

PRACE NAUKOWE

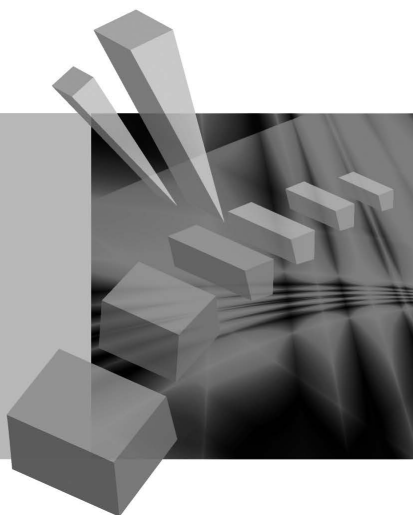
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

238

Zastosowania badań operacyjnych Zarządzanie projektami, decyzje finansowe, logistyka



Redaktor naukowy

Ewa Konarzewska-Gubała



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Stefan Grzesiak, Donata Kopańska-Bródka, Wojciech Sikora,
Józef Stawicki, Tomasz Szapiro, Tadeusz Trzaskalik

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,

The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się

na stronie internetowej Wydawnictwa

www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie

wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-195-9

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp.....	9
------------	---

Część 1. Zarządzanie projektami i innowacjami

Tomasz Błaszczyk: Świadomość i potrzeby stosowania metod badań operacyjnych w pracy polskich kierowników projektów	13
Barbara Gładysz: Metoda wyznaczania ścieżki krytycznej przedsięwzięć z rozmytymi czasami realizacji zadań	25
Marek Janczura, Dorota Kuchta: Proactive and reactive scheduling in practice.....	34
Tymon Marchwicki, Dorota Kuchta: A new method of project schedule levelling	52
Aleksandra Rutkowska, Michał Urbaniak: Harmonogramowanie projektów na podstawie charakterystyk kompetencji – wrażliwość modelu na różne aspekty liczb rozmytych	66
Jerzy Michnik: Zależności między kryteriami w wielokryterialnych modelach zarządzania innowacjami	80

Część 2. Podejmowanie decyzji finansowych

Przemysław Szufel, Tomasz Szapiro: Wielokryterialna symulacyjna ocena decyzji o finansowaniu edukacji wyższej	95
Marek Kośny: Koncepcja dominacji pierwszego i drugiego rzędu w analizie wzorca zmian w rozkładzie dochodu.....	111
Agnieszka Przybylska-Mazur: Podejmowanie decyzji monetarnych w kontekście realizacji celu inflacyjnego	120
Agata Gluzicka: Analiza ryzyka rynków finansowych w okresach gwałtownych zmian ekonomicznych	131
Ewa Michalska: Zastosowanie prawie dominacji stochastycznych w konstrukcji portfela akcji	144
Grzegorz Tarczyński: Analiza wpływu ogólnej koniunktury giełdowej i wzrostu PKB na stopy zwrotu z portfela akcji przy wykorzystaniu rozmytych modeli Markowitza.....	153

Część 3. Problemy logistyki, lokalizacji i rekrutacji

Paweł Hanczar, Michał Jakubiak: Wpływ różnych koncepcji komisjonowania na czas realizacji zamówienia w węzle logistycznym	173
Mateusz Grzesiak: Zastosowanie modelu transportowego do racjonalizacji dostaw wody w regionie	186
Piotr Wojewnik, Bogumił Kamiński, Marek Antosiewicz, Mateusz Zawisza: Model odejść klientów na rynku telekomunikacyjnym z uwzględnieniem efektów sieciowych	197
Piotr Miszczyński: Problem preselekcji kandydatów w rekrutacji masowej na przykładzie wybranego przedsiębiorstwa	211

Część 4. Pomiar dokonań, konkurencja firm, negocjacje

Marta Chudykowska, Ewa Konarzewska-Gubała: Podejście ilościowe do odwzorowania celów strategicznych w systemie pomiaru dokonań organizacji na przykładzie strategii miasta Wrocławia	231
Michał Purczyński, Paulina Dolata: Zastosowanie metody DEA do pomiaru efektywności nakładów na reklamę w przemyśle piwowarskim	246
Mateusz Zawisza, Bogumił Kamiński, Dariusz Witkowski: Konkurencja firm o różnym horyzoncie planowania w modelu Bertrand z kosztem decyzji i ograniczoną świadomością cenową klientów	263
Jakub Brzostowski: Poprawa rozwiązania negocjacyjnego w systemie <i>Nego-Manage</i> poprzez zastosowanie rozwiązania przetargowego	296

Część 5. Problemy metodologiczne

Helena Gaspars-Wieloch: Metakryterium w ciągłej wersji optymalizacji wielocelowej – analiza mankamentów metody i próba jej udoskonalenia.	313
Dorota Górecka: Porównanie wybranych metod określania wag dla kryteriów oceny wariantów decyzyjnych	333
Maria M. Kaźmierska-Zatoń: Wybrane aspekty optymalizacji prognoz kombinowanych	351
Artur Prędko: Spojrzenie na metody estymacji w modelach regresyjnych przez pryzmat programowania matematycznego	365
Jan Schneider, Dorota Kuchta: A new ranking method for fuzzy numbers and its application to the fuzzy knapsack problem	379

Summaries

Part 1. Project and innovation management

Tomasz Błaszczuk: Awareness and the need for operations research methods in the work of Polish project managers	24
Barbara Gładysz: A method for finding critical path in a project with fuzzy tasks durations	33
Marek Janczura, Dorota Kuchta: Proaktywne i reaktywne harmonogramowanie w praktyce	51
Tymon Marchwicki, Dorota Kuchta: Nowa metoda niwelacji harmonogramu projektu	64
Aleksandra Rutkowska, Michał Urbaniak: Project scheduling using fuzzy characteristics of competence – sensitivity of the model to the use of different aspects of fuzzy numbers	79
Jerzy Michnik: Dependence among criteria in multiple criteria models of innovation management	92

Part 2. Financial decision-making

Przemysław Szufel, Tomasz Szapiro: Simulation approach in multicriteria decision analysis of higher education financing policy	110
Marek Kośny: First and second-order stochastic dominance in analyses of income growth pattern	119
Agnieszka Przybylska-Mazur: Monetary policy making in context of execution of the strategy of direct inflation targeting	130
Agata Gluzicka: Analysis of risk of financial markets in periods of violent economic changes	143
Ewa Michalska: Application of almost stochastic dominance in construction of portfolio of shares	152
Grzegorz Tarczyński: Analysis of the impact of economic trends and GDP growth in the return of shares using fuzzy Markowitz models	169

Part 3. Logistics, localization and recruitment problems

Paweł Hanczar, Michał Jakubiak: Influence of different order picking concepts on the time of execution order in logistics node	185
Mateusz Grzesiak: Application of transportation model for rationalization of water supply in the region	196
Piotr Wojewnik, Bogumił Kamiński, Marek Antosiewicz, Mateusz Zawisza: Model of churn in the telecommunications market with network effects	210

Piotr Miszczyński: The problem of pre-selection of candidates in mass recruitment on the example of the chosen company.....	227
--	-----

Part 4. Performance measurement, companies competition, negotiations

Marta Chudykowska, Ewa Konarzewska-Gubała: Quantitative approach to the organization strategy mapping into the performance measurement system: case of strategy for Wrocław city	245
Michał Purczyński, Paulina Dolata: Application of Data Envelopment Analysis to measure effectiveness of advertising spendings in the brewing industry	262
Mateusz Zawisza, Bogumił Kamiński, Dariusz Witkowski: Bertrand competition with switching cost.....	295
Jakub Brzostowski: Improving negotiation outcome in the NegoManage system by the use of bargaining solution.....	309

Part 5. Methodological problems

Helena Gaspars-Wieloch: The aggregate objective function in the continuous version of the multicriteria optimization – analysis of the shortcomings of the method and attempt at improving it.....	332
Dorota Górecka: Comparison of chosen methods for determining the weights of criteria for evaluating decision variants	350
Maria M. Kaźmierska-Zatoń: Some aspects of optimizing combined forecasts.....	363
Artur Prędko: Mathematical programming perspective on estimation methods for regression models	378
Jan Schneider, Dorota Kuchta: Nowa metoda rankingowa dla liczb rozmytych i jej zastosowanie dla problemu rozmytego plecaka	389

Artur Prędko

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

SPOJRZENIE NA METODY ESTYMACJI W MODELACH REGRESYJNYCH PRZEZ PRYZMAT PROGRAMOWANIA MATEMATYCZNEGO¹

Streszczenie: W pracy zostaną przypomniane wybrane metody estymacji stosowane w liniowym modelu regresji (zwykła i skorygowana MNK oraz metoda PP) w postaci odpowiednich zadań z zakresu programowania matematycznego. Traktujemy je więc czysto deterministycznie, jako problemy optymalizacyjne z zakresu badań operacyjnych. Następnie podane zostaną ich mniej znane odpowiedniki, stosowane ostatnio w modelach regresji nieparametrycznej. Omówiono problemy numeryczne i identyfikacyjne związane z rozwiązywaniem tych zadań. W części empirycznej nastąpi ilustracja działania metod nieparametrycznych na przykładzie opartym na danych rzeczywistych.

Słowa kluczowe: regresja nieparametryczna, metody estymacji, programowanie matematyczne.

1. Wstęp

Metody estymacji stosowane w liniowym modelu regresji parametrycznej (zwykła i skorygowana MNK oraz metoda PP) mają swoje odpowiedniki używane w modelu regresji nieparametrycznej. W celu opisu i porównania tych metod na gruncie badań operacyjnych zapiszemy je w postaci odpowiednich zadań programowania matematycznego. Omówione zostaną problemy numeryczne i identyfikacyjne związane z rozwiązywaniem zadań odpowiadających metodom o charakterze nieparametrycznym (np. istnienie i jednoznaczność rozwiązania optymalnego). W pracy wykazano m.in. jednoznaczność tzw. reszt, które stanowią podstawę tworzenia mierników efektywności technicznej jednostek gospodarczych. Całość zostanie zilustrowana przykładem empirycznym zastosowania tych metod, w którym badamy efektywność techniczną polskich elektrowni i elektrociepłowni.

¹ Praca wykonana w ramach Badań Statutowych finansowanych przez Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie. Autor chciałby w tym miejscu podziękować dr hab. Annie Pajor z Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych UEK za cenne uwagi merytoryczne.

2. Modele regresji i metody ich estymacji

W pierwszej kolejności przypomnimy pewne podstawowe pojęcia z zakresu ekonometrii. Zdefiniujmy równanie będące istotną częścią modeli regresyjnych:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie: f – nieznaną funkcję regresji będącą przedmiotem estymacji,
 y_i – zmienna objaśniana (regresant), dla i -tej obserwacji,
 $x_i = [x_{i1}, \dots, x_{iK}] \in R^K$ – wektor zmiennych objaśniających (regresorów), odpowiadający i -tej obserwacji,
 ε_i – i -ty składnik losowy².

W parametrycznych modelach regresji f ma konkretną postać analityczną, zależną od nieznanymi parametrów, będących przedmiotem estymacji. Dzięki uzyskanym ocenom parametrów otrzymujemy estymantę nieznaną funkcji regresji oraz tzw. reszty. Najczęściej spotykana jest liniowa postać f :

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^K \beta_k x_{ik},$$

będąca elementem tzw. liniowego modelu regresji³. Do estymacji nieznanymi parametrów modelu regresji liniowej wykorzystuje się najczęściej Metodę Najmniejszych Kwadratów (MNK), którą można przedstawić jako następujące zadanie optymalizacji kwadratowej:

$$\min_{\varepsilon, \beta} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad \mathbf{Z.1}$$

$$y_i = \sum_{k=1}^K \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

W modelu regresji nieparametrycznej nie narzuca się analitycznej postaci funkcji regresji, lecz jedynie nakłada się na nią pewne warunki regularności⁴. W związku z tym jej estymacja i obliczanie reszt jest utrudnione. Jedną z propozycji estymacji

² Pozostałą część modelu stanowią zwykle założenia stochastyczne o składniku losowym oraz o postaci i własnościach funkcji f . Ze względu na deterministyczne podejście do tematu, założenia o składniku losowym nie będą wprowadzane. A w dalszym ciągu opracowania będziemy rozważać jedynie reszty, oznaczone również przez ε_i .

³ Można też wprowadzić tzw. stałą do tego równania, przyjmując, że jeden z regresorów jest tożsamościowo równy jeden.

⁴ Zakłada się, że f jest monotoniczna, ciągła, wypukła czy różniczkowalna itp. Początki regresji nieparametrycznej wiąże się z pracami Hildretha (np. [Hildreth 1954]).

jest tu tzw. wypukła, nieparametryczna metoda najmniejszych kwadratów. W dalszej części pracy będziemy używać angielskojęzycznego skrótu CNLS⁵. O możliwości jej zastosowania wspomina się już w połowie lat 50. (zob. [Hildreth 1954, s. 602]), jednak dopiero w roku 1976 dowiedziano zgodności⁶ estymatora uzyskanego metodą CNLS, która jest podstawową własnością statystyczną. Może być ona traktowana jako odpowiednik MNK na gruncie nieparametrycznym. Idea estymacji za pomocą CNLS polega na tym, że szukamy funkcji \hat{f} :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2 = \min_{f \in F} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2,$$

gdzie F – rodzina funkcji niemalejących, ciągłych i globalnie wklęsłych⁷. W latach 80. (m.in. prace [Fraser, Massam 1989] oraz [Wu 1982]) stworzono w miarę efektywne algorytmy poszukiwania \hat{f} , lecz jedynie dla jednego regresora⁸. Kwestia odpowiedniej implementacji CNLS dla wielu regresorów pozostawała nierozstrzygnięta przez wiele lat, aż do roku 2008. W pracy [Kuosmanen 2008, s. 311] dowiedziano kluczowego twierdzenia.

Twierdzenie 2.1

$$\min_{f \in F} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = \min_{g \in G} \sum_{i=1}^n (y_i - g(x_i))^2,$$

gdzie G jest rodziną funkcji niemalejących, „kawałkami liniowych”⁹.

Implikacją tego twierdzenia jest możliwość zapisania CNLS jako zadania kwadratowego postaci:

$$\begin{aligned} \min_{\varepsilon, \alpha, \beta} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 & \qquad \qquad \qquad \mathbf{Z.2} \\ y_i &= \alpha_i + \beta_i^T x_i + \varepsilon_i, \quad \beta_i \geq \mathbf{0}, \\ \alpha_i + \beta_i^T x_i &\leq \alpha_h + \beta_h^T x_i \quad \forall h, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

⁵ Z ang. *Convex Nonparametric Least Squares*. Autor nie znalazł propozycji skrótu nazwy tej metody w języku polskim.

⁶ Oczywiście, przy odpowiednich założeniach narzuconych na składniki losowe (szczegóły w pracy [Hanson, Pledger 1976]). Niestety zgodności CNLS dowiedziano tylko dla przypadku jednego regresora.

⁷ Przedstawione dalej rezultaty można uzyskać również dla funkcji globalnie wypukłych.

⁸ Istnieje wtedy możliwość posortowania obserwacji ze względu na jego wartości, co ma duże znaczenie przy konstrukcji odpowiedniego algorytmu.

⁹ Formalna definicja rodziny G , praca [Kuosmanen 2008, s. 311]. Dowiedziano ponadto, że $G \subset F$. Pomysły estymacji dowolnych funkcji za pomocą funkcji „kawałkami liniowych” oraz zapisu wklęsłości za pomocą liniowych warunków ograniczających były oczywiście znane wcześniej (zob. np. prace [Afriat 1967; Varian 1982; Yatchew, Bos 1997]).

W niniejszej pracy model regresji zostanie zastosowany do analizy procesu produkcyjnego, tzn.:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie: y_i – produkcja i -tej jednostki gospodarczej (firmy);
 f – funkcja produkcji (charakteryzuje technologię),
 $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$ – wielkości nakładów i -tej firmy,
 ε_i – reprezentuje odchylenie i -tej firmy od granicy produkcyjnej.

Implikuje to konieczność przedstawienia kolejnych procedur estymacji funkcji regresji stosowanych w tym obszarze. Sprawa wiąże się z interpretacją składnika losowego jako odchylenia od granicy produkcyjnej. Jeśli źródłem owych odchyłeń jest jedynie tzw. nieefektywność techniczna jednostek gospodarczych, to zakłada się, że odchylenia muszą być niedodatnie¹⁰. Są to tzw. modele graniczne (*frontier models*). Jeśli za kryterium optymalizacji odchyłeń wybierzemy ponownie minimalizację sumy kwadratów, otrzymujemy jedną z postaci tzw. metody PP¹¹:

$$\min_{\varepsilon, \alpha, \beta} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad \mathbf{Z.3}$$

$$y_i = \alpha + \beta^T x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Z postaci powyższego programu wynika, że metoda ta jest stosowana w liniowym modelu regresji¹². Czy jest jednak jakiś jej odpowiednik, który mógłby zostać zastosowany dla modelu regresji nieparametrycznej? Odpowiedź na to pytanie została udzielona dopiero w roku 2010. W pracy [Kuosmanen, Johnson 2010, s. 152] przedstawiono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 Ocenę ε_i^{DEA} , dla $i = 1, \dots, n$, stanowią rozwiązanie optymalne programu postaci:

$$\min_{\varepsilon, \alpha, \beta} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad \mathbf{Z.4}$$

$$y_i = \alpha_i + \beta_i^T x_i + \varepsilon_i, \quad \beta_i \geq 0, \quad \varepsilon_i \leq 0$$

$$\alpha_i + \beta_i^T x_i \leq \alpha_h + \beta_h^T x_i \quad \forall h, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie: $\varepsilon_i^{DEA} = (1 - \theta_i^{DEA})y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.

¹⁰ Zaobserwowana produkcja i -tej firmy y_i jest wtedy nie większa od $f(x_i)$, czyli maksymalnej produkcji, możliwej do uzyskania z zaobserwowanych ilości nakładów.

¹¹ Z ang. *Parametric programming* (nie mylić z pojęciem programowania parametrycznego przyjętym na gruncie badań operacyjnych). W pracach źródłowych [Aigner, Chu 1968] oraz [Timmer 1971] postuluje się możliwość przyjęcia opcjonalnie, jako kryterium optymalizacji, minimalizacji sumy odchyłeń.

¹² Ewentualnie dla parametrycznych modeli nieliniowych, sprowadzalnych do liniowych (funkcja produkcji Cobba-Douglasa lub Translog).

Wartości θ_i^{DEA} są to tzw. miary efektywności technicznej Farrella obliczone za pomocą metody DEA¹³ przez rozwiązanie zadania postaci:

$$\theta_i^{DEA} = \max_{\theta, \lambda} \theta \quad \text{Z.5}$$

$$x_i \geq \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} x_j, \quad \theta y_i \leq \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} y_j, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} = 1$$

$\theta \in R, \lambda_{ji} \geq 0, j = 1, \dots, n$ (zmiennie decyzyjne).

Najważniejsze implikacje tego twierdzenia sformułowano we wniosku 2.1.

Wniosek 2.1

1. Metoda DEA jest nieparametrycznym odpowiednikiem¹⁴ wcześniej przedstawionej wersji metody PP.

2. Wyznaczając miary efektywności technicznej, wystarczy posłużyć się jednym programem z tezy twierdzenia 2.2. A nie, jak dotychczas, rozwiązywać n razy powyższy program liniowy¹⁵.

3. Twierdzenie to daje możliwość potraktowania DEA jako nieparametrycznej metody estymacji w modelu regresji nieparametrycznej.

Na gruncie liniowego modelu regresji popularna jest również inna metoda estymacji, wykorzystywana w modelach granicznych, a mianowicie tzw. skorygowana MNK¹⁶ (SMNK). Jest to procedura dwuetapowa. W etapie pierwszym stosujemy zwykłą MNK, otrzymując m.in. reszty. Następnie, by spełnić postulat niedodatności odchyłeń, korygujemy je odpowiednio odejmując największą z reszt, tzn.:

$$\hat{\varepsilon}_i^{SMNK} = \hat{\varepsilon}_i^{MNK} - \max_h \hat{\varepsilon}_h^{MNK} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Za oceny parametrów przyjmujemy wartości uzyskane za pomocą MNK. Wyjątek stanowi stała, której ocena powstaje poprzez dodanie do jej oceny MNK maksymalnej reszty MNK. Nieparametryczny odpowiednik SMNK został podany również w pracy [Kuosmanen, Johnson 2010, s. 153–155] i jest znany pod nazwą skorygowanej, wypukłej, nieparametrycznej MNK. Ponownie będziemy używać angielskiego skrótu C^2NLS ¹⁷. Procedura powstała przez analogię do SMNK. Różnica polega

¹³ DEA z ang. *Data Envelopment Analysis*. Zadanie Z.5 jest to tzw. model BCC w postaci odwodnej, w orientacji na produkty, przy zmiennym efekcie skali (zob. np. [Cooper i in. 2006, s. 87]).

¹⁴ Jest ona „graniczną” wersją CNLS. Na podobnej zasadzie PP jest „graniczną” wersją MNK.

¹⁵ Niestety jest to pozorny postęp. Okazuje się bowiem, że rozwiązywanie tego programu trwa najwięcej czasu niż odpowiednich n programów liniowych (zob. [Kalvelagen 2004]).

¹⁶ Z ang. *Corrected Least Squares*, mylona często z metodą PP. Jej początki sięgają roku 1957 i związane są z dyskusją zawartą w pracy [Farrell 1957, s. 282–290]. Zgodność estymatora uzyskanego tą metodą, przy odpowiednich założeniach narzuconych na składniki losowe, została dowiedziona w roku 1980 (praca [Greene 1980]).

¹⁷ Z ang. *Corrected CNLS*.

tylko na tym, że w etapie I do uzyskania reszt wykorzystujemy CNLS – nieparametryczny odpowiednik MNK.

3. Problemy związane z użyciem metod nieparametrycznych

Jak zaznaczono we wstępie, metody estymacji będziemy tu traktować jako zadania optymalizacyjne. W związku z tym skupimy się na problemach¹⁸ związanych z zastosowaniem programowania matematycznego do rozwiązywania zadań Z.2 i Z.4 reprezentujących metody nieparametryczne. W źródłowych pracach stwierdza się, że są to standardowe zadania z zakresu programowania kwadratowego, dla których dostępne są liczne pakiety służące ich optymalizacji (zob. praca [Kuosmanen 2008, s. 312 – przypis 1]).

Weźmy pod uwagę, dla przykładu¹⁹, zadanie Z.2 i przedstawmy na początek kilka oczywistych faktów:

- jest w nim $(K + 2) \cdot n$ zmiennych decyzyjnych,
- zawiera ono n^2 istotnych warunków ograniczających oraz $K \cdot n$ warunków brzegowych²⁰,
- jedynie n warunków ograniczających zawiera swobodne, znane stałe²¹,
- macierz funkcji celu, jako formy kwadratowej, jest osobiwa²².

Dwa pierwsze podpunkty wskazują wyraźnie, że problem może mieć duże rozmiary i w związku z tym część ogólnodostępnych pakietów optymalizacyjnych może nie być przygotowana na jego rozwiązanie²³. Są oczywiście dostępne procedury, również bezpłatne, które rozwiązują zadania tych rozmiarów. Jednak wielkość problemu połączona z dwoma ostatnimi z wymienionych faktów może spowodować trudności z odwracaniem macierzy dużych rozmiarów (często bliskich

¹⁸ Istnieją też liczne problemy natury statystycznej, np. słabo poznane własności odpowiednich estymatorów nieparametrycznych. Poważny problem stanowi także brak postaci ich rozkładów (choćby asymptotycznych) oraz związane z tym faktem trudności w przeprowadzeniu wnioskowania statystycznego (testowanie hipotez, obliczanie ocen przedziałów ufności dla miar efektywności technicznej). Szczegóły w pracach [Kuosmanen 2008; Kuosmanen, Johnson 2010; Kuosmanen, Kortelainen 2012].

¹⁹ Rozumowanie dla zadania Z.4 przebiega analogicznie, ponieważ różni się ono od Z.2 jedynie znakami nałożonymi na reszty.

²⁰ Dzięki nieujemnym znakom „beta” estymanta „kawałkami liniowa” jest funkcją niemalejącą. Pomijamy n nieistotnych warunków ograniczających dla $h = i$ (są to tożsamości).

²¹ Wartości y_i w warunkach dotyczących reszt. Właściwie warunki te można pominąć, zapisując je w postaci: $y_i - \alpha_i + \beta_i^T x_i = \varepsilon_i$ i podstawiając ich lewe strony do funkcji celu za „reszty”.

²² Większość jej minorów głównych również (podstawienie opisane w przypisie 21 nie zmienia tego faktu).

²³ Na przykład dodatek Solver w Excelu. Autorzy podają wprawdzie odnośnik do strony z programem liczącym działającym w ramach pakietu Matlab, jednak zawiera on błędy w kodzie i nie generuje rozwiązań optymalnego po wstawieniu danych. Co do wielkości problemu, to w części empirycznej tej pracy rozważamy grupę 32 obiektów (n), które z 3 nakładów (K) wytwarzają jeden produkt. Występuje tu więc 160 zmiennych decyzyjnych (5·32), 1024 warunki ograniczające (32·32) oraz 96 warunków brzegowych (3·32).

macierzom osobliwym). Może również dojść do degeneracji rozwiązań optymalnych albo ich wielości, co rodzi problemy z jednoznacznością otrzymanych wyników²⁴. Przynajmniej to zresztą sami autorzy zadania, np. w pracy [Kuosmanen 2008, s. 314]. Jednocześnie stwierdzają, że reszty wyznaczone są jednoznacznie, brak jest jednak uzasadnienia tego faktu. Poniżej przedstawiono więc dowód jednoznaczności uzyskanych reszt, który jest wkładem własnym autora niniejszego opracowania.

Twierdzenie 3.1 Wartości optymalne ε_i^* , uzyskane w wyniku rozwiązania zadania Z.2 lub Z.4, są wyznaczone jednoznacznie.

Dowód: (nie wprost) Załóżmy, że mamy dwa rozwiązania optymalne Z.2 o różnych resztach oznaczone przez $[\alpha_1, \text{vec}(\beta_1)', \varepsilon_1]$, $[\alpha_2, \text{vec}(\beta_2)', \varepsilon_2]$, gdzie²⁵:

$$\alpha_1 = [\alpha_{11}, \dots, \alpha_{n1}], \alpha_2 = [\alpha_{12}, \dots, \alpha_{n2}], \varepsilon_1 = [\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{n1}], \varepsilon_2 = [\varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{n2}],$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{(1)} & \dots & \beta_{1K}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1}^{(1)} & \dots & \beta_{nK}^{(1)} \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{(2)} & \dots & \beta_{1K}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1}^{(2)} & \dots & \beta_{nK}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Oznacza to w szczególności, że istnieją dwa różne rozwiązania dopuszczalne tego problemu. Na mocy wypukłości zbioru rozwiązań dopuszczalnych Z.2 (łatwe) istnieje rozwiązanie dopuszczalne różne od nich, będące ich kombinacją wypukłą. Bardziej formalnie:

$$\exists \lambda \in (0,1): \lambda[\alpha_1, \text{vec}(\beta_1)', \varepsilon_1] + (1-\lambda)[\alpha_2, \text{vec}(\beta_2)', \varepsilon_2] \text{ rozwiązanie dopuszczalne Z.2.} \quad (\&)$$

Dowodziemy teraz następującego lematu.

Lemat 3.1 $\forall \lambda \in [0,1]$: kombinacja wypukła $\lambda[\alpha_1, \text{vec}(\beta_1)', \varepsilon_1] + (1-\lambda)[\alpha_2, \text{vec}(\beta_2)', \varepsilon_2]$ rozwiązań optymalnych jest rozwiązaniem optymalnym Z.2.

Dowód lematu: Funkcja celu Z.2, jako suma kwadratów „reszt”, jest funkcją wypukłą. Oznacza to, z definicji wypukłości, że:

$$\sum_{i=1}^n [\lambda \varepsilon_{i1} + (1-\lambda) \varepsilon_{i2}]^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 + (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2.$$

Z optymalności obu rozwiązań wynika, że:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2. \quad (\#)$$

A to oznacza, że prawa strona powyższej nierówności redukuje się i uzyskujemy:

$$\sum_{i=1}^n [\lambda \varepsilon_{i1} + (1-\lambda) \varepsilon_{i2}]^2 \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2. \quad (*)$$

²⁴ Brak jednoznaczności przekłada się na niejednoznaczność estymanty f oraz jej charakterystyk. Prowadzi to do ich nieidentyfikowalności na gruncie statystycznym.

²⁵ $\text{vec}(\cdot)$ jest operatorem ustawiającym kolumny macierzy jedna pod drugą.

Z drugiej strony, jak wspomniano wcześniej, rozważana kombinacja wypukła należy do zbioru rozwiązań dopuszczalnych, na mocy jego wypukłości. Z optymalności obu rozwiązań oraz faktu, że funkcja celu jest minimalizowana, wynika wtedy następująca nierówność:

$$\sum_{i=1}^n [\lambda \varepsilon_{i1} + (1-\lambda) \varepsilon_{i2}]^2 \geq \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2. \quad (**)$$

Korzystając z (*) oraz (**), uzyskujemy ostatecznie równość:

$$\sum_{i=1}^n [\lambda \varepsilon_{i1} + (1-\lambda) \varepsilon_{i2}]^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2 \quad \text{c.b.d.o.}$$

Powracając do dowodu twierdzenia 3.1, rozpiszmy odpowiednio lewą stronę powyższej równości, korzystając z własności operatora sumowania oraz wzoru skróconego mnożenia:

$$\lambda^2 \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 \right] + 2\lambda(1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1} \varepsilon_{i2} \right] + (1-\lambda)^2 \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2 \right] = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2.$$

Przenieśmy następnie wszystko na prawą stronę i zapiszmy w postaci:

$$(1-\lambda^2) \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 \right] - 2\lambda(1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1} \varepsilon_{i2} \right] - (1-\lambda)^2 \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2 \right] = 0.$$

Wyłączmy wspólny czynnik $(1-\lambda)$ przed nawias:

$$(1-\lambda) \left\{ (1+\lambda) \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 \right] - 2\lambda \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1} \varepsilon_{i2} \right] - (1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2 \right] \right\} = 0.$$

Po wymnożeniu wyrażeń w nawiasie „wąsatym” i odpowiednim ich pogrupowaniu otrzymujemy:

$$(1-\lambda) \left\{ \lambda \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 \right] - 2\lambda \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1} \varepsilon_{i2} \right] + \lambda \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2 \right] + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 - \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2 \right\} = 0.$$

Ostatnia różnica, na mocy (#), redukuje się do zera. Z pozostałej części zaś wyciągamy przed nawias λ :

$$\lambda(1-\lambda) \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1}^2 - 2 \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i1} \varepsilon_{i2} \right] + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i2}^2 \right\} = 0.$$

Ponownie korzystamy z własności operatora sumowania oraz wzoru skróconego mnożenia, otrzymując:

$$\lambda(1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^n (\varepsilon_{i1} - \varepsilon_{i2})^2 \right] = 0. \quad (\$)$$

Na mocy początkowego (&), powyższego (\$) oraz nieujemności wyrażenia kwadratowego uzyskujemy:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2}.$$

Co daje szukaną sprzeczność z początkowym założeniem. c.b.d.o.

Dowód dla zadania Z.4 przebiega analogicznie. Oznacza to, że reszty uzyskane metodą CNLS (Z.2) lub DEA (Z.4) są jednoznacznie wyznaczone. Można dzięki temu, korzystając z tych metod, wyznaczyć jednoznacznie estymantę funkcji produkcji f . Niestety nie oznacza to bynajmniej, że wartości optymalne pozostałych zmiennych decyzyjnych są wyznaczone jednoznacznie. A to sprowadza się do braku identyfikowalności charakterystyk funkcji produkcji (zob. przypis 24). Przypomnijmy na koniec, że kwestia jednoznaczności jest tylko jednym z problemów, o których wspomniano w tej części pracy. W części empirycznej opracowania autor powróci do problemu osobliwości macierzy formy kwadratowej, podając pewną propozycję numeryczną jego rozwiązania.

4. Część empiryczna

Wykorzystano dane rzeczywiste z roku 1995 dotyczące 32 polskich elektrowni i elektrociepłowni, pochodzące z pracy [Osiewalski, Wróbel-Rotter 2002]. Jest to grupa jednostek produkcyjnych, których efektywność techniczną będziemy analizować. Jako nakłady przyjęto:

- kapitał (wartość brutto środków trwałych liczona w zł);
- pracę (liczba pracowników);
- energię wsadu (liczoną w TJ).

Produktem działalności jednostek jest wytworzona energia (liczona w TJ²⁶).

Do celów implementacji nieparametrycznych metod estymacji CNLS (Z.2) oraz DEA (Z.4) wykorzystano procedurę „solve.QP”, dostępną w środowisku darmowym R. W tym celu konieczne stało się „sztuczne” uchylenie osobliwości formy kwadratowej będącej funkcją celu (zob. problemy opisane w części trzeciej pracy). Na przekątnej macierzy wspomnianej formy w miejsce zer wpisano liczby rzędu 10^{-10} . Po tych zmianach funkcja celu przyjmuje postać:

$$\min_{\alpha, \beta, \varepsilon} \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 + 10^{-10} \left(\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i^2 + \sum_{k=1}^K \beta_{ik}^2 \right) \right) \right].$$

Dzięki temu zabiegowi procedura ta działa²⁷ i uzyskujemy rozwiązania optymalne zadań Z.2 i Z.4. W naszym przykładzie empirycznym czynnik w nawiasie przy

²⁶ 1GWh = 3,6TJ (teradžul).

²⁷ W przeciwnym wypadku pojawiają się komentarze o osobliwości macierzy formy kwadratowej bądź o braku wiążących warunków ograniczających. Dotyczy to również innych, sprawdzonych przez autora procedur („ipop”, „lsej” w języku R oraz „QProg” w języku macierzowym Gauss).

potędze 10^{-10} jest rzędu 10^9 , a więc dodatkowy składnik w funkcji celu jest rzędu 10^{-1} . Jest to wielkość znikoma w porównaniu z drugim składnikiem funkcji celu, którym jest suma kwadratów reszt (rzęd 10^9). Opisany wyżej zabieg nie wpływa więc istotnie na wartość funkcji celu, stąd procedura jest poprawna od strony numerycznej²⁸. Przejdźmy więc do wyników zestawionych w tabelach pierwszej i drugiej (kolejność obiektów w tabelach wg malejącej wielkości produkcji).

Tabela 1. Wyniki dla metod CNLS i C²NLS

I	ε_i	α_i	β_{i1}	β_{i2}	β_{i3}	ε_i skoryg.
1	3560,89	444,47	8,2006	0,0000	0,1764	-2388,737
2	250,43	-13,94	10,1169	0,0134	0,0000	-5699,194
3	3702,96	822,00	5,7843	0,0018	0,2007	-2246,667
4	5949,63	2618,36	16,6057	0,0000	0,0000	0
5	-8543,68	1127,04	6,0079	0,0000	0,2210	-14493,3
6	-3500,78	2026,35	5,3813	0,0043	0,1614	-9450,409
7	-3963,23	2026,37	5,3813	0,0043	0,1614	-9912,859
8	1049,93	362,69	3,6996	0,0000	0,4731	-4899,698
9	3768,16	1127,04	6,0079	0,0000	0,2210	-2181,47
10	-4820,62	879,75	5,7787	0,0023	0,1897	-10770,24
11	643,59	-83,58	2,9428	0,0035	0,4829	-5306,034
12	-2533,70	1009,01	6,1484	0,0000	0,2184	-8483,325
13	-2883,34	879,74	5,7787	0,0023	0,1897	-8832,967
14	3080,18	765,76	5,8033	0,0016	0,2060	-2869,451
15	5400,04	92,61	6,2610	0,0038	0,1780	-549,591
16	-553,65	-807,86	6,7549	0,0088	0,1194	-6503,278
17	-388,57	-807,87	6,7549	0,0088	0,1194	-6338,197
18	1371,65	168,13	6,2432	0,0043	0,1679	-4577,972
19	0,00	-151,32	0,3401	0,0000	0,8320	-5949,626
20	614,79	-807,86	6,7549	0,0088	0,1194	-5334,834
21	-2027,64	765,76	5,8033	0,0016	0,2060	-7977,265
22	-1974,08	-1060,84	7,0453	0,0077	0,1301	-7923,706
23	2028,84	-8,35	9,5560	0,0000	0,1572	-3920,787
24	430,16	-61,67	5,9602	0,0000	0,3433	-5519,467
25	-405,53	-1060,84	7,0453	0,0077	0,1301	-6355,155
26	-655,74	-1082,13	7,0284	0,0077	0,1329	-6605,363
27	-628,77	-997,20	5,6494	0,0050	0,2893	-6578,394
28	-9,58	-1082,13	7,0284	0,0077	0,1329	-5959,206
29	695,90	-997,20	5,6494	0,0050	0,2893	-5253,726
30	319,26	-1044,65	7,3187	0,0099	0,1002	-5630,37
31	0,00	-96,38	0,0000	0,0420	0,1400	-5949,626
32	22,59	-541,46	0,0000	0,0173	0,5560	-5927,033

Źródło: opracowanie własne.

²⁸ Umieszczanie tzw. sztucznych czy komputerowych zer w odpowiednich miejscach kodów programu jest zabiegiem dość powszechnym.

Tabela 2. Wyniki dla metody DEA

i	$\varepsilon_i^{\text{DEA}}$	θ_i^{DEA}	α_i	β_{i1}	β_{i2}	β_{i3}
1	0,00	1,0000	6518,96	5,9924	0,0000	0,2146
2	0,00	1,0000	-36,31	8,6483	0,0220	0,0000
3	0,00	1,0000	1599,31	3,0055	0,0019	0,4812
4	0,00	1,0000	5507,82	18,5763	0,0000	0,0000
5	-12891,67	1,3793	6633,22	5,6093	0,0000	0,2224
6	-8403,69	1,2491	10162,82	4,3443	0,0067	0,1288
7	-8986,77	1,2794	10163,15	4,3443	0,0067	0,1288
8	0,00	1,0000	638,66	1,6371	0,0004	0,6911
9	-815,43	1,0285	6633,22	5,6093	0,0000	0,2224
10	-9752,29	1,3417	6620,29	5,5723	0,0004	0,2162
11	0,00	1,0000	-189,38	0,0000	0,0000	0,8960
12	-7481,62	1,3792	6633,22	5,6093	0,0000	0,2224
13	-8063,59	1,4511	6620,29	5,5723	0,0004	0,2162
14	-387,25	1,0233	1734,63	3,3285	0,0000	0,5003
15	0,00	1,0000	323,12	18,5266	0,0000	0,0609
16	-3302,32	1,2156	3227,33	2,8483	0,0155	0,1709
17	-3333,69	1,2277	-1155,45	5,6194	0,0258	0,0720
18	0,00	1,0000	205,10	0,0000	0,0012	0,8505
19	-342,38	1,0336	-208,35	0,0000	0,0000	0,8973
20	-474,32	1,0469	-1155,45	5,6194	0,0258	0,0720
21	-4260,55	1,4529	1451,02	3,0569	0,0014	0,4947
22	-6267,13	1,6991	-1155,45	5,6194	0,0258	0,0720
23	0,00	1,0000	-5,53	9,9726	0,0000	0,3548
24	-1360,61	1,2084	-282,84	0,4847	0,0000	0,8604
25	-1359,38	1,2774	-1155,45	5,6194	0,0258	0,0720
26	-1953,60	1,4309	-740,73	4,5472	0,0087	0,4037
27	-1658,23	1,3708	-557,65	1,6610	0,0028	0,7335
28	-739,73	1,1672	-1225,62	5,6323	0,0254	0,0829
29	0,00	1,0000	-2121,62	8,4928	0,0199	0,1264
30	0,00	1,0000	-1155,45	5,6194	0,0258	0,0719
31	0,00	1,0000	-491,20	0,0000	0,0530	0,0907
32	0,00	1,0000	-208,35	0,0000	0,0000	0,8973

Źródło: opracowanie własne.

Zwróćmy uwagę, że na 32 obiekty są jedynie 23 różne zestawy współczynników α_i , β_{i1} , β_{i2} , β_{i3} (por. np. zestawy dla jednostek 6-7, czy 16-17-20). Jest to ogólna prawidłowość, o której wspomina się również w źródłowej pracy [Kuosmanen 2008, s. 315]. Oznacza to, że „kawałkami liniowy” estymator funkcji f nie składa się zwykle z tylu segmentów, ile jest obiektów. Upraszcza to sposób jego obliczania dla danego zestawu nakładów. Przypomnijmy jednak, że otrzymane wartości współ-

czynników nie są często jednoznacznie wyznaczone²⁹ (wielość rozwiązań optymalnych), w przeciwieństwie do reszt (zob. twierdzenie 3.1). W ostatniej kolumnie znajdują się tzw. reszty skorygowane, otrzymane w wyniku zastosowania metody C^2NLS . Są to mierniki nieefektywności poszczególnych obiektów z zakresu $[0, +\infty)$, a więc nieunormowane. Zwykle tylko jedna jednostka, odpowiadająca maksymalnej reszcie CNLS, jest efektywna technicznie. Jej reszta skorygowana wynosi wtedy zero. W naszym przypadku jest to elektrociepłownia nr 4.

W przypadku metody DEA zweryfikowano poprawność uzyskanych wyników dzięki zależności³⁰:

$$\varepsilon_i^{DEA} = (1 - \theta_i^{DEA})y_i, i = 1, \dots, n.$$

Zgodnie z punktem drugim wniosku 2.1 obliczono wartości θ_i^{DEA} , rozwiązując n razy program liniowy Z.5. Następnie, z powyższej zależności, uzyskano niezależnie wartości ε_i^{DEA} , które okazały się w pełni zgodne z tymi zawartymi w tabeli 2 (uzyskanymi w wyniku rozwiązania zadania Z.4). Ponownie występują 23 różne zestawy współczynników. Jest to jednak raczej zwykły przypadek, ponieważ mają one inne wartości i są inaczej rozłożone (identyczne zestawy mają np. obiekty o nr. 5-9-12 czy 17-20-22-25-30). Przypomnijmy, że miernikiem efektywności w metodzie DEA jest zwykle θ_i^{DEA} . W naszym przypadku można też użyć jego addytywnego odpowiednika ε_i^{DEA} . Jest 13 obiektów efektywnych technicznie, czyli takich, dla których $\theta_i^{DEA} = 1$ (lub alternatywnie $\varepsilon_i^{DEA} = 0$).

5. Zakończenie

Jak powiedziano już wielokrotnie, w pracy tej podchodzimy do zagadnienia estymacji funkcji regresji i wyznaczenia reszt od strony programowania matematycznego, omawiając typowe problemy związane z użyciem tego typu narzędzia. Wspominamy jedynie o zgodności estymatorów uzyskanych przedstawionymi w pracy metodami. Metody o charakterze nieparametrycznym (tzn. CNLS, C^2NLS , DEA) wymagają jednak szczegółowego opracowania od strony statystycznej, tzn.:

- analizy różnych własności statystycznych estymatorów, w zależności od przyjętych założeń modelowych,
- wyprowadzenia postaci asymptotycznych rozkładów odpowiednich estymatorów lub alternatywnie opracowania zgodnych procedur bootstrapowych w celu umożliwienia wnioskowania statystycznego (zob. przypis 18),
- porównania z ich odpowiednikami parametrycznymi (tzn. MNK, SMNK, PP) na gruncie odpowiednich modeli symulacyjnych lub przykładów empirycznych.

²⁹ W omawianym przykładzie autorowi udało się to empirycznie potwierdzić, tzn. uzyskano inny zestaw odpowiednich współczynników dający tę samą, optymalną wartość funkcji celu.

³⁰ Zobacz zależność w twierdzeniu 2.2, poniżej zadania Z.4.

Powyższe postulaty wskazują najważniejsze kierunki przyszłych badań autora w tym temacie³¹.

Literatura

- Afriat S.N. [1967], *The construction of a utility function from expenditure data*, "International Economic Review", vol. 8, s. 67–77.
- Aigner D., Chu S. [1968], *On estimating the industry production function*, "American Economic Review", vol. 58, s. 826–839.
- Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K. [2006], *Introduction to Data Envelopment Analysis...*, Springer, New York.
- Farrell M.J. [1957], *The measurement of productive efficiency*, "Journal of the Royal Statistical Society", Series A., vol. 120, no. 3, s. 253–281.
- Fraser D.A.S., Massam H. [1989], *A mixed primal-dual bases algorithm for regression under inequality constraints: Application to concave regression*, "Scandinavian Journal of Statistics", vol. 16, s. 65–74.
- Greene W. [1980], *Maximum likelihood estimation of econometric frontier functions*, "Journal of Econometrics", vol. 13, s. 26–57.
- Hanson D.L., Pledger G. [1976], *Consistency in concave regression*, "Annals of Statistics", vol. 4, no. 6, s. 1038–1050.
- Hildreth C. [1954], *Point estimates of ordinates of concave functions*, "Journal of the American Statistical Association", vol. 49, s. 598–619.
- Kalvelagen E. [2004], *Efficiently Solving DEA Models with GAMS*, GAMS, Washington DC, 22.
- Kuosmanen T. [2008], *Representation theorem for convex nonparametric least squares*, "Journal of Econometrics", vol. 11, s. 308–325.
- Kuosmanen T., Johnson A. [2010], *Data envelopment analysis as nonparametric least squares regression*, "Operations Research", vol. 58, no. 1, s. 149–160.
- Kuosmanen T., Kortelainen M. [2012], *Stochastic non-smooth envelopment of data: semi-parametric frontier estimation subject to shape constraints*, "Journal of Productivity Analysis", vol. 38, s. 11–28.
- Osiewski J., Wróbel-Rotter R. [2002], *Bayesowski model efektów losowych w analizie efektywności kosztowej (na przykładzie elektrowni i elektrociepłowni polskich)*, „Przegląd Statystyczny”, vol. 50, nr 2, s. 47–68.
- Timmer C.P. [1971], *Using a probabilistic frontier production function to measure technical efficiency*, "Journal of Political Economy", vol. 79, s. 767–794.
- Varian H. [1982], *The nonparametric approach to demand analysis*, "Econometrica", vol. 50, s. 945–973.
- Wu C.F. [1982], *Some algorithms for concave and isotonic regression*, TIMS Studies in Management Science, vol. 19, s. 105–116.
- Yatchew A.J., Bos L. [1997], *Nonparametric regression and testing in economic models*, "Journal of Quantitative Economics", vol. 13, s. 81–131.

³¹ Inne propozycje badawcze w najnowszej pracy źródłowej [Kuosmanen, Kortelainen 2012, s. 16].

MATHEMATICAL PROGRAMMING PERSPECTIVE ON ESTIMATION METHODS FOR REGRESSION MODELS

Summary: In the paper selected estimation methods (OLS, COLS and the PP method) for linear regression models are reminded. They are presented as appropriate mathematical programming assignments. Thus we treat them purely deterministic as optimization problems of operations research. Next, we present their less popular counterparts, which have recently been employed in nonparametric regression models. Numerical and identification problems connected with solving these assignments are discussed. In the empirical part of the paper we apply the nonparametric approach and present the results obtained for some real-world data.

Keywords: nonparametric regression, estimation methods, mathematical programming.