając  $w = \operatorname{tg} \varphi$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}}{\frac{p\bar{F}_d^{1+\kappa_d}(0)}{2(1+\kappa_d)}} \int_0^{\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}} (1+kw+w^2)^{\frac{1}{p}-1} dw \\
 &+ \frac{\frac{p\bar{F}_t^{1+\kappa_d}(0)}{2(1+\kappa_d)}}{\frac{\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}}{\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}}} \int_{\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}}^{\infty} (1+kw+w^2)^{\frac{1}{p}-1} w^{-\frac{2}{p}-\frac{2\kappa_d}{p}} dw
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

W końcu w drugiej całce (B.19) podstawiając  $u = \frac{1}{w}$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}}{\frac{p\bar{F}_d^{1+\kappa_d}(0)}{2(1+\kappa_d)}} \int_0^{\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}} (1+kw+w^2)^{\frac{1}{p}-1} dw \\
 &+ \frac{\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}}{\frac{p\bar{F}_t^{1+\kappa_d}(0)}{2(1+\kappa_d)}} \int_0^{\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}} (1+ku+u^2)^{\frac{1}{p}-1} u^{\frac{2\kappa_d}{p}} du.
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

Mimo że funkcja podcałkowa drugiej z całek (B.20) przy  $u$  dążącym do 0 dąży do nieskończoności ( $\kappa_d < 0$ ), to całka jest zbieżna. Łatwo to sprawdzić, całkując przez części.

Całkując podobnie drugą z całek (B.17) i przyjmując, że:

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\alpha (1+kv+v^2)^\beta v^\gamma dv, \quad Q_{1,1} = \frac{k(2-p)}{2Vp\alpha_d\kappa_d(1+\kappa_d)}, \quad Q_{1,2} = \frac{(4-k^2)(1-p)}{2Vp\alpha_d\kappa_d(1+\kappa_d)} \text{ mamy}$$

$$\begin{aligned}
 EX &= \frac{1-\alpha_d\kappa_d}{\alpha_d\kappa_d} \left( \frac{\bar{F}_d(0)+\bar{F}_t(0)}{V} - 1 \right) \\
 &+ Q_{1,1} \left\{ \bar{F}_d^{1+\kappa_d}(0) J\left(\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p}-1, 0\right) + \bar{F}_t^{1+\kappa_d}(0) J\left(\frac{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p}-1, \frac{2\kappa_d}{p}\right) \right\} \\
 &+ Q_{1,2} \left\{ \bar{F}_d^{1+\kappa_d}(0) J\left(\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p}-2, 1\right) + \bar{F}_t^{1+\kappa_d}(0) J\left(\frac{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p}-2, \frac{2\kappa_d}{p}+1\right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

Wartość oczekiwana  $EX$  istnieje, gdy  $\kappa_d \in (-1, 0)$ .

Kolejne momenty  $EX^2$  oraz  $EX^T$  wyznaczane są taką samą metodą. Wzory (B.22) – (B.23) przedstawiają końcowy wynik obliczeń. Całka  $J(\alpha, \beta, \gamma)$  jest zdefiniowana tak samo jak w (B.21).

$$\begin{aligned}
 EX^2 &= \int_0^\infty x^2 \int_0^\infty h(x, t) dt dx = \left( \frac{1-\alpha_d\kappa_d}{\alpha_d\kappa_d} \right)^2 \left( \frac{\bar{F}_d(0)+\bar{F}_t(0)}{V} - 1 \right) \\
 &+ Q_{2,1} \left\{ \bar{F}_d^{1+\kappa_d}(0) J\left(\frac{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p}-1, 0\right) + \bar{F}_t^{1+\kappa_d}(0) J\left(\frac{\bar{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}{\bar{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p}-1, \frac{2\kappa_d}{p}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +Q_{2,1} \left\{ \overline{F}_d^{1+\kappa_d}(0) J \left( \frac{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 1, 0 \right) + \overline{F}_t^{1+\kappa_d}(0) J \left( \frac{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 1, \frac{2\kappa_d}{p} \right) \right\} \\
& +Q_{2,2} \left\{ \overline{F}_d^{1+\kappa_d}(0) J \left( \frac{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 2, 1 \right) + \overline{F}_t^{1+\kappa_d}(0) J \left( \frac{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 2, \frac{2\kappa_d}{p} + 1 \right) \right\} \\
& -Q_{2,3} \left\{ \overline{F}_d^{1+2\kappa_d}(0) J \left( \frac{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 1, 0 \right) + \overline{F}_t^{1+2\kappa_d}(0) J \left( \frac{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 1, \frac{4\kappa_d}{p} \right) \right\} \\
& -Q_{2,4} \left\{ \overline{F}_d^{1+2\kappa_d}(0) J \left( \frac{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 2, 1 \right) + \overline{F}_t^{1+2\kappa_d}(0) J \left( \frac{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 2, \frac{4\kappa_d}{p} + 1 \right) \right\}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
- Q_{2,1} &= \frac{(1-\alpha_d \kappa_d)(2-p)k}{V p \alpha_d^2 \kappa_d^2 (1+\kappa_d)}, \\
- Q_{2,2} &= \frac{(1-\alpha_d \kappa_d)(1-p)(4-k^2)}{V p \alpha_d^2 \kappa_d^2 (1+\kappa_d)}, \\
- Q_{2,3} &= \frac{(2-p)k}{2V p \alpha_d^2 \kappa_d^2 (1+2\kappa_d)}, \\
- Q_{2,4} &= \frac{(1-p)(4-k^2)}{2V p \alpha_d^2 \kappa_d^2 (1+2\kappa_d)}.
\end{aligned}$$

Drugi moment  $EX^2$  istnieje, gdy  $\kappa_d \in (-\frac{1}{2}, 0)$ . W końcu dla:

$$\begin{aligned}
- Q_{3,1} &= \frac{(2-p)k}{2V p \alpha_d \alpha_t \kappa_d \kappa_t (1+\kappa_d + \kappa_t)} \\
- Q_{3,2} &= \frac{(1-p)(4-k^2)}{2V p \alpha_d \alpha_t \kappa_d \kappa_t (1+\kappa_d + \kappa_t)}
\end{aligned}$$

otrzymano:

$$\begin{aligned}
EXT &= \frac{1-\alpha_t \kappa_t}{\alpha_t \kappa_t} EX + \frac{1-\alpha_d \kappa_d}{\alpha_d \kappa_d} ET - \frac{1-\alpha_t \kappa_t}{\alpha_t \kappa_t} \frac{1-\alpha_d \kappa_d}{\alpha_d \kappa_d} \left( \frac{\overline{F}_d(0) + \overline{F}_t(0)}{V} - 1 \right) \\
& -Q_{3,1} \left\{ \overline{F}_d^{1+\kappa_d + \kappa_t}(0) J \left( \frac{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 1, \frac{2\kappa_t}{p} \right) + \overline{F}_t^{1+\kappa_d + \kappa_t}(0) J \left( \frac{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 1, \frac{2\kappa_d}{p} \right) \right\} \\
& -Q_{3,2} \left\{ \overline{F}_d^{1+\kappa_d + \kappa_t}(0) J \left( \frac{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 2, \frac{2\kappa_t}{p} + 1 \right) \right. \\
& \left. + \overline{F}_t^{1+\kappa_d + \kappa_t}(0) J \left( \frac{\overline{F}_d^{\frac{p}{2}}(0)}{\overline{F}_t^{\frac{p}{2}}(0)}, \frac{1}{p} - 2, \frac{\kappa_d}{p} + 1 \right) \right\}
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Moment mieszany  $EXT$  istnieje, gdy  $\kappa_d + \kappa_t \in (-1, 0)$ .

# ROZKŁADY PRAWDOPODOBIENSTWA W OCENIE SUSZY HYDROLOGICZNEJ

## S t r e s z c z e n i e

W zadanym profilu wodowskazowym badano rozkłady prawdopodobieństwa dwóch charakterystyk przepływów niżówkowych: niedoboru i czasu trwania. Obie charakterystyki definiowano dwoma sposobami:

- POT – Peak Over Threshold – Ekstremum Ponad Przepływem Granicznym;
- SPA – Sequent Peak Algorithm – Algorytm Kolejnych Szczytów.

Obie metody są oparte na analizie przepływów niższych od zadanego przepływu granicznego  $Q_g$ . W oparciu o te definicje w rozdziale 5. przedstawiono dwie metody estymacji jednowymiarowych rozkładów maksymalnego niedoboru oraz czasu trwania niżówki. Pierwszą z nich jest klasyczna metoda Zelenhasića i Salvai, drugą – uogólniony rozkład Pareto (GDP – Generalized Pareto Distribution). Estymowane obydwoma metodami rozkłady ekstremalnych niedoborów i czasów trwania pokazują nienajlepsze dopasowanie do obserwacji, szczególnie przy wysokich prawdopodobieństwach nieprzekroczenia. Jednowymiarowe rozkłady charakterystyk niżówki zakładają, że każda z nich badana jest oddzielnie, pomijając oczywiste zależności pomiędzy niedoborem a czasem trwania. Zakłada się więc, że ta zależność pomiędzy wielkością niedoboru niżówki, a jej czasem trwania nie wpływa na estymowane rozkłady prawdopodobieństwa. W następnych rozdziałach to założenie zostało odrzucone, badano w nich dwa dwuwymiarowe rozkłady obu charakterystyk. W rozdziale 6. estymowano rozkład niedoboru i czasu trwania, zaś w rozdziale 7. rozkład ich wartości ekstremalnych.

Do estymacji niedoboru i czasu trwania niżówki zastosowano dwuwymiarowy rozkład log-normalny. Pozwoliło to na opisanie pewnego rodzaju niejednorodności obserwowanych niedoborów i czasów trwania. Podczas krótkich czasów przyrost niedoboru jest niższy niż dla długich. Ta niejednorodność może być przyczyną odrzucania hipotezy o dobrym dopasowaniu rozkładów jednowymiarowych. Dlatego też zaproponowano heurystyczny podział niżówek na dwie części. Wyróżniono niżówki:

- głębokie (długotrwałe);
- płytkie (krótkotrwałe).

Po odrzuceniu z zestawu obserwacji płytkich niżówek, do probabilistycznego opisu zastosowano dwuwymiarowy rozkład log-normalny. W większości badanych przykładów nie było podstaw do odrzucenia hipotez o dobrym dopasowaniu badanych rozkładów do obserwowanych charakterystyk niżówki. W drugiej części rozdziału 6. przy założeniu log-normalności badano rozkład intensywności niżów-

ki. Przykładowe zastosowanie otrzymanych wyników do oceny czasowej zmienności intensywności niżówki pokazano na przykładzie zlewni górnej Nysy Kłodzkiej.

Estymacja rozkładów charakterystyk maksymalnych została przeprowadzona poprzez wykorzystanie dwuwymiarowego uogólnionego rozkładu Pareto (Bivariate Generalized Pareto Distribution – BGPLD) [Tajvidi 1996]. Dwa parametry przesunięcia, estymowane metodą największej wiarygodności, rozdzielają niżówki na dwie grupy - niżówki głębokie oraz niżówki płytkie. Oznacza to, iż została zaproponowana, statystycznie poprawna metoda wyznaczania głębokich niżówek z ciągu obserwacji. W następnym kroku wyznaczono rozkłady brzegowe niedoboru i czasu trwania niżówki (z powodu specyficznego kształtu dziedziny rozkładu BGPLD, nie można estymować rozkładów brzegowych rozważając tylko jednowymiarowe dane). W drugiej części rozdziału 7. badano wybór poziomu przepływu granicznego  $Q_g$  na postać rozkładów charakterystyk maksymalnych. Zauważono, że dla pewnych przepływów granicznych estymowane rozkłady wykazują niestabilność. Autor uważa, że taka niestabilność charakteryzuje badaną zlewnię i powinna być badana w każdym rozważanym profilu wodowskazowym.

**słowa kluczowe:** niedobór i czas trwania niżówki, dwuwymiarowy rozkład log-normalny, uogólniony dwuwymiarowy rozkład Pareto, niżówki głębokie, niżówki płytkie, niestabilność niżówek

# PROBABILITY DISTRIBUTIONS IN HYDROLOGICAL DROUGHT ESTIMATION

## S u m m a r y

The paper considers the estimation of two low flow indices: deficit and duration. The observed low flow is defined by two methods:

- POT – Peak Over Threshold
- SPA – Sequence Over Threshold

Both methods are based on analysis of runoffs lower than given threshold level  $Q_g$ . Basing on these two definitions, in chapter 5 two methods of low flow distribution estimation: deficit and duration extremes are presented. The first one is the classical Zelenhasić and Salvai method, the second one is Generalized Pareto Distribution (GPD). Probabilities of extremes obtained by these methods shows weak fitting, especially for high probabilities of non-exceedance. One – dimensional methods for estimating low flow extreme indices assume, that each of indices is analysed separately and do not include any dependences between low flow deficit and duration. During the estimation it is assumed, that evident relationship between increasing deficit and duration does not have any influence on probability distributions. In the next chapters this assumption is rejected, where two two – dimensional random variables are considered. In chapter 6 low flow deficit and duration and in chapter 7 their extreme characteristics are considered.

For estimating low flow deficits and duration two – dimensional log-normal distribution is used. At the beginning of chapter 6 some unhomogeneity of observed low flow is noticed. For short duration the increase of low flow deficit is smaller than for longer one. Such unhomogeneity could be the cause of rejecting the hypothesis of good fitting of low flow deficit and duration with one – dimensional log-normal distribution. Because of that, the heuristic partition of the low flow in two parts is suggested. According to that, low flow should be divided into:

- deep (long) low flow,
- shallow (short) one.

After rejecting the shallow low flow from the observed data, the two – dimensional log-normal distribution is executed. For the most of examined low flow records there is no basis for rejecting the hypothesis of good fitting. In the second part of that chapter, assuming log-normality, low flow intensity distribution is examined. In the paper exemplary variability of low flow intensity in upper Nysa Kłodzka River basin is presented.

Estimation of low flow extreme indices is done with the usage of the Bivariate Generalized Pareto Distribution (BGPD) [Tajvidi 1996]. Two shift parameters, estimated with maximum likelihood method, categorise the low flow into two groups: deep and shallow. Thats means that the method of extracting deep lows flow from



observed data record is presented. In the next stage marginal distributions of extreme low flow deficit and duration are estimated (because of specific BGPD domain, marginal distributions can not be obtained by considering one-dimensional cases only). At the end of chapter 7 the influence of threshold level  $Q_g$  selection on the low flow extreme distribution is considered. It is noticed that for some threshold levels, estimated intervals distributions are not stable. The author believes that such instability is the attribute of the catchment area and always should be examined for particular watershed profile.

**key words:** low flow deficits and duration, two – dimensional log-normal distribution, extreme low flow indices, Bivariate Generalized Pareto Distribution, division on deep and shallow low flows, low flow stability