Zagadnienia statystyki aktuarialnej

pod redakcją
Joanny Dębickiej

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Krzysztof Dębicki, Grzegorz Kończak,
Zbigniew Palmowski, Włodzimierz Szkutnik

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korłub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Adam Dębski

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne
w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695- 240-6

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 230
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS

Zagadnienia statystyki aktuarialnej ISSN 1899-3192

Joanna Dębicka
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

INDEKSACJA PRZEPŁYWÓW PIENIĘŻNYCH W UBEZPIECZENIACH WIELOSTANOWYCH*

Streszczenie: Artykuł poświęcono zagadnieniu indeksacji świadczeń (w konsekwencji składek i rezerw) ubezpieczeniowych odgrywających istotną rolę w konstrukcji wielostanowych ubezpieczeń odpornych na inflację. Podstawą aktuarialno-finansowej analizy ubezpieczenia jest zmodyfikowany model wielostanowy, którego struktura probabilistyczna jest definiowana w oparciu o niejednorodny łańcuch Markowa. Celem artykułu jest przedstawienie ogólnego wzoru na wyznaczanie stopy indeksacji rezerw w przypadku ubezpieczeń wielostanowych ze stałą stopą procentową. Ponadto, by uprościć zapis i obliczenia numeryczne, zaproponowano macierzową reprezentację wzoru na stopy indeksacji rezerw, co pozwala na uzyskanie elastycznego narzędzia służącego m.in. do analizy wielostanowej polisy ubezpieczeniowej. Ilustracją zastosowania reprezentacji macierzowej do obliczania składek, rezerw i stóp indeksacji dla rezerw jest przykład numeryczny dotyczący ubezpieczenia od ryzyka ciężkiej choroby.

Słowa kluczowe: zmodyfikowany model wielostanowy, indeksacja, składki netto, rezerwa prospektywna, ubezpieczenia wielostanowe.

1. Wstęp

Z realizacją umów ubezpieczeń wielostanowych związane są różnego rodzaju przepływy środków pieniężnych, które tworzą strumienie finansowe. Niniejszy artykuł poświęcony jest zagadnieniu indeksacji świadczeń (a w konsekwencji składek i rezerw) ubezpieczeniowych, które mają istotną rolę w konstrukcji ubezpieczeń odpornych na inflację oraz ubezpieczeń, w których wysokość świadczeń może być dostosowywana do zmieniających się zarobków ubezpieczonego; por. [6; 8; 9].

Strumienie przepływów pieniężnych analizowane są z finansowego punktu widzenia przy użyciu zmodyfikowanego modelu wielostanowego. W artykule rozważany jest przypadek, w którym każdy rodzaj świadczenia ubezpieczeniowego, składki oraz rezerwa prospektywna mają własną stopę indeksacji. Zakładamy, że stopa procentowa jest ustalona. Najważniejszym celem jest jednolite i formalne ujęcie

* Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2011 jako projekt badawczy nr 2293/B/H03/2009/36..

całej złożonej problematyki indeksacji ubezpieczeń wielostanowych, w szczególności wyznaczenie ogólnego wzoru (który mógłby być wykorzystany do każdego typu ubezpieczenia wielostanowego) na wysokości stóp indeksacji dla rezerwy przy założeniu, że wysokości stóp indeksacji dla wszystkich typów przepływów pieniężnych są dane.

Ubezpieczeniem wielostanowym nazywa się umowę ubezpieczenia obejmującą różne przypadki życiowe. Ubezpieczenia tego typu składają się z podstawowej umowy ubezpieczenia (jest to zazwyczaj umowa ubezpieczenia na życie) oraz ubezpieczeń dodatkowych, czyli tzw. opcji (np. umowa ubezpieczenia od ryzyka trwałego inwalidztwa, ciężkiej choroby, niezdolności do pracy). Najprostszą formą ubezpieczenia wielostanowego jest więc ubezpieczenie na życie. Podstawą aktuarialno-finansowej analizy ubezpieczenia jest skonstruowanie jego matematycznego modelu. Pierwszym krokiem jest opis możliwych zdarzeń losowych (przypadków życiowych), które obejmuje umowa ubezpieczenia podstawowego wraz z umowami ubezpieczeń dodatkowych, a następnie określenie wszystkich możliwych przebiegów ubezpieczenia. W tym celu definiuje się tzw. model wielostanowy (pkt 2) oraz przepływy pieniężne wynikające z zawarcia umowy ubezpieczenia (pkt 3). Następnym krokiem jest wyznaczenie wartości aktualnej i aktuarialnej przepływów pieniężnych, które z kolei służą do wyznaczania składek i rezerw netto. Naturalną własnością modeli wielostanowych jest to, że duża liczba zdarzeń losowych objętych umową ubezpieczenia znacznie zwiększa złożoność modelu (z powodu dużej liczby możliwych realizacji kontraktu ubezpieczeniowego). Dzięki zastosowaniu zmodyfikowanego modelu wielostanowego (pkt 4), w celu uproszczenia zapisu i obliczeń numerycznych, przedstawiona została macierzowa reprezentacja wzoru na składki i rezerwy (pkt 5). Umożliwiło to wprowadzenie macierzowego zapisu indeksowanych przepływów pieniężnych (pkt 6) oraz wyznaczenie macierzowego wzoru na wysokości stóp indeksacji dla rezerw prospektywnych (pkt 7), który może być wykorzystany w odniesieniu do dowolnego ubezpieczenia wielostanowego. Ilustracją zastosowania reprezentacji macierzowej do obliczania składek, rezerw i stóp indeksacji dla rezerw jest przykład numeryczny dotyczący ubezpieczenia od ryzyka ciężkiej choroby opisany w pkt 8.

2. Model wielostanowy

Każdemu przypadkowi życiowemu, którego dotyczy opcja lub umowa ubezpieczenia podstawowego, odpowiada stan (lub status jak w [3]), w jakim znalazł się ubezpieczony. Przyjmijmy, że N ($N<\infty$) oznacza liczbę wszystkich możliwych stanów oraz $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ oznacza skończoną przestrzeń stanów.

Ponadto niech para (i, j), gdzie $i \neq j$ oraz $i, j \in S$, oznacza bezpośrednie przejście ze stanu i do stanu j. Niech T oznacza zbiór wszystkich możliwych bezpośrednich przejść między stanami.

Para (S, T), opisująca wszystkie możliwe zdarzenia zachodzące w życiu ubezpieczonego w okresie objętym umową ubezpieczenia, nazywana jest modelem wielostanowym (por. [6]).

Badanie i analiza zmian stanów (ewolucji statusu ubezpieczonej osoby) od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia jest jednym z podstawowych elementów wpływających na wycenę umowy ubezpieczenia.

Niech x oznacza wiek ubezpieczonego w chwili podpisywania umowy ubezpieczenia. Dla danej umowy ubezpieczenia, reprezentowanej przez model wielostanowy (S, T), funkcja $X(x,t) \in S$, gdzie $X(x,t) \in S$ dla $i \in S$, $t \in \mathrm{T}$, oznacza, że w chwili t (oznaczającej czas, jaki upłynął od rozpoczęcia umowy ubezpieczenia) ubezpieczonego dotyczy przypadek życiowy, któremu został przypisany stan i. Ponieważ analiza dotyczy pojedynczej polisy, to dla uproszczenia zapisu pomijany będzie wiek wstępu ubezpieczonego, tzn. $X(x,t) = X(t)$.

Przyjmuje się, że $\{X(t)\colon t \in \mathrm{T}\}$ jest procesem stochastycznym przyjmującym wartości ze skończonej przestrzeni stanów S.

W dalszych rozważaniach zakłada się, że $\mathrm{T} \subseteq \{0, 1, 2, 3,\ldots\}$, a zatem $\{X(t)\colon t \in \mathrm{T}\} = \{X(t)\colon t = 0, 1, 2, 3,\ldots\}$. Oznacza to, że analiza dotyczy ubezpieczeń, w których okres ubezpieczenia został podzielony na rozłączne odcinki czasu, np. dni, miesiące lub lata. Jeżeli okres ubezpieczenia został podzielony na lata, wówczas dla t-tego roku trwania okresu ubezpieczenia świadczenia płatne z dołu realizowane są w momencie t trwania okresu ubezpieczenia (na końcu roku t). Natomiast świadczenia płatne z góry (np. renta płatna z góry) oraz składki za ten rok realizowane są w momencie $t - 1$ trwania okresu ubezpieczenia (na początku roku t).

Zakłada się, że w jednej jednostce czasu proces $\{X(t)\}$ może zmienić stan tylko jeden raz (może zajść tylko jedno zdarzenie losowe). Ponadto przyjmuje się, że umowa ubezpieczenia została zawarta w momencie 0 na n jednostek czasu, gdzie n jest okresem ubezpieczenia.

Podstawowymi wielkościami opisującymi ewolucję procesu $\{X(t)\}$ są rozkłady skończenie wymiarowe. W szczególności zakładać będziemy, że $\{X(t)\}$ jest niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa. Wtedy do określenia jedno- i dwuwymiarowych rozkładów wystarczy znajomość wektora rozkładu początkowego $\mathbf{P}(0) = (1, 0, 0\ldots, 0)^T \in R^N$ oraz ciągu macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbf{Q}(0), \mathbf{Q}(1),\ldots, \mathbf{Q}(t),\ldots$, gdzie $\mathbf{Q}(t) = \left(q_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{N}$ natomiast
$q_{ij}(t) = \mathrm{P}(X(t+1) = j \mid X(t) = i)$.

3. Przepływy pieniężne i ich wartość

W wyniku zawarcia umowy ubezpieczenia powstają dwa strumienie przepływów pieniężnych, których wysokość i moment wypłaty określają warunki umowy ubezpieczenia. Pierwszym z nich jest strumień składek (skierowany od ubezpieczonego do ubezpieczyciela), a drugim − strumień świadczeń ubezpieczeniowych, np. sumy ubezpieczenia wypłacane w wyniku śmierci lub dożycia, oraz różnego typu renty (skierowany od ubezpieczyciela do ubezpieczonego).

W wyniku realizacji umowy ubezpieczenia wielostanowego mogą być realizowane następujące typy przepływów pieniężnych (por. [6; 7]):

$p_j(t)$ − składka płacona w momencie t, gdy $X(t)=j$,

$\pi_j(t)$ − jednorazowa składka płacona w ustalonym momencie t, jeżeli $X(t)=j$,

$\ddot{b}_j(t)$ − renta płacona z góry w momencie t, gdy $X(t)=j$,

$b_j(t)$ − renta płacona z dołu w momencie t, gdy $X(t)=j$,

$d_j(t)$ − jednorazowe świadczenie płacone w ustalonym momencie t, jeżeli $X(t)=j$,

$c_{ij}(t)$ − jednorazowe świadczenie płacone w momencie t, gdy $X(t)=j$, a $X(t-1)=i$.

Zauważmy, że strumień składek tworzą przepływy pieniężne typu $p_j(t)$ oraz $\pi_j(t)$. W skrócie będą one oznaczane przez $\{p, \pi\}$. Natomiast strumień świadczeń tworzą przepływy pieniężne typu $\ddot{b}_j(t)$, $b_j(t)$, $d_j(t)$ oraz $c_{ij}(t)$, które w skrócie oznaczane będą przez $\{\ddot{b}, b, d, c_1, c_2,\ldots, c_N\}$. Zauważmy, że c_i oznacza jednorazowe świadczenie związane z przejściem procesu ze stanu i, a ponieważ wysokość świadczenia płaconego w stanie j może zależeć od tego, w jakim stanie był proces $\{X(t)\}$ w momencie poprzedzającym przejście, to w symbolicznym oznaczeniu strumienia świadczeń wyróżnione zostały wszystkie możliwe wielkości.

Niech więc $\wp$ oznacza jeden z typów przepływów pieniężnych, tzn. $\wp \in \{p, \pi, \ddot{b}, b, d, c_1,\ldots, c_N\}$.

Kryterium podziału przepływów pieniężnych, istotnym z finansowego punktu widzenia, jest podział na przepływy pieniężne płatne z góry ($\wp \in \{p, \pi, \ddot{b}\}$) oraz przepływy pieniężne płatne z dołu ($\wp \in \{b, d, c_1,\ldots, c_N\}$). Okazuje się, że wyszczególnienie dwóch typów rent (płatnej z góry i płatnej z dołu) jest szczególnie ważne w przypadku $T \subseteq \{0, 1, 2,\ldots\}$. Umożliwia to bowiem właściwe określenie wielkości aktuarialnych związanych z tymi typami przepływów pieniężnych.

Niech u oznacza stopę procentową. Zakładamy, że jest ona stała podczas całego okresu ubezpieczenia. Wówczas wielkość $1 + u$ jest czynnikiem akumulacji, natomiast $v = (1+u)^{-1}$ jest czynnikiem dyskonta (por. [2; 3; 10]). Zakładamy, że kapitalizacja odbywa się jeden raz w jednostce czasu. Wtedy dla odcinka czasu $[t, k]$ funkcja akumulacji ma postać $r(t, k) = (1+u)^{k-t}$, a funkcja dyskonta $v(t, k) = (1+u)^{-(k-t)}$.

Niech $\Upsilon_t^{\wp,j}(k)$ będzie aktualną w momencie t wartością przepływu pieniężnego typu $\wp$ płaconego w chwili k ($0 \leq t \leq k$), gdy proces $\{X(t)\}$ jest w momencie k w stanie j.

Jeżeli $\wp$ jest jednym z przepływów pieniężnych związanych z pobytem procesu $\{X(t)\}$ w danym stanie, tzn. $\wp \in \{p, \pi, \ddot{b}, b, d\}$, to:

$$\Upsilon_t^{\wp,j}(k)=\begin{cases}\upsilon(t,k)_{\{X(k)=j\}}\wp_j(k) & \text{dla} \quad 0\le t<k\\ 1_{\{X(k)=j\}}\wp_j(k) & \text{dla} \quad 0\le t=k,\\ r(k,t)_{\{X(k)=j\}}\wp_j(k) & \text{dla} \quad 0\le k<t\end{cases} \tag{1}$$

gdzie $1_{\{X(k)=j\}}$ oznaczany jest indykator zdarzenia, że proces $\{X(t)\}$ jest w stanie j w chwili k $(t \geq 0)$.

Jeżeli $\wp$ jest jednym z przepływów pieniężnych związanych ze zmianą stanu przez proces $\{X(t)\}$ tzn. $\wp \in \{c_1,\ldots, c_N\}$, to wtedy

$$\Upsilon_t^{c_i,j}(k)=\begin{cases}\upsilon(t,k)1_{\{X(k-1)=i\wedge X(k)=j\}}c_{ij}(k) & \text{dla} \quad i\in S\setminus\{j\}\wedge 0\le t<k\\ 1_{\{X(k-1)=i\wedge X(k)=j\}}c_{ij}(k) & \text{dla} \quad i\in S\setminus\{j\}\wedge 0\le t=k\\ r(k,t)1_{\{X(k-1)=i\wedge X(k)=j\}}c_{ij}(k) & \text{dla} \quad i\in S\setminus\{j\}\wedge 0\le k<t\\ 0 & \text{dla} \quad i=j\end{cases}. \tag{2}$$

Z (1) i (2) wynika, że jeżeli $0 \leq t < k$ to $\Upsilon_t^{\wp,j}(k)$ jest zdyskontowaną na moment t wartością przepływu pieniężnego realizowanego w momencie k. Natomiast, gdy $0 \leq k < t$, to $\Upsilon_t^{\wp,j}(k)$ to jest zakumulowaną na moment t wartością przepływu pieniężnego realizowanego w momencie k.

4. Zmodyfikowany model wielostanowy

Niech ${}_tL$ oznacza prospektywną stratę (*prospective loss*) ubezpieczyciela w chwili t zdefiniowaną jako różnica między aktualną na moment t umowy wartością wszystkich przyszłych wypłat poniesionych przez ubezpieczyciela z tytułu zawarcia umowy (tzn. świadczeń za okres $[t, n]$) oraz przyszłych wpływów ze składek płaconych przez ubezpieczonego podczas trwania umowy ubezpieczenia (tzn. składek za okres $[t, n]$).

Formalnie prospektywną stratę ubezpieczyciela można zapisać w następującej postaci:

$${}_tL=\sum_{\wp\in\{\ddot{b},b,d,c_1,\ldots,c_N\}}\sum_{j\in S}\sum_{k=t+1}^{n}\Upsilon_t^{\wp,j}(k)+\sum_{j\in S}\Upsilon_t^{\ddot{b},j}(t)-\sum_{\wp\in\{p,\pi\}}\sum_{j\in S}\sum_{k=t}^{n-1}\Upsilon_t^{\wp,j}(k),$$

gdzie wielkości $\Upsilon_t^{\wp,j}(k)$ są zdyskontowaną na moment t wartością przepływu pieniężnego realizowanego w momencie k, dla $0 \leq t \leq k$.

Z finansowego punktu widzenia każdy przepływ pieniężny ($\wp \in \{\pi, p, \ddot{b}, b, d, c_1, c_2,\ldots, c_N\}$) jest wpłatą powiększającą fundusz strat ubezpieczyciela lub wypłatą pomniejszającą wielkość tego funduszu. Dlatego poszczególne przepływy pieniężne przyjmują odpowiednio dodatnie lub ujemne wartości. Na przykład dla funduszu określającego całkowitą stratę ubezpieczyciela $L = {}_0L$

wpłatami (o dodatnich wartościach) są świadczenia (tj. przepływy pieniężne typu $\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1,\ldots, c_N\}$), a wypłatami (o ujemnych wartościach) są składki (tzn. $\wp \in \{\pi, p\}$). Biorąc ten fakt po uwagę, całkowitą stratę ubezpieczyciela można zapisać w następujący sposób:

$$L = \sum_{t=0}^{n}\sum_{j\in S}\left(\ddot{b}_j(t) + b_j(t) + d_j(t) + \sum_{i\in S} c_{ij}(t)_{\{X(t-1)=i\}} - p_j(t) - \pi_j(t)\right)1_{\{X(t)=j\}}\upsilon(0,t). \quad (3)$$

We wzorze (3) czynnik $\ddot{b}_j(t) + b_j(t) + d_j(t) + \sum_{i\in S} c_{ij}(t)_{\{X(t-1)=i\}} - p_j(t) - \pi_j(t)$ jest wielkością określającą bilans wszystkich przepływów pieniężnych realizowanych w momencie t, gdy proces $\{X(t)\}$ jest w tym momencie w stanie j.

Niech $cf_j(t) = cf_{X(t)=j}(t)$ oznacza przepływ pieniężny (*casch flow*) realizowany w momencie t ($t = 0, 1, 2,\ldots, n$), jeżeli proces $\{X(t)\}$ jest w tym momencie w stanie j ($j = 1, 2,\ldots, N$).

Zauważmy, że wysokość przepływu pieniężnego w momencie t zależy od tego, jaką wartość w tym momencie przyjmie proces $\{X(t)\}$. Zatem $cf_j(t)$ jest zmienną losową, której rozkład zależy od rozkładu zmiennej losowej $X(t)$.

Z finansowego punktu widzenia przepływ pieniężny $cf_j(t)$ jest sumą wpływów reprezentujących wpłaty, które zasilają dany fundusz, oraz wydatków, które pomniejszają dany fundusz w momencie t, jeżeli proces $\{X(t)\}$ jest w tym momencie w stanie j. Ponieważ teoretycznie w momencie t mogą istnieć niezależnie wszystkie typy przepływów pieniężnych, to

$$cf_j(t) = \ddot{b}_j(t) + b_j(t) + d_j(t) + \sum_{i\in S/\{j\}} c_{ij}(t)_{\{X(t-1)=i\}} + p_j(t) + \pi_j(t), \quad (4)$$

gdzie dla $\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1,\ldots, c_N, p, \pi\}$

$$\wp = \begin{cases} >0, \text{ gdy } \wp \text{ jest wpływem} \\ <0, \text{ gdy } \wp \text{ jest wydatkiem} \end{cases}.$$

W tym świetle całkowitą stratę ubezpieczyciela (4) można zapisać następująco:

$$L = \sum_{t=0}^{n}\sum_{j\in S} cf_j(t)1_{\{X(t)=j\}}\upsilon(0,t). \quad (5)$$

Zauważmy, że jeżeli $cf_j(t)$ jest sumą przepływów typu $\pi_j(t)$, $p_j(t)$, $\ddot{b}_j(t)$, $b_j(t)$, lub $d_j(t)$ to dla każdego momentu t trwania umowy ubezpieczenia oraz dla dowolnego stanu j, jeżeli $X(t) = j$, to przepływ pieniężny $cf_j(t)$ jest jednoznacznie określony.

Jeżeli w wyniku realizacji umowy ubezpieczenia powstają przepływy pieniężne związane ze zmianą stanu (tj. $c_1,\ldots, c_N$), to przepływ pieniężny $cf_j(t)$ nie może być jednoznacznie określony. Oznacza to, że informacja $X(t) = j$ nie jest wystarczająca do jednoznacznego określenia wysokości przepływu pieniężnego realizowanego w momencie t. W takiej sytuacji nie jest możliwe bezpośrednie wprowadzenie notacji macierzowej.

Rozwiązaniem jest wprowadzenie rozbudowanego modelu wielostanowego (S^*, T^*). Sposób konstruowania (S^*, T^*) oraz jego struktury probabilistycznej przy założeniu, że proces $\{X(t)\}$ jest niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa został opisany w [5]. Dalsze rozważania dotyczyć będą rozbudowanego modelu wielostanowego (S^*, T^*), w którym $S^*=\{1, 2,\dots, N^*\}$ i $S^* = S \cup S^+$, a zbiór S^+ zawiera stany dodane do przestrzeni stanów S. Natomiast $T^* \subseteq \{\{i, j\} \mid i \neq j;\ i, j \in S^*\}$ jest podzbiorem wszystkich możliwych bezpośrednich przejść między stanami należącymi do przestrzeni stanów S^*. Ponadto proces $\{X^*(t)\}$ (o którym zakładamy, że jest niejednorodnym łańcuchem Markowa) opisuje ewolucje zmiany stanów w modelu (S^*, T^*).

Warunkami wprowadzenia rozbudowanego modelu wielostanowego jest przyjęcie założenia, że wysokości przepływów pieniężnych typu $c_{ij}(t)$ nie zależą od stanu i. Ponadto dla każdego stanu $j \in S$ z każdym przejściem do j muszą być związane przepływy pieniężne typu $c_{ij}(t)$ lub z żadnym z przejść do stanu j nie mogą być związane żadne przepływy pieniężne typu $c_{ij}(t)$. Założenia te oznaczają, że wysokość świadczenia związanego z przejściem między stanami może wyłącznie zależeć od stanu, w jakim jest proces $\{X(t)\}$ w chwili t.

Niech $cf_j^*(t) = cf_{X^*(t)=j}(t)$ oznacza przepływ pieniężny realizowany w momencie t ($t = 0, 1, 2,\dots, n$). Jeżeli proces $\{X^*(t)\}$ jest w tym momencie w stanie j ($j = 1, 2,\dots, N^*$), wtedy

$$cf_j^*(t) = \begin{cases} p_j(t) + \pi_j(t) + b_j(t) + d_j(t) + c_j(t) & \text{dla} \quad j \in S^+ \\ p_j(t) + \pi_j(t) + b_j(t) + d_j(t) & \text{dla} \quad j \in S \end{cases}. \tag{6}$$

Zauważmy, że $(S^*, T^*) = (S, T)$, gdy w wyniku realizacji umowy ubezpieczenia nie ma przepływów pieniężnych typu $c_1,\dots, c_N$.

5. Macierzowa reprezentacja składek i rezerw netto

W pierwszej kolejności wprowadzone zostaną oznaczenia niezbędne do przedstawienia składek i rezerw w formie macierzowej.

Niech $\mathbf{S} = (1, 1, 1,..., 1)^T \in R^{(n+1)}$. Ponadto dla każdego $t = 1, 2,\dots, n+1$ niech $\mathbf{I}_t = (0,0,\dots,\underset{t}{1},\dots,0)^T \in R^{(n+1)}$, a dla każdego $i = 1, 2,\dots, N^*$ niech $\mathbf{J}_i = (0,0,\dots,\underset{i}{1},\dots,0)^T \in R^{N^*}$.

Natomiast dla dowolnej macierzy $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n+1}$ macierz Diag($\mathbf{A}$) jest macierzą diagonalną, której elementami przekątnej są elementy przekątnej macierzy $\mathbf{A}$.

$$\operatorname{diag}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{N^*} \end{pmatrix}.$$

Dla dowolnej chwili t niech dany będzie następujący wektor

$$\mathbf{P}^*(t) = (pr_1^*(t), pr_2^*(t), pr_3^*(t), \dots, pr_{N^*}^*(t))^T \in R^{N^*}$$

prawdopodobieństw bycia procesu $\{X^*(t)\}$ w określonym stanie, gdzie $pr_i^*(t) = P(X^*(t) = i)$. Ponadto niech

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} P(0)^T \\ P(1)^T \\ \vdots \\ P(n)^T \end{pmatrix} \in R^{(n+1)\times N^*}. \tag{7}$$

Dla dowolnych chwil czasu t_1, $t_2 \in$ $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ niech macierz $\mathbf{Q}^*(t_1, t_2) = (q_{ij}^*(t_1, t_2))_{i,j=1}^{N^*}$ będzie macierzą prawdopodobieństw warunkowych, gdzie $q_{ij}^*(t_1, t_2) = P(X^*(t_2) = j \mid X^*(t_1) = i)$.

Przy założeniu, że $\{X^*(t);\ t = 0, 1, 2, \dots\}$ jest niejednorodnym w czasie łańcuchem Markowa macierze $\mathbf{P}^*(t)$ oraz $\mathbf{Q}^*(t_1, t_2)$ można wyrazić za pomocą wektora rozkładu początkowego $\mathbf{P}^*(0) = (1, 0, 0, \dots, 0)^T \in$ I R^{N^*} oraz ciągu macierzy prawdopodobieństw przejść $\mathbf{Q}^*(0)$, $\mathbf{Q}^*(1)$, $\mathbf{Q}^*(2), \dots, \mathbf{Q}^*(n-1)$ określonych dla procesu $\{X^*(t)\}$ w następujący sposób (por. [5]):

$$\mathbf{P}^T(t) = \mathbf{P}^T(0) \prod_{k=0}^{t-1} \mathbf{Q}^*(k),$$

$$\mathbf{Q}^*(t_1, t_2) = \prod_{t=t_1}^{t_2-1} \mathbf{Q}^*(t).$$

Ze stopą procentową związana jest macierz $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_{t_1 t_2})_{t_1, t_2 = 0}^{n} \in R^{(n+1)\times(n+1)}$, której elementy zawierają czynniki dyskontujące $\upsilon(t_1, t_2)$ i akumulujące $r(t_1, t_2) = (\upsilon(t_1, t_2))^{-1}$. Mianowicie dla stałej stopy procentowej macierz $\mathbf{\Lambda}$ jest następująca:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & \cdots & \upsilon^{n} \\ \upsilon^{-1} & 1 & \cdots & \upsilon^{n-1} \\ \upsilon^{-2} & \upsilon^{-1} & \cdots & \upsilon^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \upsilon^{-n} & \upsilon^{-(n-1)} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $\upsilon = (1 + u)^{-1}$.

Przepływy $cf_j^*(t)$ tworzą następującą macierz przepływów pieniężnych rozmiaru $(n+1) \times N^*$ określoną w następujący sposób:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} cf_1^*(0) & cf_2^*(0) & \cdots & cf_{N^*}^*(0) \\ cf_1^*(1) & cf_2^*(1) & \cdots & cf_{N^*}^*(1) \\ cf_1^*(2) & cf_2^*(2) & \cdots & cf_{N^*}^*(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cf_1^*(n) & cf_2^*(n) & \cdots & cf_{N^*}^*(n) \end{pmatrix} \in R^{(n+1)\times N^*}.$$

Dla $\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1, \ldots, c_{N^*}, p, \pi, \}$ niech

$$\mathbf{C}_\wp = \left(\wp_i(t)\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,N^* \\ t=0,1,\ldots,n^*}} \in R^{(n^*+1)\times N^*}$$

będzie macierzą przepływów pieniężnych typu $\wp$. Wtedy dla funduszu strat ubezpieczyciela L mamy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \sum_{\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1, \ldots, c_{N^*}, p, \pi\}} \mathbf{C}_\wp \\ &= \mathbf{C}_{\ddot{b}} + \sum_{\wp \in \{b, d, c_1, \ldots, c_{N^*}\}} \mathbf{C}_\wp + \sum_{\wp \in \{p, \pi\}} \mathbf{C}_\wp \\ &= \mathbf{C}_{\overline{in}} + \mathbf{C}_{\underline{in}} + \mathbf{C}_{out} = \mathbf{C}_{in} + \mathbf{C}_{out}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{C}_{in} = (cf_j^{in}(t)) \in R^{(n+1)\times N^*}$ zawierająca jedynie wpływy (*inflows*) do danego funduszu jest sumą wpływów płatnych z góry $\mathbf{C}_{\overline{in}}$ i wpływów płatnych z dołu $\mathbf{C}_{\underline{in}}$. Natomiast $\mathbf{C}_{out} = (cf_j^{out}(t)) \in R^{(n+1)\times N^*}$ zawiera jedynie wydatki (*outgo*) pomniejszające dany fundusz. Zauważmy, że

$$cf_j^{in}(t) = \ddot{b}_j(t) + b_j(t) + d_j(t) + c_j(t),$$
$$cf_j^{out}(t) = -(p_j(t) + \pi_j(t))$$

dla funduszu strat ubezpieczyciela.

Wartością aktuarialną na chwilę t przepływu pieniężnego $\wp$ realizowanego w momencie k, gdy $X(k) = j$ oraz $X(t) = i$, nazywamy warunkową wartość oczekiwaną $E(\Upsilon_t^{\wp,j}(k) \mid X(t) = i)$.

Wówczas dla

- $\wp \in \{p, \pi, \ddot{b}, b, d\}$ mamy, że

$$E(\Upsilon_t^{\wp,j}(k) \mid X(t) = i) = \begin{cases} \upsilon(t,k) q_{ij}^*(t,k) \wp_j(k) & \text{dla} \quad 0 \le t < k \\ \wp_j(k) & \text{dla} \quad 0 \le t = k \quad \text{i} \quad i = j \\ 0 & \text{dla} \quad 0 \le t = k \quad \text{i} \quad i \ne j \\ r(k,t) q_{ji}^*(k,t) \wp_j(k) & \text{dla} \quad 0 \le k < t \end{cases}, \qquad (8)$$

- $\wp \in \{c_1, \ldots, c_{N^*}\}$ mamy, że

$$E(\Upsilon_t^{c_h, j}(k) \mid X(t) = i) = \begin{cases} \upsilon(t,k) q^*_{ih}(t,k-1) q^*_{hj}(k-1,k) c_{hj}(k) & \text{dla} \quad h \in S \setminus \{j\} \\ & \quad \text{oraz } 0 \le t < k \\ q^*_{hi}(t-1,t) c_{hi}(t) & \text{dla} \quad h \in S \setminus \{i\} \\ & \quad \text{oraz } 0 \le t = k \text{ i } j = i. \\ r(k,t) q^*_{hj}(k-1,k) q^*_{ji}(k,t) c_{hj}(k) & \text{dla} \quad h \in S \setminus \{j\} \\ & \quad \text{oraz } 0 \le k < t \\ 0 & \text{poza} \quad \text{tym} \end{cases}$$

W twierdzeniu 5.1 przedstawione zostały macierzowe formuły na obliczenie jednorazowej i okresowej składki netto przy założeniu, że spełniona jest zasada równoważności (wyrażona równością $E(L) = 0$); por. [5].

Twierdzenie 5.1. Załóżmy, że spełniona jest zasada równoważności, a stopa procentowa jest stała w całym okresie ubezpieczenia. Ponadto dla modelu wielostanowego (S^*, T^*) macierz przepływów pieniężnych $\mathbf{C}_{in}$ określona jest dla funduszu strat ubezpieczyciela L oraz składki są płacone wtedy, gdy proces $X^*(t) = 1$. Wówczas:

- Jednorazowa składka netto π płatna na początku okresu ubezpieczenia jest postaci
$$\pi = \mathbf{I}_1^T \ \mathbf{\Lambda}^T Diag\left(\mathbf{C}_{in} \ \mathbf{D}^T \right) \mathbf{S} \ . \tag{9}$$
- Stała okresowa składka netto p płatna z góry przez pierwszych m ($0 \le m \le n$) jednostek czasu, na jaki został podzielony okresu ubezpieczenia n, jest postaci
$$p = \frac{\mathbf{I}_1^T \ \mathbf{\Lambda}^T Diag\left(\mathbf{C}_{in} \ \mathbf{D}^T \right) \mathbf{S}}{\mathbf{I}_1^T \ \mathbf{\Lambda}^T \left[\ \mathbf{I} - \sum_{t=m+1}^{n+1} \mathbf{I}_t \ \mathbf{I}_t^T \right] \mathbf{D} \ \mathbf{J}_1} \ . \tag{10}$$

Dowód. Dowód jest analogiczny jak w [5]. Wystarczy zauważyć, że dla stałej stopy procentowej $\mathbf{\Lambda} \ \ \mathbf{I}_1 = (1, \upsilon, \upsilon^2, \ldots, \upsilon^n)^T$ jest wektorem funkcji dyskontującej w całym okresie ubezpieczenia i jest odpowiednikiem wektora $\mathbf{M}$ określonego dla stochastycznej stopy procentowej.

Niech $\mathbf{V}(t) = (V_1(t), V_2(t), \ldots, V_{N^*}(t))^T \in R^{N^*}$ będzie wektorem rezerw prospektywnych w momencie t dla wszystkich stanów przestrzeni stanów S^* oraz

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}(0)^T \\ \mathbf{V}(1)^T \\ \vdots \\ \mathbf{V}(n)^T \end{pmatrix} \in R^{(n+1) \times N^*}$$

będzie macierzą rezerw prospektywnych określonych w całym okresie ubezpieczenia.

Twierdzenie 5.2. Dla ubezpieczenia z modelem wielostanowym ($\mathbf{S}^*$, $\mathbf{T}^*$) dla każdego $t \in \{0, 1,\ldots, n\}$ zachodzi $V(t) = \left({}^{T}_{out} + {}^{T}_{\overline{in}} + F^T\left(t,\mathbf{C}\right)\boldsymbol{\Lambda}\right)\mathbf{I}_{t+1}$, gdzie macierz przepływów pieniężnych $\mathbf{C}_{\overline{in}}$ oraz $\mathbf{C}_{out}$ określone są dla funduszu strat ubezpieczyciela L oraz

$$F^T(t,\mathbf{C}) = \sum_{k=t+1}^{n} \prod_{u=t}^{k-1} \mathbf{Q}^*(u)\mathbf{C}^T\ \mathbf{I}_{k+1}\ \mathbf{I}^T_{k+1}\ . \tag{11}$$

Dowód. Dowód jest analogiczny jak w [4], trzeba jedynie uwzględnić rentę płatną z góry oraz zależność $\boldsymbol{\Lambda}\ \mathbf{I}_1 = \mathbf{M}$.

Uwaga 5.1. W praktyce warto analizować tylko te elementy macierzy V, które mają szansę być zrealizowane. Niech

$$\mathbf{V}^{real} = \left[V_i^{real}(t)\right]_{\substack{i=1,2,\ldots,N^* \\ t=0,1,\ldots,n}} \in R^{(n+1)\times N^*}, \tag{12}$$

gdzie

$$\mathbf{V}_i^{real}(t) = \begin{cases} \mathbf{J}_i^T \mathbf{V}^T\ \mathbf{I}_{t+1} & \text{dla} \quad \mathbf{J}_i^T\ \mathbf{D}^T\ \mathbf{I}_{t+1} > 0 \\ - & \text{dla} \quad \mathbf{J}_i^T\ \mathbf{D}^T\ \mathbf{I}_{t+1} = 0 \end{cases}$$

będzie tablicą zawierającą rezerwy prospektywne, które mają szansę być zrealizowane w rzeczywistości. Tablica (12) ułatwia analizę $V_i(t)$, gdyż redukuje liczbę wielkości, które trzeba brać pod uwagę.

6. Indeksacja przepływów pieniężnych

Niech $g_i^{\wp}(t)$ będzie stopą indeksacji (*adjustment rate*) przepływu pieniężnego $\wp_i(t)$. Załóżmy, że $g_i^{\wp}(t) = 0$ dla $t = 0$ (gdyż w momencie wykupienia ubezpieczenia nie ma jeszcze indeksacji) oraz $t = n$ (bo w momencie kończącym okres ubezpieczenia nie ma potrzeby niczego indeksować). Dla przepływu pieniężnego typu $\wp$ wprowadźmy macierz stóp indeksacji w całym okresie ubezpieczenia

$$\mathbf{G}_{\wp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1^{\wp}(1) & g_2^{\wp}(1) & \cdots & g_{N^*}^{\wp}(1) \\ g_1^{\wp}(2) & g_2^{\wp}(2) & \cdots & g_{N^*}^{\wp}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^{\wp}(n-1) & g_2^{\wp}(n-1) & \cdots & g_{N^*}^{\wp}(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in R^{(n+1)\times N^*}. \tag{13}$$

Ponadto niech

$$\begin{aligned} cf_i^{*g}(t) &= \sum_{\wp \in \{\ddot{b},b,d,c_1,\dots,c_{N^*},p,\pi\}} \wp_i(t)(1+g_i^{\wp}(t)) \\ &= cf_i^*(t) + \sum_{\wp \in \{\ddot{b},b,d,c_1,\dots,c_{N^*},p,\pi\}} \wp_i(t) g_i^{\wp}(t) \end{aligned} \tag{14}$$

będzie indeksowanym przepływem pieniężnym płaconym w momencie t, gdy $X^*(t) = i$, oraz niech

$$\mathbf{C}^g = \begin{pmatrix} cf_1^{*g}(0) & cf_2^{*g}(0) & \cdots & cf_{N^*}^{*g}(0) \\ cf_1^{*g}(1) & cf_2^{*g}(1) & \cdots & cf_{N^*}^{*g}(1) \\ cf_1^{*g}(2) & cf_2^{*g}(2) & \cdots & cf_{N^*}^{*g}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cf_1^{*g}(n) & cf_2^{*g}(n) & \cdots & cf_{N^*}^{*g}(n) \end{pmatrix} \in R^{(n+1)\times N^*}$$

będzie macierzą indeksowanych przepływów pieniężnych w całym okresie ubezpieczenia.

W twierdzeniu 6.1 przedstawiono reprezentację macierzową $\mathbf{C}^g$ przy założeniu, że stopa indeksacji każdego z typów przepływów pieniężnych jest stała przez cały okres ubezpieczenia.

Twierdzenie 6.1. Załóżmy, że dla ubezpieczenia wielostanowego z modelem wielostanowym (S^*, T^*) stopa indeksacji dla każdego z typów przepływów pieniężnych $\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1,\dots, c_{N^*}, p, \pi\}$ spełnia

$$g_i^{\wp}(t) = \begin{cases} g^{\wp} & \text{dla} \quad t = 1,2,\dots,n-1 \\ 0 & \text{dla} \quad t = 0 \wedge t = n \end{cases}.$$

Wtedy macierz indeksowanych przepływów pieniężnych jest postaci $\mathbf{C}^g = \mathbf{C} + \sum_{\wp \in \{\ddot{b},b,d,c_1,\dots,c_{N^*},p,\pi\}} \mathbf{C}_{\wp} g^{\wp}$, gdzie macierze przepływów pieniężnych $\mathbf{C}_{\wp}$ określone są dla funduszu strat ubezpieczyciela L.

Dowód. Z założenia, iż $\forall_i \forall_{t=1,2,\dots,n-1} g_i^{\wp}(t) = g^{\wp}$ mamy $\mathbf{G}_{\wp} = g^{\wp}\mathbf{G}_1$, gdzie

$$\mathbf{G}_1 = (\mathbf{S} - (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_{n+1})) \cdot \mathbf{S}^T. \tag{15}$$

Ponadto (por. (14))

$$cf_i^{*g}(t) = \sum_{\wp \in \{\ddot{b},b,d,c_1,\dots,c_{N^*},p,\pi\}} \mathbf{I}_{t+1}^T \mathbf{C}_{\wp} \mathbf{J}_i \left(1 + \mathbf{I}_{t+1}^T \mathbf{G}_{\wp} \mathbf{J}_i\right). \tag{16}$$

Po podstawieniu (15) w (16) otrzymujemy

$$cf_i^{*g}(t) = \sum_{\wp\in\{\ddot{b},b,d,c_1,\ldots,c_{N^*},p,\pi\}} \mathbf{I}_{t+1}^T \mathbf{C}_\wp \mathbf{J}_i\left(1+\mathbf{I}_{t+1}^T g^\wp(\mathbf{S}-(\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_{n+1}))\cdot\mathbf{S}^T\mathbf{J}_i\right.$$

$$= \mathbf{J}_i^T\mathbf{C}^T\mathbf{I}_{t+1} + \mathbf{J}_i^T\left(\sum_{\wp\in\{\ddot{b},b,d,c_1,\ldots,c_{N^*},p,\pi\}} \mathbf{C}_\wp^T g^\wp\right)\mathbf{I}_{t+1}\mathbf{I}_{t+1}^T(\mathbf{S}-(\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_{n+1})). \quad (17)$$

Ponieważ $\mathbf{I}_{t+1} = \mathbf{I}_{t+1}\mathbf{I}_{t+1}^T(\mathbf{S}-(\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_{n+1}))$, (17) można zapisać następująco

$$cf_i^{*g}(t) = \mathbf{J}_i^T\mathbf{C}^T\mathbf{I}_{t+1} + \mathbf{J}_i^T\left(\sum_{\wp\in\{\ddot{b},b,d,c_1,\ldots,c_{N^*},p,\pi\}} \mathbf{C}_\wp^T g^\wp\right)\mathbf{I}_{t+1}$$

$$= \mathbf{J}_i^T\left(\mathbf{C}^T + \sum_{\wp\in\{\ddot{b},b,d,c_1,\ldots,c_{N^*},p,\pi\}} \mathbf{C}_\wp^T g^\wp\right)\mathbf{I}_{t+1}$$

co kończy dowód, gdyż $cf_i^{*g}(t) = \mathbf{J}_i^T\mathbf{C}^{gT}\mathbf{I}_{t+1}$.

Jeśli stopa indeksacji ustalona jest na takim samym poziomie dla wszystkich typów świadczeń, to macierz $\mathbf{C}^g$ ma prostszą formę, co zostało pokazane we wniosku 6.1 i wniosku 6.2.

Wniosek 6.1. Załóżmy, że dla ubezpieczenia wielostanowego z modelem wielostanowym (S^*, T^*) zachodzi

$$g_i^\wp(t) = \begin{cases} g^{in} & \text{dla} \quad \wp\in\{\ddot{b},b,d,c_1,\ldots,c_{N^*}\}\wedge t=1,2,\ldots,n-1 \\ g^{out} & \text{dla} \quad \wp\in\{p,\pi\}\wedge t=1,2,\ldots,n-1 \\ 0 & \text{dla} \quad t=0\wedge t=n \end{cases}.$$

Wtedy macierz indeksowanych przepływów pieniężnych jest postaci $\mathbf{C}^g = \mathbf{C}_{in}(1+g^{in}) + \mathbf{C}_{out}(1+g^{out})$ gdzie macierze przepływów pieniężnych $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_{out}$ oraz $\mathbf{C}_{in}$ określone są dla funduszu strat ubezpieczyciela L.

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 6.1.

Wniosek 6.2. Załóżmy, że dla ubezpieczenia wielostanowego z modelem wielostanowym (S^*, T^*) zachodzi

$$g_i^\wp(t) = \begin{cases} g & \text{dla} \quad t=1,2,\ldots,n-1 \\ 0 & \text{dla} \quad t=0\wedge t=n \end{cases}$$

dla każdego typu przepływu pieniężnego $\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1,\dots, c_{N^*}, p, \pi\}$. Wtedy macierz indeksowanych przepływów pieniężnych jest postaci $\mathbf{C}^g = \mathbf{C}\,(1+g)$, gdzie macierz przepływów pieniężnych $\mathbf{C}$ określona jest dla funduszu strat ubezpieczyciela L.

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 6.1.

7. Indeksacja rezerw prospektywnych

Przejdźmy obecnie do indeksacji rezerw. Niech $g_i^v(t)$ będzie stopą indeksacji rezerwy $V_i(t)$. Analogicznie do wprowadzonych w (13) macierzy stóp indeksacji przepływów pieniężnych wprowadźmy macierz $\mathbf{G}_v$ stóp indeksacji rezerw w całym okresie ubezpieczenia.

Ponadto niech $V_i^g(t) = V_i(t)(1+g_i^v(t))$ będzie indeksowaną rezerwą realizowaną w momencie t, gdy $X^*(t) = i$.

Wysokości stóp procentowych $g_i^{\wp}(t)$ dla $\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1,\dots, c_{N^*}, p, \pi\}$ oraz $g_i^v(t)$ określa się w ten sposób, aby spełniona była zasada równoważności, która z twierdzenia 5.2 jest postaci

$$\mathbf{J}_i^T\left(\mathbf{C}_{out}^{gT} + \mathbf{C}_{\overline{in}}^{gT} + F^T(t,\mathbf{C}^g)\,\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{I}_{t+1} = \mathbf{J}_i^T\mathbf{V}^T\,\mathbf{I}_{t+1}\left(1+\mathbf{J}_i^T\,\mathbf{G}_v^T\,\mathbf{I}_{t+1}\right). \tag{18}$$

Lewa strona równości (18) zależy od stóp indeksacji określonych dla składek i świadczeń. Natomiast prawa strona równości (18) zależy wyłącznie od stopy indeksacji rezerw. Równość (18) umożliwia określenie stopy indeksacji dla wybranego typu przepływu pieniężnego $\wp$ lub rezerwy przy założeniu, że wysokości stóp indeksacji dla pozostałych typów przepływów pieniężnych są dane.

Twierdzenie 7.1. Załóżmy, że dla ubezpieczenia wielostanowego z modelem wielostanowym (S^*, T^*) stopy indeksacji $g_i^{\wp}(t)$ dla każdego z typów przepływów pieniężnych $\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1,\dots, c_{N^*}, p, \pi\}$ są ustalone w całym okresie ubezpieczenia. Jeżeli $g_i^v(t)$ określone jest następująco

$$g_i^v(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{J}_i^T\left(\mathbf{C}_{out}^{gT} + \mathbf{C}_{\overline{in}}^{gT} + F^T(t,\mathbf{C}^g)\,\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{I}_{t+1}}{\mathbf{J}_i^T\left(\mathbf{C}_{out}^{T} + \mathbf{C}_{\overline{in}}^{T} + F^T(t,\mathbf{C})\,\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{I}_{t+1}} - 1 & \text{dla} \quad t = 1,2,\dots,n-1 \\ 0 & \text{dla} \quad t = 0 \wedge t = n \end{cases},$$

a macierze przepływów pieniężnych $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_{out}$ oraz $\mathbf{C}_{\overline{in}}$ określone są dla funduszu strat ubezpieczyciela L, to spełniona jest zasada równoważności (18).

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z (18) oraz twierdzenia 5.2.

Wniosek 7.1. Załóżmy, że dla ubezpieczenia wielostanowego z modelem wielostanowym (S^*, T^*)

$$g_i^{\wp}(t) = \begin{cases} g^{in} & \text{dla} \quad \wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1,\dots, c_{N^*}\} \wedge t = 1,2,\dots,n-1 \\ g^{out} & \text{dla} \quad \wp \in \{p, \pi\} \wedge t = 1,2,\dots,n-1 \\ 0 & \text{dla} \quad t = 0 \wedge t = n \end{cases}$$

i spełniona jest zasada równoważności (18). Wtedy stopa indeksacji dla rezerwy $g_i^v(t)$ jest postaci

$$g_i^v(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{J}_i^T (g^{out}(F^T(t,\mathbf{C}_{out})\mathbf{\Lambda}) + g^{in}(\mathbf{C}_{\overline{in}}^T + F^T(t,\mathbf{C}_{in})\mathbf{\Lambda}))\mathbf{I}_{t+1}}{\mathbf{J}_i^T(\mathbf{C}_{out}^T + \mathbf{C}_{\overline{in}}^T + F^T(t,\mathbf{C})\mathbf{\Lambda})\mathbf{I}_{t+1}} & \text{dla } t = 1,2,\ldots n-1 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \wedge t = n \end{cases}$$

gdzie macierze przepływów pieniężnych $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_{out}$, $\mathbf{C}_{\overline{in}}$ oraz $\mathbf{C}_{in}$ określone są dla funduszu strat ubezpieczyciela L.

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 7.1 oraz z wniosku 6.1, a także z własności addytywności macierzy $F(t,\mathbf{C})$ (w szczególności mamy, że $F(t,\mathbf{C}) = F(t,\mathbf{C}_{\overline{in}}) + F(t,\mathbf{C}_{\underline{in}}) + F(t,\mathbf{C}_{out})$).

Zauważmy, że mimo iż stopa indeksacji g^{in} dla każdego typu świadczenia jest stała oraz stopa indeksacji g^{out} dla każdego typu składki jest stała, to stopa indeksacji dla rezerwy $g_i^v(t)$ zależy od czasu trwania ubezpieczenia. Dopiero gdy $g^{in} = g^{out} = g$, to stopa indeksacji dla rezerwy nie zależy od czasu trwania ubezpieczenia i dla $t \neq 0$ oraz $t \neq n$ mamy, że $g_i^v(t) = g$.

Wniosek 7.2. Załóżmy, że dla ubezpieczenia wielostanowego z modelem wielostanowym (S^*, T^*) dla każdego typu przepływu pieniężnego $\wp \in \{\ddot{b}, b, d, c_1,\ldots, c_{N^*}, p, \pi\}$

$$g_i^{\wp}(t) = \begin{cases} g \text{ dla } t = 1,2,\ldots n-1 \\ 0 \text{ dla } t = 0 \wedge t = n \end{cases}$$

i spełniona jest zasada równoważności (18). Wtedy $g_i^v(t) = g_i^{\wp}(t)$.

Dowód. Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 7.1 oraz z wniosku 6.2.

W twierdzeniu 7.1 oraz we wnioskach z niego wynikających przedstawione zostały wzory na wyznaczenie wysokości stopy indeksacji dla rezerwy przy założeniu, że wysokości stóp indeksacji dla wszystkich typów przepływów pieniężnych są dane. W analogiczny sposób można wyznaczyć wysokości stóp indeksacji dla wybranego typu przepływu pieniężnego $\wp$ przy założeniu, że wysokości stóp indeksacji dla pozostałych typów przepływów pieniężnych oraz rezerwy są z góry ustalone.

8. Przykłady numeryczne

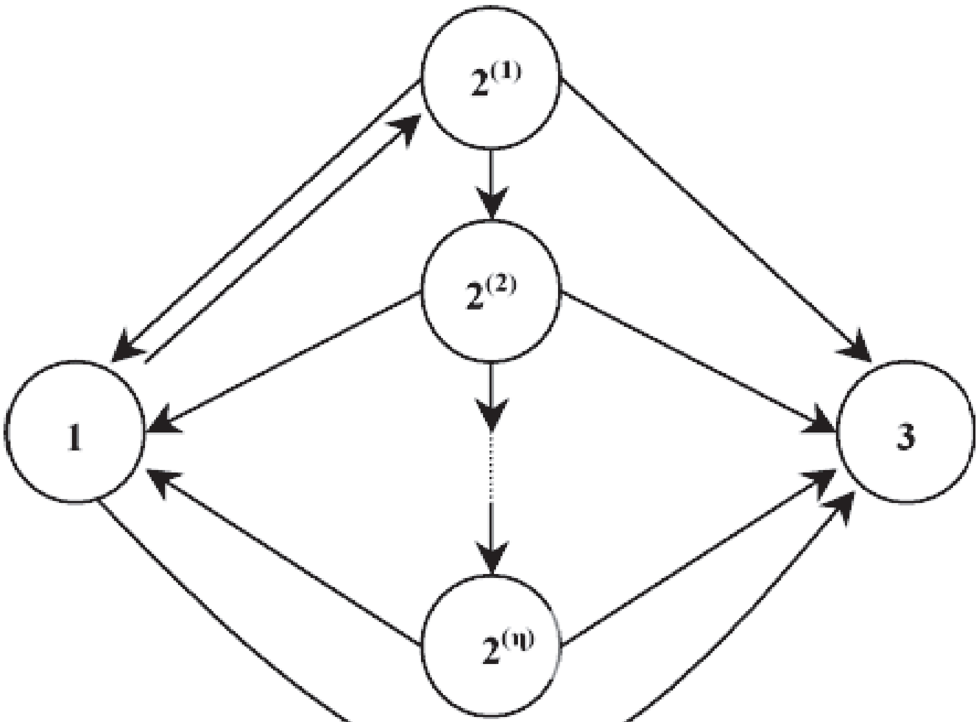
Rozważmy n-letnie ubezpieczenie od ryzyka ciężkiej choroby, w wyniku którego chory w razie określonej choroby otrzymuje stałą rentę. Raty renty są wypłacane przez okres choroby ubezpieczonego, jednak nie dłużej niż do końca okresu ubezpieczenia n. Takiej umowie ubezpieczenia odpowiada przestrzeń stanów z następującymi elementami:

1 − ubezpieczony znajduje się w dobrym zdrowiu,

2 − ubezpieczony jest chory,

3 − ubezpieczony nie żyje.

W modelu wielostanowym uwzględniono fakt, że przedłużająca się choroba znacząco zmniejsza szansę wyzdrowienia, co oznacza, że czas pobytu procesu $\{X(t)\}$ w stanie 2 ma istotny wpływ na prawdopodobieństwo powrotu procesu $\{X(t)\}$ do stanu 1. Stało się to motywacją do rozszerzenia przestrzeni stanów przez odpowiedni podział stanu 2. Stan 2 może być podzielony na η $(0 < \eta < n)$ stanów $2^{(1)}, 2^{(2)}, \ldots, 2^{(\eta)}$, gdzie stan $2^{(h)}$ oznacza, że ubezpieczony jest chory h-ty rok, a stan $2^{(\eta)}$ oznacza, że ubezpieczony jest chory co najmniej η lat. Ilustracją graficzną rozszerzonej przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi w tym przypadku jest rys. 1.



Rys. 1. Schemat modelu wielostanowego dla ubezpieczenia od ryzyka ciężkiej choroby

Źródło: opracowanie własne.

Rozważmy ubezpieczenie od ryzyka ciężkiej choroby dla osoby 40-letniej na okres $n = 10$ lat. Model wielostanowy tego ubezpieczenia przedstawiony jest na rys. 1 dla $\eta = 10$.

Dane określające poszczególne elementy macierzy D danej wzorem (7) zostały podane na podstawie badań statystycznych prowadzonych przez prywatnego ubezpieczyciela w Szwecji; por. [1].

$$D=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.9978 & 0.0012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0011\\
0.9957 & 0.0013 & 0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0022\\
0.9937 & 0.0014 & 0.0008 & 0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0034\\
0.9916 & 0.0016 & 0.0010 & 0.0007 & 0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0046\\
0.9893 & 0.0018 & 0.0011 & 0.0008 & 0.0007 & 0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0059\\
0.9868 & 0.0020 & 0.0012 & 0.0009 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0072\\
0.9843 & 0.0022 & 0.0014 & 0.0010 & 0.0008 & 0.0007 & 0.0006 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 & 0.0085\\
0.9815 & 0.0024 & 0.0015 & 0.0011 & 0.0010 & 0.0008 & 0.0007 & 0.0006 & 0.0005 & 0 & 0 & 0.0099\\
0.9785 & 0.0027 & 0.0017 & 0.0013 & 0.0011 & 0.0009 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0005 & 0.0004 & 0 & 0.0114\\
0.9753 & 0.0030 & 0.0019 & 0.0015 & 0.0012 & 0.0010 & 0.0009 & 0.0007 & 0.0006 & 0.0005 & 0.0004 & 0.0129
\end{pmatrix}.$$

Załóżmy, że w razie określonej w umowie choroby ubezpieczony otrzymuje stałą rentę w wysokości 1 jednostki. Raty renty wypłacane są przez okres choroby ubezpieczonego, jednak nie dłużej niż do końca okresu ubezpieczenia $n = 10$ lat. Postać macierzy przepływów pieniężnych zawierającej świadczenia jest następująca:

$$\mathbf{C}_{in} = \mathbf{C}_{\underline{in}} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Załóżmy, że roczna stopa procentowa jest równa 4% i jest stała w trakcie całego okresu ubezpieczenia. Wówczas macierz $\mathbf{\Lambda}$ jest postaci ($\upsilon = 0{,}9615$)

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & \upsilon^{-1} & \upsilon^{-2} & \upsilon^{-3} & \cdots & \upsilon^{-n} \\ \upsilon^{1} & 1 & \upsilon^{-1} & \upsilon^{-2} & \cdots & \upsilon^{-(n-1)} \\ \upsilon^{2} & \upsilon^{1} & 1 & \upsilon^{-1} & \cdots & \upsilon^{-(n-2)} \\ \upsilon^{3} & \upsilon^{2} & \upsilon^{1} & 1 & \cdots & \upsilon^{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \upsilon^{n-1} & \upsilon^{n-2} & \upsilon^{n-3} & \upsilon^{n-4} & \cdots & \upsilon^{-1} \\ \upsilon^{n} & \upsilon^{n-1} & \upsilon^{n-2} & \upsilon^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Na podstawie twierdzenia 5.1 okresowa składka netto płacona przez pierwszych 8 lat okres ubezpieczenia (m = 8) jest równa p = 0,0064 oraz

$$\mathbf{C}_{out}=\begin{pmatrix} -0.0064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0064 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Po skorzystaniu z twierdzenia 5.2 dla składki okresowej otrzymujemy, że macierz rezerw prospektywnych (uwzględniając uwagę 5.1) jest postaci

$$\mathbf{V}^{real}=\begin{pmatrix} 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0.0014 & 3.517 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0.0025 & 3.321 & 4.667 & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0.0033 & 3.089 & 4.278 & 4.900 & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0.0040 & 2.817 & 3.843 & 4.382 & 4.380 & - & - & - & - & - & - & 0 \\ 0.0045 & 2.501 & 3.358 & 3.813 & 3.811 & 3.809 & - & - & - & - & - & 0 \\ 0.0051 & 2.136 & 2.819 & 3.187 & 3.185 & 3.184 & 3.183 & - & - & - & - & 0 \\ 0.0059 & 1.717 & 2.220 & 2.498 & 2.497 & 2.497 & 2.496 & 2.495 & - & - & - & 0 \\ 0.0073 & 1.236 & 1.554 & 1.742 & 1.741 & 1.741 & 1.741 & 1.740 & 1.740 & - & - & 0 \\ 0.0029 & 0.689 & 0.817 & 0.912 & 0.911 & 0.911 & 0.911 & 0.911 & 0.911 & 0.911 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Dodatnie wartości w pierwszej kolumnie tablicy (20) są rezerwami składki netto. Ponieważ zobowiązanie ubezpieczyciela jest aktywem dla ubezpieczonego, można powiedzieć, że $\mathbf{V}_1(t)$ jest wartością netto umowy, która może być podstawą zmiany warunków (w tym przypadku wykupu ubezpieczenia). Natomiast rezerwy w kolumnach od 2 do 10 są liczone, gdy ubezpieczony jest chory, a więc odpowiadają wielkości funduszu, jaki powinien odłożyć ubezpieczyciel, aby zagwarantować wypłatę świadczeń ubezpieczonemu. Ostatni wiersz zawiera jedynie zera, gdyż odpowiada momentowi wygaśnięcia umowy ubezpieczenia. Ostatnia kolumna odpowiada sytuacji śmierci osoby ubezpieczonej, co również jest równoznaczne z zakończeniem umowy ubezpieczenia.

Załóżmy, że stopy indeksacji dla składek i świadczeń są stałe

$$g_i^{\wp}(t) = \begin{cases} 0.06 & \text{dla} \quad \wp = b \wedge t = 1,2,...,9 \\ 0.05 & \text{dla} \quad \wp = p \wedge t = 1,2,...,9 \\ 0 & \text{poza} \quad \text{tym} \end{cases}$$

oraz spełniona jest zasada równoważności (18). Wtedy, zgodnie z wnioskiem 7.1, macierz $\mathbf{G}_v$ stóp indeksacji dla rezerw jest postaci

$$\mathbf{G}_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0 \\ 0.20 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0 \\ 0.15 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0 \\ 0.12 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0 \\ 0.10 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0 \\ 0.08 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0 \\ 0.07 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Zauważmy, że mimo iż stopa indeksacji $g^{in} = 0.06$ jest stała dla każdego typu świadczenia oraz stopa indeksacji $g^{out} = 0.05$ jest stała dla każdego typu składki, to stopa indeksacji dla rezerwy składki netto $g_1^v(t)$, dla $t = 1, 2, \ldots, 8$ zależy od czasu trwania ubezpieczenia. Dla pozostałych elementów macierzy (21) mamy $g_i^v(t) = g^{in}$, gdyż indeksacja dotyczy jedynie świadczeń.

Tabela 1. Indeksacja rezerwy składki netto (dla x = 35 lat i n = 10 lat oraz m = 8 lat)

g_{in}	**0.05**	**0.05**	**0.05**	**0**
g_{out}	**0.05**	**0.03**	**0**	**0.03**
$g_1^v(0)$	0	0	0	0
$g_1^v(1)$	0.050	0.625	1.488	−0.863
$g_1^v(2)$	0.050	0.330	0.751	−0.420
$g_1^v(3)$	0.050	0.228	0.494	−0.267
$g_1^v(4)$	0.050	0.171	0.354	−0.182
$g_1^v(5)$	0.050	0.132	0.254	−0.123
$g_1^v(6)$	0.050	0.099	0.173	−0.074
$g_1^v(7)$	0.050	0.072	0.104	−0.032
$g_1^v(8)$	0.050	0.050	0.050	0.000
$g_1^v(9)$	0.050	0.050	0.050	0.000
$g_1^v(10)$	0	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1 zawiera rezerwy składki netto przy różnych wariantach stóp indeksacji świadczeń i składek. Zauważmy, że gdy $g^{in} = g^{out} = 0.05$, stopa indeksacji dla rezerwy nie zależy od czasu trwania ubezpieczenia. W przypadku, gdy indeksowane są jedynie świadczenia, indeksacja rezerw musi być bardzo wysoka. Gdy indeksowane są jedynie składki, zgromadzone rezerwy są za duże w stosunku do zobowiązań i można je zmniejszyć, o czym świadczą ujemne stopy indeksacji dla rezerw.

Literatura

[1] Amsler M.H., *Sur la Modélisation des Risques Vie par les Chaênes de Markov*, [w:] "Transactions of the 18th International Congress of Actuaries" 1968, 5, s. 731-746.

[2] Bijak W., Podgórska M., Utkin J., *Matematyka finansowa; teoria i praktyka obliczeń finansowych*, Bizant, Warszawa 1994.

[3] Błaszczyszyn B., Rolski T., *Wykłady z matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.

[4] Dębicka J., *Macierzowa reprezentacja rezerw w ubezpieczeniach wielostanowych*, Rocznik KAE, Zeszyt nr 21/2010, SGH, Warszawa, s. 73-96.

[5] Dębicka J., *Macierzowa reprezentacja ubezpieczenia wielostanowego z niejednorodnym łańcuchem Markowa*, [w:] *Statystyka aktuarialna − stan i perspektywy rozwoju w Polsce*, red. W. Ostasiewicz, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1108, AE, Wrocław 2006, s. 244-265.

[6] Haberman S., Pitacco E., *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall/CRC, London 1999.

[7] Ostasiewicz W. (red.), *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe. Modelowanie stochastyczne*, AE, Wrocław 2004.
[8] Pentikainen T., *Linking life and private pension insurance to the price index*, [w:] *Transactions of the 18-th International Congress of Actuaries*, Munich 1968, Vol. 2, s. 847-859.
[9] Pittaco E., *Adjustment problems in permanent health insurance*, [w:] Proceedings *of the XXI ASTIN Colloquium*, New York 1989, s. 379-387.
[10] Podgórska M., Klimkowska J., *Matematyka finansowa*, PWN, Warszawa 2006.

INDEXING CASH FLOWS IN MULTISTATE INSURANCE CONTRACTS

Summary: This paper deals with the problem of indexing benefits, premiums and prospective reserves in multiple insurance contracts. From a financial point of view, the fixed, non-stochastic interest rates are considered. From a modelling point of view, the indexing problem is embedded in a non-homogenous Markov multiple-state framework. A time-discrete approach is adopted. The aim of this paper is to give a general formula for the reserve adjustment rate, which is a weighted mean of the rates of amendment of the benefits and of the premiums for multistateinsurance contracts. In order to simplify the form of the derived expression, we use matrix notation. This approach enables us to give a flexible tool for the analysis of indexing cash flows connected with a multistate insurance contracts and makes the numerical procedures to be implemented easier. Numerical illustration for the illness insurance contract is provided.

Keywords: modified multistate model, indexing, an adjustment rate, net premium, prospective reserve, multistate insurance contracts.