

Politechnika Wrocławska
Instytut Matematyki i Informatyki

Modele dyfuzyjne dla wyceny instrumentów pochodnych na rynku energii elektrycznej

Ewa Broszkiewicz-Suwaj

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
dr hab. Agnieszki Jurlewicz

WROCŁAW, czerwiec 2007

Spis treści

1	Wstęp	4
2	Model rynku energii elektrycznej z czasem ciągłym	7
2.1	Matematyczny model wewnętrznego rynku energii elektrycznej	8
2.2	Portfel inwestora, równowaga na rynku energii	9
2.3	Metoda wyboru równoważnej miary martyngałowej	11
2.4	Struktura terminowa i własności wewnętrznego rynku energii elektrycznej	13
3	Wycena instrumentów pochodnych na rynku energii elektrycznej w oparciu o model dyfuzji	16
3.1	Formuła wyceny dla opcji na kontrakt forward	16
3.2	Dyfuzyjna postać procesów opisujących rynek energii elektrycznej	17
3.3	Wycena europejskiej opcji na kontrakt forward	20
3.4	Przykłady	22
3.4.1	Model jednofaktorowy	22
3.4.2	Model Vasicka	23
4	Wycena instrumentów pochodnych na rynku energii elektrycznej w oparciu o model dyfuzji ze skokami	25
4.1	Przypadek stopy forward ze skokami zadanymi przez złożony proces Poissona	26
4.2	Przypadek stopy forward ze skokami zadanymi procesem typu skorelowanego błędzenia losowego z czasem ciągłym	33
5	Kalibracja i symulacje	39
5.1	Historyczna kalibracja modelu dyfuzyjnego	39
5.2	Kalibracja wielofaktorowa a jednofaktorowa dla modelu dyfuzyjnego	43
5.3	Kalibracja i symulacje dla jednofaktorowego modelu ze skokami	46
6	Rozszerzony model rynku energii i wycena opcji wymiany na tym rynku	48
6.1	Model rozszerzonego rynku energii	48
6.2	Własności i struktura terminowa rozszerzonego rynku energii	49
6.3	Formuła wyceny dla opcji wymiany na kontrakty forward	50
6.4	Dyfuzyjna postać procesów opisujących rozszerzony rynek energii	51
6.5	Wycena opcji wymiany na kontrakty forward	54
6.6	Przykłady	56

6.6.1	Model jednofaktorowy	56
6.6.2	Model Vasicka	57
6.6.3	Opcja wymiany dla identycznej struktury terminowej . . .	57
6.6.4	Opcja wymiany pomiędzy dwiema lokalizacjami	58
6.7	Symulacje	58
7	Podsumowanie	61

1 Wstęp

Głównym celem niniejszej rozprawy jest zaproponowanie nowej rozszerzonej wersji matematycznego modelu rynku energii elektrycznej uwzględniającego wewnętrzną strukturę terminową rynku, a następnie wycena opcji kupna na kontrakt forward i na wymianę kontraktów forward w ramach tego modelu przy różnych założeniach o postaci podstawowych procesów na rynku, w szczególności dla procesów z komponentą skokową.

W związku z liberalizacją rynku energii elektrycznej energia stała się towarem sprzedawanym na wielu giełdach na świecie. Pierwszą z nich była skandynawska giełda Nordpool. Energia będąca przedmiotem obrotu na tej giełdzie pochodzi głównie z elektrowni wodnych i można ją w pewnym sensie przechowywać. Jest to duża zaleta, która ułatwia modelowanie na tym rynku i zbliża jego strukturę do rynków finansowych. W przypadku innych form energii elektrycznej brak możliwości przechowywania powoduje dużą zmienność oraz liczne skoki cen. Przykładem gwałtownych skoków tego typu są np. te zaobserwowane podczas sławnego kryzysu w Kalifornii 2000-2001. Kryzys ten pokazał także, że na ceny energii istotny wpływ mają ograniczenia związane z możliwościami produkcyjnymi elektrowni i zdolnością przesyłową sieci transmisyjnych. Zatem w ogólnym przypadku modelowanie na rynku energii elektrycznej jest dużo bardziej złożone niż na rynkach finansowych i wciąż istnieje potrzeba poszukiwania nowych metod wyceny na tym rynku.

Na giełdach energii notowane są liczne instrumenty finansowe. Bardzo popularnym instrumentem będącym obiektem obrotu jest kontrakt forward (*ang. power forward*). Kontrakt ten ma zbliżoną strukturę do kontraktu forward swap, który zobowiązuje dwie strony do wymiany określonego przepływu płatności w określonym przedziale czasu i zabezpiecza nabywcę przed ewentualnymi zmianami cen energii elektrycznej. Opiewa on na dostawę określonej ilości energii elektrycznej rozpoczynającą się w chwili T wygaśnięcia kontraktu i trwającą określony przedział czasu Δ [37].

W dużej grupie modeli opisujących rynek kontraktów forward na energię elektryczną przyjmuje się, że instrumentem bazowym jest średnia cena spotowa na ustalonym przedziale Δ [13, 35, 39]. Dodajmy, że ponieważ każda usterka w elektrowni lub sieci transmisyjnej, czy też gwałtowna zmiana temperatury otoczenia, powoduje wystąpienie nieoczekiwanych skoków cen spot, ceny te cechuje duża zmienność i są one obiektem trudnym do modelowania. Dla cen spotowych nie można wyznaczyć strategii replikującej, co związane jest z tym, że energii nie można zmagazynować. Wszystko to powoduje, że rynek energii elektrycznej należy do klasy rynków niekompletnych i dla rynku tego jednoznaczna miara neutralna względem ryzyka wyznacza się zwykle poprzez budowę strategii utrzymujących rynek w równowadze.

Na rynkach finansowych ceny kontraktów forward są zwykle bezpośrednio powiązane z ceną instrumentu bazowego, jednak dla rynków towarowych relacja ta nie jest już oczywista, ponieważ z powodu dużej zmienności i sezonowości cen, kosztów przechowania itp., ceny forward uwzględniać muszą wiele dodatkowych informacji i czynników. W przypadku energii elektrycznej powiązanie to jest jeszcze słabsze niż dla zwykłych rynków towarowych w związku z brakiem możliwości przechowywania elektryczności. Co więcej, energia dostarczona w dwóch rozłącznych przedziałach czasowych powinna być traktowana jak dwa różne towary bez możliwości wymiany jednego na drugi. Ze względu na słaby związek cen spotowych i kontraktów na rynku energii elektrycznej modele tego rynku, które wychodzą od cen spotowych jako instrumentu bazowego dla wyceny kontraktu, nie do końca dobrze odzwierciedlają rynek rzeczywisty. Z drugiej strony, w alternatywnym podejściu do opisu rynku energii [12, 13], gdzie modelowana jest bezpośrednio walutowa cena kontraktu, a następnie ceny instrumentów pochodnych, całkowite pominięcie cen spotowych także nie w pełni odpowiada rzeczywistości.

Oba wspomniane wyżej sposoby modelowania rynku energii elektrycznej połączono w pracy [16]. Zaproponowany tam model, nawiązujący do znanych z rynków finansowych modeli stóp procentowych, uwzględnia jednocześnie wewnętrzną strukturę terminową samego kontraktu forward i jego powiązanie z rynkiem spot poprzez pewien proces przeliczający jednostkę walutową na jednostkę towarową, co pozwala na bardziej adekwatne do rzeczywistości opisanie cen. W rozprawie przyjęto jako punkt wyjścia do wyceny europejskiej opcji kupna na kontrakt forward ten właśnie model, przy czym oprócz klasycznej dyfuzyjnej postaci stopy forward i procesu przeliczającego dodatkowo rozważono modele, w których procesy te zawierają komponentę skokową. Mianowicie, porównano dwa szczególne przypadki, gdzie w nawiązaniu do pewnych modeli dyfuzji anormalnej [20, 24, 38], do opisanie skoków zastosowano błądzenie losowe z czasem ciągłym. W pierwszym przykładzie komponentę skokową zadano dość typowo złożonym procesem Poissona. Natomiast drugi przypadek, gdzie przyjęto jako komponentę skokową pewne skorelowane błądzenie losowe z czasem ciągłym wykracza poza klasę procesów Lèvy'ego i wskazuje nowy możliwy kierunek rozszerzenia dyfuzyjnego modelu rynku energii ze skokami. Na koniec, w pracy zaproponowano dyfuzyjny model rynku energii dopuszczający do obrotu także paliwo produkcyjne.

Rozprawa ma następującą strukturę. W rozdziale 2 nakreślono ogólne założenia modelu wraz z propozycją metody doboru optymalnej miary martyngałowej. Wskazano dwie istotne własności modelu (wn. 2.1, wn. 2.2) i opisano wewnętrzną strukturę terminową rynku energii elektrycznej.

W rozdziale 3, przy założeniu dyfuzyjnej postaci podstawowych procesów na rynku, wyceniono opcję kupna na kontrakt forward (tw. 3.1). Następnie podano

wzór na cenę tej opcji dla modelu jednofaktorowego i modelu Vasicka, jednych z najczęściej używanych modeli stóp procentowych.

Rozdział 4 jest poświęcony rozszerzeniu modelu dyfuzyjnego z rozdziału 3 do modelu ze skokami, przy czym nie jest zakładana niezależność przyrostów komponenty skokowej. W rozdziale tym rozważono dwa przypadki komponenty skokowej. W pierwszym część skokowa zadana jest poprzez złożony proces Poissona należący do klasy procesów Lévy'ego, natomiast w drugim bardziej nowatorskim i skomplikowanym komponenta skokowa zadana jest poprzez proces typu skorelowanego błędzenia losowego z czasem ciągłym. Dla tych modeli wyprowadzono postaci procesów niezbędnych do wyceny instrumentów pochodnych (lem. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4) oraz postać ceny opcji kupna na kontrakt forward (tw. 4.1, 4.2). Zanalizowano także dwa konkretne przykłady, aby przybliżyć strukturę badanych modeli.

W rozdziale 5 przedstawione wcześniej modele porównane są z rzeczywistymi zachowaniami rynku. Wyniki teoretyczne zostały tu zastosowane do prognozowania danych rzeczywistych i poparte symulacjami. Przedstawiono dodatkowo propozycję metodologii kalibracji (alg. 5.1, alg. 5.2) dla wielofaktorowego modelu dyfuzyjnego.

W ostatnim rozdziale dokonano rozszerzenia dyfuzyjnego modelu rynku energii elektrycznej do modelu rynku energii dopuszczającego do obrotu towar taki jak paliwo produkcyjne. Dla zaproponowanego modelu dokonano wyceny opcji kupna na wymianę kontraktów na energię elektryczną i paliwo produkcyjne (tw. 6.1) oraz przedstawiono kilka interesujących przykładów.

Rozprawę kończy krótkie podsumowanie.

2 Model rynku energii elektrycznej z czasem ciągłym

Na obserwowanym przez nas rynku energii elektrycznej występują dwa rodzaje jednostek obrotu, mianowicie MWh i waluta (np. EURO). Ceny $P(t, T)$ kontraktów forward są bowiem wyrażone w walucie, a opiewają na dostawę MWh. Uzasadnione jest zatem rozważanie wewnętrznego rynku energii elektrycznej, na którym jednostką obrotu jest MWh. Wówczas cena $p(t, T)$ kontraktu forward wyrażona w tej jednostce i opiewająca na dostawę 1 MWh jest odpowiednikiem obligacji zero-kuponowej. Zależność między takim rynkiem a rzeczywistym rynkiem energii elektrycznej, na którym ceny $P(t, T)$ kontraktów są wyrażone w walucie (takiej jak np. EURO), zadana jest poprzez pewien proces przeliczający N_t (będący wartością rachunku bankowego wyrażoną w MWh). Mianowicie zachodzi relacja

$$P(t, T) = \frac{p(t, T)}{e^{-\int_0^t r(s) ds} N_t}, \quad (2.1)$$

gdzie $r(t)$ jest deterministyczną stopą procentową na rynku walutowym. Ze względu na powyższą postać walutowej ceny kontraktu w dalszej części pracy rynek energii elektrycznej modelowany będzie dwuetapowo:

- poprzez modelowanie struktury terminowej wewnętrznego rynku energii,
- następnie poprzez zastosowanie procesu przeliczającego (kursu) do przejścia na rynek walutowy.

Jeżeli wiemy, że instrumentem bazowym kontraktu forward $P(t, T)$ jest 1MWh dostarczona w przedziale $[T, T + \Delta]$, to wówczas proces $P(t, t) = \left(e^{-\int_0^t r(s) ds} N_t \right)^{-1}$ jest ceną walutową w chwili t za energię dostarczoną w przedziale $[t, t + \Delta]$ następującym zaraz po tej chwili. Proces ten można zatem traktować jako cenę zgody producenta energii elektrycznej na rozpoczęcie w chwili t produkcji ustalonej ilości energii, która będzie dostarczana przez okres Δ . Przy takim założeniu możemy przyjąć, że proces ten jest ciągły, gdyż każdy producent w każdej chwili może taką zgodę sprzedać zainteresowanemu klientowi. Założenie to umożliwia budowanie strategii replikujących w oparciu o proces dyskontujący N_t , który będzie zatem pierwotnym mianownikiem w przedstawionym poniżej ogólnym modelu rynku energii elektrycznej.

2.1 Matematyczny model wewnętrznego rynku energii elektrycznej

Poniżej przedstawimy założenia matematycznego modelu rynku energii elektrycznej z czasem ciągłym wzorowany na [16, 19].

1. Rozważamy wewnętrzny rynek energii elektrycznej, na którym jednostką obrotu w chwili t jest 1MWh równomiernie dostarczana w przedziale czasowym $[t, t + \Delta]$, gdzie $\Delta > 0$ jest ustalonym czasem trwania dostawy.
2. Rynek składa się z $d + 1$ instrumentów pierwotnych (*traded assets*), których ceny opisane są przy pomocy procesów stochastycznych w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]}$ zupełną i prawostronnie ciągłą, taką że σ -ciało \mathcal{F}_0 jest trywialne, gdzie T^* oznacza analizowany horyzont czasowy. Procesy te są adaptowalne, są procesami typu *cádlàg* oraz są ściśle dodatnimi lokalnie ograniczonymi semimartynałami.
3. Proces N_t opisuje wartość w MWh rachunku oszczędnościowego w pewnej walucie (np. EURO). Proces ten jest zerowym instrumentem pierwotnym i będzie dalej traktowany jako pierwotny numerator¹ (*numeraire asset*).
4. Na rynku dostępny jest skończony d -elementowy zbiór instrumentów pierwotnych złożony z m instrumentów rozliczanych finansowo oraz $d - m$ instrumentów rozliczanych fizycznie. Ceny wszystkich dostępnych na rozważanym rynku instrumentów opisane są przez d -wymiarowy proces (S_t^1, \dots, S_t^d) , przy czym (S_t^1, \dots, S_t^m) to ceny instrumentów rozliczanych finansowo, a $(S_t^{m+1}, \dots, S_t^d)$ to ceny instrumentów rozliczanych fizycznie.
5. Zakładamy, że notowania instrumentów odbywają się w sposób ciągły, że instrumenty są dowolnie podzielne oraz że dla każdego pojedynczego instrumentu ceny kupna i sprzedaży są takie same.
6. Na rynku jest $I \in \mathbb{N}$ agentów, którzy inwestują w dostępne instrumenty. Wszyscy agenci mają takie samo zaangażowanie początkowe x oraz taką samą funkcję użyteczności U tzn. funkcję $U : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, która jest ciągła, rosnąca, ściśle wklęsła i różniczkowalna w sposób ciągły, przy czym

$$\lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0,$$

(n.p. $U(x) = \ln(x)$, $x > 0$).²

¹Numerator jest to proces stochastyczny $\{X_t\}_{t \in [0, T^]}$, który prawie na pewno jest ściśle dodatni dla prawie każdego t .

²Pojawiają się także inne definicje funkcji użyteczności.

Każdy inwestor na tak zdefiniowanym rynku posiada własną strategię inwestycyjną opisującą liczbę jednostek instrumentów podstawowych, które składają się na jego portfel.

2.2 Portfel inwestora, równowaga na rynku energii

DEFINICJA 2.1 [19, 36] *Strategią inwestycyjną (procesem portfelowym) zwany jest $d+1$ -wymiarowy, lewostronnie ciągły proces prognozowalny $\phi_t = (\phi_t^0, \dots, \phi_t^d)$, który spełnia następujące warunki*

$$\int_0^{T^*} E_{\mathbb{P}} |\phi_t^0| dt < \infty, \quad \int_0^{T^*} E_{\mathbb{P}} (\phi_t^k)^2 dt < \infty, \quad k = 1, \dots, d.$$

Procesem wartości strategii ϕ_t nazywamy proces³

$$V_t(\phi) := \phi_t \circ S_t, \quad t \in [0, T^*],$$

gdzie $S_t = (N_t, S_t^1, \dots, S_t^d)$. Procesem zysku strategii ϕ_t nazywamy natomiast proces

$$G_t(\phi) := \int_0^t \phi_u \circ dS_u, \quad t \in [0, T^*].$$

Mówimy, że strategia inwestycyjna ϕ_t jest samofinansująca, jeśli spełnia warunek

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi), \quad \forall t \in [0, T^*],$$

gdzie $V_0(\phi)$ jest równe zaangażowaniu początkowemu agenta.

Rozważmy dalej zdyskontowany proces cen

$$\tilde{S}_t := \frac{S_t}{N_t} = (1, \tilde{S}_t^1, \dots, \tilde{S}_t^d)$$

oraz zdyskontowany proces wartości strategii ϕ_t

$$\tilde{V}_t(\phi) = \frac{V_t(\phi)}{N_t} = \phi_t \circ \tilde{S}_t,$$

DEFINICJA 2.2 [21, 10] *Niech $a \in \mathbb{R}_+$. Strategia inwestycyjna ϕ zwana jest a -dopuszczalną, jeżeli*

$$\mathbb{P}(\tilde{V}_t(\phi) \geq -a, \forall t \in [0, T^*]) = 1.$$

Gdy $a = 0$ strategię tę nazywamy dopuszczalną.

³ $a \circ b$ oznacza iloczyn skalarny wektorów a i b .

Jeżeli rynek umożliwia zysk bez ryzyka, czyli można skonstruować strategię inwestycyjną, która przy danym zaangażowaniu początkowym x w chwili 0 daje nam kapitał $k > x$ w chwili $t > 0$, to na modelowanym rynku istnieje możliwość arbitrażu. Jednak w rzeczywistości sytuacja taka powoduje tylko chwilowe zachwianie równowagi na rynku, natychmiast przywracanej przez siły popytu i podaży. Uzasadnione jest zatem rozważanie i modelowanie rynku, na którym arbitraż nie jest możliwy, a każdy instrument ma jedną sprawiedliwą cenę.

Rynek powinien dążyć do równowagi, która to równowaga umożliwia sprawiedliwą wycenę instrumentów pochodnych. Jeżeli agenci podejmują działania niezależnie od siebie, wówczas każdy agent powinien stosować strategię zapewniającą osiągnięcie równowagi na rynku, która zakłada maksymalizację wielkości wypłaty każdego agenta.

DEFINICJA 2.3 [16] Załóżmy, że na rynku energii elektrycznej, mamy I inwestorów opisanych przez ciąg $\{(x_i, U_i, \phi_{i,t}), i = 1, \dots, I\}$. Mówimy, że na rynku zachodzi równowaga, jeżeli dla danych cen S_t strategia i -tego inwestora, $\phi_{i,t}$, maksymalizuje funkcję $E_{\mathbb{P}}[U_i(\tilde{V}_T(\phi))]$ na zbiorze strategii dopuszczalnych oraz rynek oczyszcza się tzn.

$$\forall_{t \in [0, T]} \forall_{k=1, \dots, m} \sum_{i=1}^I \phi_{i,t}^k = 0, \quad \forall_{k=m+1, \dots, d} \sum_{i=1}^I \phi_{i,t}^k = 1. \quad (2.2)$$

Przy przyjętym założeniu, że wszyscy inwestorzy mają ten sam profil (x, U) naturalne jest, że w sytuacji równowagi przyjmą taką samą strategię ϕ . Wówczas warunek (2.2) przyjmuje postać

$$\forall_{t \in [0, T]} \forall_{i=1, \dots, I} \forall_{k=1, \dots, m} \phi_{i,t}^k = 0, \quad \forall_{k=m+1, \dots, d} \phi_{i,t}^k = 1/I.$$

Taką równowagę nazywamy równowagą symetryczną.

W matematycznym modelu rynku energii elektrycznej przyjmuje się, że cena instrumentu jest sprawiedliwa, jeśli jego zdyskontowana cena jest lokalnym martyngałem. W związku z tym, z punktu widzenia wyceny na rynku istotny jest fakt istnienia oraz jednoznaczności równoważnej miary martyngałowej.

DEFINICJA 2.4 [19] Miara probabilistyczna \mathbb{Q} , zadana na przestrzeni (Ω, \mathcal{F}) nazywana jest równoważną miarą martyngałową, jeśli:

- \mathbb{Q} jest równoważna \mathbb{P} na (Ω, \mathcal{F}) oraz
- zdyskontowany proces cen $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{N_t}$ jest lokalnym \mathbb{Q} -martyngałem.

Zauważmy, że \mathbb{Q} istotnie związana jest z numeratorem N_t . Dla modeli z czasem ciągłym warunkiem równoważnym istnieniu miary martyngałowej \mathbb{Q} równoważnej mierze \mathbb{P} jest warunek NFLVR (*no free lunch with vanishing risk*). Proces cen S_t spełnia warunek NFLVR [19], jeśli dla każdego ciągu $\{\phi_{n,t}\}$ strategii a_n -dopuszczalnych, gdzie $a_n \rightarrow 0$, mamy $V_T(\phi_n) \rightarrow 0$ według prawdopodobieństwa \mathbb{P} . Faktem jest, że dla procesu cen S_t równoważna miara martyngałowa \mathbb{Q} istnieje, gdy proces ten spełnia warunek NFLVR [10].

Mówimy, że rynek spełnia warunek NFL (*no free lunches*), jeśli nie istnieją strategie samofinansujące z zerowym zaangażowaniem początkowym, nieujemnym zyskiem końcowym i dodatnim prawdopodobieństwem dodatniego zysku końcowego. Warunek NFLVR mówi, że na rynku nie istnieją ciągi zysków końcowych takich, których ujemna część dąży do 0, a cały ciąg dąży prawie na pewno do nieujemnej zmiennej losowej, która jest dodatnia z dodatnim prawdopodobieństwem. Własność NFLVR jest równoważna własności, że dla zadanego modelu rynku zbiór wszystkich równoważnych miar martyngałowych, oznaczony symbolem \mathcal{P}^{eq} , nie jest pusty, a więc na rynku nie ma strategii arbitrażowych (wśród strategii dopuszczalnych).

Rozważany rynek energii elektrycznej jest rynkiem niezupełnym, ponieważ energia elektryczna nie jest obiektem, który można zaoszczędzić i nie można użyć jej do konstrukcji strategii zabezpieczającej. Dla rozważanego rynku niezupełnego w zbiorze \mathcal{P}^{eq} może znajdować się wiele miar. W takim przypadku konieczna jest dodatkowa procedura, która prowadzi do wybrania w jednoznaczny sposób pewnej szczególnej równoważnej miary martyngałowej \mathbb{Q} . Istnieją różne metody wyboru takiej miary \mathbb{Q} [19]. W niniejszej pracy posłużymy się jedną z metod opartych na analizie profilu uczestników rynku, mianowicie, metodą maksymalizacji użyteczności dla rynków niezupełnych. Poniżej krótko omówimy wspomnianą metodę, a następnie pokażemy, że rynek z tak wybraną równoważną miarą martyngałową jest zrównoważony.

2.3 Metoda wyboru równoważnej miary martyngałowej

W celu znalezienia jedynej miary \mathbb{Q} postępuwać będziemy zgodnie z teorią maksymalizacji użyteczności dla rynków niezupełnych [9, 21, 29]. Metoda ta bazuje na fakcie, że funkcja użyteczności nałożona na uczestników rynku porządkuje zbiór par złożonych z kapitału początkowego x oraz końcowej wartości analizowanego instrumentu pochodnego, co po sformalizowaniu prowadzi do utożsamienia problemu wyboru równoważnej miary martyngałowej z następującym zagadnieniem optymalizacyjnym Lagrange'a [17, 29]. Mianowicie, oznaczmy przez \mathcal{Z} zbiór strategii dopuszczalnych ϕ^{dop} z zaangażowaniem początkowym $x > 0$

oraz niech

$$\mathcal{Y} = \{Y_t : Y_t = E_{\mathbb{P}} \left(\frac{d\mathbb{Q}^q}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t \right), \text{ gdzie } \mathbb{Q}^q \in \mathcal{P}^{eq}\}.$$

Zauważmy, że \mathcal{Y} jest zbiorem nieujemnych semimartyngałów o wartości początkowej 1, takich że dla każdej strategii dopuszczalnej proces $Y_t \tilde{V}_t(\phi^{dop})$ jest \mathbb{P} -supermartyngeałem. Problem optymalizacyjny, jaki pojawia się przy wyborze równoważnej miary martyngałowej, to maksymalizacja oczekiwanej użyteczności

$$\sup_{\phi^{dop} \in \mathcal{Z}} E_{\mathbb{P}}(U(\tilde{V}_T(\phi^{dop})))$$

przy warunku

$$\forall Y_t \in \mathcal{Y} \quad E_{\mathbb{P}}(Y_T \tilde{V}_T(\phi^{dop})) \leq x,$$

który wynika z tego, że dla strategii dopuszczalnych proces $\tilde{V}_t(\phi^{dop})$ jest nadmartyngeałem dla dowolnej miary ze zbioru \mathcal{P}^{eq} [19]. Zagadnienie to, sprowadza się do znalezienia punktu siodłowego

$$L^{x,y}(V_T(\phi), \mathbb{Q}) = \sup_{\phi^{dop} \in \mathcal{Z}} \inf_{\mathbb{Q}^q \in \mathcal{P}^{eq}} L^{x,y}(\tilde{V}_T(\phi^{dop}), \mathbb{Q}^q),$$

następującej funkcji Lagrange'a

$$L^{x,y}(\tilde{V}_T(\phi^{dop}), \mathbb{Q}^q) = E_{\mathbb{P}} \left[U(\tilde{V}_T(\phi^{dop})) - y Y_T \tilde{V}_T(\phi^{dop}) \right] + yx,$$

gdzie $Y_t = E_{\mathbb{P}} \left(\frac{d\mathbb{Q}^q}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t \right)$ [17, 22, 28, 29].

Problem ten został rozwiązany w artykule [17], gdzie udowodniono następujące twierdzenie

TWIERDZENIE 2.1 [17] *Załóżmy, że zbiór \mathcal{P}^{eq} równoważnych miar martyngałowych jest niepusty (lub, że zachodzi warunek NFLVR) oraz że asymptotyczna elastyczność funkcji użyteczności jest mniejsza niż jeden⁴. Wówczas dla zadanego kapitału początkowego $x > 0$*

- *istnieje jedyne rozwiązanie (ϕ, \mathbb{Q}) rozważanego zagadnienia optymalizacyjnego oraz*
- *każdy ograniczony instrument ma jedyną, sprawiedliwą cenę, spełniającą warunek*

$$X_t = N_t E_{\mathbb{Q}}(\tilde{X}_T | \mathcal{F}_t). \quad (2.3)$$

⁴(np. dla $U(x) = \ln x$) [22, 23, 29]

Tw. 2.1 ma charakter ogólny i może być stosowane do rynków finansowych lub towarowych. W dalszej części pracy jedyną miarą martyngałową \mathbb{Q} , którą wyznaczamy poprzez rozwiązanie wyżej opisanego problemu optymalizacyjnego, stanowić będzie punkt wyjścia do wyceny instrumentów pochodnych na rynku energii elektrycznej.

Z tw. 2.1 wynika następujący wniosek, który pokazuje, że rynek z miarą \mathbb{Q} wybraną jednoznacznie powyższą metodą jest rynkiem zrównoważonym.

WNIOSEK 2.1 *Przy założeniach twierdzenia 2.1 dla procesu cen instrumentów pierwotnych zachodzi*

$$S_t = N_t E_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_T | \mathcal{F}_t), \quad (2.4)$$

gdzie \mathbb{Q} jest równoważną miarą martyngałową wyznaczoną metodą maksymalizacji funkcji użyteczności. Ponadto przy strategii inwestycyjnej ϕ wyznaczonej tą metodą na rynku zachodzi równowaga symetryczna.

DOWÓD: Postać (2.4) jest szczególnym przypadkiem (2.3) dla instrumentów pierwotnych. Z (2.4) wynika, że wektor \tilde{S}_t zdyskontowanych cen jest \mathbb{Q} -martyngałem. Znaczący to, że cena jest sprawiedliwa. Zatem cała strategia inwestycyjna zbudowana jest na instrumentach fizycznych, więc zachodzi warunek (2.2). Z założenia strategia ϕ jest jedyną strategią optymalną, która maksymalizuje wartość $E_{\mathbb{P}}[U(\tilde{V}_T(\phi^{dop}))]$ na zbiorze strategii dopuszczalnych. Wszyscy uczestnicy mają ten sam profil (U, x) , więc wszyscy obiorą tę samą strategię optymalną ϕ , a zatem

$$\forall_{t \in [0, T]} \forall_{k=1, \dots, m} \phi_t^k = 0, \quad \forall_{k=m+1, \dots, d} \phi_t^k = 1/I.$$

□

Powyższy wniosek zgodny jest z faktem, że na rynku energii każdy instrument finansowy odzwierciedla zachowanie instrumentów z fizyczną dostawą. Zatem uzasadnione jest wprowadzenie wewnętrznego rynku energii elektrycznej, na którym jednostką obrotu jest MWh, i modelowanie w zakresie tegoż rynku.

2.4 Struktura terminowa i własności wewnętrznego rynku energii elektrycznej

Modelując wewnętrzny rynek energii elektrycznej zakładamy, że odpowiednikiem zerokuponowej obligacji jest kontrakt forward na dostawę 1MWh z ceną rynkową $p(t, T)$ (w MWh), a odpowiednikiem oszczędzania na rachunku bankowym jest krótkoterminowe inwestowanie w takie kontrakty opisane procesem B_t . Jako proces łączący wewnętrzny rynek energii elektrycznej z rynkiem pieniężnym (np. w

EURO) używany jest kurs $(e^{\int_0^t r(s)ds} N_t)^{-1}$ odpowiadający walutowej cenie zgody producenta energii elektrycznej na rozpoczęcie produkcji ustalonej ilości energii, która będzie dostarczana w przedziale $[t, t + \Delta]$. Funkcja $r(t)$ to deterministyczna stopa procentowa na rynku pieniężnym. W dalszej części pracy dla uproszczenia jako jednostkę pieniężną przyjmiemy EURO.

W kontekście rozważanego modelu rynku energii elektrycznej proces N_t odgrywa rolę ceny instrumentu dyskontującego, a proces $p(t, T)$ jest ceną jednego z instrumentów pierwotnych. Dla miary martyngałowej \mathbb{Q} jednoznacznie wyznaczonej metodą maksymalizacji funkcji użyteczności, przy założeniach tw. 2.1 mamy

$$p(t, T) = N_t E_{\mathbb{Q}} (N_T^{-1} | \mathcal{F}_t). \quad (2.5)$$

oraz rynek znajduje się w równowadze symetrycznej (wniosek 2.1). Pokażemy teraz, że prawdziwy jest następujący wniosek, którego teza zgodna jest z intuicją dotyczącą rynku energii elektrycznej, iż cena walutowa kontraktu forward jest równa oczekiwaniom względem średniej ceny spot za energię elektryczną [13, 35].

WNIOSEK 2.2 *Przy założeniach tw. 2.1, cena $P(t, T)$ na chwilę t , za dostawę ustalonej ilości energii w przedziale czasu $[T, T + \Delta]$, wyrażona w EURO, jest równa zdyskontowanej oczekiwanej cenie zgody na dostawę w tym czasie względem miary \mathbb{Q} , tzn.*

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(s)ds} E_{\mathbb{Q}} ((N_T e^{-\int_0^T r(s)ds})^{-1} | \mathcal{F}_t). \quad (2.6)$$

DOWÓD: Wiemy, że w chwili t 1 MWh kosztuje $(N_t e^{-\int_0^t r(s)ds})^{-1}$ EURO. Przeliczając obie strony równości (2.5) dostajemy

$$P(t, T) = \frac{p(t, T)}{N_t e^{-\int_0^t r(s)ds}} = e^{\int_0^t r(s)ds} E_{\mathbb{Q}} (N_T^{-1} | \mathcal{F}_t),$$

co jest równoważne z zależnością (2.6). □

Zauważmy, że cenę $(e^{-\int_0^t r(s)ds} N_t)^{-1}$ zgody na dostawę rozpoczynającą się natychmiast można także opisać średnią ceną spotową dostawy w zadanym przedziale, zatem wn. 2.2 formalnie opisuje ogólnie znane zależności obserwowane na rynku energii elektrycznej [13, 35].

Założmy ponownie, że w opisanym modelu rynku spełnione są założenia tw. 2.1 zapewniające istnienie i jednoznaczność równoważnej miary martyngałowej \mathbb{Q} wyznaczonej metodą maksymalizacji funkcji użyteczności. Rozważać

dalej będziemy strukturę terminową wewnętrznego rynku energii elektrycznej. Strukturę tę opiszemy klasycznie [14, 19, 25] za pomocą $f(t, T)$, dynamiki chwilowej stopy forward, która determinuje postać podstawowych procesów na rynku

$$p(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s)ds\right), \quad (2.7)$$

$$B_t = \exp\left(\int_0^t f(s, s)ds\right). \quad (2.8)$$

Na zrównoważonym rynku energii, zgodnie z teorią oczekiwań, nie powinien być możliwy arbitraż pomiędzy długoterminowym inwestowaniem w kontrakty forward $p(t, T)$ a inwestowaniem krótkoterminowym B_t . Możemy zatem przyjąć proces B_t jako nowy numerator. Związana jest z tym zamiana miary, która pozwala zachować własność martyngałową procesów zdyskontowanych nowym numeratorem i prawdziwy jest wniosek wynikający ze znanych twierdzeń (tw. 2.42, tw. 2.43, [19]) dotyczących zamiany miary.

WNIOSEK 2.3 *Dla równoważnej miary $\hat{\mathbb{Q}}$ na (Ω, \mathcal{F}_T) o gęstości*

$$\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = \frac{N_0 B_T}{N_T B_0} \quad \mathbb{Q} - p.w. \quad (2.9)$$

prawdziwe są następujące własności

$$\forall T \quad \hat{p}(t, T) = \frac{p(t, T)}{B_t} \quad \text{jest } \hat{\mathbb{Q}}\text{-martyngalem} \quad (2.10)$$

oraz

$$\hat{N}_t = \frac{N_t}{B_t} \quad \text{jest } \hat{\mathbb{Q}}\text{-martyngalem}. \quad (2.11)$$

Korzystając z powyższego wniosku oraz nakładając założenia odnośnie postaci procesów $f(t, T)$ oraz N_t , w następnych rozdziałach będziemy dokonywać wyceny instrumentów pochodnych w badanym modelu.

3 Wycena instrumentów pochodnych na rynku energii elektrycznej w oparciu o model dyfuzji

Na rynku energii oprócz instrumentów podstawowych, które służą do zapewniania klientom fizycznej dostawy/odbioru energii elektrycznej istnieją także instrumenty pochodne, które umożliwiają spekulacje na rynku lub zabezpieczenie pozycji gracza związanego z przemysłem energetycznym. Istotne zatem jest zagadnienie wyceny instrumentów pochodnych na rynku energii.

Ogólna formuła wyceny podaje wartość X dowolnego instrumentu pochodnego w postaci

$$X_t = N_t E_{\mathbb{Q}}(X_T N_T^{-1} | \mathcal{F}_t) = B_t E_{\hat{\mathbb{Q}}}(X_T B_T^{-1} | \mathcal{F}_t), \quad (3.1)$$

gdzie \mathbb{Q} wyznaczona jest metodą maksymalizacji funkcji użyteczności, a $\hat{\mathbb{Q}}$ to równoważna mierze \mathbb{Q} miara martyngałowa związana z numeratorem B_t o gęstości zadanej wzorem (2.9). W dalszym etapie pracy w oparciu o tę formułę będziemy wyceniać opcję na kontrakt forward, jeden z najczęściej spotykanych instrumentów pochodnych na rynku energii.

3.1 Formuła wyceny dla opcji na kontrakt forward

Rozważmy europejską opcję kupna z ceną wykonania K EURO i terminem wykonania T na kontrakt forward z terminem wykonania T_1 . Zakładamy oczywiście, że $0 < T < T_1 < T^*$. Zasadniczą trudność w wycenie tego instrumentu pochodnego stanowi to, że cena wykonania opcji jest dana w EURO. Jest to waluta obca na wewnętrznym rynku energii elektrycznej. Dlatego też dokonujemy zamiany jednostek poprzez, wprowadzony w poprzednim rozdziale, proces przeliczający $e^{-\int_0^t r(s)ds} N_t$, który umożliwia przejście z EURO do MWh w dowolnej chwili czasu $t < T$. Wówczas cena w EURO rozważanej opcji kupna przy mierze martyngałowej $\hat{\mathbb{Q}}$ wynosi

$$C_t = \frac{B_t E_{\hat{\mathbb{Q}}}\left(\left[p(T, T_1) - K e^{-\int_0^T r(s)ds} N_T\right]^+ B_T^{-1} | \mathcal{F}_t\right)}{e^{-\int_0^t r(s)ds} N_t}.$$

Po zamianie miary na \mathbb{Q} ze wzoru Bayesa otrzymujemy postać wygodniejszą dla dalszych rozważań

$$C_t = e^{\int_0^t r(s)ds} E_{\mathbb{Q}}\left(\left[\tilde{p}(T, T_1) - e^{-\int_0^T r(s)ds} K\right]^+ | \mathcal{F}_t\right), \quad (3.2)$$

gdzie

$$\tilde{p}(T, T_1) = \frac{\hat{p}(T, T_1)}{\hat{N}_T} = \frac{p(T, T_1)}{N_T} \quad (3.3)$$

to zdyskontowany pierwotnym numeratorem N_t proces $p(t, T)$. Podobnie otrzymujemy cenę opcji sprzedaży

$$P_t = e^{\int_0^t r(s)ds} E_{\mathbb{Q}} \left(\left[e^{-\int_0^T r(s)ds} K - \tilde{p}(T, T_1) \right]^+ \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Natomiast paritet kupna sprzedaży wynosi

$$C_t - P_t = \frac{B_t E_{\hat{\mathbb{Q}}} \left(\left[\hat{p}(T, T_1) - K e^{-\int_0^T r(s)ds} \hat{N}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right)}{\left(e^{-\int_0^t r(s)ds} N_t \right)}$$

co na mocy wniosku 2.3 prowadzi do

$$C_t - P_t = P(t, T_1) - e^{-\int_t^T r(s)ds} K.$$

W oparciu o powyższe wzory w kolejnych dwóch rozdziałach dokonywać będziemy wyceny dla opcji kupna na kontrakt forward przy dodatkowych założeniach o postaci procesów $f(t, T)$ i N_t . W tym rozdziale zadamy dyfuzyjną postać tych procesów na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{\mathbb{Q}})$, z miarą martyngałową $\hat{\mathbb{Q}}$ związaną z numeratorem B_t , a następnie wyznaczmy dyfuzyjną reprezentację procesu $\tilde{p}(T, U)$ po zamianie miary na miarę \mathbb{Q} związaną z numeratorem pierwotnym N_t co pozwoli nam w kolejnym kroku dokonać wyceny rozważanego instrumentu finansowego.

3.2 Dyfuzyjna postać procesów opisujących rynek energii elektrycznej

W ramach wprowadzonego w rozdziale 2 modelu rynku energii elektrycznej dodatkowo założmy teraz, że filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]}$ generowana jest przez d -wymiarowy procesem Wienera $(W_t)_{t \in [0, T^*]}$ w przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{\mathbb{Q}})$ oraz że w przestrzeni tej stopa forward $f(t, T)$ ma postać

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) \circ dW_s, \quad T \in [0, T^*], \quad t \in [0, T], \quad (3.4)$$

gdzie

- $f(0, \cdot) : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ustalonym mierzalnym odwzorowaniem,

- współczynniki $\alpha : C \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\sigma : C \rightarrow \mathbb{R}^d$, gdzie $C = \{(s, t) : 0 \leq s \leq t \leq T^*\}$ są deterministyczne oraz dla dowolnego T

$$\int_0^T |\alpha(t, T)| dt < \infty, \quad \int_0^T \|\sigma(t, T)\|^2 dt < \infty.$$

Tak opisana dynamika stopy forward mieści się w ramach klasycznego modelu Heatha-Jarrowa-Mortona [14]. Zatem przy takich założeniach proces rynkowej ceny kontraktu forward można opisać następującym stochastycznym równaniem różniczkowym [19]

$$dp(t, T) = p(t, T) \left(\left(f(t, T) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2} \|\sigma^*(t, T)\|^2 \right) dt - \sigma^*(t, T) \circ dW_t \right),$$

gdzie

$$\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, s) ds, \quad \sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, s) ds. \quad (3.5)$$

Natomiast zdyskontowany przez numerator B_t proces tej ceny można opisać równaniem

$$d\hat{p}(t, T) = \hat{p}(t, T) \left(\left(\frac{1}{2} \|\sigma^*(t, T)\|^2 - \alpha^*(t, T) \right) dt - \sigma^*(t, T) \circ dW_t \right).$$

Ponieważ zgodnie z ogólnymi założeniami modelu proces $\hat{p}(t, T)$ jest dla każdego ustalonego T $\hat{\mathbb{Q}}$ -martyngałem, wnioskujemy z twierdzenia o reprezentacji martyngałowej, że pomiędzy współczynnikami α^* oraz σ^* zachodzić musi taka zależność, aby

$$\forall_{(t, T) \in C} \quad \frac{1}{2} \|\sigma^*(t, T)\|^2 - \alpha^*(t, T) = 0 \quad (3.6)$$

W konsekwencji stochastyczne równania różniczkowe opisujące dynamikę procesów $p(t, T)$ oraz $\hat{p}(t, T)$ redukują się do

$$\begin{aligned} dp(t, T) &= p(t, T) (f(t, T) dt - \sigma^*(t, T) \circ dW_t), \\ d\hat{p}(t, T) &= -\hat{p}(t, T) \sigma^*(t, T) \circ dW_t, \end{aligned} \quad (3.7)$$

a dla stopy forward $f(t, T)$ prawdziwa jest zależność

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \circ \sigma^*(t, T) dt + \sigma(t, T) \circ dW_t.$$

W badanym modelu oprócz wewnętrznej struktury terminowej rozważamy także proces N_t umożliwiający zamianę jednostki z MWh na walutę pieniężną. Założmy teraz także dyfuzyjną postać tego procesu. Wiemy, iż zdyskontowany

przez numerator B_t proces N_t (oznaczony jako \hat{N}_t) jest $\hat{\mathbb{Q}}$ -martyngałem i z twierdzenia o reprezentacji martyngałowej spełnia stochastyczne równanie różniczkowe, którego rozwiązaniem jest eksponenta stochastyczna, mianowicie

$$d\hat{N}_t = \hat{N}_t v(t) \circ dW_t, \quad (3.8)$$

gdzie deterministyczna funkcja $v : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^d$ opisuje zmienność modelowanego procesu \hat{N}_t . Przy wycenie opcji kupna na kontrakt forward wykorzystamy reprezentację procesu $\tilde{p}(t, T)$ zdefiniowanego wzorem (3.3) przy równoważnej mierze martyngałowej \mathbb{Q} odpowiadającej numeratorowi N_t postaci (3.8).

LEMAT 3.1 *Przy założeniach modelu rozważanego w niniejszym rozdziale oraz założeniu*

$$\int_0^T \|v(s)\|^2 ds < \infty \quad (3.9)$$

proces $\tilde{p}(t, T)$ spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$d\tilde{p}(t, T) = -\tilde{p}(t, T)a(t, T) \circ d\tilde{W}_t$$

lub równoważnie

$$\tilde{p}(t, T) = \tilde{p}(0, T) \exp \left(- \int_0^t a(s, T) \circ d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|a(s, T)\|^2 ds \right), \quad (3.10)$$

gdzie $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t v(s)ds$ jest standardowym d -wymiarowym ruchem Browna zadany na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ oraz

$$a(t, T) = \sigma^*(t, T) + v(t). \quad (3.11)$$

DOWÓD: Gęstość miary \mathbb{Q} na (Ω, \mathcal{F}_T) odpowiadającej numeratorowi N_t ma postać

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\hat{\mathbb{Q}}}|_{\mathcal{F}_T} = \frac{B_0 N_T}{B_T N_0} = \frac{\hat{N}_T}{\hat{N}_0} \hat{\mathbb{Q}} - p.w.$$

i jest dobrze zdefiniowana dzięki warunkowi (3.9) będącemu odpowiednikiem warunku Nowikowa dla rozważanego modelu. Wiedząc, że proces \hat{N}_t spełnia stochastyczne równanie różniczkowe (3.8), którego rozwiązaniem jest eksponenta stochastyczna, otrzymujemy

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\hat{\mathbb{Q}}} = \exp \left(\int_0^T v(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|v(s)\|^2 ds \right) \hat{\mathbb{Q}} - p.w.$$

Korzystając z lematu Itô oraz postaci dynamik (3.7), (3.8) otrzymujemy, że

$$d\tilde{p}(t, T) = \tilde{p}(t, T)b(t, T)dt - \tilde{p}(t, T)a(t, T) \circ dW_t, \quad (3.12)$$

gdzie

$$b(t, T) = \|v(t)\|^2 + v(t) \circ \sigma^*(t, T),$$

a $a(t, T)$ jest postaci (3.11), co jest równoważne (3.10) na podstawie twierdzenia Girsanowa.

□

Znając dynamikę procesu $\tilde{p}(t, T)$ w następnym kroku dokonamy wyceny europejskiej opcji kupna na kontrakt forward.

3.3 Wycena europejskiej opcji na kontrakt forward

W poprzednim rozdziale podane zostały reprezentacje podstawowych procesów opisujących rynek energii elektrycznej na przestrzeni z miarą martyngałową $\hat{\mathbb{Q}}$ i \mathbb{Q} . Korzystając z tego udowodnimy twierdzenie, które formułuje postać ceny opcji kupna na kontrakt forward. Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem głównego twierdzenia z pracy [16] na przypadek zależnej od czasu deterministycznej stopy procentowej $r(t)$, a jego dowód będzie przeprowadzony inną techniką wzorowaną na dowodach zawartych w [25].

TWIERDZENIE 3.1 *Przy założeniach lematu 3.1 oraz dodatkowym założeniu*

$$\int_0^T \|a(s, T_1)\| ds < \infty,$$

gdzie $a(t, T)$ jest postaci (3.11), cena w EURO europejskiej opcji kupna z terminem wygaśnięcia $T \in [t, T^*]$ i ceną wykonania $K > 0$, opiewającej na kontrakt forward z terminem wykonania $T_1 \in [T, T^*]$ zadana jest w chwili t wzorem

$$C_t = P(t, T_1)\Phi(\delta_+(t)) - e^{-\int_t^T r(s)ds} K\Phi(\delta_-(t)), \quad (3.13)$$

gdzie $P(t, T_1)$ jest ceną w tej samej walucie instrumentu bazowego, Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego oraz

$$\delta_{\pm}(t) = \frac{\ln(P(t, T_1)/K) + \int_t^T r(s)ds \pm \frac{1}{2}\Sigma^2(t)}{\Sigma(t)}$$

dla

$$\Sigma(t) = \sqrt{\int_t^T \|a(s, T_1)\|^2 ds}.$$

DOWÓD: Cena C_t ma postać (3.2), gdzie na podstawie lematu 3.1

$$\tilde{p}(T, T_1) = \tilde{p}(t, T_1) \exp\left(-\int_t^T a(s, T_1) \circ d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^T \|a(s, T_1)\|^2 ds\right).$$

Dla $t = 0$ mamy

$$C_0 = E_{\mathbb{Q}} \left(\left[\tilde{p}(T, T_1) - e^{-\int_0^T r(s) ds} K \right]^+ \right) = I_1 - I_2,$$

gdzie $I_1 = E_{\mathbb{Q}}(\tilde{p}(T, T_1) 1_D)$ oraz $I_2 = E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^T r(s) ds} K 1_D\right)$ natomiast zbiór $D = \{\tilde{p}(T, T_1) > e^{-\int_0^T r(s) ds} K\}$. Wartość oczekiwana I_2 równa jest

$$\begin{aligned} I_2 &= e^{-\int_0^T r(s) ds} K \mathbb{Q}\{D\} = \\ &= e^{-\int_0^T r(s) ds} K \mathbb{Q}\left\{ \tilde{p}(0, T_1) \exp\left(-\int_0^T a(s, T_1) \circ d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|a(s, T_1)\|^2 ds\right) > e^{-\int_0^T r(s) ds} K \right\} = \\ &= e^{-\int_0^T r(s) ds} K \mathbb{Q}\left\{ \xi < \frac{\ln(\tilde{p}(0, T_1)/K) + \int_0^T r(s) ds - \frac{1}{2} \Sigma^2(0)}{\Sigma(0)} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie zmienna losowa

$$\xi = \frac{\int_0^T a(s, T_1) \circ d\tilde{W}_s}{\sqrt{\int_0^T \|a(s, T_1)\|^2 ds}}$$

względem miary \mathbb{Q} ma standardowy rozkład normalny. Zatem wiedząc, że $P(0, T_1) = \tilde{p}(0, T_1)$, otrzymujemy

$$I_2 = e^{-\int_0^T r(s) ds} K \Phi(\delta_-(0)),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Aby policzyć I_1 wprowadźmy nową miarę $\bar{\mathbb{Q}}$ o gęstości

$$\frac{d\bar{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp\left(-\int_0^T a(s, T_1) \circ d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|a(s, T_1)\|^2 ds\right) = \frac{\tilde{p}(T, T_1)}{\tilde{p}(0, T_1)} \quad \mathbb{Q}\text{-p.w..}$$

Na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathbb{Q}})$

$$\tilde{p}(T, T_1) = \tilde{p}(0, T_1) \exp\left(-\int_0^T a(s, T_1) \circ d\bar{W}_s + \frac{1}{2} \int_0^T \|a(s, T_1)\|^2 ds\right).$$

oraz proces $\bar{W}_t = \tilde{W}_t + \int_0^t a(s, T_1) ds$ jest standardowym ruchem Browna. Wtedy

$$I_1 = E_{\mathbb{Q}}(\tilde{p}(T, T_1)1_D) = \tilde{p}(0, T_1)\bar{\mathbb{Q}}\{D\}$$

i podobnie jak dla I_2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_1 &= P(0, T_1)\bar{\mathbb{Q}}\left\{\bar{\xi} < \frac{\ln(P(0, T_1)/K) + \int_0^T r(s)ds + \Sigma^2(0)}{\Sigma(0)}\right\} = \\ &= P(0, T_1)\Phi(\delta_+(0)), \end{aligned}$$

gdź zmienna losowa

$$\bar{\xi} = \frac{\int_0^T a(s, T_1) \circ d\bar{W}_s}{\sqrt{\int_0^T \|a(s, T_1)\|^2 ds}}$$

względem miary $\bar{\mathbb{Q}}$ ma standardowy rozkład normalny.

Pokazaliśmy zatem, że C_0 spełnia tezę twierdzenia. Postać (3.13) ceny C_t z dowolnym terminem t wynika z własności Markowa procesu $\tilde{p}(T, T_1)$.

□

3.4 Przykłady

W niniejszym rozdziale pokażemy jak wygląda postać (3.13) ceny opcji kupna na kontrakt forward z tw. 3.1 w dwóch najpopularniejszych modelach stóp procentowych, wybranych spośród wielu spotykanych w literaturze (model jednofaktorowy, Vasicka, CIR, Longstaffa, Hulla i White'a) [19, 25, 36].

3.4.1 Model jednofaktorowy

Pierwszy z rozważanych przykładów to model jednofaktorowy, w którym rozważamy przestrzeń z filtracją generowaną przez dwuwymiarowy ruch Browna $W_t = \{W_t^1, W_t^2\}$ i zakładamy, że wszystkie funkcje zmienności przyjmują stałą wartość, mianowicie:

$$\sigma(t, T) \equiv [\sigma, 0], \quad v(t) \equiv [v\rho, v\sqrt{1-\rho^2}], \quad \text{gdzie } \rho \in [-1, 1].$$

Przy takich założeniach

$$a(t, T) = v(t) + \sigma^*(t, T) = [v\rho + (T-t)\sigma, v\sqrt{1-\rho^2}].$$

i otrzymujemy

WNIOSEK 3.1 Przy założeniach modelu jednofaktorowego postać ceny opcji rozważanej w twierdzeniu 3.1 zadana jest wzorem (3.13), gdzie

$$\Sigma^2(t) = \frac{1}{3}\sigma^2 ((U-t)^3 - (U-T)^3) + v\rho\sigma ((U-t)^2 - (U-T)^2) + v^2(T-t).$$

3.4.2 Model Vasicka

Drugi z przykładów to powszechnie znany model Vasicka stopy krótkoterminowej. W modelu tym krótkoterminowa stopa na przestrzeni z filtracją generowaną przez dwuwymiarowy ruch Browna $W_t = \{W_t^1, W_t^2\}$ opisana jest równaniem

$$df(t, t) = (a - bf(t, t))dt + \vec{c} \circ dW_t,$$

gdzie $\vec{c} = [c, 0]$ oraz a, b, c są ściśle dodatnimi stałymi. Zakładamy także, że zmienność v ma postać

$$v(t) \equiv [v\rho, v\sqrt{1-\rho^2}].$$

Przy powyższych założeniach cena rynkowa kontraktu forward spełnia następujące równanie

$$dp(t, T) = p(t, T)(f(t, t)dt - n(t, T)\vec{c} \circ dW_t),$$

gdzie $n(t, T) = \frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)})$, a co za tym idzie

$$a(t, T) = v(t) + \sigma^*(t, T) = v(t) + n(t, T)\vec{c} = [v\rho + cn(t, T), v\sqrt{1-\rho^2}].$$

Stąd otrzymujemy

WNIOSEK 3.2 Przy założeniach modelu Vasicka dla wewnętrznej struktury terminowej rynku energii, postać ceny opcji rozważanej w twierdzeniu 3.1 zadana jest wzorem (3.13), gdzie

$$\Sigma^2(t) = \left[\frac{2cv\rho}{b} - \frac{c^2}{b^2} \right] (n(t, T) - (T-t)) - \frac{c^2}{2b} n^2(t, T) + v^2(T-t).$$

Powyższe przykłady bazują na dwóch najbardziej popularnych modelach stopy procentowej. Poczynione w nich założenia dotyczące postaci funkcji zmienności narzucają wprawdzie pewne ograniczenia, lecz także chronią model przed zbytnim dopasowaniem do danych historycznych podczas kalibracji. Przedstawiony model jednofaktorowy jest największym możliwym uproszczeniem analizowanego wcześniej modelu dyfuzyjnego i pokazuje w jaki sposób stałe

parametry v oraz σ mają wpływ na końcową funkcję zmienności Σ zależną od czasu. Przykład ten daje dobry wgląd w strukturę modelu dyfuzyjnego, lecz często nie odzwierciedla dobrze rzeczywistości. Dlatego też w przykładzie drugim przedstawiono model Vasicka, który z jednej strony jest modelem prostym, a z drugiej uwzględnia panujące na rynku zależności podstawowych procesów od czasu do terminu wykupu.

4 Wycena instrumentów pochodnych na rynku energii elektrycznej w oparciu o model dyfuzji ze skokami

Ceny spot energii elektrycznej charakteryzują się dużą zmiennością oraz licznymi pikami spowodowanymi np. usterkami technicznymi czy czynnikami pogodowymi. W literaturze [4, 11, 13, 39] bardzo często do modelowania cen spotowych energii elektrycznej używa się modeli dyfuzji ze skokami. Z badań autorki zawartych między innymi w artykule [4] wynika że modele takie dobrze odzwierciedlają rzeczywistość. Wprawdzie ceny kontraktów forward na energię elektryczną zachowują się inaczej niż ceny spotowe, jednakże nie możemy zapominać o tym, że dotyczą one tego samego towaru i w pewien sposób muszą być ze sobą powiązane. W tej sytuacji, naturalne wydaje się rozszerzenie modelu dyfuzji rozważanego w rozdziale 3 do modelu uwzględniającego skokową naturę cen. W niniejszym rozdziale zaproponujemy zatem dwa modele, w których komponenta losowa procesu opisującego stopę forward $f(t, T)$ opisana będzie przez pewien proces ze skokami, a nie jak poprzednio przez ciągły proces Wienera.

W ramach ogólnego modelu opisanego w rozdz. 2, niech teraz dodatkowo proces opisujący stopę forward $f(t, T)$ na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{\mathbb{Q}})$ z filtracją naturalną generowaną przez ten proces (gdzie $\hat{\mathbb{Q}}$ jest miarą związaną z numeratorem B_t) będzie zadany następującym stochastycznym równaniem różniczkowym, które jest modyfikacją równania (3.4)

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T) \circ dW_t + \gamma(t, T)dJ_t^K, \quad (4.1)$$

gdzie dla $C = \{(s, t) : 0 \leq s \leq t \leq T^*\}$ współczynniki $\alpha : C \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : C \rightarrow \mathbb{R}^d$ oraz $\gamma : C \rightarrow \mathbb{R}$ są deterministyczne, W_t jest standardowym d-wymiarowym procesem Wienera oraz J_t^K jest skompensowaną postacią pewnego niezależnego od W_t procesu skokowego J_t . Poprzez $d\mu_J = \mu_J(\omega; ds, dx)$ oznaczaj dalej będziemy miarę opisującą strukturę skokową procesu J_t [6, 18], taką że

$$J_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x d\mu_J$$

oraz poprzez $d\nu_J = \nu_J(\omega; ds, dx)$ miarę kompensującą dla μ_J , czyli taką prognozowaną miarę, że $\mu_J - \nu_J$ jest miarą martyngałową. Wówczas proces J_t^K ma następującą reprezentację

$$J_t^K = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x d(\mu_J - \nu_J)$$

i jest $\hat{\mathbb{Q}}$ -martyngałem.

Podobnie jak w modelu dyfuzyjnym przedstawionym w rozdz. 3, współczynniki stochastycznego równania różniczkowego opisującego stopę forward są w pewnej ustalonej relacji analogicznej do (3.6) wynikającej z własności martyngałowej pewnych procesów na rynku.

W literaturze [7, 8, 13, 30] istnieje wiele modeli służących do wyceny na rynkach finansowych czy towarowych, uwzględniających skokową naturę zjawisk rynkowych. Zwykle pojawiająca się komponenta skokowa zadana jest poprzez pewien proces Lévy'ego. W dalszej części tego rozdziału, jako przykład takiego podejścia, przedstawimy model, w którym proces J_t jest złożonym procesem Poissona. Następnie, aby wyjść poza rozważania oparte na teorii procesów Lévy'ego, zaproponujemy model, w którym komponenta skokowa zadana jest poprzez proces pewnego skorelowanego błędzenia losowego z czasem ciągłym. Pomysł ten jest nowatorski, a wycena przy założeniu takiego modelu wymaga użycia skomplikowanych technik z dziedziny semimartynałów. W poniższych podrozdziałach opiszemy procedurę wyceny opcji na kontrakt forward dla tych dwóch przypadków procesu J_t . Dla rozważanych przykładów początkowe kroki przeprowadzonego rozumowania będą identyczne, gdyż wynikać będą z ogólnej teorii semimartynałów. W kolejnych krokach będzie można zauważyć coraz większe rozbieżności, związane z różnicami w postaci reprezentacji kanonicznej badanych procesów. Takie ujęcie tematu pozwoli uwypuklić różnice w przedstawionych modelach i wskazać przyczyny tych różnic.

4.1 Przypadek stopy forward ze skokami zadanymi przez złożony proces Poissona

Założmy teraz, że dynamika stopy forward $f(t, T)$ opisana jest równaniem (4.1), gdzie proces J_t na $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{\mathbb{Q}})$ jest złożonym procesem Poissona tzn. że

$$J_t = \sum_{i=1}^{L_R(t)} U_i, \quad t \geq 0 \quad (4.2)$$

gdzie $L_R(t)$ jest procesem Poissona związanym z ciągiem niezależnych zmiennych losowych $(R_n)_{n \geq 1}$ o jednakowym rozkładzie wykładniczym o średniej $\frac{1}{\lambda}$:

$$L_R(t) = \max\{n : \sum_{i=1}^n R_i \leq t\}$$

oraz ciąg $(U_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie w , niezależnym od ciągu $(R_n)_{n \geq 1}$. Ponadto, niech $E_{\hat{\mathbb{Q}}}(U_1) = m < \infty$ oraz niech $\hat{\varphi}_U(c) = E_{\hat{\mathbb{Q}}}(e^{cU_1})$ oznacza transformatę skoku (gdzie c jest z pewnego podzbioru liczb zespolonych).

Dla takiego procesu J_t miara kompensująca ma następującą postać [18, 6, 31]

$$d\nu_J = \nu_J(\omega; ds, dx) = \lambda dw(x)ds, \quad (4.3)$$

co powoduje, że kompensator procesu J_t jest ciągły i deterministyczny.

Mając zdefiniowane wszystkie składowe dynamiki stopy forward $f(t, T)$ przystąpić możemy do wyceny opcji na kontrakt forward, której pierwszym krokiem jest wyznaczenie dynamiki procesu $\hat{p}(t, T)$ rynkowej ceny kontraktu forward zdyskontowanej numeratorem B_t . Dynamika ta opisana jest w poniższym lemacie

LEMAT 4.1 *Oznaczmy*

$$\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, s)ds, \quad \sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, s)ds, \quad \gamma^*(t, T) = \int_t^T \gamma(t, s)ds.$$

Przy założeniach

$$\int_0^T |\alpha(s, T)|ds < \infty, \quad \int_0^T \|\sigma(s, T)\|^2 ds < \infty, \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-\frac{\gamma(s, T)x}{2}}) d\nu_J < \infty \quad (4.4)$$

dla zadanej postaci (4.1) dynamiki stopy forward, gdzie proces J_t zadany jest poprzez (4.2), proces $\hat{p}(t, T)$ można przedstawić jako

$$\hat{p}(t, T) = \hat{p}(0, T)\mathcal{E}(Z(t, T)), \quad (4.5)$$

gdzie $\mathcal{E}(\cdot)$ oznacza eksponentę stochastyczną oraz

$$Z(t, T) = - \int_0^t \sigma^*(s, T) \circ dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [e^{-\gamma^*(s, T)x} - 1] d(\mu_J - \nu_J). \quad (4.6)$$

DOWÓD: Wiemy, że zachodzi zależność (2.7) łącząca procesy $p(t, T)$ oraz $f(t, T)$. Wówczas dla $I(t, T) = \ln(p(t, T))$ mamy

$$\begin{aligned} I(t, T) = & - \int_t^T f(0, s)ds - \int_t^T \int_0^t \alpha(v, s)dvds \\ & - \int_t^T \int_0^t \sigma(v, s) \circ dW_v ds - \int_t^T \int_0^t \gamma(v, s)dJ_v^K ds. \end{aligned}$$

Korzystając z tw. Fubinięgo dla semimartyngałów [26] podobnie jak w dowodzie lematu 5.3 [19], otrzymujemy

$$I(t, T) = I(0, T) + \int_0^t f(s, s)ds - \int_0^t \alpha^*(s, T)ds -$$

$$- \int_0^t \sigma^*(s, T) \circ dW_s - \int_0^t \gamma^*(s, T) dJ_s^K.$$

Z tego, że $p(t, T) = \exp(I(t, T))$ oraz $\hat{p}(t, T) = \frac{p(t, T)}{B_t}$, gdzie B_t zadane jest poprzez (2.8), dostajemy wykładniczą postać procesu $\hat{p}(t, T)$

$$\hat{p}(t, T) = \hat{p}(0, T)e^{X(t, T)},$$

przy czym

$$X(t, T) = - \int_0^t \alpha^*(s, T) ds - \int_0^t \sigma^*(s, T) \circ dW_s - \int_0^t \gamma^*(s, T) dJ_s^K,$$

co równoważne jest postaci (4.5), gdzie

$$\begin{aligned} Z(t, T) = & \int_0^t [-\alpha^*(s, T) + \frac{1}{2} \|\sigma^*(s, T)\|^2] ds - \\ & - \int_0^t \sigma^*(s, T) \circ dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [e^{-\gamma^*(s, T)x} - 1] d(\mu_J - \nu_J). \end{aligned}$$

Zgodnie z ogólnymi założeniami modelu rozważanego w rozprawie proces $\hat{p}(t, T)$ jest martyngałem przy mierze $\hat{\mathbb{Q}}$ (wniosek 2.3). Równoważnie proces $Z(t, T)$ jest $\hat{\mathbb{Q}}$ -martyngałem [6]. Ponieważ przy założeniach lematu ostatnia całka zgodnie tw. 8.10, rozdz. II, [18] $\hat{\mathbb{Q}}$ -martyngałem, zatem pomiędzy funkcjami zmienności zadającymi postać stopy forward (4.1) zachodzić musi związek (3.6) podobnie jak w modelu dyfuzyjnym rozważanym w rozdz. 3. Proces $Z(t, T)$ ma zatem postać (4.6).

□

W kolejnym kroku, w rozważanym modelu założymy, że $\hat{\mathbb{Q}}$ -martyngał \hat{N}_t , podobnie jak proces $\hat{p}(t, T)$, ma postać

$$\hat{N}_t = \hat{N}_0 \mathcal{E}(H_t), \quad (4.7)$$

gdzie proces H_t zadany jest analogicznie do $Z(t, T)$ jako

$$H_t = \int_0^t v(s) \circ dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [e^{\beta(s)x} - 1] d(\mu_J - \nu_J)$$

dla pewnych deterministycznych funkcji zmienności $v : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^d$ oraz $\beta : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$.

Mając zadane postaci procesów $\hat{p}(t, T)$ oraz \hat{N}_t , jak w przypadku modelu dyfuzyjnego wyznaczmy postać procesu $\tilde{p}(t, T) = \frac{\hat{p}(t, T)}{\hat{N}_t}$ przy mierze \mathbb{Q} odpowiadającej mierzniemu N_t . Wprowadźmy pomocnicze oznaczenia

$$a(t, T) = \sigma^*(t, T) + v(t) \quad \text{oraz} \quad b(t, T) = \beta(t) + \gamma^*(t, T). \quad (4.8)$$

LEMAT 4.2 *W ramach modelu rozważanego w bieżącym rozdziale, przy założeniach lematu 4.1 niech*

$$\int_0^T \|v(s)\|^2 ds + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{\frac{\beta(s)x}{2}}) d\nu_J < \infty. \quad (4.9)$$

Wówczas proces $\tilde{p}(t, T)$ spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$\tilde{p}(t, T) = \tilde{p}(0, T)\mathcal{E}(D(t, T)) \quad (4.10)$$

z procesem $D(t, T)$ postaci

$$D(t, T) = - \int_0^t a(s, T) \circ dW'_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{-b(s, T)x} - 1) d(\mu_J - \nu'_J),$$

gdzie współczynniki zadane są formułą (4.8) oraz

$$W'_t = W_t - \int_0^t v(s) ds \quad (4.11)$$

jest standardowym d -wymiarowym ruchem Browna niezależnym od J_t na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, natomiast

$$d\nu'_J = e^{\beta(s)x} d\nu_J \quad (4.12)$$

jest nową miarą kompensującą na tej samej przestrzeni.

DOWÓD: Wiedząc, że procesy $\hat{p}(t, T)$ oraz \hat{N}_t mają odpowiednio postaci (4.5), (4.7), oraz stosując dwuwymiarową formułę Itô i pamiętając, że kompensator ν_J jest ciągły, otrzymujemy (4.10), gdzie

$$\begin{aligned} D(t, T) &= \int_0^t (\|v(s)\|^2 + v(s) \circ \sigma^*(s, T)) ds - \int_0^t (\sigma^*(s, T) + v(s)) \circ dW_s + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\beta(s)x} - e^{-\gamma^*(s, T)x}) d\nu_J + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{-(\beta(s) + \gamma^*(s, T))x} - 1) d\mu_J, \end{aligned}$$

co równoważne jest postaci z lematu z W'_t oraz ν'_J zadanymi poprzez (4.11) oraz (4.12). Ponieważ przy założeniach o postaci procesu \hat{N}_t i założeniach lematu gęstość miary \mathbb{Q} względem miary $\hat{\mathbb{Q}}$ ma dobrze zdefiniowaną postać

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\hat{\mathbb{Q}}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\hat{N}_t}{\hat{N}_0} = \mathcal{E} \left(\int_0^t v(s) \circ dW_s \right) \mathcal{E} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\beta(s)x} - 1) d(\mu_J - \nu_J) \right) \quad (4.13)$$

oraz spełniony jest warunek (4.9), więc na podstawie tw. 1, tw. 3, rozdz. 3g, VII [31] oraz twierdzenia Girsanowa otrzymujemy że W'_t jest istotnie d -wymiarowym ruchem Browna na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ oraz ν'_J jest nową miarą kompensującą na tej samej przestrzeni. Niezależność procesów W'_t oraz J_t przy mierze \mathbb{Q} wynika z faktu, że dla dowolnych ograniczonych mierzalnych funkcji h_1 oraz h_2 , korzystając z własności martyngałowej gęstości, dostajemy że

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}(h_1(W'_t)h_2(J_t)) &= E_{\hat{\mathbb{Q}}} \left\{ h_1 \left(W_t - \int_0^t v(s) ds \right) \mathcal{E} \left(\int_0^t v(s) \circ dW_s \right) \right\} \times \\ &\quad \times E_{\hat{\mathbb{Q}}} \left\{ h_2(J_t) \mathcal{E} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\beta(s)x} - 1) d(\mu_J - \nu_J) \right) \right\} = E_{\mathbb{Q}}(h_1(W'_t)) E_{\mathbb{Q}}(h_2(J_t)). \end{aligned}$$

□

Znając postać procesu $\tilde{p}(t, T)$ możemy dokonać wyceny opcji na kontrakt forward przy założeniach poczynionych w tym rozdziale. Procedura wyceny prowadzi do następującego twierdzenia opisującego postać ceny opcji przy założeniu deterministycznej stopy procentowej $r(t)$

TWIERDZENIE 4.1 *Załóżmy, że spełnione są założenia lematu 4.2 oraz niech*

$$\int_0^T a^2(s, T_1) ds + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{\frac{-b(s, T_1)x}{2}}) d\nu_J < \infty, \quad (4.14)$$

gdzie $a(t, T)$ oraz $b(t, T)$ zadane formułą (4.8). Wówczas cena w EURO, w dowolnej chwili t , europejskiej opcji kupna z terminem wygaśnięcia $T \in [t, T^*]$ i ceną wykonania $K > 0$, opiewającej na kontrakt forward z terminem wykonania $T_1 \in [T, T^*]$ zadana jest wzorem

$$C_t = P(t, T_1)\theta_{1,t}(\delta_+(t)) - e^{-\int_t^T r(s)ds} K\theta_{2,t}(\delta_-(t)), \quad (4.15)$$

gdzie $P(t, T_1)$ jest ceną instrumentu bazowego w tej samej walucie, $\theta_{1,t}$, $\theta_{2,t}$ to sploty

$$\theta_{1,t} = \Phi \star F_{1,t}, \quad \theta_{2,t} = \Phi \star F_{2,t}$$

dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego $\Phi(x)$ oraz odpowiednio dystrybuant

$$F_{1,t}(x) = \bar{\mathbb{Q}} \left\{ \frac{\Psi(t)}{\Sigma(t)} < x \right\}, \quad F_{2,t}(x) = \mathbb{Q} \left\{ \frac{\Psi(t)}{\Sigma(t)} < x \right\},$$

przy czym

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \int_t^T b(s, T_1) dJ_s, \quad \Sigma(t) = \sqrt{\int_t^T \|a(s, T_1)\|^2 ds}, \\ \frac{d\bar{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= \frac{\tilde{p}(T, T_1)}{\tilde{p}(0, T_1)} \quad \mathbb{Q} - p.w., \end{aligned} \quad (4.16)$$

oraz

$$\delta_{\pm}(t) = \frac{\ln \left(\frac{P(t, T_1)}{K} \right) + \int_t^T r(s) ds \pm \Sigma^2(t) - \lambda \int_t^T [\hat{\varphi}_U(-\gamma^*(s, T_1)) - \hat{\varphi}_U(\beta(s))] ds}{\Sigma(t)}.$$

DOWÓD: W dowodzie tw. 3.1 pokazaliśmy, że $C_0 = I_1 - I_2$, przy czym $I_1 = E_{\mathbb{Q}}(\tilde{p}(T, T_1) 1_D)$ oraz $I_2 = E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^T r(s) ds} K 1_D\right)$ dla zbioru $D = \{\tilde{p}(T, T_1) > e^{-\int_0^T r(s) ds} K\}$. Ponadto z lematu 4.2 wiemy, że proces $\tilde{p}(T, T_1)$ ma reprezentację (4.10), gdzie dzięki postaci (4.3) kompensatora procesu J_t oraz własności (4.12) mamy

$$\int_t^T \int_{\mathbb{R}} (e^{-b(s, T)x} - 1) d\nu'_J = \lambda \int_t^T [\hat{\varphi}_U(-\gamma^*(s, T_1)) - \hat{\varphi}_U(\beta(s))] ds.$$

Zatem w rozważanym przypadku

$$I_2 = e^{-\int_0^T r(s) ds} K \mathbb{Q} \{\xi_2 < \delta_-(0)\},$$

gdzie

$$\xi_2 = \frac{\int_0^T a(s, T_1) \circ dW'_s + \int_0^T b(s, T_1) dJ_s}{\sqrt{\int_0^T \|a(s, T_1)\|^2 ds}},$$

a W'_t zadane jest w lem. 4.2. Dzięki niezależności W'_t oraz J_t na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ zmienną losową ξ_2 można w tej przestrzeni przedstawić w postaci

$$\xi_2 \stackrel{d}{=} X + Y,$$

gdzie zmienne losowe X, Y są niezależne, X ma standardowy rozkład normalny, a Y ma rozkład zadany dystrybuantą $F_{2,t}$ co prowadzi do równości $I_2 = e^{-\int_0^T r(s) ds} K \theta_{2,0}(\delta_-(0))$.

Skoro spełniony jest warunek (4.14), aby policzyć I_1 możemy wprowadzić nową miarę $\bar{\mathbb{Q}}$ zadaną przez (4.16). Wówczas

$$\begin{aligned} \tilde{p}(T, T_1) &= \tilde{p}(0, T_1) \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|a(s, T_1)\|^2 ds - \int_0^T a(s, T_1) \circ d\bar{W}_s - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T b(s, T_1) dJ_s - \lambda \int_0^T [\hat{\varphi}_U(-\gamma^*(s, T_1)) - \hat{\varphi}_U(\beta(s))] ds \right), \end{aligned}$$

gdzie $\bar{W}_t = W'_t + \int_0^t a(s, T_1)$ jest standardowym ruchem Browna względem miary $\bar{\mathbb{Q}}$ także niezależnym od J_t . W konsekwencji otrzymujemy

$$I_1 = \tilde{p}(0, T_1) \bar{\mathbb{Q}} \{ \xi_1 < \delta_+(0) \},$$

gdzie

$$\xi_1 = \frac{\int_0^T a(s, T_1) \circ d\bar{W}_s + \int_0^T b(s, T_1) dJ_s}{\sqrt{\int_0^T \|a(s, T_1)\|^2 ds}}.$$

Zmienną tę analogicznie do zmiennej ξ_2 można przedstawić poprzez sumę niezależnych składników o rozkładzie normalnym i o rozkładzie zadanym przez dystrybuantę $F_{1,t}$ co prowadzi do wzoru $I_1 = P(0, T_1) \theta_{1,0}(\delta_+(0))$. Zatem C_0 spełnia tęzę twierdzenia. Postać ceny C_t w dowolnej chwili t otrzymujemy korzystając z własności Markowa dla procesu $\tilde{p}(T, T_1)$.

□

Dla zilustrowania otrzymanej formuły wyceny opcji na kontrakt forward przedstawimy teraz przykład, który poprzez zawężenie założeń powyższego twierdzenia przybliży nam postać dystrybuant $F_{1,t}$ oraz $F_{2,t}$.

PRZYKŁAD 4.1 *Przy założeniach tw. 4.1 przyjmijmy dodatkowo, że funkcje zmienności wynoszą $\beta(t) \equiv \beta$ oraz $\gamma(t, s) = \frac{\gamma}{T_1 - t}$. Wówczas postać ceny opcji rozważanej w tw. 4.1 zadaną jest wzorem (4.15), gdzie dystrybuanty $F_{1,t}(z)$ oraz $F_{2,t}(z)$ mogą być przedstawione następująco*

$$F_{1,t}(z) = \bar{\mathbb{Q}} \{ q_t J_{T-t} < z \}, \quad F_{2,t}(z) = \mathbb{Q} \{ q_t J_{T-t} < z \},$$

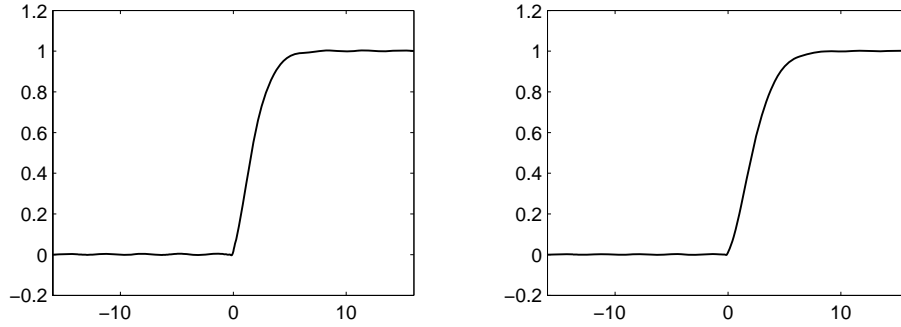
przy czym $q_t = \frac{\gamma + \beta}{\Sigma(t)}$ oraz rozkład zmiennej J_{T-t} względem miar $\bar{\mathbb{Q}}$ oraz \mathbb{Q} jest zadany poprzez odpowiednie transformaty

$$E_{\bar{\mathbb{Q}}} e^{cJ_{T-t}} = \exp [\lambda T (\hat{\varphi}_U(c - \gamma) - \hat{\varphi}_U(-\gamma))] \exp [\lambda t (\hat{\varphi}_U(-c) - 1)],$$

$$E_{\mathbb{Q}} e^{cJ_{T-t}} = \exp [\lambda T (\hat{\varphi}_U(c + \beta) - \hat{\varphi}_U(\beta))] \exp [\lambda t (\hat{\varphi}_U(-c) - 1)],$$

gdzie c jest z pewnego podzbioru liczb zespolonych.

Jeżeli założymy, że parametr c jest liczbą urojoną, wówczas powyższe transformaty są funkcjami charakterystycznymi. Zatem przy założeniu, że takie funkcje są całkowalne, gęstość rozkładu możemy otrzymać stosując odwrotne przekształcenie Fouriera dla odpowiedniej funkcji charakterystycznej. Obliczenia takie można wykonać numerycznie. Na rys. 1 zaprezentowano przykładowy wykres dystrybuant F_1 oraz F_2 otrzymanych numerycznie przy założeniu, że skoki mają ten sam rozkład wykładniczy co czasy oczekiwania oraz $t = 0, T = 1, q_0 = 2, \gamma = 0.1$ oraz $\beta = 0.4$.



Rysunek 1: Dystrybuanta F_1 (lewy panel) oraz F_2 (prawy panel) dla wykładniczego rozkładu skoków.

4.2 Przypadek stopy forward ze skokami zadanymi procesem typu skorelowanego błędzenia losowego z czasem ciągłym

Przejdźmy teraz do drugiego rozważanego przypadku, gdzie proces J_t opisany jest procesem typu skorelowanego błędzenia losowego z czasem ciągłym bez własności niezależnych przyrostów [20, 24, 38]. Załóżmy mianowicie, że dynamika stopy forward $f(t, T)$ opisana jest równaniem (4.1), gdzie proces J_t na $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{\mathbb{Q}})$ ma postać

$$J_t = \sum_{i=1}^{L_R(t)} R_i, \quad t \geq 0 \quad (4.17)$$

gdzie

$$L_R(t) = \min\left\{n : \sum_{i=0}^n R_i > t\right\}$$

dla $R_0 = a$, gdzie a jest pewną dodatnią stałą oraz ciągu $(R_n)_{n \geq 0}$ dodatnich niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i o skończonej średniej.

Ponadto, niech $\hat{\varphi}_R(c) = E_{\hat{\mathbb{Q}}}(e^{cR_1})$ oznacza transformatę skoku (gdzie c jest z pewnego podzbioru liczb zespolonych).

W tak zdefiniowanym procesie J_t , w przeciwieństwie do rozważanego wcześniej złożonego procesu Poissona, wielkość skoku i czas między skokami nie są niezależne (poza zdegenerowanym przypadkiem $R_n = \text{const.}$ z prawd. 1). W ogólnym przypadku także przyrosty procesu J_t nie są niezależne.

W porównaniu ze złożonym procesem Poissona przyjęliśmy nieco zmienioną konstrukcję procesu liczącego $L_R(t)$ jako procesu pierwszego przejścia tak, że $L_R(t)$ jest momentem zatrzymania względem filtracji naturalnej $\mathcal{F}_n = \sigma(R_1, \dots, R_n)$ i zgodnie z def. 3.5 rozdz. II [18] może służyć do tworzenia procesów z czasem ciągłym poprzez zamianę czasu. Przedstawiony w tym rozdziale proces J_t , czy też jego transformacje takie jak $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s, x) d\mu_J$ dla pewnej funkcji mierzalnej h , są przykładami tak utworzonych procesów z czasem ciągłym. Korzystając z tw. 3.11, rozdz. II [18] możemy wyznaczyć postać kompensatora takich procesów, co jest niezbędne do wyznaczenia ceny opcji.

Dla rozważanego w tym rozdziale przypadku procesu J_t kompensator procesu $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s, x) d\mu_J$ przy mierze $\hat{\mathbb{Q}}$ ma postać

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s, x) d\nu_J = \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{\Delta L_R(s)=1\}} E_{\hat{\mathbb{Q}}} h(s, R_1).$$

Zatem jest to kompensator o prostej strukturze skokowej, a ponadto

$$\nu_J(\omega; \{s\} \times \mathbb{R}) \in \{0, 1\}$$

co powoduje, że zamiana miary, którą będziemy stosować, przebiegać będzie podobnie jak w przypadku, gdy kompensator jest ciągły patrz tw. 5.10, tw. 5.19, rozdz. III [18] oraz wniosek zawarty w artykule [6].

Dodatkowo należy wspomnieć, że po równoważnej zamianie miary proces $L_R(t)$ nadal będzie momentem zatrzymania i procedura poszukiwania kompensatora będzie wyglądać identycznie.

Posiadając powyższe informacje na temat zdefiniowanego wzorem (4.17) procesu J_t możemy rozpocząć procedurę wyceny opcji na kontrakt forward. W pierwszym kroku wyznaczymy postać procesu $\hat{p}(t, T)$. W wyniku rozumowania analogicznego do tego przeprowadzonego w dowodzie lematu 4.1 otrzymujemy

LEMAT 4.3 *Dla zadanej postaci (4.1) dynamiki stopy forward gdzie proces J_t zadany jest poprzez (4.17), przy założeniach (4.4), tezy lematu 4.1 są prawdziwe.*

W rozważanym tu modelu przyjmijmy teraz dodatkowo, że dynamika procesu \hat{N}_t ma reprezentację identyczną jak w poprzednim rozdziale, wyrażoną poprzez formułę (4.7). Znając formuły opisujące procesy $\hat{p}(t, T)$ oraz \hat{N}_t możemy wyprowadzić postać procesu $\tilde{p}(t, T)$ przy mierze \mathbb{Q} . Postać ta opisana jest w poniższym

lemacie i jest taka sama jak ta uzyskana w poprzednim rozdziale. Jest ona jednak wynikiem odmiennego rozumowania, które zostanie przedstawione w dowodzie lematu.

LEMAT 4.4 *W ramach modelu rozważanego w niniejszym rozdziale, przy założeniach (4.4) oraz (4.9), tezy lematu 4.2 są prawdziwe.*

DOWÓD: Stosując dwuwymiarową formułę Itô otrzymujemy wzór (4.10), przy czym

$$\begin{aligned} D(t, T) &= \int_0^t (\|v(s)\|^2 + v(s) \circ \sigma^*(s, T)) ds - \int_0^t (\sigma^*(s, T) + v(s)) \circ dW_s + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{-(\beta(s) + \gamma^*(s, T))x} - 1) d\mu_J - \sum_{0 < s \leq t} \left[\frac{1 + \Delta K^Z(s, T)}{1 + \Delta K^H(s, T)} - 1 \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta K^H(s, T) &= \int_{\mathbb{R}} [e^{\beta(s)x} - 1] \nu_J(\omega; \{s\} \times dx), \\ \Delta K^Z(s, T) &= \int_{\mathbb{R}} [e^{-\gamma^*(s, T)x} - 1] \nu_J(\omega; \{s\} \times dx). \end{aligned}$$

Ponieważ przy założeniach o postaci procesu \hat{N}_t gęstość miary \mathbb{Q} względem miary $\hat{\mathbb{Q}}$ ma postać (4.13) oraz dla założonej postaci procesu J_t mamy $\nu(\omega; \{s\} \times \mathbb{R}) \in \{0, 1\}$. to na podstawie tw. Girsanowa oraz tw. 5.10, tw. 5.19, rozdz. III [18] i wniosku zawartego w artykule [6] otrzymujemy (4.11) oraz (4.12). Po zastosowaniu własności (4.12) dostajemy

$$\begin{aligned} \sum_{0 < s \leq t} \left[\frac{1 + \Delta K^Z(s, T)}{1 + \Delta K^H(s, T)} - 1 \right] &= \sum_{0 < s \leq t} \left[\frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma^*(s, T)x} \nu_J(\omega; \{s\} \times dx)}{\int_{\mathbb{R}} e^{\beta(s)x} \nu_J(\omega; \{s\} \times dx)} - 1 \right] = \\ &= \sum_{0 < s \leq t} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-(\beta(s) + \gamma^*(s, T))x} \nu'_J(\omega; \{s\} \times dx) - 1 \right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{-b(s, T)x} - 1) d\nu'_J, \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc zawartą w lemacie postać procesu $\tilde{p}(t, T)$. Niezależność procesów W'_t oraz J_t przy mierze \mathbb{Q} jest konsekwencją rozumowania analogicznego jak w lemacie 4.2.

□

Powyższy lemat pozwala nam w dalszych krokach wyprowadzić postać ceny opcji na kontrakt forward. Cena ta będzie miała inną strukturę niż ta z tw. 4.1 głównie dlatego, że w rozważanym w tym rozdziale przypadku kompensator jest skokowy, a nie jak poprzednio ciągły. Dodatkowo cena opcji zostanie wyznaczona tylko dla punktu czasu $t = 0$, gdyż proces $\tilde{p}(t, T)$ przy złożeniach z tego rozdziału nie musi mieć własności Markowa.

TWIERDZENIE 4.2 *Załóżmy, że spełnione są założenia lematu 4.4 oraz tw. 4.1 oraz niech funkcje $a(t, T)$ oraz $b(t, T)$ będą zadane formułą (4.8), wówczas dla modelu rozważanego w bieżącym rozdziale cena w EURO, europejskiej opcji kupna z terminem wygaśnięcia $T \in [0, T^*]$ i ceną wykonania $K > 0$, opiewającej na kontrakt forward z terminem wykonania $T_1 \in [T, T^*]$ w chwili $t = 0$ zadana jest wzorem*

$$C_0 = P(0, T_1)\theta_1(\delta_+) - e^{-\int_0^T r(s)ds} K\theta_2(\delta_-) \quad (4.18)$$

gdzie $P(0, T_1)$ jest ceną instrumentu bazowego w tej samej walucie, θ_1, θ_2 to sploty

$$\theta_1 = \Phi \star F_1, \quad \theta_2 = \Phi \star F_2,$$

dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego $\Phi(x)$ oraz odpowiednio dystrybuant

$$F_1(x) = \bar{\mathbb{Q}} \left\{ \frac{\Psi}{\Sigma} < x \right\}, \quad F_2(x) = \mathbb{Q} \left\{ \frac{\Psi}{\Sigma} < x \right\},$$

przy czym

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_0^T b(s, T_1)dJ_s + \sum_{0 < s \leq T} 1_{\{\Delta L_R(s)=1\}} \ln \frac{\hat{\varphi}_R(-\gamma^*(s, T_1))}{\hat{\varphi}_R(\beta(s))}, \\ \Sigma &= \sqrt{\int_0^T \|a(s, T_1)\|^2 ds}, \\ \frac{d\bar{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= \frac{\tilde{p}(T, T_1)}{\tilde{p}(0, T_1)} \quad \mathbb{Q} - p.w., \end{aligned} \quad (4.19)$$

dla $\tilde{p}(T, T_1)$ opisanego w lemacie 4.4, natomiast argumenty dystrybuant są zadane następującą formułą

$$\delta_{\pm} = \frac{\ln(P(0, T_1)/K) + \int_0^T r(s)ds \pm \frac{1}{2}\Sigma^2}{\Sigma}.$$

DOWÓD: Ze względu na to, że tezy lematów 4.2 oraz 4.4 są takie same, dowód jest analogiczny do dowodu tw. 4.1 z tą różnicą, że w rozważanym w tym przypadku mamy

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (e^{-b(s,T)x} - 1) d\nu'_J = \sum_{0 < s \leq T} 1_{\{\Delta L_R(s)=1\}} \ln \frac{\hat{\varphi}_R(-\gamma^*(s, T_1))}{\hat{\varphi}_R(\beta(s))},$$

co powoduje, że kompensator ten jest losowy i nie może znaleźć się w postaci parametrów δ_{\pm} .

□

Poniżej przedstawimy przykład, który pokazuje jak wygląda postać ceny opcji w przypadku gdy dokonamy pewnych dodatkowych założeń odnośnie współczynników rozważanego modelu.

PRZYKŁAD 4.2 *Przy założeniach tw. 4.2 oraz dodatkowym założeniu, że funkcje zmienności wynoszą $\beta(t) \equiv \beta$ i $\gamma(t, s) = \frac{\gamma}{T_1 - t}$, postać ceny opcji rozważanej w tw. 4.2 zadana jest wzorem (4.18), gdzie rozkład zmiennej Ψ względem miar \mathbb{Q} oraz $\bar{\mathbb{Q}}$ zadany jest odpowiednimi transformatami*

$$E_{\mathbb{Q}} e^{c\Psi} = E_{\bar{\mathbb{Q}}} \exp \left\{ [c(\gamma + \beta) + \beta] J_T + L_R(T) \left[c \ln \left(\frac{\hat{\varphi}_R(-\gamma)}{\hat{\varphi}_R(\beta)} \right) - \ln (\hat{\varphi}_R(\beta)) \right] \right\},$$

$$E_{\bar{\mathbb{Q}}} e^{c\Psi} = E_{\mathbb{Q}} \exp \left\{ [c(\gamma + \beta) - \gamma] J_T + L_R(T) \left[c \ln \left(\frac{\hat{\varphi}_R(-\gamma)}{\hat{\varphi}_R(\beta)} \right) - \ln (\hat{\varphi}_R(-\gamma)) \right] \right\},$$

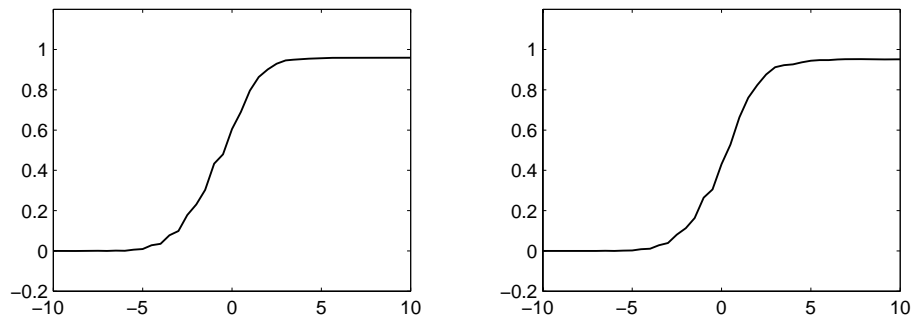
gdzie c jest z pewnego podzbioru liczb zespolonych.

UZASADNIENIE: Wystarczy zauważyć, że przy poczynionych dodatkowych założeniach zmienna Ψ ma postać

$$\Psi = (\gamma + \beta) J_T + L_R(T) \ln \left(\frac{\hat{\varphi}_R(-\gamma)}{\hat{\varphi}_R(\beta)} \right).$$

□

W powyższym przykładzie otrzymujemy jawną postać funkcji charakterystycznych rozkładów występujących w tw. 4.2. Dla danego rozkładu skoków trudno uzyskać analityczny rozkład zmiennej J_T . Można wyznaczyć go numerycznie stosując metodologię Monte Carlo. Poniżej zaprezentowano przykładowy wykres dystrybuant F_1 oraz F_2 przy założeniu, że skoki mają rozkład wykładniczy oraz $a = 0.1$, $t = 0$, $T = 1$, $q_0 = 2$, $\gamma = 0.1$ oraz $\beta = 0.4$. Wykresy te uzyskano



Rysunek 2: Dystrybuanta F_1 (lewy panel) oraz F_2 (prawy panel) dla wykładniczego rozkładu skoków.

numerycznie w środowisku MATLAB. Na rysunkach 1 oraz 2 wyraźnie widać różnice w postaci dystrybuant dla dwóch badanych modeli.

Zamieszczone w powyższych rozdziałach dwa rodzaje modeli ze skokami pokazują jak cena opcji kształtuje się przy zmianie struktury skokowej procesów opisujących instrument bazowy. W przypadku złożonego procesu Poissona kompensator części skokowej jest ciągły i nie ma wpływu na postać dystrybuant F_1 oraz F_2 . W przypadku, gdy proces J_t jest opisany semimartynałem o zależnych przyrostach, kompensator jest skokowy, co powoduje, że postać wspomnianych dystrybuant istotnie komplikuje się. Ponadto, aby uzyskać końcową postać ceny opcji trzeba było w tym przypadku wykorzystać zaawansowaną teorię z dziedziny semimartynałów. Jednak rozważanie takiej właśnie postaci komponenty skokowej prowadzi do uzyskania ciekawych i nowatorskich modeli, co jest bardzo istotne z naukowego punktu widzenia [5].

5 Kalibracja i symulacje

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną techniki kalibracji zaprezentowanych modeli oraz symulacje pokazujące jak modele te odzwierciedlają rzeczywiste zachowania rynku oraz gdzie tkwi główna różnica powodująca rozbieżność wyników końcowych. Do kalibracji modeli użyto dwóch zbiorów danych. Pierwszy z nich to dane pochodzące z giełdy energii EEX w Lipsku [34] opisujące dzienne notowania 34 kontraktów forward z miesięcznym okresem dostawy i czasem trwania 6 miesięcy. Są to dane z przedziału od stycznia 2003 do sierpnia 2005. Dane te posłużą nam do kalibracji wielofaktorowego modelu dyfuzyjnego przy użyciu metodologii zaprezentowanej w rozdziale 5.1. Wadą tego zbioru jest brak danych dotyczących cen opcji na te kontrakty, co uniemożliwia weryfikację otrzymanych wyników. Drugi zbiór danych pochodzi z giełdy energii Nordpool [33] i są to dane opisujące dzienne notowania 5 kontraktów forward z rocznym okresem dostawy i trzyletnim czasem trwania z przedziału czasu od stycznia 2003 do grudnia 2006 oraz dane opisujące ceny opcji na te kontrakty z różnymi cenami wykonania z przedziału od stycznia 2004 do grudnia 2006. Historyczne dane dotyczące cen opcji umożliwią nam porównanie wyników otrzymanych w drodze symulacji z rzeczywistymi notowaniami giełdowymi. Wszystkie zamieszczone poniżej obliczenia wykonano w środowisku MATLAB.

5.1 Historyczna kalibracja modelu dyfuzyjnego

Jak powszechnie wiadomo, dobór modelu teoretycznego, tak aby dobrze opisywał on zależności zachodzące na badanym rynku, to pierwszy etap modelowania. Drugim etapem, niezbędnym z punktu widzenia praktycznych zastosowań i łączącym teoretyczne rozważania z rzeczywistością, jest kalibracja modelu. W rozdziale 3 opisaliśmy teoretyczny model rynku energii przy założeniu dyfuzyjnej postaci podstawowych procesów. Kalibracja dla tego modelu w najprostszym jednofaktorowym przypadku została zaprezentowana w pracy [16]. Poniżej podamy dwa algorytmy dotyczące kalibracji wielofaktorowego modelu dyfuzyjnego zawierające wyniki pochodzące z pracy [32] (alg. 5.1) oraz własnego autorstwa (alg. 5.2). Algorytmy te podają postaci estymatorów funkcji zmienności $\alpha(t, T)$, $\sigma(t, T)$ opisujących dynamikę stopy forward (alg. 5.1) oraz funkcji zmienności $v(t)$ opisującej proces przeliczonego rachunku bankowego (alg. 5.2), przy dodatkowych założeniach, że $\alpha(t, T) = \alpha(T-t)$, $\sigma(t, T) = \sigma(T-t)$ (tzn. funkcje te zależą istotnie od czasu pozostałego do terminu wykupu). Zakładamy dodatkowo, że stopa procentowa $r(t) \equiv r$ jest stała.

W przedstawionej poniżej metodologii kalibracji bazujemy na fakcie, iż posiadamy historyczne dane $P(t_{i,j}, T_j)$ opisujące ceny w EURO kontraktów forward o różnych terminach wykonania $(T_1 + (j-1)\Delta T, j = 1, \dots, \mathcal{J})$ w punktach

$(t_{i,j} = T_j - i\Delta T, i = 0, \dots, n)$, gdzie $T_1 > 0, \Delta T > 0$.

ALGORYTM 5.1 [32] Niech dla $j = 1, \dots, \mathcal{J} - n$

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} \hat{f}(t_{1,j+1}, T_{j+1}) - \hat{f}(t_{1,j}, T_j) \\ \hat{f}(t_{2,j+2}, T_{j+2}) - \hat{f}(t_{2,j+1}, T_{j+1}) \\ \vdots \\ \hat{f}(t_{n,j+n}, T_{j+n}) - \hat{f}(t_{n,j+n-1}, T_{j+n-1}) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\hat{f}(t_{i,j}, T_j) := -\frac{1}{\Delta T} \ln \left(\frac{p(t_{i,j}, T_{j+1})}{p(t_{i,j}, T_j)} \right) = -\frac{1}{\Delta T} \ln \left(\frac{P(t_{i,j}, T_{j+1})}{P(t_{i,j}, T_j)} \right).$$

Estymatory d -wymiarowej ($d \leq n$) funkcji zmienności $\sigma(T-t) = [\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \dots, \vec{\sigma}_d]$ oraz $\alpha(T-t) = \vec{\alpha}$ mają postać

$$\hat{\vec{\alpha}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}(1\Delta T) \\ \hat{\alpha}(2\Delta T) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}(n\Delta T) \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{J} - n} \sum_{i=1}^{\mathcal{J}-n} \frac{\mathbf{X}_i}{\Delta T},$$

$$\hat{\vec{\sigma}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_k(1\Delta T) \\ \hat{\sigma}_k(2\Delta T) \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_k(n\Delta T) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\lambda_k} \vec{u}_k}{\Delta T}, \quad k = 1, \dots, d,$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ są istotnymi wartościami własnym w stosunku do sumy wszystkich wartości własnych, a $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_d$ są odpowiednimi wektorami własnymi macierzy kowariancji z próby $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\mathcal{J}-n}$.

ALGORYTM 5.2 Niech dla $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{\mathcal{J}} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$y_j = a_j + \ln \left(\frac{P(t_{1,j}, T_j)}{P(t_{0,j}, T_j)} \right) + r\Delta T,$$

r jest stałą stopą procentową oraz a_j to estymator funkcji

$$\ln \frac{\hat{p}(t_{0,j}, T_j)}{\hat{p}(t_{1,j}, T_j)} = -\frac{1}{2} \int_{t_{1,j}}^{t_{0,j}} \|\sigma^*(s, T_j)\|^2 ds - \int_{t_{1,j}}^{t_{0,j}} \sigma^*(s, T_j) \circ dW_s. \quad (5.1)$$

Estymator d -wymiarowej ($d \leq \mathcal{J}$) funkcji zmienności $v(t) = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_d]$ ma postać

$$\vec{v}_k = \begin{bmatrix} \hat{v}_k(1\Delta T) \\ \hat{v}_k(2\Delta T) \\ \vdots \\ \hat{v}_k(J\Delta T) \end{bmatrix} = \frac{\vec{w}_k \cdot \sqrt{c_k}}{\sqrt{\Delta T}},$$

gdzie wartości c_1, c_2, \dots, c_d są istotnymi wartościami własnymi, a $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_d$ są odpowiednimi wektorami własnymi macierzy kowariancji wektorów $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$.

UZASADNIENIE: Z postaci (3.8) oraz (2.1) mamy

$$\ln \left(\frac{\hat{N}(t_{0,j})}{\hat{N}(t_{1,j})} \right) = \ln \left(\frac{\hat{p}(t_{0,j}, T_j)}{\hat{p}(t_{1,j}, T_j)} \right) + \ln \left(\frac{P(t_{1,j}, T_j)}{P(t_{0,j}, T_j)} \right) + r\Delta T.$$

Dodatkowo równanie (3.7) ma następujące rozwiązanie

$$\hat{p}(t, T) = \hat{p}(0, T) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma^*(s, T)\|^2 ds - \int_0^t \sigma^*(s, T) \circ dW_s \right),$$

a co za tym idzie

$$\ln \frac{\hat{p}(t_{0,j}, T_j)}{\hat{p}(t_{1,j}, T_j)} = -\frac{1}{2} \int_{t_{1,j}}^{t_{0,j}} \|\sigma^*(s, T_j)\|^2 ds - \int_{t_{1,j}}^{t_{0,j}} \sigma^*(s, T_j) \circ dW_s.$$

Powyższe wyrażenie estymować możemy używając estymatorów funkcji $\sigma(T-t)$ przedstawionych w alg. 5.1. Można to zrobić na dwa sposoby:

- dopasowując do zdyskretyzowanych wartości funkcji $\sigma(T-t)$ analityczną postać funkcji, a następnie całkując także w sposób analityczny
- albo używając schematu Eulera do aproksymacji całki na podstawie zdyskretyzowanych wartości funkcji $\sigma(T-t)$.

Oznaczamy dalej wyestymowaną postać wyrażenia (5.1) jako a_j oraz

$$y_j = a_j + \ln \left(\frac{P(t_{1,j}, T_j)}{P(t_{0,j}, T_j)} \right) + r\Delta T.$$

Wiedząc, że

$$\ln \left(\frac{\hat{N}(t_{0,j})}{\hat{N}(t_{1,j})} \right) = -\frac{1}{2} \int_{t_{1,j}}^{t_{0,j}} \|v(s)\|^2 ds + \int_{t_{1,j}}^{t_{0,j}} v(s) \circ dW_s$$

można powiedzieć, że każdy wektor \mathbf{Y}_i jest próbą z rozkładu normalnego o macierzy kowariancji $\mathbb{K}\Delta T$ takiej, że

$$\mathbb{K} = \mathbb{A}\mathbb{A}',$$

gdzie $\mathbb{A} = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{\mathcal{J}}]$ i dla dowolnego $k = 1, \dots, \mathcal{J}$

$$\vec{v}_k = \begin{bmatrix} v_k(1\Delta T) \\ v_k(2\Delta T) \\ \vdots \\ v_k(\mathcal{J}\Delta T) \end{bmatrix}$$

Macierz kowariancji $\hat{\mathbb{K}}$ z próby $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ jest symetryczna i jej elementy należą do zbioru liczb rzeczywistych. Dla każdej macierzy symetrycznej o elementach rzeczywistych możliwa jest następująca dekompozycja spektralna

$$\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{W}' = \mathbb{W}\sqrt{\mathbb{C}}\sqrt{\mathbb{C}}\mathbb{W}' = \mathbb{W}\sqrt{\mathbb{C}}(\sqrt{\mathbb{C}}\mathbb{W})',$$

gdzie $\mathbb{W} = [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{\mathcal{J}}]$ jest rzeczywistą macierzą ortonormalną, której kolumny są wektorami własnymi macierzy $\hat{\mathbb{K}}$, a macierz \mathbb{C} jest rzeczywistą macierzą diagonalną z wartościami własnymi odpowiadającymi wektorom własnym na przekątnej

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{\mathcal{J}} \end{bmatrix}, \quad \sqrt{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \sqrt{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{c_{\mathcal{J}}} \end{bmatrix}.$$

Macierz kowariancji jest dodatnio określona, zatem wszystkie jej wartości własne są dodatnie i powyższe macierze są dobrze określone. Korzystając z metody PCA (*Principal Component Analysis*) wiemy, że funkcje zmienności można przedstawić przy pomocy równości $\mathbb{A} = \mathbb{W}\sqrt{\mathbb{C}}$ oraz

$$\vec{v}_k = \sqrt{c_k}\vec{w}_k.$$

Wymiar d dobieramy analizując liczbę wartości istotnych. Za istotne można uznać wartości \vec{v}_k , dla których wartość własna jest znacząca w stosunku do sumy wszystkich wartości własnych.

□

5.2 Kalibracja wielofaktorowa a jednofaktorowa dla modelu dyfuzyjnego

Poniżej przedstawione są wyniki kalibracji wielofaktorowej wraz z porównaniem z wynikami kalibracji jednofaktorowej otrzymanymi w pracy [16] dla tego samego zbioru danych. Na potrzeby kalibracji modelu wielofaktorowego zakładamy, że ΔT wynosi 1 miesiąc. Wszystkie funkcje zmienności są estymowane dla danych historycznych, więc jeżeli chcemy znać przyszłe wartości zmienności $v(t)$ musimy przeanalizować kształt historycznej krzywej i dopasować do niej np. funkcję deterministyczną.

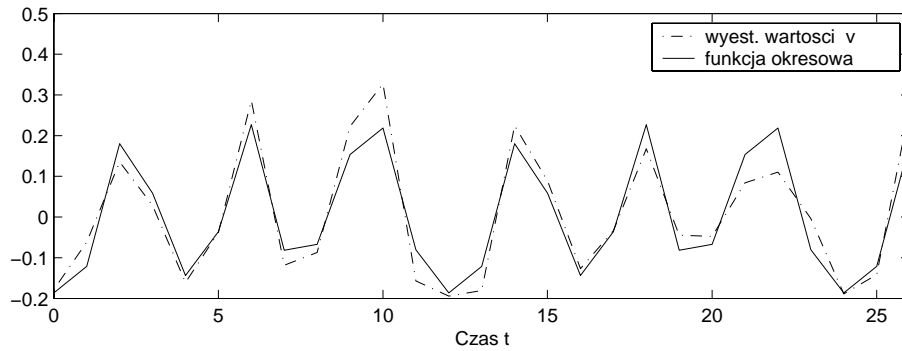
	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
$\sigma_i(1\Delta T)$	-0.2011	-1.1385	0.8284	3.5067	1.5739
$\sigma_i(2\Delta T)$	-0.6899	-0.5585	-1.9587	0.5678	-3.2151
$\sigma_i(3\Delta T)$	-1.1149	-1.2068	-0.2591	-1.4772	1.2165
$\sigma_i(4\Delta T)$	-0.8365	0.1591	2.2509	-1.3157	-0.1959
$\sigma_i(5\Delta T)$	-0.8619	1.4194	0.6159	1.7857	-1.5967
$\sigma_i(6\Delta T)$	-0.5783	1.0433	-1.6256	0.1932	3.6058

Tablica 1: Wyestymowane wartości 5-wymiarowej funkcji zmienności $\sigma(T - t)$ dla różnych czasów do wykupu.

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
$v_i(t_{m-6})$	-0.1610	-0.0527	-0.0473	-0.1593	-0.1443
$v_i(t_{m-5})$	0.0935	-0.1991	0.0842	0.0995	0.0564
$v_i(t_{m-4})$	0.0516	0.0682	0.1102	-0.1621	0.0850
$v_i(t_{m-3})$	0.0768	0.0569	-0.0041	0.0708	-0.1592
$v_i(t_{m-2})$	0.0934	0.0698	-0.1887	0.0214	0.2057
$v_i(t_{m-1})$	0.0127	-0.1019	-0.1418	-0.1605	-0.1897
$v_i(t_m)$	-0.1382	-0.0602	0.2699	0.2926	0.0921

Tablica 2: Wyestymowane wartości 5-wymiarowej funkcji zmienności $v(t)$ dla różnych punktów czasu.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano 5-wymiarowe funkcje zmienności $\sigma(T - t)$ oraz $v(t)$ w dyskretnych punktach czasowych oddalonych od siebie o $\Delta T = 1$ miesiąc. W tabelach 1 i 2 przedstawiono uzyskane wartości liczbowe. Poniżej przedstawiony jest także wykres jednej składowej funkcji zmienności $v(t)$ wraz z dopasowaną funkcją okresową z okresem 12 miesięcy umożliwiającą ewentualne wyznaczanie przyszłych wartości tej funkcji. Okresowość



Rysunek 3: Wyestymowane wartości funkcji $v_3(t)$ wraz z dopasowaną funkcją okresową z okresem 1 rok.

dopasowanej funkcji może być odzwierciedleniem ogólnie znanych periodycznych własności rynku energii elektrycznej, które były również badane przez autorkę niniejszej pracy [1, 2]. Możemy zatem dokonać porównania z wynikami dla modelu jednofaktorowego (tabela 3) analizując kształt funkcji zmienności $\Sigma(t, T)$ dla obydwu przypadków (rys. 4), a także porównując przykładowe wykresy cen opcji kupna na kontrakt forward o ustalonej cenie wykonania $K = 35$.

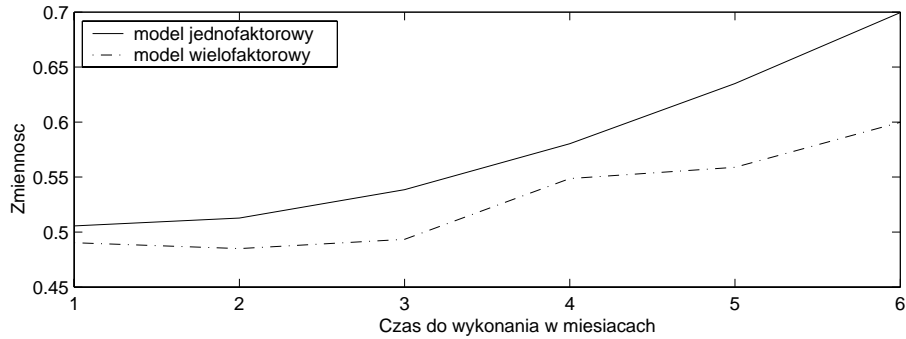
Parametr	Estymacja
σ	2.063
v	0.5177
ρ	-0.2497

Tablica 3: Wyestymowane wartości parametrów dla modelu jednofaktorowego - dane EEX (otrzymane w [16]).

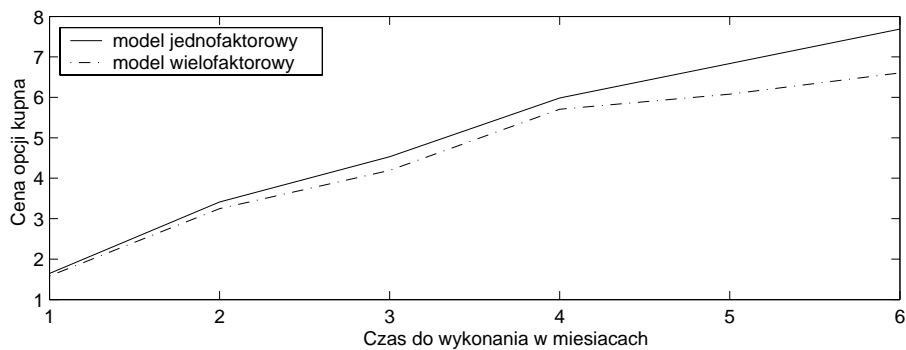
Parametr	Estymacja
σ	0.0613
v	0.1695
ρ	-0.7642

Tablica 4: Wyestymowane wartości parametrów dla modelu jednofaktorowego - dane Nordpool.

Patrząc na rezultaty można wywnioskować, że model jednofaktorowy jest zbyt dużym uogólnieniem, ponieważ w rzeczywistości funkcje zmienności wykazują

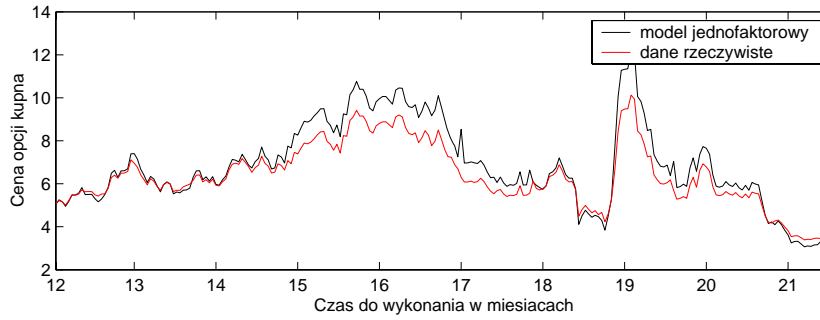


Rysunek 4: Zmienność Σ dla wyestymowanych parametrów (T=U).



Rysunek 5: Cena opcji kupna na kontrakt forward z ceną wykonania $K=35$.

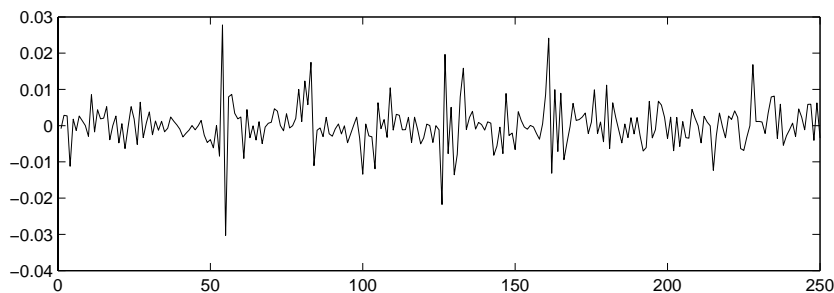
5 istotnych czynników oraz zależność od czasu. Aby jednak zweryfikować to przypuszczenie dokonano dodatkowych symulacji na zbiorze danych z giełdy Nordpool. W związku z faktem, że dane z tej giełdy dotyczą małej liczby kontraktów, nie można było dokonać kalibracji modelu wielofaktowego. Dokonano tylko kalibracji modelu jednofaktowego, a wyniki zamieszczone są w tabeli 4. Dodatkowo dokonano porównania cen opcji otrzymanych symulacyjnie przy uwzględnieniu wyestymowanych współczynników modelu jednofaktowego z rzeczywistymi notowaniami opcji kupna na kontrakt forward z terminem wykonania grudzień 2007 i ceną wykonania $K = 40$. Porównanie to zamieszczone jest na rysunku 6. Jak widać cena opcji w modelu jednofaktowym została zawyżona, co w połączeniu z wynikami uzyskanymi poprzednio może wskazywać na to, że zastosowanie modelu wielofaktowego daje lepsze efekty i lepiej odzwierciedla rzeczywistość.



Rysunek 6: Cena opcji kupna na kontrakt forward z ceną wykonania $K=40$.

5.3 Kalibracja i symulacje dla jednofaktorowego modelu ze skokami

W niniejszym rozdziale przedstawimy próbę dopasowania modelu ze skokami zaprezentowanego w rozdziale 4.1 do rzeczywistych cen opcji na kontrakty forward. Poniżej przedstawiony jest przykładowy wykres przyrostów stopy forward $f(t, T)$ otrzymany z danych pochodzących z giełdy Nordpool, który wyraźnie wskazuje na to, że dla rynku energii elektrycznej skokowe zachowania cen przenoszą się także na zachowanie wewnętrznej struktury terminowej. Zatem założenie o skokowej naturze stopy forward wydaje się być słuszne. Istotną rzeczą, jaką zauważyć można na wykresie jest to, że po skokach dodatnich następują skoki ujemne i vice versa co powoduje powrót do stałej średniej procesu w okolicy zera. Dlatego też komponenta skokowa tego procesu powinna uwzględniać skoki



Rysunek 7: Przykładowe przyrosty stopy forward.

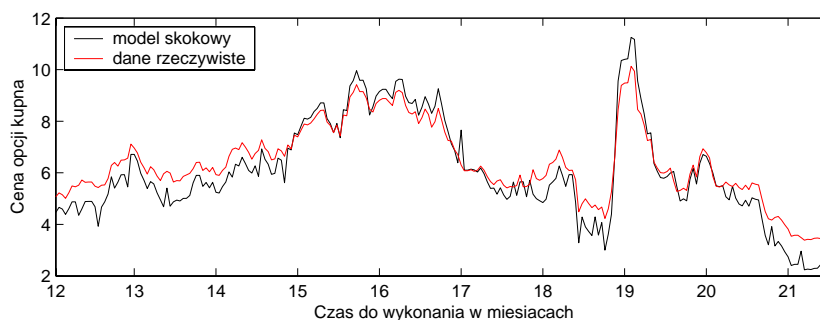
dodatnie i ujemne. Dla uproszczenia modelu podczas kalibracji założono, że skoki dodatnie i ujemne zachodzą w tej samej chwili i badano tylko zachowanie przyrostów.

W związku z faktem, że dla modelu ze skokami część dyfuzyjna jest niezależna od części skokowej, procedura kalibracji modelu ze skokami przebiega dwuetapowo. W pierwszym kroku z danych oddzielamy te pozycje, dla których przyrosty są większe niż trzykrotność odchylenia standardowego wszystkich przyrostów. Oddzielona część danych służy do kalibracji komponenty skokowej, natomiast reszta do kalibracji części dyfuzyjnej [39].

Dla danych pochodzących z giełdy Nordpool, przy założeniu modelu jednofaktorowego (tzn. ze stałymi funkcjami zmienności i stałą stopą procentową) z komponentą skokową opisaną złożonym procesem Poissona ze skokami o rozkładzie wykładniczym, otrzymano wartości parametrów zamieszczone w tabeli 5. Parametr m_1 opisuje średnią skoków, natomiast λ to intensywność. Dodatkowo założono, że $\beta \equiv 0$. Na rys. 8 przedstawiono wykres porównujący ceny opcji otrzymane symulacyjnie przy uwzględnieniu wyestymowanych współczynników modelu jednofaktorowego z rzeczywistymi notowaniami opcji kupna na kontrakt forward z terminem wykonania grudzień 2007 i ceną wykonania $K = 40$. Jak widać wyniki te mają podobny stopień dopasowania co wyniki dla modelu dyfuzyjnego. Niewątpliwie dużą rolę odgrywa tu fakt, że symulacje przeprowadzono dla modelu jednofaktorowego. Dopasowanie bowiem bardziej zaawansowanego modelu może istotnie wpłynąć na dokładność otrzymanej prognozy.

Parametr	Estymacja	Parametr	Estymacja
m_1	0.01	σ	0.0584
λ	2	v	0.1550
γ	0.02	ρ	-0.7181

Tablica 5: Wyestymowane wartości parametrów dla modelu jednofaktorowego - dane Nordpool



Rysunek 8: Cena opcji kupna na kontrakt forward z ceną wykonania $K=40$.

6 Rozszerzony model rynku energii i wycena opcji wymiany na tym rynku

W ostatnim rozdziale pracy zajmiemy się jeszcze jednym ciekawym zagadnieniem dotyczącym rynku energii, jakim jest wycena instrumentów pochodnych, dla których instrumentem bazowym jest stopa wymiany pomiędzy paliwem produkcyjnym a energią elektryczną. Przypuścimy, że rozważamy np. elektrownię, która do produkcji energii elektrycznej używa gazu ziemnego. Wówczas jej właściciel może zabezpieczyć swoją pozycję na rynku przy pomocy instrumentów, dla których instrumentem bazowym jest stopa wymiany pomiędzy kontraktem forward na energię elektryczną a kontraktem na gaz ziemny (tzw. *heat rate*). Umiejętność wyceny opcji wymiany na takie towary jak paliwo produkcyjne i energia elektryczna może posłużyć do wyceny aktywa takiego jak elektrownia, która przy użyciu paliwa produkuje prąd. Jeżeli zdefiniujemy $u(t)$ jako jedną jednostkę prawa do korzystania z elektrowni w chwili t , to można powiedzieć, że $u(t)$ jest wartością opcji kupna C_t^w na wymianę paliwa produkcyjnego na energię elektryczną tuż przed terminem wykonania. Wówczas jednostkową wartość zdolności produkcyjnej elektrowni można zapisać następująco [12]

$$V = \int_0^T u(t)dt = \int_0^T C_t^w dt, \quad (6.1)$$

gdzie T jest czasem życia analizowanej elektrowni.

W celu dokonania wyceny instrumentów omawianego wyżej typu rozszerzymy rynek energii elektrycznej przedstawiony w pierwszej części pracy o instrumenty związane z paliwem produkcyjnym. Następnie podamy krótko własności rozszerzonego rynku energii, opiszemy jego strukturę terminową i dokonamy wyceny opcji wymiany na kontrakty forward przy założeniu dyfuzyjnej postaci podstawowych procesów. Na koniec zilustrujemy otrzymane wyniki praktycznymi przykładami. Przedstawione poniżej wyniki autorka opublikowała częściowo w artykule [3].

6.1 Model rozszerzonego rynku energii

Chcemy opisać rynek energii, na którym można inwestować także w instrumenty opiewające na towar służący do produkcji energii elektrycznej (paliwo produkcyjne takie jak np. gaz ziemny). W tym celu w rozważanym modelu rynku energii elektrycznej z czasem ciągłym, omówionym na początku rozdziału 2, dodatkowo wprowadźmy punkt

- 3(a) Proces $(Q_t)_{t \in [0, T^*]}$ opisuje kurs wymiany MWh na jednostkę paliwa (np. MWh/MMBtu).

Ponadto zmienimy punkt 4 opisu modelu na

4* Na rynku dostępne są dwa skończone d_0 -elementowe zbiory instrumentów pierwotnych związanych z obrotem odpowiednio energii elektrycznej oraz paliwa produkcyjnego. Każdy z tych zbiorów złożony jest z odpowiednio m_e, m_g instrumentów rozliczanych finansowo oraz $d_0 - m_e, d_0 - m_g$ instrumentów rozliczanych fizycznie. Ceny wszystkich dostępnych na rozważanym rynku instrumentów opisane są przez d -wymiarowy proces (S_t^e, S_t^g) taki, że $S_t^e = (S_t^{e,1}, \dots, S_t^{e,d_0})$ jest wektorem cen instrumentów związanych z energią elektryczną, natomiast wektor $S_t^g = (S_t^{g,1}Q_t, \dots, S_t^{g,d_0}Q_t)$ to wektor cen instrumentów związanych z obrotem paliwa produkcyjnego wyrażonych w jednostce obrotu energii elektrycznej ($d = 2d_0$).

6.2 Własności i struktura terminowa rozszerzonego rynku energii

Dla zdefiniowanego wyżej rozszerzonego rynku energii równowagę definiujemy analogicznie do def. 2.3 oraz zakładamy, że spełnione są założenia tw. 2.1. Wówczas zachodzą fakty analogiczne do tw. 2.1 oraz wniosku 2.1 odpowiednio o istnieniu jedynej równoważnej miary martyngałowej \mathbb{Q} i o równowadze przy tej mierze dla procesu $(\tilde{S}_t^e, \tilde{S}_t^g)$ zdyskontowanego przez numerator $S_t^0 = N_t$.

Na rozważanym rynku występują instrumenty związane z obrotem paliwem produkcyjnym oraz z obrotem energią elektryczną. Zakładamy, że wewnętrzna struktura terminowa instrumentów powiązanych z paliwem, opisana dynamiką $f_g(t, T)$ chwilowej stopy forward, może różnić się od struktury terminowej instrumentów powiązanych z energią elektryczną, opisaną przez $f_e(t, T)$. Jeśli $p_g(t, T)Q_t$ jest rynkową ceną kontraktu forward opiewającego na dostarczenie jednej jednostki paliwa, a $p_e(t, T)$ jest rynkową ceną kontraktu forward opiewającego na dostarczenie jednej jednostki energii elektrycznej oraz B_t^g, B_t^e to procesy dyskontujące związane ze strukturą terminową odpowiednio paliw i elektryczności, wówczas (podobnie jak w rozdziale 2.4)

$$p_g(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_g(t, s)ds\right), \quad p_e(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_e(t, s)ds\right), \quad (6.2)$$

$$B_t^g = \exp\left(\int_0^t f_g(s, s)ds\right), \quad B_t^e = \exp\left(\int_0^t f_e(s, s)ds\right).$$

Wiemy, że dla rozważanego rynku

$$\frac{p_e(t, T)}{N_t} \text{ jest } \mathbb{Q}\text{-martyngałem}$$

oraz

$$\frac{p_g(t, T)Q_t}{N_t} \text{ jest } \mathbb{Q}\text{-martyngelem.}$$

W związku z zamianą numeratora na $B_t^g Q_t$ wprowadzamy nową miarę \mathbb{Q}^g , a następnie zmieniając $B_t^g Q_t$ na B_t^e jeszcze jedną miarę \mathbb{Q}^e . Prawdziwe są następujące wnioski

WNIOSEK 6.1 Dla równoważnej miary \mathbb{Q}^g na (Ω, \mathcal{F}_T) o gęstości

$$\frac{d\mathbb{Q}^g}{d\mathbb{Q}} = \frac{N_0 B_T^g Q_T}{N_T B_0^g Q_0} \quad \mathbb{Q} - p.w.$$

procesy

$$\frac{p_e(t, T)}{B_t^g Q_t}, \quad \frac{p_g(t, T)}{B_t^g}, \quad \frac{N_t}{B_t^g Q_t}$$

są \mathbb{Q}^g -martyngełami.

WNIOSEK 6.2 Dla równoważnej miary \mathbb{Q}^e na (Ω, \mathcal{F}_T) o gęstości

$$\frac{d\mathbb{Q}^e}{d\mathbb{Q}^g} = \frac{B_0^g Q_0 B_T^e}{B_T^g Q_T B_0^e} \quad \mathbb{Q}^g - p.w.$$

procesy

$$\hat{p}_e(t, T) = \frac{p_e(t, T)}{B_t^e}, \quad \hat{p}_g(t, T) = \frac{p_g(t, T)Q_t}{B_t^e},$$

$$\hat{N}_t = \frac{N_t}{B_t^e}, \quad \hat{Q}_t = \frac{B_t^g Q_t}{B_t^e}$$

są \mathbb{Q}^e -martyngełami.

6.3 Formuła wyceny dla opcji wymiany na kontrakty forward

Krokiem poprzedzającym wycenę instrumentu pochodnego jest znajomość jego formuły wyceny. Formuła ta bazuje na funkcji wypłaty, która w przypadku rozważanej opcji kupna wymiany kontraktów forward na paliwo i energię elektryczną z terminem wykonania T ma postać

$$(P_e(T, T_1) - K P_g(T, T_1))^+,$$

gdzie $P_e(T, T_1)$ jest ceną w EURO w chwili T kontraktu forward na dostawę jednej jednostki energii elektrycznej w chwili T_1 , a $P_g(T, T_1)$ jest ceną analogicznego kontraktu na paliwo produkcyjne. Współczynnik K jest stosunkiem wymiany

kontraktów. Analogicznie jak w rozdziale 3.1, dla każdego $t \in [0, T]$ otrzymujemy cenę opcji kupna wymiany w postaci

$$C_t^w = \frac{B_t^e E_{\mathbb{Q}^e} \left([p_e(T, T_1) - K p_g(T, T_1) Q_T]^+ \frac{1}{B_T^e} \middle| \mathcal{F}_t \right)}{e^{-\int_0^t r(s) N_t}}. \quad (6.3)$$

Podobnie wygląda wzór na cenę opcji sprzedaży

$$P_t^w = \frac{B_t^e E_{\mathbb{Q}^e} \left([K p_g(T, T_1) Q_T - p_e(T, T_1)]^+ \frac{1}{B_T^e} \middle| \mathcal{F}_t \right)}{e^{-\int_0^t r(s) N_t}}.$$

Natomiast paritet kupna sprzedaży dla rozważanej opcji wymiany ma postać

$$C_t^w - P_t^w = \frac{B_t^e E_{\mathbb{Q}^e} \left([p_e(T, T_1) - K p_g(T, T_1) Q_T] \frac{1}{B_T^e} \middle| \mathcal{F}_t \right)}{e^{-\int_0^t r(s) N_t}},$$

a na mocy faktu 6.2

$$C_t^w - P_t^w = P_e(t, T_1) - K P_g(t, T_1).$$

W następnym etapie opiszemy procesy $f_e(t, T)$, $f_g(t, T)$, N_t oraz Q_t dyfuzyjnymi stochastycznymi równaniami różniczkowymi, aby w kolejnym kroku dokonać wyceny według przedstawionych powyżej formuł.

6.4 Dyfuzyjna postać procesów opisujących rozszerzony rynek energii

Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^e)$ z filtracją generowaną przez d -wymiarowy proces Wienera W_t^e założmy, że wewnętrzna struktura terminowa rynku energii elektrycznej jest opisana przy pomocy następującego procesu Itô

$$f_e(t, T) = f_e(0, T) + \int_0^t \alpha_e(s, T) ds + \int_0^t \sigma_e(s, T) \circ dW_s^e,$$

gdzie współczynniki spełniają takie same założenia jak w rozdziale 3.2. Wtedy podobnie jak w rozdziale 3.2, można pokazać, że proces $\hat{p}_e(t, T)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$d\hat{p}_e(t, T) = -\hat{p}_e(t, T) \sigma_e^*(t, T) \circ dW_t^e, \quad (6.4)$$

gdzie

$$\sigma_e^*(t, T) = \int_t^T \sigma_e(t, s) ds.$$

Zakładamy także, że

$$\begin{aligned} d\hat{N}_t &= \hat{N}_t v(t) \circ dW_t^e, \\ d\hat{Q}_t &= \hat{Q}_t v_q(t) \circ dW_t^e, \end{aligned}$$

gdzie $v(t)$ oraz $v_q(t)$ są d -wymiarowymi funkcjami deterministycznymi. Założmy dalej, że wewnętrzna struktura terminowa rynku samych paliw na przeszerzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^g)$ z filtracją generowaną przez d -wymiarowy procesem Wienera W_t^g taki, że $W_t^g = W_t^e - \int_0^t v_q(s)ds$ opisana jest przy pomocy następującego procesu Itô

$$f_g(t, T) = f_g(0, T) + \int_0^t \alpha_g(s, T)ds + \int_0^t \sigma_g(s, T) \circ dW_s^g,$$

gdzie współczynniki spełniają takie same założenia jak w rozdziale 3.2. Wówczas proces $\bar{p}_g(t, T) = \frac{p_g(t, T)}{B_t^g}$ spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$d\bar{p}_g(t, T) = -\bar{p}_g(t, T)\sigma_g^*(t, T) \circ dW_t^g,$$

gdzie

$$\sigma_g^*(t, T) = \int_t^T \sigma_g(t, s)ds.$$

Potrzebna jest nam jeszcze reprezentacja procesu $\hat{p}_g(t, T)$ na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^e)$:

LEMAT 6.1 *Dla dowolnego terminu wykonania $T \in (0, T^*]$ dynamika procesu $\hat{p}_g(t, T)$ na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^e)$ ma postać*

$$d\hat{p}_g(t, T) = \hat{p}_g(t, T)c(t, T)dW_t^e, \quad (6.5)$$

gdzie

$$c(t, T) = v_q(t) - \sigma_g^*(t, T). \quad (6.6)$$

DOWÓD: Wiemy, że $W_t^e = W_t^g + \int_0^t v_q(s)ds$. Korzystając z zależności

$$\bar{p}_g(t, T)\hat{Q}_t = \hat{p}_g(t, T)$$

oraz z wielowymiarowego lematu Itô mamy

$$\begin{aligned} d\hat{p}_g(t, T) &= \bar{p}_g(t, T)d\hat{Q}_t + d\bar{p}_g(t, T)\hat{Q}_t - \bar{p}_g(t, T)\hat{Q}_t v_q(t)\sigma_g^*(t, T)dt \\ &= \hat{p}_g(t, T)c(t, T)dW_t^e. \end{aligned}$$

□

Przy wycenie opcji wymiany wykorzystamy reprezentację procesu

$$Y(t, T) = \frac{p_e(t, T)}{p_g(t, T)Q_t} = \frac{\hat{p}_e(t, T)}{\hat{p}_g(t, T)} = \frac{P_e(t, T)}{P_g(t, T)}$$

przy równoważnej mierze martyngałowej \mathbb{P}^* generowanej przez numerator $p_g(t, T)Q_t$. Reprezentację tę podaje następujący lemat

LEMAT 6.2 Załóżmy, że w rozważanym modelu

$$\int_0^T \|c(s, T)\|^2 ds < \infty,$$

gdzie $c(t, T)$ ma postać (6.6). Proces $Y(t, T)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe

$$dY(t, T) = Y(t, T)\chi(t, T) \circ dW_t^*$$

którego rozwiązanie ma postać

$$Y(t, T) = Y(0, T) \exp\left(\int_0^t \chi(s, T) \circ dW_s^* - \frac{1}{2} \int_0^t \|\chi(s, T)\|^2 ds\right),$$

gdzie $W_t^* = W_t^e - \int_0^t c(s, T)ds$ jest standardowym d -wymiarowym ruchem Browna zadany na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ (względem miary \mathbb{P}^* odpowiadającej numeratorowi $p_g(t, T)Q_t$) oraz

$$\chi(t, T) = \sigma_g^*(t, T) - \sigma_e^*(t, T) - v_q(t). \quad (6.7)$$

DOWÓD: Gęstość miary \mathbb{P}^* na przestrzeni (Ω, \mathcal{F}_T) odpowiadającej numeratorowi $p_g(t, T)Q_t$ ma postać

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{Q}^e} = \exp\left(\int_0^T c(s, T)dW_s^e - \frac{1}{2} \int_0^T c(s, T)^2 ds\right) \quad \mathbb{P}^* - p.w.$$

Stosując tw. Girsanowa otrzymujemy, że W_t^* jest d -wymiarowym procesem Wienera na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$. Korzystając z lematu Itô oraz postaci dynamik (6.5), (6.4), otrzymujemy stochastyczne równanie różniczkowe opisujące proces $Y(t, T)$:

$$dY(t, T) = Y(t, T)h(t, T)dt + Y(t, T)\chi(t, T) \circ dW_t^e,$$

gdzie

$$h(t, T) = \|(v_q(t) - \sigma_g^*(t, T))\|^2 + (v_q(t) - \sigma_g^*(t, T)) \circ \sigma_e^*(t, T),$$

oraz $\chi(t, T)$ ma postać (6.7) co jest równoważne postaci z lematu. □

Mając do dyspozycji postać procesu $Y(t, T)$ możemy przystąpić do wyceny interesującego nas instrumentu pochodnego.

6.5 Wycena opcji wymiany na kontrakty forward

Korzystając z faktów zamieszczonych w poprzednim rozdziale, dotyczących dyfuzyjnej postaci podstawowych procesów $f_e(t, T)$, $f_g(t, T)$ opisujących strukturę terminową na rozszerzonym rynku oraz postaci procesów przeliczających N_t oraz Q_t udowodnimy twierdzenie, którego tezą jest postać ceny opcji kupna na wymianę kontraktów forward. Przyjmijmy jak dotychczas deterministyczną stopę procentową $r(t)$.

TWIERDZENIE 6.1 *Dla rozważanego w niniejszym rozdziale modelu, przy założeniach lematu 6.2 oraz dodatkowym założeniu, że*

$$\int_0^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds < \infty,$$

gdzie $\chi(t, T)$ ma postać (6.7), cena w EURO europejskiej opcji kupna z terminem wykonania $T \in [t, T^*]$ opiewającej na wymię kontraktu forward na energię elektryczną i $K > 0$ kontraktów na paliwo produkcyjne z terminami wykonania $T_1 \in [T, T^*]$ jest dana wzorem

$$C_t^w = P_e(t, T_1)\Phi(\delta_+(t)) - KP_g(t, T_1)\Phi(\delta_-(t)), \quad (6.8)$$

gdzie $P_e(t, T_1)$ oraz $P_g(t, T_1)$ są cenami w tej samej walucie instrumentów bazowych, Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego oraz

$$\delta_{\pm}(t) = \frac{\ln \frac{P_e(t, T_1)}{KP_g(t, T_1)} \pm \frac{1}{2}\Sigma^2(t)}{\Sigma(t)}$$

dla

$$\Sigma(t) = \sqrt{\int_t^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds}.$$

DOWÓD: Cenę opcji kupna możemy zapisać przy pomocy formuły (6.3). Jeśli dokonamy zamiany numeratora na proces $p_g(t, T_1)Q_t$, to na przestrzeni probabilistycznej z miarą \mathbb{P}^* opisaną w lemacie 6.2 cenę opcji kupna możemy zapisać przy pomocy następującej warunkowej wartości oczekiwanej

$$\begin{aligned} C_t^w &= p_g(t, T_1)Q_t E_{\mathbb{P}^*} \left(\left[\frac{p_e(T, T_1)}{p_g(T, T_1)Q_T} - K \right]^+ \middle| \mathcal{F}_t \right) / (e^{-rt}N_t) \\ &= P_g(t, T_1)E_{\mathbb{P}^*} ([Y(T, T_1) - K]^+ | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

Następnie analogicznie jak w dowodzie tw. 3.1 obliczamy cenę opcji w chwili $t = 0$.

$$C_0 = E_{\mathbb{P}^*}([Y(T, T_1) - K]^+) = E_{\mathbb{P}^*}(Y(T, T_1)1_D) - E_{\mathbb{P}^*}(K1_D) = I_1 - I_2,$$

gdzie zbiór $D = \{Y(T, T_1) > K\}$. Wartość oczekiwana $I_2 = E_{\mathbb{P}^*}(K1_D)$ równa jest

$$I_2 = K\mathbb{P}^*\{D\} = K\mathbb{P}^*\left\{\xi < \frac{\ln(Y(0, T_1)/K) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds}{\sqrt{\int_0^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds}}\right\}$$

gdzie zmienna losowa

$$\xi = \frac{\int_0^T \chi(s, T_1) \circ dW_s^*}{\sqrt{\int_0^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds}}$$

względem miary \mathbb{P}^* ma standardowy rozkład normalny. Dodatkowo wiedząc, że $Y(0, T_1) = \frac{P_e(0, T_1)}{KP_g(0, T_1)}$ mamy

$$I_2 = K\Phi(\delta_-(0)),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Aby policzyć $I_1 = E_{\mathbb{P}^*}(Y(T, T_1)1_D)$ wprowadzamy nową miarę $\hat{\mathbb{P}}$ o gęstości

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \exp\left(\int_0^T \chi(s, T_1) \circ dW_s^* - \frac{1}{2} \int_0^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds\right) = \frac{Y(T, T_1)}{Y(0, T_1)} \quad \mathbb{P}^* - p.w.$$

gdzie na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{\mathbb{P}})$

$$Y(T, T_1) = Y(0, T_1) \exp\left(\int_0^T \chi(s, T_1) \circ d\hat{W}_s + \frac{1}{2} \int_0^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds\right)$$

oraz proces $\hat{W}_t = W_t^* - \int_0^t \chi(s, T_1) ds$ jest standardowym ruchem Browna. Wtedy

$$I_1 = E_{\mathbb{P}^*}(Y(T, T_1)1_D) = Y(0, T_1)\hat{\mathbb{P}}\{Y(T, T_1) > K\}.$$

W konsekwencji, podobnie jak dla I_2 otrzymujemy

$$I_1 = Y(0, T_1)\hat{\mathbb{P}}\left\{\hat{\xi} < \frac{\ln(Y(0, T_1)/K) + \frac{1}{2} \int_0^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds}{\sqrt{\int_0^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds}}\right\} = Y(0, T_1)\Phi(\delta_+(0)).$$

gdzie zmienna

$$\hat{\xi} = \frac{\int_0^T \chi(s, T_1) \circ d\hat{W}_s}{\sqrt{\int_0^T \|\chi(s, T_1)\|^2 ds}}$$

względem miary $\hat{\mathbb{P}}$ ma standardowy rozkład normalny. Zatem C_0^w spełnia tezę twierdzenia. Cena C_t^w z dowolnym terminem t wynika z własności Markowa procesu $Y(t, T)$.

□

Powyższe twierdzenie przedstawia ogólny wzór umożliwiający wycenę rozważanej opcji wymiany przy założeniu modelu dyfuzyjnego. Jeśli jednak przyjmiemy dodatkowe założenia wówczas otrzymamy szczególne przykłady tego twierdzenia omówione poniżej.

6.6 Przykłady

W niniejszym rozdziale przedstawimy zastosowanie tw. 6.1 w kilku szczególnych przypadkach. Pierwsze dwa przykłady to model jednofaktorowy i Vasicka, natomiast pozostałe dwa dają nam obraz tego, jaki wpływ na postać ceny opcji mają poszczególne procesy stochastyczne wprowadzone w modelu i związana z nimi zmienność oraz jak udowodnione twierdzenie może być stosowane w innych sytuacjach.

6.6.1 Model jednofaktorowy

Pierwszy z rozważanych przykładów to model jednofaktorowy, w którym zakładamy, że wszystkie funkcje zmienności przyjmują stałą wartość. Dla takiego modelu rozważamy przestrzeń z filtracją generowaną przez trójwymiarowy ruch Browna $W_t = \{W_t^1, W_t^2, W_t^3\}$, a procesy zmienności są zadane następująco

$$\sigma_e(t, T) \equiv [\sigma_e, 0, 0], \quad \sigma_g(t, T) \equiv [0, \sigma_g, 0], \quad v_q(t) \equiv v_q[\rho_1, \rho_2, \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2}],$$

gdzie $\rho_1, \rho_2 \in [-1, 1]$. Wtedy

$$\sigma_e^*(t, T) = [(T - t)\sigma_e, 0, 0], \quad \sigma_g^*(t, T) = [0, (T - t)\sigma_g, 0],$$

i otrzymujemy

WNIOSEK 6.3 *Przy założeniach modelu jednofaktorowego postać ceny opcji rozważanej w twierdzeniu 6.1 zadana jest wzorem (6.8), gdzie*

$$\begin{aligned} \Sigma^2(t) = & -((\sigma^e)^2 + (\sigma^g)^2)((T_1 - T)^3 - (T_1 - t)^3) + (v_q)^2(T - t) \\ & + (v_q\rho_1\sigma^e + v_q\rho_2\sigma^g)((T_1 - T)^2 - (T_1 - t)^2). \end{aligned}$$

6.6.2 Model Vasicka

W modelu tym na przestrzeni z filtracją generowaną przez ruch Browna $W_t = \{W_t^1, W_t^2\}$ krótkoterminowe stopy dla elektryczności i gazu opisane są odpowiednimi równaniami

$$df_e(t, t) = (a_e - b_e f(t, t))dt + \vec{c}_e \circ dW_t,$$

$$df_g(t, t) = (a_g - b_g f(t, t))dt + \vec{c}_g \circ dW_t,$$

gdzie $\vec{c}_e = [c_e, 0]$, $\vec{c}_g = c_g[\rho, \sqrt{1 - \rho^2}]$ oraz $a_e, b_e, c_e, a_g, b_g, c_g$ są ściśle dodatnimi stałymi. Zatem

$$\sigma_e^*(t, T) = n_e(t, T)\vec{c}_e, \quad \sigma_g^*(t, T) = n_g(t, T)\vec{c}_g,$$

gdzie $n_e(t, T) = \frac{1}{b_e}(1 - e^{-b_e(T-t)})$, $n_g(t, T) = \frac{1}{b_g}(1 - e^{-b_g(T-t)})$. Zakładamy także, że zmienność $v_q \equiv 0$.

WNIOSEK 6.4 *Przy założeniach modelu Vasicka postać ceny opcji rozważanej w twierdzeniu 6.1 zadana jest wzorem (6.8), gdzie*

$$\Sigma^2(t) = \int_t^T (n_e^2(s, T_1)c_e^2 - 2n_e(s, T_1)c_e\rho n_g(s, T_1)c_g + n_g^2(s, T_1)c_g^2) ds.$$

Przedstawione powyżej dwa przykłady pokazują, w jaki sposób przyjęta przez nas postać struktury terminowej oraz postać procesów przeliczających wiąże się z ewolucją zmienności ceny opcji w czasie.

6.6.3 Opcja wymiany dla identycznej struktury terminowej

Kolejny z przykładów to model, w którym zakładamy, że wewnętrzna struktura terminowa dla paliwa i elektryczności jest taka sama. Wówczas cena opcji wymiany zależy tylko od zmienności stopy wymiany pomiędzy tymi towarami Q_t , co w konsekwencji powoduje, że proces wymiany jest jedynym procesem istotnie wpływającym na zmiany w cenie opcji.

WNIOSEK 6.5 *Dla identycznej wewnętrznej struktury terminowej rynku energii elektrycznej i paliwa postać ceny opcji rozważanej w twierdzeniu 6.1 zadana jest wzorem (6.8), gdzie*

$$\Sigma^2(t) = \int_t^T \|v_q(s)\|^2 ds.$$

Powyższa postać zmienności dla opcji wymiany sugeruje, że dla takiego modelu cena opcji ewoluje w czasie, a jej zmiany nie są powiązane z czasem pozostałym do wykupu kontraktów będących instrumentami bazowymi.

6.6.4 Opcja wymiany pomiędzy dwiema lokalizacjami

Zauważmy, że rozważany model i twierdzenie 6.1 dotyczyć może nie tylko wymiany kontraktu na energię elektryczną i paliwa produkcyjnego, lecz także wymiany kontraktów na energię elektryczną w dwóch lokalizacjach A i B różniących się dynamiką wewnętrzną struktury terminowej. W takiej sytuacji proces Q_t jest deterministyczny i stale równy 1 ($Q_t \equiv 1$), zatem zmienność $v_q(t) \equiv 0$, a cena opcji wymiany zależy tylko od różnicy w dynamikach opisujących wewnętrzną strukturę terminową w lokalizacji A oraz lokalizacji B .

WNIOSEK 6.6 *Cena opcji wymiany kontraktów forward na energię elektryczną pomiędzy lokalizacjami A i B przy założeniach twierdzenia 6.1 ma postać*

$$C_t^w = P_A(t, U)\Phi(\delta_+(t)) - KP_B(t, U)\Phi(\delta_-(t)),$$

gdzie $P_A(t, U)$, $P_B(t, U)$ to odpowiednio ceny w EURO kontraktów w lokalizacji A oraz w lokalizacji B . Natomiast

$$\delta_{\pm}(t) = \frac{\ln \frac{P_A(t, U)}{KP_B(t, U)} \pm \frac{1}{2}\Sigma^2(t)}{\Sigma(t)}$$

oraz

$$\Sigma^2(t) = \int_t^T \|\sigma_B^*(s, U) - \sigma_A^*(s, U)\|^2 ds.$$

gdzie σ_A^* , σ_B^* to zmienneści związane ze strukturą terminową wewnętrznego rynku energii elektrycznej w lokalizacjach A i B .

Rozważany tu przypadek opcji wymiany może być używany do wyceny sieci transmisyjnych umożliwiających przesył energii elektrycznej na ustalonym odcinku AB . Przykład ten jest jednocześnie przypadkiem wymiany, w której różnice w cenach związane są tylko i wyłącznie z różnicami w strukturze terminowej wewnętrznych rynków rozważanych produktów, co sugeruje, że różnice te powiązane są z czasem pozostałym do wykupu kontraktów.

6.7 Symulacje

W rozdziale tym przedstawimy porównanie wyników symulacji uzyskanych dla przedstawionego powyżej modelu Vasicka z wynikami uzyskanymi dla standardowego modelu Blacka opisanego w poniższym fakcie.

FAKT 6.1 [27] *Przy założeniu, że ceny w walucie pieniężnej kontraktów na energię elektryczną i paliwo produkcyjne opisane są geometrycznym ruchem Browna*

$$dP^e(t, T) = \mu_1 P^e(t, T)dt + \sigma_1 P^e(t, T)dW_{t,1},$$

$$dP^g(t, T) = \mu_2 P^g(t, T)dt + \sigma_2 P^g(t, T)dW_{t,2},$$

gdzie $W_{t,1} = \rho W_{t,2} + \sqrt{1 - \rho^2} W'_{t,2}$ oraz $W_{t,2}, W'_{t,2}$ są niezależnymi procesami Wienera otrzymujemy następującą cenę opcji wymiany

$$C_t^w = e^{-\int_t^T r(s)ds} [P_e(t, U)\Phi(\delta_+(t)) - KP_g(t, U)\Phi(\delta_-(t))],$$

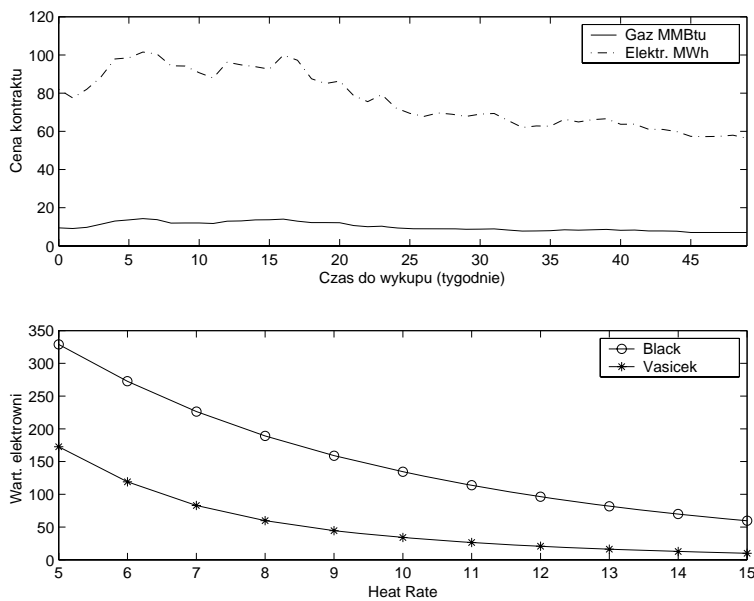
gdzie

$$\delta_{\pm}(t) = \frac{\ln \frac{P_1(t, U)}{KP_2(t, U)} \pm \frac{\sigma_B^2(T-t)}{2}}{\sigma_B \sqrt{T-t}}.$$

oraz

$$\sigma_B^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_1\rho\sigma_2 + \sigma_2^2.$$

Do symulacji użyto danych z giełdy NYMEX (New York Mercantile Exchange). Zbiór danych zawierał historyczne notowania kontraktów na gaz (Henry Hub) oraz elektryczność (PJM) z okresu od stycznia 2004 do marca 2006. Parametry zostały obliczone przy pomocy autorskiej metodologii kalibracji zamieszczonej w artykule [3] przy założeniu stałej stopy procentowej $r = 0.05$.



Rysunek 9: Górny panel: Ceny kontraktów na gaz i elektryczność z terminem wykonania marzec 2006. Dolny panel: Wyznaczona symulacyjnie, dla obydwu modeli, jednostkowa wartość elektrowni produkującej elektryczność z gazu ziemnego z czasem życia 15 lat.

Przedstawione wyniki prezentują próbę wyceny jednostkowej wartości elektrowni produkującej elektryczność z gazu ziemnego przy użyciu formuły (6.1). W tym celu założono dodatkowo, że czas życia elektrowni wynosi 15 lat oraz $P^e(0, T) = 55.750$ USD, $P^g(0, T) = 6.3080$ USD. Na rysunku widzimy wartość elektrowni dla stopy wymiany (heath rate) zmieniającej się na przedziale [5, 15]. Można zauważyć dużą różnicę wynikach otrzymanych dla analizowanych modeli. Wartość elektrowni dla modelu z wewnętrzną strukturą terminową opisaną modelem Vasicka jest dużo mniejsza niż wartość otrzymana dla modelu Blacka i zbiega do 0, gdy stopa wymiany rośnie. Wskazuje to na dobre własności badanego w pracy modelu, gdyż w rzeczywistości wartość elektrowni dla stopy wymiany większej niż $\frac{P^e}{P^g} \approx 9$ powinna być bliska zeru. Dodatkowo analizując wyniki prac [11, 12] można wysnuć wniosek, że wartość elektrowni przy założeniu modelu Blacka jest zwykle zawyżona, co także stawia proponowany w niniejszej pracy model w dobrym świetle.

7 Podsumowanie

Rozprawa poświęcona jest modelowi rynku energii elektrycznej uwzględniającemu jego wewnętrzną strukturę terminową. Rozważania prowadzone były w dwóch nurtach. Pierwszy kierunek (rozdz. 2-5) dotyczył zagadnienia wyceny pewnych instrumentów pochodnych przy założeniu różnych klas procesów stochastycznych służących do opisu instrumentów na rynku, od procesów dyfuzyjnych po procesy ze skokami. W rozdziale 2 opisano ogólny matematyczny model wewnętrznego rynku energii elektrycznej, a następnie zaprezentowano metodologię wyboru optymalnej równoważnej miary martyngałowej, polegającej na maksymalizacji funkcji użyteczności uczestników rynku. Dodatkowo podano dwa wnioski (wn. 2.1 i 2.2) wynikające z założeń modelu i istnienia miary optymalnej, a uzasadniające obserwacje dotyczące badanego rynku. Na koniec opisano wstępnie strukturę terminową wewnętrznego rynku energii elektrycznej.

W rozdziale 3 opisano podstawowe procesy na rynku przy pomocy procesów dyfuzji i dokonano wyceny europejskiej opcji kupna na kontrakt forward (tw. 3.1). Następnie na podstawie tego twierdzenia obliczono postać ceny tej opcji dla dwóch przypadków modeli struktury terminowej: modelu jednofaktorowego i modelu Vasicka (wn. 3.2, wn. 3.1).

W rozdziale 4 rozszerzono model dyfuzyjny opisując podstawowe procesy na rynku za pomocą procesów ze skokami będących w klasie semimartyngałów. Rozważono dwa szczególne przypadki. W pierwszym z nich część skokowa zadana jest poprzez złożony proces Poissona, natomiast w drugim, bardziej nowatorskim, komponenta skokowa zadana jest poprzez proces typu skorelowanego błędzenia losowego z czasem ciągłym. Korzystając z zaawansowanej teorii z dziedziny semimartyngałów, dla obydwu wspomnianych modeli dowiedziono czterech lematów pomocniczych. Dwa z nich dotyczą reprezentacji podstawowych procesów na rynku przy wyjściowej mierze \mathbb{Q} (lem. 4.1, 4.3), natomiast pozostałe dwa dotyczą reprezentacji tych procesów po zamianie miary na miarę równoważną (lem. 4.2, 4.4). Dokonano także wyceny opcji kupna na kontrakt forward (tw. 4.1, 4.2) przy założeniach obydwu modeli, co jest głównym wynikiem tego rozdziału. Rozważania teoretyczne zostały zilustrowane przykładami i wykresami.

Kolejny rozdział został poświęcony symulacjom. Dodatkowo opisano w nim dokładnie metodologię kalibracji wielofaktorowego modelu dyfuzyjnego (alg. 5.1, alg. 5.2). Rozdział ten pokazuje przydatność wcześniejszych rozważań teoretycznych w badaniach rzeczywistego rynku, a liczne wykresy obrazują istotę badanych zjawisk.

Drugi kierunek rozważań (rozdz. 6) dotyczył rozszerzenia podstawowego modelu do ogólniejszego rynku energii, na którym mogą być także notowane instrumenty związane z paliwem produkcyjnym. W ostatnim rozdziale zaproponowano matematyczny model takiego rynku. Następnie przy założeniu modelu dyfuzyj-

nego udowodniono główne twierdzenie (tw. 6.1) opisujące postać ceny europejskiej opcji kupna wymiany kontraktów na energię elektryczną i paliwo produkcyjne. Zaprezentowano dodatkowo kilka interesujących przykładów wraz z symulacjami.

Niniejsza praca zawiera zatem kompleksowy opis budowy modelu rynku energii elektrycznej opartego na postaci jego wewnętrznej struktury terminowej, wskazując jednocześnie wiele kierunków dalszego rozwoju badań w ramach zaprezentowanej problematyki. Przeprowadzone symulacje pokazują, że model ten dobrze odzwierciedla rzeczywistość, więc dalsze jego rozwijanie jest uzasadnione. Szczególnie ciekawy jest wątek dotyczący modelu ze skokami. Rozwinięcie tego modelu do modelu uwzględniającego dodatnią i ujemną komponentę skokową, zastosowanie innego procesu opisującego skoki czy też rozwiązanie zagadnienia kalibracji modeli o zależnych przyrostach może stać się ciekawym tematem dalszych rozważań. Przedstawiona w pracy propozycja modelu ze skokami o przyrostach zależnych może być także użyta do modelowania cen spotowych na rynku energii elektrycznej. Innym ciekawym zagadnieniem jest efektywność modelu ze skokami przy zastosowaniu go do wyceny opcji wymiany. Są to otwarte problemy, które autorka pracy zamierza poruszyć w dalszych badaniach naukowych.

Literatura

- [1] E. Broszkiewicz-Suwaj (2003): *Wykrywanie okresowej korelacji danych z TGE SA w oparciu o analizę spektralną*, Rynek Terminowy 20, 92-95.
- [2] E. Broszkiewicz-Suwaj, A. Makagon, R. Weron, A. Wyłomańska (2004): *On detecting and modeling periodic correlation in financial data*, Physica A 336, 196-205.
- [3] E. Broszkiewicz-Suwaj (2006): *Electricity Real Options Valuation*, Acta Physica Polonica B Vol. 37, No 11, 1001-1011.
- [4] E. Broszkiewicz-Suwaj (2006): *New Methodology of Pricing on Electricity Market - Theory and Practice*, Proceedings of the International Conference The European Electricity Market EEM-06, May 24-26, 2006, Warsaw, Poland, 29-33.
- [5] E. Broszkiewicz-Suwaj, A. Jurlewicz (2007): *Pricing on Energy Market based on coupled CTRW concept*, w przygotowaniu.
- [6] H. Buhlmann, F. Delbaen, P. Embrechts, A. Shiryaev (2001): *No-arbitrage, change of measure and conditional Esscher transforms*, CWI Q. 9, No.4, 291-317
- [7] T. Chan (1999): *Pricing Contingent Claims on Stocks Driven by Levy Processes*, The Annals of Applied Probability, Vol. 9, No. 2, 5004-528.
- [8] R. Cont, P. Tankov (2004) : *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman&Hall.
- [9] M. Davis (1997): *Option Pricing in Incomplete markets*, Mathematics of Derivative Securities.
- [10] F. Delbaen, W. Schachermayer (1994): *A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*, Mathematische Annalen, Vol. 300, 463-520.
- [11] S. Deng (2000): *Stochastic Models of Energy Commodity Prices and Their Applications: Mean-reversion with Jumps and Spikes*, POWER papers.
- [12] S. Deng, B. Johnson, A. Sogomonian (1998): *Exotic Electricity Options and the Valuation of Electricity Generation and Transmission Assets* Decision Support Systems 30, 383-392.
- [13] H. Geman (2005): *Commodities and commodity derivatives: Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy*, John Wiley and Sons.

- [14] D. Heath, R. Jarrow, A. Morton (1992): *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology*, *Econometrica* 60, 77-105.
- [15] J. Hinz (2006): *Valuing Production Capacities on Flow Commodities*, *Mathematical Methods of Operations Research*, 64(2), 187-209.
- [16] J. Hinz, L. Grafenstein, M. Verschuere, M. Wilhelm (2005): *Pricing Risk by Interest Rate Methods*, *Quantitative Finance* 5, 49.
- [17] J. Hugonnier, D. Kramkov, W. Schachermayer (2005): *On Utility Based Pricing of Contingent Claims in Incomplete Markets*, *Mathematical Finance*, Vol. 15, No. 2, pp. 203-212.
- [18] J. Jacod, A. Shiryaev (2003): *Limit Theorems for stochastic processes*, Springer, Berlin.
- [19] J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner (2003): *Matematyka Finansowa. Instrumenty Pochodne.*, WNT Warszawa.
- [20] A. Jurlewicz (2005): *Limit theorems for randomly coarse grained continuous-time random walks*, *Diss. Math.* 431.
- [21] I. Karatzas, S. Shreve (1998): *Methods of Mathematical Finance*, Springer, Berlin.
- [22] D. Kramkov, W. Schachermayer (1999): *The Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets*, *Annals of Applied Probability*, Vol. 9, No. 3, 904-950.
- [23] D. Kramkov, W. Schachermayer (2003): *Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets.*, *Annals of Applied Probability*, Vol. 13, No. 4, 1504-1516.
- [24] R. Metzler, J. Klafter (2000): *The Random Walks Guide to Anomalous Diffusion: a Fractional Dynamics Approach*, *Phys. Rep.* 339, 1-77.
- [25] M. Musiela, M. Rutkowski (1997): *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer.
- [26] P. Protter (1990): *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer.
- [27] E. Ronn (2004): *Real Option and Energy Management: Using Options Methodology to Enhance Capital Budgeting Decisions*, Risk Books.

- [28] W. Schachermayer (2001): *Optimal Investment in Incomplete Markets when Wealth may Become Negative*, Annals of Applied Probability, Vol. 11, No. 3, 694-734.
- [29] W. Schachermayer (2004): *Utility Maximisation in Incomplete Markets*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1856, 225-288.
- [30] W. Schoutens (2003): *Levy Processes in Finance*, John Wiley and Sons.
- [31] A. Shiryaev (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific, Singapore.
- [32] K. Szulżyk, A. Palczewski (2003): *Kalibracja Modelu Struktury Terminowej HJM do Polskiego Rynku Obligacji Skarbowych*, Rynek Terminowy 19.
- [33] The Nordic Power Exchange: *Dane - opcje i kontrakty*.
- [34] European Energy Exchange: *Dane - kontrakty*.
- [35] I. Vehvilainen (2002): *Basics of Electricity Derivative Pricing i Competitive Markets*, Applied Mathematical Finance 9, 45-60.
- [36] A. Weron, R. Weron (1999): *Inżynieria finansowa: Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe, statystyka rynku*, WNT, Warszawa.
- [37] A. Weron, R. Weron (2000): *Giełda Energii: Strategie zarządzania ryzykiem*, CIRE, Wrocław.
- [38] K. Weron, A. Jurlewicz (2005): *Scaling Properties of the Diffusion Process Underlying the Havrila-Negami Relaxation Function*, Def. Diff. Forum 237-240 1093.
- [39] R. Weron, I. Simonsen, P. Wilman (2004): *Modeling Highly Volatile and Seasonal Markets: Evidence from the Nord Pool Electricity Market*, The Application of Econophysics, ed. H. Takayasu, Springer-Tokyo, 182-191.