Monotoniczne Aproksymacje Probabilistyki Wolnej z Zastosowaniami w Teorii Grafów

Rafał Sałapata

Rozprawa doktorska przygotowana pod kierunkiem
dr. hab. Romualda Lenczewskiego

Politechnika Wrocławska
Instytut Matematyki i Informatyki

Wrocław 2007 r.

Podziękowania

Dr. hab. Romualdowi Lenczewskiemu, za pełną cierpliwości i zrozumienia opiekę naukową, składam najwyższe wyrazy wdzięczności i szacunku.

Spis treści

Wstęp **2**

1 Monotoniczna hierarchia wolna **7**
1.1 Podstawowe pojęcia i definicje 8
1.2 Definicja m-monotonicznej niezależności 10
1.3 Kombinatoryka i lematy o momentach mieszanych 13
1.4 GNS reprezentacja 18
1.5 Centralne Twierdzenie Graniczne 21
1.6 Twierdzenie graniczne Poissona 25
1.7 Zasada niezmienniczości 28
1.8 m-monotoniczne operatory gaussowskie 29

2 Monotoniczno–wolna interpolacja związana z rozkładami Kestena **35**
2.1 Podstawowe pojęcia i definicje 36
2.2 Operatory p-gaussowskie 37
2.3 Centralne Twierdzenie Graniczne 45
2.4 Funkcje generujące i miary graniczne 48
2.5 Operatory Poissona 56

3 Rozkłady iloczynu wolnego grafów **61**
3.1 Podstawowe pojęcia 61
3.2 Sploty miar i iloczyny grafów 63
3.3 Wolny i m-monotoniczny iloczyn grafów 64
3.4 Rozkład wolny i m-monotoniczny 68
3.5 Rozkład kwantowy i rozkład cykliczny 70
3.6 Zastosowania do iloczynu wolnego grafów 74

Bibliografia **91**

Wstęp

Probabilistyka nieprzemienna jest stosunkowo młodą gałęzią matematyki. Jej początki sięgają pierwszej połowy lat osiemdziesiątych, kiedy to w pracach Avitzoura i Voiculescu [Av, Vo1] po raz pierwszy zostało sformułowane pojęcie *wolnego iloczynu C^*-algebr*, które dało początek teorii, zwanej obecnie *probabilistyką wolną*. Teoria ta przypomina klasyczna probabilistykę, z tym że klasyczne pojęcie niezależności zmiennych losowych jest zastąpione znacznie bardziej nieprzemienną *niezależnością wolną*. Okazuje się jednak, że nie jest to jedyne pojęcie nieprzemiennej niezależności. Przykładowo, istnieje tzw. *niezależność booleowska*, która wywodzi się z pojęcia regularnego iloczynu wolnego badanego w kontekście funkcji na grupie przez Bożejkę [B] w roku 1986 (patrz także [SW], gdzie wprowadzony był splot booleowski miar probabilistycznych), jak również *niezależność monotoniczna*, wprowadzona przez Murakiego w 2001 roku (wcześniej Muraki i Lu [Lu] niezależnie udowodnili odpowiednie centralne twierdzenie graniczne dające rozkład arcusa sinusa). Powstała też teoria aksjomatyczna, zapoczątkowana przez Schürmanna [Sch], z istotnym rozszerzeniem przez Murakiego [Mu3]. Według tej teorii istnieją jedynie 3 pojęcia niezależności spełniające pewien zestaw naturalnych aksjomatów (między innymi łączność), które dają przemienny splot [Sch], mianowicie: tensorowa (klasyczna), booleowska oraz wolna, który to zbiór należy rozszerzyć o niezależność monotoniczną [Mu3], jeżeli zrezygnuje się z przemienności splotu [Mu3].

Pomimo faktu istnienia jedynie czterech podstawowych modeli probabilistycznych powstały inne rodzaje niezależności, które nie spełniały z kolei aksjomatu łączności. Tym sposobem skonstruowano szereg modeli, w jakiś sposób związanych z tymi czterema podstawowymi probabilistykami: za pomocą interpolacji między nimi bądź aproksymacji którejś z nich [BLS, BS1, BS4, BW, FL, Kr, Le1, Le2, LeS]. Odpowiadające im pojęcia niezależności miały charakter mieszany, ale zarazem doprowadziły do powstania wielu interesujących wyników, na przykład uogólnienia pojęcia niezależności wolnej do tzw. *niezależności warunkowo wolnej* [BS1, BLS], udowodnienia, że każda probabilistyczna miara symetryczna może być otrzymana w centralnym twierdzeniu granicznym dla odpowiednio niezależnych zmiennych losowych [ACL, CDI], czy też odkryciu pojęcia niezależności, zwanego *wolną niezależnością z subordynacją*, które jest związane z zasadą subordynacji dla addytywnych oraz multiplikatywnych splotów wolnych [Le5, Le7]. Zatem, interesującym wydaje się dalsze badanie podobnych pojęć, a w szczególności tych, które przybliżają probabilistykę wolną. Niniejsza praca poświęcona jest

właśnie badaniom aproksymacji probabilistyki wolnej, które w pewnym sensie mają charakter monotoniczny, a na dodatek są związane z probabilistyką monotoniczną. Podamy także zastosowania jednej z nich w teorii grafów.

Definicja iloczynu wolnego stanów bazuje na warunku Voiculescu zadanym na iloczynie wolnym algebr z identyfikacją jedynek. Warto zauważyć, że iloczyn monotoniczny stanów [Mu1] również może być zdefiniowany za pomocą warunku Voiculescu, przy czym określonego na iloczynie wolnym algebr bez identyfikacji jedynek (Definicja 1.1). Oczywiście, w takim przypadku musimy zadać dodatkowy warunek, który pozwoli nam na obliczanie momentów mieszanych z wewnętrznymi jedynkami (Definicja 1.2). Obserwacja ta prowadzi nas do konstrukcji *monotonicznej hierarchii wolnej*, opisanej w Rozdziale 1. Nieco inne rozważania na poziomie przestrzeni Focka dają z kolei model *p-interpolacji*, będący tematem rozważań Rozdziału 2.

Pierwsza z nich jest aproksymacją dyskretną, indeksowaną naturalnym parametrem m, druga natomiast jest typu ciągłego, indeksowana parametrem rzeczywistym $p \in [0,1]$. Główna idea, leżąca u podstaw definiowania pojęcia niezależności, jest taka sama w przypadku obydwu aproksymacji. Polega ona na obserwacji faktu, że probabilistyka monotoniczna jest ściśle związana z liniowym porządkiem zbioru indeksów odpowiedniej rodziny algebr, natomiast probabilistyka wolna w ogóle od porządku tego nie zależy. Obie prezentowane aproksymacje polegać będą na „zaniedbywaniu" porządku w zbiorze indeksów wraz ze stopniowym przybliżaniem probabilistyki wolnej. Idea ta jest widoczna w niemal każdym zagadnieniu dotyczącym obydwu modeli, na przykład w strukturze ułamków łańcuchowych transformat Cauchy'ego miar otrzymanych w centralnym twierdzeniu granicznym, czy też w konstrukcji klasy partycji nieprzecinających, naturalnie wyłaniającej się przy obliczaniu momentów mieszanych zmiennych odpowiednio niezależnych, czy też operatorów gaussowskich. Oczywiście, owe „zaniedbywanie" będzie inaczej rozumiane w każdym z modeli.

Głównym celem pierwszego rozdziału jest konstrukcja oraz zbadanie podstawowych własności monotonicznej hierarchii wolnej. Ściślej mówiąc, naszą hierarchię tworzy ciąg iloczynów stanów $(\phi^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ zwany *m-monotonicznym iloczynem stanów* [LeS]. Iloczyn monotoniczny otrzymywany jest w przypadku $m = 1$, natomiast w granicy $m \to \infty$ osiągany jest (w sensie słabej zbieżności) iloczyn wolny. Jednym z ważniejszych wyników uzyskanych dla monotonicznej hierarchii wolnej jest centralne twierdzenie graniczne (Twierdzenie 1.3). Mówi ono, że graniczne momenty odpowiednich sum S_N zmiennych losowych wyrażają się za pomocą liczby uporządkowanych dwupartycji nieprzecinających, które są monotoniczne na blokach o głębokości większej niż m, oznaczanych symbolem $\mathcal{ONC}_n^2(m)$ (Definicja 1.3)

$$\lim_{N\to\infty} \phi\left((S_N)^{2n}\right) = \frac{\left|\mathcal{ONC}_{2n}^2(m)\right|}{n!}.$$

Klasa partycji $\mathcal{ONC}_n(m)$ w naturalny sposób wyłania się również podczas obliczeń związanych z zasadą niezmienniczości (Twierdzenie 1.7). W Podrozdziale 1.8 opiszemy realizację momentów w niej otrzymanych za pomocą *m-monotonicznych operatorów gaussowskich* $\omega^{(m)}(f)$ określonych na podprzestrzeni $\mathcal{F}^{(m)}(\mathcal{H})$ wolnej przestrzeni Focka

$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ nad przestrzenią Hilberta $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^+)$. Dla $f_1, f_2, \ldots, f_{2k} \in \Theta = \{\chi_{(s,t]} : 0 \leq s < t\}$ o nośnikach parami równych lub rozłącznych podamy jawną formułę na obliczanie momentów mieszanych operatorów $\omega^{(m)}(f_1), \omega^{(m)}(f_2), \ldots, \omega^{(m)}(f_{2k})$ w stanie próżni ϕ. Wartym odnotowania jest fakt, że nawet w przypadku monotonicznych operatorów gaussowskich $\omega(f) = \omega^{(1)}(f)$ otrzymujemy nowy wzór kombinatoryczny

$$\phi\big(\omega(f_1)\omega(f_2)\ldots\omega(f_{2k})\big) = \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{NC}_{2k}^2 \\ \pi\sim(f_1,\ldots,f_{2k})}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\| f^{(i)} \|^2}{\zeta(\pi_i)+1},$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich nieprzecinających dwupartycjach uporządkowanych $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ „zgodnych" z ciągiem funkcji $(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$ (patrz Definicja 1.5) oraz $\zeta(\pi_i)$ oznacza liczbę wszystkich bloków π_j, które są wewnętrzne względem bloku π_i takich, że $f^{(j)} = f^{(i)}$.

Rozdział drugi poświęcony jest innej aproksymacji probabilistyki wolnej na poziomie przestrzeni Focka, będącej ciągłą interpolacją między modelem monotonicznym a modelem wolnym. Wprowadzimy w nim rzeczywisty parametr $p \in [0,1]$, który daje interpolację między obydwoma modelami, osiąganymi dla $p = 0$ (monotoniczny) oraz $p = 1$ (wolny). Aproksymację tę nazywać będziemy *p-interpolacją*.

W pewnych elementach p-interpolacja przymominać będzie konstrukcję Bożejki i Speichera opisaną w pracach [BS2, BS3, BS4], w których to przedstawiony został model, dający ciągłą interpolację pomiędzy kombinatorykami i operatorami gaussowskimi w probabilistyce wolnej i klasycznej. Pomysł tej tak zwanej q-deformacji polegał na wprowadzeniu ciągłego parametru $q \in [-1,1]$ oraz ustaleniu „wkładu" dowolnej partycji π, we wzorze na momenty operatorów q-gaussowskich, przez $q^{c(\pi)}$, gdzie $c(\pi)$ oznacza liczbę przecięć w partycji π. W ten oto sposób dla różnych wartości q mamy różne rodzaje kombinatoryk, np. dla $q = 1$ otrzymujemy kombinatorykę klasyczną, a dla $q = 0$ – wolną. W p-interpolacji w miejsce parametru q wprowadzimy parametr $p \in [0,1]$; zamiast klasy wszystkich partycji rozważać będziemy *nieprzecinające partycje uporządkowane* $\mathcal{ONC}_n$, natomiast rolę liczby przecięć $c(\pi)$ odgrywać będzie liczba nieporządków $e(P)$ partycji $P \in \mathcal{ONC}_n$. Co ciekawe, liczba ta okazuje się być uogólnieniem liczby inwersji Eulera na zbiory częściowo uporządkowane, jakimi są nieprzecinające partycje uporządkowane.

Jednym z ważniejszych wyników dotyczących p-interpolacji jest konstrukcja *operatorów p-gaussowskich* (Podrozdział 2.2) określonych na wolnej przestrzeni Focka z iloczynem skalarnym zadanym wzorem

$$\langle F, G\rangle_p = \sum_{\sigma\in S_n} p^{\mathrm{e}(\sigma^{-1})} \int_{\Delta_\sigma} F(t_n,\ldots,t_1)\overline{G}(t_n,\ldots,t_1)dt_n\ldots dt_1\,,$$

gdzie $F, G \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, $\Delta_\sigma = \{(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}_+^n; t_{\sigma(1)} \leqslant \ldots \leqslant t_{\sigma(n)}\}$ oraz $e(\sigma)$, podobnie jak w przypadku partycji, oznacza liczbę nieporządków permutacji σ. W Twierdzeniu 2.1 podamy jawny wzór na momenty mieszane tych operatorów.

Kolejnym wynikiem uzyskanym dla p-interpolacji jest centralne twierdzenie graniczne dla dyskretnych operatorów p-gaussowskich (Twierdzenie 2.2). Mówi ono, że nieparzyste momenty miary granicznej μ są równe zero, natomiast parzyste są postaci

$$\mu_{2n} = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathcal{ONC}_{2n}^2} p^{e(P)} .$$

Dla $p = 0$ otrzymujemy $\mu_{2n} = |\mathcal{MNC}_{2n}^2|/n!$, gdzie $\mathcal{MNC}_{2n}^2$ jest zbiorem monotonicznych dwupartycji uporządkowanych (Definicja 1.3), co daje parzyste momenty rozkładu arcusa sinusa (Propozycja 1.3), czyli centralnego rozkładu granicznego dla probabilistyki monotonicznej [Mu2]. Z kolei dla $p = 1$ otrzymujemy $\mu_{2n} = |\mathcal{NC}_{2n}^2|$, co odpowiada momentom rozkładu Wignera, który jest otrzymywany w centralnym twierdzeniu granicznym w przypadku wolnym [Sp, Vo1, VDN].

W Rozdziale 3 przedstawimy zastosowania metod probabilistyki nieprzemiennej w teorii grafów, która odgrywa ważną rolę w wielu dziedzinach matematyki i jej zastosowań. W wielu przypadkach tych zastosowań ważne są nie tylko własności kombinatoryczne pojedynczych grafów, ale przede wszystkim asymptotyczne zachowanie się dużych grafów (gdy liczba wierzchołków dąży do nieskończoności). W tym kontekście, typowym obiektem zainteresowań są spektralne własności macierzy incydencji względem wybranego stanu czy też ich pełne spektrum.

Probabilistyka nieprzemienna pokazuje, że pewne rodzaje iloczynów algebraicznych przestrzeni probabilistycznych, odpowiadające podstawowym pojęciom stochastycznej niezależności w teorii aksjomatycznej [Mu3,Sch], są ściśle związane z pewnymi iloczynami grafów z wyróżnionym wierzchołkiem zwanym *korzeniem* [ALS]. Zauważmy, że idea algebraicznej przestrzeni probabilistycznej polega na wyróżnieniu pewnego stanu, co w języku grafów prostych, odpowiada wyróżnieniu wierzchołka. Naturalna zatem wydaje się być teza, że pewne typy iloczynów grafów z korzeniami mają swoje odpowiedniki wśród głównych pojęć stochastycznej niezależności.

Dobrze znany przypadek grafów Cayley'a wolnych iloczynów grup związanych z niezależnością wolną może być postrzegane jako pierwszy dowód na prawdziwość powyższej tezy. Fakt, że taki związek zachodzi w ogólnym przypadku iloczynu wolnego grafów z korzeniem wydaje się być mniej znany. W [ALS] pokazano, że iloczyn wolny grafów z korzeniem, wprowadzony przez Znojko [Zn] dla grafów symetrycznych oraz uogólniony przez Quenella [Qu] i Gutkina [Gu], jest kanonicznie związany z pojęciem wolnej niezależności. Innym dowodem, potwierdzającym tę tezę, było odkrycie przez Accardiego, Ben Ghorbala i Obatę [ABO], że iloczyn *grzebieniowy* grafów jest kanonicznie związany z niezależnością *monotoniczną* [Lu,Mu2]. Podobną zależność między iloczynem *gwiaździstym* grafów a niezależnością *booleowską* zauważył Lenczewski [Le6], co umożliwiło wykorzystanie probabilistyki booleowskiej do badania własności spektralnych iloczynu gwiaździstego [Ob]. Ponadto, dobrze znany jest fakt, że kartezjański iloczyn grafów jest naturalnie związany z niezależnością tensorową (bosonową), co uzupełnia związek czterech najważniejszych rodzajów niezależności z wyżej wymienionymi iloczynami grafów.

W Rozdziale 3 niniejszej pracy zaobserwujemy, że monotoniczna hierarchia wolna, wprowadzona w [LeS] i opisana w Rozdziale 1, odpowiada w naturalny sposób pewnemu naturalnemu ciągowi iloczynów grafów, zwanych *m-monotonicznymi iloczynami grafów*. Ciąg ten aproksymuje w naturalny (aczkolwiek, niesymetryczny) sposób iloczyn wolny grafów i przypomina ciąg *m-wolnych iloczynów grafów* [ALS], który aproksymuje iloczyn wolny grafów w sposób symetryczny. W szczególności podamy rozkład macierzy incydencji iloczynu m-monotonicznego grafów na m-monotonicznie niezależne składowe addytywne (Twierdzenie 3.2). Wykorzystując jej aproksymacyjne właściwości, będziemy mogli przybliżać spektrum iloczynu wolnego grafów. Wykorzystamy tu nowy rodzaj rozkładu kwantowego, który jest związany z hierarchią m-monotoniczną, a który w skrócie określać będziemy jako *rozkład cykliczny*. Za jego pomocą będziemy mogli przedstawić przestrzeń $l^2(V)$ jako sumę prostą interaktywnych przestrzeni Focka [ABo], które to są dobrze znanymi obiektami w probabilistyce nieprzemiennej. Za ich pomocą można wyznaczyć nie tylko pełne spektrum iloczynu wolnego grafów, ale także określić, jak wygląda krotność jego elementów.

Czytelnika zainteresowanego klasycznymi metodami zastosowanymi do grafów Cayley'a i innych grafów nieskończonych odsyłamy do prac [AK, CS, FS, GM, Ke, Ku, MW, Wo1, Wo2] oraz odnośników tam zawartych.

Rozdział 1

Monotoniczna hierarchia wolna

Jak już wspominaliśmy we Wstępie, rozdział ten poświęcony jest monotonicznej hierarchii wolnej. Znaczna część jej opisu bazuje na kombinatoryce uporządkowanych partycji nieprzecinających, w których bloki o głębokości większej niż m uporządkowane są monotonicznie (patrz Definicja 1.3). Oznaczać je będziemy przez $\mathcal{ONC}_n(m)$ (ordered non-crossing). Partycje te będą użyteczne między innymi w centralnym twierdzeniu granicznym (Podrozdział 1.5). Rozkłady, o momentach w nim otrzymanych, mogą być opisane w ładny sposób za pomocą ułamków łańcuchowych ich transformat Cauchy'ego. Dokładniej, jeżeli przez $\mu^{(m)}$ oznaczymy centralne miary graniczne, to ich transformaty Cauchy'ego $G^{(m)}$ spełniają zależność rekurencyjną

$$G^{(m+1)}(z) = \frac{1}{z - G^{(m)}(z)}\,, \qquad m \geqslant 1\,,$$

gdzie $G^{(1)}(z)$ jest transformatą rozkładu arcusa sinusa. Wynika stąd, że transformatę Cauchy'ego $G^{(m)}$ możemy zapisać w postaci ułamka łańcuchowego

$$G^{(m)}(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{\ddots \; z - \cfrac{1}{z - \cfrac{1/2}{z - \cfrac{1/2}{z - \ddots}}}}}\,,$$

gdzie $1/2$ po raz pierwszy pojawia się na $m+1$ poziomie.

Pozostałe, ważniejsze wyniki tego rozdziału dotyczyć będą twierdzenia granicznego Poissona (Podrozdział 1.6), zasady niezmienniczości (Podrozdział 1.7) oraz twierdzeń dotyczących m-monotonicznych operatorów gaussowskich (Podrozdział 1.8). Ciekawym wydaje się być fakt, że w celu obliczenia momentów mieszanych m-monotonicznych

operatorów gaussowskich korzystamy z funkcji ψ, określonej na partycjach $\mathcal{ONC}_n^2(m)$, multiplikatywnej względem bloków (Lemat 1.7)

$$\varphi(a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})) = \psi_{\pi_1}(s^{(1)})\psi_{\pi_2}(s^{(2)}) \ldots \psi_{\pi_k}(s^{(k)}) ,$$

gdzie $a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$ jest odpowiednim iloczynem operatorów kreacji i anihilacji związanym z ciągiem funkcji charakterystycznych $(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$ oraz $s^{(i)}$ jest prawym końcem nośnika funkcji związanej z blokiem π_i. Rozważania dotyczące monotonicznej hierarchii wolnej, będą wykorzystane w Rozdziale 3 do aproksymacji spektrum iloczynu wolnego grafów.

Nasze podejście w swej konstrukcji przypominać będzie *hierarchię wolną* [FL,Le1], która stanowi dyskretną aproksymację (rozumianą w słabym sensie zbieżności) probabilistyki wolnej, rozpoczynającą się od probabilistyki booleowskiej.

1.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Rozpoczniemy od zdefiniowania najważniejszego pojęcia w kwantowym rachunku prawdopodobieństwa, czyli od algebraicznej przestrzeni probabilistycznej. Zatem niech $\mathcal{A}$ będzie zespoloną *-algebrą z jedynką oraz niech $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ będzie funkcjonałem liniowym na $\mathcal{A}$. Będziemy mówili, że ϕ jest

– *dodatni*, gdy $\phi(a^*a) \geqslant 0$ dla wszystkich $a \in \mathcal{A}$,
– *unormowany*, gdy $\phi(1) = 1$,
– *stanem*, gdy jest dodatni i unormowany.

O ile nie będzie inaczej powiedziane, zakładać będziemy, że ϕ jest stanem. Wówczas parę $(\mathcal{A}, \phi)$ nazywać będziemy *algebraiczną przestrzenią probabilistyczną*. Jeżeli $\mathcal{A}$ jest $\mathcal{C}^*$-algebrą, to $(\mathcal{A}, \phi)$ nazywać będziemy $\mathcal{C}^*$-*przestrzenią probabilistyczną*. Przez $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ oznaczać będziemy rodzinę *-podalgebr algebry $\mathcal{A}$, indeksowaną liniowo uporządkowanym zbiorem I. Dodatkowo zakładać będziemy, że każda z algebr $\mathcal{A}_i$ posiada *wewnętrzną jedynkę*, tzn. dla każdego $i \in I$ istnieje element $1_i \in \mathcal{A}_i$, który jest jedynką w $\mathcal{A}_i$ oraz $\phi(1_i) = 1$, ale niekoniecznie $1_i = 1$.

Przykład 1.1 Niech $q \in \mathcal{A}$ będzie samosprzężonym projektorem różnym od jedynki, tzn. $q^2 = q^* = q \neq 1$. Oczywiście zbiór $q \otimes \mathcal{A}$ jest *-podalgebrą algebry będącej iloczynem tensorowym $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Co więcej, element $q \otimes 1$ jest wewnętrzną jedynką w $q \otimes \mathcal{A}$, ale nie jest on jedynką na całej algebrze $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Elementy algebraicznej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{A}, \phi)$ nazywać będziemy *algebraicznymi zmiennymi losowymi* lub po prostu zmiennymi losowymi. Ciąg momentów $(\phi(a^n))_{n=0}^\infty$ nazywamy *rozkładem* zmiennej losowej $a \in \mathcal{A}$ względem stanu ϕ. Jeżeli, dla samosprzężonej zmiennej a, istnieje jednoznacznie wyznaczona miara probabilistyczna μ na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, taka że

$$\phi(a^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x) , \qquad n \in \mathbb{N} ,$$

to wówczas μ również nazywać będziemy rozkładem zmiennej a.

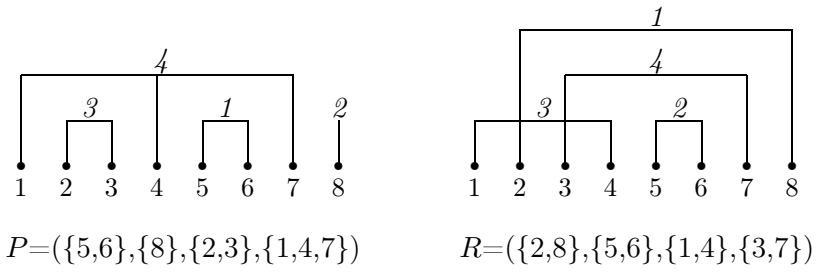
Jeżeli $\mathcal{B}$ jest *-podalgebrą z wewnętrzną jedynką $1_{\mathcal{B}}$ algebraicznej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{A}, \phi)$, to każdej algebraicznej zmiennej losowej $a \in \mathcal{B}$ przyporządkujmy zmienną $a^0 \in \mathcal{B}$ zadaną wzorem

$$a^0 = a - \phi(a)1_{\mathcal{B}}, \tag{1.1}$$

Nietrudno zauważyć, że $a^0 \in \operatorname{Ker}\phi$. Dzięki powyższej notacji każdy element *-podalgebry $\mathcal{B}$ możemy przedstawić jako kombinację liniową jedynki $1_{\mathcal{B}}$ oraz zmiennej losowej należącej do $\operatorname{Ker}\phi$, co jest przydatne w wielu rachunkach.

Partycją uporządkowaną P zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazywamy ciąg $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ parami rozłącznych, niepustych zbiorów, takich, że $P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k = \{1, 2, \ldots, n\}$. Zbiór wszystkich uporządkowanych partycji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{OP}_n$. Dla dowolnego bloku P_r, liczbę r, oznaczającą jej pozycję w ciągu P, nazywać będziemy *kolorem*. Partycję uporządkowaną, której wszystkie bloki są dwuelementowe, nazywamy *dwupartycją* uporządkowaną. Uporządkowaną partycję P nazywamy *przecinającą* jeżeli istnieją $s, s' \in P_i$ oraz $r, r' \in P_j$ dla pewnych $i \neq j$, takie że $s < r < s' < r'$. Jeżeli P nie jest partycją przecinającą, to mówimy, że P jest partycją nieprzecinająca. Zbiór wszystkich uporządkowanych partycji (dwupartycji) nieprzecinających zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{ONC}_n$ ($\mathcal{ONC}_n^2$). Blok P_i uporządkowanej partycji nieprzecinającej P nazywamy *wewnętrznym* względem bloku P_j, co oznaczamy $P_j < P_i$, jeżeli istnieją $p, q \in P_j$, takie, że $p < s < q$, dla wszystkich $s \in P_i$. Równoważnie mówimy, że P_j jest blokiem *zewnętrznym* względem P_i. Przez *głębokość* bloku $d(P_i)$ rozumiemy liczbę jego bloków zewnętrznych wraz z nim samym. W szczególności, jeżeli nie istnieją bloki zewnętrzne względem P_i, to $d(P_i) = 1$.

Przykład 1.2 Rozważmy dwie partycje uporządkowane P =({5,6},{8},{2,3},{1,4,7}) oraz R =({2,8},{5,6},{1,4},{3,7}), których diagramy przedstawia Rysunek 1.1.



P=({5,6},{8},{2,3},{1,4,7}) R=({2,8},{5,6},{1,4},{3,7})

Rysunek 1.1 Diagramy przykładowych partycji uporządkowanych.

Widzimy, że partycja P jest nieprzecinająca, czyli $P \in \mathcal{ONC}_8$. Co więcej, P posiada blok jednoelementowy, który nazywać będziemy *singletonem*. Z drugiej strony, partycja R jest partycją przecinającą o wszystkich blokach dwuelementowych, a zatem $R \in \mathcal{OP}_8^2$.

1.2 Definicja m-monotonicznej niezależności

W podrozdziale tym przypomnimy dyskretną interpolację pomiędzy probabilistyką monotoniczną a probabilistyką wolną, tzn. ciąg różnych rodzajów niezależności indeksowany parametrem naturalnym $m \in \mathbb{N}$. Pierwszym modelem (dla $m = 1$) jest niezależność monotoniczna. Kolejne modele będą się stopniowo różniły od monotonicznego, coraz bardziej przybliżając wolną niezależność, która będzie granicą tego ciągu w słabym sensie (tzn. w sensie zbieżności momentów mieszanych). Interpolację tą, jak również odpowiadający jej ciąg nieprzemiennych przestrzeni probabilistycznych, nazywamy *monotoniczną hierarchią wolną*.

Definicja 1.1 Załóżmy, że $(\mathcal{A}, \phi)$ jest algebraiczną przestrzenią probabilistyczną, w której $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ jest rodziną *-podalgebr. Mówimy, że rodzina $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ spełnia *warunek Voiculescu*, jeżeli dla wszystkich $a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$, takich, że $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$, zachodzi równość

$$\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) = 0\,,$$

o ile $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathrm{Ker}\phi$.

Powyższy warunek wprowadzony został przez Voiculescu w [Vo1] dla podalgebr z amalgamacją (identyfikacją) jedynek, tzn. $1_i = 1$ dla wszystkich $i \in I$. W takim przypadku warunek ten jest równoważny definicji wolnej niezależności algebr. Jednakże, w niniejszej pracy nie zakładamy w ogólności amalgamacji jedynek. Dlatego też, dla uzyskania pełnej definicji niezależności, musimy zadać dodatkowy warunek na wyliczanie momentów mieszanych z jedynkami.

Przypomnijmy, że w probabilistyce monotonicznej ważną rolę odgrywa liniowe uporządkowanie zbioru indeksów I, w probabilistyce wolnej natomiast porządek w I jest nieistotny. Wychodząc od modelu monotonicznego, nasza hierarchia będzie stopniowo „zaniedbywała" porządek, przybliżając przypadek wolny.

Definicja 1.2 Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz niech I będzie liniowo uporządkowanym zbiorem indeksów. Rodzinę *-podalgebr $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ algebraicznej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{A}, \phi)$, która spełnia warunek Voiculescu, nazywać będziemy *m-monotonicznie niezależną* (lub po prostu *m-monotoniczną*) względem ϕ, jeżeli dla dowolnych $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, \ldots, a_n \in \mathcal{A}_{i_n}$, takich że $i_1 \neq \ldots \neq i_m < i_{m+1} < \ldots < i_r > i_{r+1}$, zachodzi

$$\phi(a_1 \ldots a_{j-1} 1_{i_j} a_{j+1} \ldots a_n) = \begin{cases} \phi(a_1 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_n) & \text{dla } j = 1, \ldots, r \\ 0 & \text{dla } j = r+1, \ldots, n \end{cases}, \quad (1.2)$$

o ile $a_1, \ldots, a_{j-1} \in \operatorname{Ker}\phi$. Rodzinę zmiennych losowych nazywać będziemy *m-monotonicznie niezależną* (*m-monotoniczną*), jeżeli *-algebry przez nie generowane są m-monotonicznie niezależne.

Przykład 1.3 Załóżmy, że $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ z wewnętrznymi jedynkami $\{1_1, 1_2\}$ są 2-monotonicznie niezależnymi *-podalgebrami algebraicznej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{A}, \phi)$ oraz niech $a \in \mathcal{A}_1$, $b \in \mathcal{A}_2$. Łatwo można pokazać, że momenty do rzędu czwartego włącznie zgadzają się z momentami w przypadku wolnym, to znaczy

$$\begin{aligned} \phi(ab) &= \phi(a)\phi(b), \\ \phi(aba) &= \phi(a^2)\phi(b), \\ \phi(abab) &= \phi(a^2)\phi^2(b) + \phi(b^2)\phi^2(a) - \phi^2(a)\phi^2(b). \end{aligned}$$

Obliczymy teraz moment rzędu piątego

$$\begin{aligned} \phi(ababa) &= \phi(a^0baba) + \phi(a)\phi(baba) \\ &= \phi(a^0b^0aba) + \phi(b)\phi(a^0aba) + \phi(a)\phi(b^0aba) + \phi(a)\phi(b)\phi(aba)\,. \end{aligned}$$

Zauważmy, że pierwszy składnik ostatniej sumy znika na mocy Definicji 1.2. Ponadto, proste rachunki dają

$$\begin{aligned} \phi(a^0aba) &= \phi(b)\phi(a^3) - \phi(b)\phi(a)\phi(a^2)\,, \\ \phi(b^0aba) &= \phi^2(a)\phi(b^2) - \phi^2(a)\phi^2(b)\,, \\ \phi(aba) &= \phi(b)\phi(a^2)\,. \end{aligned}$$

Tak więc ostatecznie otrzymujemy

$$\phi(ababa) = \phi^3(a)\phi(b^2) - \phi^3(a)\phi^2(b) + \phi(a^3)\phi^2(b)\,.$$

Warto zauważyć, że już sam moment $\phi(a^0b^0aba)$ jest w przypadku wolnym różny od zera. Dzięki tym rachunkom widzimy, że m-monotoniczna niezależność istotnie różni się od niezależności wolnej i monotonicznej.

Poniżej przypomnimy kilka podstawowych własności monotonicznej hierarchii wolnej. Zaczniemy od faktu, mówiącego, że model wyjściowy naszej interpolacji jest modelem monotonicznym.

Propozycja 1.1 [LeS] *Niech $(\mathcal{A}, \phi)$ będzie algebraiczną przestrzenią probabilistyczną oraz $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ jej 1-monotonicznie niezależnymi względem stanu ϕ *-podalgebrami. Wtedy *-algebry $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ są monotonicznie niezależne względem ϕ.*

Dowód. Należy pokazać, że dla dowolnych $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}$, $a_2 \in \mathcal{A}_{i_2}$, $\ldots$, $a_n \in \mathcal{A}_{i_n}$, gdzie $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$, zachodzi:

$$\phi(a_1 \ldots a_{k-1}a_ka_{k+1} \ldots a_n) = \phi(a_k)\phi(a_1 \ldots a_{k-1}a_{k+1} \ldots a_n)\,,$$

gdy $i_{k-1} < i_k > i_{k+1}$, przy czym, jeśli $k = 1$ lub $k = n$, to pozostaje tylko jedna nierówność. Innymi słowy, możemy wyłączyć moment odpowiadający maksimum lokalnemu ciągu $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Bez utraty ogólności, wystarczy jedynie pokazać, że możemy wyłączyć moment odpowiadający pierwszemu z lewej maksimum lokalnemu, tzn. przy powyższych oznaczeniach, zachodzi:

$$\phi(a_1 \ldots a_{k-1} a_k a_{k+1} \ldots a_n) = \phi(a_k)\phi(a_1 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_n)\,,$$

gdy $i_1 < \ldots < i_{k-1} < i_k > i_{k+1}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

W tym celu zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista, załóżmy zatem, że jest ona również prawdziwa dla $n - 1$. Wówczas mamy

$$\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) = \phi(a_1^0 a_2^0 \ldots a_n^0) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi(a_j)\phi(a_1^0 \ldots a_{j-1}^0 a_{j+1} \ldots a_n)\,,$$

gdzie $\alpha_j = 0$ lub 1 w zależności od przypadku w warunku (1.2) dla $m = 1$, tzn. $\alpha_j = 1$, gdy $j = 1$ lub $i_1 < i_2 < \ldots < i_j$ oraz $\alpha_j = 0$ w pozostałych przypadkach. Skoro i_k jest lokalnym maksimum, to $\alpha_j = 0$ dla $j > k$; co więcej, $\alpha_j = 1$ dla $j \leqslant k$. Ponadto, z warunku Voiculescu wiemy, że $\phi(a_1^0 a_2^0 \ldots a_n^0) = 0$. Zatem, na mocy indukcji, mamy

$$\begin{aligned}
\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) &= \sum_{j=1}^{k} \phi(a_j)\phi(a_1^0 \ldots a_{j-1}^0 a_{j+1} \ldots a_n) \\
&= \phi(a_k)\phi(a_1^0 \ldots a_{k-1}^0 a_{k+1} \ldots a_n) \\
&\quad + \phi(a_k) \sum_{j=1}^{k-1} \phi(a_j)\phi(a_1^0 \ldots a_{j-1}^0 a_{j+1} \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_n) \\
&= \phi(a_k)\phi(a_1 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_n)\,,
\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Kolejną ważną własnością naszej hierarchii jest fakt coraz to dokładniejszej aproksymacji modelu wolnej niezależności wraz ze wzrostem indeksu m. Ściślej mówi o tym poniższa propozycja.

Propozycja 1.2 [LeS] *Niech $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ będą m-monotonicznie niezależnymi *-podalgebrami algebraicznej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{A}, \phi)$. Wtedy momenty mieszane zmiennych z algebr $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ pokrywają się z odpowiadającymi im momentami zmiennych wolnych na słowach o długości nie większej niż m.*

Dowód. Teza wynika wprost z definicji m-monotonicznej niezależności. ■

1.3 Kombinatoryka i lematy o momentach mieszanych

Podrozdział ten poświęcony jest kombinatoryce partycji uporządkowanych, które w naturalny sposób wyłaniają się podczas obliczania momentów mieszanych zmiennych m-monotonicznie niezależnych. Głównie interesować nas będzie klasa uporządkowanych partycji nieprzecinających, których bloki o głębokości większej niż m są uporządkowane monotonicznie.

Definicja 1.3 Przez $\mathcal{ONC}_n(m)$ ($\mathcal{ONC}_n^2(m)$) oznaczać będziemy zbiór wszystkich uporządkowanych partycji (dwupartycji) nieprzecinających $P = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, takich że dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ zachodzi następująca implikacja:

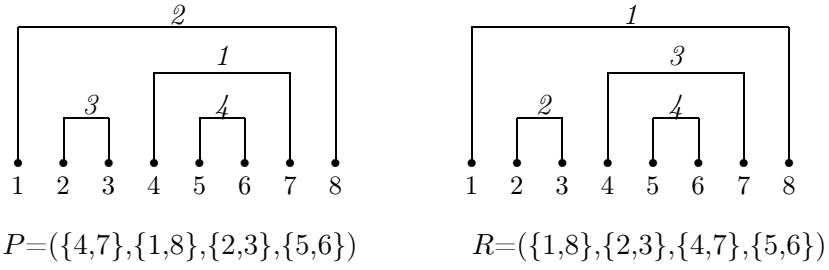
$$d(P_j) \geq m \text{ and } P_j < P_i \implies j < i.$$

Innymi słowy, kolor bloków jest monotoniczną funkcją ich głębokości, zaczynając od głębokości m. W szczególności, partycje $\mathcal{ONC}_n(1)$ nazywamy *monotonicznymi* i oznaczamy również przez $\mathcal{MNC}_n$. Analogicznie, przez $\mathcal{MNC}_n^2$ oznaczamy odpowiednie dwupartycje.

Przykład 1.4 Dla $n = 8$ rozważmy następujące ciągi, stanowiące dwie różne dwupartycje uporządkowane zbioru $\{1, 2, \ldots, 8\}$:

$$P{=}(\{4{,}7\},\{1{,}8\},\{2{,}3\},\{5{,}6\}) \quad \text{oraz} \quad R{=}(\{1{,}8\},\{2{,}3\},\{4{,}7\},\{5{,}6\})\,,$$

Odpowiadające im diagramy przedstawia Rysunek 1.1, na którym bloki oznaczone są odpowiadającymi im liczbami reprezentującymi pozycję w ciągu.



$P{=}(\{4{,}7\},\{1{,}8\},\{2{,}3\},\{5{,}6\})$ $R{=}(\{1{,}8\},\{2{,}3\},\{4{,}7\},\{5{,}6\})$

Rysunek 1.1 Diagramy dwupartycji P i R.

W przypadku partycji P i R z Rysunku 1.1 wszystkie bloki (za wyjątkiem $\{1, 8\}$) są wewnętrzne względem bloku $\{1, 8\}$. Ponadto, $\{5, 6\}$ jest jedynym blokiem wewnętrznym względem $\{4, 7\}$. Głębokości bloków wynoszą $d(\{1, 8\}) = 1$, $d(\{2, 3\}) = d(\{4, 7\}) = 2$,

$d(\{5,6\}) = 3$. Zauważmy również, że $R \in \mathcal{MNC}_8^2$, ponieważ kolory wszystkich bloków rosną wraz ze wzrostem głębokości, natomiast $P \in \mathcal{ONC}_8^2(2) \setminus \mathcal{MNC}_8^2$, gdyż między blokami $\{1,8\}$ i $\{4,7\}$ mamy nieporządek, tzn. $P_j < P_i$ i $j > i$.

Propozycja 1.3 *Dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ *mamy* $\left|\mathcal{MNC}_{2n}^2\right| = (2n-1)!!$.

Dowód. Zauważmy, że w każdej partycji monotonicznej nie istnieją bloki wewnętrzne względem bloku o najwyższym kolorze, gdyż tworzyłyby one nieporządek, co jest sprzeczne z definicją partycji monotonicznej. Dodatkowo, każdą partycję ze zbioru $\mathcal{MNC}_{2n}^2$ możemy otrzymać przez „dołączenie" bloku o kolorze n do odpowiedniej partycji ze zbioru $\mathcal{MNC}_{2n-2}^2$. Takich sposobów „dołączania" jest zawsze $2n-1$. Z rozumowania tego wynika zależność rekurencyjna

$$\left|\mathcal{MNC}_{2n}^2\right| = (2n-1)\left|\mathcal{MNC}_{2n-2}^2\right| ,$$

która, po uwzględnieniu warunku początkowego $\left|\mathcal{MNC}_2^2\right| = 1$, daje tezę. ■

Definicja 1.4 Niech $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ oraz $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{k_1, \ldots, k_r\}$, gdzie $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$. Przez partycję *stowarzyszoną* z ciągiem $(i_1, \ldots, i_n)$ rozumiemy uporządkowaną partycję $P = (P_1, \ldots, P_r)$ zbioru $\{1, \ldots, 8\}$, której bloki są postaci

$$P_j = \{s : i_s = k_j\} .$$

Stowarzyszenie partycji uporządkowanej z ciągiem indeksów oznaczać będziemy symbolem $\sim$, tzn. $P \sim (i_1, \ldots, i_n)$.

Przykład 1.5 Niech $i_1 = i_4 = 2$, $i_2 = i_5 = 4$, $i_3 = 1$. Wtedy $(P_1, P_2, P_3) \sim (2,4,1,2,4)$, gdzie $P_1 = \{3\}$, $P_2 = \{1,4\}$, $P_3 = \{2,5\}$.

Będziemy również potrzebować „ciągłej" wersji Definicji 1.4, w której ciąg indeksów zastąpiony jest ciągiem funkcji charakterystycznych. W tym celu, na zbiorze

$$\Theta = \{\chi_{(s,t]} : 0 \leq s < t < \infty\} \tag{1.3}$$

zdefiniujmy częściowy porządek poprzez $f = \chi_{(s_1,t_1]} < \chi_{(s_2,t_2]} = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t_1 \leq s_2$ oraz $f \leqslant g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f < g$ lub $f = g$.

Definicja 1.5 Załóżmy, że $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne. Mówimy, że $P \in \mathcal{OP}_n$ jest *zgodna* z ciągiem $(f_1, f_1, \ldots, f_n)$, jeżeli

1. $i, j \in P_k \Longrightarrow f_i = f_j$,
2. $i \in P_k, j \in P_l$ i $k < l \implies f_i \leq f_j$.

Wówczas bedziemy pisać $P \sim (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Wprawdzie symbol $\sim$ był już przedmiotem Definicji 1.4, ale nie powinno to prowadzić do niejasności.

Przykład 1.6 Niech $f_1 = f_2 = f_5 = f_6 = \chi_{(0,1]}$ oraz $f_3 = f_4 = \chi_{(1,2]}$. Wówczas partycja $P = (\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\})$ jest zgodna z ciągiem $(f_1, f_2, \ldots, f_6)$, natomiast partycja $P' = (\{3,4\},\{1,6\},\{2,5\})$ nie jest, gdyż na przykład blok $\{3,4\}$ jest niższego koloru niż blok $\{1,6\}$ oraz $f_3 = f_4 > f_1 = f_6$.

Niektóre formuły kombinatoryczne przedstawione w tej pracy mogą być wyrażone w terminach zwykłych (nieuporządkowanych) partycji nieprzecinających $\mathcal{NC}_n$. Jeżeli partycje $P = (P_1, P_2, \ldots, P_k) \in \mathcal{ONC}_n$ i $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\} \in \mathcal{NC}_n$ mają takie same bloki, to wówczas będziemy pisać $\pi \sim P$.

Rozważmy dwa obiekty: partycję $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\} \in \mathcal{NC}^2_{2k}$ oraz ciąg funkcji charakterystycznych $(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$ o nośnikach parami równych lub rozłącznych, gdzie $f_i \in \Theta$, $i = 1, \ldots, 2k$, są takie, że $\pi \sim P \sim (f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$ dla pewnej partycji uporządkowanej P. Wynika stąd, że jeżeli $\{p, q\} = \pi_i$ dla pewnego i, to wówczas możemy położyć

$$f^{(i)} := f_p = f_q \,. \tag{1.4}$$

Zatem przez $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ oznaczać będziemy funkcje charakterystyczne odpowiadające odpowiednio blokom $\pi_1, \ldots, \pi_k$. Ponadto, przez $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(k)}$ oraz $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(k)}$ oznaczymy odpowiednio lewe i prawe końce ich nośników.

Późniejsze rachunki będą polegały na zliczaniu wewnętrznych bloków o takich samych funkcjach charakterystycznych. W tym celu każdemu z bloków π_i nieuporządkowanej partycji π przypiszemy liczbę $\zeta(\pi_i)$ jego bloków wewnętrznych, których funkcje mają ten sam nośnik co $f^{(i)}$, tzn.

$$\zeta(\pi_i) = \#\{\pi_j : \pi_j > \pi_i \text{ i } f^{(j)} = f^{(i)}\}. \tag{1.5}$$

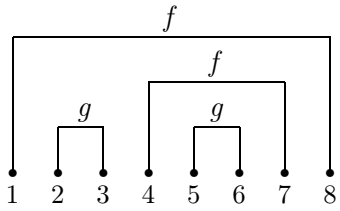
Oczywiście, $\zeta(\pi_i)$ zależy od ciągu $(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$, co pomijamy w celu uproszczenia notacji. W końcu, każdej partycji π i każdemu ciągowi $(f_1, f_2 \ldots, f_{2k})$ przypiszemy liczbę

$$c_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2k}) = \#\{P \in \mathcal{MNC}^2_{2k} : \pi \sim P \sim (f_1, f_2, \ldots, f_{2k})\}\,, \tag{1.6}$$

która zlicza pokolorowania partycji π zgodne $(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$.

Przykład 1.7 Niech $\pi \in \mathcal{NC}^2_8$ będzie dwupartycją nieuporządkowaną, przedstawioną na Rysunku 1.2. Ponadto, niech $f = \chi_{(0,t]}$ i $g = \chi_{(t,t']}$ dla pewnych $0 < t < t'$ oraz niech $\pi_1 = \{1,8\}$, $\pi_2 = \{2,3\}$, $\pi_3 = \{4,7\}$, $\pi_4 = \{5,6\}$. Wówczas blok π_1 posiada dokładnie jeden blok wewnętrzny o tym samym nośniku, czyli $\zeta(\pi_1) = 1$, natomiast pozostałe bloki nie posiadają takich podbloków, a zatem $\zeta(\pi_2) = \zeta(\pi_3) = \zeta(\pi_4) = 0$.

Zauważmy również, że $c_\pi(f, g, g, f, g, g, f, f) = 3$, ponieważ blok π_1 musi mieć kolor 1, blok π_2 - kolor 2, 3 lub 4 i dla każdego takiego wyboru istnieje dokładnie jedna możliwość pokolorowania pozostałych bloków, gdyż $\pi_3 < \pi_4$.



Rysunek 1.2 Diagram partycji π z Przykładu 1.7.

O ile nie będzie powiedziane inaczej, w poniższych lematach zakładać będziemy, że $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ jest m-monotoniczną rodziną *-podalgebr algebraicznej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{A},\phi)$ oraz że $a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$ dla $1 \leq k \leq n$. Pierwszy z nich, zwany *warunkiem singletonu*, będzie użyteczny w dowodach centralnego twierdzenia granicznego, twierdzenia Poissona oraz zasady niezmienniczości.

Lemat 1.1 *Niech $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$ oraz niech $j \in \{1,\ldots,n\}$ będzie takie, że $\phi(a_j) = 0$ oraz $i_j \neq i_k$ dla $j \neq k$. Wtedy $\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) = 0$.*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla $l < n$. Wówczas

$$\begin{aligned}\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) &= \phi(a_1^0 a_2 \ldots a_n) + \phi(a_1)\phi(1_{i_1} a_2 \ldots a_n) \\ &= \phi(a_1^0 a_2 \ldots a_n) + \phi(a_1)\phi(a_2 \ldots a_n)\,.\end{aligned}$$

Jeżeli $j \neq 1$, to z założenia indukcyjnego $\phi(a_2 \ldots a_n) = 0$. Jeżeli $j = 1$, to $\phi(a_1) = 0$, skąd wynika, że

$$\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) = \phi(a_1^0 a_2 \ldots a_n) = \phi(a_1^0 a_2^0 a_3 \ldots a_n) + \phi(a_2)\phi(a_1^0 1_{i_2} a_3 \ldots a_n)$$

Podobnie jak poprzednio, rozważymy dwa przypadki. Jeżeli $j = 2$, to $\phi(a_2) = 0$, gdy natomiast $j \neq 2$, to znowu mamy dwie możliwości:
1. $m = 1$. Jeśli $i_1 < i_2$, to z założenia indukcyjnego $\phi(a_1^0 1_{i_2} a_3 \ldots a_n) = \phi(a_1^0 a_3 \ldots a_n) = 0$. Z drugiej strony, gdy $i_1 > i_2$, to $\phi(a_1^0 1_{i_2} a_3 \ldots a_n) = 0$, co bezpośrednio wynika z Definicji 1.2.
2. $m > 1$. Wtedy $\phi(a_1^0 1_{i_2} a_3 \ldots a_n) = \phi(a_1^0 a_3 \ldots a_n) = 0$ z założenia indukcyjnego.
Zatem, we wszystkich rozpatrywanych przypadkach, albo $\phi(a_1^0 1_{i_2} a_3 \ldots a_n) = 0$, albo $\phi(a_2) = 0$, skąd wynika równość

$$\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) = \phi(a_1^0 a_2^0 a_3 \ldots a_n)\,.$$

Kontynuując powyższe rozumowanie, otrzymujemy, że $\phi(a_1 a_2 \ldots a_n) = \phi(a_1^0 a_2^0 \ldots a_n^0)$, co jest równe zero z warunku Voiculescu. ■

Następny lemat, dający *niezmienniczość na injekcje zachowujące porządek*, będzie wykorzystywany w dowodach centralnego twierdzenia granicznego, zasady niezmienniczości oraz twierdzenia granicznego Poissona.

Lemat 1.2 *Załóżmy, że $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem zmiennych m-monotonicznie niezależnych. Ponadto, niech $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie injekcją, zachowującą porządek. Wtedy*

$$\phi(a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}) = \phi(a_{T(i_1)}a_{T(i_2)}\ldots a_{T(i_n)}), \qquad n, i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}.$$

Dowód. Jest to natychmiastowa konsekwencja Definicji 1.2. ■

Lemat 1.3 *Załóżmy, że $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$ oraz $(i_1, \ldots, i_n) \sim P$, dla pewnej przecinającej partycji uporządkowanej P o b blokach. Wtedy moment mieszany $\phi(a_1 \ldots a_n)$ wyraża się jako suma iloczynów co najmniej $b+1$ momentów brzegowych.*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 4$, skąd rozpoczyna się indukcja, teza jest prawdziwa, gdyż $\phi(abab) = \phi(a^2)\phi^2(b)$ dla $m = 1$ (przypadek monotoniczny) oraz

$$\phi(abab) = \phi^2(b)\phi(a^2) - \phi^2(b)\phi^2(a) + \phi^2(a)\phi(b^2)$$

dla $m > 1$. Niech teraz $n > 4$. Wówczas w wyrażeniu

$$\phi(a_1a_2\ldots a_n) = \phi(a_1^0a_2\ldots a_n) + \phi(a_1)\phi(a_2\ldots a_n) \tag{1.7}$$

drugi składnik sumy jest iloczynem co najmniej $b+1$ czynników, ponieważ $(i_2, \ldots, i_n)$ albo jest stowarzyszony z nieprzecinającą partycją P', która wówczas musi posiadać również b bloków, albo odpowiada przecinającej partycji, w przypadku której korzystamy z kroku indukcyjnego. Zatem dla wykazania tezy wystarczy zbadać pierwszy ze składników sumy (1.7). Podobnie jak poprzednio, możemy napisać

$$\phi(a_1^0a_2\ldots a_n) = \phi(a_1^0a_2^0a_3\ldots a_n) + \alpha\phi(a_2)\phi(a_1^0a_3\ldots a_n),$$

gdzie $\alpha = 0$ lub $\alpha = 1$ w zależności od przypadku z (1.2). Do drugiego składnika sumy stosujemy podobne rozumowanie jak poprzednio, pokazując, że jest on iloczynem co najmniej $b+1$ czynników. Kontynuując to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że dla pokazania tezy wystarczy pokazać ją dla $\phi(a_1^0a_2^0\ldots a_n^0)$, co jest równe zero na mocy warunku Voiculescu. ■

Lemat 1.4 *Załóżmy, że $(i_1, \ldots, i_n) \sim P \in \mathcal{ONC}_n(m)$, gdzie $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$. Wtedy moment mieszany $\phi(a_1 \ldots a_n)$ wyraża się jako suma iloczynów dokładnie b momentów brzegowych, gdzie b jest liczbą bloków partycji P.*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n \leqslant m$ moment $\phi(a_1 \ldots a_n)$ jest taki sam jak w przypadku wolnym (patrz Propozycja 1.2), zatem teza wynika z analogicznego twierdzenia z [Sp] o faktoryzacji momentów mieszanych dla zmiennych wolnych. Załóżmy teraz, że $n > m$; ponadto, niech $r \in \{m, \ldots, n\}$ będzie takie, że

$i_1 \neq \ldots \neq i_m < \ldots < i_r > i_{r+1}$. Wiemy, że P jest nieprzecinająca, a zatem istnieje $1 \leq j \leq r$ takie, że $i_j \neq i_k$ dla wszystkich $k \neq j$. Wówczas z Lematu 1.1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\phi(a_1 \ldots a_n) &= \phi(a_1 \ldots a_{j-1} a_j^0 a_{j+1} \ldots a_n) + \phi(a_j)\phi(a_1 \ldots a_{j-1} 1_{i_j} a_{j+1} \ldots a_n) \\ &= \phi(a_j)\phi(a_1 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_n)\,.\end{aligned}$$

W celu zakończenia dowodu wystarczy zastosować założenie idukcyjne, gdyż $(i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_n) \sim \mathcal{ONC}_{n-1}(m)$, o ile $i_{j-1} \neq i_{j+1}$, lub też $(i_1, \ldots, i_{j-1}, i_{j-1}, \ldots, i_n) \sim \mathcal{ONC}_{n-2}(m)$ w przeciwnym wypadku. ■

Lemat 1.5 *Załóżmy, że $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$ oraz $(i_1, \ldots, i_n) \sim P \in \mathcal{ONC}_n \setminus \mathcal{ONC}_n(m)$. Wtedy moment mieszany $\phi(a_1 \ldots a_n)$ wyraża się jako suma iloczynów co najmniej $b+1$ momentów brzegowych, gdzie b jest liczbą bloków partycji P.*

Dowód. Rozważmy pierwszy przypadek, w którym istnieje $1 \leq r \leq n$, takie, że $i_1 \neq \ldots \neq i_m < \ldots < i_r > i_{r+1}$ oraz dla każdego $1 \leq j \leq r$ istnieje $r+2 \leq k \leq n$ takie, że $i_j = i_k$. Wtedy drugi składnik sumy w wyrażeniu

$$\phi(a_1 \ldots a_n) = \phi(a_1^0 a_2 \ldots a_n) + \phi(a_1)\phi(a_2 \ldots a_n)$$

jest iloczynem $p+1$ czynników, ponieważ partycja stowarzyszona z ciągiem $(i_2, \ldots, i_n)$ posiada b bloków. Zatem wystarczy rozpatrzyć jedynie pierwszy ze składników powyższej sumy, tzn.

$$\phi(a_1^0 a_2 \ldots a_n) = \phi(a_1^0 a_2^0 a_3 \ldots a_n) + \alpha\phi(a_2)\phi(a_1^0 a_3 \ldots a_n)\,,$$

gdzie $\alpha = 0$ lub $\alpha = 1$, w zależności od przypadku z (1.2). Stosując analogiczne rozumowanie i korzystając z definicji m-monotonicznej niezależności, dochodzimy do wniosku, że należy zbadać tezę jedynie dla $\phi(a_1^0 \ldots a_r^0 a_{r+1} \ldots a_n)$, co jest równe zero. Ogólny przypadek zawsze można sprowadzić do powyższego. ■

1.4 GNS reprezentacja

W podrozdziale tym przypomnimy konstrukcję GNS reprezentacji m-monotonicznego iloczynu stanów. W tym celu pokrótce opiszemy iloczyn wolny $\mathcal{C}^*$-przestrzeni probabilistycznych.

Niech I będzie liniowo uporządkowanym zbiorem indeksów oraz niech $(\mathcal{A}_i, \phi_i)_{i \in I}$ będzie rodziną $\mathcal{C}^*$-przestrzeni probabilistycznych. Dla każdego $i \in I$, przez $(\mathcal{H}_i, \pi_i, \omega_i)$ oznaczmy GNS reprezentację algebry $\mathcal{A}_i$, tzn. $\mathcal{H}_i$ jest przestrzenią Hilberta, ω_i wektorem jednostkowym w $\mathcal{H}_i$ oraz $\pi_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ *-homomorfizmem takim, że

$$\phi_i(a) = \langle \pi_i(a)\omega_i, \omega_i \rangle,$$

dla wszystkich $a \in \mathcal{A}_i$, przy czym $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym w $\mathcal{H}_i$ (dla uproszczenia notacji wszystkie iloczyny skalarne oznaczać będziemy jednakowo).

Przedstawimy teraz, za [Av,Vo1], konstrukcję reprezentacji algebr $\mathcal{A}_i$ na jednej, wspólnej przestrzeni Hilberta, którą oznaczymy przez $\mathcal{H}$. Obrazy algebr $\mathcal{A}_i$ w algebrze operatorów ograniczonych na $\mathcal{H}$ będą wolne względem pewnego stanu zwanego *stanem próżni*.

Przez $\mathcal{H}_i^0$ oznaczmy dopełnienie ortogonalne w $\mathcal{H}_i$ jednowymiarowej podprzestrzeni generowanej przez ω_i, czyli $\mathcal{H}_i^0 = \mathcal{H}_i \ominus \mathbb{C}\omega_i$. Podobnie, dla $h \in \mathcal{H}_i$ przez h^0 oznaczmy rzut ortogonalny wektora h na podprzestrzeń $\mathcal{H}_i^0$. Ponadto, niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta zadaną jako suma prosta postaci

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}\,\Omega \oplus \bigoplus_{i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n} \mathcal{H}_{i_1}^0 \otimes \mathcal{H}_{i_2}^0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{i_n}^0\,, \tag{1.8}$$

z kanonicznym iloczynem skalarnym

$$\langle g_1 \otimes \ldots \otimes g_k, h_1 \otimes \ldots \otimes h_l \rangle \;=\; \delta_{k,l} \langle g_1, h_1 \rangle \ldots \langle g_k, h_k \rangle$$

gdzie Ω, tak zwany *wektor próżni*, jest wektorem jednostkowym. Parę $(\mathcal{H}, \Omega)$ nazywamy *iloczynem wolnym* przestrzeni $(\mathcal{H}_i, \omega_i)$. Na przestrzeni $\mathcal{H}$ określamy *-reprezentację $\lambda_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ algebry $\mathcal{A}_i$ dla każdego $i \in I$ następująco:

$$\lambda_i(a)\Omega \;=\; (\pi_i(a)\omega_i)^0 + \langle \pi_i(a)\omega_i, \omega_i \rangle \Omega \tag{1.9}$$

$$\lambda_i(a)(h_1 \otimes \ldots \otimes h_n) \;=\; \begin{cases} (\pi_i(a)\omega_i)^0 \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_n + \langle \pi_i(a)\omega_i, \omega_i \rangle h_1 \otimes \ldots \otimes h_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{gdy } i \neq i_1 \\ (\pi_i(a)h_1)^0 \otimes h_2 \otimes \ldots \otimes h_n + \langle \pi_i(a)h_1, \omega_i \rangle h_2 \otimes \ldots \otimes h_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{gdy } i = i_1 \end{cases}.$$

Dodatkowo, na $\mathcal{C}^*$-algebrze $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ możemy w naturalny sposób określić tak zwany *stan próżni* zadany przez $\phi(\,\cdot\,) = \langle \,\cdot\,\Omega, \Omega \rangle$. Wówczas para $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \phi)$ jest $\mathcal{C}^*$-przestrzenią probabilistyczną oraz ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1 [Av,Vo1] *$\{\lambda_i(\mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ są wolnymi *-podalgebrami $\mathcal{C}^*$-algebry $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ względem stanu próżni ϕ.*

$\mathcal{C}^*$-algebrę generowaną przez wszystkie $\{\lambda_i(\mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ wraz ze stanem ϕ nazywamy *wolnym iloczynem algebraicznych przestrzeni probabilistycznych* $(\mathcal{A}_i, \phi_i)$.

Przejdźmy teraz do analogicznej konstrukcji m-monotonicznego iloczynu algebraicznych przestrzeni probabilistycznych. Wprowadźmy w tym celu oznaczenie następującej rodziny ciągów indeksów:

$$\begin{aligned} I_n(m) \;&=\; \{(i_1, \ldots, i_n); i_k \in I, i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n\} && \text{dla } n \leqslant m\,, \\ I_n(m) \;&=\; \{(i_1, \ldots, i_n); i_k \in I, i_1 > \ldots > i_{n-m+1} \neq i_{n-m+2} \neq \ldots \neq i_n\} && \text{dla } n > m\,, \end{aligned}$$

gdzie $m \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.6 Niech $\mathcal{H}^{(m)}$ będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{H}$ postaci

$$\mathcal{H}^{(m)} = \mathbb{C}\,\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_n)\in I_n(m)} \mathcal{H}^0_{i_1} \otimes \mathcal{H}^0_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}^0_{i_n}\ , \qquad m \in \mathbb{N}$$

Parę $(\mathcal{H}^{(m)}, \Omega)$ nazywać będziemy *m-monotonicznym iloczynem przestrzeni* $(\mathcal{H}_i, \omega_i)$, $i \in I$. Zauważmy, że $(\mathcal{H}^{(1)}, \Omega)$ jest tak zwanym *monotonicznym iloczynem przestrzeni Hilberta* [Mu2].

Niech $\mathcal{H}^{(m)}(i)$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $\mathcal{H}^{(m)}$ postaci

$$\mathcal{H}^{(m)}(i) = \mathbb{C}\Omega \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{m-1} \bigoplus_{i_1\neq\ldots\neq i_n} \mathcal{H}^0_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}^0_{i_n} \right) \oplus \left(\bigoplus_{n=m}^{\infty} \bigoplus_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in I_n(m) \\ i_1 \leqslant i}} \mathcal{H}^0_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}^0_{i_n} \right).$$

Reprezentację $\lambda_i^{(m)}$ algebry $\mathcal{A}_i$ na przestrzeni $\mathcal{H}^{(m)}$ określamy następująco:

$$\lambda_i^{(m)} : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^{(m)})\,, \qquad \lambda_i^{(m)}(a)h = \begin{cases} \lambda_i(a)h & \text{gdy } h \in \mathcal{H}^{(m)}(i) \\ 0 & \text{gdy } h \in \mathcal{H}^{(m)}(i)^{\perp} \end{cases},$$

gdzie $m \geqslant 1$. Reprezentacje te dają m-monotoniczne podalgebry, co pokażemy w Twierdzeniu 1.2. W jego dowodzie potrzebny nam będzie następujący lemat.

Lemat 1.6 *Niech $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, \ldots, a_n \in \mathcal{A}_{i_n}$ będą takie, że $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$ oraz $\phi_{i_k}(a_k) = 0$, dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy $\lambda_{i_n}^{(m)}(a_n)\,\lambda_{i_{n-1}}^{(m)}(a_{n-1})\,\ldots\,\lambda_{i_1}^{(m)}(a_1)\,\Omega$ jest tensorem prostym należącym do podprzestrzeni $\mathcal{H}^0_{i_n} \otimes \mathcal{H}^0_{i_{n-1}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}^0_{i_1}$.*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ mamy

$$\lambda_{i_1}^{(m)}(a_1)\,\Omega = (\pi_{i_1}(a_1)\omega_{i_1})^0 + \langle \pi_{i_1}(a_1)\omega_{i_1}, \omega_{i_1}\rangle\Omega = (\pi_{i_1}(a_1)\omega_{i_1})^0,$$

co jest tensorem prostym należącym do $\mathcal{H}^0_{i_1}$, więc teza jest spełniona. Załóżmy teraz, że dla pewnego n mamy $\lambda_{i_n}^{(m)}(a_n)\,\lambda_{i_{n-1}}^{(m)}(a_{n-1})\,\ldots\,\lambda_{i_1}^{(m)}(a_1)\,\Omega = h_n \otimes h_{n-1} \otimes \ldots \otimes h_1$, dla pewnych wektorów $h_k \in \mathcal{H}^0_{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy

$$\begin{aligned} \lambda_{i_{n+1}}^{(m)}(a_{n+1})\,\lambda_{i_n}^{(m)}(a_n)\,\ldots\,\lambda_{i_1}^{(m)}(a_1)\,\Omega &= (\pi_{i_{n+1}}(a_{n+1})\omega_{i_{n+1}})^0 \otimes h_n \otimes \ldots \otimes h_1 \\ &+ \langle \pi_{i_{n+1}}(a_{n+1})\omega_{i_{n+1}}, \omega_{i_{n+1}}\rangle h_n \otimes \ldots \otimes h_1 \\ &= (\pi_{i_{n+1}}(a_{n+1})\omega_{i_{n+1}})^0 \otimes h_n \otimes \ldots \otimes h_1 \end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Twierdzenie 1.2 *Algebry $\{\lambda_i^{(m)}(\mathcal{A}_i)\}_{i\in I}$ są m-monotonicznie niezależnymi *-podalgebrami nieprzemiennej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{B}(\mathcal{H}^{(m)}), \phi)$, gdzie ϕ jest stanem próżni na $\mathcal{B}(\mathcal{H}^{(m)})$.*

Dowód. Niech $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, \ldots, a_n \in \mathcal{A}_{i_n}$ będą takie, że $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$. Dla skrócenia notacji wprowadzimy oznaczenie $X_k = \lambda_{i_k}^{(m)}(a_k)$. Zaczniemy od wykazania, że zmienne $X_1, \ldots, X_n$ spełniają warunek Voiculescu (Definicja 1.1).

Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n \in \operatorname{Ker}\phi$. Z Lematu 1.6 wynika, że $X_n^* \ldots X_1^*\Omega \perp \mathbb{C}\Omega$, skąd otrzymujemy

$$\phi(X_1 \ldots X_n) = \langle\, \Omega, X_n^* \ldots X_1^*\Omega \,\rangle = 0\,.$$

Teraz pozostaje jedynie pokazać, że wewnętrzne jedynki $\{\lambda_i^{(m)}(1_i)\}_{i\in I}$ podalgebr $\{\lambda_i^{(m)}(\mathcal{A}_i)\}_{i\in I}$ spełniają warunek (1.2). W tym celu, załóżmy, że $X_1, \ldots, X_{j-1} \in \operatorname{Ker}\phi$. Wtedy

$$\phi(X_1 \ldots X_{j-1}\, \lambda_{i_i}^{(m)}(1_{i_j})\, X_{j+1} \ldots X_n) = \langle \Omega, X_n^* \ldots X_{j+1}^*\, \lambda_{i_j}^{(m)}(1_{i_j})\, X_{j-1}^* \ldots X_1^*\Omega \rangle\,.$$

Jeżeli $(i_j, \ldots, i_1) \in I_j(m)$, to z Lematu 1.6 wynika, że $X_{j-1}^* \ldots X_1^*\Omega \in \mathcal{H}^{(m)}(i_j)$, więc

$$\begin{aligned}\phi(X_1 \ldots X_{j-1}\, \lambda_i^{(m)}(1_{i_j})\, X_{j+1} \ldots X_n) &= \langle \Omega, X_n^* \ldots X_{j+1}^* X_{j-1}^* \ldots X_1^*\Omega\rangle \\ &= \phi(X_1 \ldots X_{j-1} X_{j+1} \ldots X_n)\,.\end{aligned}$$

Gdy natomiast $(i_j, \ldots, i_1) \notin I_j(m)$, wówczas $X_{j-1}^* \ldots X_1^*\Omega$ leży w $\mathcal{H}^{(m)}(i_j)^\perp$, więc $\lambda_i^{(m)}(1_{i_j})\, X_{j-1}^* \ldots X_1^*\Omega = 0$, czyli

$$\phi(X_1 \ldots X_{j-1}\, \lambda_{i_i}^{(m)}(1_{i_j})\, X_{j+1} \ldots X_n) = 0\,,$$

co kończy dowód. ■

1.5 Centralne Twierdzenie Graniczne

Sformułujemy teraz centralne twierdzenie graniczne dla m-monotonicznych zmiennych losowych oraz podamy rekurencyjną zależność na transformaty Cauchy'ego miar o momentach w nim otrzymanych.

Twierdzenie 1.3 *Niech $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ będzie ciągiem m-monotonicznie niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, średniej zero i wariancji jeden. Wtedy*

$$M_n^{(m)} := \lim_{N\to\infty} \phi\left(\left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_N}{\sqrt{N}}\right]^n\right) = \begin{cases} 0 & gdy\ n = 2k+1 \\ \dfrac{\left|\mathcal{ONC}_{2k}^2(m)\right|}{k!} & gdy\ n = 2k \end{cases}.$$

Dowód. Skoro momenty mieszane są niezmiennicze na odwzorowania zachowujące porządek (Lemat 1.2), zatem mamy

$$\begin{aligned}\phi\left(\left[\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_N}{\sqrt{N}}\right]^n\right) &= \frac{1}{N^{n/2}} \sum_{1\le k_1,\ldots,k_n\le N} \phi(a_{k_1} \ldots a_{k_n}) \\ &= \sum_{P\in\mathcal{OP}_n} \frac{1}{N^{n/2}} \binom{N}{b(P)}\, m(P)\,,\end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{OP}_n$ oznacza wszystkie dwupartycje uporządkowane zbioru $\{1,\ldots,n\}$,

$$m(P) = \phi(a_{k_1}\ldots a_{k_n}) \quad \text{dla} \quad (k_1,\ldots,k_n) \sim P$$

oraz $b(P)$ jest liczbą bloków partycji P.

Przeanalizujmy wkład każdej partycji P dla dużych N. Jeżeli istnieje singleton w P, to z Lematu 1.1 wynika, że $m(P) = 0$. Zatem, przyjmijmy, że P nie posiada singletonów. Jeżeli $n = 2k+1$, to $b(P) \leqslant k$, skąd wynika, że $\frac{1}{N^{n/2}}\binom{N}{b(P)}$ dąży do zera przy $N \to \infty$. Podobny rezultat otrzymujemy, gdy $n = 2k$ i $b(P) < k$. Załóżmy zatem, że $n = 2k$ oraz $b(P) = k$. Wówczas wkład graniczny dla takiej partycji P wynosi $m(P)/k!$. Teraz zauważmy, że z Lematów 1.3 – 1.5 oraz założenia o średniej równej zero wynika, że $m(P) = 0$, jeżeli $P \notin \mathcal{OP}^2_{2k} \setminus \mathcal{ONC}^2_{2k}(m)$. Ponadto, z Lematu 1.4 i założeniu o wariancji równej 1, otrzymujemy, że $m(P) = 1$, jeżeli $P \in \mathcal{ONC}^2_{2k}(m)$, co kończy dowód. ■

Zauważmy, że korzystając z Propozycji 1.3 w przypadku $m = 1$, otrzymujemy momenty rozkładu arcusa sinusa skupionego na przedziale $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, czyli

$$M_n^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = 2k+1 \\ \dfrac{1}{2^k}\binom{2k}{k} & \text{gdy } n = 2k \end{cases}.$$

Oczywiście, jest to miara otrzymana w centralnym twierdzeniu granicznym dla zmiennych monotonicznych [Mu2].

Odnotujmy również, że dla ustalonego k i odpowiednio dużego m porządek w partycjach z $\mathcal{ONC}^2_{2k}(m)$ jest nieistotny, tzn. $\left|\mathcal{ONC}^2_{2k}(m)\right| = k!\left|\mathcal{NC}^2_{2k}(m)\right|$. Wynika stąd, że

$$M_n^{(\infty)} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = 2k+1 \\ \dfrac{1}{k+1}\binom{2k}{k} & \text{gdy } n = 2k \end{cases}.$$

Są to momenty rozkładu Wignera skupionego na przedziale $[-2,2]$, który jest rozkładem granicznym otrzymanym w centralnym twierdzeniu granicznym w przypadku wolnych zmiennych losowych.

Stosując odpowiednie zależności kombinatoryczne między partycjami $\mathcal{ONC}^2_{2k}(m)$, możemy wyprowadzić rekurencyjną zależność na momenty $M_n^{(m)}$, dzięki której łatwo możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.4 *Transformaty Cauchy'ego $G^{(m)}(z)$ miar granicznych $\mu^{(m)}$ otrzymanych w centralnym twierdzeniu granicznym spełniają następującą zależność rekurencyjną*

$$G^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-2}}\,, \qquad G^{(m)}(z) = \frac{1}{z - G^{(m-1)}(z)}\,,$$

dla $m \geqslant 2$ oraz $z \in \mathbb{C}_+ = \{z : \mathfrak{Im} z > 0\}$.

Dowód. Wzór na $G^{(1)}(z)$ wynika z Propozycji 1.3 oraz z [Mu2]. Niech zatem $m \geqslant 2$. Załóżmy, że znamy ilość elementów zbioru $\mathcal{ONC}^2_{2k}(m)$ dla $k \leqslant n$, z których pomocą wyznaczymy ilość elementów zbioru $\mathcal{ONC}^2_{2n+2}(m)$. Wybierzmy jedną spośród liczb $\{2, 4, ..., 2n+2\}$, która tworzy parę z 1; oznaczmy ją przez $2k$. Korzystając z faktu, że partycje ze zbioru $\mathcal{ONC}^2_{2n+2}(m)$ są nieprzecinające, możemy niejako odseparować bloki wewnętrzne bloku $\{1, 2k\}$ od pozostałych bloków utworzonych na zbiorze $\{2k+1, \ldots, 2n+2\}$. Partycja opisana na $\{2k+1, \ldots, 2n+2\}$ jest stowarzyszona z $\mathcal{ONC}^2_{2n+2-2k}(m)$ i jest dokładnie $\binom{n+1}{n+1-k} \left|\mathcal{ONC}^2_{2n+2-2k}(m)\right|$ takich partycji. Z kolei bloki wewnętrzne bloku $\{1, 2k\}$ tworzą partycję stowarzyszoną z $\mathcal{ONC}^2_{2k-2}(m-1)$, na którą mamy $\binom{k}{k-1} \left|\mathcal{ONC}^2_{2k-2}(m-1)\right|$ możliwości wyboru. Tak więc mamy

$$\left|\mathcal{ONC}^2_{2n+2}(m)\right| = \sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n+1}{k} \left|\mathcal{ONC}^2_{2k-2}(m-1)\right| \left|\mathcal{ONC}^2_{2n-2k+2}(m)\right| \ .$$

Dzieląc obie strony przez $(n+1)!$ i oznaczając momenty graniczne z centralnego twierdzenia przez $M_n^{(m)}$, otrzymujemy

$$M^{(m)}_{2n+2} \ = \ \sum_{k=1}^{n+1} \ M^{(m-1)}_{2k-2} \ M^{(m)}_{2n-2k+2} \ .$$

Dzięki tej tożsamości łatwo możemy wyprowadzić rekurencyjną zależność na transformatę Cauchy'ego

$$\begin{aligned} G^{(m)}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} M^{(m)}_{2n} \ z^{-2n-1} \ = \ \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} M^{(m)}_{2n+2} \ z^{-2n-3} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} M^{(m-1)}_{2k-2} \ z^{-2k+1} \ M^{(m)}_{2n-2k+2} \ z^{-2n+2k-3} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} M^{(m)}_{2n} \ z^{-2n-1} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} M^{(m-1)}_{2n} \ z^{-2n-1} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{G^{(m)}(z) G^{(m-1)}(z)}{z} \ , \end{aligned}$$

skąd

$$G^{(m)}(z) = \frac{1}{z - G^{(m-1)}(z)} \ ,$$

co kończy dowód. ■

W poniższej tabeli przedstawione zostały momenty niskich rzędów otrzymane w centralnym twierdzeniu granicznym dla monotonicznej hierarchii wolnej oraz dla przypadku wolnej niezależności, który otrzymujemy dla $m = \infty$. Zauważmy, że dla ustalonego m momenty rzędu mniejszego niż $2m$ pokrywają się z momentami rozkładu Wignera.

	$n=2$	$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=10$
$m=1$	1	3/2	5/2	35/8	63/8
$m=2$	1	2	9/2	21/2	199/8
$m=3$	1	2	5	27/2	75/2
$m=4$	1	2	5	14	83/2
$m=\infty$	1	2	5	14	42

Tabela 1. Momenty niskich rzędów z centralnego twierdzenia granicznego.

Przykład 1.8 Obliczymy miarę graniczną $\mu^{(2)}$. Stosując formułę odwrócenia Stjeltiesa do transformaty $G^{(2)}(z)$, otrzymujemy część absolutnie ciągłą

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\mathfrak{Im}\, G^{(2)}(x+iy) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{1+x^2(2-x^2)} & \text{dla } |x|\leqslant\sqrt{2} \\ 0 & \text{dla } |x|>\sqrt{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Część dyskretną miary $\mu^{(2)}$ dostajemy, obliczając residua rzeczywistych biegunów transformaty $G^{(2)}(z)$:

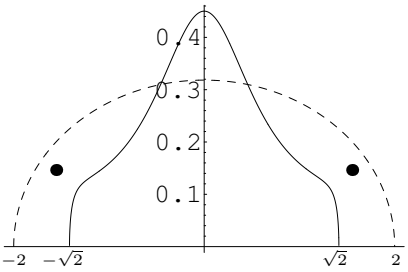
$$\operatorname{Res}_{\sqrt{\sqrt{2}+1}} G^{(2)}(z) \;=\; \operatorname{Res}_{-\sqrt{\sqrt{2}+1}} G^{(2)}(z) \;=\; \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Rysunek 1.3 przedstawia wykres części absolutnie ciągłej miary $\mu^{(2)}$ wraz z zaznaczonymi atomami.

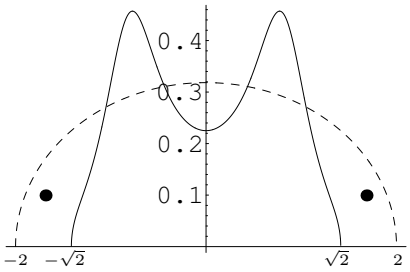
Używając podobnych obliczeń oraz pakietu Mathematica w przypadku miary $\mu^{(3)}$, otrzymujemy jej część absolutnie ciągłą postaci

$$f^{(3)}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x^2+(x^2-1)^2(2-x^2)} & \text{dla } |x|\leqslant\sqrt{2} \\ 0 & \text{dla } |x|>\sqrt{2} \end{cases}$$

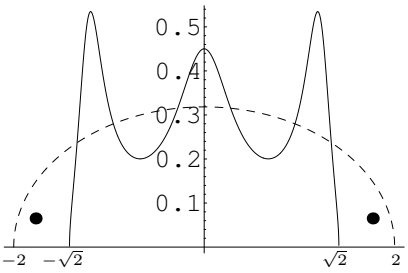
oraz część dyskretną, składającą się z dwóch atomów o przybliżonych masach $0,099$, skupionych w $\pm 1,685$ (patrz Rysunek 1.4). Analogicznie otrzymujemy wykresy miar $\mu^{(4)}$ i $\mu^{(5)}$ przedstawione na Rysunkach 1.5 i 1.6.



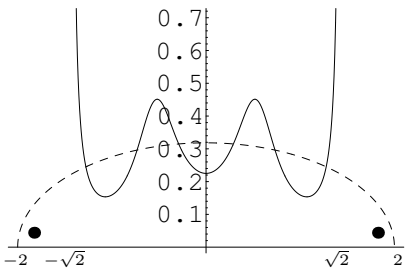
Rysunek 1.3 Wykres miary $\mu^{(2)}$.



Rysunek 1.4 Wykres miary $\mu^{(3)}$.



Rysunek 1.5 Wykres miary $\mu^{(4)}$.



Rysunek 1.6 Wykres miary $\mu^{(5)}$.

1.6 Twierdzenie graniczne Poissona

W tym podrozdziale udowodnimy twierdzenie graniczne Poissona dla monotonicznej hierarchii wolnej.

Twierdzenie 1.5 *Załóżmy, że dla każdego $N \in \mathbb{N}$ zmienne $X_{1,N}, \ldots, X_{N,N}$ mają ten sam rozkład i są m-monotonicznie niezależne względem stanu ϕ_N. Jeżeli dla pewnego $\lambda > 0$ i każdego naturalnego k zachodzi warunek $N\phi_N(X_{i,N}^k) \to \lambda^k$ przy $N \to \infty$, to*

$$\lim_{N\to\infty} \phi_N((X_{1,N} + \ldots + X_{N,N})^n) = \sum_{b=0}^{n} \frac{\lambda^b}{b!} |\mathcal{ONC}_n(b,m)|, \qquad n \geqslant 0\,,$$

gdzie $\mathcal{ONC}_n(b,m)$ jest podzbiorem zbioru $\mathcal{ONC}_n(m)$, składającym się z partycji posiadających dokładnie b bloków; ponadto przyjmujemy, że $|\mathcal{ONC}_0(b,m)| = \delta_{0,b}$ dla dowolnych $m \geqslant 1$ i $b \geqslant 0$.

Dowód. Wykorzystując niezmienniczość momentów mieszanych na odwzorowania zachowujące porządek, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\phi_N((X_{1,N}+\ldots+X_{N,N})^n) &= \sum_{1\leq k_1,\ldots,k_n\leq N} \phi_N(X_{k_1,N}\ldots X_{k_n,N}) \\ &= \sum_{P\in\mathcal{OP}_n} \binom{N}{b(P)} m_N(P)\,,\end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{OP}_n$ oznacza zbiór wszystkich uporządkowanych partycji zbioru $\{1,\ldots,n\}$, $b(P)$ jest liczbą bloków partycji P oraz $m_N(P) = \phi_N(X_{k_1,N}\ldots X_{k_n,N})$ dla dowolnego ciągu $(k_1,\ldots,k_n)$ stowarzyszonego z P.

Z Lematów 1.3-1.5 wynika, że jeżeli $P \in \mathcal{ONC}_n(m)$, to $m_N(P)$ faktoryzuje się na dokładnie $b(P)$ czynników, będących momentami brzegowymi. W przeciwnym razie, tzn. gdy $P \notin \mathcal{ONC}_n(m)$, $m(P)$ jest iloczynem więcej niż $b(P)$ czynników. Zatem jedynie partycje z $\mathcal{ONC}_n(m)$ po przejściu z N do nieskończoności dadzą niezerowy wkład, co w połączeniu z Lematem 1.4 daje tezę. ■

Podobnie jak w przypadku centralnego twierdzenia granicznego, wyznaczymy teraz rekurencyjną zależność między funkcjami generującymi momenty otrzymane w twierdzeniu granicznym Poissona. Potrzebne nam będą oznaczenia

$$M_n^{(m)}(\lambda,b) = \frac{\lambda^b}{b!}|\mathcal{ONC}_n(b,m)|\,, \qquad H^{(m)}(\lambda,z) = \sum_{n,b=0}^{\infty} M_n^{(m)}(\lambda,b)\,z^{-n-1}$$

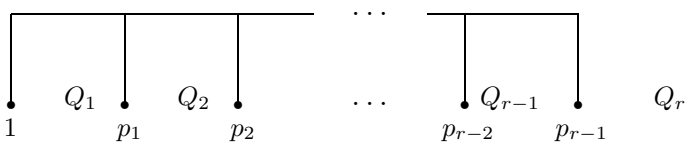
oraz $M_n^{(m)}(\lambda,0) = \delta_{n,0}$ dla dowolnego rzeczywistego $\lambda > 0$ i naturalnych $n, b \geqslant 0$. Funkcję $H^{(m)}(\lambda,z)$ traktujemy jako formalny szereg potęgowy.

Twierdzenie 1.6 *Funkcje $H^{(m)}(\lambda,z)$ spełniają rekurencyjną zależność*

$$H^{(m)}(\lambda,z) = \frac{1-H^{(m-1)}(\lambda,z)}{z - zH^{(m-1)}(\lambda,z) - \lambda}\,, \qquad m \geqslant 2\,,$$

gdzie $H^{(1)}(\lambda,z)$ jest funkcją Lamberta (product log function) opisaną w [Mu2].

Dowód. Załóżmy, że $m \geqslant 2$. W celu „skonstruowania" nieprzecinającej partycji zbioru $\{1,\ldots,n\}$ wybierzmy te elementy, które znajdują się w tym samym bloku co element pierwszy; oznaczmy ten blok przez $\{1,p_1,\ldots,p_{r-1}\}$ jak na poniższym diagramie. Ponadto, niech $Q_1,Q_2,\ldots,Q_r$ będą „podpartycjami" odcinków $(2,p_1-1)$, $(p_1+1,\ldots,p_2-1),\ldots,(p_{r-1}+1,n)$.



Dla uproszczenia notacji wprowadzimy oznaczenie $N_n(q,m) = |\mathcal{ONC}_n(q,m)|$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} N_n(q,m) &= \sum_{r=1}^{n} \sum_{k_1+\ldots+k_r=n-1} \sum_{q_1+\ldots+q_r=q-1} \frac{q!}{q_1!q_2!\ldots q_r!} \\ &\times \; N_{k_1-1}(q_1,m-1)\ldots N_{k_{r-1}-1}(q_{r-1},m-1)N_{k_r}(q_r,m) \end{aligned} \tag{1.10}$$

dla $n,k_1,\ldots,k_{r-1} \geqslant 1$; $k_r,b_1,\ldots,b_r \geqslant 0$, gdzie $k_1 = p_1 - 1, k_2 = p_2 - p_1, \ldots, k_{r-1} = p_{r-1} - p_{r-2}, k_r = n - p_{r-1}$, ponieważ istnieje dokładnie $q!/(q_1!\ldots q_r!)$ sposobów wyboru kolorów dla partycji $Q_1,\ldots,Q_r$ spośród $q-1 = q_1+\ldots+q_r$ kolorów oraz istnieje dokładnie $N_{k_1-1}(q_1,m-1)\ldots N_{k_r}(q_r,m)$ sposobów ich pokolorowania, tak aby cała partycja należała do $\mathcal{ONC}_n(q,m)$. Teraz, mnożąc obie strony (1.10) przez $\lambda^q/q!$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} M_n^{(m)}(\lambda,q) &= \lambda \sum_{r=1}^{n} \sum_{k_1+\ldots+k_r=n-1} \sum_{q_1+\ldots+q_r=q-1} \\ &\qquad M_{k_1-1}^{(m-1)}(\lambda,q_1)\ldots M_{k_{r-1}-1}^{(m-1)}(\lambda,q_{r-1})\, M_{k_1}^{(m)}(\lambda,q_r)\,, \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} H^{(m)}(\lambda,z) &= \sum_{n,q=0}^{\infty} M_n^{(m)}(\lambda,q)\, z^{-n-1} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{\lambda}{z} \sum_{n,q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k_1+\ldots+k_r=n-1} \sum_{q_1+\ldots+q_r=q-1} M_{k_1-1}^{(m-1)}(\lambda,q_1)\, z^{-k_1} \\ &\quad \times \ldots \times M_{k_{r-1}-1}^{(m-1)}(\lambda,q_{r-1})\, z^{-k_{r-1}} \times M_{k_1}^{(m)}(\lambda,q_r)\, z^{-k_r-1} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{\lambda}{z} \sum_{r=1}^{\infty} \Big(\sum_{\beta,\nu=0}^{\infty} M_\nu^{(m-1)}(\lambda,\beta)\, z^{-\nu-1} \Big)^{r-1} \sum_{\mu,\alpha=0}^{\infty} M_\mu^{(m)}(\lambda,\alpha)\, z^{-\mu-1} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{\lambda H^{(m)}(\lambda,z)}{z\big(1 - H^{(m-1)}(\lambda,z)\big)}\,, \end{aligned}$$

co po prostych przekształceniach prowadzi do tezy twierdzenia. ■

1.7 Zasada niezmienniczości

Niech $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ będzie ciągiem m-monotonicznych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, średniej zero i wariancji jeden. W podrozdziale tym badać będziemy asymptotyczne zachowanie znormalizowanych sum

$$S_N(f) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=[sN]+1}^{[tN]} X_i \,, \tag{1.11}$$

dla $f = \chi(s,t] \in \Theta$ (patrz (1.3)) przy $N \to \infty$.

Wygodniej nam będzie podać formułę na momenty mieszane powyższych sum indeksowanych funkcjami o nośnikach parami równych lub rozłącznych. Oczywiście, każdy ogólniejszy przypadek możemy sprowadzić do takiego poprzez odpowiednie podziały funkcji.

Twierdzenie 1.7 *Załóżmy, że $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne. Dodatkowo, niech $\sigma(f) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$ będzie partycją określoną przez ciąg $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, tzn. każdy blok σ_k składa się ze wszystkich j, dla których f_j są równe. Wtedy*

$$\lim_{N\to\infty} \phi(S_N(f_1)S_N(f_2)\ldots S_N(f_n)) = \frac{1}{b_1!b_2!\ldots b_r!} \sum_{\substack{P\in\mathcal{ONC}_n^2(m)\\ P\sim(f_1,f_2,\ldots,f_n)}} \prod_{\{\alpha,\beta\}\in P} \langle f_\alpha, f_\beta\rangle \,, \tag{1.12}$$

gdzie $b_k = |\sigma_k|/2$, dla $k = 1, \ldots, p$.

Dowód. Oczywiście, teza zachodzi dla n nieparzystych; przyjmujemy tu, że $\mathcal{ONC}_n^2(m) = \emptyset$. Załóżmy zatem, że $n = 2k$ oraz $f_k = \chi_{(s_k,t_k]}$, dla $k = 1, \ldots, n$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned}\phi(S_N(f_1)S_N(f_2)\ldots S_N(f_n)) &= \frac{1}{N^k} \sum_{i_1=[s_1N]+1}^{[t_1N]} \ldots \sum_{i=[s_nN]+1}^{[t_nN]} \phi(X_{i_1}\ldots X_{i_n}) \\ &= \frac{1}{N^k} \sum_{P\in\mathcal{ONC}_n^2(m)} A_P(f_1, f_2, \ldots, f_n; N) + \mathcal{O}(1/N) \,,\end{aligned}$$

gdzie $A_P(f_1, f_2, \ldots, f_n; N)$ oznacza liczbę ciągów $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ takich, że

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n) \sim P \quad \text{oraz} \quad [s_jN] < i_j \le [t_jN] \,, \text{ dla } \; j = 1, \ldots, n.$$

Teraz warunek singletonu (Lemat 1.1) mówi nam, że $A_P(f_1, f_2, \ldots, f_n; N) = 0$, jeżeli P posiada singleton. Ponadto, jeżeli P ma mniej niż k bloków, to jej „wkład" graniczny również wynosi zero, podobnie jak w centralnym twierdzeniu granicznym. Zatem pod uwagę brać będziemy jedynie dwupartycje. Z Lematów 1.3-1.5 otrzymujemy, że momenty odpowiadające dwupartycjom, które nie należą do $\mathcal{ONC}_n^2(m)$, faktoryzują się

na więcej niż k czynników, a zatem ich wkład w granicy przy $N \to \infty$ również wynosi zero. W końcu, gdy $P \in \mathcal{ONC}_n^2(m)$ i $P \sim (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, to

$$A_P(f_1, f_2, \ldots, f_n; N) = \binom{N_1}{b_1}\binom{N_2}{b_2}\ldots\binom{N_p}{b_p},$$

gdzie $N_j = [t^{(j)}N] - [s^{(j)}N]$ oraz $t^{(j)}, s^{(j)}$ oznaczają końce nośnika funkcji f_r, dla dowolnego $r \in \sigma_j$ oraz $j = 1, \ldots, p$. Dla takich partycji P mamy

$$\begin{aligned}\frac{A_P(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{N^k} &= \prod_{j=1}^{p} \frac{N_j(N_j-1)\ldots(N_j-b_j+1)}{b_j! N^{b_j}} \\ &\to \prod_{j=1}^{p} \frac{(t^{(j)} - s^{(j)})^{b_j}}{b_j!} \\ &= \frac{1}{b_1! b_2! \ldots b_p!} \prod_{\{\alpha,\beta\}\in P} \langle f_\alpha, f_\beta \rangle .\end{aligned}$$

W przeciwnym razie, tzn. gdy $P \not\sim (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, mamy $A_P(f_1, f_2, \ldots, f_n; N) = 0$, co kończy dowód. ■

1.8 m-monotoniczne operatory gaussowskie

W podrozdziale tym wprowadzimy m-monotoniczną przestrzeń Focka oraz zdefiniujemy na niej odpowiednie operatory, które w stanie próżni dawać będą realizację momentów otrzymanych w zasadzie niezmienniczości dla m-monotonicznie niezależnych zmiennych losowych. Operatory te nazywać będziemy *m-monotonicznymi operatorami gaussowskimi*.

Wolną przestrzeń Focka nad przestrzenią Hilberta $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ definiujemy jako sumę prostą

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n} \cong \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbb{R}_+^n), \tag{1.13}$$

gdzie Ω jest jednostkowym wektorem zwanym *wektorem próżni*. Na $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ rozważamy kanoniczny iloczyn skalarny. Analogicznie definiujemy *m-monotoniczną przestrzenią Focka* nad przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}$ jako sumę prostą

$$\mathcal{F}^{(m)}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{m} L^2(\mathbb{R}_+^n) \oplus \bigoplus_{n=m+1}^{\infty} L^2(\Delta_n^{(m)}), \tag{1.14}$$

gdzie $\Delta_n^{(m)} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_{n-m+1} \geqslant 0\}$. Przestrzeń $\mathcal{F}^{(m)}(\mathcal{H})$ może być w naturalny sposób traktowana jako podprzestrzeń wolnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Na $\mathcal{F}^{(m)}(\mathcal{H})$ określony jest kanoniczny iloczyn skalarny „odziedziczony" z $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. W szczególności, przestrzeń $\mathcal{F}^{(1)}(\mathcal{H})$ jest monotoniczną przestrzenią Focka [Mu2,Lu].

Jeżeli przez $\mathcal{P}^{(m)}$ oznaczymy kanoniczny projektor ortogonalny z $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ na $\mathcal{F}^{(m)}(\mathcal{H})$, to wówczas $\mathcal{F}^{(m)}(\mathcal{H})$ jest rozpięta przez Ω oraz wektory postaci

$$f_1 \otimes_m \ldots \otimes_m f_n := \mathcal{P}^{(m)}(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)\,,$$

gdzie $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Dla $f \in \mathcal{H}$ zdefiniujmy *m-monotoniczny operator kreacji* na $\mathcal{F}^{(m)}(\mathcal{H})$ wzorami

$$\begin{aligned} a^{(m)}(f)\Omega &= f \\ a^{(m)}(f)(f_1 \otimes_m \ldots \otimes_m f_n) &= f \otimes_m f_1 \otimes_m \ldots \otimes_m f_n \end{aligned}$$

oraz *m-monotoniczny operator anihilacji* jako sprzężenie $a^{(m)*}(f)$. Łatwo możemy zauważyć, że $a^{(m)*}(f)$ działa następująco:

$$a^{(m)*}(f)(f_1 \otimes_m \ldots \otimes_m f_n) = \begin{cases} \langle f_1, f\rangle f_2 \otimes_m \ldots \otimes_m f_n & 1 \le n \le m \\ M_\psi f_2 \otimes_m \ldots \otimes_m f_n & n > m \end{cases},$$

gdzie $(M_\psi g)(x) = \psi(x)g(x)$ jest operatorem mnożenia przez funkcję

$$\psi(x) = \langle f_1, f\rangle_x = \int_{y>x} f_1(y)\bar{f}(y)dy \tag{1.15}$$

(zależność funkcji ψ od f i f_1 będziemy pomijali w notacji). Zauważmy, że jeżeli $\mathrm{supp}f_1 \cap \mathrm{supp}f > \mathrm{supp}f_2$, to $\psi(x) = \langle f_1, f\rangle$, dla każdego $x \in \mathrm{supp}f_2$.

Teraz zdefiniujemy *m-monotoniczny operator gaussowski* jako sumę operatora kreacji i anihilacji, tzn.

$$\omega^{(m)}(f) = a^{(m)}(f) + a^{(m)*}(f)\,.$$

Naszym celem będzie wyrażenie momentów granicznych uzyskanych w zasadzie niezmienniczości przez momenty m-monotonicznych operatorów gaussowskich w stanie próżni $\varphi(\cdot) = \langle \cdot\,\Omega, \Omega\rangle$. Dla przejrzystości i uproszczenia notacji rozważymy jedynie przypadek monotoniczny, tzn. dla $m = 1$ oraz będziemy pisać $a^{(1)}(f) = a(f)$, $a^{(1)*}(f) = a^*(f)$ i $\omega^{(1)}(f) = \omega(f)$. Kombinatoryczna formuła tutaj uzyskana jest nowym wynikiem nawet w przypadku monotonicznym. Przypadek ogólny (dla dowolnego m) może być uzyskany poprzez analogię do przypadku monotonicznego.

Wprowadźmy kilka niezbędnych oznaczeń. Dla dowolnej partycji nieuporządkowanej $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\} \in \mathcal{NC}^2_{2k}$ oraz ciągu funkcji $(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$ połóżmy

$$a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2k}) = a^{\epsilon_1}(f_1)a^{\epsilon_2}(f_2)\ldots a^{\epsilon_{2k}}(f_{2k})\,, \tag{1.16}$$

gdzie $\epsilon_p = *$ (annihilacja) oraz $\epsilon_q = 1$ (kreacja), gdy $\{p, q\}$ jest blokiem partycji π oraz $p < q$. Jeżeli π jest zgodna z $(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$, to wówczas z każdym blokiem π_i możemy związać funkcję liniową

$$\psi_{\pi_i}(x) = \frac{t^{(i)} - x}{\zeta(\pi_i) + 1}\,, \qquad x \in [s^{(i)}, t^{(i)}]\,, \tag{1.17}$$

gdzie $\zeta(\pi_i)$ jest zadane tak jak w (1.5) oraz $[s^{(i)}, t^{(i)}] = \operatorname{supp} f^{(i)}$, tak jak w (1.4). Wówczas ma miejsce następujący lemat.

Lemat 1.7 *Niech* $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\} \in \mathcal{NC}^2_{2k}$ *oraz* $\pi \sim (f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$, *gdzie* $f_1, f_2, \ldots, f_{2k} \in \Theta$ *mają nośniki parami równe lub rozłączne. Wtedy*

$$\varphi(a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})) = \psi_{\pi_1}(s^{(1)})\psi_{\pi_2}(s^{(2)}) \ldots \psi_{\pi_k}(s^{(k)})\,. \tag{1.18}$$

Dowód. Używać będziemy skróconej notacji a_π zamiast (1.16). Dla $k = 1$ partycja π jest postaci $\{\{1, 2\}\}$ i wówczas

$$a_\pi\Omega = a^*(f_1)a(f_1)\Omega = (t^{(1)} - s^{(1)})\Omega = \psi_{\pi_1}(s^{(1)})\Omega\,,$$

a zatem teza jest spełniona.

Claim: Niech $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{H}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $\mathrm{supp}g_1 = \mathrm{supp}f_{2k}$ lub $\mathrm{supp}g_1 < \mathrm{supp}f_{2k}$, to wówczas zachodzi równość

$$a_\pi(g_1 \otimes_1 \ldots \otimes_1 g_n) = \prod_{\substack{1\le i\le k\\ \mathrm{supp}f_i \neq \mathrm{supp}g_1}} \psi_{\pi_i}(s^{(i)})\Big(\prod_{\substack{1\le j\le k\\ \mathrm{supp}f_j = \mathrm{supp}g_1}} M_{\psi_j} g_1\Big) \otimes_1 \ldots \otimes_1 g_n\,.$$

Załóżmy, że powyższy wzór zachodzi dla $\pi \in \mathcal{NC}^2_{2r}$ dla $1 \le r \le k-1$. Jeżeli $\pi = \pi' \cup \pi''$, gdzie π' jest nieprzecinającą partycją zbioru $\{1, \ldots, 2r\}$ oraz π'' jest nieprzecinającą partycją zbioru $\{2r+1, \ldots, 2k\}$, to teza jest oczywista. Zatem załóżmy, że $\pi = \pi' \cup \{\{1, 2k\}\}$. Wówczas, stosując zasadę indukcji, mamy

$$\begin{aligned} a_\pi(g_1 \otimes_1 \ldots \otimes_1 g_n) &= a^*(f_1)a_{\pi'}(f_{2k} \otimes_1 g_1 \otimes_1 \ldots \otimes_1 g_n) \\ &= \prod_{\substack{2\le i\le k\\ f_i \neq f_{2k}}} \psi_{\pi_i}(s^{(i)})a^*(f_1)\Big(\prod_{\substack{2\le j\le k\\ f_j = f_{2k}}} M_{\psi_j} f_{2k} \otimes_1 g_1 \otimes_1 \ldots \otimes_1 g_n\Big) \\ &= \prod_{\substack{2\le i\le k\\ f_i \neq f_{2k}}} \psi_{\pi_i}(s^{(i)})(M_\psi g_1 \otimes_1 \ldots \otimes_1 g_n)\,, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \psi(x) = \int_x^{t^{(1)}} \prod_{\substack{2\le j\le k\\ f_j = f_{2k}}} M_{\psi_j} 1 dy &= \prod_{\substack{2\le j\le k\\ f_j = f_{2k}}} (\zeta(\pi_j) + 1)^{-1} \int_x^{t^{(1)}} (t^{(1)} - y)^{\zeta(\pi_1)} dy \\ &= \prod_{\substack{1\le j\le k\\ f_j = f_{2k}}} (\zeta(\pi_j) + 1)^{-1}(t^{(1)} - x)^{\zeta(\pi_1)+1}\,, \end{aligned}$$

o ile $\mathrm{supp}g_1 = \mathrm{supp}f_{2k}$. Ponadto

$$\psi(x) = \prod_{\substack{1\le j\le k\\ f_i = f_{2k}}} \psi_{\pi_j}(s^{(j)})\,,$$

o ile $\mathrm{supp}g_1 \neq \mathrm{supp}f_{2k}$. ■

Przykład 1.9 Rozważmy partycję π z Przykładu 1.7 przedstawioną na Rysunku 1.2. Obliczymy moment $\langle a_\pi \Omega, \Omega \rangle$. Korzystając z Lematu 1.7, otrzymujemy

$$\langle a_\pi \Omega, \Omega \rangle = \frac{1}{2} t^2 (t' - t)^2 \,,$$

ponieważ $\psi_{\pi_1}(x) = 1/2(t - x)$, $\psi_{\pi_2}(x) = t' - x$, $\psi_{\pi_3}(x) = t - x$, $\psi_{\pi_4}(x) = t' - x$.

Dla porównania odnotujmy fakt, że w przypadku wolnych kreatorów i anihilatorów istnieje multiplikatywna formuła podobna do (1.18), przy czym prawa strona jest postaci $(t^{(1)} - s^{(1)}) \ldots (t^{(k)} - s^{(k)})$. Zatem różnica polega na tym, że w przypadku monotonicznym dodatkowo zawarta jest informacja o liczbie bloków wewnętrznych.

Jak pokazuje poniższy lemat, liczba odpowiednich „pokolorowań" partycji π (patrz (1.6)) również może być wyrażona przez liczby bloków wewnętrznych.

Lemat 1.8 *Niech* $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\} \in \mathcal{NC}^2_{2k}$ *oraz* $\pi \sim (f_1, f_2, \ldots, f_{2k})$, *gdzie* $f_1, f_2, \ldots, f_{2k} \in \Theta$ *mają nośniki parami równe lub rozłączne. Wtedy*

$$\frac{c_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2k})}{b_1! b_2! \ldots b_p!} = \prod_{i=1}^{k} (\zeta(\pi_i) + 1)^{-1} \tag{1.19}$$

przy tej samej notacji jak w Twierdzeniu 1.7.

Dowód. Oczywiście teza zachodzi dla $k = 1$ i $\pi = \big\{\{1, 2\}\big\}$. Załóżmy teraz, że wzór (1.19) jest prawdziwy dla nieprzecinających dwupartycji zbioru składającego się z $2k-2$ elementów oraz niech $\pi \in \mathcal{NC}^2_{2k}$.

Przypadek 1. Załóżmy, że $\pi = \pi' \cup \pi''$, gdzie $\pi' = \{\pi'_1, \ldots, \pi'_r\}$ jest nieprzecinającą dwupartycją zbioru $\{1, \ldots, 2r\}$ oraz $\pi'' = \{\pi''_1, \ldots, \pi''_{k-r}\}$ jest nieprzecinającą dwupartycją zbioru $\{2r+1, \ldots, 2k\}$. Niech a_i oznacza liczbę niepustych bloków partycji $\tau^{(i)} = \{\pi'_1 \cap \sigma_i, \ldots, \pi'_r \cap \sigma_i\}$, gdzie $i = 1, \ldots, p$. Skoro $\pi \sim (f_1, \ldots, f_{2k})$, zatem istnieje dokładnie $\binom{b_i}{a_i}$ sposobów wyboru kolorów dla bloków partycji $\tau^{(i)}$. Kolory mogą być wybierane w sposób niezależny, skąd wynika, że

$$\begin{aligned}
\frac{c_\pi(f_1, \ldots, f_{2k})}{b_1! \ldots b_p!} &= \binom{b_1}{a_1} \ldots \binom{b_p}{a_p} \frac{c_{\pi'}(f_1, \ldots, f_{2r}) c_{\pi''}(f_{2r+1}, \ldots, f_{2k})}{b_1! \ldots b_p!} \\
&= \frac{c_{\pi'}(f_1, \ldots, f_{2r})}{a_1! \ldots a_p!} \frac{c_{\pi''}(f_{2r+1}, \ldots, f_{2k})}{(b_1 - a_1)! \ldots (b_p - a_p)!} \\
&= \prod_{i=1}^{r} (\zeta(\pi'_i) + 1)^{-1} \prod_{j=1}^{k-r} (\zeta(\pi''_j) + 1)^{-1} \\
&= \prod_{i=1}^{k} (\zeta(\pi_i) + 1)^{-1} \,,
\end{aligned}$$

co daje tezę w tym przypadku.

Przypadek 2. Niech teraz $\pi = \pi' \cup \{\{1, 2k\}\}$, gdzie $\pi' = \{\pi_2, \ldots \pi_k\}$ jest nieprzecinającą dwupartycją zbioru $\{2, \ldots, 2k-1\}$. Zatem wszystkie bloki partycji π' są wewnętrzne względem bloku $\pi_1 = \{1, 2k\}$, co implikuje, że π_1 musi mieć kolor 1. Wnioskujemy stąd, że istnieje dokładnie tyle samo sposobów wyboru kolorów dla partycji π co dla π'. Wybierając b_1 jako liczbę bloków partycji π o tym samym nośniku co $f_1 = f_{2k}$, dostajemy

$$\begin{aligned} c_\pi(f_1, \ldots, f_{2k}) &= c_{\pi'}(f_2, \ldots, f_{2k-1}) \\ &= (b_1 - 1)! b_2! \ldots b_p! \prod_{i=2}^{k} (\zeta(\pi_i) + 1)^{-1} \\ &= b_1! b_2! \ldots b_p! \prod_{i=1}^{k} (\zeta(\pi_i) + 1)^{-1} \end{aligned}$$

ponieważ $b_1 = \zeta(\pi_1) + 1$, co kończy dowód. ■

Twierdzenie 1.8 *Załóżmy, że $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne. Wtedy*

$$\varphi(\omega(f_1)\omega(f_2)\ldots\omega(f_n)) = \frac{1}{b_1! b_2! \ldots b_p!} \sum_{\substack{P \in \mathcal{MNC}_n^2 \\ P \sim (f_1, f_2, \ldots, f_n)}} \prod_{\{\alpha,\beta\} \in P} \langle f_\alpha, f_\beta \rangle ,$$

przy tej samej notacji jak w Twierdzeniu 1.7.

Dowód. Jeżeli $n = 2k$, to z Lematów 1.7 i 1.8 mamy

$$\begin{aligned} \varphi(\omega(f_1)\omega(f_2)\ldots\omega(f_{2k})) &= \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{NC}_{2k}^2 \\ \pi \sim (f_1, \ldots, f_n)}} \langle a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_n)\Omega, \Omega \rangle \\ &= \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{NC}_{2k}^2 \\ \pi \sim (f_1, \ldots, f_n)}} \psi_{\pi_1}(s^{(1)}) \psi_{\pi_2}(s^{(2)}) \ldots \psi_{\pi_k}(s^{(k)}) \\ &= \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{NC}_{2k}^2 \\ \pi \sim (f_1, \ldots, f_n)}} \prod_{i=1}^{k} \frac{t^{(i)} - s^{(i)}}{\zeta(\pi_i) + 1} \\ &= \frac{1}{b_1! \ldots b_p!} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{NC}_{2k}^2 \\ \pi \sim (f_1, \ldots, f_n)}} c_\pi(f_1, \ldots, f_{2k}) \prod_{\{\alpha,\beta\} \in \pi} \langle f_\alpha, f_\beta \rangle \\ &= \frac{1}{b_1! \ldots b_p!} \sum_{\substack{P \in \mathcal{MNC}_{2k}^2 \\ P \sim (f_1, \ldots, f_n)}} \prod_{\{\alpha,\beta\} \in P} \langle f_\alpha, f_\beta \rangle . \end{aligned}$$

Oczywiście, w przypadku nieparzystego n obie strony równości są równe zero. ■

Odnotujmy fakt, że Lematy 1.7 i 1.8 oraz Twierdzenie 1.8 mogą być uogólnione do dowolnego $m \geqslant 1$ poprzez zastąpienie $\zeta(\pi_k)$ przez

$$\zeta^{(m)}(\pi_k) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } d(\pi_k) < m \\ \zeta(\pi_k) & \text{gdy } d(\pi_k) \geqslant m \end{cases},$$

co oznacza, że do głębokości m mamy wolną kombinatorykę oraz od głębokości m – kombinatorykę monotoniczną.

Wniosek 1.1 *Momenty rozkłady arcusa sinusa mogą być wyrażone wzorem*

$$\frac{1}{2^k}\binom{2k}{k} = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_{2k}^2} \varphi(a_\pi) = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_{2k}^2} (\zeta(\pi_1)+1)^{-1} \dots (\zeta(\pi_k)+1)^{-1},$$

gdzie $\varphi(a_\pi)$ są momentami w stanie próżni iloczynów monotonicznych kreatorów i anihilatorów $a = a(\chi_{[0,1)})$ oraz $a^* = a^*(\chi_{[0,1)})$.

Dowód jest natychmiastową konsekwencją Lematu 1.7 i Twierdzenia 1.8 zastosowanych do $a = a(\chi_{[0,1)})$ oraz $a^* = a^*(\chi_{[0,1)})$. ■

Uwaga. W kombinatoryce opartej na głębokościach bloków opisanej w [ABo] momenty rozkładu arcusa sinusa mogą być zapisane za pomocą podobnej sumy, tzn.

$$\frac{1}{2^k}\binom{2k}{k} = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_{2k}^2} \varphi(b_\pi) = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_{2k}^2} \gamma_{d(\pi_1)}\gamma_{d(\pi_2)} \dots \gamma_{d(\pi_k)},$$

gdzie $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = 1/2$. Jednakże w tym przypadku składniki $\varphi(b_\pi)$ są momentami pewnych operatorów kreacji i anihilacji b, b^* na pewnej przestrzeni Focka i nie zgadzają się z momentami monotonicznych kreatorów i anihilatorów a, a^*.

Wniosek 1.2 *Ciąg $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $\omega_i = \omega(\chi_{[i-1,i)})$ jest ciągiem operatorów o rozkładzie arcusa sinusa, monotonicznie niezależnych względem stanu próżni φ.*

Dowód jest natychmiastową konsekwencją Lematu 1.7 i Twierdzenia 1.8. ■

Rozdział 2

Monotoniczno–wolna interpolacja związana z rozkładami Kestena

Rozdział ten również poświęcimy badaniom interpolacji monotoniczno–wolnej, przy czym, w odróżnieniu od monotonicznej hierarchii wolnej, będzie to interpolacja ciągła. Nazywać ją będziemy *p-interpolacją*, gdyż indeksowana będzie parametrem rzeczywistym $p \in [0,1]$. Dla $p = 0$ otrzymamy elementy probabilistyki monotonicznej, natomiast dla $p = 1$ – probabilistyki wolnej.

Tytuł tego rozdziału wywodzi się z pracy Kestena [Ke], w której to zbadana została dwuparametryczna rodzina miar probabilistycznych $\mu_{a,b}$ zwanych *rozkładami Kestena*. Miary te zadane są za pomocą transformaty Cauchy'ego $G_{\mu_{a,b}}$ w postaci ułamka łańcuchowego

$$G_{\mu_{a,b}}(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{a}{z - \cfrac{b}{z - \cfrac{b}{z - \cfrac{b}{z - \ddots}}}}}.$$

Jak się okaże w Twierdzeniu 2.3, miara $\mu_{a,b}$ dla $a = 1$ oraz $b = (p+1)/2$ jest miarą o momentach otrzymanych w centralnym twierdzeniu granicznym dla p-interpolacji.

W kolejnych podrozdziałach wprowadzimy pojęcie operatorów p-gaussowskich oraz zbadamy ich podstawowe własności (Podrozdział 2.2). Jak się okaże w Twierdzeniu 2.2, dadzą one realizację granicznych momentów w dyskternej wersji centralnego twierdzenia granicznego na wolnej przestrzeni Focka. Ponadto, wykażemy istnienie i jednoznaczność miary o momentach w nim uzyskanych. W końcowym podrozdziale wprowadzimy *operator Poissona*, którego momenty realizować będą momenty rozkładu Poissona dla p-interpolacji.

2.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Zbiór $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ niepustych, parami rozłącznych zbiorów, nazywamy *partycją* (*nieuporządkowaną*) zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, jeżeli $\pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_k = \{1, 2, \ldots, n\}$. Elementy π_i partycji nazywamy *blokami*. Zbiór wszystkich nieuporządkowanych partycji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{P}_n$. Będziemy mówili, że π jest partycją *przecinającą*, gdy dla pewnych $i \neq j$ istnieją $n, n' \in \pi_i$, $m, m' \in \pi_j$ takie, że $n < m < n' < m'$. W przeciwnym wypadku π nazywać będziemy *nieprzcinającą*, a zbiór wszystkich partycji nieprzecinających oznaczać będziemy przez $\mathcal{NC}_n$. Przez $\mathcal{P}_n^2$ oznaczmy zbiór wszystkich *dwupartycji* nieuporządkowanych, tzn. takich, w których wszystkie bloki są dwuelementowe. Analogicznie $\mathcal{NC}_n^2 = \mathcal{NC}_n \cap \mathcal{P}_n^2$.

Na blokach partycji $\pi \in \mathcal{NC}_n$ możemy zadać częściowy porządek, który w naturalny sposób jest związany ze strukturą i wzajemnym położeniem jej bloków. Dokładniej, powiemy, że blok π_i jest *blokiem wewnętrznym* względem bloku π_j dla $i \neq j$, gdy

$$\exists\, a, b \in \pi_j \;\; \forall\, c \in \pi_i \quad a < c < b$$

i oznaczać będziemy $\pi_j < \pi_i$ oraz $\pi_j \leqslant \pi_i \iff [\pi_j < \pi_i \;\vee\; \pi_j = \pi_i]$; równoważnie mówić będziemy, że π_j jest *blokiem zewnętrznym* względem bloku π_i. Powiemy, że bloki π_j i π_i są *sąsiadujące*, jeżeli są porównywalne w sensie powyższego częściowego porządku oraz nie istnieje inny blok pośredni, tzn. gdy jednocześnie spełnione są warunki

1. $\pi_j < \pi_i$
2. $\pi_j \leqslant \pi_k \leqslant \pi_i \implies [\, k = i \;\vee\; k = j\,]$.

Bloki sąsiadujące, takie że $\pi_j < \pi_i$ oznaczać będziemy przez $\pi_j \prec \pi_i$.

W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy pojęcie partycji uporządkowanych, odgrywających ważną rolę w probabilistyce monotonicznej. W tym rozdziale potrzebna nam będzie nieco inna (choć równoważna) ich definicja. Mianowicie, parę $P = (\pi, \sigma)$, gdzie $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ jest pewną partycją z $\mathcal{P}_n$ oraz σ – pewną permutacją z S_k, nazywamy *partycją uporządkowaną* zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ i utożsamiamy ją z ciągiem

$$P = (P_1, P_2, \ldots, P_k)\,, \qquad P_i = \pi_{\sigma(i)}\,. \tag{2.1}$$

Zbiór wszystkich uporządkowanych partycji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{OP}_n$. Analogicznie definiujemy zbiory $\mathcal{OP}_n^2$, $\mathcal{ONC}_n$, $\mathcal{ONC}_n^2$.

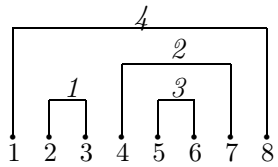
Zauważmy, że w każdej partycji uporządkowanej $P = (\pi, \sigma)$ permutacja σ zadaje liniowy porządek na blokach partycji π. Porównując ten porządek z porządkiem częściowym zadanym przez relację wewnętrzności bloków, dla $P \in \mathcal{ONC}_n$, możemy określić „nieporządki" występujące pomiędzy blokami.

Definicja 2.1 Niech $P = (P_1, P_2, \ldots, P_k) \in \mathcal{ONC}_n$ będzie nieprzecinającą partycją uporządkowaną. Wówczas powiemy, że dwa bloki P_i, P_j tworzą *nieporządek* lub *inwersję Eulera* w partycji uporządkowanej P, jeżeli $i < j$ oraz $P_j \prec P_i$. Liczbę wszystkich inwersji Eulera w partycji P oznaczać będziemy przez $e(P)$. Podobnie określamy *nieporządek*

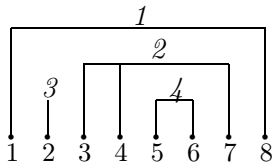
lub *inwersję Eulera* dla permutacji $\sigma \in S_n$ jako każdy indeks $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ taki, że $\sigma(i+1) < \sigma(i)$. Liczbę wszystkich inwersji Eulera w permutacji σ oznaczać będziemy przez $e(\sigma)$.

UWAGA. Dobrze znane liczby Eulera $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ (patrz np. [GKP]) mówią nam ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ o dokładnie k nieporządkach; w takim przypadku o permutacji możemy myśleć jak o porządku liniowym na zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$. Powyższa definicja uogólnia to pojęcie do wszystkich porządków częściowych, gdyż jako takie mogą być traktowane partycje uporządkowane.

Przykład 2.1 Rozważmy uporządkowane partycje nieprzecinające $P \in \mathcal{ONC}_8^2$ oraz $Q \in \mathcal{ONC}_8$ przedstawione na Rysunku 2.1.



$P = \big(\{2,3\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{1,8\}\big)$



$Q = \big(\{1,8\}, \{3,4,7\}, \{2\}, \{5,6\}\big)$

Rysunek 2.1 Diagramy przykładowych partycji uporządkowanych.

Partycja P posiada trzy pary bloków sąsiadujących: $P_4 \prec P_2$, $P_4 \prec P_1$ i $P_2 \prec P_3$. Jak widać nieporządek ma miejsce w przypadku pierwszej i drugiej pary, a zatem $e(P) = 2$. Pary sąsiadujących bloków w Q są następujące: $Q_1 \prec Q_2$, $Q_1 \prec Q_3$ oraz $Q_2 \prec Q_4$. Żadna z nich nie tworzy nieporządku, skąd $e(Q) = 0$. Partycje, które tak jak Q nie posiadają nieporządków nazywany *monotonicznymi*, gdyż mają ścisły związek z probabilistyką monotoniczną (patrz [LeS] i Rozdział 1).

2.2 Operatory p-gaussowskie

W tym podrozdziale zajmiemy się konstrukcją operatorów p-gaussowskich działających na p-wolnej przestrzeni Focka.

Definicja 2.2 Przez *p-wolną przestrzeń Focka* nad przestrzenią Hilberta $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, gdzie $p \in (0, 1]$, rozumieć będziemy sumę prostą

$$\mathcal{F}_p(\mathcal{H}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n} \cong \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbb{R}_+^n)\,, \tag{2.2}$$

z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, który dla $F \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ oraz $G \in L^2(\mathbb{R}_+^m)$ zadany jest wzorem

$$\langle F, G \rangle_p = \delta_{n,m} \sum_{\sigma \in S_n} p^{e(\sigma^{-1})} \int_{\Delta_\sigma} F(t_n, \ldots, t_1) \overline{G}(t_n, \ldots, t_1) dt_n \ldots dt_1 \,,$$

gdzie $\Delta_\sigma = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n; t_{\sigma(1)} \leqslant \ldots \leqslant t_{\sigma(n)}\}$. Dla $p = 0$ forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ jest zdegenerowana, w takim przypadku przyjmujemy $\mathcal{F}_0(\mathcal{H}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\Delta_{id_n})$, gdzie $\Delta_{id_n} = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n; t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n\}$ (patrz [LeS] oraz Rozdział 1. dla $m = 1$).

Łatwe sprawdzenie pokazuje nam, że forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ jest iloczynem skalarnym na $\mathcal{F}_p(\mathcal{H})$ dla $p \in [0, 1]$. Co więcej, dla $p = 1$ forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ jest standardowym (wolnym) iloczynem skalarnym.

Niech $f \in \mathcal{H}$ oraz $F \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$. Wówczas na wolnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}_p(\mathcal{H})$ określmy *operator kreacji* $a(f) : \mathcal{F}_p(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_p(\mathcal{H})$ następująco:

$$\big(a(f)\Omega\big)(t_1) = f(t_1) \tag{2.3}$$

$$\big(a(f)F\big)(t_{n+1}, ..., t_1) = f(t_{n+1}) F(t_n, ..., t_1) \tag{2.4}$$

Naszym najbliższym celem będzie wyznaczenie *operatora anihilacji* $a^*(f)$ sprzężonego do $a(f)$ względem iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. W tym celu pokażemy, że zachodzi poniższa propozycja.

Propozycja 2.1 *Niech w będzie dwuargumentową funkcją wagową, taką że $w(s,t) = p$, gdy $s < t$ oraz $w(s,t) = 1$, gdy $s \geqslant t$. Wtedy dla $F, G \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ zachodzi równość*

$$\langle F, G \rangle_p = \int_{\mathbb{R}_+^n} F(t_n, \ldots, t_1) \overline{G}(t_n, \ldots, t_1) w(t_n, t_{n-1}) \ldots w(t_1, t_0) dt_n \ldots dt_1 \,;$$

przyjmujemy, że $t_0 = 0$.

Dowód. Niech $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_\sigma$ dla pewnej permutacji $\sigma \in S_n$. Zauważmy, że dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ zachodzą równoważności

$$w(t_{i+1}, t_i) = p \iff t_{i+1} < t_i \iff \sigma^{-1}(i+1) < \sigma^{-1}(i) \,,$$

co oznacza, że liczba nieporządków (inwersji Eulera) permutacji σ^{-1} jest równa liczbie tych i, dla których $w(t_{i+1}, t_i) = p$. Innymi słowy, mamy

$$w(t_n, t_{n-1}) \ldots w(t_2, t_1) = p^{e(\sigma^{-1})} \,,$$

skąd łatwo wynika teza. ■

Propozycja 2.2 *Operator anihilacji $a^*(f)$, sprzężony do operatora kreacji $a(f)$ jest postaci*

$$\begin{aligned} a^*(f)\Omega &= 0 \\ a^*(f)g &= \langle f, g\rangle\, \Omega \\ \big(a^*(f)F\big)(t_{n-1}, ..., t_1) &= \int_0^\infty \overline{f}(t_n) w(t_n, t_{n-1}) F(t_n, ..., t_1) dt_n \,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie $g \in \mathcal{H}$, $F \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$.

Dowód. Niech $F \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, $G \in L^2(\mathbb{R}_+^{n-1})$ oraz niech $R(t_{n-1}, \ldots, t_1)$ będzie prawą stroną równości (2.5). Wówczas na mocy Propozycji 2.1 mamy

$$\begin{aligned} \langle a(f)G, F\rangle_p &= \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t_n) G(t_{n-1}, \ldots, t_1) \overline{F}(t_n, \ldots, t_1) w(t_n, t_{n-1}) \ldots w(t_2, t_1) dt_n \ldots dt_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} G(t_{n-1}, \ldots, t_1) \overline{R}(t_{n-1}, \ldots, t_1) w(t_{n-1}, t_{n-2}) \ldots w(t_2, t_1) dt_{n-1} \ldots dt_1 \\ &= \langle G, R\rangle_p \,, \end{aligned}$$

co dowodzi tezy. ■

Niech M_h będzie operatorem mnożenia przez funkcję h postaci $(M_h F)(t_n, \ldots, t_1) = h(t_n) F(t_n, \ldots, t_1)$ oraz $M_h\Omega = h(0)\Omega$. Wówczas natychmiastowym wnioskiem, wynikającym z powyższej propozycji, jest równość

$$a^*(f)a(g) = M_{\langle\langle f,g\rangle\rangle} \,, \tag{2.6}$$

gdzie $\langle\langle f, g\rangle\rangle$ jest funkcją, należącą do zbioru $L^2(\mathbb{R}_+)$, zadaną wzorem

$$\langle\langle f, g\rangle\rangle(t) = \int_0^\infty \overline{f}(s) w(s, t) g(s) ds \,, \qquad t \in [0, \infty) \,.$$

Operator *p-gaussowski* $\omega(f) = a^*(f) + a(f)$ definiujemy jako sumę operatorów kreacji i anihilacji. Naszym głównym celem w tej części pracy będzie obliczenie momentów mieszanych operatorów p-gaussowskich w stanie próżni, tzn.

$$\langle \omega(f_1)\omega(f_2)\ldots\omega(f_n)\Omega, \Omega\rangle_p \,, \qquad f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Theta \,, \tag{2.7}$$

gdzie $\Theta = \{\chi_{(s,t]}; 0 \leqslant s < t < \infty\}$ jest zbiorem funkcji charakterystycznych odcinków. Zauważmy, że w ogólnym przypadku powyższy moment zawsze można wyrazić jako sumę momentów typu (2.7), w których funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n$ mają nośniki parami równe lub rozłączne. Zatem, bez utraty ogólności, będziemy przyjmować takie założenie w dalszej części pracy. Podobnie jak w Rozdziale 1, na Θ rozpatrywać będziemy częściowy porządek, tzn. $f = \chi_{(s_1,t_1]} < \chi_{(s_2,t_2]} = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t_1 \leq s_2$ oraz $f \leqslant g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f < g$ lub $f = g$.

Przykład 2.2 Niech $f := f_1 = f_2 = f_5 = f_6 = \chi_{(1,2]}$ i $g := f_3 = f_4 = \chi_{(0,1]}$; ponadto, dla uproszczenia notacji, oznaczmy $a^\epsilon(f_i) = a_i^\epsilon$, dla $i = 1, \ldots, 6$ oraz $\epsilon = 1, *$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\langle \omega(f_1)\omega(f_2)\ldots\omega(f_6)\Omega,\Omega\rangle_p &= \langle a_1^* a_2 a_3^* a_4 a_5^* a_6\Omega,\Omega\rangle_p + \langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 a_5^* a_6\Omega,\Omega\rangle_p \\ &\quad + \langle a_1^* a_2 a_3^* a_4^* a_5 a_6\Omega,\Omega\rangle_p + \langle a_1^* a_2^* a_3 a_4^* a_5 a_6\Omega,\Omega\rangle_p \\ &\quad + \langle a_1^* a_2^* a_3^* a_4 a_5 a_6\Omega,\Omega\rangle_p\,,\end{aligned} \tag{2.8}$$

gdyż pozostałe czynniki się zerują. Przyjrzyjmy się bliżej czwartemu składnikowi powyższej sumy. Mamy

$$\begin{aligned}\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4^* a_5 a_6\Omega,\Omega\rangle_p &= \big\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4^*\big(f(t_2)f(t_1)\big),\Omega\big\rangle_p \\ &= \Big\langle a_1^* a_2^* a_3\Big(\int_0^\infty g(t_2)w(t_2,t_1)f(t_2)f(t_1)dt_2\Big),\Omega\Big\rangle_p \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

gdyż f i g mają rozłączne nośniki. Zerowy wkład otrzymamy również w drugim i trzecim składniku sumy (2.8), gdyż w każdym z nich na operator kreacji związany z $\chi_{(0,1]}$ działa operator anihilacji związany z $\chi_{(1,2]}$ (lub na odwrót), których nośniki są wzajemnie rozłączne (patrz Lemat 2.1). Zatem wystarczy obliczyć wkład pierwszego i ostatniego składnika. Mamy

$$\begin{aligned}\langle a_1^* a_2^* a_3^* a_4 a_5 a_6\Omega,\Omega\rangle &= \big\langle a_1^* a_2^* a_3^*\big(g(t_3)f(t_2)f(t_1)\big)\Omega,\Omega\big\rangle_p \\ &= \Big\langle a_1^* a_2^*\Big(\int_0^1 w(t_3,t_2)\,f(t_2)\,f(t_1)\,dt_3\Big)\Omega,\Omega\Big\rangle_p \\ &= \Big\langle a_1^*\Big(\int_1^2\int_0^1 w(t_3,t_2)\,w(t_2,t_1)\,f(t_1)dt_3\,dt_2\Big)\Omega,\Omega\Big\rangle_p \\ &= \int_1^2\int_1^2\int_0^1 w(t_3,t_2)\,w(t_2,t_1)\,dt_3\,dt_2\,dt_1 \;=\; \frac{p^2+p}{2}\,.\end{aligned}$$

Analogicznie dostajemy, że $\langle a_1^* a_2 a_3^* a_4 a_5^* a_6\Omega,\Omega\rangle_p = 1$. Tak więc

$$\langle \omega(f_1)\omega(f_2)\ldots\omega(f_6)\Omega,\Omega\rangle_p = \frac{p^2+p+2}{2}\,.$$

Przykład 2.3 W tym przykładzie obliczymy szósty moment operatora $\omega(f)$ dla $f = \chi_{[0,1)}$ poprzez obliczenie „wkładu" każdej partycji ze zbioru $\mathcal{ONC}_6^2$, odpowiadającej odpowiedniej sekwencji operatorów kreacji i anihilacji. „Wkłady" te porównamy z wynikami uzyskanymi dla t-zdeformowanych operatorów gaussowskich, wprowadzonych przez Bożejkę i Wysoczńskiego i opisanych między innymi w [BW]. Mamy

$$\begin{aligned}\big\langle \omega^6(f)\Omega,\Omega\big\rangle_p &= \langle a^* a a^* a a^*\Omega,\Omega\rangle_p + \langle a^* a^* a a a^*\Omega,\Omega\rangle_p \\ &\quad + \langle a^* a a^* a^* a a\Omega,\Omega\rangle_p + \langle a^* a^* a a^* a a\Omega,\Omega\rangle_p \\ &\quad + \langle a^* a^* a^* a a a\Omega,\Omega\rangle_p\,,\end{aligned}$$

Analogiczną równość możemy napisać dla t-zdeformowanych operatorów gaussowskich. Poniższa tabela przedstawia wartości składowych sumy z powyższej równości w przypadku p-interpolacji oraz t-deformacji.

	p-interpolacja	t-deformacja	$t \to (p+1)/2$
$a^*aa^*aa^*a$	1	1	1
$a^*a^*aaa^*a$	$(p+1)/2$	t	$(p+1)/2$
$a^*aa^*a^*aa$	$(p+1)/2$	t	$(p+1)/2$
$a^*a^*aa^*aa$	$(p^2+p+1)/3$	t^2	$(p^2+2p+1)/4$
$a^*a^*a^*aaa$	$(p^2+4p+1)/6$	t^2	$(p^2+2p+1)/4$
$\sum$	$(p^2+4p+5)/2$	$2t^2+2t+1$	$(p^2+4p+5)/2$

Widzimy, że poszczególne składniki, odpowiadające tym samym sekwencjom operatorów kreacji i anihilacji, są w ogólności różne w przypadku p-interpolacji oraz t-deformacji, po podstawieniu $(p+1)/2$ w miejsce t. Niemniej jednak, ich sumaryczny wkład jest taki sam.

Dla przykładu, obliczymy jeden z momentów przedstawionych w powyższej tabeli

$$\begin{aligned}
\langle a^*a^*a^*aaa\Omega,\Omega\rangle_p &= \big\langle (a^*)^3 f(t_3)f(t_2)f(t_1),\Omega\big\rangle_p \\
&= \big\langle (a^*)^2 \int_0^1 w(t_3,t_2)dt_3 f(t_2)f(t_1),\Omega\big\rangle_p \\
&= \big\langle a^* \int_0^1\int_0^1 w(t_3,t_2)w(t_2,t_1)dt_3dt_2 f(t_1),\Omega\big\rangle_p \\
&= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 w(t_3,t_2)w(t_2,t_1)dt_3dt_2dt_1 \\
&= \int_0^1\int_0^1 \big((p-1)t_2+1\big)w(t_2,t_1)dt_2dt_1 \\
&= \int_0^1 \Big(\frac{\big((p-1)t_1+1\big)^2}{2}+\frac{p}{2}\Big)dt_1 \;=\; \frac{p^2+4p+1}{6}
\end{aligned}$$

Zanim przejdziemy do obliczenia momentów (2.7) w ogólnym przypadku, wprowadzimy kilka pomocniczych oznaczeń.

Definicja 2.3 Załóżmy, że $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne. Będziemy mówić, że uporządkowana partycja $P = (P_1, \ldots, P_m)$ jest *zgodna* z ciągiem $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, jeżeli dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ spełnione są warunki

1. $i, j \in P_k \implies f_i = f_j$,
2. $i \in P_k$, $j \in P_l$ i $k < l \implies f_i \leqslant f_j$.

Jeżeli $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ jest partycją nieuporządkowaną, to powiemy, że jest zgodna z ciągiem $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, jeżeli będzie spełniała jedynie warunek 1. Zgodność oznaczać będziemy przez $P \sim (f_1, \ldots, f_n)$ lub $\pi \sim (f_1, \ldots, f_n)$. Na mocy warunku 1. możemy zdefiniować *nośnik bloku* π_k jako $\operatorname{supp} \pi_k = \operatorname{supp} f_j$, dla dowolnego $j \in \pi_k$, a także *nośnik partycji* π przez

$$\operatorname{supp} \pi = \{(t_1, \ldots, t_m); t_k \in \operatorname{supp} \pi_k,\ k = 1, \ldots, m\}\,.$$

Dla celów następnego lematu, który będzie nam potrzebny do dowodu głównego twierdzenia tej części pracy, wprowadźmy następujące oznaczenie upraszczające notację, tzn. dla dowolnej partycji nieuporządkowanej $\pi \in \mathcal{NC}_{2n}^2$ oraz dowolnych $f_1, f_2, \ldots, f_{2n} \in \Theta$ połóżmy

$$a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2n}) = a^{\epsilon_1}(f_1) a^{\epsilon_2}(f_2) \ldots a^{\epsilon_{2n}}(f_{2n})\,, \tag{2.9}$$

gdzie przyjmujemy, że $\epsilon_p = *$ i $\epsilon_q = 1$, gdy $\{p, q\}$ jest blokiem w π oraz $p < q$.

Lemat 2.1 *Załóżmy, że $f_1, f_2, \ldots, f_{2n} \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne oraz niech $\pi \in \mathcal{NC}_{2n}^2$ będzie nieuporządkowaną dwupartycją, która nie jest zgodna z $(f_1, f_2, \ldots, f_{2n})$. Wtedy $\langle a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2n})\Omega, \Omega\rangle_p = 0$.*

Dowód. Dla skrócenia notacji będziemy pisać $\psi(\pi) = \langle a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2n})\Omega, \Omega\rangle_p$. Skoro π nie jest zgodna z $(f_1, \ldots, f_{2n})$, więc istnieje blok $\{i, j\} \in \pi$, taki że $i < j$ oraz f_i i f_j mają rozłączne nośniki. Wtedy

$$\begin{aligned}
\psi(\pi) &= \langle a^{\epsilon_1}(f_1) \ldots a^*(f_i) \ldots a(f_j) \ldots a^{\epsilon_{2n}}(f_{2n})\Omega, \Omega\rangle_p \\
&= \langle a^{\epsilon_1}(f_1) \ldots a^*(f_i) \ldots a(f_j) F(t_{k-1}, \ldots, t_1), \Omega\rangle_p \\
&= \big\langle a^{\epsilon_1}(f_1) \ldots a^*(f_i) \ldots a^{\epsilon_{j-1}}(f_{j-1})\big(f_j(t_k) F(t_{k-1}, \ldots, t_1)\big), \Omega\big\rangle_p \\
&= c\,\big\langle a^{\epsilon_1}(f_1) \ldots a^*(f_i)\big(f_j(t_k) F(t_{k-1}, \ldots, t_1)\big), \Omega\big\rangle_p \\
&= c\big\langle a^{\epsilon_1}(f_1) \ldots a^{\epsilon_{i-1}}(f_{i-1})\big(\int_0^\infty w(t_k, t_{k-1}) f_i(t_k) f_j(t_k) F(t_{k-1}, \ldots, t_1) dt_k\big), \Omega\big\rangle_p \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

gdzie F jest pewną funkcją z $L^2(\mathbb{R}_+^{k-1})$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz c jest pewną stałą zależną jedynie od p oraz norm funkcji $f_{i+1}, f_{i+2}, \ldots, f_{j-1}$. ■

Niech $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ będzie dowolną partycją nieuporządkowaną zgodną z ciągiem funkcji $f_1, \ldots, f_n \in \Theta$ o nośnikach parami równych lub rozłącznych. Ponadto, niech σ będzie dowolną permutacją z S_k. Wówczas parę (π, σ) możemy utożsamiać z partycją uporządkowaną tak jak w (2.1), dla której określić możemy zbiór $\Delta_{(\pi,\sigma)} = \operatorname{supp} \pi \cap \Delta_\sigma$, tzn.

$$\Delta_{(\pi,\sigma)} = \big\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n; t_{\sigma(1)} \leqslant \ldots \leqslant t_{\sigma(n)}\,,\ t_i \in \operatorname{supp} \pi_i\,,\ i = 1, \ldots, n\big\}\,. \tag{2.10}$$

Przy tak wprowadzonych oznaczeniach ma miejsce następujący lemat.

Lemat 2.2 *Załóżmy, że $f_1, \ldots, f_{2n} \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne oraz niech $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ będzie dwupartycją nieuporządkowaną zgodną z $(f_1, \ldots, f_{2n})$. Wtedy, dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$, takiej że $(\pi, \sigma) \nsim (f_1, \ldots, f_{2n})$ mamy $\Delta_{(\pi,\sigma)} = \emptyset$.*

Dowód. Wiemy, że $\pi \sim (f_1, \ldots, f_{2n})$ oraz $(\pi, \sigma) \nsim (f_1, \ldots, f_{2n})$. Zatem partycja uporządkowana (π, σ) nie spełnia warunku 2. Definicji 2.3, tzn.

$$\exists_{k,l \in \{1,\ldots,n\}} \, \forall_{i \in \pi_{\sigma(k)}, j \in \pi_{\sigma(l)}} \; k < l \;\text{ i }\; f_i > f_j .$$

Załóżmy nie wprost, że $(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_{(\pi,\sigma)}$. Wówczas musi zachodzić warunek

$$t_{\sigma(k)} \leqslant t_{\sigma(l)} \,, \tag{2.11}$$

ponieważ $k < l$. Jednak z drugiej strony $f_i > f_j$ oraz $t_{\sigma(k)} \in \operatorname{supp} \pi_{\sigma(k)} = \operatorname{supp} f_i$ i $t_{\sigma(l)} \in \operatorname{supp} \pi_{\sigma(l)} = \operatorname{supp} f_j$, czyli $t_{\sigma(k)} > t_{\sigma(l)}$, co jest sprzeczne z (2.11). ■

Przed następnym lematem musimy w odpowiedni sposób podzielić i pozliczać funkcje o tych samych nośnikach. Załóżmy zatem, że $f_1, \ldots, f_{2n} \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne oraz niech $g^{(1)}, \ldots, g^{(r)} \in \Theta$ będą takie, że

$$\{f_1, \ldots, f_{2n}\} = \{g^{(1)}, \ldots, g^{(r)}\} \;\text{ oraz }\; g^{(1)} < \ldots < g^{(r)} \,. \tag{2.12}$$

Wówczas możemy wprowadzić następujące liczby:

$$b_i = \left|\{j \,; \operatorname{supp} f_j = \operatorname{supp} g^{(i)}\}\right| / 2 \,, \qquad i = 1, \ldots, r \,. \tag{2.13}$$

Oczywiście zachodzi równość $b_1 + b_2 + \ldots + b_r = n$. Jeżeli istnieje pewna dwupartycja zgodna z $(f_1, \ldots, f_{2n})$, to liczby b_i są całkowite. Przy tak wprowadzonych oznaczeniach zachodzi następujący lemat.

Lemat 2.3 *Załóżmy, że $f_1, \ldots, f_{2n} \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne oraz niech $(\pi, \sigma) = (\pi_{\sigma(1)}, \pi_{\sigma(2)}, \ldots, \pi_{\sigma(n)}) \in \mathcal{ONC}^2_{2n}$ będzie uporządkowaną dwupartycją zgodną z $(f_1, \ldots, f_{2n})$. Wtedy*

$$\lambda(\Delta_{(\pi,\sigma)}) = \frac{\| f_1 \| \cdot \ldots \cdot \| f_{2n} \|}{b_1! \cdot \ldots \cdot b_r!} \,,$$

gdzie λ jest n-wymiarową miarą Lebesgue'a.

Dowód. Zauważmy, że zbiór $\Delta_{(\pi,\sigma)}$ jest produktem kartezjańskim „sympleksów" Δ_i dla $i = 1, \ldots, r$ postaci

$$\Delta_i = \left\{(t_1, \ldots, t_{b_i}) \in \mathbb{R}^{b_i}_+ ; \; t_1, \ldots, t_{b_i} \in \operatorname{supp} g^{(i)} \text{ i } t_1 < \ldots < t_{b_i}\right\} \,,$$

których miara Lebesgue'a wynosi $\frac{\|g^{(i)}\|^{2b_i}}{b_i!}$. Po wymnożeniu otrzymujemy tezę. ■

Lemat 2.4 *Załóżmy, że $f_1, \ldots, f_{2n} \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne oraz niech $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\} \in \mathcal{NC}_{2n}^2$ będzie dwupartycją zgodną z $(f_1, \ldots, f_{2n})$. Wtedy*

$$\langle a_\pi(f_1, \ldots, f_{2n})\Omega, \Omega\rangle_p = \frac{\| f_1 \| \cdot \ldots \cdot \| f_{2n} \|}{b_1! \cdot \ldots \cdot b_r!} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ (\pi,\sigma)\sim(f_1,\ldots,f_{2n})}} p^{e(\pi,\sigma)}\,.$$

Dowód. Każdemu $i \in \{1, \ldots, n\}$ możemy przyporządkować liczbę $l_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tak, że blok π_{l_i} jest sąsiadującym blokiem zewnętrznym względem bloku π_i, o ile π_i posiada jakikolwiek blok zewnętrzny, w przeciwnym razie kładziemy $l_i = 0$. Zauważmy, że

$$\langle a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2n})\Omega, \Omega\rangle_p = \int_{\operatorname{supp}\pi} w(t_1, t_{l_1}) \ldots w(t_n, t_{l_n}) dt_1 \ldots dt_n,$$

gdzie $\operatorname{supp}\pi$ jest nośnikiem partycji π wprowadzonym w Definicji 2.3 oraz w jest dwuargumentową funkcją wagową z Propozycji 2.1; przyjmujemy tutaj, że $t_0 = 0$. Zatem z Lematów 2.2 i 2.3 wynika, że

$$\begin{aligned}\langle a_\pi(f_1, f_2, \ldots, f_{2n})\Omega, \Omega\rangle_p &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ (\pi,\sigma)\sim(f_1,\ldots,f_{2n})}} \int_{\Delta_{(\pi,\sigma)}} w(t_1, t_{l_1}) \ldots w(t_n, t_{l_n}) dt_1 \ldots dt_n \\ &= \frac{\| f_1 \| \cdot \ldots \cdot \| f_{2n} \|}{b_1! \cdot \ldots \cdot b_r!} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ (\pi,\sigma)\sim(f_1,\ldots,f_{2n})}} p^{e(\pi,\sigma)}\,,\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Teraz jesteśmy przygotowani do sformułowania i udowodnienia głównego twierdzenia tego podrozdziału, tzn. do obliczenia momentów mieszanych operatorów p-gaussowskich (2.7).

Twierdzenie 2.1 *Załóżmy, że $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Theta$ mają nośniki parami równe lub rozłączne. Wtedy*

$$\langle \omega(f_1)\omega(f_2) \ldots \omega(f_n)\Omega, \Omega\rangle_p = \frac{\| f_1 \| \cdot \ldots \cdot \| f_n \|}{b_1! \cdot \ldots \cdot b_r!} \sum_{\substack{P \in \mathcal{ONC}_n^2 \\ P\sim(f_1,\ldots,f_n)}} p^{e(P)}\,. \tag{2.14}$$

Dowód. Oczywiście, gdy n jest liczbą nieparzystą, to $\langle \omega(f_1)\omega(f_2) \ldots \omega(f_n)\Omega, \Omega\rangle = 0$, co zgadza się z tezą twierdzenia, gdyż prawa strona (2.14) jest sumą przebiegającą zbiór

pusty. Załóżmy zatem, że $n = 2k$. Wówczas z Lematu 2.1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\langle \omega(f_1)\omega(f_2)\ldots\omega(f_{2k})\Omega,\Omega\rangle_p &= \sum_{\pi\in\mathcal{NC}_{2k}^2} \langle a_\pi(f_1,f_2,\ldots,f_{2k})\Omega,\Omega\rangle_p \\ &= \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{NC}_{2k}^2 \\ \pi\sim(f_1,\ldots,f_{2k})}} \langle a_\pi(f_1,f_2,\ldots,f_{2k})\Omega,\Omega\rangle_p \\ &= \frac{\parallel f_1 \parallel \cdot \ldots \cdot \parallel f_{2k} \parallel}{b_1!\cdot\ldots\cdot b_r!} \sum_{\substack{(\pi,\sigma)\in\mathcal{ONC}_{2k}^2 \\ (\pi,\sigma)\sim(f_1,\ldots,f_{2k})}} p^{e(\pi,\sigma)}\,,\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

2.3 Centralne Twierdzenie Graniczne

W niniejszym podrozdziale przedstawimy konstrukcję dyskretnych operatorów p-gaussowskich, działających na wolnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ nad przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}$ o przeliczalnej bazie ortonormalnej $\{e_i\}_{i=1}^\infty$. Za ich pomocą sformułujemy i udowodnimy centralne twierdzenie graniczne. Otrzymane w nim momenty będą zgadzały się z momentami operatora p-gaussowskiego $\omega(\chi_{[0,1)})$.

Definicja 2.4 Na dyskretnej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ nad przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}$ o przeliczalnej bazie ortonormalnej $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, wprowadźmy iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$, zadany przez

$$\langle e_{i_n}\otimes\ldots\otimes e_{i_1}, e_{j_m}\otimes\ldots\otimes e_{j_1}\rangle_p = \delta_{m,n}\delta_{i_n,j_n}\ldots\delta_{i_1,j_1}p^{e(i_1,\ldots,i_n)}\,,$$

gdzie $e(i_1,\ldots,i_n)$ dla dowolnych $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}$, podobnie jak dla permutacji oznacza liczbę tych k, dla których $i_k > i_{k+1}$. Ponadto, na $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ określmy operator kreacji A_i dla $i\in\mathbb{N}$ przez

$$\begin{aligned} A_i\Omega &= e_i \\ A_i e_{i_n}\otimes\ldots\otimes e_{i_1} &= e_i\otimes e_{i_n}\otimes\ldots\otimes e_{i_1}\end{aligned}$$

Propozycja 2.3 *Operator anihilacji A_i^*, sprzężony do A_i względem iloczynu skalarnego $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$, jest postaci*

$$\begin{aligned} A_i^*\Omega &= 0 \\ A_i^* e_j &= \delta_{i,j}\Omega \\ A_i^* e_{i_n}\otimes\ldots\otimes e_{i_1} &= \begin{cases} p\,\delta_{i,i_n}\; e_{i_{n-1}}\otimes\ldots\otimes e_{i_1} & \text{gdy} \quad i_n < i_{n-1} \\ \delta_{i,i_n}\; e_{i_{n-1}}\otimes\ldots\otimes e_{i_1} & \text{gdy} \quad i_n \geqslant i_{n-1}\end{cases}\end{aligned}$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\langle A_i^* e_{i_n} \otimes \ldots \otimes e_{i_1}, e_{j_{n-1}} \otimes \ldots \otimes e_{j_1} \rangle_p &= \langle e_{i_n} \otimes \ldots \otimes e_{i_1}, e_i \otimes e_{j_{n-1}} \otimes \ldots \otimes e_{j_1} \rangle_p \\ &= \delta_{i_n,i}\delta_{i_{n-1},j_{n-1}} \ldots \delta_{i_1,j_1} p^{e(i_1,\ldots,i_n)} \\ &= p^{\alpha}\delta_{i_n,i}\delta_{i_{n-1},j_{n-1}} \ldots \delta_{i_1,j_1} p^{e(i_1,\ldots,i_{n-1})} \\ &= \langle p^{\alpha}\delta_{i_n,i} e_{i_{n-1}} \otimes \ldots \otimes e_{i_1}, e_{j_{n-1}} \otimes \ldots \otimes e_{j_1} \rangle_p \,,\end{aligned}$$

gdzie $\alpha = 0$ gdy $i_n \geqslant i_{n-1}$ oraz $\alpha = 1$ gdy $i_n < i_{n-1}$, co kończy dowód. ■

W niniejszym podrozdziale będziemy badać zbieżność uśrednionych sum dyskretnych operatorów p-gaussowskich, tzn.

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \,, \tag{2.15}$$

gdzie $\omega_i = A_i + A_i^*$ dla $i \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że operatory $(\omega_i)_{i=1}^{\infty}$ mają średnią zero i wariancję jeden względem stanu próżni $\varphi(\,\cdot\,) = \langle\, \cdot\, \Omega, \Omega \rangle_p$, a zatem spełniają one rolę niezależnych zmiennych losowych z centralnego twierdzenia granicznego.

Zanim przejdziemy do jego dowodu, sformułujemy kilka niezbędnych w tym celu faktów. Pierwszy z nich, nazywany jest *warunkiem singletonu*.

Propozycja 2.4 *Niech $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ będzie dowolnym ciągiem indeksów naturalnych. Jeśli istnieje $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że $i_j \neq i_k$ dla $j \neq k$, to $\varphi(\omega_{i_1} \ldots \omega_{i_n}) = 0$.*

Dowód. Zauważmy, że

$$\varphi(\omega_{i_1} \ldots \omega_{i_n}) = \varphi(\omega_{i_1} \ldots A_{i_j} \ldots \omega_{i_n}) + \varphi(\omega_{i_1} \ldots A_{i_j}^* \ldots \omega_{i_n}) \,.$$

Łatwo widać, że oba składniki powyższej sumy są równe zero. ■

Propozycja 2.5 *Niech $(i_1, i_2, \ldots, i_{2n})$ będzie ciągiem indeksów naturalnych stowarzyszonym z pewną dwupartycją uporządkowaną $P \in \mathcal{OP}_{2n}^2$. Wtedy*

$$\varphi(\omega_{i_1} \ldots \omega_{i_{2n}}) = \begin{cases} p^{e(P)} & \text{gdy } P \in \mathcal{ONC}_{2n}^2 \\ 0 & \text{gdy } P \notin \mathcal{ONC}_{2n}^2 \end{cases} .$$

Dowód. Dla partycji przecinających $P \notin \mathcal{ONC}_{2n}^2$ teza jest oczywista i wynika wprost z definicji operatorów A_i oraz A_i^*. Załóżmy zatem, że $P \in \mathcal{ONC}_{2n}^2$. Wówczas istnieje r takie, że $i_1 \neq \ldots \neq i_r = i_{r+1}$. Zatem

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_{i_1} \ldots \omega_{i_n}) &= \langle \Omega, \omega_{i_n} \ldots \omega_{i_{r+2}} A_{i_r}^* A_{i_r} \omega_{i_{r-1}} \ldots \omega_{i_1} \Omega \rangle_p \\ &= p^{\alpha} \langle \Omega, \omega_{i_n} \ldots \omega_{i_{r+2}} \omega_{i_{r-1}} \ldots \omega_{i_1} \Omega \rangle_p \\ &= p^{\alpha} \varphi(\omega_{i_1} \ldots \omega_{i_{r-1}} \omega_{i_{r+2}} \ldots \omega_{i_n}),\end{aligned}$$

gdzie $\alpha = 0$, gdy $i_r > i_{r-1}$ (co odpowiada sytuacji, w której blok $\{r, r+1\}$ nie tworzy nieporządku ze swoim nadblokiem lub nie posiada nadbloku) oraz $\alpha = 1$, gdy $i_r < i_{r-1}$ (co odpowiada sytuacji, w której blok $\{r, r+1\}$ tworzy nieporządek ze swoim nadblokiem). Zatem teza wynika z indukcji. ■

Propozycja 2.6 *Niech $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie injekcją zachowującą porządek. Wtedy*

$$\varphi(\omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_n}) = \varphi(\omega_{T(i_1)}\omega_{T(i_2)}\ldots\omega_{T(i_n)}), \qquad n, i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}.$$

Dowód wynika wprost definicji operatora kreacji i Propozycji 2.3. ■

Propozycja 2.6 oraz Definicja 1.4 pozwalają nam na wprowadzenie oznaczenia w znacznym stopniu upraszczającego notację dowodu centralnego twierdzenia granicznego, tzn. przez $\varphi(\omega_P)$ rozumieć będziemy $\varphi(\omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_n})$ dla dowolnego ciągu $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ stowarzyszonego z P. Teraz przystąpimy do dowodu *Centralnego Twierdzenia Granicznego.*

Twierdzenie 2.2 *Niech S_N będzie uśrednioną sumą dyskretnych operatorów p-gaussowskich o średniej zero i wariancji jeden, tak jak w* (2.15)*. Wtedy*

$$\lim_{N\to\infty} \varphi\left(S_N^{2n}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{P\in\mathcal{ONC}_{2n}^2} p^{e(P)}.$$

Nieparzyste momenty graniczne znikają.

Dowód. W przypadku momentów nieparzystych teza jest oczywista. Rozważmy zatem jedynie momenty parzyste. Korzystając z Propozycji 2.6, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varphi\left(S_N^{2n}\right) &= \frac{1}{N^n} \sum_{i_1,\ldots,i_{2n}=1}^{N} \varphi(\omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_{2n}}) \\ &= \frac{1}{N^n} \sum_{r=1}^{2n} \binom{N}{r} \sum_{P\in\mathcal{OP}_{2n}(r)} \varphi(\omega_P).\end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{OP}_{2n}(r)$ jest zbiorem partycji uporządkowanych zbioru $\{1, \ldots, 2n\}$ o dokładnie r blokach. Zauważmy, że jeżeli $P \in \mathcal{OP}_{2n}(r)$ oraz $r > n$, to z Propozycji 2.4 wynika, że $\varphi(\omega_P) = 0$, gdyż P musi posiadać singleton. Z drugiej strony, gdy $r < n$, to czynnik $\frac{1}{N^n}\binom{N}{r}$ dąży do zera, gdy $N \to \infty$. Wynika stąd, że jedyne partycje, mogące dać niezerowy wkład, muszą posiadać n bloków i nie mogą mieć singletonów, zatem są to dwupartycje. Tak więc

$$\lim_{N\to\infty} \varphi\left(S_N^{2n}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{P\in\mathcal{OP}_{2n}^2} \varphi(\omega_P),$$

skąd, po zastosowaniu Propozycji 2.5, otrzymujemy tezę. ■

2.4 Funkcje generujące i miary graniczne

Celem tego podrozdziału będzie wykazanie istnienia i jednoznaczności miary μ, której momenty μ_n zgadzają się z momentami granicznymi otrzymanymi w centralnym twierdzeniu granicznym. Miarę μ nazywać będziemy *centralną miarą graniczną*. Rozpoczniemy od wyliczenia rekurencji pomiędzy dwoma pomocniczymi ciągami liczb $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ oraz $(s_n)_{n=0}^{\infty}$, dzięki której wyznaczymy funkcję $M(z)$ generującą parzyste momenty miary μ. Następnie, za pomocą prostych przekształceń na funkcji $M(z)$, obliczymy transformatę Cauchy'ego $G(z)$ miary μ. Stosując formułę odwrócenia Stjeltiesa do funkcji $G(z)$, otrzymamy szukaną miarę.

Przez $\mathcal{ONCC}_n$ ($\mathcal{ONCC}_n^2$) oznaczać będziemy zbiór wszystkich uporządkowanych, nieprzecinających partycji (dwupartycji) zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, w których 1 i n należą do tego samego bloku. Partycje takie nazywać będziemy *pokrytymi*. Wprowadźmy oznaczenia

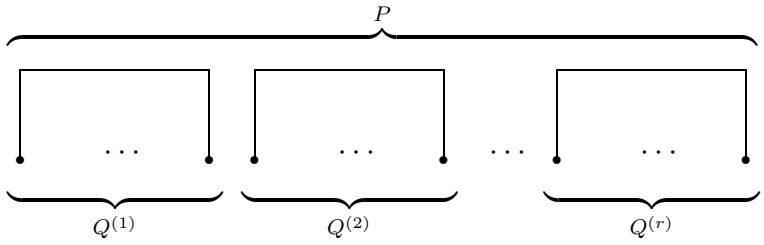
$$m_n = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathcal{ONC}_{2n}^2} p^{e(P)} \,, \qquad s_n = \frac{1}{n!} \sum_{Q \in \mathcal{ONCC}_{2n}^2} p^{e(Q)} \,, \qquad n \geqslant 1 \,,$$

oraz $m_0 = 1,\ s_0 = 0$.

Lemat 2.5 *Między ciągami $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ zachodzi zależność*

$$m_n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_r=n \\ k_i \geqslant 1}} s_{k_1} s_{k_2} \ \ldots \ s_{k_r} \,, \qquad n \geqslant 1.$$

Dowód. Niech $Q^{(i)} = (Q_1^{(i)}, Q_2^{(i)}, \ldots, Q_{k_i}^{(i)})$ dla $i = 1, 2, \ldots, r$ będą dowolnymi dwupartycjami ze zbioru $\mathcal{ONCC}_{2k_i}^2$, takimi że $k_1 + \ldots + k_r = n$.



Rysunek 2.3 Rozkład partycji na partycje pokryte.

Uporządkujmy liniowo wszystkie bloki $Q_j^{(i)}$ tak, aby zachować porządek między blokami pochodzącymi z tej samej partycji $Q^{(i)}$. Porządków takich jest dokładnie $\frac{n!}{k_1!\ldots k_r!}$, a każdy z nich zadaje dokładnie jedną dwupartycję $P \in \mathcal{ONC}_{2n}^2$ (patrz Rysunek 2.3). Co więcej,

każda partycja z $\mathcal{ONC}^2_{2n}$ może być otrzymana w ten sposób poprzez dobór odpowiednich partycji pokrytych $Q^{(i)}$. Z powyższego rozumowania otrzymujemy

$$\left|\mathcal{ONC}^2_{2n}\right| = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_r=n \\ k_i \geqslant 1}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \left|\mathcal{ONCC}^2_{2k_1}\right| \ldots \left|\mathcal{ONCC}^2_{2k_r}\right| . \tag{2.16}$$

Załóżmy teraz, że pewien blok jest blokiem wewnętrznym względem innego bloku w partycji $P \in \mathcal{ONC}^2_{2n}$. Wtedy oba bloki muszą należeć do tej samej partycji pokrytej $Q^{(i)}$, tak więc między blokami pochodzącymi z różnych partycji $Q^{(i)}$ i $Q^{(j)}$ nie ma nieporządków. Stąd wynika, że

$$e(P) = e(Q^{(1)}) + e(Q^{(2)}) + \ldots + e(Q^{(r)}) ,$$

co w połączeniu z (2.16) daje tezę. ■

Wniosek 2.1 *Niech* $M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n z^n$ *oraz* $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ *będą formalnymi szeregami potęgowymi. Wtedy*

$$S(z) = \frac{M(z) - 1}{M(z)} .$$

Dowód. Stosując proste przekształcenia na szeregach potęgowych oraz wykorzystując Lemat 2.5, otrzymujemy

$$\begin{aligned} M(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} m_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_r=n \\ k_i \geqslant 1}} s_{k_1} s_{k_2} \ \ldots \ s_{k_r} z^n \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_r=n \\ k_i \geqslant 1}} s_{k_1} s_{k_2} \ \ldots \ s_{k_r} z^n \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n \right)^r = 1 + \frac{S(x)}{1 - S(x)} , \end{aligned}$$

skąd wynika teza. ■

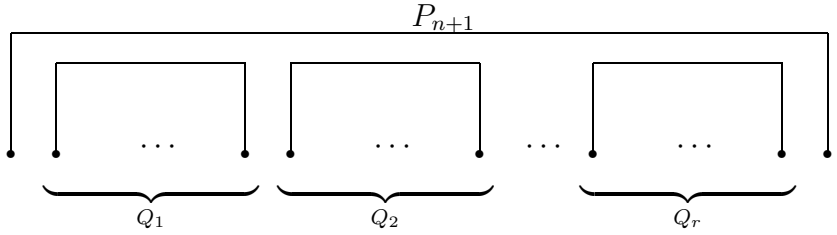
Oczywiście, $M(z)$ jest funkcją generującą parzyste momenty otrzymane w centralnym twierdzeniu granicznym. W celu jej wyznaczenia wprowadzimy pomocniczy ciąg liczb $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ zadany wzorem

$$a_n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_r=n \\ k_i \geqslant 1}} p^r s_{k_1} s_{k_2} \ \ldots \ s_{k_r} , \qquad n \geqslant 1 , \tag{2.17}$$

oraz $a_0 = 1$. Zauważmy, że a_n jest sumą „wkładów" tych dwupartycji $P = (P_1, \ldots, P_{n+1}) \in \mathcal{ONCC}^2_{2n+2}$, które pokryte są blokiem o najwyższym kolorze, czyli P_{n+1}. Wynika stąd, że

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{ONCC}^2_{2n+2} \\ \pi_{n+1} = \{1, 2n+2\}}} p^{e(\pi)}, \qquad n \geqslant 0. \tag{2.18}$$

Dokładniej mówiąc, każdy blok sąsiadujący z P_{n+1} odpowiada pewnej partycji pokrytej $Q_i \in \mathcal{ONCC}^2_{2k_i}$ dla $i = 1, \ldots, r$ (patrz Rysunek 2.4). Oczywiście $k_1 + \ldots + k_r = n$. Ponadto zauważmy, że wszystkie bloki sąsiadujące z blokiem P_{n+1} tworzą z nim nieporządek, gdyż są one jego blokami wewnętrznymi, a jednocześnie występują na wcześniejszych pozycjach w partycji P. Uzasadnia to równoważność wzorów (2.17) i (2.18).



Rysunek 2.4 Rozkład partycji pokrytej.

Wniosek 2.2 *Niech* $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *będzie formalnym szeregiem potęgowym, generującym ciąg* a_n. *Wtedy*

$$S(z) = \frac{A(z) - 1}{pA(z)}.$$

Dowód. Stosując proste przekształcenia na szeregach potęgowych oraz wykorzystując równość (2.17), otrzymujemy

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_r=n \\ k_i \geqslant 1}} p^r s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_r} z^n \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} p^r \sum_{n=r}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_r=n \\ k_i \geqslant 1}} s_{k_1} s_{k_2} \ldots s_{k_r} z^n \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(p \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n \right)^r = 1 + \frac{pS(x)}{1 - pS(x)}, \end{aligned}$$

skąd wynika teza. ■

Następny lemat oraz wynikający z niego wniosek dadzą nam zależność między funkcjami $M(z)$ i $A(z)$.

Lemat 2.6 *Pomiędzy ciągami m_n oraz a_n zachodzi związek*

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-2k+1}{n}\, m_{n-k}\, a_{k-1}\,, \qquad n \geqslant 1\,.$$

Dowód. Niech $P = (P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{ONC}^2_{2n}$ będzie dowolną nieprzecinającą dwupartycją uporządkowaną. Ponadto, niech $P_n = \{r, s\}$, dla pewnych $1 \leqslant r < s \leqslant 2n$. Liczba $s - r$ musi być nieparzysta, gdyż P jest dwupartycją nieprzecinającą. Połóżmy więc $k := (s - r + 1)/2 \in \{1, \ldots, n\}$. Zachowując kolejność, wybierzmy wszystkie bloki wewnętrzne względem bloku P_n i oznaczmy je $Q_1, \ldots, Q_{k-1}$ oraz $Q_k = P_n$. Wówczas $Q = (Q_1, \ldots, Q_k) \in \mathcal{ONCC}^2_{2k}$. Dodatkowo niech $P' \in \mathcal{ONC}^2_{2n-2k}$ oznacza partycję powstałą z P przez usunięcie bloków $Q_1, \ldots, Q_k$. Wtedy

$$e(P) = e(Q) + e(P'),$$

ponieważ blok P_n nie może utworzyć nieporządku z żadnym z jego sąsiadujących nadbloków. Z powyższej równości wynika, że liczba nieporządków partycji P zależy tylko od partycji P' i Q, a nie zależy od wzajemnego ich położenia. Dodatkowo zauważmy, że dla ustalonego k mamy dokładnie $2n-2k+1$ sposobów wyboru wzajemnego położenia partycji P' i Q. Tak więc mamy

$$\begin{aligned}
m_n &= \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathcal{ONC}^2_{2n}} p^{e(P)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} (2n-2k+1) \sum_{P' \in \mathcal{ONC}^2_{2n-2k}} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{ONCC}^2_{2k} \\ Q_k = \{1,2k\}}} \binom{n-1}{k-1} p^{e(P')}\, p^{e(Q)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-2k+1}{n} \sum_{P' \in \mathcal{ONC}^2_{2n-2k}} \frac{p^{e(P')}}{(n-k)!} \sum_{\substack{Q \in \mathcal{ONCC}^2_{2k} \\ Q_k = \{1,2k\}}} \frac{p^{e(Q)}}{(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-2k+1}{n}\, m_{n-k}\, a_{k-1}\,,
\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Z powyższego lematu wynika związek pomiędzy funkcjami $M(z)$ i $A(z)$ przedstawiony w formie równania różniczkowego, o czym mówi następujący wniosek.

Wniosek 2.3 *Funkcje $M(z)$ i $A(z)$ spełniają równanie różniczkowe*

$$M'(z) = M(z)A(z) + 2zM'(z)A(z)\,, \qquad M(0) = A(0) = 1.$$

Dowód. Na mocy Lematu 2.6 mamy

$$\begin{aligned} M'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n m_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} (2n-2k+1)\; m_{n-k}\; a_{k-1} z^{n-1} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} (n-k)\; m_{n-k}\; a_k z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} m_{n-k}\; a_k z^n \\ &= 2\Big(\sum_{n=0}^{\infty} n m_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} m_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) \\ &= 2zM'(z)A(z) + M(z)A(z)\,. \end{aligned}$$

Oczywiście, $M(0) = m_0 = 1$ oraz $A(0) = a_0 = 1$, a zatem otrzymujemy tezę. ■

Dzięki wyznaczeniu zależności między funkcjami $M(z)$, $A(z)$ i $S(z)$, jesteśmy w tym momencie gotowi do wyliczenia jawnej postaci funkcji $M(z)$, a następnie do wyznaczenia transformaty Cauchy'ego centralnej miary granicznej μ.

Twierdzenie 2.3 *Transformata Cauchy'ego $G_\mu(z)$ centralnej miary granicznej μ jest postaci*

$$G_\mu(z) = \frac{pz - \sqrt{z^2 - 2(1+p)}}{2 - (1-p)z^2}\,.$$

Dowód. Korzystając z Wniosków 2.1, 2.2 oraz 2.3, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$M'(z) = \frac{M^2(z)}{M(z)\big(1-p-2z\big) + p}\,, \qquad M(0) = 1\,,$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$M(z) = \frac{p - \sqrt{1 - 2z(1+p)}}{p - 1 + 2z}\,.$$

Jak wiemy, funkcja $M(z)$ generuje jedynie parzyste momenty miary μ. Ponadto wiemy, że momenty nieparzyste są równe zero. Zatem funkcja $M(z^2)$ generuje wszystkie momenty miary μ. Korzystając ze związku między transformatą Cauchy'ego a funkcją generującą momenty, otrzymujemy

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z} M\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{pz - \sqrt{z^2 - 2(1+p)}}{2 - (1-p)z^2}\,.$$

■

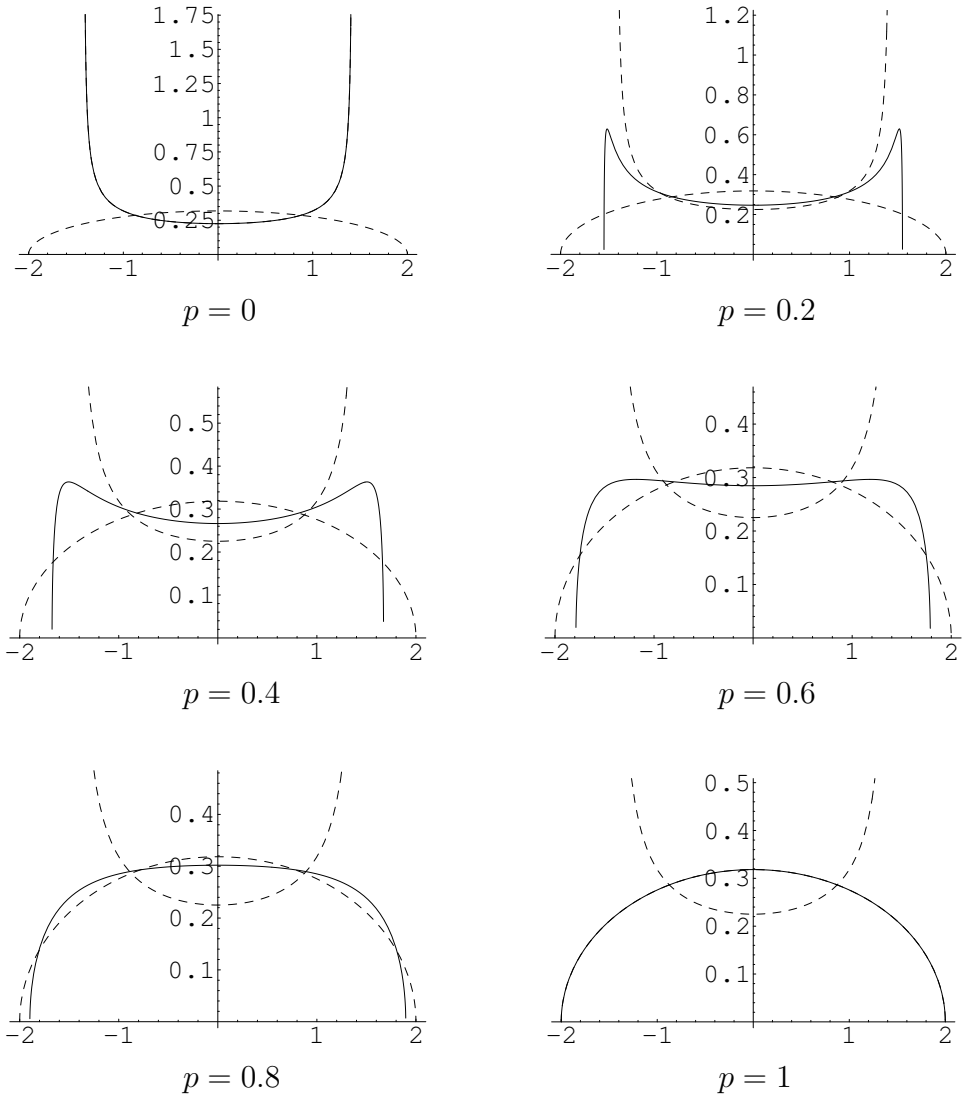
Odnotujmy ważny fakt, mówiący nam o związkach tego rozdziału z wolnymi rozkładami Meixnera. Mianowicie, w pracy [BB] wprowadzona została dwuparametrowa

rodzina rozkładów $\mu_{a,b}$, tzw. wolnych rozkładów Meixnera, które, po podstawieniu $a = 0$ oraz $b = (p-1)/2$, pokrywają się z centralną miarą graniczną μ.

Z powyższych rozważań wynika istnienie miary probabilistycznej μ o momentach μ_n otrzymanych w centralnym twierdzeniu granicznym, tzn. takich, że $\mu_{2n-1} = 0$ oraz

$$\mu_{2n} = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathcal{ONC}_{2n}^2} p^{e(P)}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ponadto wiemy, że μ ma nośnik zwarty, a zatem jest to jedyna miara o takich momentach.



Rysunek 2.5 Przykładowe miary graniczne.

Powyższy rysunek przedstawia wykresy gęstości $f(x)$ miary μ dla kilku wybranych wartości parametru p. Liniami przerywanymi zaznaczone są rozkłady arcusa sinusa oraz Wignera, czyli analogony rozkładu gaussowskiego dla probabilistyki monotonicznej i wolnej, odpowiednio.

Naszym najbliższym celem będzie wyznaczenie rodziny ortogonalnych wielomianów P_n stowarzyszonych z miarą μ. Zaczniemy od przedstawienia transformaty Cauchy'ego w postaci ułamka łańcuchowego.

Propozycja 2.7 *Transformata Cauchy'ego G_μ centralnej miary granicznej μ ma postać ułamka łańcuchowego*

$$G_\mu(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{\frac{p+1}{2}}{z - \cfrac{\frac{p+1}{2}}{z - \ddots}}}}\,.$$

Dowód. Wiadomo, że transformata Cauchy'ego rozkładu Wignera skupionego na przedziale $[-\sqrt{2p+2}, \sqrt{2p+2}]$ jest postaci $G_W(z) = \frac{z-\sqrt{z^2-2(p+1)}}{p+1}$, dzięki czemu otrzymujemy

$$\cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{\frac{p+1}{2}}{z - \cfrac{\frac{p+1}{2}}{\ddots}}}} = \frac{1}{z - G_W(z)} = \frac{1}{z - \frac{z-\sqrt{z^2-2(p+1)}}{p+1}} = \frac{pz - \sqrt{z^2-2(1+p)}}{2-(1-p)z^2}\,,$$

co w porównaniu z Twierdzeniem 2.3 daje tezę. ■

Z powyższej propozycji wynika, że ciągi współczynników Jacobiego (α, ω) miary μ są postaci $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $\alpha_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $\omega_1 = 1$ i $\omega_n = \frac{p+1}{2}$ dla $n \geqslant 2$.

Wniosek 2.4 *Wielomiany ortogonalne stowarzyszone z centralną miarą graniczną μ spełniają następującą zależność rekurencyjną: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - 1$ oraz*

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{p+1}{2}P_{n-1}(x)\,, \qquad n \geqslant 3.$$

Uwaga. Wielomiany P_n stanowią naturalną, liniową interpolację względem parametru p pomiędzy wielomianami Czebyszewa pierwszego rodzaju, które są ściśle związane z wolną probabilistyką, a wielomianami Czebyszewa drugiego rodzaju, które z kolei otrzymujemy w probabilistyce monotonicznej.

Odnotujmy dodatkowy fakt, wiążący ten rozdział z pracą [BW], w której to została opisana t-deformacja probabilistyki wolnej. W pracy tej w centralnym twierdzeniu granicznym uzyskano miarę, której transformata Cauchy'ego jest postaci

$$G_{\mu^{(t)}}(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{t}{z - \cfrac{t}{z - \ddots}}}},$$

gdzie t jest rzeczywistym parametrem, przebiegającym przedział $[0,1]$. Zauważmy, że po podstawieniu $t = (p+1)/2$ otrzymujemy transformatę Cauchy'ego centralnej miary granicznej μ dla p-interpolacji. Stąd oraz z [BW] wynika, że parzyste momenty μ_{2n} dla $t = (p+1)/2$ spełniają równość

$$\mu_{2n} = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_{2n}^2} t^{in(\pi)} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}(n,k) t^k \,, \qquad n \geqslant 1 \,, \tag{2.19}$$

gdzie $in(\pi)$ jest liczbą bloków wewnętrznych w partycji π oraz współczynniki $\mathcal{D}(n,k)$ są tzw. *liczbami Delaney'a*, oznaczającymi liczbę dwupartycji ze zbioru $\mathcal{NC}_{2n}^2$ o dokładnie k blokach wewnętrznych. Wyrażają się one wzorem

$$\mathcal{D}(n,k) = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-1}{k-1}, \quad k \in \{0,1,\ldots,n-1\},\ n \geqslant 1,$$

gdzie przyjmujemy, że $\binom{n}{-1} = 0$. Poniższa tabela przedstawia kilka początkowych liczb Delaney'a.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	1	1					
3	1	2	2				
4	1	3	5	5			
5	1	4	9	14	14		
6	1	5	14	28	42	42	
7	1	6	20	48	90	132	132

Definicja 2.5 Niech $n \geqslant 1$ oraz $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Liczbę wszystkich partycji ze zbioru $\mathcal{ONC}_{2n}^2$ o dokładnie k nieporządkach nazywać będziemy *uogólnioną liczbą Eulera* i oznaczać będziemy przez $\mathcal{E}(n,k)$. Innymi słowy

$$\mathcal{E}(n,k) = \big|\{P \in \mathcal{ONC}_{2n}^2; e(P) = k\}\big|$$

Poniższa propozycja wyznacza związek między liczbami Delaney'a a uogólnionymi liczbami Eulera.

Propozycja 2.8 *Dla $n \geqslant 1$ oraz $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ zachodzi wzór*

$$\mathcal{E}(n,k) = n! \sum_{l=k}^{n-1} \frac{\mathcal{D}(n,l)}{2^l} \binom{l}{k} .$$

Dowód. Po podstawieniu $(p+1)/2$ w miejsce t w równości (2.19) oraz po kilku przekształceniach, otrzymujemy

$$\mu_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k}^{n-1} \frac{\mathcal{D}(n,l)}{2^l} \binom{l}{k} p^k ,$$

dla $n \geqslant 1$. Z drugiej strony wiemy, że

$$\mu_{2n} = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \mathcal{ONC}_{2n}^2} p^{e(P)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{E}(n,k)}{n!} p^k$$

Porównując współczynniki w obu powyższych równościach, otrzymujemy tezę. ■

2.5 Operatory Poissona

W tym podrozdziale wprowadzimy tak zwany *operator Poissona*, działający na wolnej przestrzeni Focka; będziemy go oznaczać symbolem γ. Pokażemy, że momenty $\gamma_n = \langle \gamma^n \Omega, \Omega \rangle_p$ mają postać

$$\gamma_n = \sum_{b=1}^{n} \sum_{P \in \mathcal{ONC}_n(b)} \frac{\lambda^b}{b!} p^{e(P)} ,$$

gdzie λ jest pewną stałą dodatnią oraz $\mathcal{ONC}_n(b)$ jest zbiorem wszystkich partycji uporządkowanych zbioru n-elementowego o dokładnie b blokach.

Do konstrukcji operatora γ użyjemy *operatora cechowania* p_λ, zadanego wzorem

$$\begin{aligned} p_\lambda \Omega &= 0 , \\ (p_\lambda F)(t_n, ..., t_1) &= \chi_{[0,\lambda)}(t_n) F(t_n, ..., t_1) , \end{aligned}$$

który w podobnym kontekście był wykorzystywany między innymi w [Sp], gdzie opisano operator Poissona w przypadku wolnym. Operator Poissona był tam zdefiniowany jako $l_\lambda + l_\lambda^* + p_\lambda + \lambda 1$, gdzie l_λ oznacza wolny operator kreacji związany z funkcją $\chi_{[0,\lambda)}$. Zauważmy, że możemy zastąpić $\lambda 1$ przez iloczyn $l_\lambda^* l_\lambda$ i w ten sposób otrzymany operator również realizować będzie momenty wolnego rozkładu Poissona.

Analogiczną formę operatora Poissona przyjmiemy dla p-interpolacji, tzn.

$$\gamma = a_\lambda + a_\lambda^* + a_\lambda^* a_\lambda + p_\lambda \,, \tag{2.20}$$

gdzie $a_\lambda^* = a^*(\chi_{[0,\lambda)})$, $a_\lambda = a(\chi_{[0,\lambda)})$ oraz p_λ jest operatorem cechowania. Z równości (2.6) wynika, że $a_\lambda^* a_\lambda = q_\lambda$, gdzie $q_\lambda = M_{\langle\langle \chi_{[0,\lambda)}, \chi_{[0,\lambda)} \rangle\rangle}$ jest operatorem mnożenia, zadanym wzorem

$$\begin{aligned} q_\lambda \Omega &= \lambda \Omega \,, \\ (q_\lambda F)(t_n, ..., t_1) &= W(t_n) F(t_n, ..., t_1) \,, \end{aligned}$$

gdzie $W(t)$ jest funkcją z $L^2(\mathbb{R}_+)$ postaci $W(t) = \int_0^\lambda w(s,t)ds = \big((p-1)t + \lambda\big)$.

Przykład 2.4 Przedstawimy kilka pierwszych momentów operatora Poissona względem stanu próżni oraz wykonamy obliczenia dla momentu piątego.

$$\begin{aligned} \big\langle \gamma^1 \Omega, \Omega \big\rangle_p &= \lambda \,, \\ \big\langle \gamma^2 \Omega, \Omega \big\rangle_p &= \lambda + \lambda^2 \,, \\ \big\langle \gamma^3 \Omega, \Omega \big\rangle_p &= \lambda + \frac{p+5}{2}\lambda^2 + \lambda^3 \,, \\ \big\langle \gamma^4 \Omega, \Omega \big\rangle_p &= \lambda + \frac{3p+9}{2}\lambda^2 + \frac{p^2+4p+13}{3}\lambda^3 + \lambda^4 \,, \\ \big\langle \gamma^5 \Omega, \Omega \big\rangle_p &= \lambda + (3p+7)\lambda^2 + \frac{11p^2+38p+71}{6}\lambda^3 \\ &\quad + \frac{3p^3+11p^2+29p+77}{12}\lambda^4 + \lambda^5 \end{aligned}$$

Przykładowo obliczymy czwarty moment operatora γ. Dla skrócenia notacji, będziemy pisać $\chi(t) = \chi_{[0,\lambda)}(t)$.

$$\begin{aligned} \big\langle \gamma^4 \Omega, \Omega \big\rangle_p &= \lambda \big\langle \gamma^3 \Omega, \Omega \big\rangle_p + \big\langle \gamma^3\big(\chi(t_1)\big), \Omega \big\rangle_p \\ &= \lambda \big\langle \gamma^3 \Omega, \Omega \big\rangle_p + \big\langle \gamma^2\big(\chi(t_2)\chi(t_1) + (W(t_1)+1)\chi(t_1) + \lambda\Omega\big), \Omega \big\rangle_p \\ &= \lambda \big\langle \gamma^3 \Omega, \Omega \big\rangle_p + \lambda \big\langle \gamma^2 \Omega, \Omega \big\rangle_p \\ &\quad + \big\langle \gamma\big((W^2(t_1) + 3W(t_1) + 1)\chi(t_1) + (\lambda + \frac{p+1}{2}\lambda^2)\Omega\big), \Omega \big\rangle_p \\ &= \lambda^2 + \frac{p+5}{2}\lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^2 + \lambda^3 \\ &\quad + \int_0^\lambda (W^2(t_1) + 3W(t_1) + 1)dt_1 + \lambda^2 + \frac{p+1}{2}\lambda^3 \\ &= \lambda + \frac{3p+9}{2}\lambda^2 + \frac{p^2+4p+13}{3}\lambda^3 + \lambda^4 \,. \end{aligned}$$

Zanim obliczymy momenty operatora γ w ogólnym przypadku, wprowadzimy kilka oznaczeń. Niech $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_b\} \in \mathcal{NC}_n$ będzie (nieuporządkowaną) partycją zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Podzielmy zbiór $\{1, \ldots, n\}$ na następujące zbiory rozłączne:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_\pi &= \left\{i \in \{1,\ldots,n\}; \exists_{r\in\{1,\ldots,b\}}\ \pi_r = \{i\}\right\} \\
\mathfrak{a}_\pi &= \left\{i \in \{1,\ldots,n\}; \exists_{r\in\{1,\ldots,b\}}\ |\pi_r| > 1,\ i = \max \pi_r\right\} \\
\mathfrak{a}^*_\pi &= \left\{i \in \{1,\ldots,n\}; \exists_{r\in\{1,\ldots,b\}}\ |\pi_r| > 1,\ i = \min \pi_r\right\} \\
\mathfrak{p}_\pi &= \{1,\ldots,n\} \setminus (\mathfrak{m}_\pi \cup \mathfrak{a}_\pi \cup \mathfrak{a}^*_\pi)
\end{aligned}$$

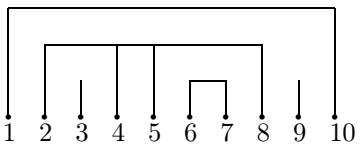
Innymi słowy, zbiór $\mathfrak{q}_\pi$ odpowiada singletonom w partycji π, natomiast zbiory $\mathfrak{a}^*_\pi$ i $\mathfrak{a}_\pi$ składają się odpowiednio z lewych i prawych „końców" bloków partycji π. Z kolei zbiór $\mathfrak{p}_\pi$ odpowiada „środkowym" elementom bloków $\pi_1, \ldots, \pi_b$.

Za pomocą tych zbiorów możemy każdej partycji $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_b\} \in \mathcal{NC}_n$ przyporządkować operator $c_\pi = c_1 \ldots c_n$, gdzie

$$c_i = \begin{cases} a_\lambda & \text{gdy } \ i \in \mathfrak{a}_\pi \\ a^*_\lambda & \text{gdy } \ i \in \mathfrak{a}^*_\pi \\ p_\lambda & \text{gdy } \ i \in \mathfrak{p}_\pi \\ q_\lambda & \text{gdy } \ i \in \mathfrak{q}_\pi \end{cases}.$$

Oczywiście, przyporządkowanie $\pi \to c_\pi$ jest różnowartościowe, ale nie jest „na" (patrz Przykład 2.5). Niemniej jednak, iloczyny operatorów $a_\lambda, a^*_\lambda, q_\lambda, p_\lambda$, które nie odpowiadają żadnej partycji π, będą dla nas w pewnym sensie nieistotne, o czym mówi Lemat 2.7.

Przykład 2.5 Na Rysunku 2.6 została przedstawiona nieprzecinająca partycja $\pi \in \mathcal{ONC}_{10}(5)$ wraz z odpowiadającym jej operatorem c_π.



$$\longrightarrow \qquad c_\pi = a^*_\lambda a^*_\lambda q_\lambda p_\lambda p_\lambda a^*_\lambda a_\lambda a_\lambda q_\lambda a_\lambda$$

Rysunek 2.6 Partycja π wraz z odpowiadającym jej operatorem c_π.

Przykładowymi iloczynami operatorów $a_\lambda, a^*_\lambda, q_\lambda, p_\lambda$, które nie odpowiadają żadnym partycjom, są: $a^*_\lambda a_\lambda a_\lambda$, $a_\lambda a^*_\lambda a^*_\lambda a_\lambda$, $p_\lambda p_\lambda p_\lambda$.

Lemat 2.7 *Niech $c_1, \ldots, c_n \in \{a_\lambda, a^*_\lambda, p_\lambda, q_\lambda\}$, będzie ciągiem operatorów, dla którego nie istnieje partycja $\pi \in \mathcal{NC}_n$ taka, że $c_\pi = c_1 \ldots c_n$. Wtedy $\langle c_1 \ldots c_n \Omega, \Omega\rangle_p = 0$.*

Dowód. Zauważmy, że jeżeli $c_\pi \neq c_1 \dots c_n$ dla wszystkich $\pi \in \mathcal{NC}_n$, to musi zachodzić co najmniej jeden z trzech następujących przypadków (parz Przykład 2.5):

1. Liczba operatorów kreacji a_λ w ciągu $c_1, \dots, c_n$ jest różna od liczby operatorów anihilacji a_λ^*. W takim wypadku teza jest oczywista.

2. Istnieje $i \in \{1, \dots, n\}$ takie, że wśród $c_i, c_{i+1}, \dots, c_n$ jest więcej operatorów anihilacji a_λ^* niż operatorów kreacji a_λ. W tym wypadku teza również jest oczywista.

3. Istnieje $i \in \{1, \dots, n\}$ takie, że $c_i = p_\lambda$ oraz wśród $c_{i+1}, \dots, c_n$ jest dokładnie tyle samo operatorów anihilacji a_λ^* co operatorów kreacji a_λ. Wówczas mamy

$$\langle c_1 \dots c_n \Omega, \Omega \rangle_p = \langle c_1 \dots c_{i-1} p_\lambda C \Omega, \Omega \rangle_p = 0 \,,$$

dla pewnej stałej C. ■

Twierdzenie 2.4 *Momenty rozkładu operatora Poissona γ względem stanu próżni są postaci*

$$\langle \gamma^n \Omega, \Omega \rangle_p = \sum_{b=1}^{n} \sum_{P \in \mathcal{ONC}_n(b)} \frac{\lambda^b}{b!} p^{e(P)} \,, \qquad n \in \mathbb{N} \,.$$

Dowód. Na początek zauważmy, że z Lematu 2.7 wynika równość

$$\langle \gamma^n \Omega, \Omega \rangle_p = \sum_{b=1}^{n} \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_n(b)} \langle c_\pi \Omega, \Omega \rangle_p \,,$$

zatem wystarczy pokazać, że dla partycji $\pi \in \mathcal{NC}_n(b)$ zachodzi wzór

$$\langle c_\pi \Omega, \Omega \rangle_p = \frac{\lambda^b}{b!} \sum_{\sigma \in S_b} p^{e(\pi, \sigma)} \,.$$

W tym celu skonstruujemy dwupartycję $\pi'' \in \mathcal{NC}_{2b}^2$ taką, że $\langle c_\pi \Omega, \Omega \rangle_p = \langle a_{\pi''} \Omega, \Omega \rangle_p$ oraz taką, że $e(\pi, \sigma) = e(\pi'', \sigma)$ dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_b$, gdzie $a_{\pi''}$ jest skróconą formą zapisu operatora $a_{\pi''}(\chi_{[0,\lambda)}, \dots, \chi_{[0,\lambda)})$ zgodnie z (2.9).

Zauważmy, że w iloczynie c_π możemy pominąć wystąpienia operatora p_λ, ponieważ odpowiadają one „środkowym" elementom bloków partycji π, a zatem ich działanie nie zmieni wartości $\langle c_\pi \Omega, \Omega \rangle_p$. Innymi słowy,

$$\langle c_\pi \Omega, \Omega \rangle_p = \langle \Big(\prod_{i \in \mathfrak{a}_\pi^* \cup \mathfrak{a}_\pi \cup \mathfrak{q}_\pi^*}^{\rightarrow} c_i \Big) \Omega, \Omega \rangle_p = \langle c_{\pi'} \Omega, \Omega \rangle_p \,,$$

gdzie π' jest pewną partycją nieprzecinającą o b blokach – jedno lub dwuelementowych. Podstawienie w ciągu $c_{\pi'}$ operatora $a_\lambda^* a_\lambda$ w miejsce q_λ, odpowiada zastąpieniu singletonów przez bloki dwuelementowe postaci $\{i, i+1\}$. Zatem $c_{\pi'} = a_{\pi''}$ dla pewnej

dwupartycji $\pi'' \in \mathcal{NC}_{2b}^2$; co więcej, z konstrukcji π'' wynika, że $e(\pi,\sigma) = e(\pi'',\sigma)$, dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_b$. Teraz z Lematu 2.4 mamy

$$\langle c_\pi \Omega, \Omega \rangle_p = \langle a_{\pi''} \Omega, \Omega \rangle_p = \frac{\lambda^b}{b!} \sum_{\sigma \in S_b} p^{e(\pi'',\sigma)} = \frac{\lambda^b}{b!} \sum_{\sigma \in S_b} p^{e(\pi,\sigma)} ,$$

co należało dowieść. ■

Zauważmy, że dla $p = 1$ otrzymujemy $\gamma_n = \sum_{b=1}^n \lambda^b |\mathcal{ONC}_n(b)|$, co pokrywa się z momentami wolnego rozkładu Poissona [Kr, SY, Sp]. Analogicznie w przypadku monotonicznym, tzn. dla $p = 0$ mamy $\gamma_n = \sum_{b=1}^n \sum_{P \in \mathcal{MON}_n(b)} \frac{\lambda^b}{b!}$, co również zgadza się z momentami monotonicznego rozkładu Poissona [Mu2, LeS]. Zatem operator γ pełni rolę interpolacyjną pomiędzy tymi dwoma rozkładami.

Rozdział 3

Rozkłady iloczynu wolnego grafów

W rozdziale tym skoncentrujemy się głównie na własnościach *iloczynu wolnego* oraz *iloczynu m-monotonicznego grafów*. Pokażemy, że są one ściśle związane odpowiednio z wolną i m-monotoniczną niezależnością opisanymi w Rozdziale 1 (Twierdzenie 3.2). Dzięki tej obserwacji będziemy mogli zastosować aproksymacyjne podejście monotonicznej hierarchii wolnej do przybliżania spektrum iloczynu wolnego grafów.

W Podrozdziale 3.5 wprowadzimy nowy typ *rozkładu kwantowego* macierzy incydencji danego grafu $\mathcal{G}$, który pozwalał nam będzie na dokładniejsze zbadanie jego spektrum. Rozkład ten bazuje na nowym rodzaju *stratyfikacji*, tzn. partycji na zbiorze wierzchołków $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n$ takiej, że wierzchołki z $\mathcal{V}_n$ są oddalone o dokładnie n od zbioru początkowo $\mathcal{V}_0$ (niekoniecznie pojedynczego wierzchołka) w grafie $\mathcal{G}$. Prowadzi to do różnych rozkładów kwantowych macierzy $A(\mathcal{G})$ na sumę operatora kreacji, anihilacji i operatora diagonalnego. Dzięki temu jesteśmy w stanie rozłożyć przestrzeń $l_2(V)$ na sumę prostą przestrzeni niezmienniczych, będących interaktywnymi przestrzeniami Focka, które to są dobrze znanymi obiektami w probabilistyce kwantowej. Za ich pomocą możemy wyliczyć rozkłady spektralne macierzy incydencji na każdej z podprzestrzeni niezmienniczych oraz podać pełne spektrum grafu.

3.1 Podstawowe pojęcia

Przez *zbiór z korzeniem* rozumieć będziemy parę (X, e), gdzie X jest zbiorem przeliczalnym, natomiast e – jego wyróżnionym elementem zwanym *korzeniem*. Przez *graf z korzeniem* rozumieć będziemy parę $(\mathcal{G}, e)$, gdzie $\mathcal{G} = (V, E)$ jest grafem niezorientowanym ze zbiorem wierzchołków $V = V(\mathcal{G})$ i zbiorem krawędzi $E = E(\mathcal{G}) \subseteq \{\{x, x'\} : x, x' \in V, x \neq x'\}$ oraz $e \in V$ jest wierzchołkiem wyróżnionym zwanym *korzeniem*. Jeśli nie będzie to prowadzić do nieścisłości, to od tej pory przez graf $\mathcal{G}$ będziemy rozumieć graf z korzeniem $(\mathcal{G}, e)$, w szczególności dla grafów symetrycznych, tzn. takich, że dla dowolnych wierzchołków $x \neq x'$ istnieje automorfizm τ taki, że $\tau(x) = x'$ (innymi słowy wszystkie wierzchołki są równoważne).

Dla grafu $\mathcal{G} = (V, E)$ z korzeniem e używać będziemy notacji

$$V^0 = V \setminus \{e\}. \tag{3.1}$$

Dwa wierzchołki $x, x' \in V$ nazywamy *incydentnymi* lub *sąsiednimi*, jeżeli $\{x, x'\} \in E$, tzn. x, x' są połączone krawędzią. Wówczas piszemy $x \sim x'$. Mówimy, że graf posiada pętle, jeśli dla pewnego wierzchołka x zachodzi $x \sim x$. *Droga* długości n jest to ciąg wierzchołków $v_0, v_1, \ldots, v_n$, taki że $v_{i-1} \sim v_i$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$; v_0 i v_n nazywać będziemy, odpowiednio, początkiem i końcem drogi. Przez $d(v, w)$ rozumieć będziemy odległość między wierzchołkami v i w, tzn. długość najkrótszej drogi o początku v i końcu w. *Stopień* wierzchołka x definiujemy przez $\kappa(x) = |\{x' \in V : x' \sim x\}|$, gdzie $|I|$ oznacza liczbę elementów zbioru I. Mówimy, że graf jest *lokalnie skończony*, gdy $\kappa(x) < \infty$ dla każdego $x \in V$, natomiast *jednostajnie lokalnie skończony*, gdy $\sup\{\kappa(x) : x \in V\} < \infty$.

Niech $\delta(x)$ oznacza funkcję charakterystyczną jednoelementowego zbioru $\{x\}$, dla $x \in V$. Wtedy $\{\delta(x),\, x \in V\}$ jest bazą ortogonalną przestrzeni Hilberta $l_2(V)$.

Macierzą incydencji $A = A(\mathcal{G})$ grafu $\mathcal{G}$ (w literaturze zwana również macierzą sąsiedztwa) będzie zero-jedynkowa macierz

$$A_{x,x'} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \ x \sim x' \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases} . \tag{3.2}$$

O macierzy incydencji będziemy myśleć jak o operatorze działającym na $l_2(V)$ określonym przez

$$A\delta(x) = \sum_{x \sim x'} \delta(x')\,, \qquad x \in V\,. \tag{3.3}$$

Zauważmy, że prawa strona (3.3) jest funkcją z $l_2(V)$, jeżeli założymy, że graf $\mathcal{G}$ jest lokalnie skończony. Dobrze znanym jest fakt, że $A(\mathcal{G})$ jest operatorem ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{G}$ jest jednostajnie lokalnie skończony. W takim wypadku $A(\mathcal{G})$ jest operatorem samosprzężonym w $\mathcal{C}^*$-algebrze operatorów ograniczonych $\mathcal{B}(l_2(V))$ i będziemy go nazywać *operatorem incydencji* grafu $\mathcal{G}$ a jego spektrum – *spektrum grafu* $\mathcal{G}$. Algebrę z jedynką generowaną przez macierz incydencji A, tzn. algebrę wielomianów zmiennej A, nazywamy *algebrą incydencji* grafu $\mathcal{G}$ i oznaczać będziemy przez $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ lub po prostu $\mathcal{A}$.

O ile nie będzie inaczej powiedziane, w całej niniejszej pracy przez graf rozumieć będziemy niezorientowany, spójny, jednostajnie lokalnie skończony graf prosty z niepustym zbiorem krawędzi. Graf z korzeniem $(\mathcal{G}, e)$, gdzie $\mathcal{G}$ jest grafem w powyższym sensie, również nazywać będziemy grafem jeśli nie będzie to prowadzić do nieścisłości.

Przez *rozkład spektralny operatora* $A(\mathcal{G})$ względem stanu ψ rozumieć będziemy miarę probabilistyczną μ, dla której

$$\psi(A^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu(dx), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,. \tag{3.4}$$

Rozkładem spektralnym grafu z korzeniem $(\mathcal{G}, e)$ nazywać będziemy rozkład spektralny operatora $A(\mathcal{G})$ względem stanu $\varphi_e(\,\cdot\,) = \langle\, \cdot\, \delta(e), \delta(e)\rangle$ zwanego stanem próżni. Rozkład

spektralny grafu z korzeniem jest ważnym narzędziem do obliczania spektrum spec($\mathcal{G}$) grafu $\mathcal{G}$. W pewnych przypadkach (drzewa jednorodne i drzewa n-arne są najprostszymi przykładami) jest nawet tak, że spektrum spec($\mathcal{G}$) pokrywa się z nośnikiem rozkładu spektralnego $(\mathcal{G}, e)$.

3.2 Sploty miar i iloczyny grafów

Dla dowolnej miary probabilistycznej μ o momentach $(M_n)_{n\geq 0}$, zdefiniujmy funkcję generującą momenty jako formalny szereg potęgowy $M_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n$. Transformatę Cauchy'ego, K-transformatę, odwrotną transformatę Cauchy'ego oraz R-transformatę definiujemy odpowiednio wzorami

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z} M_\mu\left(\frac{1}{z}\right) \tag{3.5}$$

$$F_\mu(z) = \frac{1}{G_\mu(z)} \tag{3.6}$$

$$R_\mu(z) = -\frac{1}{z} + G_\mu^{-1}(z). \tag{3.7}$$

Niech $(\mathcal{G}_1, e_1)$ i $(\mathcal{G}_2, e_2)$ będą dwoma grafami o macierzach incydencji $A_1 = A(\mathcal{G}_1)$, $A_2 = A(\mathcal{G}_2)$ oraz rozkładami spektralnymi μ i ν, odpowiednio. Od tej pory przez *splot* zawsze rozumieć będziemy *splot addytywny*. Przez $\mu \rhd \nu$ oznaczać będziemy *splot monotoniczny* związany z niezależnością monotoniczną [Mu1]. Podobnie $\mu \boxplus \nu$ oznaczać będzie *splot wolny* odpowiadający niezależności wolnej [Vo2]. Zachodzą następujące zależności

$$R_{\mu\boxplus\nu}(z) = R_\mu(z) + R_\nu(z) \tag{3.8}$$

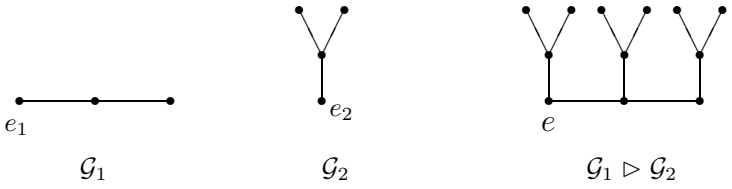
$$F_{\mu\rhd\nu}(z) = F_\mu(F_\nu(z)) \tag{3.9}$$

Powyższe relacje mogą być traktowane jako definicje odpowiadających im splotów, które zazwyczaj są wprowadzane za pomocą odpowiedniego pojęcia niezależności. Dają nam one analogię związku między klasycznym splotem miar a Transformatą Fouriera. Na przykład, R-transformata jest addytywna względem odpowiadającego jej splotu, a zatem odgrywa rolę logarytmu transformaty Fouriera. Z kolei w przypadku monotonicznym addytywność jest zastąpiona przez składanie funkcji [Mu1].

Naturalnym wydaje się być fakt, że splot wolny i R-transformata pojawiają się w kontekście teorii spektralnej wolnego iloczynu grafów. Mniej oczywiste jest to w przypadku innych rodzajów splotów. Poniżej zdefiniujemy taki iloczyn, który odpowiada splotowi monotonicznemu.

Definicja 3.1 *Iloczynem grzebieniowym* grafów z korzeniem $(\mathcal{G}_1, e_1)$ i $(\mathcal{G}_2, e_2)$ nazywamy graf $(\mathcal{G}_1 \rhd \mathcal{G}_2, e)$ otrzymany przez „doklejenie" kopii $\mathcal{G}_2$ za korzeń e_2 do każdego

wierzchołka grafu $\mathcal{G}_1$, natomiast e jest wierzchołkiem otrzymanym przez „sklejenie" e_1 i e_2. Jeśli utożsamimy zbiór wierzchołków z $V_1 \times V_2$, to wówczas korzeń e odpowiada wierzchołkowi $e_1 \times e_2$.



Rysunek 3.1 Iloczyn grzebieniowy grafów.

Zauważmy, że iloczyn grzebieniowy grafów z korzeniem nie jest przemienny oraz nie zależy od wyboru korzenia e_1, ale zależy od wyboru e_2. Oczywiście, Definicja (3.1) jest równoważna do podanej w [ABO], za wyjątkiem tego, że w naszej definicji informacja na temat roli, jaką odgrywa korzeń e_2 w iloczynie, jest zapisana w definicji grafu z korzeniem. Dodatkowo nasz iloczyn pozostaje w kategorii grafów z korzeniem, dzięki czemu możemy na przykład pokazać, że jest on łączny. Następne twierdzenie mówi o związku iloczynu grzebieniowego grafów z probabilistyką monotoniczną.

Twierdzenie 3.1 [ABO] *Niech $(\mathcal{G}_1, e_1)$ i $(\mathcal{G}_2, e_2)$ będą grafami z korzeniami o rozkładach spektralnych odpowiednio μ i ν. Wtedy macierz incydencji ich iloczynu grzebieniowego może być przedstawiona jako suma*

$$A(\mathcal{G}_1 \rhd \mathcal{G}_2) = A^{(1)} + A^{(2)}\,, \tag{3.10}$$

gdzie $A^{(1)}$ i $A^{(2)}$ są monotonicznie niezależne względem $\varphi(\cdot) = \langle \cdot\, \delta(e), \delta(e)\rangle$. Ponadto, rozkład spektralny grafu $(\mathcal{G}_1 \rhd \mathcal{G}_2, e)$ dany jest przez splot monotoniczny $\mu \rhd \nu$.

W następnych podrozdziałach uogólnimy powyższe twierdzenie do monotonicznej hierarchii wolnej iloczynów grafów, a zatem również na iloczyn wolny grafów.

3.3 Wolny i m-monotoniczny iloczyn grafów

W podrozdziale tym przypomnimy definicję iloczynu wolnego grafów z korzeniem opisaną między innymi w [Gu, Zn], gdzie również zdefiniowany był ciąg iloczynów aproksymujących iloczyn wolny, które odpowiadają m-wolnym iloczynom stanów opisanym w [Le2]. W analogiczny sposób poniżej przedstawimy definicję m-monotonicznego

iloczynu grafów, który korespondował będzie z m-monotoniczną niezależnością opisaną w Rozdziale 1. Podobnie jak tam, iloczyn grzebieniowy, odpowiadający niezależności monotonicznej (patrz Twierdzenie 3.1), będzie pierwszym (dla $m = 1$) z całej hierarchii iloczynów grafów, które w granicy aproksymować będą iloczyn wolny.

Zatem rozważmy skończoną rodzinę grafów z korzeniami $(\mathcal{G}_i, e_i) = (V_i, E_i, e_i)$, gdzie $i \in I$ oraz I jest skończonym zbiorem indeksów. Przez *iloczyn wolny zbiorów z korzeniem* (V_i, e_i), $i \in I$ rozumiemy zbiór $(*_{i\in I} V_i, e)$, gdzie

$$*_{i\in I} V_i = \{e\} \cup \{v_n v_{n-1} \dots v_1;\ v_k \in V_{i_k}^0\,,\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n\,, n \in \mathbb{N}\} \tag{3.11}$$

oraz e jest pustym słowem. Czasami, ze względu na kontekst, używać będziemy słów z $*_{i\in I} V_i$ zawierających litery e_k, wówczas będziemy je utożsamiać ze słowem pustym e, tzn. $we_k = e_k w \equiv w$, gdzie $w \in *_{i\in I} V_i$.

Definicja 3.2 *Iloczynem wolnym* grafów $(\mathcal{G}_i, e_i)$, $i \in I$, nazywać będziemy graf z korzeniem $(*_{i\in I}\mathcal{G}_i, e)$ ze zbiorem wierzchołków $*_{i\in I} V_i$ oraz zbiorem krawędzi

$$*_{i\in I} E_i = \big\{\{vu, v'u\};\ \{v, v'\} \in \bigcup_{i\in I} E_i\,, u, vu, v'u \in *_{i\in I} V_i\big\}. \tag{3.12}$$

Iloczyn ten oznaczać będziemy przez $*_{i\in I}(\mathcal{G}_i, e_i)$ lub po prostu $*_{i\in I}\mathcal{G}_i$.

Znanym jest fakt, że iloczyn wolny grafów jest łączny i przemienny (patrz [Zn]), co także wynika z łączności i przemienności wolnego iloczynu stanów i z Twierdzenia 3.2. Ponadto, iloczyn wolny grafów (jednostajnie) lokalnie skończonych jest grafem (jednostajnie) lokalnie skończonym. Odnotujmy również fakt, że iloczyn wolny jest grafem nieskończonym o ile żaden z grafów wyjściowych nie składa się z jednego wierzchołka.

Najbardziej intuicyjna konstrukcja iloczynu wolnego grafów zadana jest przez rekurencyjną procedurę, która daje ciąg rosnących grafów, dając w granicy iloczyn wolny. Ta naturalna procedura została opisana w [Zn], gdzie była jedną z kilku równoważnych definicji iloczynu wolnego grafów. Interesującym wydaje się fakt, że konstrukcja ta odpowiada m-wolnemu iloczynowi stanów wprowadzonemu w [Le1], co zauważono w [ALS]. Poniżej przedstawimy podobną konstrukcję, ale odpowiadającą iloczynowi m-monotonicznemu stanów opisanemu w Rozdziale 1, w którym przedstawiliśmy monotoniczną hierarchię wolną. Spostrzeżenie to prowadzi do następującej definicji (patrz przykład z Rysunku 3.4).

Definicja 3.3 Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz I będzie skończonym, liniowo uporządkowanym zbiorem indeksów. Wówczas *m-monotonicznym iloczynem grafów* $(\mathcal{G}_i, e_i)$, $i \in I$, nazywamy podgraf $(\triangleright^{(m)}_{i\in I}\ \mathcal{G}_i, e)$ grafu $(*_{i\in I}\mathcal{G}_i, e)$ otrzymany przez obcięcie zbioru wierzchołków do

$$\triangleright^{(m)}_{i\in I}\ V_i = \{e\} \cup \{v_n \dots v_1;\ v_k \in V_{i_k}^0\,,\ i_1 \neq \dots \neq i_m < i_{m+1} < \dots < i_n\,, n \in \mathbb{N}\}$$

Propozycja 3.1 *Zachodzi równość*

$$*_{i\in I}\mathcal{G}_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} \rhd_{i\in I}^{(m)} \mathcal{G}_i\,.$$

Dowód. Natychmiastowa konsekwencja Definicji (3.2) i (3.3). ■

Przykład 3.1 Rozważmy dwa *odcinki* $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$, tzn. grafy składające się z dwóch wierzchołków połączonych krawędzią, czyli

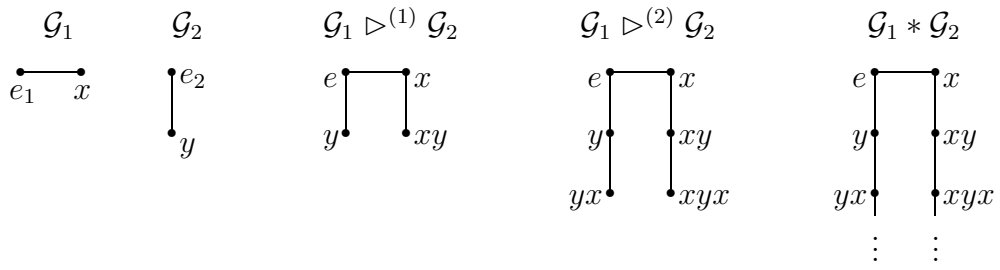
$$\mathcal{G}_1 = \big\{\{e_1, x\}, \{\{e_1, x\}\}, e_1\big\}\,, \qquad \mathcal{G}_2 = \big\{\{e_2, y\}, \{\{e_2, y\}\}, e_2\big\}\,.$$

Zauważmy, że odcinek jest grafem Cayley'a grupy $\mathbb{Z}_2$. Wówczas zbiory wierzchołków i krawędzi iloczynu wolnego $\mathcal{G}_1 * \mathcal{G}_2$ wynoszą odpowiednio

$$V_1 * V_2 = \{e, x, y, xy, yx, xyx, yxy, \ldots\}\,,$$

$$E_1 * E_2 = \{\{e, x\}, \{e, y\}, \{x, yx\}, \{y, xy\}, \{yx, xyx\}, \{xy, yxy\}, \ldots\}\,,$$

skąd łatwo możemy wywnioskować, że $\mathcal{G}_1 * \mathcal{G}_2$ jest grafem Cayley'a grupy liczb całkowitych z dodawaniem $(\mathbb{Z},+)$. Aproksymacje tego iloczynu przy pomocy iloczynu m-monotonicznego przedstawione są na Rysunku 3.4.



Rysunek 3.4 Iloczyn 1, 2-monotoniczny oraz wolny grafów $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$

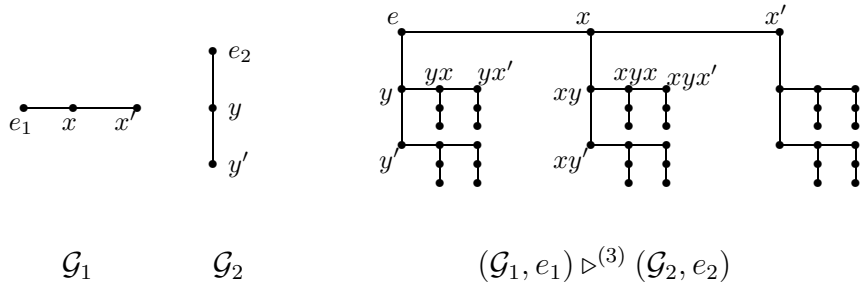
Przykład 3.2 Nich $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$ oraz $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$ będą dwoma grafami o zbiorach wierzchołków $V_1 = \{e_1, x, x'\}$ i $V_2 = \{e_2, y, y'\}$ oraz krawędziach zadanych przez $e_1 \sim x$, $x \sim x'$, $e_2 \sim y$, $y \sim y'$ (patrz Rysunek 3.5). Zbiór wierzchołków iloczynu wolnego $\mathcal{G}_1 * \mathcal{G}_2$ ma postać

$$V_1 * V_2 = \{e, x, x', y, y', xy, xy', x'y, x'y', yx, yx', y'x, y'x', xyx, \ldots\}$$

oraz zbiór krawędzi

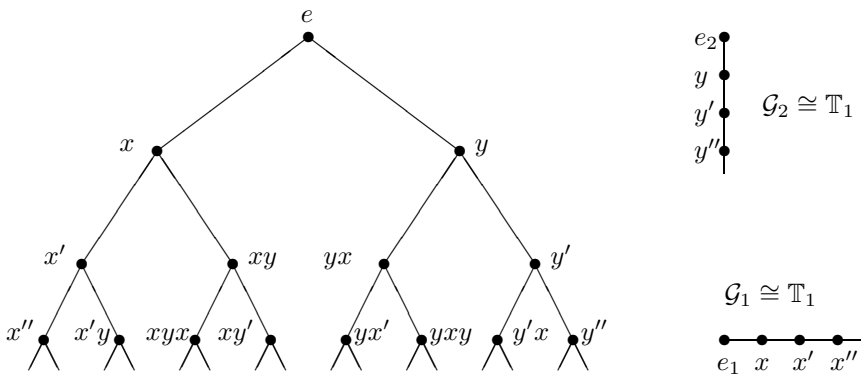
$$\begin{aligned} E_1 * E_2 \;=\; & \{\{e, x\}, \{e, y\}, \{x, x'\}, \{y, y'\}, \{x, yx\}, \{x', yx'\}, \\ & \{y, xy\}, \{y', xy'\}, \{yx, y'x\}, \{yx', y'x'\}, \{xy, x'y\}, \\ & \{xy', x'y'\}, \{yx, xyx\}, \{y'x, xy'x\}, \{xy, yxy\}, \{xy', yxy'\}, \ldots\}. \end{aligned}$$

Na Rysunku 3.5 został przedstawiony podgraf iloczynu wolnego $\mathcal{G}_1 * \mathcal{G}_2$ zadany przez 3-monotoniczny iloczyn $(\mathcal{G}_1, e_1)$ i $(\mathcal{G}_2, e_2)$. Kopie grafu $\mathcal{G}_1$ są rysowane poziomo, natomiast kopie $\mathcal{G}_2$ rysowane są pionowo. Wzajemnie prostopadłe kopie grafów oraz przykładowe oznaczenie wierzchołków odpowiednimi słowami pokazują jak tworzy się iloczyn m-monotoniczny i wolny grafów.



Rysunek 3.5 Iloczyn 3-monotoniczny grafów $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$.

Przykład 3.3 Przez $\mathbb{T}_n$, dla $n \geqslant 1$, będziemy oznaczać *drzewo n-arne*, tzn. spójny graf bez cykli, w którym jedynie korzeń jest stopnia n, natomiast pozostałe wierzchołki są stopnia $n+1$ (patrz Rysunek 3.6). Zauważmy, że drzewa n-arne są grafami nieskończonymi, co wynika wprost z definicji.



Rysunek 3.6 Drzewo binarne $\mathbb{T}_2 \cong \mathbb{T}_1 * \mathbb{T}_1$.

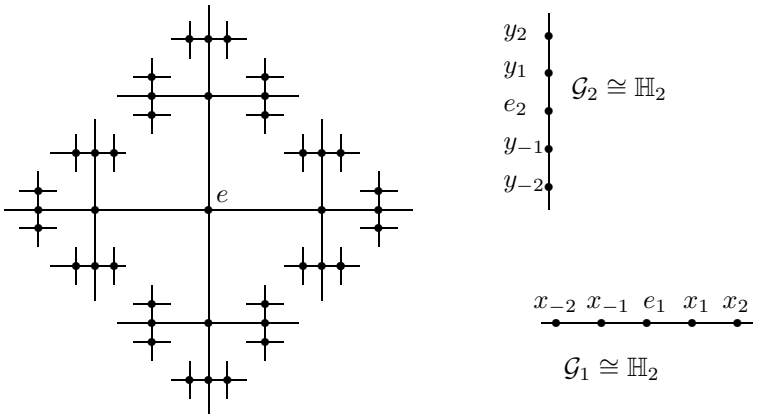
Ponadto, odnotujmy fakt, że $\mathbb{T}_n$ jest n-tą potęgą wolną grafu $\mathbb{T}_1 \cong \mathbb{Z}_+$, tzn.

$$\mathbb{T}_n \cong \underbrace{\mathbb{T}_1 * \mathbb{T}_1 * \ldots * \mathbb{T}_1}_{n \text{ razy}} = \mathbb{T}_1^{*n}, \tag{3.13}$$

gdzie $\mathbb{Z}_+ = (V, E, 0)$ z $V = \{0, 1, 2, \ldots\}$ i $E = \{\{k, k+1\}, k \geq 0\}$. W szczególności drzewo binarne jest iloczynem wolnym dwóch kopii $\mathbb{T}_1$ (patrz Rysunek 3.6).

Przykład 3.4 Niech $\mathbb{H}_n$ oznacza *drzewo jednorodne stopnia* n, gdzie $n \geqslant 1$, tzn. drzewo, którego wszystkie wierzchołki są stopnia n (patrz Rysunek 3.7). W przypadku drzew jednorodnych jako korzeń możemy wybrać dowolny wierzchołek, ponieważ są one grafami symetrycznymi. Dla $n = 2k$, $\mathbb{H}_n$ jest grafem Cayley'a grupy wolnej o k generatorach. Podobnie jak w przypadku drzew n-arnych, zachodzi analogiczna do (3.13) własność dla drzew jednorodnych

$$\mathbb{H}_n \cong \underbrace{\mathbb{H}_1 * \mathbb{H}_1 * \ldots * \mathbb{H}_1}_{n \text{ razy}} = \mathbb{H}_1^{*n} \tag{3.14}$$



Rysunek 3.7 Drzewo jednorodne $\mathbb{H}_4 \cong \mathbb{H}_2 * \mathbb{H}_2$.

3.4 Rozkład wolny i m-monotoniczny

W podrozdziale tym pokażemy, że macierz incydencji iloczynu m-monotonicznego skończonej liczby grafów może być przedstawiona w postaci sumy m-monotonicznych kopii macierzy incydencji grafów wyjściowych. Oczywiście, wynikać stąd będzie analogiczna własność dla iloczynu wolnego grafów.

Aby podać jawną postać macierzy incydencji m-monotonicznego iloczynu grafów, musimy wprowadzić kilka oznaczeń. Niech $l_2(*_{i\in I}^{(m)} V_i)$ będzie przestrzenią Hilberta rozpiętą przez $\delta(e)$ oraz przez wektory postaci

$$\delta(w) \quad \text{dla} \quad w = v_n v_{n-1} \ldots v_1 \in *_{i\in I}^{(m)} V_i$$

oraz niech φ będzie stanem próżni na $B(l_2(*^{(m)}_{i\in I}V_i))$ zadanym przez $\varphi(\,\cdot\,) = \langle\,\cdot\,\delta(e), \delta(e)\rangle$. Wówczas zachodzi izomorfizm

$$(l_2(*^{(m)}_{i\in I}V_i), \delta(e)) \cong *^{(m)}_{i\in I}(l_2(V_i), \delta(e_i))\,,$$

gdzie prawa strona rozumiana jest jako iloczyn m-monotoniczny przestrzeni Hilberta z wyróżnionymi wektorami jednostkowymi (patrz Rozdział 1). W dalszym ciągu będziemy potrzebować następujących podzbiorów zbioru $*^{(m)}_{i\in I}V_i$:

$$W^{(m)}_j = \{v_n v_{n-1}\ldots v_1 \in *^{(m)}_{i\in I}V_i :\, v_n \notin V^0_j,\, n \geqslant 0\}\,,$$

skąd wynika, że $e \in W^{(m)}_j$ dla wszystkich $j \in I$. Innymi słowy $W^{(m)}_j$ jest zbiorem składającym się ze słów, które nie kończą się literą z V^0_j.

Definicja 3.4 Niech A_i oznacza macierz incydencji grafu z korzeniem $(\mathcal{G}_i, e_i)$, gdzie $i \in I$. Zdefiniujmy jej kopię $A^{(m)}_i$ w iloczynie $*^{(m)}_{i\in I}(\mathcal{G}_i, e_i)$, zadaną dla wierzchołków $w, w' \in *^{(m)}_{i\in I}V_i$ następująco:

$$(A^{(m)}_i)_{w,w'} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \{w,w'\} = \{xu, x'u\} \text{ dla } \{x,x'\} \in E_j \text{ i } u \in W^{(m)}_j \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}\,.$$

Zauważmy, że macierze $A^{(m)}_i$ są ograniczonymi operatorami na $l_2(*^{(m)}_{i\in I}V_i)$ co wynika z założenia jednostajnej, lokalnej skończoności grafów $(\mathcal{G}_i, e_i)$ oraz skończoności zbioru I. Następne twierdzenie pokazuje związek m-monotonicznego iloczynu grafów z m-monotoniczną hierarchią wolną. Jego dowód przebiega niemal identycznie jak w przypadku wolnym [ALS] i jest w zasadzie adaptacją dowodu twierdzenia Voiculescu o iloczynie wolnym reprezentacji.

Twierdzenie 3.2 *Macierz incydencji $A(*^{(m)}_{i\in I}\mathcal{G}_i)$ iloczynu m-monotonicznego grafów jest postaci*

$$A(*^{(m)}_{i\in I}\mathcal{G}_i) = \sum_{i\in I} A^{(m)}_i\,,$$

gdzie $A^{(m)}_i$ są kopiami macierzy incydencji grafów $\mathcal{G}_i$, zadane jak w Definicji (3.4). Ponadto, macierze $A^{(m)}_i$ są m-monotoniczne względem stanu próżni φ.

Dowód. Na początek zauważmy, że dzięki lokalnej skończoności grafów $\mathcal{G}_i$ dla $w = xu \in *^{(m)}_{i\in I}V_i$ zachodzi

$$A^{(m)}_i\delta(w) = \sum_{\substack{w'=x'u \\ \{x,x'\}\in E_i}} \delta(w')\,,$$

gdzie $u \in W^{(m)}_i$ oraz x, x' są dowolnymi wierzchołkami z V_i, a zatem jeżeli $x = e_1$, to przyjmujemy, że $e_1 u \equiv u$. Zapisując

$$\delta(w) = \begin{cases} \delta(x)\otimes\delta(u) & \text{gdy } w = xu \text{ i } x \in V^0_i \\ \delta(u) & \text{gdy } w = e_i u \end{cases}$$

otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} A_i^{(m)}\delta(w) &= \sum_{\substack{w'=x'u \\ \{x,x'\}\in E_i, x'\neq e_i}} \delta(x')\otimes\delta(u) + \mathbb{1}_{E_i}(\{x,e_i\})\delta(u) \\ &= (A_i\delta(x))^0\otimes\delta(u) + \langle A_i\delta(x),\delta(e_i))\rangle\delta(u) \end{aligned}$$

o ile $w = xu \in *_{i\in I}^{(m)} V_i$, $u \in W_i^{(m)}$, gdzie $\mathbb{1}_{E_i}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru E_i.

Zauważmy, że $A_i^{(m)} = \lambda^{(m)}(A_i)$, gdzie $\lambda^{(m)}$ oznacza m-monotoniczny iloczyn reprezentacji algebr $\mathbb{C}[A_i]$ na przestrzeni $l_2(*_{i\in I}^{(m)} V_i)$ opisany w Podrozdziale 1.4. Zatem $A_i^{(m)}$ są m-monotoniczne względem φ. ■

Uwaga. Powyższe twierdzenie było udowodnione wcześniej w przypadku $m = 1$, tzn. dla iloczynu grzebieniowego grafów (patrz Twierdzenie 3.1). Aproksymacyjne podejście m-monotonicznego iloczynu stanów pozwala nam na wywnioskowanie analogicznego twierdzenia w przypadku wolnym, które pierwotnie było wykazane w [LeS]. Mówi ono, że macierz incydencji $A(*_{i\in I}\mathcal{G}_i)$ iloczynu wolnego grafów jest postaci

$$A(*_{i\in I}\mathcal{G}_i) = \sum_{i\in I} A_i^{(\infty)},$$

gdzie $A_i^{(\infty)}$ są kopiami macierzy incydencji grafów $\mathcal{G}_i$ zadanych jak w Definicji 3.4. Ponadto, macierze $A_i^{(\infty)}$ są wolne względem stanu próżni φ.

3.5 Rozkład kwantowy i rozkład cykliczny

W podrozdziale tym wprowadzimy nowy rodzaj „rozkładu kwantowego" macierzy incydencji $A(\mathcal{G})$ grafu $\mathcal{G}$ oparty o nowy rodzaj stratyfikacji, w której odległość mierzona jest względem wybranego zbioru wierzchołków. Daje to nam istotne uogólnienie wyników uzyskanych miedzy innymi w [HO1,HO2].

Wyniki te mogą być zastosowane do dowolnych grafów, nie tylko iloczynów wolnych, którym w szczególności poświęcona jest ta praca. Co więcej pokażemy, że rozkład kwantowy względem odpowiedniej stratyfikacji prowadzić będzie do „rozkładu cyklicznego" przestrzeni $l_2(V)$ na sumę prostą wzajemnie ortogonalnych, jednomodowych, interaktywnych przestrzeni Focka. Dzięki temu uzyskujemy pełniejszą informację o spektralnych własnościach wielu grafów (nie tylko pełne spektrum macierzy incydencji, ale również wielokrotność wartości własnych), wliczając wolne produkty, które nie mogły być wcześniej otrzymane za pomocą innych rozkładów między innymi standardowego rozkładu spektralnego.

Wybierzmy pewien zbiór wierzchołków, względem którego mierzyć będziemy odległość, i oznaczmy go przez $\mathcal{V}_0 \subset V$. Ciąg zbiorów

$$\mathcal{V}_n = \{v \in V; d(v,\mathcal{V}_0) = n\},$$

gdzie $d(v,\mathcal{V}_0) = \min\{\, d(v,v_0)\,;\, v_0 \in \mathcal{V}_0\,\}$ oraz $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N}\cup\{0\}$ nazywać będziemy *stratyfikacją* zbioru wierzchołków V. Odpowiadający jej rozkład przestrzeni Hilberta jest postaci

$$l_2(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} l_2(\mathcal{V}_n)\,. \tag{3.15}$$

Przez *rozkład kwantowy* macierzy A rozumieć będziemy trójkę (A^+,A^0,A^-) operatorów na $l_2(V)$ zadanych wzorami

$$A^+\delta(x) = \sum_{\substack{y\sim x\\ y\in\mathcal{V}_{n+1}}} \delta(y)\,,\qquad A^0\delta(x) = \sum_{\substack{y\sim x\\ y\in\mathcal{V}_{n}}} \delta(y)\,,\qquad A^-\delta(x) = \sum_{\substack{y\sim x\\ y\in\mathcal{V}_{n-1}}} \delta(y)\,, \tag{3.16}$$

o ile $x\in\mathcal{V}_n$. Oczywiście $A = A^+ + A^0 + A^-$, co uzasadnia termin *rozkładu* kwantowego. Ponadto, zachodzą łatwe do pokazania zależności

$$(A^+)^* = A^-\,,\qquad (A^0)^* = A^0. \tag{3.17}$$

Niezerowy wektor $\xi\in l_2(V)$ nazywać będziemy *wektorem próżni* jeżeli $A^-\xi = 0$. Interesować nas będą wektory próżni specjalnego rodzaju.

Definicja 3.5 Wektor $\xi\in l_2(V)$ nazywać będziemy *J-wektorem względem rozkładu kwantowego* (A^+,A^0,A^-) (lub po prostu *J-wektorem*, o ile rozkład kwantowy będzie ustalony), jeżeli jest on wektorem próżni oraz dla każdego $n\geqslant 0$ zachodzą zależności

$$A^-A^+(A^{+n}\xi) = \omega_n A^{+n}\xi \tag{3.18}$$
$$A^0(A^{+n}\xi) = \alpha_n A^{+n}\xi \tag{3.19}$$

gdzie α_n i ω_n są pewnymi skalarami. Przyjmujemy konwencję, że jeśli $A^{+m}\xi = 0$ dla pewnego m, to dla $n\geq m$ kładziemy $\omega_n = \alpha_n = 0$.

Bezpośrednio z własności rozkładu spektralnego (3.17) wynika, że skalary α_n i ω_n z powyższej definicji spełniają warunki: $\alpha_n\in\mathbb{R}$ oraz $\omega_n\geqslant 0$. Oznacza to, że z każdym J-wektorem możemy w sposób jednoznaczny związać parę ciągów (α,ω) (zwanych współczynnikami Jacobiego) gdzie $\alpha = (\alpha_n)_{n=0}^\infty$ i $\omega = (\omega_n)_{n=0}^\infty$.

Propozycja 3.2 *J-wektory o różnych współczynnikach Jacobiego są ortogonalne.*

Dowód. Przez ξ i ξ' oznaczmy J-wektory o współczynnikach Jacobiego odpowiednio (α,ω) i (α',ω'). Załóżmy, że $\alpha_n\neq\alpha'_n$ dla pewnego $n\geqslant 0$. Bez starty ogólności możemy założyć, że $\alpha_n\neq 0$, co na mocy konwencji przyjętej w Definicji 3.5 implikuje, że $\omega_{n-1}\neq 0$. Wówczas mamy

$$\big\langle A^{+n}\xi, A^{+n}\xi'\big\rangle = \frac{1}{\alpha_n}\big\langle A^0A^{+n}\xi, A^{+n}\xi'\big\rangle = \frac{\alpha'_n}{\alpha_n}\big\langle A^{+n}\xi, A^{+n}\xi'\big\rangle\,,$$

co oznacza, że $A^{+n}\xi \perp A^{+n}\xi'$, skąd z kolei wynika

$$0 = \left\langle A^{+n}\xi, A^{+n}\xi' \right\rangle = \left\langle A^{-n}A^{+n}\xi, \xi' \right\rangle = \omega \left\langle \xi, \xi' \right\rangle,$$

gdzie $\omega = \omega_0\omega_1 \ldots \omega_{n-1} \neq 0$, a zatem $\xi \perp \xi'$. Podobne rachunki w przypadku gdy $\omega_n \neq \omega'_n$ dla pewnego $n \geqslant 0$, również prowadzą do ortogonalności wektorów ξ, ξ'. ■

Niech $\{\mathcal{V}_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie ustaloną stratyfikacją zbioru wierzchołków V. Zbiór Ξ wektorów z $l_2(V)$ nazywać będziemy *zgodnym* ze stratyfikacją, jeżeli $\Xi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Xi_n$, gdzie $\Xi_n \subseteq l_2(\mathcal{V}_n)$. Dla celów tego podrozdziału nie jest koniecznym wprowadzanie tego typu zbiorów, niemniej jednak będą one dla nas wygodniejsze w rachunkach oraz notacjach, co więcej następna propozycja pokazuje, że dla dowolnego zbioru wzajemnie ortogonalnych J-wektorów możemy znaleźć taki, który dodatkowo jest zgodny ze stratyfikacją oraz generuje nie mniejszą przestrzeń.

Zanim sformułujemy tą propozycję, wprowadzimy jeszcze jedno oznaczenie. Niech $(A^+, A^0,\ A^-)$ będzie rozkładem kwantowym macierzy incydencji A zadanym przez stratyfikację $\{\mathcal{V}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Wówczas przez $[\mathcal{A}x]$ i $[\mathcal{A}^+x]$ oznaczać będziemy domknięte liniowe podprzestrzenie generowane przez wektory $\{A^n x\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{A^{+n}x\}_{n=0}^{\infty}$ odpowiednio.

Propozycja 3.3 *Dla ustalonej stratyfikacji zbioru V oraz zadanego przez nią rozkładu kwantowego macierzy A, niech Ξ będzie ortogonalnym zbiorem J-wektorów. Wówczas istnieje ortogonalny zbiór J-wektorów Θ, który jest zgodny z zadaną stratyfikacją, taki, że*

$$\bigoplus_{\xi\in\Xi} [\mathcal{A}\xi] \ \subset \ \bigoplus_{\xi\in\Theta} [\mathcal{A}\xi]\,.$$

Dowód. Niech $\Xi = \{\,\xi_i\,; i \in I\}$, dla przeliczalnego zbioru indeksów I. Zgodnie z rozkładem (3.15) możemy rozłożyć wektory z Ξ w sposób jednoznaczny, tak, że

$$\xi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_i^{(n)}$$

dla każdego $i \in I$, gdzie $\xi_i^{(n)} \in l_2(\mathcal{V}_n)$ oraz $n \geqslant 0$. Nietrudno zauważyć, że każdy $\xi_i^{(n)}$ również jest J-wektorem. Teraz dla dowolnego n wybierzmy ze zbioru $\{\xi_i^{(n)}; i \in I\}$ maksymalny, liniowo niezależny zbiór i oznaczmy go przez $\Gamma_n = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_n}\}$. Oczywiście $k_n \leqslant |\mathcal{V}_n|$. Podzielmy Γ_n na rozłączne klasy

$$\Gamma_n = \Gamma_n(1) \cup \Gamma_n(2) \cup \ldots \cup \Gamma_n(l_n)$$

uwzględniając warunek: $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma_n(l) \iff \gamma_i, \gamma_j$ mają te same współczynniki Jacobiego. Z Propozycji (3.2) wynika, że różne klasy są wzajemnie ortogonalne. Niech $\Theta_n(l)$ będzie zbiorem wektorów otrzymanym przez zastosowanie ortogonalizacji Gramma-Schmidta do $\Gamma_n(l)$. Wtedy

$$\Theta_n = \Theta_n(1) \cup \Theta_n(2) \cup \ldots \cup \Theta_n(l_n)$$

jest zbiorem ortogonalnym. Ponadto każdy element Θ_n jest J-wektorem ponieważ jest liniową kombinacją J-wektorów o tych samych współczynnikach Jacobiego. Teraz połóżmy Θ jako sumę zbiorów Θ_n, tzn.

$$\Theta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Theta_n \,.$$

Z konstrukcji zbioru Θ łatwo wynika, że spełnia on warunki postawione w tezie. ■

Definicja 3.6 Niech $\Xi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Xi_n$ będzie ortogonalnym zbiorem J-wektorów zgodnym z zadaną stratyfikacją. Zdefiniujmy ciąg wzajemnie ortogonalnych zbiorów zadany przez rekurencję

$$B_0 = \Xi_0 \,, \qquad B_{n+1} = (A^+ B_n \cup \Xi_{n+1}) \backslash \{0\} \,. \tag{3.20}$$

Zbiór Ξ będziemy nazywać *generującym*, jeżeli dla każdego $n \geqslant 0$ zbiór B_n jest bazą w $l_2(\mathcal{V}_n)$.

Pojęcie to będzie bardzo ważne w następnym twierdzeniu, które będąc głównym wynikiem tego podrozdziału, daje nam warunki wystarczające na istnienie rozkładu przestrzeni $l_2(V)$ na „najmniejsze" podprzestrzenie niezmiennicze na działanie macierzy incydencji A.

Twierdzenie 3.3 *Niech Ξ będzie generującym, ortogonalnym zbiorem J-wektorów zgodnym z zadaną stratyfikacją $\mathcal{V}$. Wówczas ma miejsce rozkład*

$$l_2(V) \;=\; \bigoplus_{\xi \in \Xi} [\mathcal{A}\xi] \,.$$

Dowód. W pierwszej kolejności pokażemy, że dla każdego $\xi \in \Xi$ zachodzi równość $[\mathcal{A}\xi] = [\mathcal{A}^+\xi]$. Zauważmy, że dla $m < n$ mamy

$$\begin{aligned} \big\langle A^{+n}\xi, A^{+m}\xi \big\rangle \;&=\; \big\langle A^{+(n-m-1)}\xi, A^{-(m+1)}A^{+m}\xi \big\rangle \\ &=\; \omega\big\langle A^{+(n-m-1)}\xi, A^{-}\xi \big\rangle \;=\; 0 \,, \end{aligned}$$

a zatem $\{A^{+n}\xi\}_{n=0}^{\infty}$ jest zbiorem ortogonalnym. Łatwo widać, że po zastosowaniu ortogonalizacji Grama-Schmidta do $\{A^n\xi\}_{n=0}^{\infty}$ otrzymujemy zbior $\{A^{+n}\xi\}_{n=0}^{\infty}$, a zatem $[\mathcal{A}\xi] = [\mathcal{A}^+\xi]$.

Teraz zauważmy, że dla różnych $\xi, \xi' \in \Xi$ oraz dowolnych $m, n \geqslant 0$ wektory $A^{+n}\xi$, $A^{+m}\xi'$ są ortogonalne, co łatwo pokazać przez indukcję. Wynika stąd, że przestrzenie $[\mathcal{A}^+\xi]$, $[\mathcal{A}^+\xi']$ są ortogonalne. Z założenia wiemy, że B_n jest bazą w $l_2(V_n)$, a zatem mamy

$$l_2(V) \;=\; \bigoplus_{n=0}^{\infty} l_2(V_n) \;=\; \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{span}(B_n) \;\subset\; \bigoplus_{\xi \in \Xi} [\mathcal{A}^+\xi] \;=\; \bigoplus_{\xi \in \Xi} [\mathcal{A}\xi] \,,$$

co kończy tezę, gdyż inkluzja odwrotna jest oczywista. ■

Uwaga. Elementy zbioru Ξ z powyższego twierdzenia często nazywać będziemy *wektorami cyklicznymi*, gdyż niejako generują one całą przestrzeń poprzez działanie macierzy incydencji.

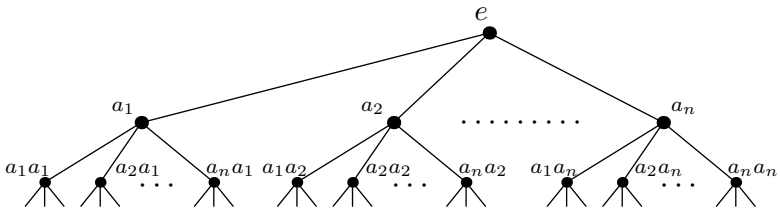
Odnotujmy fakt, że Twierdzenie 3.3 daje nam rozkład przestrzeni $l_2(V)$ na wzajemnie ortogonalne interaktywne przestrzenie Focka, gdyż $[\mathcal{A}\xi]$ jest jednomodową, interaktywną przestrzenią Focka, dla każdego $\xi \in \Xi$, w której zbiór $\{A^{+n}\xi\}_{n=0}^{\infty}$ jest bazą ortogonalną. Ponadto z definicji $[\mathcal{A}\xi]$ wynika ich niezmienniczość względem macierzy A, co w połączeniu z twierdzeniem spektralnym pozwala nam uzyskać bardziej szczegółową informację na temat własności spektralnych macierzy incydencji A, wyliczając rozkłady spektralne związane z wektorami próżni $\xi \in \Xi$. W szczególności da nam to informację o pełnym spektrum rozważanego grafu.

3.6 Zastosowania do iloczynu wolnego grafów

Wykorzystując teorię opisaną w poprzednim podrozdziale, wyliczymy pełne spektrum kilku przykładów iloczynów wolnych grafów. W dwóch pierwszych przykładach, tzn. drzewach n-arnych i jednorodnych, zbiór $\mathcal{V}_0$ będzie składał się tylko z jednego wierzchołka. Są to przykłady o stosunkowo prostej analizie spektralnej, np. pełne spektrum grafu pokrywa się z nośnikiem rozkładu spektralnego względem stanu związanego z korzeniem, które były badane między innymi w [HO1,HO2]. Nasza analiza sięga nieco dalej, gdyż wyliczamy rozkład spektralny związany z każdym wektorem cyklicznym, co daje nam pełną informację nie tylko na temat spektrum macierzy incydencji, ale również o krotnościach wartości własnych. W kolejnych przykładach *grafów pełnych* $\mathbb{K}_n$ oraz *widelców* $\mathbb{F}_n$ zastosujemy technikę rozkładu cyklicznego do iloczynu m-monotonicznego oraz iloczynu wolnego grafów.

Drzewa n-arne $\mathbb{T}_n$

Twierdzenie 3.3 mówi nam, że wystarczy znaleźć regularny, generujący zbiór wzajemnie ortogonalnych J-wektorów względem odpowiedniego rozkładu kwantowego macierzy incydencji drzewa n-arnego $\mathbb{T}_n$, dla ustalonego $n \geqslant 1$. W tym celu przez W_n oznaczmy zbiór wszystkich słów składających się z liter $a_1, a_2, \ldots, a_n$, wraz ze słowem pustym e. Wówczas istnieje naturalna bijekcja pomiędzy W_n a zbiorem wierzchołków drzewa n-arnego $V(\mathbb{T}_n)$ (patrz Rysunek 3.8).



Rysunek 3.8 Bijekcja pomiędzy W_n a $V(\mathbb{T}_n)$.

Na zbiorze wierzchołków V wprowadźmy stratyfikację zadaną przez zdefiniowanie $\mathcal{V}_0$ jako zbioru składającego się jedynie z korzenia e. Wówczas $\mathcal{V}_m = \{v \in V; d(v,e) = m\}$ lub inaczej

$$\mathcal{V}_m = \{v \in V; v = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m},\ i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

dla $m \geqslant 1$. Mając określoną stratyfikację możemy zdefiniować rozkład kwantowy (A^+, A^0, A^-) macierzy incydencji A tak jak w (3.16). Niech $\Xi = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Xi_m$ będzie zbiorem wektorów próżni takim, że $\Xi_0 = \{\delta(e)\}$ oraz

$$\Xi_m = \Big\{ \sum_{j=1}^{k} \big(\delta(a_j v) - \delta(a_{k+1} v)\big),\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ v \in \mathcal{V}_{m-1} \Big\},$$

dla $m \geqslant 1$. Oczywistym jest, że elementy Ξ są wzajemnie ortogonalnymi, niezerowymi wektorami. Ponadto zachodzi

$$A^- \sum_{j=1}^{k} \big(\delta(a_j v) - \delta(a_{k+1} v)\big) = \sum_{j=1}^{k} \big(\delta(v) - \delta(v)\big) = 0\,.$$

A zatem Ξ jest zbiorem wzajemnie ortogonalnych wektorów próżni, który jest zgodny ze stratyfikacją $\{\mathcal{V}_m\}_{m=0}^{\infty}$ (co wynika wprost z definicji). Zauważmy również, że $A^0 = 0$, ponieważ w obrębie każdego ze zbiorów $\mathcal{V}_m$ nie ma krawędzi grafu $\mathbb{T}_n$, dodatkowo mamy $A^- A^+ \delta(e) = A^-(\delta(a_1) + \ldots + \delta(a_n)) = n\delta(e)$ i podobnie

$$A^- A^+ \sum_{j=1}^{k} \big(\delta(a_j v) - \delta(a_{k+1} v)\big) = n \sum_{j=1}^{k} \big(\delta(a_j v) - \delta(a_{k+1} v)\big)$$

Wynika stąd, że wszystkie elementy Ξ są J-wektorami o tych samych współczynnikach Jacobiego $\omega_k = n$ i $\alpha_k = 0$, dla $k \geqslant 0$. Jak łatwo sprawdzić, są to współczynniki Jacobiego miary Wignera ν_n skupionej na przedziale $[-2\sqrt{n}, 2\sqrt{n}]$.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej zbiorom B_m z Definicji 3.6. W przykładzie drzew n-arnych mamy $A^{+n}\xi \neq 0$ dla każdego $\xi \in \Xi$, zatem możemy przyjąć, że B_m spełniają rekurencję

$$B_0 = \Xi_0\,, \qquad B_{m+1} \;=\; A^+ B_m \cup \Xi_{m+1}\,. \tag{3.21}$$

Oczywistym jest, że zbiory A^+B_m, Ξ_{m+1} są rozłączne, gdyż elementy A^+B_m nie są wektorami próżni. Ponadto zauważmy, że jeżeli $\xi_1, \xi_2 \in B_m$ i $\xi_1 \perp \xi_2$, to

$$\left\langle A^+\xi_1, A^+\xi_2 \right\rangle = \left\langle \xi_1, A^- A^+ \xi_2 \right\rangle = n \left\langle \xi_1, \xi_2 \right\rangle = 0\,,$$

skąd wynika, że $|B_m| = |A^+B_m|$. Tak więc liczby $|B_m|$ spełniają rekurencję

$$|B_0| = 1\,, \qquad |B_m| = |B_{m-1}| + (n-1)n^{m-1}\,,$$

ponieważ $|\Xi_m| = (n-1)n^{m-1}$, co daje nam, że $|B_m| = n^m = \dim l_2(\mathcal{V}_m)$, a zatem zbiór Ξ jest generujący. Teraz z Twierdzenia 3.3 wynika, że $l_2(V)$ jest sumą prostą przestrzeni $[\mathcal{A}\xi]$, których rozkład spektralny względem stanu związanego z ξ jest skupiony na przedziale $[-2\sqrt{n}, 2\sqrt{n}]$. Z twierdzenia spektralnego wynika

$$\operatorname{spec} \mathbb{T}_n = \bigcup_{\xi\in\Xi} \operatorname{supp} \nu_n = [-2\sqrt{n}, 2\sqrt{n}]\,,$$

czyli, że spektrum macierzy incydencji drzewa $\mathbb{T}_n$ jest sumą mnogościową nośników rozkładów spektralnych podprzestrzeni niezmienniczych.

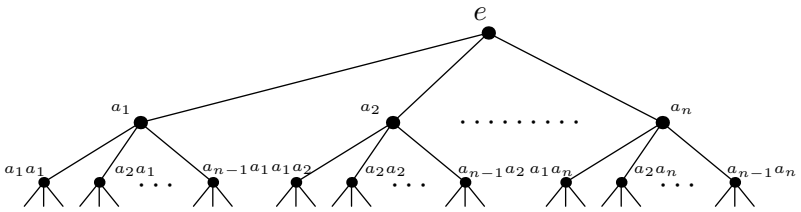
Drzewa jednorodne $\mathbb{H}_n$

Podobne rachunki mogą być zastosowane do drzew jednorodnych. Nie ma znaczenia jaki wierzchołek z $\mathbb{H}_n$ zostanie wybrany jako korzeń e, ponieważ graf ten jest symetryczny.

Rozpatrzmy osobno przypadki $n = 1$ i $n = 2$. Jak zauważyliśmy w Przykładzie 3.4 drzewo $\mathbb{H}_1$ jest izomorficzne z odcinkiem $\mathbb{Z}_2$. Jest to jeden z najprostszych grafów o jednoelementowym zbiorze wektorów cyklicznych $\Xi = \{\delta(e)\}$, względem którego rozkładem spektralnym jest $1/2\,(\delta_{-1} + \delta_1)$, a zatem $\operatorname{spec} \mathbb{H}_1 = \{-1, 1\}$.

Przypadek drzewa jednorodnego stopnia 2, które jest izomorficzne z $\mathbb{Z}$, był badany między innymi w [ABO]. Przypomnijmy, że w tym przypadku zbiór wektorów cyklicznych jest dwuelementowy i składa się z $\xi_1 = \delta(e)$ oraz $\xi_2 = \delta(-1) - \delta(1)$, których rozkładami spektralnymi są odpowiednio rozkład arcusa sinusa i rozkład Wignera, oba skupione na przedziale $[-2, 2]$, a zatem $\operatorname{spec} \mathbb{H}_2 = [-2, 2]$.

Niech teraz $n \geqslant 3$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie oznaczymy wierzchołki $V(\mathbb{H}_n)$ słowami z $W'_n \subset W_n$ utworzonymi z liter $a_1, a_2, \ldots, a_n$, przy czym tak, że litera a_n może występować jedynie na pierwszym miejscu, tzn. $W'_n = \{e\} \cup (W_{n-1} \times \{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$.



Rysunek 3.9 Bijekcja pomiędzy W_n' a $V(\mathbb{H}_n)$.

Podobnie jak w przypadku drzew n-arnych stratyfikację zbioru $V(\mathbb{H}_n)$ wprowadzimy przez wybór $\mathcal{V}_0 = \{e\}$. Wówczas dla $m \geqslant 1$ mamy

$$\mathcal{V}_m = \left\{ v \in V; v = a_{i_1} \dots a_{i_m},\ i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n-1\} \right\}.$$

Mając określoną stratyfikację możemy zdefiniować rozkład kwantowy (A^+, A^0, A^-) macierzy incydencji A grafu $\mathbb{H}_n$ tak jak w (3.16). Zbiór wektorów cyklicznych definiujemy przez $\Xi = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Xi_m$, gdzie $\Xi_0 = \{\delta(e)\}$ oraz

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left(\delta(a_j) - \delta(a_{k+1})\right),\ 1 \leq k \leq n-1 \right\} \\ \Xi_m &= \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left(\delta(a_j w) - \delta(a_{k+1} w)\right),\ 1 \leq k \leq n-2, w \in \mathcal{V}_{m-1} \right\} \end{aligned}$$

dla $m \geqslant 2$. W niemal identyczny sposób jak w przykładzie drzew n-arnych zauważamy, że Ξ jest zgodnym ze stratyfikacją $\{\mathcal{V}_m\}_{m=0}^{\infty}$ zbiorem wzajemnie ortogonalnych wektorów próżni. W celu pokazania, że Ξ jest generujący, policzymy moc zbiorów B_m zdefiniowanych w Definicji 3.6. Zachodzi rekurencja

$$|B_m| = |B_{m-1}| + n(n-1)^{m-1}(n-2)\,,$$

ponieważ $|\Xi_m| = n(n-1)^{m-2}(n-2)$. Daje nam to, że $|B_m| = n(n-1)^{m-1} = \dim l_2(\mathcal{V}_m)$, a zatem B_m jest bazą w $l_2(\mathcal{V}_m)$, co dowodzi, że Ξ jest generujący.

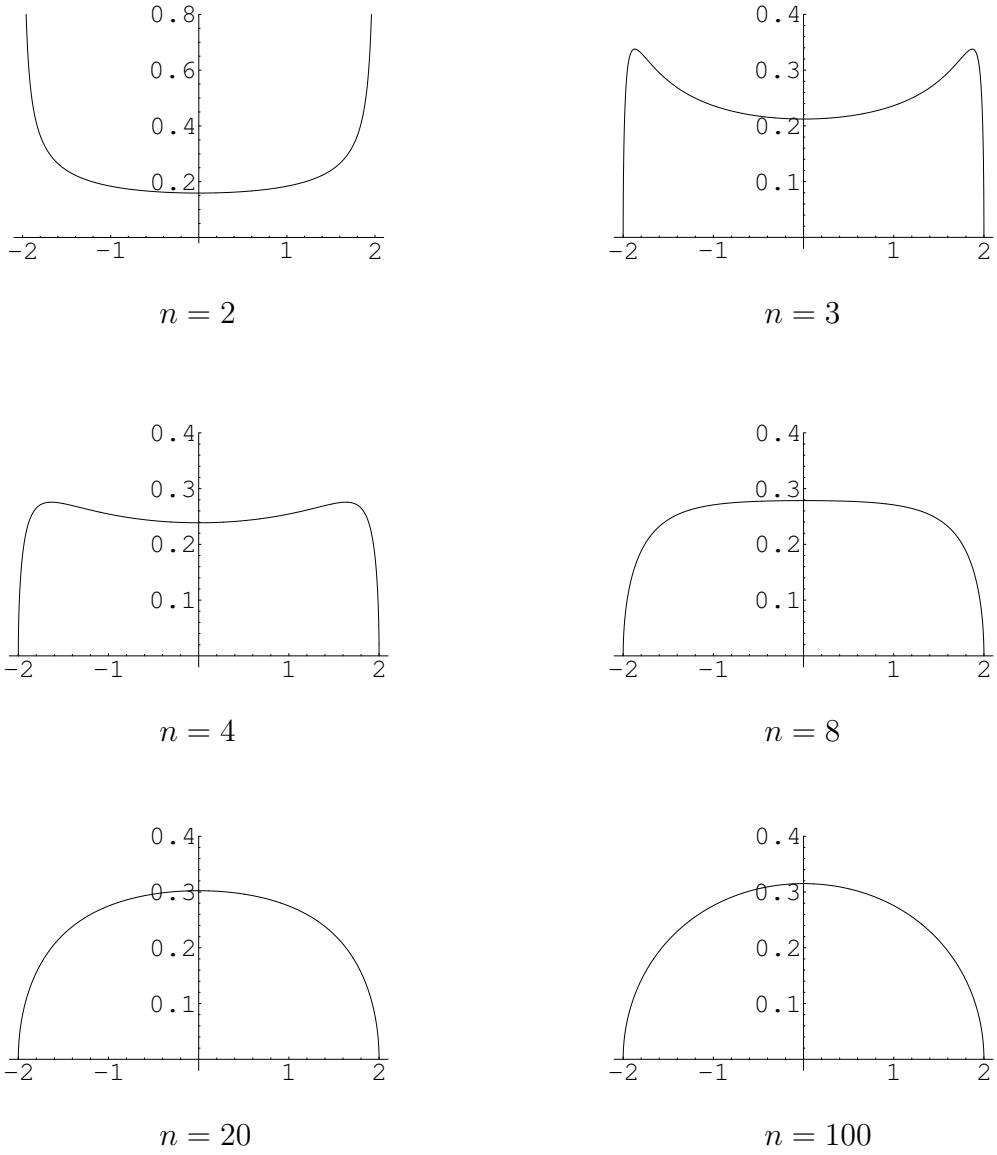
Wektor $\xi_0 = \delta(e)$ jest wektorem własnym operatorów A^-A^+ i A^0 o wartościach własnych n i 0 odpowiednio, ponadto $A^-A^+(A^{+k}\xi_0) = n-1$ i $A^0(A^{+k}\xi_0) = 0$, dla $k \geqslant 1$. Zatem ξ_0 jest J-wektorem o współczynnikach Jacobiego $\omega_0(\xi_0) = n$ i $\omega_k(\xi_0) = n-1$, dla $k \geqslant 1$ oraz $\alpha_k(\xi_0) = 0$, dla wszystkich $k \geqslant 0$. Transformata Cauchy'ego miary o tych współczynnikach jest postaci

$$G_{\xi_0}(z) = \frac{-2z + nz - n\sqrt{4 - 4n + z^2}}{2\,(n-z)\,(n+z)}.$$

Dla $n = 1$ miara μ_{ξ_0} składa się jedynie z dwuatomowej części dyskretnej skupionej w ± 1 o masach $1/2$ każdy. W przypadku $n \geqslant 2$ miara μ_{ξ_0} jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a i jest zadana gęstością

$$f_{\xi_0}(x) = \frac{n\sqrt{4n-4-x^2}}{2\pi\,(n^2-x^2)},$$

skupioną na przedziale $[-2\sqrt{n-1}, 2\sqrt{n-1}]$. Na poniższym rysunku przedstawiają wykresy miary μ_{ξ_0} dla różnych n, przeskalowane do przedziału $[-2, 2]$. Zauważmy, że dla dużych n miara μ_{ξ_0} przybliża rozkład półokręgu.



Rysunek 3.10 Wykresy miary μ_{ξ_0} dla różnych n.

Dla pozostałych wektorów $\xi \in \Xi$ różnych od ξ_0 zachodzą równości $A^- A^+(A^{+k}\xi) = n-1$ i $A^0(A^{+k}\xi) = 0$, dla wszystkich $k \geqslant 0$, a zatem ich współczynniki Jacobiego są postaci $\omega_k(\xi) = n-1$ oraz $\alpha_k(\xi) = 0$, dla $k \geqslant 0$. Transformata Cauchy'ego wyliczona za ich pomocą jest postaci

$$G_\xi(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4(n-1)}}{2(n-1)}\,,$$

skąd zauważamy, że μ_ξ jest miarą Wignera skupioną na odcinku $[-2\sqrt{n-1}, 2\sqrt{n-1}]$.

Pomimo tego, że otrzymaliśmy dwa różne rozkłady spektralne macierzy incydencji względem wektorów z Ξ, to ich wkłady do spektrum

$$\operatorname{spec} \mathbb{H}_n = [-2\sqrt{n-1}, 2\sqrt{n-1}]$$

są takie same.

W następnych przykładach zastosujemy podobne rozważania do wyliczenia spektrum iloczynu m-monotonicznego oraz iloczynu wolnego grafów pełnych $\mathbb{K}_n * \mathbb{K}_l$ oraz grafu pełnego z „widelcem" (tzn. grafu, w którym jedyne krawędzie wychodzą z korzenia do pozostałych wierzchołków) $\mathbb{K}_n * \mathbb{F}_l$. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z iloczynem grafów symetrycznych, zatem jego spektrum można wyliczyć z pojedynczego rozkładu spektralnego (patrz [Gu]). Jednakże nasza technika rozkładu cyklicznego opisana w poprzednim podrozdziale pozwala na wyliczenie rozkładów spektralnych względem wszystkich wektorów cyklicznych, co daje nam pełniejszą informację na temat spektrum, między innymi o „krotnościach" elementów spektrum.

Grafy pełne $\mathbb{K}_n$

Przez $\mathbb{K}_n$ oznaczać będziemy *graf pełny* o $n+1$ wierzchołkach, tzn. taki, w którym wszystkie wierzchołki są parami sąsiadujące. Wybór wierzchołka wyróżnionego w grafie pełnym nie ma znaczenia, gdyż wszystkie one są równoważne. Wybierzmy dwa grafy pełne $\mathbb{K}_n$ i $\mathbb{K}_l$ dla ustalonych, naturalnych $n, l \geqslant 1$ oraz oznaczmy ich zbiory wierzchołków odpowiednio przez $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i $\{y_0, y_1, \ldots, y_l\}$. Wówczas ich iloczyn wolny $\mathbb{K}_n * \mathbb{K}_l$ możemy opisać przez trójkę (V, E, e), gdzie zbiór wierzchołków V zadany jest jako suma zbiorów $\mathcal{V}_k$, określonych przez rekurencję

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \{e, x_1, \ldots, x_n\} \\ \mathcal{V}_{2k+1} &= \{y_i\omega;\ \omega \in \mathcal{V}_{2k},\ i = 1, \ldots, l\} \\ \mathcal{V}_{2k+2} &= \{x_i\omega;\ \omega \in \mathcal{V}_{2k+1},\ i = 1, \ldots, n\}\,, \end{aligned} \tag{3.22}$$

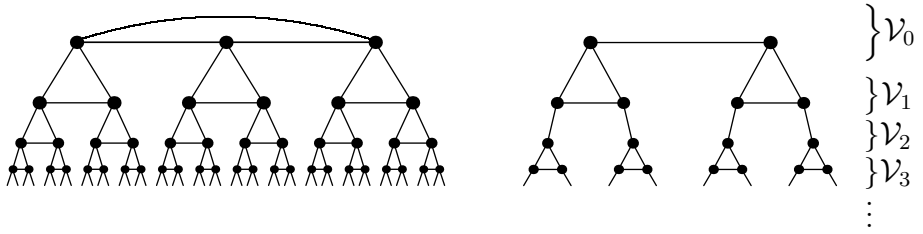
gdzie $k = 0, 1, \ldots$ (patrz Rysunek 3.11). Natomiast zbiór krawędzi E jest postaci

$$E = \{(x_i\omega, x_j\omega), (x_i\omega, \omega), (y_i\omega', y_j\omega'), (y_i\omega', \omega'); x_i\omega, y_i\omega' \in V, i \neq j\}\,.$$

Iloczyn m-monotoniczny grafów pełnych odpowiada obcięciu iloczynu wolnego do m-tego poziomu. Ściślej mówiąc, $\mathbb{K}_n \triangleright^{(m)} \mathbb{K}_l = (V^{(m)}, E^{(m)}, e)$, gdzie $V^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \mathcal{V}_k$ oraz $E^{(m)}$ jest podzbiorem zbioru E, składającym się z krawędzi pomiędzy wierzchołkami z $V^{(m)}$.

Zauważmy, że powyższa konstrukcja w sposób naturalny zadaje stratyfikację $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_k)_{k=0}^{\infty}$ zbioru wierzchołków V oraz stratyfikację $\mathcal{V}^{(m)} = (\mathcal{V}_k)_{k=0}^{m}$ zbioru wierzchołków $V^{(m)}$. Ponadto mamy

$$|\mathcal{V}_{2k}| = (n+1)l^k n^k \qquad \text{oraz} \qquad |\mathcal{V}_{2k+1}| = (n+1)l^{k+1}n^k\,. \tag{3.23}$$



Rysunek 3.11 Iloczyny wolne grafów pełnych $\mathbb{K}_2 * \mathbb{K}_2$ i $\mathbb{K}_1 * \mathbb{K}_2$.

Mając stratyfikację, możemy wprowadzić rozkład kwantowy (A^+, A^-, A^0) macierzy incydencji grafu $\mathbb{K}_n * \mathbb{K}_l$, zdefiniowany jak w (3.16). Naszym celem będzie wyznaczenie zbioru wektorów cyklicznych przestrzeni $l_2(V)$, dzięki czemu wyznaczymy go również dla $l_2(V^{(m)})$. Zaczniemy od wprowadzenia zbiorów Ξ_n, a następnie pokażemy, że $\Xi = \bigcup \Xi_n$ jest szukanym zbiorem. Niech

$$\begin{aligned}
\Xi_0 &= \Big\{ \sum_{j=0}^{n} \delta_{x_j} \Big\} \cup \Big\{ \sum_{j=0}^{i} (\delta_{x_j} - \delta_{x_i});\ i = 1, \ldots, n \Big\} \\
\Xi_{2k+1} &= \Big\{ \sum_{j=1}^{i} (\delta_{y_j\omega} - \delta_{y_i\omega});\ \omega \in \mathcal{V}_{2k},\ i = 2, \ldots, l \Big\} \\
\Xi_{2k+2} &= \Big\{ \sum_{j=1}^{i} (\delta_{x_j\omega} - \delta_{x_i\omega});\ \omega \in \mathcal{V}_{2k+1},\ i = 2, \ldots, n \Big\}\,,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

gdzie x_0 utożsamiamy z e. Otrzymujemy stąd, że $|\Xi_{2k+1}| = (l-1)|\mathcal{V}_{2k}|$ oraz $|\Xi_{2k+2}| = (n-1)|\mathcal{V}_{2k+1}|$. Korzystając z (3.23), mamy

$$|\Xi_0| = |\mathcal{V}_0| \qquad \text{oraz} \qquad |\Xi_k| = |\mathcal{V}_k| - |\mathcal{V}_{k-1}|\,, \quad k \geqslant 1\,. \tag{3.25}$$

Bezpośrednio z definicji wynika, że zbiory Ξ_n są parami ortogonalne, a zatem dla pokazania ortogonalności zbioru Ξ wystarczy udowodnić, że każdy Ξ_n jest zbiorem ortogonalnym. Tak więc, niech $\xi_r = \sum_{j=1}^{i_r} (\delta_{y_j\omega} - \delta_{y_{i_r}\omega})$, dla $r = 1, 2$, będą dwoma różnymi

wektorami z Ξ_{2k+1}, takimi że $2 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant l$. Wtedy

$$\begin{aligned}\langle \xi_1, \xi_2 \rangle &= \langle \sum_{j=1}^{i_1} (\delta_{y_j\omega} - \delta_{y_{i_1}\omega}), \sum_{j=1}^{i_2} (\delta_{y_j\omega} - \delta_{y_{i_2}\omega}) \rangle \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{i_1-1} \| \delta_{y_j\omega} \|^2 \Big) - (i_1 - 1) \| \delta_{y_{i_1}\omega} \|^2 = 0 \,.\end{aligned}$$

Ponadto, wektory ξ_r są wektorami próżni, gdyż

$$A^- \xi_r = A^- \Big(\sum_{j=1}^{i_r} (\delta_{y_j\omega} - \delta_{y_{i_r}\omega}) \Big) = \sum_{j=1}^{i_r} (\delta_\omega - \delta_\omega) = 0 \,.$$

Analogiczne rachunki można przeprowadzić dla wektorów ze zbiorów Ξ_{2k}. Zatem Ξ jest zbiorem ortogonalnych wektorów próżni. Oczywiście, z samej konstrukcji (3.24) wynika, że Ξ jest zgodny ze stratyfikacją $\mathcal{V}$.

Pokażemy teraz, że elementy Ξ są J-wektorami. Niech $\xi \in \Xi_{2k+1}$ oraz $r \in \mathbb{N}$. Z definicji operatora A^+ wynika, że $A^{+r}\xi \in l_2(\mathcal{V}_{r+2k+1})$. Co więcej,

$$A^{+r}\xi = A^{+r} \sum_{j=1}^{i} (\delta_{y_j\omega} - \delta_{y_i\omega}) = \sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{|u|=r \\ uy_i\omega \in V}} (\delta_{uy_j\omega} - \delta_{uy_i\omega})$$

dla pewnego $\omega \in \mathcal{V}_{2k}$. Rozważmy dwa przypadki, w zależności od tego czy r jest nieparzyste czy parzyste. Gdy r jest nieparzyste, to $2k + 1 + r$ jest parzyste, a zatem

$$\begin{aligned}A^- A^+ (A^{+r}\xi) &= \sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{|u|=r \\ uy_i\omega \in V}} A^- A^+ (\delta_{uy_j\omega} - \delta_{uy_i\omega}) \\ &= \sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{|u|=r \\ uy_i\omega \in V}} l(\delta_{uy_j\omega} - \delta_{uy_i\omega}) = l A^{+r}\xi\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}A^0 (A^{+r}\xi) &= \sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{|u|=r \\ uy_i\omega \in V}} A^0 (\delta_{uy_j\omega} - \delta_{uy_i\omega}) \\ &= (n-1) \sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{|u|=r \\ uy_i\omega \in V}} (\delta_{uy_j\omega} - \delta_{uy_i\omega}) = (n-1)\, A^{+r}\xi \,.\end{aligned}$$

Wynika stąd, że ξ jest J-wektorem oraz $\omega_r(\xi) = l$ i $\alpha_r(\xi) = n - 1$, dla $r = 1, 3, 5, \ldots$. W przypadku drugim, tzn. dla r parzystego, otrzymujemy podobny wynik, przy czym

$\omega_r(\xi) = n$ oraz $\alpha_r(\xi) = l - 1$, dla $r = 0, 2, 4, \ldots$. Analogiczne rachunki w przypadku, gdy $\xi \in \Xi_{2k}$ również pokazują, że ξ jest J-wektorem, przy czym jego współczynniki Jacobiego są postaci $\omega_r(\xi) = n$, $\alpha_r(\xi) = l - 1$, dla $r = 1, 3, 5, \ldots$ oraz $\omega_r(\xi) = l$, $\alpha_r(\xi) = n - 1$, dla $r = 0, 2, 4, \ldots$.

Teraz pokażemy, że Ξ jest zbiorem generującym. W tym celu wystarczy pokazać, że zbiór B_k z Definicji 3.6 jest bazą w $l_2(\mathcal{V}_k)$. Oczywiście, $A^{+r}\xi \neq 0$ dla wszystkich $\xi \in \Xi$, $r \geqslant 0$. Wobec tego wystarczy pokazać, że $|B_k| = |\mathcal{V}_k|$, ponieważ B_k jest zbiorem niezerowych wektorów ortogonalnych. Zastosujemy indukcję względem k. Oczywiście, $|B_0| = |\Xi_0| = n + 1 = |\mathcal{V}_0|$. Załóżmy teraz, że $|B_k| = |\mathcal{V}_k|$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Z (3.25) oraz z faktu, że $A^{+r}\xi \neq 0$ dla wszystkich $\xi \in \Xi$, $r \geqslant 0$, wynika że

$$|\mathcal{B}_{k+1}| = |A^+\mathcal{B}_k| + |\Xi_{k+1}| = |\mathcal{V}_k| + |\mathcal{V}_{k+1}| - |\mathcal{V}_k| = |\mathcal{V}_{k+1}|\,.$$

Tak więc, na mocy indukcji, otrzymujemy tezę. Dowodzi to faktu, że Ξ jest zbiorem generującym w przestrzeni $l_2(V)$. Dodatkowo zauważmy, że powyższe rozważania dowodzą również, że zbiór $\Xi^{(m)} = \bigcup_{k=0}^{m} \Xi_k$ jest zbiorem generującym w przestrzeni $l_2(V^{(m)})$ względem macierzy incydencji grafu $\mathbb{K}_n \triangleright^{(m)} \mathbb{K}_l$.

Naszym następnym krokiem będzie wyznaczenie spektrum macierzy incydencji grafów $\mathbb{K}_n \triangleright^{(m)} \mathbb{K}_l$ oraz $\mathbb{K}_n * \mathbb{K}_l$ poprzez obliczenie ich rozkładów spektralnych względem stanów $\varphi_\xi(\,\cdot\,) = \langle\,\cdot\,\xi, \xi\rangle$ dla $\xi \in \Xi$. Przez ξ_0 oznaczmy J-wektor $\delta_\emptyset + \delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_n}$ ze zbioru Ξ_0. Jego współczynniki Jacobiego są postaci

$$\omega_{\xi_0}(k) = \begin{cases} n & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ l & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}, \quad \alpha_{\xi_0}(k) = \begin{cases} n & \text{dla } k = 0 \\ l - 1 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ n - 1 & \text{dla } k \text{ parzystych} > 0 \end{cases}.$$

Transformata Cauchy'ego G_{ξ_0} rozkładu spektralnego μ_{ξ_0} jest postaci

$$G_{\xi_0}(z) = \frac{1 - ln + lz + nz - z^2 + \sqrt{w(z)}}{2\,(-1 + n - z)\,(l + n - z)}\,,$$

gdzie

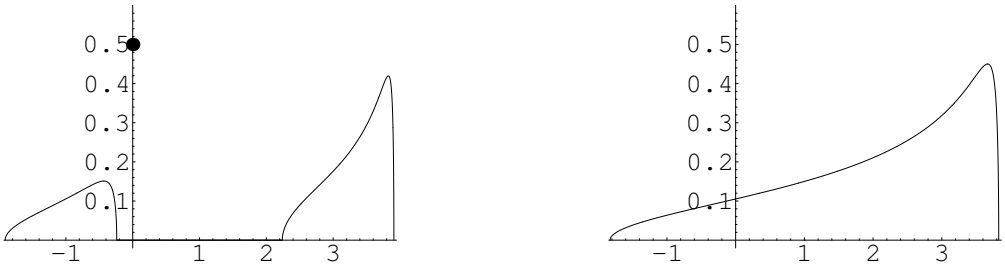
$$w(z) = \left(1 - 2n + ln + (2 - l - n)\,z + z^2\right)^2 - 4l\,(1 - l + z)\,(1 - n + z)\,. \tag{3.26}$$

Stosując formułę odwrócenia Stjeltiesa do transformaty G_{ξ_0}, otrzymujemy część absolutnie ciągłą miary μ_{ξ_0} zadaną wzorem

$$f_{\xi_0}(x) = \left| \frac{\sqrt{-w(x)}}{2\pi\,(x + 1 - n)\,(x - l - n)} \right|, \qquad x \in I_{l,n}\,,$$

gdzie $I_{l,n}$ jest zbiorem będącym sumą dwóch domkniętych odcinków o końcach w $\frac{1}{2}(l + n - 2 \pm \sqrt{4(\sqrt{l} \pm \sqrt{n})^2 + (l - n)^2})$ i rozłącznych wnętrzach. Badając rzeczywiste residua

G_{ξ_0} wnioskujemy, że μ_{ξ_0} posiada atom w $n-1$ o masie $\frac{1}{1+l}\max\{0, l-n\}$ (patrz Rysunek 3.12).

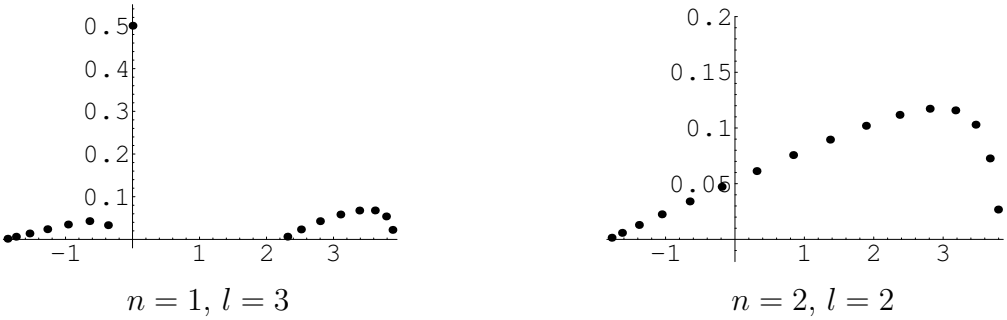


Rysunek 3.12 Przykładowe wykresy miar μ_{ξ_0} wraz z atomami.

Podobne rachunki możemy przeprowadzić dla wektora ξ_0 traktowanego jako element przestrzeni $l_2(V^{(m)})$. Oczywiście, otrzymane w ten sposób współczynniki Jacobiego $(\omega_{\xi_0}^{(m)}, \alpha_{\xi_0}^{(m)})$ są obcięciem współczynników $(\omega_{\xi_0}, \alpha_{\xi_0})$ od $(m-1)$-ego i od m-tego poziomu odpowiednio, tzn.

$$\omega_{\xi_0}^{(m)}(k) = \begin{cases} \omega_{\xi_0}(k) & \text{dla } k \leqslant m-1 \\ 0 & \text{dla } k > m-1 \end{cases}, \quad \alpha_{\xi_0}^{(m)}(k) = \begin{cases} \alpha_{\xi_0}(k) & \text{dla } k \leqslant m \\ 0 & \text{dla } k > m \end{cases}.$$

Miara $\mu_{\xi_0}^{(m)}$ o takich współczynnikach Jacobiego jest miarą dyskretną, gdyż jej transformata Cauchy'ego jest funkcją wymierną. Dla większych m nie możemy podać jej dokładnej postaci, gdyż atomy i ich masy są rozwiązaniami wielomianu stopnia $m+1$. Możemy jednakże wyliczyć przybliżone wartości jej atomów za pomocą pakietu Mathematica. Poniższy rysunek przedstawia takie przybliżenia dla tych samych wartości n i l jak na Rysunku 3.12 dla $m = 15$.



Rysunek 3.13 Przykładowe wykresy miar $\mu_{\xi_0}^{(15)}$.

Niech teraz $\xi \in \Xi_{2k}$ oraz $\xi \neq \xi_0$. Wtedy ciąg współczynników Jacobiego ma postać

$$\omega_\xi(k) = \begin{cases} n & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ l & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}, \quad \alpha_\xi(k) = \begin{cases} -1 & \text{dla } k = 0 \\ l-1 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ n-1 & \text{dla } k \text{ parzystych } >0 \end{cases}.$$

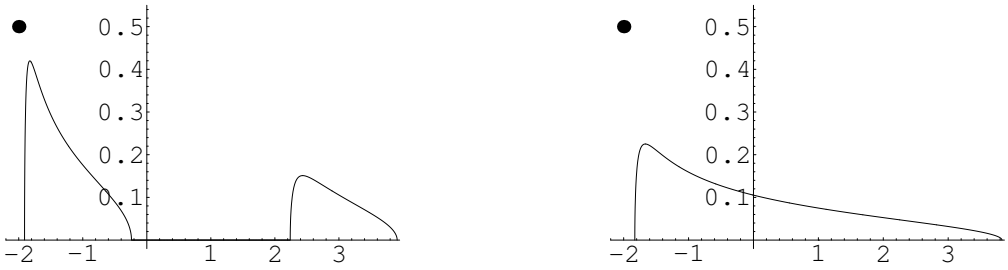
Transformata Cauchy'ego o powyższych współczynnikach ma postać

$$G_\xi(z) = \frac{1 - 2l + 2n - ln + (2 - l + n)z + z^2 + \sqrt{w(z)}}{2n\,(1 - l + z)\,(2 + z)}\,.$$

Stosując formułę odwrócenia Stjeltiesa do transformaty G_ξ, otrzymujemy część absolutnie ciągłą miary μ_ξ postaci

$$f_\xi(x) = \left| \frac{\sqrt{-w(x)}}{2\pi n\,(1 - l + x)\;(2 + x)} \right|, \qquad x \in I_{l,n}\,.$$

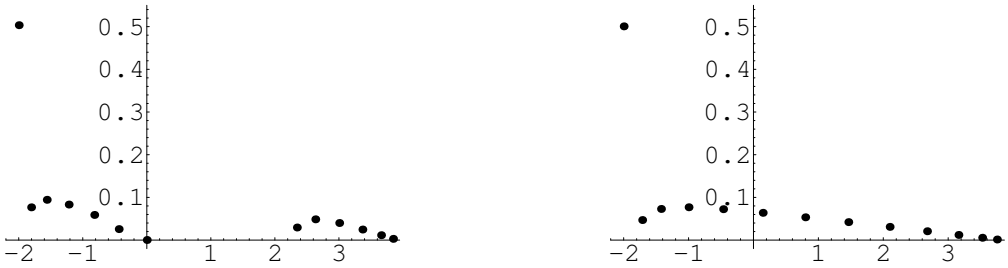
Ponadto, μ_ξ posiada atomy w -2 oraz w $l-1$ o masach równych odpowiednio $\frac{ln-1}{n(1+l)}$ oraz $\frac{1}{n(1+l)} \max\{0, n-l\}$ (patrz Rysunek 3.14).



$n = 1,\ l = 3$ $\qquad$ $n = 2,\ l = 2$

Rysunek 3.14 Przykładowe wykresy miar μ_ξ wraz z atomami.

Podobnie jak poprzednio, możemy potraktować ξ jako wektor z przestrzeni $l_2(V^{(m)})$, a następnie w przybliżeniu wyznaczyć ciąg dyskretnych miar $\mu_\xi^{(m)}$ aproksymujących miarę μ_ξ (patrz Rysunek 3.15).



$n = 1,\ l = 3$ $\qquad$ $n = 2,\ l = 2$

Rysunek 3.15 Przykładowe wykresy miar $\mu_\xi^{(12)}$.

Dla $\xi \in \Xi_{2k+1}$, ciąg współczynników Jacobiego ma postać

$$\omega_\xi(k) = \begin{cases} l & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ n & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}, \quad \alpha_\xi(k) = \begin{cases} -1 & \text{dla } k = 0 \\ n-1 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ l-1 & \text{dla } k \text{ parzystych } >0 \end{cases}.$$

Transformata Cauchy'ego o powyższych współczynnikach ma postać

$$G_\xi(z) = \frac{1 - 2n + 2l - ln + (2 - n + l)z + z^2 + \sqrt{w(z)}}{2l\,(1 - n + z)\,(2 + z)}\,.$$

Stosując formułę odwrócenia Stjeltiesa do transformaty G_ξ otrzymujemy część absolutnie ciągłą miary μ_ξ zadaną wzorem

$$f_\xi(x) = \left| \frac{\sqrt{-w(x)}}{2\pi l\,(1 - n + x)\,(2 + x)} \right|, \qquad x \in I_{l,n}\,.$$

Ponadto, μ_ξ posiada atomy w -2 oraz w $n-1$ o masach równych odpowiednio $\frac{ln-1}{l(1+n)}$ oraz $\frac{1}{l(1+n)} \max\{0, l-n\}$.

Wniosek. Sumując nośniki rozkładów spektralnych μ_ξ dla $\xi \in \Xi$, otrzymujemy, że dla dowolnych $l, n \geqslant 1$ spektrum ciągłe grafu $K_n * K_l$ pokrywa się ze zbiorem $I_{l,n}$. Spektrum punktowe natomiast wynosi

$$\begin{cases} \emptyset & \text{gdy} \quad l = n = 1 \\ \{-2\} & \text{gdy} \quad l = n > 1 \\ \{-2, l-1\} & \text{gdy} \quad l < n \\ \{-2, n-1\} & \text{gdy} \quad l > n \end{cases}.$$

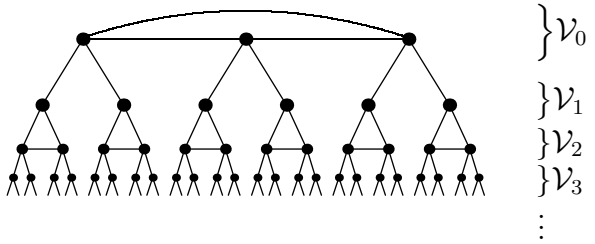
Iloczyn wolny $\mathbb{K}_n * \mathbb{F}_l$

Symbolem $\mathbb{F}_l$ oznaczać będziemy *widelec stopnia* l, tzn. spójny graf prosty o $l+1$ wierzchołkach, w którym wszystkie krawędzie wychodzą od jednego, ustalonego wierzchołka, dokładniej

$$\mathbb{F}_l = \big(\{y_0, y_1, \ldots, y_l\}, \{(y_0, y_i); i = 1, \ldots, l\}, y_0\big).$$

Dodatkowo, niech $\mathbb{K}_n$ będzie grafem pełnym o wierzchołkach $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Podobnie jak w poprzednich przykładach, będziemy chcieli wyznaczyć pełne spektrum grafu $\mathbb{K}_n * \mathbb{F}_l = (V, E, e)$. Łatwo zauważyć, że zbiór wierzchołków V jest dokładnie taki sam jak w poprzednim przykładzie (3.22). Ponadto, na V wprowadzamy stratyfikację $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_k)_{k=0}^{\infty}$, tak samo jak w przypadku grafów pełnych (patrz (3.22)). Natomiast zbiór krawędzi E jest postaci

$$E = \{(x_i\omega, x_j\omega), (x_i\omega, \omega), (y_i\omega', \omega'); x_i\omega, y_i\omega' \in V, i \neq j\}.$$



Rysunek 3.16 Iloczyn wolny $\mathbb{K}_2 * \mathbb{F}_2$.

Niech $\Xi = \sum_{i=0}^{\infty} \Xi_i$ będzie zbiorem wektorów zdefiniowanych jak w (3.24). Stosując rachunki analogiczne do tych z poprzedniego przykładu, możemy pokazać, że Ξ jest zbiorem wektorów cyklicznych.

Tak jak w przykładzie o iloczynie wolnym grafów pełnych, wyliczymy rozkłady spektralne μ_ξ dla wszystkich $\xi \in \Xi$. Ciągi współczynników Jacobiego wektora ξ_0 mają postać

$$\omega_{\xi_0}(k) = \begin{cases} n & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ l & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}, \quad \alpha_{\xi_0}(k) = \begin{cases} n & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ n-1 & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}.$$

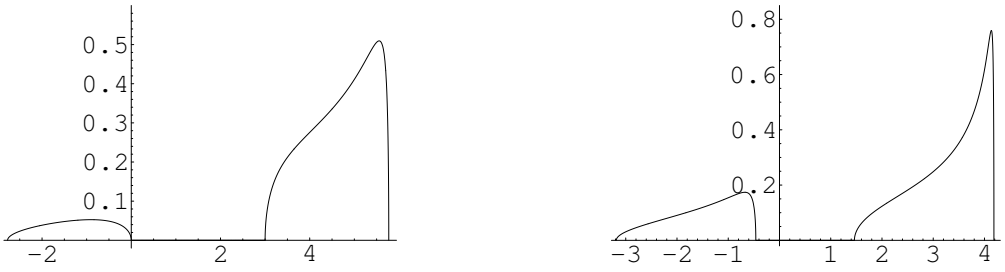
Transformata Cauchy'ego G_{ξ_0} miary μ_{ξ_0} wyraża się wzorem

$$G_{\xi_0}(z) = \frac{n - l - z - nz + z^2 - \sqrt{v(z)}}{2\,(l - n^2 + 2nz - z^2)},$$

gdzie $v(z) = (l - n + z - nz + z^2)^2 - 4lz\,(z + 1 - n)$. Miara μ_{ξ_0} jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a, a jej gęstość ma postać

$$f_{\xi_0}(x) = \left| \frac{\sqrt{-v(x)}}{2\pi(l - n^2 + 2nx - x^2)} \right|, \qquad x \in J_{l,n}\,,$$

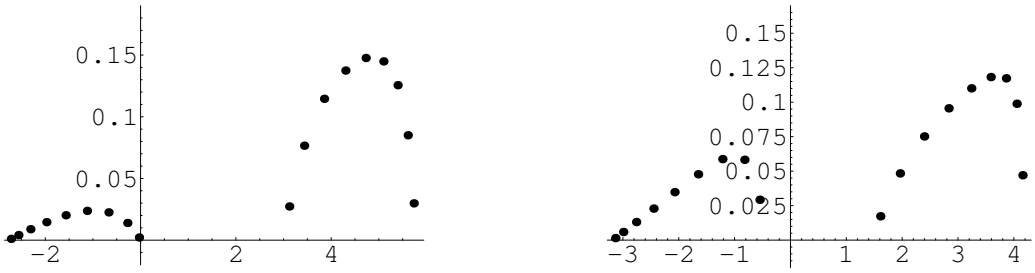
gdzie $J_{l,n}$ oznacza zbiór, który jest sumą dwóch domkniętych przedziałów o końcach w $\frac{1}{2}(n - 1 \pm \sqrt{4(\sqrt{l} \pm \sqrt{n})^2 + (n-1)^2})$ i rozłącznych wnętrzach (patrz Rysunek 3.17).



$n = 4,\ l = 4$ $\qquad$ $n = 2,\ l = 5$

Rysunek 3.17 Przykładowe wykresy miar μ_{ξ_0}.

Podobnie jak w przykładzie o iloczynach grafów pełnych, możemy potraktować ξ_0 jako wektor z przestrzeni $l_2(V^{(m)})$, a następnie w przybliżeniu wyznaczyć ciąg dyskretnych miar $\mu_{\xi_0}^{(m)}$ aproksymujących miarę μ_{ξ_0} (patrz Rysunek 3.18).



$n = 4,\ l = 4$ $\qquad$ $n = 2,\ l = 5$

Rysunek 3.18 Przykładowe wykresy miar $\mu_{\xi_0}^{(17)}$.

Niech teraz $\xi \in \Xi_{2k}$ oraz $\xi \neq \xi_0$. Wtedy ciągi współczynników Jacobiego mają postać

$$\omega_\xi(k) = \begin{cases} n & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ l & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}, \quad \alpha_\xi(k) = \begin{cases} -1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ n-1 & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}.$$

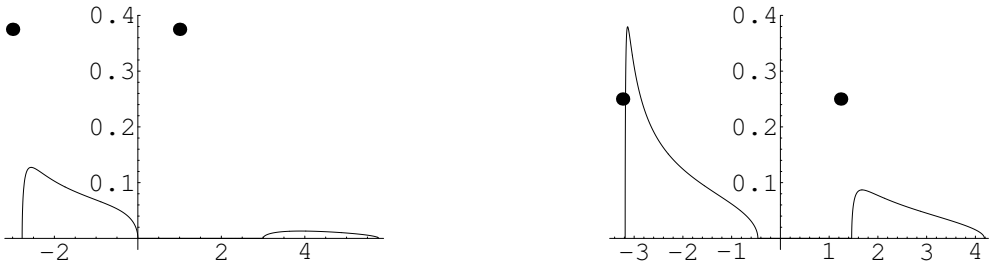
Transformata Cauchy'ego o powyższych współczynnikach wyraża się wzorem

$$G_\xi(z) = \frac{z^2 + z + nz - l + n - \sqrt{v(z)}}{2n\,(1 - l + 2z + z^2)}.$$

Część absolutnie ciągła miary μ_ξ ma postać

$$f_\xi(x) = \left| \frac{\sqrt{-v(x)}}{2\pi n(1 - l + 2x + x^2)} \right|, \qquad x \in J_{l,n}\,.$$

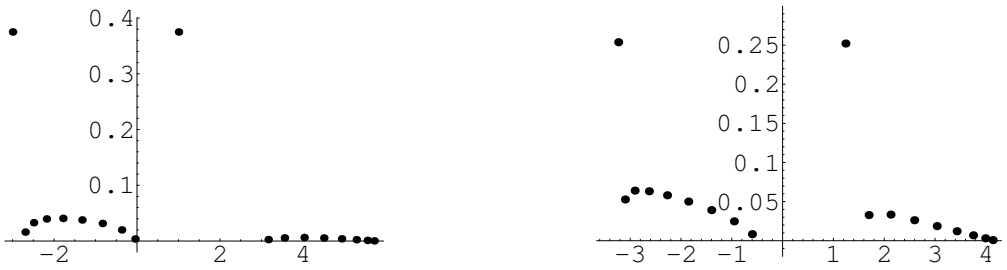
Ponadto, μ_ξ posiada dwa atomy w $\pm\sqrt{l} - 1$ o masie $\frac{n-1}{2n}$ każdy (patrz Rysunek 3.19).



$n = 4,\ l = 4$ $\qquad$ $n = 2,\ l = 5$

Rysunek 3.19 Przykładowe wykresy miar μ_ξ wraz z atomami.

Podobnie jak poprzednio, możemy potraktować ξ jako wektor z przestrzeni $l_2(V^{(m)})$, a następnie w przybliżeniu wyznaczyć ciąg dyskretnych miar $\mu_\xi^{(m)}$ aproksymujących miarę μ_ξ (patrz Rysunek 3.20).



$n = 4,\ l = 4$ $\qquad$ $n = 2,\ l = 5$

Rysunek 3.20 Przykładowe wykresy miar $\mu_\xi^{(17)}$.

Dla $\xi \in \Xi_{2k+1}$ ciągi współczynników Jacobiego mają postać

$$\omega_\xi(k) = \begin{cases} l & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ n & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}, \quad \alpha_\xi(k) = \begin{cases} n-1 & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \\ 0 & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}$$

Transformata Cauchy'ego o powyższych współczynnikach ma postać

$$G_\xi(z) = \frac{l - n + z - nz + z^2 - \sqrt{v(z)}}{2lz}.$$

Część absolutnie ciągła miary μ_ξ ma postać

$$f_\xi(x) = \left| \frac{\sqrt{-v(x)}}{2\pi l x} \right|, \qquad x \in J_{l,n}\,.$$

Ponadto, μ_ξ posiada atom w 0 o masie $\frac{1}{l}\max\{0, l-n\}$ (patrz Rysunek 3.21).

$n = 4,\ l = 4$ $\qquad$ $n = 2,\ l = 5$

Rysunek 3.21 Przykładowe wykresy miar μ_ξ wraz z atomami.

Analogicznie do poprzednich przypadków, na poniższym rysunku przedstawiono przykładowe aproksymacje miary μ_ξ, otrzymane przez obcięcia współczynników Jacobiego od pewnego miejsca, odpowiadające iloczynowi m-monotonicznemu.

$n = 4,\ l = 4$ $\qquad$ $n = 2,\ l = 5$

Rysunek 3.22 Przykładowe wykresy miar $\mu_\xi^{(17)}$.

WNIOSEK. Spektrum ciągłe grafu $\mathbb{K}_n * \mathbb{F}_l$ pokrywa się ze zbiorem $J_{l,n}$. Ponadto, macierz A posiada spektrum punktowe postaci

$$\begin{cases} \emptyset & \text{gdy} \quad l = n = 1 \\ \{0\} & \text{gdy} \quad m > n = 1 \\ \{-2, 0\} & \text{gdy} \quad n > l = 1 \\ \{\sqrt{l} - 1, -\sqrt{l} - 1\} & \text{gdy} \quad n \geqslant l > 1 \\ \{\sqrt{l} - 1, -\sqrt{l} - 1, 0\} & \text{gdy} \quad l > n > 1 \end{cases} .$$

Dokładniejsza analiza mieszanych okresowych i okresowych ułamków łańcuchowych została przeprowadzona w [Ka].

Bibliografia

[ABO] L.Accardi, A.Ben Ghorbal, N.Obata, *Monotone independence, comb graphs and Bose-Einstein condensation*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 7 (2004), no. 3, 419-435.

[ABo] L.Accardi, M.Bożejko, *Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 663-670.

[ACL] L.Accardi, V.Crismale , Y.G.Lu, *Constructive universal central limit theorems based on interacting Fock spaces,* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 8, 631-650 (2005).

[ALS] L.Accardi, R.Lenczewski, R.Sałapata, *Decompositons of the free product of graphs*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., przyjęta do druku.

[AK] K.Aomoto, Y.Kato, *Green functions and spectra on free products of cyclic groups*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 59-85.

[Av] D.Avitzour, *Free products of C^*- algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **271** (1982), 423-465.

[Bi] Ph. Biane, *Processes with free increments*, Math. Z. **227** (1998), 143-174.

[B] M.Bożejko, *Positive definite functions on the free group and the noncommutative Riesz product*, Boll. Un. Mat. Ital. A (6) 4 (1986), 13-21.

[B2] M.Bożejko, *Deformed Free Probability of Voiculescu*, RIMS Kokyuroku **1227**, 2001, 96-113.

[BB] M.Bożejko, W.Bryc, *On a class of free Levylaws related to regression problem*, preprint arXiv: math.PR/0404241, 2004.

[BKW] M.Bożejko, A.D.Krystek, Ł.J.Wojakowski, *Remarks on the r and Δ convolutions*, Math. Z. (2006) 253: 177-196.

[BLS] M.Bożejko, M.Leinert, R.Speicher *Convolution and limit theorems for conditionally free random variables*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 175, No. 2, 1996.

[BS1] M.Bożejko, R.Speicher, *Ψ-independent and simmetrized whit noises*, in L. Accardi (ed.) Quantum probability and Related Topics, bf IV, World Scientific, Singapore, 1991, 219-236.

[BS2] M.Bożejko, R.Speicher, *An example of a generalized Brownian motion*, Commun. Math. Phys. **137** (1991), 519-531.

[BS3] M.Bożejko, R.Speicher, *An example of a generalized Brownian motion II*, Quantum Probability and Related Topics VII (L. Accardi, ed.), World Scientific, Singapore, 1992, pp. 219–236.

[BS4] M.Bożejko, R.Speicher, *Interpolations between bosonic and fermionic relations given by generalized Brownian motions*, Math. Z. 222: 135-159, 1996.

[BW] M.Bożejko, J.Wysoczański, *Remarks on t-transformations of measures and convolutions*, Ann. I.H.Poincare, PR 37, 6(2001), 737-761.

[CDI] T.Cabanal–Duvillard, V.Ionescu, *Un théoreme central limite pour des variables aléatories non–commutatives,* Probabilités/Probability Theory, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **325**, Série 1, 1117-1120 (1997).

[CS] D.I. Cartwright, P.M. Soardi, *Random walks on free products, quotients and amalgams*, Nagoya J. Math. **102** (1986), 163-180.

[FS] A.Figa-Talamanca, T.Steger, *Harmonic analysis for anisotropic random walks on homogenous trees*, Memoirs Amer. Math. Soc. **531** (1992).

[Fr] U.Franz, *Multiplicative monotone convolutions*, Banach Center Publ. 73 (2006), 153-166.

[FL] U.Franz, R.Lenczewski, *Limit theorems for the hierarchy of freeness*, Probability and Mathematical Statistics, Vol. 19, Fasc. 1 (1999), 23-41.

[GL] M.De Giosa, Y.G.Lu, *The free creation and annihilation operators as the central limit of quantum Bernoulli process*, Random Oper. Stoch. Eq. **5**(1997), 227-236.

[GM] C.D.Godsil, B.Mohar, *Walk generating functions and spectral measures of infinite graphs*, Linear Algebra Appl. **107**(1988), 91-206.

[GKP] R.L.Graham, D.E.Khnut, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN 1998.

[Gu] E.Gutkin, *Green's functions of free products of operators with applications to graph spectra and to random walks*, Nagoya Math. J. **149** (1998), 93-116.

[HO1] A.Hora, N.Obata, *Quantum Probability and Spectral Analysis on Graphs*, monograph, w druku.

[HO2] A.Hora, N.Obata, *Quantum decomposition and quantum central limit theorem*, in "Fundamental Problems in Quantum Physics"(L. Accardi, S. Tasaki, Eds.), pp. 284-305, World Scientfic, 2003.

[Ka] Y.Kato, *Mixed periodic Jacobi continued fractions*, Nagoya J. Math. **104** (1986), 129-148.

[Ke] H.Kesten, *Symmetric random walks on groups*, Trans. Am. Math. Soc. **92** (1959), 336-354.

[Kr] A.Krystek, *New models of non-commutative probability*, Ph.D. Dissertation, Mathematical Institute, University of Wrocław, 2006.

[KrW] A.D.Krystek, Ł.J.Wojakowski, *Associative Convolutions Arising from Conditionally Free Convolution*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 8, No. 3(2005), 515-545.

[Ku] G.Kuhn, *Random walks on free products*, Ann. Inst. Fourier **4** (1991), 467-491.

[Le1] R.Lenczewski, *Unification of independence in quantum probability*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **1** (1998), 383-405.

[Le2] R.Lenczewski, *Reduction of free independence to tensor independence*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **7** (2004), 337-360.

[Le3] R.Lenczewski, *A noncommutative limit theorem for homogeneous correlation*, Studia Mathematica, 129 (3) (1998).

[Le4] R. Lenczewski, *On noncommutative independence*, in "QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis. Vol. XVIII. Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis", Eds. M. Schurmann, U. Franz, World Scientific, 2005, p. 320-336.

[Le5] R.Lenczewski, *Decompositions of the free additive convolution*, J. Funct. Anal. **246** (2007), 330-365.

[Le6] R.Lenczewski, rezultat nieopublikowany, 2004.

[Le7] R.Lenczewski, *Operators related to subordination for free multiplicative convolution*, przyjęta do Indiana Univ. Math. J.

[LeS] R.Lenczewski, R.Sałapata, *Discrete interpolation between monotone probability and free probability*, Inf. Dim. Anal., Quantum Prob. and Related Topics. **9**(2006) 77-106.

[Lu] Y.G.Lu, *On the interacting Free Fock Space and the deformed Wigner Law*, Nagoya Math. J. 145 (1997) 1-28.

[Mu1] N.Muraki, *Monotonic convolution and monotone Levy-Hincin formula*, preprint, 2000.

[Mu2] N.Muraki, *Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers*, Infinite Dim. Anal., Quantum Prob. and Related Topics. Vol. 4, No. 1 (2001), 39-58.

[Mu3] N.Muraki, *The five independences as quasi-universal products*, Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. **5** (2002) 113-134.

[MW] B.Mohar, W.Woess, *A survey on spectra of infinite graphs*, Bull. London Math. Soc. **21**(1989), 209-234.

[Ob] N.Obata, *Quantum probabilistic approach to spectral analysis of star graphs*, Interdiscip. Inform. Sci. **10** (2004), 41-52.

[Qu] G.Quenell, *Combinatorics of free product graphs*, Contemp. Math. **206** (1994), 257-281.

[SY] N.Saitoh, H.Yoshida, *q-deformed Poisson random variables on q-Fock spaces*, J. Math. Phys., Vol. 41, No. 8(2000), 5767–5772.

[Sch] M.Schürmann, *Non-commutative probability on algebraic structures*, in "Probability Measures on Groups and Related Structures XI", Proc., Oberwolfach 1994, ed. H. Heyer, World Scientific (1995) 332-356.

[Sp] R.Speicher, *A new example of "independence" and "white noise"*, Probab. Th. Rel. Fields **84** (1990) , 141-159.

[SW] R.Speicher, R.Woroudi, *Boolean convolution*, in "Free Probability Theory", Ed. D. Voiculescu, pp. 267-279, Fields Inst. Commun. Vol.12, AMS, 1997.

[Vo1] D.Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product $\mathcal{C}^*$-algebras*, Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory, Lecture Notes in Math. 1132, Springer, Berlin, 1985, 556-588.

[Vo2] D.Voiculescu, *Addition of certain non-commuting random variables*, J. Funct. Anal. **66** (1986), 323-246.

[Vo3] D.Voiculescu, *The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory*, I, Commun. Math. Phys. 155 (1993), 71-92.

[VDN] D.Voiculescu, K.Dykema, A.Nica, *Free Random Variables*, CRM Monographs Series 1, AMS, 1992.

[Wo1] W.Woess, *Nearest neighbour random walks on free products of discrete groups*, Boll. Unione Mat. Ital. **5-B** (1986), 961-982.

[Wo2] W.Woess, *Random walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Wy] J.Wysoczański, *Monotonic independence on the weakly monotone Fock space ans related Poisson-type theorem*, Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Topics **8** (2005), 259-275.

[Zn] D.W.Znojko, *Free products of nets and free symmetrizers of graphs*, Mat.Sb. (N.S.) **98** (1975), 518-537.