Zagadnienia statystyki aktuarialnej

pod redakcją
Joanny Dębickiej

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Krzysztof Dębicki, Grzegorz Kończak,
Zbigniew Palmowski, Włodzimierz Szkutnik

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korłub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Adam Dębski

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne
w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695- 240-6

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 230
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS

Zagadnienia statystyki aktuarialnej ISSN 1899-3192

Aleksandra Iwanicka
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WPŁYW ZEWNĘTRZNYCH CZYNNIKÓW RYZYKA NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO RUINY W AGREGACJI DWÓCH KLAS UBEZPIECZEŃ*

Streszczenie: W ostatnich latach możemy obserwować zachodzące zmiany klimatyczne powodujące liczne powodzie, wichury i inne klęski żywiołowe, co skutkuje jednoczesnym pojawianiem się różnorodnych szkód ubezpieczeniowych. Celem pracy jest zbadanie wpływu zewnętrznych czynników ryzyka, takich jak klęski żywiołowe, na prawdopodobieństwo ruiny w agregacji dwóch klas ryzyka. Ograniczymy się do przypadku, gdy zewnętrzne czynniki ryzyka powodują szkody pojawiające się zgodnie z uogólnionym procesem Erlanga(2). Analiza zostanie przeprowadzona na przykładach numerycznych.

Słowa kluczowe: agregacja dwuklasowego modelu ryzyka, prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym, zewnętrzne czynniki ryzyka, uogólniony proces Erlanga(2).

1. Wstęp

Jednoczesne pojawianie się różnorodnych szkód ubezpieczeniowych może być skutkiem rozmaitych zjawisk: zarówno naturalnych, np. klęsk żywiołowych, jak i ekonomicznych, jak np. kryzysy gospodarcze. Zjawiska te traktujemy jako zewnętrzne czynniki ryzyka, tzn. takie czynniki, które jednocześnie oddziałują na różne klasy ryzyka. Natomiast czynniki ryzyka typowe tylko dla danej klasy ryzyka traktujemy jako wewnętrzne czynniki ryzyka. Celem niniejszej pracy jest przeprowadzenie krótkiej analizy wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym w modelu ryzyka dla dwóch klas ryzyka, a dokładniej − w agregacji dwuklasowego modelu ryzyka. Analiza jest przeprowadzona na numerycznych przykładach osobno dla przypadku lekkoogonowych rozkładów wypłat i dla ciężkoogonowych rozkładów wypłat. Uwzględnienie zewnętrznych czynników ryzyka powoduje zależność pomiędzy klasami ryzyka, co czynni problem bardziej interesującym. Skupimy się na przypadku, gdy zewnętrz-

* Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 jako projekt badawczy nr 3361/B/H03/2010/38.

ne czynniki ryzyka powodują wypłaty pojawiające się zgodnie z uogólnionym procesem Erlanga(2). Wyniki numerycznych analiz dotyczących wpływu zewnętrznych czynników ryzyka powodujących szkody z jednorodnym procesem Poissona na prawdopodobieństwo ruiny w przypadku agregacji kilku klas ryzyka można znaleźć w pracach [8] i [9], natomiast w przypadku dwuwymiarowego modelu ryzyka zawarte są one w pracy [7].

Na początek wprowadźmy definicję klasycznego modelu ryzyka, który możemy interpretować jako klasyczną wersję modelu ryzyka dla jednej klasy ryzyka. Klasyczny model ryzyka definiujemy jako:

$$U_K(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

gdzie u jest kapitałem założycielskim (początkowym) dla tej klasy ryzyka, c jest stałą w jednostce czasu intensywnością napływu składki z tej klasy ryzyka, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem kolejnych niezależnych wypłat odszkodowań o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa, a $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ jest procesem zliczającym kolejne wypłaty, o którym zakładamy, że jest jednorodnym procesem Poissona i jest niezależny od ciągu wpłat $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Przejdźmy teraz do definicji modelu ryzyka dla dwóch zagregowanych klas ryzyka. Agregację dwuklasowego modelu ryzyka definiujemy jako (por. [5]):

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{M_1(t)+M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{M_2(t)+M(t)} Y_i\,, \tag{1}$$

gdzie u oznacza kapitał początkowy wspólny dla obu klas ryzyka, a c jest stałą w jednostce czasu intensywnością napływu składki łącznie z dwóch klas ryzyka. Natomiast $\{M_1(t)\}_{t\geq 0}$ ($\{M_2(t)\}_{t\geq 0}$) jest procesem zliczającym wypłaty powodowane przez wewnętrzne czynniki ryzyka w pierwszej (drugiej) klasie ryzyka, o którym zakładamy, że jest jednorodnym procesem Poissona z intensywnością λ_1 (λ_2). Z kolei $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ jest procesem zliczającym wypłaty w pierwszej i osobno w drugiej klasie ryzyka, które są wynikiem oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka. Dodatkowo przyjmijmy, że proces $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ jest uogólnionym procesem Erlanga(2), tzn. czas pomiędzy kolejnymi wypłatami zliczanymi przez ten rozkład ma uogólniony rozkład Erlanga(2), czyli jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładach wykładniczych niekoniecznie z tą samą wartością oczekiwaną. Występowanie tego procesu powoduje zależność pomiędzy klasami ryzyka. Ponadto $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$) jest ciągiem kolejnych wypłat w pierwszej (drugiej) klasie ryzyka, które tworzą ciąg dodatnich zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą $F_X(F_Y)$ i gęstością $f_X(f_Y)$ oraz ze średnią μ_X (μ_Y). Poza tym zakłada się, że wszystkie procesy $\{M_1(t)\}_{t\geq 0}$, $\{M_2(t)\}_{t\geq 0}$, $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ i ciągi $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ są nawzajem niezależne od siebie.

W celu zdefiniowania prawdopodobieństwa ruiny określmy najpierw pojęcie czasu wystąpienia ruiny jako: $T = \inf \{t \geq 0 : U(t) < 0\}$ (∞ w przeciwnym razie) . Wówczas prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym definiujemy w następujący sposób:

$$\psi(u) = P(T < \infty \,|\, U(0) = u) \tag{2}$$

oraz odpowiadające mu prawdopodobieństwo przetrwania jako:

$$\Phi(u) = 1 - \psi(u). \tag{3}$$

W następnym punkcie artykułu opisany jest przetransformowany proces ryzyka z dwiema niezależnymi klasami ryzyka, który ułatwia wyznaczenie prawdopodobieństwa ruiny dla procesu ryzyka $U(t)$ (por. [5]).

2. Przetransformowany proces ryzyka

W celu badania prawdopodobieństwa ruiny (2) dla procesu ryzyka (1) możemy skorzystać z przetransformowanego procesu ryzyka o postaci (por. [5]):

$$U'(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{M_{12}(t)} X_i' - \sum_{i=1}^{M(t)} Y_i', \tag{4}$$

gdzie $\{X_i'\}_{i=1}^{\infty}$ i $\{Y_i'\}_{i=1}^{\infty}$ są ciągami kolejnych niezależnych wielkości wypłat oraz $\{M_{12}(t)\}_{t \geq 0}$ jest procesem Poissona z intensywnością $\lambda_1 + \lambda_2$. Zaznaczmy, że czas V_i pomiędzy kolejnymi wypłatami X_{i-1}' i X_i' ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$, natomiast czas L_i pomiędzy kolejnymi wypłatami Y_{i-1}' i Y_i' ma uogólniony rozkład Erlanga, tj. L_i można zapisać jako sumę $L_{i1} + L_{i2}$, gdzie L_{i1} i L_{i2} to dwie niezależne zmienne losowe o rozkładach wykładniczych z parametrami odpowiednio $\tilde{\lambda}_1$ i $\tilde{\lambda}_2$. Ponadto kolejne wypłaty X_i' są zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie z gęstością:

$$p(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f_X(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f_Y(x),$$

natomiast kolejne wypłaty Y_i' stanowią ciąg zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z gęstością:

$$q(x) = f_X \times f_Y(x).$$

Ciągi $\{X_i'\}_{i=1}^{\infty}$ i $\{Y_i'\}_{i=1}^{\infty}$ oraz procesy $\{M_{12}(t)\}_{t \geq 0}$ i $\{M(t)\}_{t \geq 0}$ są wszystkie nawzajem niezależne od siebie.

W tym miejscu należy dodać, że w celu zapewnienia wypłacalności ubezpieczyciela należy założyć o stałej c, że spełnia następujący warunek (por. [4]):

$$c > (\lambda_1 + \lambda_2)\mu_{X'} + \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}\mu_{Y'}.$$

Warunek ten oznacza, że zgromadzona składka w jednostce czasu z dwóch klas ryzyka musi przewyższać wartość oczekiwaną wypłat zagregowanych w jednostce czasu z obu tych klas. Inaczej warunek ten można zapisać w postaci:

$$c = (1+\theta)\left((\lambda_1 + \lambda_2)\mu_{X'} + \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}\mu_{Y'}\right),$$

gdzie θ jest stałą dodatnią, którą nazywa się względnym narzutem na bezpieczeństwo (por. [10]).

Można łatwo sprawdzić, że procesy (1) i (4) mają takie same rozkłady (por. [5]), dlatego proces ryzyka (1) można badać za pomocą procesu ryzyka (4), jednak jest to już proces dla dwóch niezależnych klas ryzyka, co znacznie ułatwia zadanie wyznaczania prawdopodobieństwa ruiny. W kolejnym punkcie pracy opisana jest metodologia wyznaczania tego prawdopodobieństwa ruiny (por. [4]).

3. Prawdopodobieństwo ruiny

W celu wyznaczenia prawdopodobieństwa ruiny (2) wprowadźmy pomocniczo prawdopodobieństwo ruiny w momencie realizacji zmiennej losowej L_{11}, które zapisujemy jako:

$$\psi_1(u) = P(T < \infty \mid L_{11} = t, U(t) = u),$$

natomiast odpowiadające mu prawdopodobieństwo przetrwania: $\Phi_1(u) = 1 - \psi_1(u)$. Warto podkreślić, że prawdopodobieństwo ruiny $\psi_1(u)$ jest niezależne od t ze względu na własność braku pamięci wykładniczego rozkładu zmiennej losowej L_{11}.

Zajmijmy się wyznaczeniem prawdopodobieństw przetrwania $\Phi(u)$ i $\Phi_1(u)$ (por. [4]). W tym celu wprowadza się pomocniczą zmienną losową $W = \min(V_1, L_{11})$. Zdarzenie $W = L_{11} = t$ oznacza brak wypłat na odcinku czasowym $(0, t]$. Jeśli $W = V_1 = t$, to następuje jedna wypłata w chwili t i nie ma wypłat do chwili t. Wówczas na mocy wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymuje się następujące równanie:

$$\Phi(u) = \int_0^\infty P(W = t, W = L_{11})\Phi_1(u+ct)dt + \\ + \int_0^\infty P(W = t, W = V_1)\int_0^{u+ct}\Phi(u+ct-x)p(x)dxdt. \tag{5}$$

Warto zwrócić uwagę na to, że ponieważ obie zmienne losowe W_1 i L_1 mają rozkłady wykładnicze z parametrami odpowiednio $\lambda_1 + \lambda_2$ i $\tilde{\lambda}_1$, mamy:

$$P(W=V_1)=P(V_1<L_{11})=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\tilde{\lambda}_1+\lambda_1+\lambda_2},\quad P(W=L_{11})=P(V_1>L_{11})=\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_1+\lambda_1+\lambda_2},$$

$$P(W>t\,|\,W=V_1)=P(W>t\,|\,W=L_{11})=\exp\left\{-(\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_1)t\right\}.$$

Zatem równanie (5) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_1+\lambda_1+\lambda_2}\int_0^\infty(\tilde{\lambda}_1+\lambda_1+\lambda_2)\exp\left\{-(\tilde{\lambda}_1+\lambda_1+\lambda_2)t\right\}\Phi_1(u+ct)dt+\\&+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\tilde{\lambda}_1+\lambda_1+\lambda_2}\int_0^\infty(\tilde{\lambda}_1+\lambda_1+\lambda_2)\exp\left\{-(\tilde{\lambda}_1+\lambda_1+\lambda_2)t\right\}\int_0^{u+ct}\Phi(u+ct-x)p(x)dxdt.\end{aligned}\tag{6}$$

Ponadto wprowadzając pomocniczą zmienną losową $Z=\min(V_1, L_{12})$, w podobny sposób można otrzymać:

$$\begin{aligned}\Phi_1(u)&=\frac{\tilde{\lambda}_2}{\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_2}\int_0^\infty(\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_2)\exp\left\{-(\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_2)t\right\}\int_0^{u+ct}\Phi(u+ct-x)q(x)dxdt+\\&+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_2}\int_0^\infty(\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_2)\exp\left\{-(\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_2)t\right\}\int_0^{u+ct}\Phi_1(u+ct-x)p(x)dxdt.\end{aligned}\tag{7}$$

Dokonując podstawienia $s = u+ct$ w całkach w równaniach (6) i (7), a następnie różniczkując oba te równania względem zmiennej u, otrzymuje się następujący układ równań różniczkowo-całkowych:

$$\begin{cases}c\Phi^{(1)}(u)=-\tilde{\lambda}_1\Phi_1(u)-(\lambda_1+\lambda_2)\int_0^u\Phi(u-x)p(x)dx+(\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_1)\Phi(u)\\ c\Phi_1^{(1)}(u)=-\tilde{\lambda}_2\int_0^u\Phi(u-x)q(x)dx-(\lambda_1+\lambda_2)\int_0^u\Phi_1(u-x)p(x)dx+(\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_2)\Phi_1(u).\end{cases}\tag{8}$$

Wprowadźmy transformaty Laplace'a funkcji $\Phi(u)$ i $\Phi_1(u)$, tj. $\hat{\Phi}(s)=\int_0^\infty e^{-su}\Phi(u)du$, $\hat{\Phi}_1(s)=\int_0^\infty e^{-su}\Phi_1(u)du$. Wówczas układ równań (8) można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{cases}[cs-(\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_1)+(\lambda_1+\lambda_2)\hat{f}_{X'}(s)]\hat{\Phi}(s)=c\Phi(0)-\tilde{\lambda}_1\hat{\Phi}_1(s)\\ [cs-(\lambda_1+\lambda_2+\tilde{\lambda}_2)+(\lambda_1+\lambda_2)\hat{f}_{X'}(s)]\hat{\Phi}_1(s)=c\Phi_1(0)-\tilde{\lambda}_2 f_{Y'}(s)\hat{\Phi}(s),\end{cases}$$

gdzie $\hat{p}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}p(x)dx$ i $\hat{q}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}q(x)dx$. Rozwiązując powyższy układ równań (zob. [4]), otrzymujemy:

$$\hat{\Phi}(s)=\frac{c\Phi(0)\left\{c(s-\rho)+(\lambda_1+\lambda_2)[\hat{p}(s)-\hat{p}(\rho)]\right\}}{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2[\gamma(s)-\hat{q}(s)]},s\in C,\tag{9}$$

oraz

$$\hat{\Phi}_1(s) = \frac{c\rho - (\tilde{\lambda}_2 + \lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)\hat{p}(\rho)}{\tilde{\lambda}_1}\hat{\Phi}(s) + \frac{c\Phi(0)(\hat{q}(s) - \hat{q}(\rho))}{\tilde{\lambda}_1\left(\gamma(s) - \hat{q}(s)\right)}, \quad (10)$$

gdzie $\gamma(s) = \left[\frac{c}{\tilde{\lambda}_1}s + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\tilde{\lambda}_1}\left(\hat{p}(s) - 1\right) - 1\right]\left[\frac{c}{\tilde{\lambda}_2}s + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\tilde{\lambda}_2}\left(\hat{p}(s) - 1\right) - 1\right]$, a stała ρ jest rzeczywistym dodatnim rozwiązaniem równania:

$$\gamma(s) = \hat{q}(s), \quad (11)$$

natomiast

$$\Phi(0) = \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\left(\frac{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{c\rho - (\lambda_1 + \lambda_2)\left[1 - \hat{p}(\rho)\right]}\right)$$

oraz

$$\Phi_1(0) = \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\left(\frac{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{c\rho - (\lambda_1 + \lambda_2)\left[1 - \hat{p}(\rho)\right]}\right)\left(\frac{c\rho - \lambda_1 - \lambda_2 - \tilde{\lambda}_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\hat{p}(\rho)}{\tilde{\lambda}_1}\right).$$

Warto zaznaczyć, że równanie (11) (zwane uogólnionym równaniem Lundberga) posiada dokładnie jeden pierwiastek dodatni rzeczywisty, co więcej, jest to jedyny pierwiastek tego równania na prawej półpłaszczyźnie liczb zespolonych. Ponadto pierwiastkiem równania jest również $s = 0$.

Tylko dla pewnych szczególnych klas rozkładów wypłat udaje się analitycznie odwrócić transformaty (9) i (10) (por. [4]).

4. Analiza numeryczna

Przeprowadźmy numeryczną analizę wpływu oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka w dwóch klasach ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny (2). Stopień wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na obie klasy ryzyka wyrażamy jako intensywność pojawiania się wypłat powodowanych przez te czynniki, którą oznaczymy jako λ i która wynosi $\lambda = \dfrac{\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}$, jeśli występuje oddziaływanie zewnętrznych czynników ryzyka, lub wynosi $\lambda = 0$, jeśli jest brak oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka. Podobnie stopień oddziaływania wewnętrznych czynników ryzyka w danej klasie ryzyka będziemy utożsamiać z intensywnością pojawiania się wypłat powodowanych przez te czynniki, tj. w pierwszej klasie ryzyka jest to intensywność λ_1, a w drugiej klasie jest to intensywność λ_2. Natomiast, jeśli nie będzie oddziaływania wewnętrznych czynników ryzyka odpowiednio w pierwszej i drugiej klasie ryzyka, to zapiszemy, że $\lambda_1 = 0$ w pierwszej klasie ryzyka i odpowiednio $\lambda_2 = 0$ w drugiej klasie ryzyka. W dalszej analizie rozpatrywać będziemy trzy sytuacje:

1° $\lambda = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$;
2° $\lambda = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$;
3° $\lambda = 2, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$.

W pierwszej sytuacji występuje tylko oddziaływanie wewnętrznych czynników ryzyka w obu klasach ryzyka przy jednoczesnym braku oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka. Wtedy proces ryzyka (1) można przetransformować do klasycznego procesu ryzyka, tj. do procesu ryzyka (4) z pominięciem sumy $\sum_{i=1}^{M(t)} Y_i'$, tj. do procesu ryzyka $U'(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{M_{12}(t)} X_i'$. Wówczas znanych jest wiele metod wyznaczania lub szacowania prawdopodobieństwa ruiny (2) (zob. [2] i [10]). W drugiej sytuacji występuje zarówno oddziaływanie zewnętrznych, jak i wewnętrznych czynników ryzyka i stopień ich oddziaływania jest taki sam. Wtedy, jeśli rozkłady wypłat są lekkoogonowe w procesie ryzyka (4), to prawdopodobieństwo ruiny (2) można wyznaczyć za pomocą prawdopodobieństwa przetrwania, które z kolei można wyznaczyć, odwracając transformatę (9). Natomiast w trzeciej sytuacji występuje brak oddziaływania wewnętrznych czynników ryzyka i jednocześnie zwiększony jest stopień oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka. W tej sytuacji proces ryzyka można zapisać w postaci $U'(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{M(t)} Y_i'$. Warto zaznaczyć, że w każdej sytuacji 1°-3° stopień oddziaływania łącznie zewnętrznych i wewnętrznych czynników ryzyka w każdej klasie ryzyka jest taki sam, tj. w pierwszej klasie ryzyka wynosi $\lambda + \lambda_1 = 2$ i w drugiej klasie ryzyka wynosi $\lambda + \lambda_2 = 2$, tzn. zmieniają się jedynie stopnie oddziaływania wewnętrznych i zewnętrznych czynników ryzyka. Zatem w każdej sytuacji 1°-3° wartość oczekiwana zagregowanych wypłat w jednostce czasu w obu klasach ryzyka pozostaje taka sama.

Wszystkie trzy opisane wcześniej sytuacje przeanalizujemy osobno w dwóch przypadkach, kiedy rozkłady wypłat są lekkoogonowe i osobno kiedy są ciężkoogonowe. W obu przypadkach przyjmijmy, że $\theta = 0{,}05$.

Zajmijmy się najpierw przypadkiem, kiedy rozkłady wypłat są lekkoogonowe. Niech wypłaty w pierwszej klasie mają rozkład wykładniczy z parametrem 2, tj. $X \sim W(2)$, natomiast w drugiej klasie mają rozkład wykładniczy z parametrem 2,2, tj. $Y \sim W(2{,}2)$. Wyniki prawdopodobieństwa ruiny w sytuacjach 1°-3° dla różnych wartości kapitałów początkowych u zawarte są w tab. 1. Przypomnijmy, że w sytuacji 1° proces ryzyka (1) można przekształcić do klasycznego procesu ryzyka $U'(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{M_{12}(t)} X_i'$, gdzie kolejne wypłaty X'_i będą mieć rozkład stanowiący mieszankę rozkładów wykładniczych, która jest szczególnym przypadkiem rozkładu fazowego (zob. [2] i [10]). W przypadków rozkładów fazowych znana jest dokładna metoda wyznaczania prawdopodobieństwa ruiny (2) (zob. [2] i [10]), za pomocą której zostały wyznaczone prawdopodobieństwa ruiny dla sytuacji 1°. W sytuacji 2°

prawdopodobieństwa ruiny są wyznaczone z prawdopodobieństw przetrwania, które są otrzymane za pomocą numerycznego odwracania transformaty (9) w programie Mathematica. W sytuacji 3° prawdopodobieństwo ruiny wyznaczone również za pomocą prawdopodobieństwa przetrwania, które zostało wyznaczone poprzez numeryczne odwracanie transformaty Laplace'a funkcji przetrwania w modelu ryzyka $U'(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{M(t)} Y_i'$ (zob. [3]).

Na podstawie wyników zawartych w tab. 1 nie można obserwować wyraźnego wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na wielkość prawdopodobieństwa ruiny. Trudno zauważyć jakąś wyraźnie zaznaczającą się regularność. Przy ustalonym kapitale początkowym wyniki we wszystkich przypadkach są zbliżone, a niewielkie różnice mogą być spowodowane błędami numerycznych zaokrągleń przy wyznaczaniu prawdopodobieństwa ruiny w różny sposób w trzech rozpatrywanych sytuacjach.

Tabela 1. Prawdopodobieństwo ruiny (2) w przypadku lekkoogonowych rozkładów wypłat

u	0	5	10	15	20	50
1°	0,9524	0,5789	0,3519	0,2140	0,1301	0,0065
2°	0,9370	0,5694	0,3461	0,2103	0,1278	0,0064
3°	0,9331	0,5704	0,3466	0,2106	0,1279	0,0064

Źródło: opracowanie własne.

Przeanalizujemy teraz przypadek, w którym rozkłady wypłat w obu klasach ryzyka są ciężkoogonowe. Niech wypłaty w pierwszej klasie ryzyka mają rozkład logarytmiczno-normalny z parametrami 0,25 i 0,125, tj. X ~ $LN(0{,}25;\ 0{,}125)$, natomiast wypłaty w drugiej ryzyka mają rozkład Weibulla z parametrami 1 i 0,8, tj. $Y \sim We(1;\ 0{,}8)$.

W tabeli 2 zawarto wyniki symulacji prawdopodobieństwa ruiny metodą Monte Carlo na podstawie 100 000 trajektorii procesu ryzyka osobno w każdej sytuacji od 1° do 3° dla różnych wartości kapitałów początkowych *u*.

Tabela 2. Wyniki symulacji prawdopodobieństwa ruiny (2) w przypadku ciężkoogonowych rozkładów wypłat

u	1	5	10	15	20	50
1°	0,9102	0,7506	0,5956	0,4763	0,3778	0,0963
2°	0,8894	0,7370	0,5829	0,4666	0,3714	0,0945
3°	0,8868	0,7377	0,5879	0,4669	0,3740	0,0951

Źródło: opracowanie własne.

Analizując wyniki symulacji prawdopodobieństwa ruiny zawarte w tab. 2, obserwujemy, podobnie jak w przypadku lekkoogonowych rozkładów wypłat, brak wyraźnego wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na wyniki symulowanych prawdopodobieństw ruiny. Trudno też zauważyć jakąś wyraźnie zaznaczającą się regularność wśród tych wyników przy zwiększaniu się stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka w sytuacjach 1°-3°.

5. Podsumowanie

W pracy zaprezentowano wyniki krótkiej analizy numerycznej wpływu zewnętrznych czynników ryzyka powodujących wypłaty zgodnie z procesem Erlanga na prawdopodobieństwo ruiny w agregacji dwóch klas ryzyka. Rozważono osobno przypadek lekkoogonowych i ciężkoogonowych rozkładów wypłat. Jednak w obu przypadkach otrzymano zaskakujące wyniki, mianowicie: brak istotnego wpływu oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka w dwóch klasach ryzyka na wyniki szacowanego prawdopodobieństwa ruiny. Ciężko zauważyć jakąś wyraźnie kształtującą się regularność tych wyników wraz ze zwiększaniem stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na te klasy, np. wzrostu lub spadku prawdopodobieństwa ruiny wraz ze zwiększaniem stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka. Na tym etapie badań trudno jednoznacznie stwierdzić, jaka jest tego przyczyna. Będzie to przedmiotem dalszej analizy.

Zupełnie inną sytuację można zauważyć, jeśli analizujemy wpływ oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka powodujących wypłaty pojawiające się zgodnie z jednorodnym procesem Poissona na prawdopodobieństwo ruiny w zagregowanym wieloklasowym modelu ryzyka. Model ten można przetransformować do klasycznego modelu ryzyka (zob. [1]) i prawdopodobieństwo ruiny szacować za pomocą powszechnie znanych metod (zob. [2] i [10]). Wtedy wraz ze wzrostem stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka można obserwować wzrost prawdopodobieństwa ruiny zarówno w skończonym, jak i nieskończonym horyzoncie czasowym (zob. [8] i [9]). Ponadto można było zaobserwować, że przy ustalonej wartości kapitału początkowego i przy ustalonym horyzoncie czasowym przyrost prawdopodobieństwa ruiny był niemal proporcjonalny do wzrostu stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na klasy ryzyka (zob. [8] i [9]).

Jeszcze inną sytuację można obserwować, gdy analizujemy wpływ zewnętrznych czynników ryzyka powodujących wypłaty w klasach ryzyka zgodnie z procesem Poissona na prawdopodobieństwo ruiny zarówno w skończonym, jak i w nieskończonym horyzoncie czasowym w dwuwymiarowym modelu ryzyka (zob. [6]). Wówczas wraz ze zwiększaniem się stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka maleje prawdopodobieństwo ruiny, co więcej, spadek prawdopodobieństwa ruiny jest niemal proporcjonalny do wzrostu stopnia oddziaływania tych czynników w obu klasach ryzyka (zob. [7]).

Wzrost stopnia oddziaływani zewnętrznych czynników ryzyka może różnie wpływać na prawdopodobieństwo ruiny w zależności od tego, jaki przyjmiemy model ryzyka oraz, jak można zauważyć na podstawie wyników przedstawionych w niniejszej pracy, być może również od tego, jakim procesem możemy modelować pojawianie się wypłat powodowanych przez te czynniki, co będzie przedmiotem dalszych badań autorki.

Celem dalszej pracy autorki niniejszego tekstu jest również sprawdzenie, jaki wpływ na prawdopodobieństwo ruiny może wywierać oddziaływanie zewnętrznych czynników powodujących wypłaty zgodnie z uogólnionym procesem Erlanga w dwuwymiarowym modelu ryzyka. Ponadto spróbuje ona uwzględnić jednocześnie zależność pomiędzy wielkością wypłat powodowanych przez zewnętrzne czynniki ryzyka.

Literatura

[1] Ambagaspitiya R.S., *On the distribution of a sum of correlated aggregate claims*, "Insurance: Mathematics and Economics" 1998, 23, s. 15-19.

[2] Asmussen S., *Ruin Probabilities*, "Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability" 2000.

[3] Dickson D.C.M., *On a class of renewal risk processes*, "North American Actuarial Journal" 1998, 2(3), s. 60-73.

[4] Garrido J., Li S., *Ruin probabilities for two classes of risk processes*, "Astin Bulletin" 2005, 35,s. 61-77.

[5] Guo J., Wu X., Yuen K.C., *On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk processes*, "Insurance: Mathematics and Economics" 2002, 31, s. 205-214.

[6] Guo J., Wu X., Yuen K. C., *On the first time of ruin in the bivariate compound Poissona model*, "Insurance: Mathematics and Economics" 2006, 38, s. 298-308.

[7] Iwanicka A., *Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w dwuwymiarowym modelu ryzyka z lekkoogonowymi rozkładami wypłat*, [w:] *Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 207, UE, Wrocław 2011, s. 92-100.

[8] Iwanicka A., *Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym w wieloklasowym modelu ryzyka*, [w:] Ekonometria nr 23, AE, Wrocław 2009, s. 138-151.

[9] Iwanicka A., *Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w wieloklasowym modelu ryzyka*, [w:] Ekonometria 26, AE, Wrocław 2009, s. 97-109.

[10] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugles J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, 1998.

INFLUENCE OF SOME OUTSIDE RISK FACTORS ON A RUIN PROBABILITY IN THE AGGREGATED TWO-CLASSES RISK MODEL

Summary: We can observe changes to our climate. Natural disasters including floods and wind damage havecaused various kinds of claims. The main aim of this paper is to investigate the impact of some outside risk factors such as natural disasters on a ruin probability in an aggregated risk model for a portfolio of two classes of insurance business. We study a situation where these outside risk factors cause claims for which occurrences relate to generalized Erlang(2) process. The impact of outside risk factors on the ruin probabilities is analyzed numerically.

Keywords: generalized Erlang(2) process, aggregated two-classes risk model, outside risk factors, ultimate ruin probability.