

# Zagadnienia statystyki aktuarialnej

pod redakcją  
**Joanny Dębickiej**



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2011

Recenzenci: Krzysztof Dębicki, Grzegorz Kończak,  
Zbigniew Palmowski, Włodzimierz Szkutnik

Redakcja wydawnicza: Joanna Świrska-Korlub

Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Adam Dębski

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie [www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl)

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne  
w The Central and Eastern European Online Library [www.ceeol.com](http://www.ceeol.com),  
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon  
[http://kangur.uek.krakow.pl/bazy\\_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania  
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa  
[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie  
wymaga pisemnej zgody Wydawnictwa

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2011

**ISSN 1899-3192**

**ISBN 978-83-7695-240-6**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

## Spis treści

Wstęp .....	7
<b>Joanna Dębicka:</b> Indeksacja przepływów pieniężnych w ubezpieczeniach wielostanowych .....	9
<b>Stanisław Heilpern:</b> Wyznaczanie wielkości renty w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie.....	30
<b>Aleksandra Iwanicka:</b> Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w agregacji dwóch klas ubezpieczeń.....	49
<b>Anna Nikodem-Słowikowska:</b> The effect of dependence on life insurance .	60
<b>Katarzyna Ostasiewicz:</b> Modele progowe i ich zastosowanie w socjologii i ekonomii .....	77
<b>Stanisława Ostasiewicz, Katarzyna Ostasiewicz:</b> Modelowanie trwania życia w populacjach niejednorodnych.....	99
<b>Katarzyna Sawicz:</b> Uwagi o finansowaniu systemu ochrony zdrowia w Polsce .....	123
<b>Janusz L. Wywiół, Agnieszka Żrubek:</b> O dokładności analitycznego wyznaczania mocy pewnego testu na normalność rozkładu prawdopodobieństwa.....	131

## Summaries

<b>Joanna Dębicka,</b> Indexing cash flows in multistate insurance contracts .....	29
<b>Stanisław Heilpern,</b> Calculation of pensions in the multiple life insurances	48
<b>Aleksandra Iwanicka,</b> Influence of some outside risk factors on a ruin probability in the aggregated two-classes risk model .....	59
<b>Anna Nikodem-Słowikowska,</b> Wpływ zależności na ubezpieczenia na życie.....	76
<b>Katarzyna Ostasiewicz,</b> Threshold models and their application to sociology and economics .....	98
<b>Stanisława Ostasiewicz, Katarzyna Ostasiewicz,</b> Approximation of survival function for heterogeneity population .....	122
<b>Katarzyna Sawicz,</b> Some comments on the financing of health care system in Poland .....	130
<b>Janusz L. Wywiół, Agnieszka Żrubek,</b> On estimation of the power of a normality test.....	147

**Janusz L. Wywił**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

**Agnieszka Żrubek**

KAMSOFIT SA Katowice

---

## O DOKŁADNOŚCI ANALITYCZNEGO WYZNACZANIA MOCY PEWNEGO TESTU NA NORMALNOŚĆ ROZKŁADU PRAWDOPODOBIENSTWA

---

**Streszczenie:** Z. Pawłowski zaproponował test na normalność rozkładu prawdopodobieństwa skonstruowanego na podstawie znanego twierdzenia Geary'ego głoszącego, że prosta próba statystyczna jest z rozkładu normalnego wtedy i tylko wtedy, gdy średnia z próby i wariancja z próby są niezależne. Celem niniejszej pracy jest ocena dokładności oszacowania mocy rangowego testu na normalność rozkładu, gdy sprawdzianem testu jest proponowany przez Wywiła współczynnik korelacji rangowej Kendalla [2]. Uzyskane analityczne oceny mocy testu zostały porównane z symulacyjną oceną tej mocy. Jako rozkłady alternatywne dla hipotetycznego przyjęto rozkład chi-kwadrat lub rozkład Daguma wykorzystywany przy modelowaniu rozkładów dochodów.

**Słowa kluczowe:** test normalności rozkładu, moc testu, symulacja komputerowa, współczynnik korelacji rangowej.

### 1. Wstęp

Rozpoczynamy od losowania  $k$  statystycznych próbek prostych, z których każda składa się z  $m$  elementów. Następnie wyznaczamy  $k$  par obserwacji  $(\bar{X}_i, S_i^2)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , przy czym

$$\bar{X}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_{ij}, \quad (1)$$

$$S_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (X_{ij} - \bar{X}_i)^2. \quad (2)$$

Wywił [5] zaproponował jednoczesne rangowanie elementów ciągu  $(\bar{X}_i, S_i^2)$ , przekształcając go w ciąg par rang  $(a_i, b_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , przy czym  $a_i$  jest rangą przypisaną średniej  $\bar{X}_i$ , natomiast  $b_i$  jest rangą nadaną wariancji  $S_i^2$ .

Gdy prawdziwa jest hipoteza  $H_0$  o normalności rozkładu, wówczas prawdziwa będzie również hipoteza  $H'_0: \rho = 0$ , gdzie  $\rho$  oznacza wartość współczynnika korelacji rangowej par  $(\bar{X}_i, S_i^2)$ . Natomiast gdy prawdziwa jest hipoteza  $H_1$ , że badany rozkład charakteryzuje się asymetrią dodatnią (tak jak jest to w naszym przypadku), wówczas również będzie prawdziwa hipoteza  $H'_1: \rho = \rho_0 > 0$ .

Pary rang  $(a_i, b_i)$  porządkujemy według rosnących wartości rang  $b_i$ . Wówczas  $k$  jest liczbą prawdziwych implikacji  $a_i > a_j$ , jeśli  $i > j$ , przy czym  $i = 2, \dots, k, j = 1, \dots, k - 1$ . Z kolei  $l'_i$  jest liczbą prawdziwych implikacji  $a_i < a_j$ , jeśli  $i > j$ , przy czym  $i = 2, \dots, k, j = 1, \dots, k - 1$ . Współczynnik korelacji rangowej Kendalla [2] ma wówczas postać:

$$Q = \frac{2F}{k(k-1)}, \quad (3)$$

gdzie

$$F = \sum_{i=1}^k (l_i - l'_i). \quad (4)$$

Kendall wykazał, że jeżeli  $p = 0$  i  $k \rightarrow \infty$ , to zmienna:

$$Q' = \frac{Q}{D(Q)}, \quad (5)$$

gdzie

$$D(Q) = \sqrt{\frac{2(2k+5)}{9k(k-1)}}, \quad (6)$$

ma rozkład normalny  $N(0, 1)$ .

Wyznaczenie mocy testu przy prawdziwości hipotezy  $H'_1: \rho = \rho_0 > 0$  sprowadza się do wyznaczenia prawdopodobieństwa:

$$P(Q' \geq q_\alpha | H'_1) = \delta, \quad (7)$$

gdzie  $\delta$  jest wartością mocy testu, a  $q_\alpha$  jest wartością krytyczną zależną od założonego poziomu istotności  $\alpha$ . Kendall wykazuje, że jeżeli  $\rho \neq 0$  i gdy  $k \rightarrow \infty$ , to sprawdzian  $Q$  ma rozkład normalny o nadziei matematycznej równej  $\rho_0$  i odchyleniu standardowym równym  $D_*(Q)$ . Dla  $\rho_0$  estymatorem jest  $Q$ , a dla  $D_*(Q)$  estymator wyraża się wzorem:

$$W^2 = \frac{(k-4)!}{k!} \left[ 4 \sum_{i=1}^k c_i^2 - \frac{2(2k-3)}{k(k-1)} c^2 - 2k(k-1) \right], \quad (8)$$

gdzie

$$c = \sum_{i=1}^k c_i \quad c_i = k - l_i - l'_i - 1.$$

Wzór (7) równoważny jest następującym relacjom:

$$P(Q \geq q_\alpha D(Q) | H_1') = \delta, \tag{9}$$

$$P\left(\frac{Q - \rho_0}{D_*(Q)} \geq \frac{q_\alpha D(Q) - \rho_0}{D_*(Q)} | H_1'\right) = \delta. \tag{10}$$

Wielkości  $\rho_0$ ,  $D(Q)$  i  $D_*(Q)$  zastępujemy ocenami ich estymatorów i otrzymujemy:

$$P\left(\frac{Q - \rho_0}{D_*(Q)} \geq \left[ \sqrt{\frac{q}{3} - \frac{Q}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{k(k-1)}{2k+5}} \right] \sqrt{\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(2k+5)}{2k(k-1)\sum_{i=1}^k c_i^2 - (2k-3)c^2 - k^2(k-1)^2}} | H_1'\right) = \delta' \tag{11}$$

Wiemy, że statystyka:

$$Z = \frac{Q - \rho_0}{D_*(Q)} \tag{12}$$

ma rozkład normalny  $N(0, 1)$ . Wprowadzając oznaczenie:

$$z_\delta = \left[ \sqrt{\frac{q}{3} - \frac{Q}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{k(k-1)}{2k+5}} \right] \sqrt{\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(2k+5)}{2k(k-1)\sum_{i=1}^k c_i^2 - (2k-3)c^2 - k^2(k-1)^2}}, \tag{13}$$

otrzymujemy:

$$\delta' = P(Z \geq z_\delta | H_1') = 1 - P(Z < z_\delta | H_1') = 1 - \varphi(z_\delta), \tag{14}$$

gdzie  $\varphi$  jest dystrybucją rozkładu normalnego.

## 2. Analiza symulacyjna mocy testu

W tej części artykułu zajmiemy się oceną, podobnie jak Wywiół [5], dokładności analitycznego wyznaczania mocy powyższego testu. Moc tego testu analizować będziemy dla dwóch rozkładów charakteryzujących się asymetrią dodatnią, tj. rozkładu chi-kwadrat ( $\chi^2_r$ ) oraz rozkładu Daguma ( $D(a, b, p)$ ). Wiemy, że wraz ze wzrostem liczby stopni swobody rozkładu chi-kwadrat jego asymetria zmniejsza się, zatem rozważamy rozkład chi-kwadrat z liczbą stopni swobody, które wynoszą ko-

lejno 3, 5, 10, 20 i 30, Współczynniki skośności wynoszą odpowiednio 1.63, 1.26, 0.89, 0.63, 0.52.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej o rozkładzie Daguma ma postać:

$$f(x) = \frac{apx^{ap-1}}{b^{ap}[1+(x/b)^a]^{p+1}}, \quad x > 0, \quad (15)$$

gdzie  $a, b, p > 0$ . Wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu Daguma określają odpowiednio wzory:

$$E(X) = \frac{b\Gamma(p+1/a)\Gamma(1-1/a)}{\Gamma(p)} \quad (16)$$

oraz

$$D^2(X) = \frac{b^2[\Gamma(p)\Gamma(p+2/a)\Gamma(1-2/a) - \Gamma^2(p+1/a)\Gamma^2(1-1/a)]}{\Gamma^2(p)}. \quad (17)$$

Współczynnik skośności, wyznaczony jako zestandaryzowany trzeci moment centralny, dla rozkładu Daguma ma postać:

$$\beta_1 = \frac{\Gamma^2(p)\lambda_3 - 3\Gamma(p)\lambda_2\lambda_1 + 2\lambda_1^3}{[\Gamma(p)\lambda_2 - \lambda_1^2]^{3/2}}, \quad (18)$$

gdzie  $\lambda_i = \Gamma(1-i/a)\Gamma(p+i/a)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Moc testu analizować będziemy dla rozkładu Daguma z następującymi parametrami:  $D(4, 1252, 15)$ ,  $D(8, 2277, 5)$ ,  $D(15, 2978, 1)$ . Parametry tego rozkładu zostały dobrane tak, aby siła jego asymetrii się zmieniała i wartość oczekiwana pozostawała bez zmian. Wartość oczekiwana liczona za pomocą wzoru (16) wynosi  $E(X) = 3000$  dla  $D(4, 1252, 15)$ ,  $D(8, 2277, 5)$  oraz  $D(15, 2978, 1)$ . Obliczmy teraz odchylenie standardowe oraz współczynniki skośności. Skorzystamy ze wzorów (17) oraz (18), Wstawiając odpowiednie parametry, otrzymujemy:

$$D(X) = 1292, \beta_1 = 5,505, \text{ dla rozkładu } D(4, 1252, 15);$$

$$D(X) = 566, \beta_1 = 1,983, \text{ dla rozkładu } D(8, 2277, 5);$$

$$D(X) = 367, \beta_1 = 0,599, \text{ dla rozkładu } D(15, 2978, 1).$$

Przejdziemy teraz do oceny dokładności analitycznego wyznaczania mocy przedstawionego testu. Rozważamy próby o liczebnościach  $n$  wynoszących kolejno 20, 30, 40, 50, 70 i 100. Natomiast liczebność każdej podpróby wynosi dwa elementy. Wartości  $\delta$  i  $\delta'$  szacować będziemy na podstawie serii 100 000 niezależnych prób, każda o zadanej liczebności  $n$ , składających się z pseudolosowych liczb o rozkładzie chi-kwadrat lub rozkładzie Daguma.

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech  $r$  oznacza moc testu wyznaczoną za pomocą komputerowej analizy symulacyjnej (oszacowana za pomocą częstości odrzucenia sprawdzanej hipotezy o normalności rozkładu przez test). Natomiast  $r'$

oznaczymy oszacowaną moc testu wyznaczoną analitycznie za pomocą wzoru (14). Otrzymane wyniki zostały zamieszczone w tab. 1-8, natomiast na wykresach na rys. 1-16 przedstawiono wyniki otrzymane dla poziomu istotności  $\alpha = 0,1$ .

**Tabela 1.** Moce testu dla rozkładu chi-kwadrat z 3 stopniami swobody

$n$	$\alpha = .1$		$\alpha = .05$		$\alpha = .01$		$\alpha = .005$		$\alpha = .001$	
	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$
20	.702	.637	.556	.519	.235	.294	.171	.223	.040	.109
30	.841	.769	.720	.670	.421	.449	.331	.367	.142	.216
40	.923	.854	.847	.777	.631	.581	.516	.499	.280	.331
50	.961	.908	.919	.851	.761	.687	.655	.611	.428	.441
70	.991	.964	.979	.935	.906	.834	.852	.779	.687	.634
100	1	.991	.998	.982	.983	.941	.968	.914	.905	.829

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 2.** Moce testu dla rozkładu chi-kwadrat z 5 stopniami swobody.

$n$	$\alpha = .1$		$\alpha = .05$		$\alpha = .01$		$\alpha = .005$		$\alpha = .001$	
	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$
20	.544	.518	.391	.399	.128	.202	.029	.146	.015	.066
30	.678	.632	.519	.518	.229	.302	.164	.234	.052	.122
40	.791	.719	.657	.614	.382	.397	.275	.320	.112	.185
50	.857	.787	.753	.694	.493	.483	.371	.403	.178	.251
70	.938	.875	.878	.807	.678	.628	.574	.550	.351	.386
100	.983	.946	.961	.907	.857	.785	.791	.723	.601	.573

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 3.** Moce testu dla rozkładu chi-kwadrat z 10 stopniami swobody

$n$	$\alpha = .1$		$\alpha = .05$		$\alpha = .01$		$\alpha = .005$		$\alpha = .001$	
	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$
20	.379	.391	.244	.283	.061	.126	.038	.087	.005	.036
30	.472	.478	.313	.364	.103	.183	.067	.134	.017	.062
40	.569	.543	.409	.429	.176	.233	.110	.176	.032	.088
50	.636	.603	.484	.490	.229	.285	.148	.221	.051	.117
70	.752	.699	.621	.593	.343	.382	.248	.309	.106	.181
100	.863	.797	.770	.708	.511	.506	.406	.428	.214	.278

Źródło: opracowanie własne.



**Tabela 4.** Moce testu dla rozkładu chi-kwadrat z 20 stopniami swobody

$n$	$\alpha = .1$		$\alpha = .05$		$\alpha = .01$		$\alpha = .005$		$\alpha = .001$	
	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$
20	.278	.313	.165	.217	.036	.089	.021	.060	.003	.023
30	.332	.369	.197	.266	.051	.121	.031	.085	.031	.036
40	.398	.414	.255	.308	.086	.148	.039	.106	.011	.048
50	.443	.456	.297	.347	.110	.177	.062	.129	.018	.062
70	.539	.527	.390	.415	.159	.228	.101	.173	.033	.089
100	.650	.616	.510	.505	.247	.303	.171	.239	.066	.132

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 5.** Moce testu dla rozkładu chi-kwadrat z 30 stopniami swobody

$n$	$\alpha = .1$		$\alpha = .05$		$\alpha = .01$		$\alpha = .005$		$\alpha = .001$	
	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$
20	.239	.280	.137	.191	.027	.076	.016	.050	.019	.002
30	.278	.323	.156	.228	.039	.098	.023	.067	.005	.027
40	.332	.360	.201	.260	.062	.118	.034	.083	.007	.040
50	.364	.393	.232	.289	.077	.138	.042	.099	.010	.045
70	.438	.451	.296	.343	.106	.175	.064	.129	.019	.062
100	.527	.523	.386	.412	.159	.226	.103	.172	.035	.089

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 6.** Moce testu dla rozkładu  $D(4, 1252, 15)$ 

$n$	$\alpha = .1$		$\alpha = .05$		$\alpha = .01$		$\alpha = .005$		$\alpha = .001$	
	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$
20	.694	.634	.553	.516	.240	.294	.173	.224	.041	.111
30	.829	.764	.708	.665	.419	.447	.332	.366	.145	.217
40	.914	.848	.837	.771	.622	.576	.511	.495	.281	.330
50	.955	.902	.909	.844	.749	.680	.645	.605	.420	.439
70	.989	.960	.973	.930	.897	.825	.841	.770	.677	.628
100	.998	.990	.996	.979	.977	.935	.960	.906	.893	.819

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 7.** Moce testu dla rozkładu  $D(8, 2277, 5)$ 

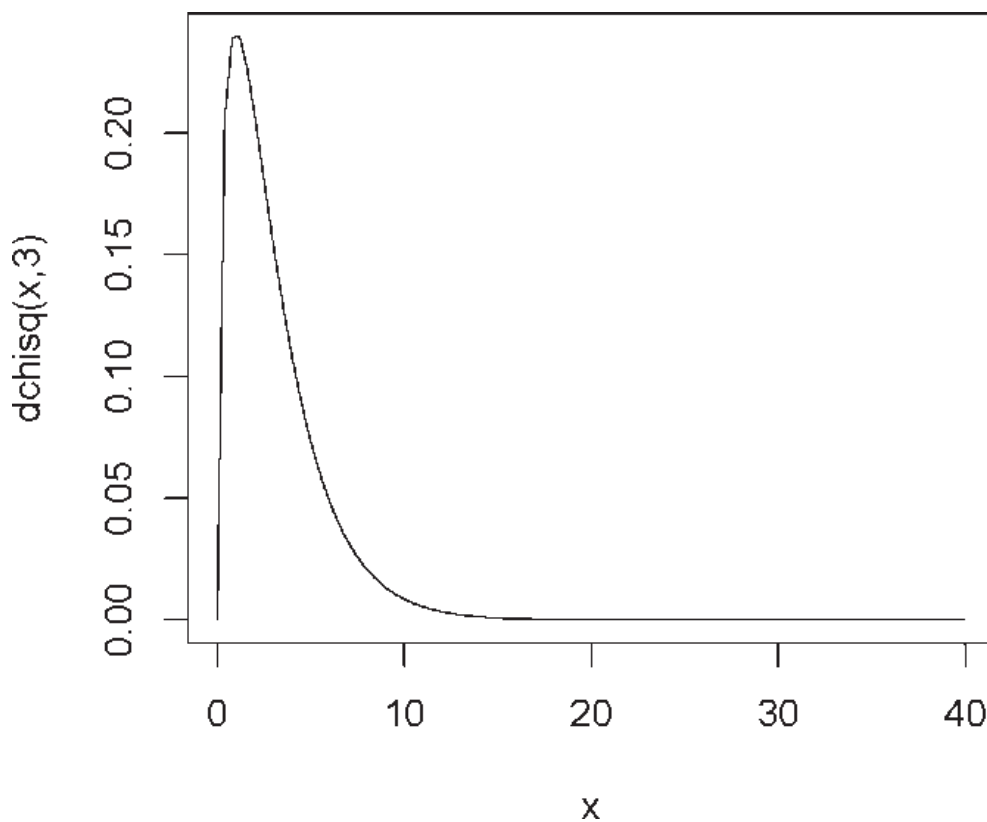
$n$	$\alpha = .1$		$\alpha = .05$		$\alpha = .01$		$\alpha = .005$		$\alpha = .001$	
	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$
20	.505	.486	.357	.370	.114	.183	.075	.132	.014	.058
30	.627	.595	.464	.481	.198	.274	.139	.210	.045	.108
40	.737	.679	.597	.571	.330	.358	.235	.286	.092	.162
50	.805	.743	.687	.644	.424	.434	.313	.357	.144	.217
70	.901	.837	.824	.760	.596	.570	.490	.492	.282	.334
100	.964	.918	.929	.867	.785	.722	.704	.654	.501	.498

Źródło: opracowanie w asne.

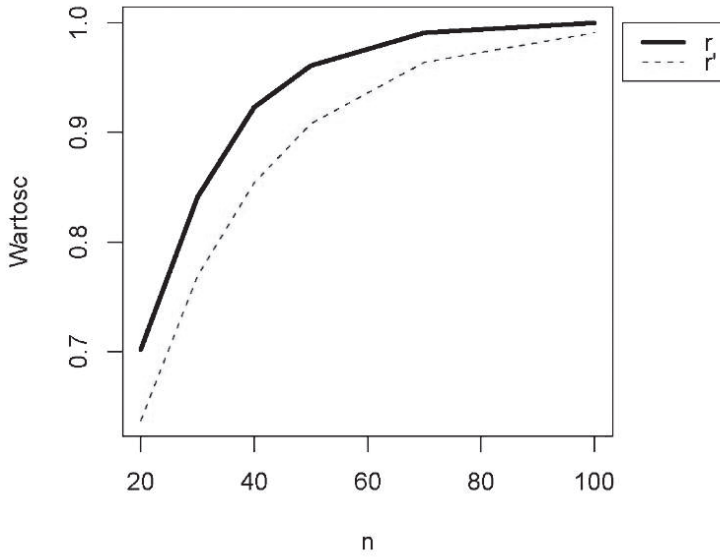
**Tabela 8.** Moce testu dla rozkładu  $D(15, 2978, 1)$ .

$n$	$\alpha = .1$		$\alpha = .05$		$\alpha = .01$		$\alpha = .005$		$\alpha = .001$	
	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$	$r$	$r'$
20	.195	.240	.111	.161	.022	.063	.013	.041	.002	.015
30	.215	.266	.118	.183	.028	.076	.016	.052	.003	.021
40	.246	.289	.142	.203	.041	.088	.022	.061	.005	.026
50	.260	.306	.155	.218	.047	.097	.025	.068	.006	.030
70	.302	.341	.190	.248	.060	.116	.035	.083	.010	.038
100	.349	.382	.233	.284	.081	.140	.050	.102	.016	.049

Źródło: opracowanie własne.

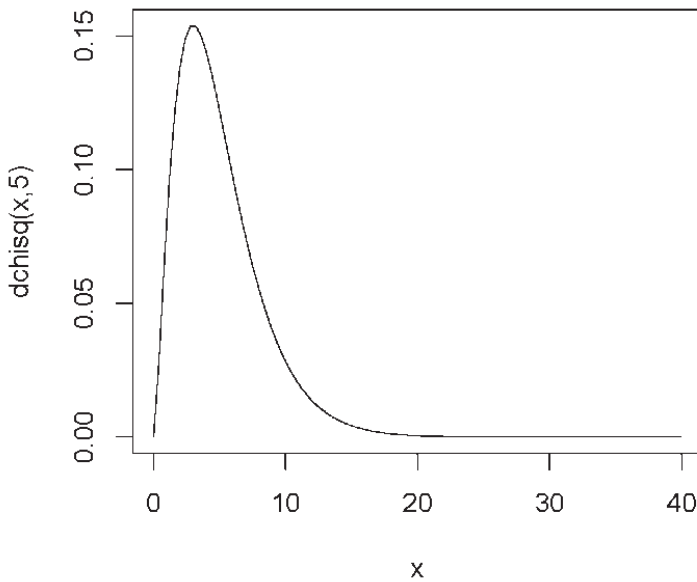
**Rys. 1.** Funkcja gęstości zmiennej losowej o rozkładzie chi-kwadrat o 3 stopniach swobody

Źródło: opracowanie własne.



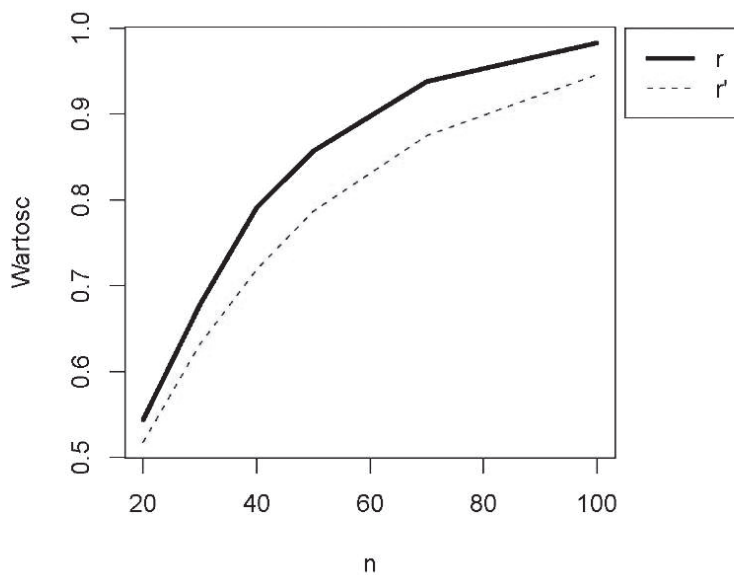
**Rys. 2.** Wykresy mocy testu dla 3 stopni swobody rozkładu chi-kwadrat

Źródło: opracowanie własne.



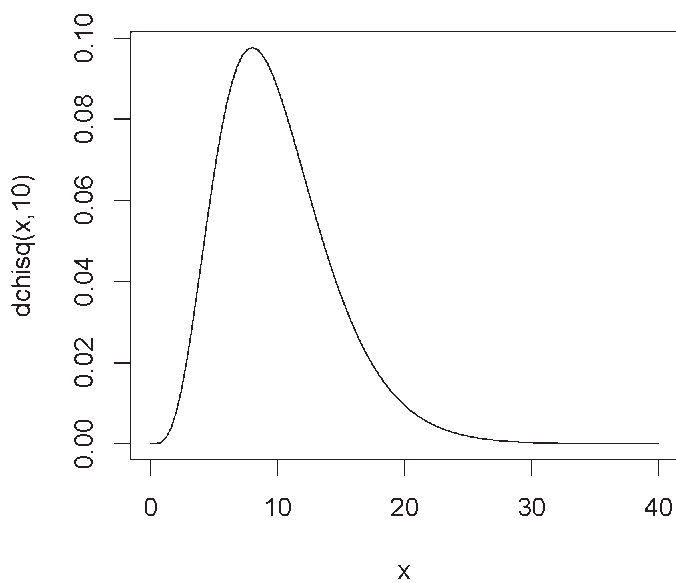
**Rys. 3.** Funkcja gęstości zmiennej losowej o rozkładzie chi-kwadrat o 5 stopniach swobody

Źródło: opracowanie własne.



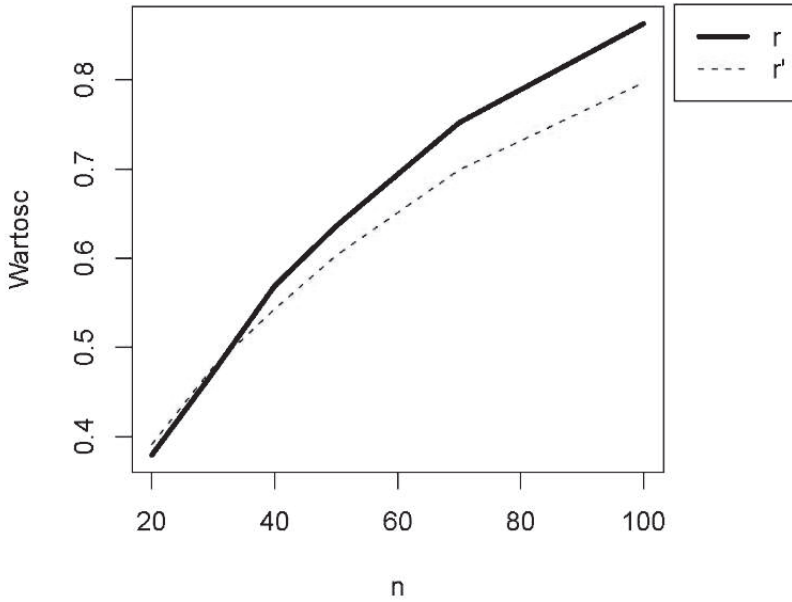
**Rys. 4.** Wykresy mocy testu dla 5 stopni swobody rozkładu chi-kwadrat

Źródło: opracowanie własne.



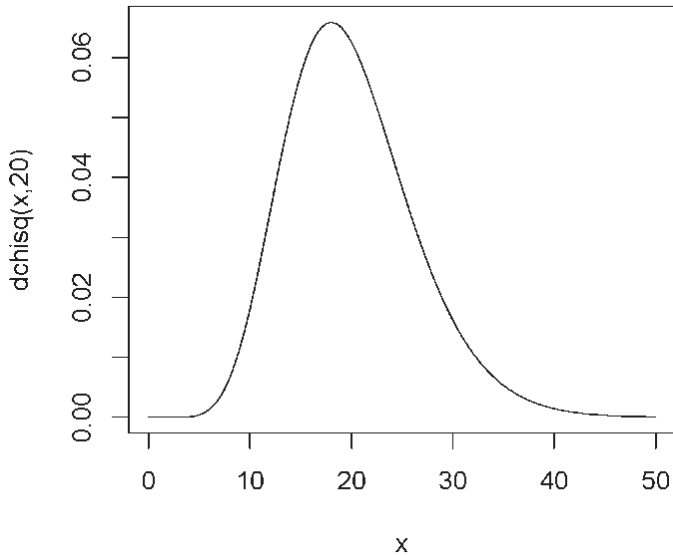
**Rys. 5.** Funkcja gęstości zmiennej losowej o rozkładzie chi-kwadrat o 10 stopniach swobody

Źródło: opracowanie własne.



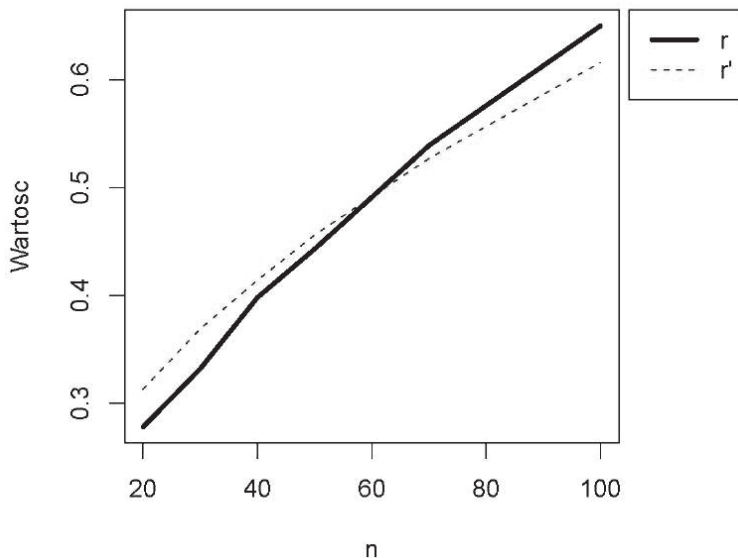
**Rys. 6.** Wykresy mocy testu dla 10 stopni swobody rozkładu chi-kwadrat

Źródło: opracowanie własne.



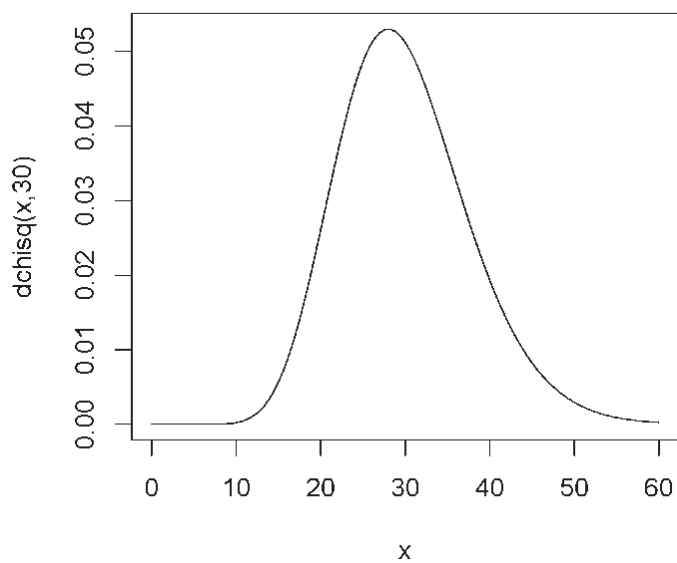
**Rys. 7.** Funkcja gęstości zmiennej losowej o rozkładzie chi-kwadrat o 20 stopniach swobody

Źródło: opracowanie własne.



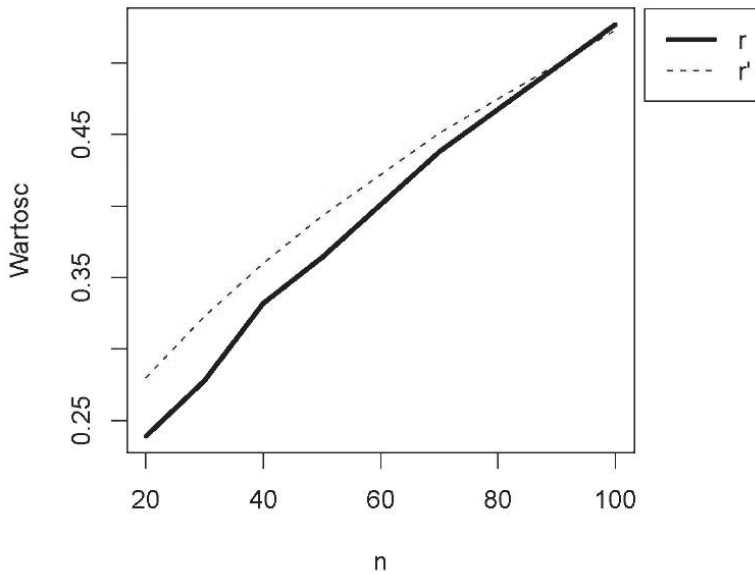
**Rys. 8.** Wykresy mocy testu dla 20 stopni swobody rozkładu chi-kwadrat

Źródło: opracowanie własne.



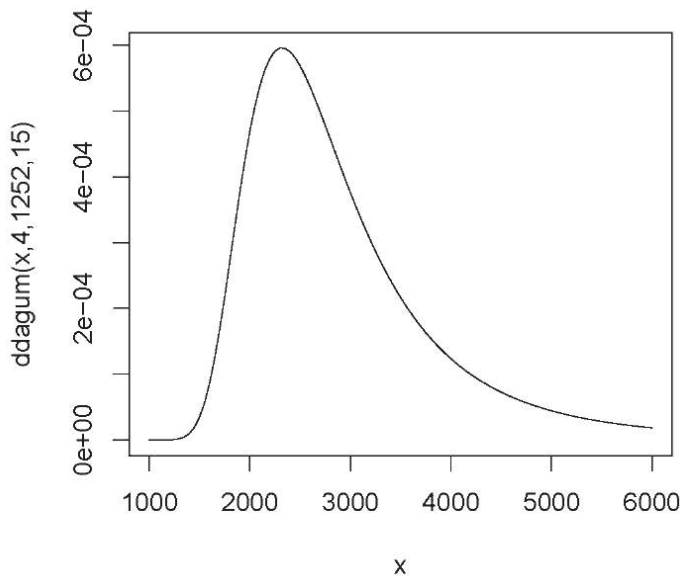
**Rys. 9.** Funkcja gęstości zmiennej losowej o rozkładzie chi-kwadrat o 30 stopniach swobody

Źródło: opracowanie własne.



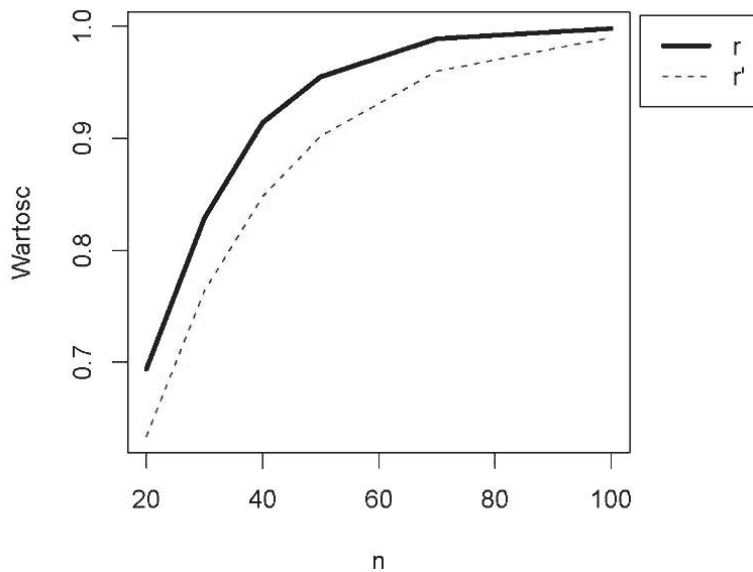
**Rys. 10.** Wykresy mocy testu dla 30 stopni swobody rozkladu chi-kwadrat

Źródło: opracowanie własne.



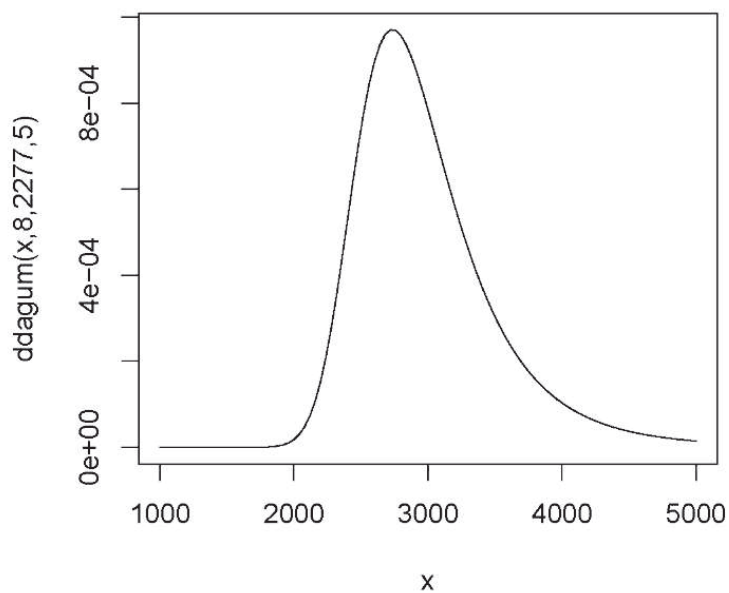
**Rys. 11.** Funkcja gęstości zmiennej losowej o rozkładzie  $D(4, 1252, 15)$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 12. Wykresy mocy testu  $D(4, 1252, 15)$

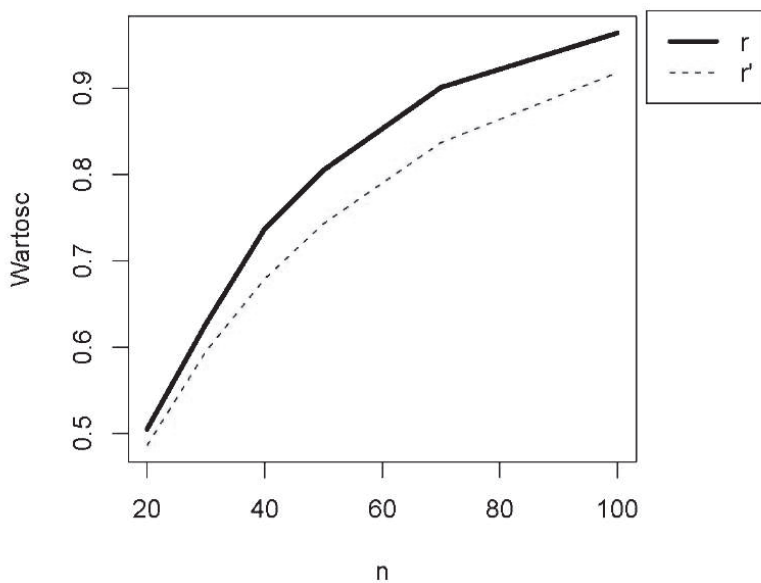
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 13. Funkcja gęstości zmiennej losowej o rozkładzie  $D(8, 2277, 5)$ .

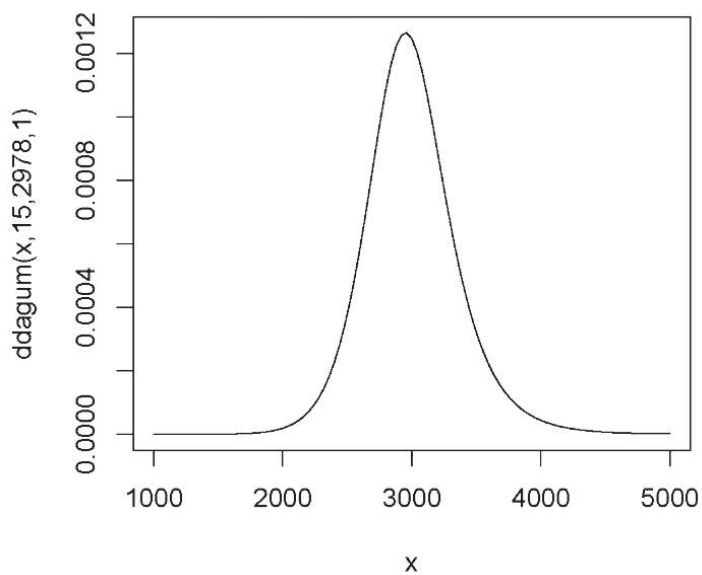
Źródło: opracowanie własne.





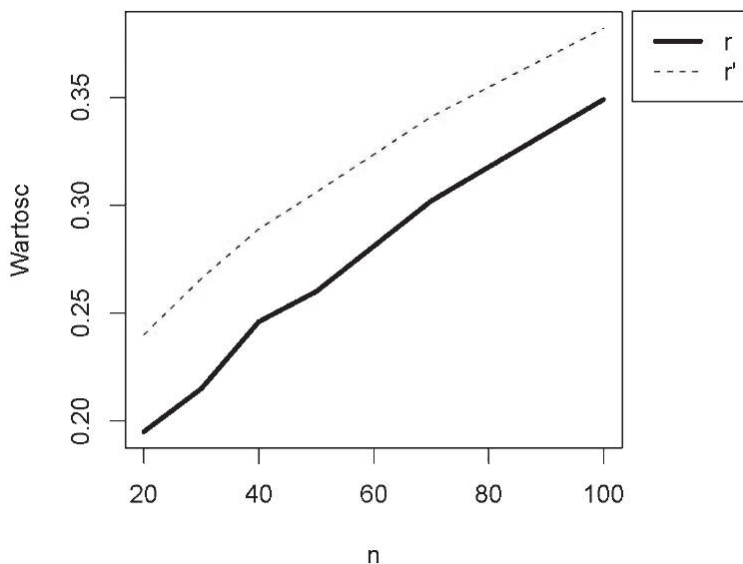
Rys. 14. Wykresy mocy testu  $D(8, 2277, 5)$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 15. Funkcja gęstości zmiennej losowej o rozkładzie  $D(15, 2978, 1)$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 16. Wykresy mocy testu  $D(15, 2978, 1)$

Źródło: opracowanie własne.

Przejdziemy teraz do porównania mocy testu  $r$ , która została oszacowana za pomocą komputerowej analizy symulacyjnej z mocą testu  $r'$  otrzymaną za pomocą wzoru (14). W tym celu obliczymy błędy względne, jakie zostały popełnione przy wyznaczaniu mocy testu w sposób analityczny. Skorzystamy z następującego wzoru:

$$\frac{|r' - r|}{r} \quad (19)$$

W tabelach 9 i 10 przedstawione zostały błędy względne dla najczęściej przyjmowanych poziomów istotności  $\alpha = 0,1$  oraz  $\alpha = 0,05$ .

Tabela 9. Błędy względne oceny mocy testu w przypadku rozkładu  $\chi_k^2$

$n/\alpha$	$\chi_3^2$		$\chi_5^2$		$\chi_{10}^2$		$\chi_{20}^2$		$\chi_{30}^2$	
	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05	0.1	0.05
20	.09	.07	.05	.02	.03	.16	.13	.32	.39	.17
30	.09	.07	.07	.01	.01	.16	.11	.35	.16	.46
40	.07	.08	.09	.07	.05	.05	.04	.21	.08	.29
50	.06	.07	.08	.08	.05	.01	.03	.17	.08	.25
70	.03	.04	.07	.08	.07	.05	.02	.06	.03	.16
100	.01	.02	.04	.06	.08	.08	.05	.01	.01	.07

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 10.** Błędy względne oceny mocy testu w przypadku rozkładu Daguma

$n$	$D(4, 1252, 15)$		$D(8, 2577, 1)$		$D(15, 2978, 1)$	
	$\alpha = .1$	$\alpha = .05$	$\alpha = .1$	$\alpha = .05$	$\alpha = .1$	$\alpha = .05$
20	.08	.07	.04	.04	.23	.45
30	.08	.06	.05	.04	.24	.55
40	.07	.08	.08	.04	.17	.43
50	.06	.07	.08	.06	.18	.41
70	.03	.04	.07	.08	.13	.31
100	.01	.02	.05	.07	.09	.22

Źródło: opracowanie własne.

### 3. Podsumowanie

Badanie mocy testu wskazuje, czego należało się spodziewać, że moc testu maleje wraz ze spadkami stopnia asymetrii rozkładu alternatywnego.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że siła asymetrii rozkładu alternatywnego do hipotetycznego rozkładu normalnego ma duży wpływ na dokładność analitycznego wyznaczania mocy tego testu. Im większy jest współczynnik skośności rozkładu alternatywnego, tym większa jest ta dokładność. Rozpatrując rozkłady, dla których współczynnik skośności jest największy, tzn. rozkład  $\chi_3^2$  oraz rozkład  $D(4, 1252, 15)$ , widzimy, że maksymalny błąd, jaki został popełniony przy wyznaczaniu mocy testu w sposób analityczny, wynosi 9%, zatem nie jest on duży.

Na dokładność analitycznego wyznaczania mocy rozważanego testu ma także wpływ liczebność próby. W większości przypadków zauważamy, że jeśli zwiększa się liczebność próby, zwiększa się również dokładność. Gdy liczebność próby  $N = 100$  oraz gdy próba pochodzi z rozkładu  $\chi_3^2$  lub z rozkładu  $D(4, 1252, 15)$ , a więc rozkładów, które charakteryzują się silną asymetrią, wówczas widzimy, że obliczone błędy wynoszą 1% lub 2%, w zależności od przyjętego poziomu istotności.

Przeprowadzona analiza pozwala na użycie w praktyce analitycznej metody oceny rozważanego testu na normalność rozkładu prawdopodobieństwa.

### Literatura

- [1] Geary R.C., *The distribution of the student's ratio for the non-normal samples*, „Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society” 1936.
- [2] Kendall M.G., *Rank Correlation Methods*, C. Griffin and Company Limited, London 1958.
- [3] Pawłowski Z., *O testach jednoznacznych*, „Przegląd Statystyczny” 1958.
- [4] Pawłowski Z., *Moc pewnego testu*, „Przegląd Statystyczny” 1959, s. 141-150.
- [5] Wywił J.L., *Rozważania na temat testu normalności zaproponowanego przez Z. Pawłowskiego*, „Przegląd Statystyczny” 1979, 26, s. 101-110.

- [6] Wywił J.L., *Symulacyjna analiza mocy modyfikacji testu na normalności rozkładu prawdopodobieństwa zaproponowanego przez Z. Pawłowskiego*, [w:] *Badania ekonometryczne w teorii i praktyce*, red. A.S. Barczak, Wydawnictwo UE w Katowicach, Katowice 2010, s. 29-40.

## ON ESTIMATION OF THE POWER OF A NORMALITY TEST

**Summary:** The test of normality based on rank correlation between the sample mean and the sample variance is considered. The well known Geary's theorem leads to the conclusion that such a correlation is not significant when the hypothesis on normality distribution is true. The paper considers the estimator of the power of the test in the case of asymmetric alternatives. On the basis of computer simulation analysis the accuracy of this estimator is analysed. The chi-square and Dagum's distributions are considered as alternative ones. The analysis of the simulation results leads to a conclusion that the proposed estimator of the power can be treated as sufficiently accurate from the practical point of view.

**Keywords:** testing normality, power of a test, simulation analysis, rank correlation.