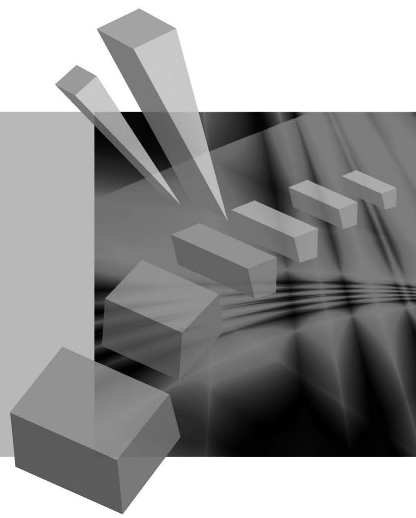
PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics

238

Zastosowania badań operacyjnych
Zarządzanie projektami, decyzje finansowe, logistyka



Redaktor naukowy
Ewa Konarzewska-Gubała

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Stefan Grzesiak, Donata Kopańska-Bródka, Wojciech Sikora,
Józef Stawicki, Tomasz Szapiro, Tadeusz Trzaskalik

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:
www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,
The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-195-9

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Część 3. Problemy logistyki, lokalizacji i rekrutacji

Część 4. Pomiar dokonań, konkurencja firm, negocjacje

Część 5. Problemy metodologiczne

Summaries

Part 1. Project and innovation management

Part 2. Financial decision-making

Part 3. Logistics, localization and recrutment problems

Part 4. Performance measurement, companies competition, negotiations

Part 5. Methodological problems

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 238 • 2011

Zastosowanie badań operacyjnych
Zarządzanie projektami, decyzje finansowe, logistyka ISSN 1899-3192

Barbara Gładysz
Politechnika Wrocławska

METODA WYZNACZANIA ŚCIEŻKI KRYTYCZNEJ PRZEDSIĘWZIĘĆ Z ROZMYTYMI CZASAMI REALIZACJI ZADAŃ

Streszczenie: Czasy realizacji zadań są z natury swej niedeterministyczne. W literaturze obok probabilistycznej analizy przedsięwzięć PERT rozwijana jest analiza przedsięwzięć wykorzystująca aparat rozmytych liczb przedziałowych. W artykule przedstawiono krytyczną analizę metod proponowanych w tym zakresie w literaturze. W niniejszej pracy do analizy czasowej sieci zaimplementowano teorię możliwości. Przyjęto, że czasy wykonania zadań są zmiennymi rozmytymi. W zaproponowanej metodzie analizy czasowej sieci wyznacza się ścieżkę zadań, dla której możliwość, że jest ona ścieżką krytyczną, jest maksymalna. Najpewniejsze (możliwe w stopniu jeden) czasy realizacji zadań są podstawą konstrukcji harmonogramu przedsięwzięcia. Dla zbudowanego harmonogramu określa się możliwość, że poszczególne zadania przedsięwzięcia będą krytyczne. Przedstawiono przykład ilustrujący.

Słowa kluczowe: przedsięwzięcie, ścieżka krytyczna, rozmyty czas zadania, rozkład możliwości.

1. Wstęp

Przedsięwzięcie jest definiowane jako zbiór zadań, relacji określających kolejność ich wykonania oraz takich parametrów, jak czas, koszt, zasoby niezbędne do wykonania poszczególnych zadań. W artykule zajmiemy się analizą czasową. Przedsięwzięcie można opisać w formie skierowanego acyklicznego grafu. W literaturze funkcjonują obok siebie dwa modele sieciowe przedsięwzięć: AON i AOA. W przypadku modelu AOA zadania reprezentowane są w postaci łuków. Długość najdłuższej czasowo ścieżki sieci to tzw. czas krytyczny przedsięwzięcia. W analizie czasowej przedsięwzięcia czasy mogą być zadane jako wielkości zdeterminowane, zmienne losowe przedziałowe lub zmienne rozmyte. Analizę czasową przedsięwzięć ze zdeterminowanymi czasami przeprowadza się metodą CPM. Czas krytyczny jest wówczas wyznaczony jako liczba rzeczywista. Jeżeli czasy realizacji zadań zadane są jako zmienne losowe, to do analizy czasowej stosuje się metodę PERT. W tym przypadku czas krytyczny przedsięwzięcia jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Zadanie czasów w postaci liczb przedziałowych implikuje przedziałową postać czasu krytycznego [Dubois i in. 2005; Shankar, Saradhi 2011]. Do analizy przedsięwzięć z rozmytymi czasami zaproponowano rozmytą metodą ścieżki krytycznej (*fuzzy critical path method*). Tematyce tej poświęcone są liczne artykuły.

Do wyznaczenia ścieżki krytycznej z rozmytymi czasami realizacji zadań autorzy stosują różne metody rangowania liczb rozmytych (np.: [Chen, Chang 2001; Chen, Hsueh 2008; Shankar, Sireesha, Rao, Vani 2010; Shankar, Sireesha, Shiresha, Madhuri 2011; Shankar, Sireesha, Rao 2010; Siresha, Shankar 2010]). W wyniku analizy sieci otrzymują czas krytyczny i zapasy czasu zadań jako liczby rozmyte. Metody te mają trzy mankamenty. Po pierwsze: w przypadku kilku ścieżek krytycznych powstaje pytanie, który z alternatywnych czasów krytycznych wybrać. Po drugie: w proponowanych przez nich algorytmach zadanie może mieć różne czasy realizacji, gdy leży na kilku ścieżkach, co jest istotnym mankamentem tych rozwiązań. Ponadto zapas czasu może przyjąć wartości ujemne, co dodatkowo utrudnia praktyczną implementację otrzymanych rezultatów.

S. Chanas [1988], S.P. Chen i Y.J. Hsueh [2008] oraz N.S. Pour, M. Kheranmand, M. Fallah, S. Zeynali [2011] prezentują metody określania krytyczności poszczególnych ścieżek w sieci. W zaproponowanych przez nich metodach, podobnie jak wymieni wyżej autorzy, przyjmują, że czas realizacji zadania leżącego na dwóch różnych ścieżkach może być różny. Dodatkowym mankamentem tych rozwiązań jest fakt, że wyznaczenie wszystkich ścieżek w sieci jest problemem NP-trudnym.

N.R. Shankar, V. Sireesha, K.S. Rao N. Vani [2010] oraz G.S. Liang i T.C. Han [2004] w celu wyznaczenia ścieżki krytycznej przeprowadzają rangowanie wszystkich ścieżek sieci. Zaproponowane przez nich algorytmy mają małą aplikacyjność z uwagi na NP-trudność problemu wyznaczenia wszystkich ścieżek sieci.

S. Chanas i P. Zieliński [2001] podają metodę znalezienia odpowiedzi na pytanie, czy istnieje układ czasów realizacji poszczególnych zadań, dla którego dane zadanie może być zadaniem krytycznym. Otrzymane rezultaty trudno jest zastosować przy konstrukcji harmonogramów realizacji przedsięwzięcia, gdyż w wyniku zastosowania ich metody można otrzymać tyle harmonogramów, ile jest zadań w przedsięwzięciu. Ponadto w każdym rozwiązaniu dane zadanie może mieć różne czasy realizacji.

M. Hapke i R. Słowiński [1996] proponują metodę analizy sieci, której efektem jest rozmyty harmonogram Gantta.

W zaproponowanym w tym artykule algorytmie do wyznaczenia ścieżki krytycznej wykorzystuje się elementy teorii możliwości. Następnie konstruuje się harmonogram Gantta. Krytyczność zadań określa się dla przyjętego harmonogramu.

2. Teoria możliwości

Omówimy teraz podstawowe elementy teorii możliwości. Najpierw przedstawimy pojęcie zmiennej rozmytej. Niech X będzie pewną zmienną, której wartość nie jest znana. Niech $\mu_X : \Re \rightarrow [0,1]$ będzie normalną, quasi-wklęsłą, półciągłą z góry funkcją zwaną rozkładem możliwości zmiennej rozmytej X [Dubois, Prade 1988; Zadeh 1978]. Wartość $\mu_X(x)$ dla $x \in \Re$ oznacza możliwość zajścia zdarzenia, że zmienna rozmyta X przyjmie wartość x. Zapisujemy to jako

$$\mu_X(x) = \mathrm{Pos}(X = x).$$

Szczególnym przypadkiem zmiennej rozmytej jest zmienna rozmyta typu L-R o rozkładzie możliwości

$$\mu_X(x) = \begin{cases} L_X\left(\frac{x_1 - x}{l_X}\right) & \text{dla} \quad x < x_1 \\ 1 & \text{dla} \quad x_1 \le x \le x_2 \\ R_X\left(\frac{x - x_2}{r_X}\right) & \text{dla} \quad x > x_2 \end{cases}, \tag{1}$$

gdzie: $l_X, r_X > 0$ – tzw. szerokości odpowiednio lewostronna i prawostronna liczby rozmytej,
$L(x)$, $R(x)$ – ciągłe nierosnące funkcje x.

Przykładami funkcji $L(x)$, $R(x)$ są funkcje $\max\{0{,}1 - |x|^p\}$, $(1 + |x|^p)^{-1}$, $\exp(-|x|^p)$. Zmienną rozmytą typu L-R będziemy zapisywać jako

$$X = (x_1 - l_X, x_1, x_2, x_2 + r_X). \tag{2}$$

$$\mu_V(v) = \sup_{v=x-y}\Big(\min\big(\mu_X(x), \mu_Y(y)\big)\Big), \tag{3}$$

przy czym

$$X - X = 0. \tag{4}$$

Jeżeli chcemy porównać dwie zmienne rozmyte, to znaczy chcemy określić możliwość zajścia zdarzenia, że realizacja zmiennej X (wartość przyjęta przez X) będzie większe równa (nie mniejsza) od realizacji zmiennej Y. Do porównania tych zdarzeń D. Dubois i H. Prade zaproponowali następującą miarę [Dubois, Prade 1988]:

$$\mathrm{Pos}(X \ge Y) = \sup_{x \ge y}\Big(\min\big(\mu_X(x), \mu_Y(y)\big)\Big). \tag{5}$$

Miara (5) przyjmuje wartości od 0 do 1. Relacja większości zmiennych rozmytych nie jest relacją symetryczną. Jeżeli porównamy dwie zmienne rozmyte $X = (2, 4, 4, 10)$ i $Y = (1, 5, 5, 8)$, to $\mathrm{Pos}(X \ge Y) = 0{,}9$, a $\mathrm{Pos}(Y \ge X) = 1$. Z własności rozkładu możliwości określonego wzorem (1) wynika, że zawsze, gdy porównujemy dwie zmienne rozmyte $\mathrm{Pos}(X \ge Y) = 1$ lub $\mathrm{Pos}(Y \ge X) = 1$.

3. Metoda wyznaczania ścieżki krytycznej

Niech przedsięwzięcie będzie opisane jako sieć acykliczna $G(N, A, t)$, gdzie $N = \{1, \dots, n\}$ jest zbiorem wierzchołków (zdarzeń), $A \subset N \times N$ jest zbiorem łuków (zadań), $t: A \to \mathcal{R}^+$ – czasem zadań. Niech wierzchołki sieci będą ponumerowane tak, że dla każdego łuku (i, j) zachodzi $i < j$.

Do sporządzenia harmonogramu realizacji przedsięwzięcia ze zdeterminowanymi czasami realizacji zadań można zastosować metodę CPM. Wyznacza się wówczas następujące charakterystyki czasowe:

- najwcześniejszy termin wystąpienia zdarzenia j:

$$t_j^w = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad j = 1 \\ \max_{i:i<j}\{t_j^w + t(i,j)\} & \text{dla} \quad j = 1, \dots, n\text{'} \end{cases}$$

- czas krytyczny przedsięwzięcia:

$$t_{kryt} = t_n,$$

- najpóźniejszy termin wystąpienia zdarzenia j:

$$t_i^p = \begin{cases} t_n^w & \text{dla} \quad i = 1 \\ \min_{j:j>i}\{t_j^p - t(i,j)\} & \text{dla} \quad i = 2, \dots, n\text{'} \end{cases}$$

- zapas czasu zadania (i, j):

$$z(i,j) = t_j^p - t_i^w - t(i,j).$$

Załóżmy teraz, że czasy realizacji zadań są zmiennymi rozmytymi. Oznaczmy sieć takiego przedsięwzięcia jako $G'(N, A, T)$, gdzie $T(i,j) = \big(t_1(i,j) - l_T(i,j), t_1(i,j), t_2(i,j), t_2(i,j) + r_T(i,j)\big)$. Niech $S(1,n)$ oznacza ścieżkę z wierzchołka 1 do wierzchołka n oraz $TS(1,n)$ – długość tej ścieżki, gdzie $TS(1,n) = \sum_{((i,j)\in S(1,n))} T(i,j)$. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich ścieżek w sieci z wierzchołka 1 do wierzchołka n.

Skonstruujmy sieć $G(N, A, t)$ będącą deterministycznym odpowiednikiem sieci $G'(N, A, T)$. Przyjmijmy, że czasy zadań w sieci $G(N, A, t)$ są zadane jako liczby rzeczywiste i wynoszą $t(i,j) = t_2(i,j)$. Wyznaczmy metodą CPM najdłuższą czasowo ścieżkę w sieci $G(N, A, t)$ i oznaczmy ją jako $S^*(1,n)$.

LEMAT 1. Niech $TS^*(1,n)$ będzie czasem realizacji ścieżki $S^*(1,n)$ w sieci $G'(N, A, T)$ z rozmytymi czasami $TS^*(1,n) = \sum_{((i,j)\in S^*(1,n))} T(i,j)$. Wówczas zachodzi $\mathrm{Pos}(TS^*(1,n) >= TS(1,n)) = 1$ dla $S(1,n) \in \Omega$.

Dowód jest trywialny. Wynika z definicji miary Pos, (5).

Zdefiniujmy teraz miarę krytyczności zadań.

DEFINICJA 1. Miarą krytyczności zadania (i, j) w sieci $G'(N, A, T)$ z rozmytymi czasami jest $\text{Pos}\left(T(i, j) \geq t_j^p - t_i^w\right)$, to jest możliwość, że zadanie (i, j), którego wykonywanie rozpoczniemy w najwcześniejszym terminie t_i^w, zakończymy nie później niż w terminie najpóźniejszym t_j^p, gdzie t_i^w , t_j^p – charakterystyki czasowe wyznaczone metodą CPM dla sieci $G(N, A, t)$.

Miara krytyczności zadania podana w definicji 1 przyjmuje wartości od 0 do 1.

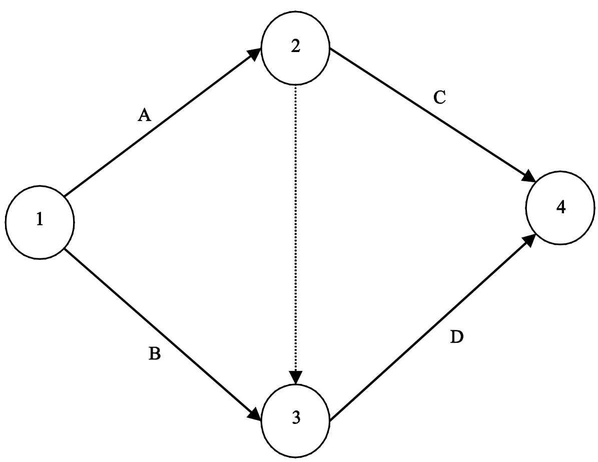
Przedstawimy teraz algorytm wyznaczania harmonogramu przedsięwzięcia.

ALGORYTM 1

1. Dla sieci z rozmytymi czasami zadań $G'(N, A, T)$ zbuduj sieć $G(N, A, t)$ z deterministycznymi czasami, przyjmując $t(i, j) = t_2(i, j)$.
2. Wyznacz metodą CPM charakterystykę czasową sieci $G(N, A, t)$.
3. Skonstruuj harmonogram Gantta dla najwcześniejszych terminów realizacji dla przedsięwzięcia opisanego siecią $G(N, A, t)$.
4. Wyznacz zapasy czasu oraz miary krytyczności zadań: $\text{Pos}\left(T(i, j) >= \left(t_j^p - t_i^w\right)\right)$.

4. Przykład

Rozważmy sieć przedsięwzięcia z pracy [Chanas 1988], którą przedstawiono na rys. 1. W tabeli 1 podano rozkłady możliwości czasów realizacji zadań, przy czym $L(x) = R(x) = \max\{0{,}1 - |x|\}$.



Rys. 1. Graf przedsięwzięcia

Źródło: [Chanas 1988].

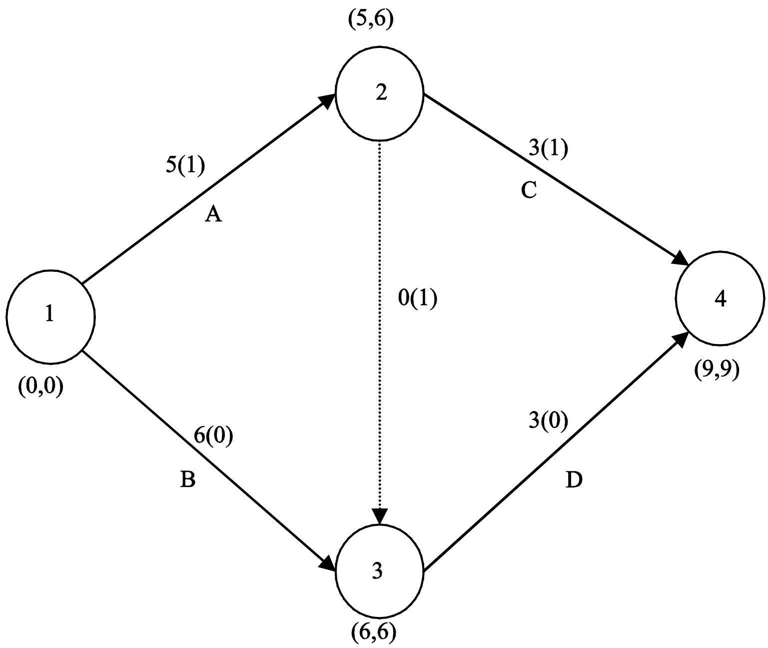
Tabela 1. Rozkłady możliwości czasów zadań

Zadanie	Czas realizacji
A: (1,2)	(3, 5, 5, 9)
B: (1,3)	(1, 6, 6, 8)
O: (2,3)*	(0, 0, 0, 0)
C: (2,4)	(1, 3, 3, 4)
D: (3,4)	(1, 3, 3, 4)

* zadanie pozorne.

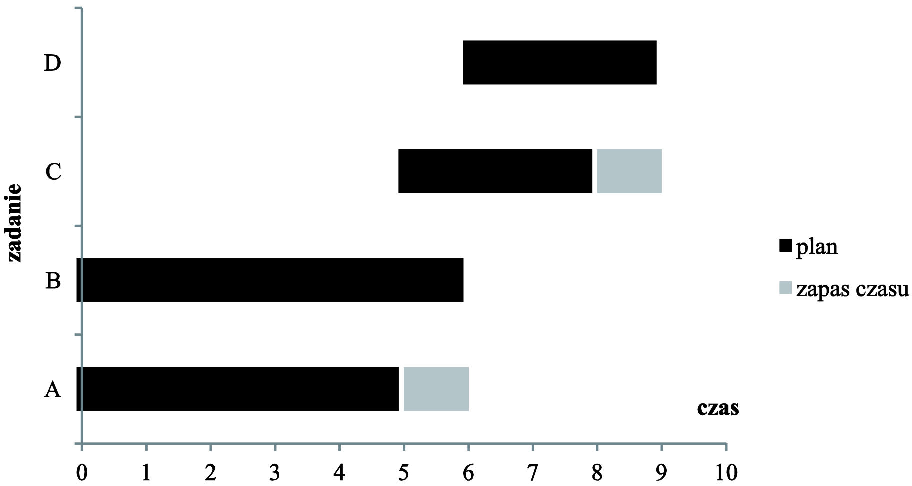
Źródło: [Chanas 1988].

Na rysunku 2 przedstawiono analizę czasową sieci $G(N, A, t)$ według najwcześniejszych terminów realizacji z uwzględnieniem zapasów czasu. Na łukach podano planowane czasy wykonania zadań oraz zapasy czasu (w nawiasie). Liczby w wierzchołkach – to planowane najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy zdarzeń. Odpowiedni harmonogram Gantta zaprezentowano na rys. 3. W tabeli 2 podano wartości miary krytyczności zadań odpowiadające harmonogramowi przedsięwzięcia przedstawionemu na rys. 2 i 3.



Rys. 2. Charakterystyka czasowa sieci $G(N, A, t)$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Harmonogram Gantta

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Wartości miary krytyczności zadań

Zadanie	Czas	Wartość miary krytyczności
A: (1,2)	(3, 5, 5, 9)	0,75
B: (1,3)	(1, 6, 6, 8)	1
C: (2,4)	(1, 3, 3, 4)	0
D: (3,4)	(1, 3, 3, 4)	1

Źródło: opracowanie własne.

Ścieżką krytyczną jest ścieżka 1-3-4 (B-D). Oba zadania nieleżące na ścieżce krytycznej mają według skonstruowanego harmonogramu zapas czasu równy 1, ale różną możliwość przekroczenia tego czasu. Możliwość, że zadanie A będzie krytyczne, wynosi 0,75, natomiast możliwość, że zostanie przekroczony planowany zapas czasu zadania C, jest zerowa. Możliwość dotrzymania terminów realizacji zadań leżących na ścieżce krytycznej wynosi 1. Jeżeli planowane terminy realizacji zadań wynikające z harmonogramu zostaną przekroczone, należy zaktualizować harmonogram.

5. Podsumowanie

W artykule zaproponowano metodę analizy czasowej przedsięwzięcia. Podano algorytm wyznaczania ścieżki krytycznej oraz wyznaczania miary krytyczności poszczególnych zadań. Przedstawiona metoda pokazuje, w jaki sposób teorię możliwości można zastosować w praktyce harmonogramowania przedsięwzięć. Podano teoretyczny przykład ilustrujący.

Przedmiotem artykułu jest analiza czasowa przedsięwzięcia. Dalsze prace będą dotyczyły uwzględnienia otrzymanych rezultatów w harmonogramowaniu przedsięwzięć z uwzględnieniem zasobów.

Literatura

Chanas S. [1988], *Wybrane metody badań operacyjnych z rozmytymi parametrami*, „Prace Instytutu Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej" nr 47, seria: Monografie 15.

Chanas S., Zieliński P. [2001], *Critical path analysis in the network with fuzzy activity times*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 122, s. 195–204.

Chen C.T., Huang S.F. [2007], *Applying fuzzy method for measuring criticality in project network*, "Information Sciences", vol. 177, s. 2448–2457.

Chen S.M., Chang T.H. [2001], *Finding Multiple possible critical path using fuzzy PERT*, "IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B: Cybernetics", vol. 31 (December), issue 6, s. 930–937.

Chen S.P., Hsueh Y.J. [2008], *A simple approach to fuzzy critical path analysis in project networks*, "Applied Mathematical Modelling", vol. 32, s. 1289–1927.

Dubois D., Prade H. [1988], *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum Press, New York.

Dubois D., Fargier H., Fortin J. [2005], *Computational methods for determining the latest starting times and floats of tasks in interval-valued activity networks*, "Journal of Intelligent Manufacturing", vol. 16, s. 407–421.

Hapke M., Słowiński R. [1996], *Fuzzy priority heuristics for project scheduling*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 83, issue 3, s. 291–299.

Liang G.S., Han T.C. [2004], *Fuzzy critical path for project network*, "Information and Management Sciences", vol. 15, issue 4, s. 29–40.

Pour N.S., Kheranmand M., Fallah M., Zeynali S. [2011], *A new method for critical path mehod with fuzzy processing time*, "Management Sciences Letters", vol. 1, s. 347–354.

Shankar N.R., Saradhi B.P. [2011], *Fuzzy critical path method in interval-valued activity networks*, "International Journal of Pure and Application Sciences and Technology", vol. 3, issue 2, s. 72–79.

Shankar N.R., Sireesha V., Rao B.B. [2010], *An analytical method for finding critical path in a fuzzy project network*, "International Journal of Contemporary Mathematical Sciences", vol. 5, issue 20, s. 953–962.

Shankar N.R., Sireesha V., Rao K.S., Vani N. [2010], *Fuzzy critical path method based on metric distance ranking of fuzzy numbers*, "International Journal of Mathematics Analysis", vol. 4, no. 20, s. 995–1006.

Shankar N.R., Sireesha V., Shiresha S., Madhuri K.U., *Measuring Risk Element Criticality in a project network using trapezoidal fuzzy number method*, "Applied Mathematical Sciences", vol. 5, issue 11, s. 529–539.

Siresha V., Shankar N.R. [2010], *A new approach to find total float time and critical path in fuzzy project network*, "International Journal of Engineering and Technology", vol. 2, issue 4, s. 600–609.

Zadeh L.A. [1978], *Fuzzy sets as a basis of theory of possibility*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 1, s. 3–28.

A METHOD FOR FINDING CRITICAL PATH IN A PROJECT WITH FUZZY TASKS DURATIONS

Summary: Durations of tasks are nondeterministic in the nature. There are three concepts of time analysis of nondeterministic networks: probabilistic, interval and fuzzy ones. In the paper we assume that the durations of tasks are fuzzy variables. The method for finding the most possible critical path and measuring the criticality of tasks is presented. Compare with other fuzzy critical path analysis the proposed approach is simple and effective. An illustrative example is presented.

Keywords: project, critical path, fuzzy processing time, possibility distribution.