Zagadnienia statystyki aktuarialnej

pod redakcją
Joanny Dębickiej

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Krzysztof Dębicki, Grzegorz Kończak,
Zbigniew Palmowski, Włodzimierz Szkutnik

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korłub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Adam Dębski

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne
w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695- 240-6

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 230
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS

Zagadnienia statystyki aktuarialnej ISSN 1899-3192

Katarzyna Ostasiewicz
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

MODELE PROGOWE I ICH ZASTOSOWANIE W SOCJOLOGII I EKONOMII

Streszczenie: Zasadnicza idea modeli progowych polega na przyjęciu za kluczowy faktu, iż ludzkie zachowania i wybory w dużej mierze zależą od zachowań i wyborów innych jednostek należących do danej społeczności. Człowiek jest skłonny przyłączyć się do jakiegoś działania (strajku, zakupu nowego produktu itd.), pod warunkiem że pewien określony (dla danej osoby) odsetek jego znajomych lub sąsiadów już w nim bierze udział. Wartość tego odsetka nazywana jest progiem i może być ona w szczególności równa zeru. Socjologia ze swojej istoty zawsze brała pod uwagę oddziaływania międzyludzkie. Ostatnio również i w ekonomii coraz powszechniej stosuje się podejście, wedle którego jednostki ludzkie kierują się korzyścią nie tylko materialną, ale i społeczną związaną właśnie z zachowaniami konformistycznymi. Modele progowe służą do modelowania tego typu sytuacji.

Słowa kluczowe: model progowy, model binarnego wyboru, stany stacjonarne.

1. Podstawowe idee

Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie progowych modeli kolektywnych zachowań ludzkich. Mają one zastosowanie w modelowaniu tak pozornie odmiennych sytuacji, jak dyfuzja innowacji, szerzenie się chorób, plotek, zamieszek, strajków, jak również głosowań, migracji i wychodzenia z nudnych wykładów. Podstawą podejścia progowego jest koncepcja zmniejszania się kosztów – czy to materialnych, czy psychologicznych – określonych zachowań w miarę zwiększania się liczby osób zachowujących się w dany sposób.

Pionierskie prace ujmujące w ten sposób zachowania kolektywne powstały w połowie ubiegłego wieku [3; 8; 9], a sztandarowym przykładem zaproponowanym przez Granovettera w najczęściej cytowanym artykule z tego obszaru [3] są zamieszki. Ponieważ prawdopodobieństwo bycia aresztowanym jest tym mniejsze, im więcej jest osób w nie zaangażowanych, zatem w miarę wzrostu rozruchów mogą przyłączać się do nich ludzie coraz bardziej ostrożni w swoich zachowaniach. W najprostszym modelu przyjmuje się, iż każdy człowiek ma określony próg dla przyłączenia się do danej akcji społecznej. Aby akcja w ogóle się rozpoczęła, muszą istnieć osoby, których próg wynosi 0 – można nazywać ich inicjatorami. Aby akcja była zasilana kolejnymi uczestnikami, muszą istnieć osoby, których próg nie przekracza liczby inicjatorów – i tak dalej. Wystarczy zwiększenie progu przystąpienia do akcji jednej osoby, by reakcja łańcuchowa, zapoczątkowana w dwóch grupach przez tę samą liczbę inicjatorów, w jednej z nich została podtrzymana i ogarnęła całą zbiorowość, a w drugiej wygasła na kilku zaangażowanych osobach.

2. Matematyczna postać modelu

Najprostszą wersję modelu progowego można zapisać w następującej matematycznej postaci. Niech N oznacza liczbę osób w rozważanej zbiorowości. Każda z tych osób podejmuje w chwili t decyzję, która może przyjmować dwa warianty: „tak" lub „nie". Niech ω_i^t będzie wyborem osoby o indeksie i dokonanym w kroku czasowym t. Zapis $\omega_i^t = 1$ będzie oznaczał, iż osoba i w chwili t podejmuje decyzję „tak" (uczestniczy w danej akcji), natomiast $\omega_i^t = -1$ oznaczać będzie, iż osoba i w chwili t podejmuje decyzję „nie" (nie uczestniczy w akcji). Najprostszy wariant modelu progowego ma następującą postać:

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad n^{t-1} \geq th_i \\ 0 & \text{jeśli} \quad n^{t-1} < th_i \end{cases}, \tag{1}$$

gdzie th_i oznacza wartość progu dla i jednostki, natomiast $n^{t-1} = \sum_{j=1}^{N} \left(\omega_j^{t-1} + 1\right) / 2$ oznacza liczbę jednostek biorących udział w danej akcji w poprzednim kroku czasowym (dniu, roku, momencie itd.). Wielkość progu dla danej jednostki i, th_i definiowana jest jako wartość, przy której korzyści jednostki z dokonania wyboru „1" zaczynają przewyższać koszty tego wyboru. Jeśli dla danej jednostki $th_i \geq N$ (N – liczebność całej grupy), oznacza to, iż jednostka w żadnych okolicznościach nie włączy się do danej akcji. Przykładowo: jeśli dana jednostka przystąpi do strajku co najmniej stuosobowego – co oznacza, iż wartość progu wynosi dla niej 100 – a w jej zakładzie pracy jest tylko 50 pracowników, to istnieje pewność, że w swoim zakładzie nigdy nie weźmie udziału w strajku.

W wielu sytuacjach przyjmuje się, że udział danej jednostki zależy nie tyle od bezwzględnej liczby uprzednich uczestników danej akcji, ale raczej od ich odsetka. Wówczas:

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad m^{t-1} \geq Th_i \\ 0 & \text{jeśli} \quad m^{t-1} < Th_i \end{cases}, \tag{2}$$

gdzie Th_i oznacza wartość progu dla i jednostki (wyrażaną w odsetkach, $Th_i \in \langle 0,\, 1 \rangle$), natomiast:

$$m^{t-1} = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{j=1}^{N} \left(\omega_j^{t-1} + 1\right) \tag{3a}$$

oznacza odsetek jednostek danej grupy (z wyłączeniem osoby podejmującej decyzję, dlatego: $N-1$) zaangażowanych w akcję w poprzednim kroku czasowym. Skrajną wartość 0 mają jednostki (nazywane inicjatorami), które przystąpią do akcji w każdych warunkach (inicjują ją, nie oglądając się na poczynania innych). Wartość 1 z kolei będzie określała osoby, które w żadnych warunkach nie przyłączą się do danego działania, nawet jeśli wszyscy inni, poza nią, już się w nie zaangażują. Wartości N są zazwyczaj na tyle duże, że nie ma praktycznie różnicy, czy sumowanie wykonywane jest po wszystkich jednostkach, czy też z wyłączeniem jednej z nich. W dalszym ciągu przyjmować będziemy zatem:

$$m^t = \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}\left(\omega_j^t + 1\right). \tag{3b}$$

Jeśli mamy dane wielkości progów poszczególnych jednostek, odsetek osób, które ostatecznie przyłączą się do danej akcji, możemy wyznaczyć w następujący sposób. Jeśli w pierwszym kroku czasowym akcję inicjuje m_1 jednostek, to w drugim kroku przyłączą się te wszystkie jednostki, których próg jest mniejszy lub równy m_1, niech ich liczba wynosi m_2. W kolejnym kroku przyłączy się zatem m_3 osób, dla których próg nie przewyższa wartości $m_1 + m_2$. Ten efekt domina zostanie przerwany w momencie, gdy liczebność osób uczestniczących w akcji wyniesie m^*, a nie będą istniały już jednostki, których próg nie przekracza tej wartości.

Niech $\omega(m)$ oznacza częstość osób o wartości progu wynoszącej m, a $F_{Th}(m)$ – funkcję określającą odsetek osób o wartości progu mniejszej lub równej m. Dynamikę przyłączania się do akcji (odsetek osób biorących udział w akcji w chwili $t + 1$ równy jest udziałowi tych, których próg nie przekracza odsetka uczestniczących w akcji w chwili poprzedniej) można zapisać w następujący sposób:

$$m^{t+1} = F_{Th}(m^t),\ t = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Przyłączanie się do danej akcji ustanie po dostatecznie długim czasie. Końcowy odsetek uczestników określony jest poprzez warunek stacjonarności (niezmienności w czasie):

$$m^{t+1} = m^t = m^*, \tag{5}$$

gdzie m^* nazywane będzie wielkością stacjonarną. Określa ona maksymalny „rozmiar" akcji, czy będą to zamieszki, czy wchodzenie na rynek nowego produktu.

Z porównania (5) i (4) wynika, że wielkość stacjonarna m^* spełnia:

$$F_{Th}(m^*) = m^*. \tag{6}$$

Jeśli istnieje kilka wielkości spełniających (6), to – dla procesów rozpoczynających się od zerowej liczby uczestników – po dostatecznie długim czasie ustali się odsetek będący najmniejszą z tych wielkości.

Powyższe rozważania zakończone zostaną szczegółowym omówieniem prostego przykładu.

Przykład 1. Rozważmy jako przykład przypadek grona dziesięciu kolegów oraz najnowszej superprodukcji filmowej właśnie wchodzącej na ekrany kin. Obejrzenie filmu wiąże się z poniesieniem kosztu biletu, lecz daje każdej osobie dwie korzyści. Jedną z nich jest przyjemność oglądania, a drugą – ciekawy temat do rozmowy ze znajomymi. Ta ostatnia korzyść zależy od liczby znajomych, z którymi można porozmawiać na temat fabuły i efektów specjalnych. Zatem zależy ona od liczby osób, z którymi na pewno będzie można porozmawiać na ten temat, czyli od liczby znajomych, którzy już wcześniej wybrali się do kina. Każda z osób może mieć inne wymogi dotyczące tego, z iloma znajomymi będzie mogła porozmawiać, by postrzegała wydanie pieniędzy na bilet jako „opłacalne". Innymi słowy, każda z osób ma pewien próg, powyżej którego postrzega korzyści z pójścia na seans jako przeważające nad przykrością wydatku. Załóżmy, że progi dla tych dziesięciu osób są następujące (w celu ułatwienia przyjmiemy tu, że każda osoba definiuje swój próg jako odsetek całej grupy, bez pomniejszania jej liczebności o siebie samego): 0% (2 osoby), 10% (1 osoba), 25% (3 osoby), 50% (2 osoby), 90% (2 osoby). Mamy tu zatem dwóch inicjatorów, dla których przyjemność z obejrzenia filmu jest na tyle duża, że pójdą do kina niezależnie od tego, co zrobią inni. 1 osoba wybierze się na seans, pod warunkiem że co najmniej 10% spośród znajomych (czyli 1 osoba) pójdzie wcześniej – i tak dalej.

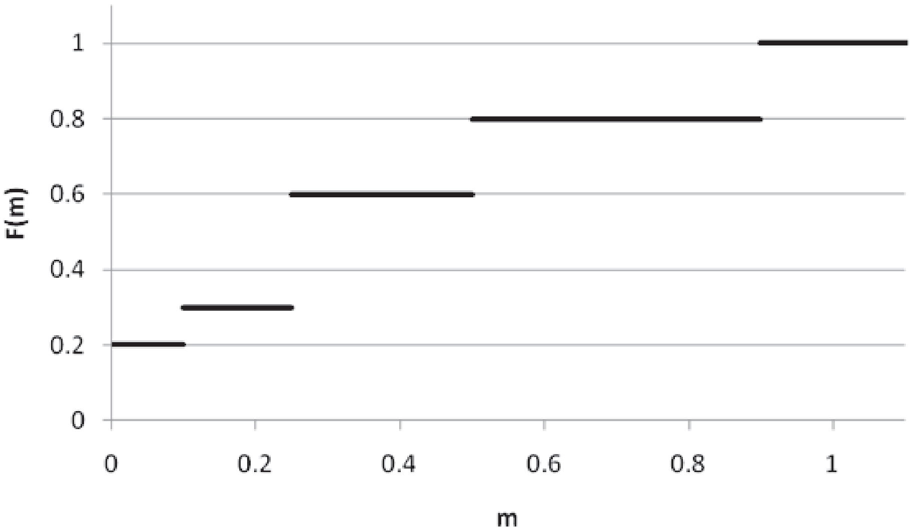
Zapiszmy powyższe dane w tabelce, w której pierwszym wierszu umieszczona będzie wielkość progu: m, w drugim – częstość osób o danym progu: $\omega(m)$, a w trzecim – odsetek osób o progu mniejszym lub równym danej wartości (częstość skumulowana): $F_{Th}(m)$:

Tabela 1. Dane dotyczące progów dla przykładu 1

Wartość progu	m	0,00	0,10	0,25	0,50	0,90
Częstość osób o wartości progu m	ω (m)	0,20	0,10	0,30	0,20	0,20
Skumulowana częstość osób w punkcie m	$F_{Th}(m)$	0,20	0,30	0,60	0,80	1,00

Źródło: opracowanie własne.

Skumulowana częstość jest funkcją schodkową i pomiędzy wartościami wyróżnionymi w tab. 1 przyjmuje wartość równą wartości odpowiadającej mniejszej z wartości ograniczającej dany przedział (por. rys. 1).



Rys. 1. Skumulowana częstość wielkości progów dla przykładu 1

Źródło: opracowanie własne.

Prześledźmy po kolei dynamikę wydarzeń. Pierwszego dnia wyświetlania filmu pójdą do kina dwie osoby – dwóch inicjatorów. Te dwie osoby stanowią 20% wszystkich, zatem drugiego dnia udadzą się do kina ci, których próg nie przekracza 20%. Jest to jedna osoba o wartości progu 10%. Zatem pod koniec drugiego dnia w sumie będą trzy osoby, które film widziały. Dnia trzeciego wybiorą się na seans ci, których próg nie przekracza 30% – są to trzy osoby o progu 25%. Pod koniec dnia trzeciego w sumie sześć osób obejrzało film. Kolejnego dnia do kina pójdą ci, których próg zawiera się pomiędzy 30 a 60% (włącznie: wartość progowa definiowana jest jako minimalna wartość, przy której dana jednostka przystępuje do akcji, nie musi być ona przekroczona) – są to dwie osoby o progu 50%. Pod koniec dnia czwartego osiem osób, czyli 80% znajomych, widziało film. Następnego dnia powinny zatem pójść do kin te osoby, których progi nie przekraczają 80%, a filmu jeszcze nie widziały. Jednakże osób takich nie ma – wśród tych, którzy w kinie jeszcze nie byli, najniższa wartość progu wynosi 90%, a osoby te nie udadzą się na seans, skoro jak dotąd tylko 80% ich znajomych film widziało. I w tym momencie rozrastanie się grona widzów filmu urywa się, a liczba osób, które film widziały, osiąga wartość stacjonarną – nie będzie się ona już zwiększała w czasie. Podsumujmy wyniki w tab. 2, w jednym wierszu numerując kolejne kroki czasowe, a w drugim – łączną, wyrażoną w odsetkach, liczbę osób, które przystąpiły do akcji (obejrzały film).

Tabela 2. Dynamika przyłączania się kolejnych osób do akcji (na podstawie tab. 1)

Krok czasowy	*t*	1	2	3	4	5	6	7
Odsetek osób biorących udział w akcji w chwili *t*	m^t	0,20	0,30	0,60	0,80	0,80	0,80	0,80

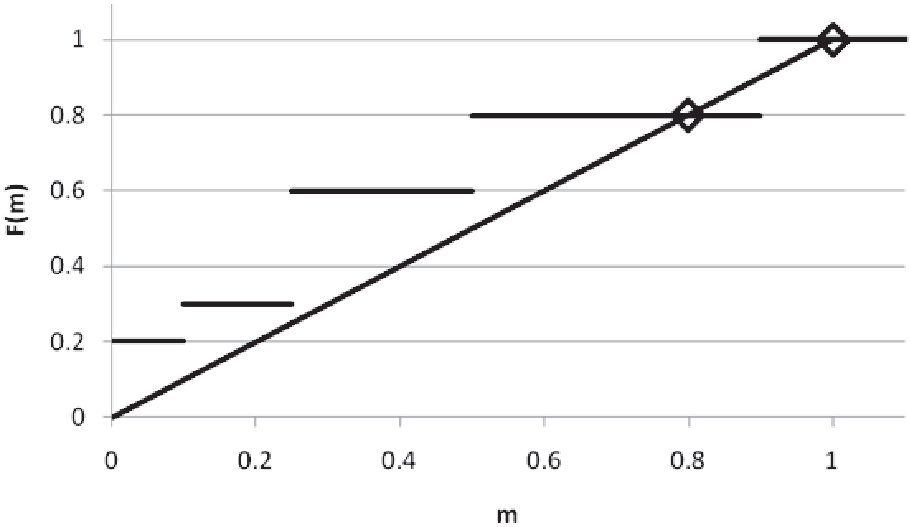
Źródło: opracowanie własne.

Porównajmy teraz tab. 1 i 2, zestawiając procentowe wartości uczestniczących w akcji (oglądania filmu) z wartościami funkcji F_{Th}.

Tabela 3. Dynamika przyłączania się kolejnych osób do akcji oraz dystrybuanta dla wyróżnionych wartości (na podstawie tab. 1)

Krok czasowy	*t*	1	2	3	4	5	6	7
Odsetek osób biorących udział w akcji w chwili *t*	m^t	0,20	0,30	0,60	0,80	0,80	0,80	0,80
Skumulowana częstość w punkcie m^t	$F_{Th}(m^t)$	0,30	0,60	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80

Źródło: opracowanie własne.

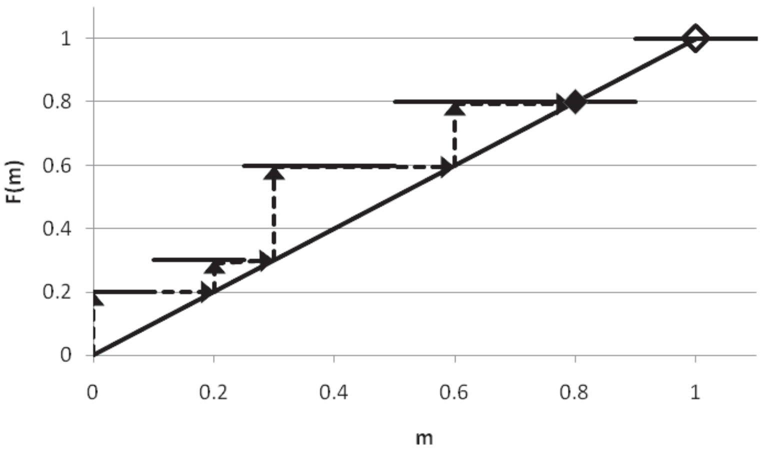


Rys. 2. Graficzne wyznaczenie stanów stacjonarnych

Źródło: opracowanie własne.

Z tabeli 3 wynika, że dynamika przyłączania się kolejnych osób do grupy tych, którzy obejrzeli film, zachodzi zgodnie z regułą (4). Stan stacjonarny, spełniający warunek (5), osiągany jest po 4 krokach czasowych i charakteryzowany jest przez osiemdziesięcioprocentowy (ośmioosobowy) udział w akcji. Zauważmy, że $m = 80$ nie jest jedynym rozwiązaniem równania (6). Rysunek 2 przedstawia graficznie możliwe rozwiązania – przecięcie wykresu częstości skumulowanych z prostą $y = m$. Punkty przecięcia zostały zaznaczone rombami. Jak widać, istnieje jeszcze inne rozwiązanie dla $m = 1$. To, który z możliwych stanów stacjonarnych zostanie osiągnięty w trakcie ewolucji, zależy od warunków początkowych. Jeżeli zaczynamy, jak w większości zastosowań modeli progowych, od stanu, w którym początkowo nikt nie jest zaangażowany w wyróżnione działanie, wówczas osiągnięty zostanie stan stacjonarny o najmniejszej wartości m.

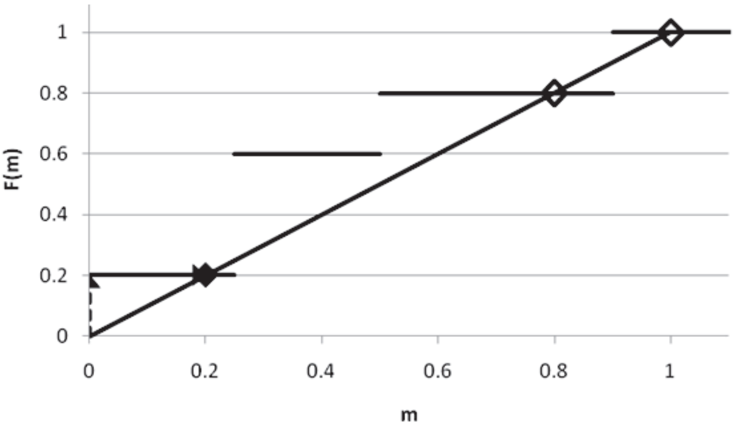
Rysunek 3 ilustruje dynamikę przyłączania się do akcji oglądania filmu i osiąganie stanu stacjonarnego w przykładzie 1. Stan stacjonarny osiągany przy zerowym punkcie wyjścia (nikt jeszcze nie jest w akcję zaangażowany) wyróżniony został wypełnionym rombem, w odróżnieniu od potencjalnych stanów stacjonarnych zaznaczonych rombami pustymi.



Rys. 3. Ewolucja w czasie i osiąganie stanu stacjonarnego w przykładzie 1

Źródło: opracowanie własne.

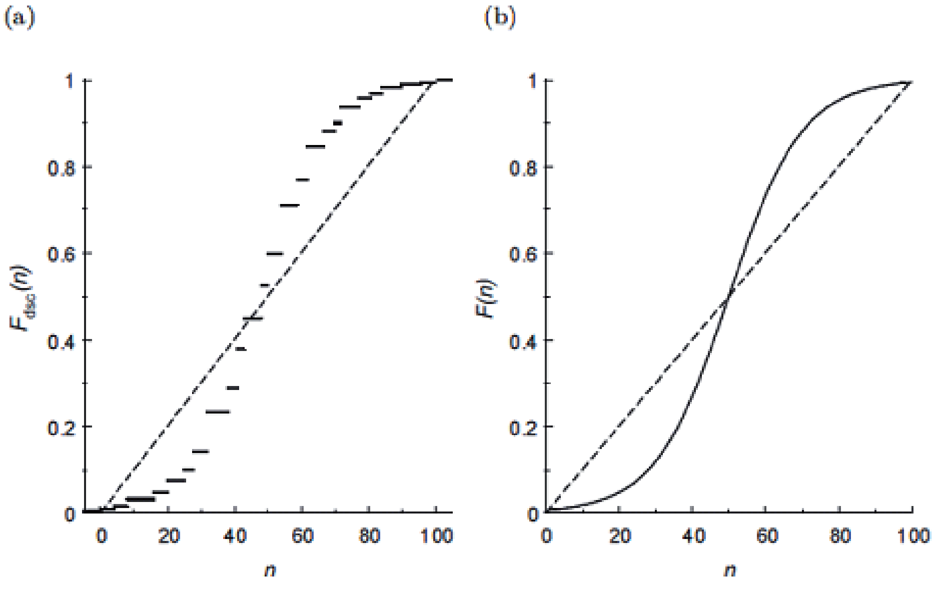
Zauważmy, że drobna zmiana w rozkładzie progów może mieć duży wpływ na końcowy wynik. Przykładowo, gdyby osoba o progu 0,1 miała zamiast tego próg 0,25, wówczas stan stacjonarny ustaliłby się już po 2 krokach czasowych, a osób, które obejrzały film, byłoby zaledwie 2. Sytuacja ta przedstawiona jest na rys. 4. Z trzech możliwych stanów stacjonarnych zaznaczonych rombami wypełnieniem rombu został wyróżniony stan osiągany dla punktu wyjścia z zerowym udziałem w akcji członków badanej zbiorowości.



Rys. 4. Ewolucja w czasie i osiąganie stanu stacjonarnego w przykładzie 1 z modyfikacją

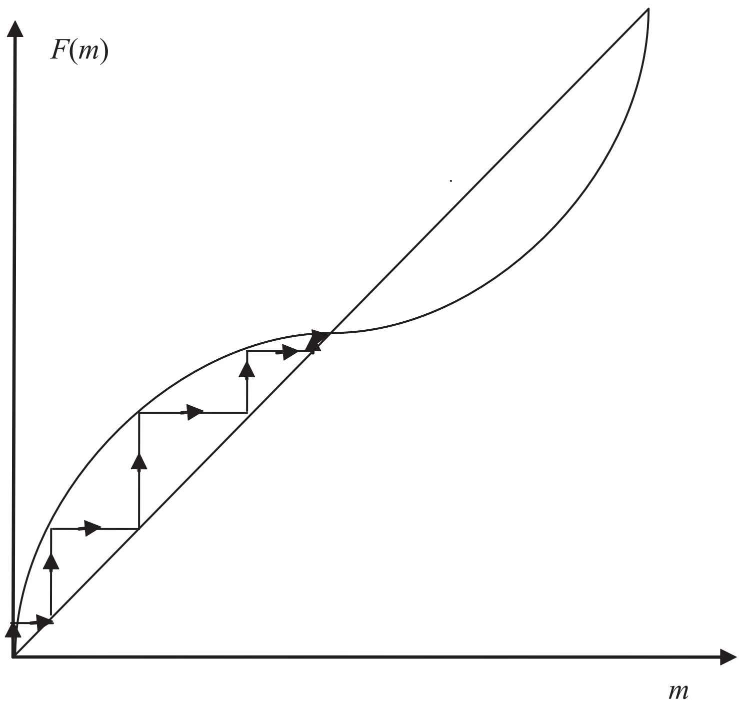
Źródło: opracowanie własne.

Gdy liczba jednostek jest duża, dobrym przybliżeniem nieciągłej funkcji $F_{Th}(m)$ jest zastąpienie jej przez odpowiednią funkcję ciągłą (por. rys. 5). Proces osiągania stanu stacjonarnego zdefiniowanego jako stan o niezmieniającej się w czasie liczbie uczestników danej akcji można wówczas również przedstawić graficznie jak na rys. 6.



Rys. 5. W przypadku dużej liczby jednostek schodkowa funkcja częstości skumulowanej progów (a) może zostać zastąpiona funkcją ciągłą (b)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Graficzne wyznaczanie stanu równowagi w modelu progowym

Źródło: opracowanie własne.

Jeśli chcemy modelować rozkład progów za pomocą pewnej teoretycznej zmiennej losowej $F(x)$, to, w ogólnym przypadku, mogą nie być spełnione warunki: $F(0) = 0$ i $F(1) = 1$. Pomimo pozornej absurdalności ujemnych i przekraczających 100% wartości progów może to być interpretowane następująco: ujemna wartość progu równoważna jest wartości progowej równej 0 (jednostka niezależnie od innych przystępuje do akcji), natomiast wartość progu przekraczająca 100% oznacza, iż jednostka w żadnych okolicznościach do akcji się nie przyłączy. Pamiętając o tej interpretacji, w praktycznych obliczeniach można bez problemów korzystać z dowolnej funkcji dystrybuanty.

3. Efekty lokalne

Zazwyczaj wpływ wywierany na jednostkę przez inne osoby zależy od bliskości ich wzajemnych relacji. Przeważnie największy wpływ na jednostkę ma jej najbliższe otoczenie: najbliższe w sensie geograficznym, sąsiedztwa, bądź w sensie więzów społecznych czy więzów rodzinnych. Istnieją również jednostki obdarzone tak zwaną charyzmą, których wybory i zachowania mają większy oddźwięk niż przeciętnie.

Decyzje jednostek przy uwzględnieniu różnej siły oddziaływań pomiędzy różnymi osobami, jak również możliwą niesymetryczność oddziaływań, można zapisać w następujący sposób:

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad m_i^{t-1} \geq Th_i \\ 0 & \text{jeśli} \quad m_i^{t-1} < Th_i \end{cases}, \tag{7}$$

gdzie

$$m_i^{t-1} = \frac{\sum_{j \neq i} q_{ij} \omega_j^{t-1}}{\sum_{j \neq i} q_{ij}}, \tag{8}$$

gdzie q_{ij} oznacza siłę, z jaką osobnik j oddziałuje na osobę i. Mianownik w wyrażeniu (8) zapewnia sumowanie się wag oddziaływań danej jednostki z wszystkimi innymi jednostkami do jedynki.

Wprowadźmy zapis macierzowy, oznaczając przez Ω^{t-1} wektor składający się z decyzji wszystkich jednostek w chwili $t - 1$:

$$\Omega^{t-1} = \begin{bmatrix} \omega_1^{t-1} \\ \omega_2^{t-1} \\ \vdots \\ \omega_N^{t-1} \end{bmatrix},$$

a przez Q − macierz oddziaływań pomiędzy osobnikami:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & 0 & & q_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Można zauważyć, że licznik wyrażenia (8) jest i elementem wektora będącego iloczynem macierzy Q i wektora Ω^{t-1}, natomiast mianownik – i elementem iloczynu macierzy Q oraz wektora składającego się z samych jedynek, $J = [1, 1, \ldots, 1]^T$. Zatem wyrażenie (8) może być zapisane następująco:

$$m_i^{t-1} = \left[Q \cdot \Omega^{t-1}\right]_i / \left[Q \cdot J\right]_i. \tag{9}$$

Warto zauważyć, że macierz Q nie musi być symetryczna. W szczególności, gdy jednostka j ma charyzmę, będzie zachodziło $q_{ij} > q_{ji}$, lub nawet $q_{ij} >> q_{ji}$. Wyrazy diagonalne q_{ii} reprezentują inercję jednostki, siłę ich przywiązania do *status quo*. Aby stworzyć model, w którym decyzja jednostki zależy od jej własnej decyzji, w kroku poprzednim należy przyjąć $q_{ii} \neq 0$, a w wyrażeniu (8) zamienić sumowanie po $j \neq i$ na sumowanie po wszystkich j, z i włącznie. Aby odtworzyć model (2), w którym wszyscy oddziałują ze wszystkimi z jednakową siłą, a wybory jednostek nie zależą od ich własnych poprzednich decyzji, należy przyjąć $q_{ij} = 1$ dla wszystkich $i, j, i \neq j$ oraz $q_{ii} = 0$ dla wszystkich i.

W ogólnym przypadku, gdy macierz oddziaływań ma dowolną postać, zadanie znalezienia stanów stacjonarnych danego modelu staje się sprawą znacznie bardziej skomplikowana niż wówczas, gdy wszyscy oddziałują ze wszystkimi z taką samą siłą.

4. Probabilistyczny charakter przejść

W modelach (1), (2) i (7) zakłada się, że każdą jednostkę mobilizuje do działania ściśle określona liczba innych osób i że każda z nich jest w stanie precyzyjnie ocenić liczbę lub procent już zaangażowanych osób. Aby uwzględnić czynniki losowe i błędy percepcyjne, do modelu wprowadza się czynnik losowy [7].

Model taki jest rozszerzeniem modelu opisywanego wyrażeniem (2). Jeśli $\omega_i^{t-1} = -1$ (w chwili $t - 1$ osoba i nie brała udziału w danym działaniu), prawdopodobieństwo, że w następnej chwili przyłączy się ona do tego działania można w tym ujęciu wyrazić następująco:

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = P\left(m_i^{t-1} - Th_i - \xi_i \geq 0\right), \tag{10}$$

gdzie ξ_i jest zmienną losową o dystrybuancie $F_{\xi_i}(z)$. Prawa strona wyrażenia (10) wyraża się poprzez dystrybuantę $F_{\xi_i}(z)$ w następujący sposób:

$$P\left(m_i^{t-1} - Th_i - \xi_i \geq 0\right) = P\left(\xi_i \leq m_i^{t-1} - Th_i\right) = F_{\xi_i}\left(m_i^{t-1} - Th_i\right).$$

a model (11) można przepisać w alternatywnej postaci:

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = F_{\xi_i}\left(m_i^{t-1} - Th_i\right). \tag{11a}$$

$$P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = 1 - F_{\xi_i}\left(m_i^{t-1} - Th_i\right), \tag{11b}$$

$$P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = 1\right) = 0, \tag{11c}$$

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = 1\right) = 1. \tag{11d}$$

Konieczność uwzględnienia równań (11c-d) spowodowana została pewną niejasnością, jaka pojawia się po uwzględnieniu czynnika losowego, a która nie miała miejsca w modelu ściśle deterministycznym. Jeśli dana jednostka i w chwili t zdecydowała się przejść od opcji (−1) do opcji (1), gdyż dla tej chwili wartość m_i^{t-1} co najmniej dorównywała wartości $Th_i + \xi_i^t$ (ξ_i^t jest realizacją zmiennej losowej ξ_i w chwili t), co się stanie, jeśli dla kolejnej chwili, $t + 1$, m_i^t będzie mniejsze niż wartość $Th_i + \xi_i^{t+1}$? (Jest to możliwe ze względu na losową wartość ξ_i^t). W niektórych sytuacjach zasadne jest przyjęcie, jak powyżej, iż $P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = 1\right) = 0$ (niemożność wycofania się z działania, np. trwałe konsekwencje zakupu nowej marki pralki), w innych bardziej realistyczne byłoby zastosowanie modelu umożliwiającego rezygnację z działania. Tego typu modele zostaną omówione w następnym punkcie.

5. Modele uwzględniające możliwość wycofania się z działania

W wielu sytuacjach słuszne jest założenie, iż raz dokonawszy wyboru opcji (1), dana jednostka pozostaje przy nim na stałe – a przynajmniej dostatecznie długo w odniesieniu do skali czasowej modelowanego zjawiska. Kupiwszy jeden raz nowy i reklamowany model komputera, dana osoba staje się jego długoterminowym, w porównaniu z czasem trwania kampanii reklamowej czy promocyjnej, posiadaczem. Przeszedłszy raz pewną chorobę w czasie trwania jej epidemii, jednostka może stać się trwale – lub przynajmniej długotrwale, w porównaniu z zasięgiem czasowym epidemii – na nią uodporniona. W porównywalnie wielu sytuacjach jednakże słuszne jest przeciwne założenie: przyjęcie, że w każdym kroku czasowym modelowanego zjawiska dana jednostka może zmienić swój wybór. Przykładowo ludzie zmieniają swoje preferencje z partii lewicowych na prawicowe i odwrotnie, o czym dobitnie świadczą zmienne procentowo udziały tych opcji politycznych w organach rządowych i samorządowych.

Aby w modelu deterministycznym uwzględnić możliwość wycofania się z działania, należy zdefiniować dwa zestawy progów. Th_i^+ oznacza wartość, jaką odsetek działających musi przekroczyć, by dotychczas niezaangażowana jednostka *i* przyłączyła się do działania. Th_i^- oznacza wartość, jaką odsetek działających musi przekroczyć, by już zaangażowana jednostka *i* pozostała przy danym działaniu. Taki model może być zapisany następujaco:

$$
\begin{gathered}
P\left(\omega_i^t=1 | \omega_i^{t-1}=-1\right)=\begin{cases}1 & \text{jeśli} \quad m_i^{t-1} \geq Th_i^+ \\ 0 & \text{jeśli} \quad m_i^{t-1} < Th_i^+\end{cases} \\
P\left(\omega_i^t=-1 | \omega_i^{t-1}=1\right)=\begin{cases}1 & \text{jeśli} \quad m_i^{t-1} \leq Th_i^- \\ 0 & \text{jeśli} \quad m_i^{t-1} > Th_i^-\end{cases}
\end{gathered} \tag{12}
$$

Osoba przyłączająca się do rozruchów, w które zaangażowana jest połowa ludności, może mieć nadzieję, iż przerodzą się one w ogólny zryw. Może zatem zrezygnować z udziału w nich, jeśli w następnym momencie odpowiednio się one nie rozrosną.

W modelu uwzględniającym efekty losowe możliwość powrotu do stanu $\omega_i = -1$ może zostać uwzględniona poprzez rezygnację z warunku $P\left(\omega_i^t=-1 | \omega_i^{t-1}=1\right)=0$. Jeśli progi, które przekroczyć musi odsetek biorących udział w działaniu, by dana jednostka przyłączyła się i pozostała przy tym działaniu, są takie same, to losowy model z możliwością powrotu do stanu poprzedniego może być zapisany następująco:

$$
P\left(\omega_i^t=1 | \omega_i^{t-1}=-1\right)=F_{\xi_i}\left(m_i^{t-1}-Th_i\right), \tag{13a}
$$

$$P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = 1 - F_{\xi_i}\left(m_i^{t-1} - Th_i\right), \tag{13b}$$

$$P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = 1\right) = 1 - F_{\xi_i}\left(m_i^{t-1} - Th_i\right), \tag{13c}$$

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = 1\right) = F_{\xi_i}\left(m_i^{t-1} - Th_i\right). \tag{13d}$$

Uwzględnijmy możliwość, iż (podobnie jak w modelu (12)): a) warunek przystąpienia do akcji może się różnić od warunku na pozostanie przy danym działaniu oraz b) warunek rezygnacji z działania może się różnić od warunku, pod którym dana jednostka pozostanie z boku. Efekty a) i b) mogą zostać zapisane następująco:

a) $P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) \neq P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = 1\right)$ oraz

b) $P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) \neq P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = 1\right)$.

Oba warunki łącznie oznaczają zależność decyzji jednostki od jej stanu poprzedniego, od jej własnego wyboru w poprzednim kroku czasowym. W ten sposób mogą zostać uwzględnione znane psychologom dążność większości jednostek do podtrzymania swego stanowiska i pragnienie postrzegania siebie samego jako osoby konsekwentnej w swych działaniach, z niezmiennymi poglądami.

Aby uwzględnić te efekty, można zdefiniować dwa zestawy wartości progowych, jak w modelu (12), lub przyjąć dwa różne rozkłady zmiennych losowych w zależności od stanu poprzedniego jednostki. Wykorzystajmy drugą z tych możliwości. Niech $F_{\xi_i}^-$ oznacza dystrybuantę zmiennej losowej wpływającej na decyzję jednostki dotychczas niezaangażowanej, a $F_{\xi_i}^+$ – dystrybuantę zmiennej losowej wpływającej na decyzję jednostki zaangażowanejw daną akcję w poprzednim kroku czasowym. Wówczas model losowy, uwzględniający możliwość wycofywania się z działania oraz uwzględniający zależność bieżącej decyzji od decyzji podjętej w kroku poprzednim, ma następującą postać [6]:

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = F_{\xi_i}^-\left(m_i^{t-1} - Th_i\right), \tag{14a}$$

$$P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = 1\right) = 1 - F_{\xi_i}^+\left(m_i^{t-1} - Th_i\right), \tag{14b}$$

$$P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = 1 - F_{\xi_i}^-\left(m_i^{t-1} - Th_i\right), \tag{14c}$$

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = 1\right) = F_{\xi_i}^+\left(m_i^{t-1} - Th_i\right). \tag{14d}$$

Równania (14c, d) określają prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń przeciwnych do zdarzeń występujących w równaniach (14a, b) i w zasadzie nie ma konieczności wypisywać ich *explicite* przy formułowaniu modelu. Dla $F_{\xi_i}^- = F_{\xi_i}^+$ model (14) sprowadza się do modelu (13), bez zależności wyboru od stanu poprzedniego.

6. Rozkład progów a błąd losowy

W punkcie tym chcemy omówić podobieństwa i różnice pomiędzy modelami uwzględniającymi losowy charakter decyzji a modelami z różnorodnością wielkości progów.

Matematyczny zapis probabilistycznych modeli (11), (13) i (14) pozwala na dwojaką interpretację zapisanych równań. Po pierwsze – i jest to interpretacja podawana w poprzednim punkcie – składnik losowy może być traktowany jako odpowiedzialny za błędy losowe i czynniki losowe przy podejmowaniu decyzji. Zauważmy jednak, że identyczną w sensie probabilistycznym postać miałby model, w którym poszczególna decyzja nie byłaby obarczona błędem losowym, ale wartości progów – ustalone dla każdej jednostki – byłyby rozłożone w całej populacji zgodnie z zadanym rozkładem. W sensie średnim pewien poziom losowości przy podejmowaniu decyzji równoważny jest zatem różnorodności wewnątrzgrupowej.

Warto podkreślić jednak również i różnice pomiędzy modelem z różnorodnością (rozkład wartości progów) a modelem z immanentną losowością. W tym pierwszym wartości progów, choć różne dla różnych jednostek, dla konkretnych osób są ustalone w czasie. W drugim wariancie wartość progu dla poszczególnej jednostki jest zmienna w czasie, zależna od tego, jaką wartość w danym kroku czasowym przyjmuje realizacja zmiennej losowej. Innymi słowy, w modelu z różnorodnością wartości progów losowane są według zadanego rozkładu tylko raz i pozostają stałe, w modelu z losowością w każdym kroku czasowym następuje losowanie tych wartości.

Zilustrujmy te różnice za pomocą przykładu.

Przykład 2. Rozpatrzmy przykładową parę modeli i wyniki ich symulacji numerycznych. W obu wersjach bierzemy pod uwagę 100 jednostek oddziałujących każda ze wszystkimi innymi z taką samą siłą. Skupimy się tu na modelu postaci (13), w którym jednostka ma możliwość rezygnacji z dokonanego wyboru (+1) i powrotu do stanu (−1). Konsekwencje braku takiej możliwości zostaną pokrótce omówione później.

Rozważamy następujący model:

$$\omega_i^t = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad m^{t-1} - Th - \xi \geq 0 \\ -1 & \text{jeśli} \quad m^{t-1} - Th - \xi < 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Aby maksymalnie uprościć przykład i sprawić, by był klarowniejszy, przyjęto tutaj, że wartości Th i zmienne losowe ξ są identyczne dla wszystkich jednostek (brak indeksów i po prawej stronie wyrażenia).

Zgodnie z tekstem poprzedzającym wzory (13) interpretacja tego zapisu może być następująca:

1. Konkretna jednostka o indeksie i, $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, przyłączy się do działania, pod warunkiem że wartość jej progu Th, zsumowana z realizacją zmiennej losowej ξ w danej chwili, nie przekroczy odsetka biorących udział w akcji w chwili poprzedniej. W trakcie symulacji przyjmujemy zatem ustaloną wartość Th, dla każdej jed-

nostki taką samą (brak indeksów w wyrażeniu (15)), ale w każdym kroku czasowym losujemy dodatkowo liczbę z rozkładu, którym opisana jest zmienna losowa ξ. Oznacza to, że mimo iż wartość progu Th jest dla wszystkich jednostek taka sama, to w każdym kroku czasowym (i dla każdej jednostki) porównujemy udział uczestników akcji w całej populacji z inną wartością. Zdefiniujmy „próg efektywny" jako wielkość, z którą porównywany jest udział uczestników akcji. Na podstawie tego porównania dokonuje się decyzja o przystąpieniu (bądź nie) do danego działania. Tak zdefiniowany „próg efektywny" będzie miał więc tutaj następujące własności: a) w każdej konkretnej chwili czasowej będzie on miał odmienne wartości dla różnych jednostek; b) dla konkretnej jednostki będzie on miał odmienne wartości w różnych chwilach czasu.

Interpretacja zapisu (15) może być nieco odmienna:

2. Losowo wybrana jednostka o indeksie i przyłączy się do działania w danej chwili, pod warunkiem że wartość jej progu, będącego zmienną losową, która jest sumą stałej Th oraz zmiennej losowej ξ: $Th + \xi$, nie przekroczy odsetka biorących udział w akcji w chwili poprzedniej. Symulacja odbywa się tu zatem następująco: na początku ustalamy wartości progów dla poszczególnych jednostek, sumując ustaloną wartość Th z realizacją zmiennej losowej ξ dla danej jednostki. Następnie w każdym kroku czasowym porównujemy udział uczestników akcji w całej populacji z wartością progu dla każdej z jednostek, na tej podstawie określając, czy przyłączy się ona do danego działania. Ponieważ wielkością, z którą porównywany jest udział uczestników akcji, jest w tym przypadku wartość progu, nie ma potrzeby definiowania „progu efektywnego" (gdyż jest nim po prostu próg). Próg będzie miał więc tutaj następujące własności: a) w każdej konkretnej chwili czasowej będzie on miał odmienne wartości dla różnych jednostek; b) dla konkretnej jednostki będzie on miał tę samą wartość w różnych chwilach czasu.

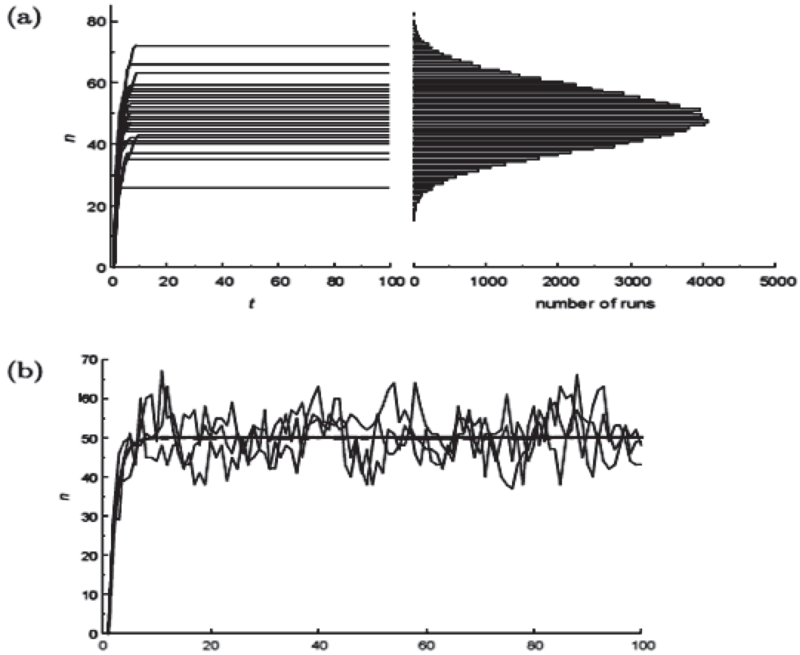
Interpretacja 1) oznacza model z losowością, gdyż za odpowiedzialne za zmienność wartości progowej danej jednostki uważamy czynniki losowe, natomiast interpretacja 2) oznacza model z różnorodnością.

Ponieważ zapis (15) jest w obu przypadkach identyczny, można powiedzieć, że w sensie probabilistycznym modele z losowością i różnorodnością są tożsame, a wartości średnie w obu przypadkach powinny być sobie równe. Jeśli wartość oczekiwana rozkładu zmiennej losowej ξ jest równa zeru, gdy liczba rozważanych jednostek dąży do nieskończoności, w modelu z różnorodnością średnia wartość progu równa jest wartości Th, podobnie w każdym kroku czasowym w modelu z losowością średnia wartość progu równa jest tej wartości.

W praktyce mamy jednak do czynienia z ograniczonymi zbiorami jednostek, a wartość średnia wylosowanych progów będzie się na ogół różniła od wartości Th. Wówczas probabilistyczna równoważność obu modeli ma nieco odmienny sens.

W przypadku z różnorodnością wartość średnia wylosowanych progów może być różna od wartości Th, ale będzie taka sama w każdej chwili. W trakcie symulacji po odpowiednio wielu początkowych krokach ustali się w takim układzie jakiś stan stacjonarny. Jeśli weźmiemy wiele kopii takiego układu i w każdym z nich niezależnie wylosujemy wartości progów, to w każdym z tych układów wartość średnia progów może się różnić od wartości *Th*, a dodatkowo te wartości średnie będą się na ogół różniły od siebie. Stany stacjonarne, jakie ustalą się w tych układach, będą się zatem od siebie różniły. Ponieważ wartość średnia jest zgodnym i nieobciążonym estymatorem wartości oczekiwanej, większość z tych średnich będzie niewiele odbiegała od wartości *Th*, z niewielkim prawdopodobieństwem dużego odchylenia od tej wartości. Można zatem oczekiwać, że i stany stacjonarne, jakie ustalą się w różnych kopiach układu, w większości niewiele będą się różniły od tego, jaki ustaliłby się przy średniej progów równej dokładnie *Th*. W symulacjach zostały przyjęte następujące wartości: $\omega_{i=1...100}^{t=0} = -1$ (zatem zaczynamy od sytuacji, w której żaden osobnik nie jest zaangażowany w akcję, liczebność całej zbiorowości wynosi 100), *Th* = 50 a ξ ma rozkład logistyczny o dystrybuancie w postaci: $F(z) = 1/\left(1 + \exp\left[-\frac{z}{50}\right]\right)$. Wykonane zostały symulacje dynamiki dla 100 000 kopii układu w 100 kolejnych krokach czasowych. Dla każdej z kopii na samym początku zostały wylosowane zestawy wartości progowych dla wszystkich 100 osobników, a następnie symulowano ich dynamikę zgodnie ze wzorem (15). Na rysunku 7a po lewej stronie przedstawione zostały rezultaty symulacji dla różnych kopii układu z różnorodnością: widać, że stany stacjonarne, jakie się ustalają po początkowych zmianach, są różne dla różnych kopii, gdyż zestawy wartości progów w przypadku różnych kopii są odmienne (w celu uzyskania większej czytelności na rysunku przedstawione zostały wyniki dla 100 spośród 100 000 kopii, dla których symulacje zostały przeprowadzone). Po prawej stronie rysunku przedstawiony został histogram stanów stacjonarnych (tutaj uwzględniono wszystkie 100 000 kopii). Jak widać, zdecydowanie najczęściej reprezentowane są stany stacjonarne bliskie stanu stacjonarnemu o wartości końcowej wynoszącej 50 uczestników akcji. Histogram jest symetryczny wokół tej wartości, zatem średnia wartość ze 100 000 wartości stacjonarnych wynosi 50.

W przypadku losowości wartość średnia „progów efektywnych" wylosowanych w dowolnej chwili może być różna od wartości *Th*, a dodatkowo będzie się zmieniała od chwili do chwili. Z tego względu w układzie z różnorodnością (i możliwością przejść ze stanu (+1) do stanu (−1)) nie ustali się stan stacjonarny. Jednostka, która w pewnym momencie miała próg wystarczająco niski, by aktualna liczba uczestników akcji była dla niej wystarczająco wysoka, by się do tej akcji przyłączyć, w którymś z kolejnych kroków czasowych może wylosować inną wartość progu, taką że liczba uczestników akcji przestanie być dla niej wystarczająca i od akcji się odłączy. Zatem liczność danego działania może się zmieniać. Wystąpią losowe fluktuacje wokół wartości średniej, którą można wyznaczyć jako wartość średnią liczności działania liczoną z dostatecznie wielu kroków czasowych. W symulacjach zostały przyjęte wartości identyczne jak w przypadku modelu z różnorodnością, to jest: $\omega_{i=1...100}^{t=0} = -1$ (zaczynamy od sytuacji, w której żaden osobnik nie jest zaangażowany w akcję, a liczebność całej zbiorowości wynosi 100), *Th* = 50. Podobnie ξ ma również rozkład logistyczny o dystrybuancie w postaci: $F(z) = 1/\left(1 + \exp\left[-\frac{z}{50}\right]\right)$. Wykonane zostały symulacje dynamiki dla 100 000 kopii układu w 100 kolejnych krokach czasowych. Dla każdej z kopii w każdym kolejnym kroku czasowym losowane były zestawy wartości progowych dla wszystkich 100 osobników, a następnie wyznaczano stan każdego z osobników w kolejnym kroku czasowym na podstawie wzoru (15). Na rysunku 7b przedstawione zostały rezultaty symulacji dla przykładowych 10 różnych kopii układu z losowością. Jak widać, występują w nich fluktuacje wokół pewnej wartości. Wartość ta oznaczona została na wykresie pogrubioną linią, a uzyskana została z uśrednienia w każdym kroku czasowym liczności we wszystkich 100 000 kopii w danej chwili. Ta średnia wartość wynosi 50.



Rys. 7. Symulacje modelu progowego z różnorodnością (a) i z losowością (b)

Źródło: opracowanie własne.

Można teraz sprecyzować stwierdzenie, że układy z różnorodnością i losowością są równoważne w sensie średnim. Układy z różnorodnością osiągają stany stacjonarne, mogą być jednak one odmienne w różnych kopiach tego samego układu. Układy z losowością nie osiągają stanów stacjonarnych, ale oscylują wokół pewnej wartości. Jednakże po upływie czasu potrzebnego układom z różnorodnością na osiągnięcie stanu ustalonego, uśrednienie po całym zespole kopii układów daje w każdej chwili tę samą wartość średnią w układach z różnorodnością i w układach z losowością.

W celu wyraźnego pokazania różnic pomiędzy dwoma typami układów wzięte zostały w przykładzie układy o niewielkiej liczebności. Wraz ze wzrastającą liczebnością układów maleją zarówno dyspersja stanów stacjonarnych w przypadku z różnorodnością, jak i wielkość oscylacji w przypadku z losowością. W granicznym przypadku nieskończenie wielkich układów oba modele są równoważne nie tylko w sensie średnim.

7. Związek z modelami losowej użyteczności i funkcji wpływu

Modele progowe charakteryzują się tym, że z samej swojej natury akcentują silną zależność poszczególnych osób od innych. Uwzględniają one również, poprzez odmienne wartości progów dla różnych jednostek, inne czynniki wpływające na wybory ludzkie. Powodem różnych wartości progowych mogą być odmienne motywacje ekonomiczne czy psychologiczne charakterystyki poszczególnych osób. Jednakże na pierwszym planie, nierozłączna od natury modelu, jest tu wzajemna zależność ludzi w grupie, socjologiczne tło indywidualnych zachowań. Nic dziwnego zatem, że modele progowe zostały stworzone i najintensywniej eksploatowane w środowisku socjologicznym.

Podobne sytuacje binarnego wyboru w psychologii społecznej były z kolei opisywane za pomocą tak zwanej funkcji wpływu (*impact function*) [4; 5]. W takim sformułowaniu zagadnienie podkreśla się *explicite* zależność jednostki od jej własnego uprzedniego wyboru – inercję psychiczną i decyzyjną poszczególnych osób. Otoczenie oddziałuje na daną jednostkę w dwojaki sposób: osobnicy podejmujący tę samą decyzję, jak dana osoba w poprzednim kroku czasowym, podtrzymują ją w tej decyzji, natomiast osoby podejmujące decyzję przeciwną próbują jednostce wyperswadować uprzedni wybór. Losowość lub częściowa nieprzewidywalność dokonywanych wyborów uwzględniania jest w modelu poprzez włączenie pewnej zmiennej losowej E, opisanej rozkładem o dystrybuancie F_f. Reguła decyzyjna może być przedstawiona następująco [4]:

$$\omega_i^t = \begin{cases} \omega_i^{t-1} & \text{z prawdopodobieństwem } F_f\left(-I_i^t\right) \\ -\omega_i^{t-1} & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - F_f\left(-I_i^t\right)' \end{cases}, \tag{16}$$

gdzie:

$$I_i^t = -h\omega_i^{t-1} - b_i - g\left(\omega_i^{t-1}\sum_j J_{ij}\omega_j^{t-1}\right), \tag{17}$$

to tak zwana funkcja wpływu, w której funkcja wzajemnych oddziaływań $g(x)$ składa się z części „podtrzymującej" (*supporting*) oraz części „perswadującej" (*persuading*), b_i określa siłę „konserwatyzmu" jednostki, samopodtrzymywania (*self-support*), wyraz h reprezentuje obiektywną korzyść (np. ekonomiczną lub polityczną), natomiast wyraz J_{ij} określa siłę zależności jednostki *i* od wyboru dokonywanego przez jednostkę *j*.

Modelowi (16) można nadać bardziej uniwersalną postać, dopuszczając, by w ogólnym przypadku prawdopodobieństwa podjęcia tej samej lub odmiennej decyzji były odmienne w zależności od tego, jaka była ta poprzednia decyzja. Jest to zależność od stanu poprzedniego innej natury niż wprowadzona uprzednio poprzez człon samopodtrzymywania. Uwzględnia ona możliwość, że zarówno siła tego samopodtrzymywania, a także inne czynniki wpływające na decyzje mogą zależeć od stanu jednostki. Tak rozszerzony model miałby postać:

$$\omega_i^t = \begin{cases} -1 & \text{z prawdopodobieństwem } \; F_f^-\left(-I_{i(-1)}^t\right) \\ 1 & \text{z prawdopodobieństwem } \; 1 - F_f^-\left(-I_{i(-1)}^t\right) \end{cases}, \tag{18}$$

$$I_{i(-1)}^t = h_{(-1)} - b_{i(-1)} - g_{(-1)}\left(-\sum_j J_{ij(-1)}\omega_j^{t-1}\right) \tag{19}$$

dla $\omega_i^{t-1} = -1$
oraz:

$$\omega_i^t = \begin{cases} 1 & \text{z prawdopodobieństwem } \; F_f^+\left(-I_{i(+1)}^t\right) \\ -1 & \text{z prawdopodobieństwem } \; 1 - F_f^+\left(-I_{i(+1)}^t\right) \end{cases}; \tag{20}$$

$$I_{i(+1)}^t = -h_{(+1)} - b_{i(+1)} - g_{(+1)}\left(\sum_j J_{ij(+1)}\omega_j^{t-1}\right) \tag{21}$$

dla $\omega_i^{t-1} = +1$.

Model (18)-(21) można zapisać w równoważnej postaci:

$$P\left(\omega_i^t = 1 | \omega_i^{t-1} = -1\right) = 1 - F_f^-\left(-I_{i(-1)}^t\right), \tag{22}$$

$$P\left(\omega_i^t = -1 | \omega_i^{t-1} = 1\right) = 1 - F_f^+\left(-I_{i(+1)}^t\right). \tag{23}$$

Można zauważyć, posługując się tą postacią modelu opartego na funkcji wpływu, że model progowy (14) ma tę samą postać, zatem model progowy można wyrazić w postaci charakterystycznej dla stosowanych w psychologii społecznej modeli opartych na funkcji wpływu. Z kolei jeśli funkcja wpływu jest rosnącą funkcją $\left\{\omega_j^{t-1}\right\}$, to model oparty na takiej funkcji może być traktowany jako model progowy.

W ekonomii do opisu sytuacji binarnego wyboru zazwyczaj stosowane były modele oparte na tzw. funkcji użyteczności. Zależała ona od wyboru jednostki i zakładano, że *homo oeconomicus* będzie wybierać tę opcję, która będzie maksymalizować jego korzyść, czyli użyteczność. W ubiegłym wieku pojawiało się coraz więcej dowodów przeczących założeniu, że użyteczność dla ludzkich jednostek oznacza racjonalnie wykalkulowaną korzyść ekonomiczną. Prawdopodobnie najbardziej znanym modelem ekonomicznym uwzględniającym fakt, że jednostki ludzkie wydają się, w stopniu o wiele większym iż często dotąd zakładano, podlegać społecznym wpływom, nawet przy dokonywaniu takich wyborów, które, racjonalnie rzecz biorąc, powinny od oddziaływań z innymi ludźmi nie zależeć, jest model Brocka-Durlaufa [1; 2]. Jeśli uwzględnimy dodatkowo skłonność ludzi do trwania konsekwentnie przy swoich uprzednich wyborach, to otrzymamy następujący model decyzyjny [2]:

$$\omega_i^t = \operatorname{argmax}_{\omega_i^t=\pm 1}\left\{U^{\det}\left(\omega_i^{t-1},\omega_{j\neq i}^{t-1}\right)+\epsilon\left(\omega_i^t\right)\right\}, \tag{24}$$

$$U^{\det}\left(\omega_i^{t-1},\omega_{j\neq i}^{t-1}\right)=h_i\omega_i^t+b_i\omega_i^{t-1}\omega_i^t+\frac{1}{2}\omega_i^t\sum_{j\neq i}J_{ij}\omega_j^{t-1}, \tag{25}$$

gdzie $U^{\det}$ jest deterministyczną częścią funkcji użyteczności, a $\epsilon\left(\omega_i^t\right)$ składnikiem losowym. Podobnie jak w powyższych modelach, h_i oznacza obiektywną korzyść (np. ekonomiczną), b_i − siłę konserwatyzmu jednostki, a J_{ij} − siłę oddziaływań z innymi jednostkami.

Można pokazać [6], że (22)-(23) oraz (24)-(25) są równoważne, tzn. dla każdej funkcji użyteczności można skonstruować odpowiadającą jej funkcję wpływu prowadzącą do identycznych wyborów i na odwrót: dla każdej funkcji wpływu można znaleźć odpowiadającą jej funkcję użyteczności. Konkretnie: dla zadanej funkcji wpływu w chwili t, I_i^t, odpowiadająca jej funkcja użyteczności ma postać:

$$U_i=-\frac{1}{2}\omega_i^{t+1}\omega_i^t I_i^t,$$

natomiast dla zadanej funkcji użyteczności odpowiadająca jej funkcja wpływu może być zapisana następująco:

$$I_i=-\omega_i^t\left[U_i\left(\omega_i^t=1\right)-U_i\left(\omega_i^t=-1\right)\right].$$

Pamiętając o tym, że model progowy może być zapisany w języku modelu opartego na funkcji wpływu, możemy zatem model progowy wyrazić również poprzez funkcję użyteczności. Z zastrzeżeniem, że funkcja wpływu i funkcja użyteczności mają być rosnącymi funkcjami wzajemnych oddziaływań, można również dokonać przejścia w drugą stronę, czyli modele oparte na funkcji użyteczności i funkcji wpływu przeformułować do postaci modelu progowego. Modele progowe mogą odgrywać zatem dużą rolę w modelowaniu zjawisk zarówno społecznych, jak i ekonomicznych i innych.

8. Podsumowanie

Modele progowe w swoich najwcześniejszych wersjach wprowadzone zostały do opisu masowych zjawisk socjologicznych. W najprostszych wersjach wydają się wręcz naiwne i zbyt uproszczone, by dać jakikolwiek wgląd w naturę procesów społecznych. Jednakże już w tej najprostszej postaci dostarczają one cennych lekcji na temat możliwych dużych efektów drobnych różnic w charakterystykach społeczeństw [3]. Dodatkową ich zaletą jest prosta intuicyjna interpretacja zarówno samej konstrukcji modelu, jak i otrzymywanych wyników.

Najprostsze wersje modelu mogą być dowolnie rozbudowywane, by uwzględnić szersze spektrum modelowanych sytuacji społecznych i ekonomicznych. Bardziej skomplikowane wersje modelu pozwalają na bardziej realistyczne uwzględnianie większej liczby czynników wpływających na procesy decyzyjne, nie tracąc przy tym kontaktu ze swą źródłową koncepcją dotyczącą oddziaływań międzyludzkich.

Literatura

[1] Brock W.A., Durlauf S.N., *Interaction based models*, [w:] *Handbook of Econometrics*, eds. Heckman, Leamer, vol. 5, Ch. 54, Elsevier Science B.V., Amsterdam 2001, s. 3297-3380.
[2] Durlauf S.N., *How can statistical mechanics contribute to social sciences*?, Proceedings of the National Acamedy of Sciences of the USA, 1999, 96, s. 10582.
[3] Granovetter M., *Threshold models of collective behavior*, *"The American Journal of Sociology"* 1978, 83, s. 1420-1443.
[4] Hołyst J.A., Kacperski K., Schweitzer F., *Phase transitions in social impact models of opinion formation*, *"Physica A"* 2000, 285, s. 199-218.
[5] Nowak A., Kuś M., Urbaniak J., Zarycki T., *Simulating the coordination of individual economic decisions*, "PhysicaA" 2000, 287, s. 613-630.
[6] Ostasiewicz K., Tyc M.H., Radosz A., Magnuszewski P., Goliczewski P., Hetman P., Sendzimir J., *Multistability of impact, utility and threshold concepts of binary choice models*, "PhysicaA" 2008, 387, s. 6337-6352.
[7] Rolfe M., *Social Networks and Threshold Models of Collective Behavior*, preprint, University of Chicago, Chicago 2004.
[8] Schelling T., *Dynamic models of segregations*, "Journal of Mathematical Sociology" 1971, 1, s. 143-86.
[9] Wheeler L., *Toward a theory of behavioral contagion*, "Psychological Review" 1966, 73, s. 179--92.

THRESHOLD MODELS AND THEIR APPLICATION TO SOCIOLOGY AND ECONOMICS

Summary: The main idea of threshold models consists in assuming that human behavior and human choices are to a large degree dependent on behaviors and choices of the other members of the society. An individual will be ready to join an action (strike, buying a new product, etc.) conditioned that the certain (in general, different for different persons) percent of his acquaintances or neighbors has already joined it. This percentage is called a threshold and may be, in particular, equal to zero. Sociology, from its very nature, has always taken human co-dependence into regard. Recently, in economics it is also more and more common to assume that human beings are motivated not only by material benefits but by sociological ones, connected with conformism, as well. Threshold models can be used to model such kind of situations.

Keywords: threshold model, binary choice model, stationary states.

THRESHOLD MODELS AND THEIR APPLICATION TO SOCIOLOGY AND ECONOMICS

Summary: The main idea of threshold models consists in assuming that human behavior and human choices are to a large degree dependent on behaviors and choices of the other members of the society. An individual will be ready to join an action (strike, buying a new product, etc.) conditioned that the certain (in general, different for different persons) percent of his acquaintances or neighbors has already joined it. This percentage is called a threshold and may be, in particular, equal to zero. Sociology, from its very nature, has always taken human co-dependence into regard. Recently, in economics it is also more and more common to assume that human beings are motivated not only by material benefits but by sociological ones, connected with conformism, as well. Threshold models can be used to model such kind of situations.

Keywords: threshold model, binary choice model, stationary states.