

EKONOMETRIA

26

Zastosowanie matematyki w ekonomii

Redaktor naukowy Janusz Łyko



**Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2009**

Spis treści

Wstęp	7
Beata Bal-Domańska , Ekonometryczna analiza sigma i beta konwergencji regionów Unii Europejskiej	9
Andrzej Bąk, Aneta Rybicka, Marcin Pelka , Modele efektów głównych i modele z interakcjami w <i>conjoint analysis</i> z zastosowaniem programu R	25
Katarzyna Budny , Kurtoza wektora losowego	44
Wiktor Ejsmont , Optymalna liczebność grupy studentów	55
Kamil Fijorek , Model regresji dla cechy przyjmującej wartości z przedziału $(0,1)$ – ujęcie bayesowskie	66
Paweł Hanczar , Wyznaczanie zapasu bezpieczeństwa w sieci logistycznej ...	77
Roman Huptas , Metody szacowania wewnątrzdziennej sezonowości w analizie danych finansowych pochodzących z pojedynczych transakcji	83
Aleksandra Iwanicka , Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w wieloklasowym modelu ryzyka.....	97
Agnieszka Lipieta , Stany równowagi na rynkach warunkowych	110
Krystyna Melich-Iwanek , Polski rynek pracy w świetle teorii histerezy.....	122
Rafał Piszczek , Zastosowanie modelu logit w modelowaniu upadłości	133
Marcin Salamaga , Próba weryfikacji teorii parytetu siły nabywczej na przykładzie kursów wybranych walut	149
Antoni Smoluk , O zasadzie dualności w programowaniu liniowym	160
Małgorzata Szulc-Janek , Influence of recommendations announcements on stock prices of fuel market	170
Jacek Welc , Regresja liniowa w szacowaniu fundamentalnych współczynników Beta na przykładzie spółek giełdowych z sektorów: budownictwa, informatyki oraz spożywczego	180
Andrzej Wilkowski , O współczynniku korelacji	191
Mirosław Wójciak , Klasyfikacja nowych technologii energetycznych ze względu na determinanty ich rozwoju.....	199
Andrzej Wójcik , Wykorzystanie modeli wektorowo-autoregresyjnych do modelowania gospodarki Polski.....	209
Katarzyna Zeug-Żebro , Rekonstrukcja przestrzeni stanów na podstawie wielowymiarowych szeregów czasowych.....	219

Summaries

Beata Bal-Domańska , Econometric analysis of sigma and beta convergence in the European Union regions	24
Andrzej Bąk, Aneta Rybicka, Marcin Pelka , Main effects models and main and interactions models in <i>conjoint analysis</i> with application of R software.....	43
Katarzyna Budny , Kurtosis of a random vector	53
Wiktor Ejsmont , Optimal class size of students	65
Kamil Fijorek , Regression model for data restricted to the interval (0,1) – Bayesian approach.....	76
Paweł Hanczar , Safety stock level calculation in a supply chain network.....	82
Roman Huptas , Estimation methods of intraday seasonality in transaction financial data analysis	96
Aleksandra Iwanicka , An impact of some outside risk factors on the finite-time ruin probability for a multi-classes risk model.....	109
Agnieszka Lipieta , States of contingent market equilibrium	121
Krystyna Melich-Iwanek , The Polish labour market in light of the hysteresis theory	132
Rafał Piszczek , Logit model applications for bankrupctcy modelling.....	148
Marcin Salamaga , Attempt to verify the purchasing power parity theory in the case of some foreign currencies.....	159
Antoni Smoluk , On dual principle of linear programming	168
Małgorzata Szulc-Janek , Analiza wpływu rekomendacji analityków na ceny akcji branży paliwowej (Analiza wpływu rekomendacji analityków na ceny akcji branży paliwowej).....	178
Jacek Welc , A linear regression in estimating fundamental betas in the case of the stock market companies from construction, it and food industries	190
Andrzej Wilkowski , About the coefficient of correlation	198
Mirosław Wójciak , Classification of new energy related technologies based on the determinants of their development	208
Andrzej Wójcik , Using vector-autoregressive models to modelling economy of Poland.....	218
Katarzyna Zeug-Żebro , State space reconstruction from multivariate time series	227

Katarzyna Budny

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

KURTOZA WEKTORA LOSOWEGO

Streszczenie: W teorii jednowymiarowych zmiennych losowych jedną z miar koncentracji rozkładu wokół wartości oczekiwanej czy też miar spłaszczenia rozkładu jest kurtoza. Przypomnijmy, że kurtoza zmiennej losowej jest definiowana jako czwarty moment centralny dzielony przez kwadrat wariancji.

Definicje potęgi wektora w przestrzeni z iloczynem skalarnym oraz momentu centralnego wektora losowego zaproponowane przez J. Tatarę pozwalają na próbę podobnego określenia kurtozy wielowymiarowego wektora losowego.

Zaprezentowano podstawowe własności tak skonstruowanego wskaźnika oraz sformułowane i udowodniono twierdzenie podające postać kurtozy dla wektora losowego o stochastycznie niezależnych współrzędnych. W celu zobrazowania tego twierdzenia przedstawione zostaną postaci kurtozy dla wybranych wielowymiarowych typów rozkładów prawdopodobieństwa.

Słowa kluczowe: kurtoza, momenty wektora losowego, rozkłady wielowymiarowe, potęga wektora.

W teorii jednowymiarowych zmiennych losowych jedną z miar koncentracji rozkładu wokół wartości oczekiwanej czy też miar spłaszczenia rozkładu jest kurtoza. Celem niniejszej pracy jest uogólnienie tej charakterystyki na przypadek wielowymiarowy oraz zaprezentowanie jej wybranych własności.

Punktem wyjścia dla tych rozważań jest zaproponowana przez J. Tatarę [1996; 1999] oraz wielokrotnie przywoływana (m.in. [Osiewalski, Tatar 1999; Tatar 2000a; 2000b; Tatar, Budny 2009]) definicja potęgi wektora w przestrzeni z iloczynem skalarnym.

Definicja 1

Dla dowolnego $v \in R^n$ oraz dowolnej liczby $k \in N_0 = N \cup \{0\}$ **k -tą potęgę wektora v** definiujemy w następujący sposób:

$$v^0 = 1 \in R$$

oraz

$$v^k = \begin{cases} v^{k-1} \cdot v, & \text{dla } k\text{-nieparzystych} \\ \langle v^{k-1}, v \rangle, & \text{dla } k\text{-parzystych} \end{cases}$$

Z powyższej definicji – w sposób oczywisty – wynikają następujące dwie ważne własności

$$\forall v \in R^n, k \in N_0 : k\text{-parzysta} \Rightarrow v^k \in R,$$

$$\forall v \in R^n, k \in N : k\text{-nieparzysta} \Rightarrow v^k \in R^n.$$

W pracy ograniczymy się do przestrzeni wektorowej $(R^n, R, +, \cdot)$, w której określono klasyczny (euklidesowy) iloczyn skalarny postaci:

$$\forall v = (v_1, v_2, \dots, v_n), w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in R^n : \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Na bazie pojęcia potęgi wektora zostały zdefiniowane m.in. momenty centralne wielowymiarowego wektora losowego [Tatar 1996; 1999].

Przypomnijmy, że przez kurtozę zmiennej losowej rozumiemy czwarty moment centralny tej zmiennej dzielony przez kwadrat jej wariancji. Wykorzystując definicję momentu centralnego wektora losowego, w pracy [Tatar, Budny 2009] podjęto próbę podobnego określenia kurtozy wielowymiarowego wektora losowego.

Niech $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow R^n$ będzie wektorem losowym, dla którego istnieje kurtoza.

Definicja 2

Kurtozę wektora losowego $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow R^n$ definiujemy następująco:

$$\text{Kurt}X = \frac{E\left[(X - EX)^4\right]}{(D^2 X)^2}.$$

Przed przystąpieniem do omawiania własności tak skonstruowanego wskaźnika przypomnijmy, że dla zmiennej losowej $\xi : \Omega \rightarrow R$, dla której istnieje kurtoza, jej eksces nazywamy wielkość:

$$\text{Excess}\xi = \text{Kurt}\xi - 3 = \frac{E\left((\xi - E\xi)^4\right)}{(D^2 \xi)^2} - 3.$$

Zauważmy, że dokonując stosownych przekształceń, eksces kurtozy można przedstawić w postaci:

$$\text{Excess}\xi = \frac{E(\xi^4) - 4mE(\xi^3) + 12m^2E(\xi^2) - 3(E(\xi^2))^2 - 6m^4}{(D^2 \xi)^2}, \quad (1)$$

gdzie $E\xi = m$.

Istotnie

$$\begin{aligned}
 \text{Excess}\xi &= \text{Kurt}\xi - 3 = \frac{E\left((\xi - E\xi)^4\right)}{(D^2\xi)^2} - 3 = \\
 &= \frac{E\left(\xi^4 - 4\xi^3m + 6\xi^2m^2 - 4\xi m^3 + m^4\right)}{\left(E(\xi^2) - (E\xi)^2\right)^2} - 3 = \\
 &= \frac{E(\xi^4) - 4mE(\xi^3) + 6m^2E(\xi^2) - 4m^3E\xi + m^4}{\left(E(\xi^2)\right)^2 - 2E(\xi^2)(E\xi)^2 + (E\xi)^4} - \\
 &\quad \frac{3\left(\left(E(\xi^2)\right)^2 - 2E(\xi^2)(E\xi)^2 + (E\xi)^4\right)}{\left(E(\xi^2)\right)^2 - 2E(\xi^2)(E\xi)^2 + (E\xi)^4} = \\
 &= \frac{E(\xi^4) - 4mE(\xi^3) + 6m^2E(\xi^2) - 4m^4 + m^4 - 3\left(E(\xi^2)\right)^2 + 6E(\xi^2)m^2 - 3m^4}{\left(E(\xi^2)\right)^2 - 2E(\xi^2)m^2 + m^4} = \\
 &= \frac{E(\xi^4) - 4mE(\xi^3) + 12m^2E(\xi^2) - 3\left(E(\xi^2)\right)^2 - 6m^4}{(D^2\xi)^2}.
 \end{aligned}$$

W dalszej części pracy zostanie sformułowane i udowodnione twierdzenie podające postać kurtozy dla wektora losowego o stochastycznie niezależnych współrzędnych. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy m.in. następujący lemat:

Lemat 1

Niech $X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow R^n$ będzie wektorem losowym, dla którego istnieje kurtoza, oraz takim, że dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, jeżeli $i \neq j$, to X_i jest stochastycznie niezależna od X_j (innymi słowy: $X_i \perp X_j$ dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takich, że $i \neq j$).

Wówczas prawdziwe są następujące równości:

- 1)
$$E\left(\langle X, X \rangle^2\right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E(X_i^2)E(X_j^2) + \sum_{i=1}^n E(X_i^4),$$
- 2)
$$E\left(\langle X, X \rangle \langle X, EX \rangle\right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E(X_i^2)m_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i E(X_i^3),$$

$$3) \quad E\left(\langle X, EX \rangle^2\right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n m_i^2 m_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i^2 E\left(X_i^2\right),$$

$$4) \quad \langle EX, EX \rangle E(\langle X, X \rangle) = \sum_{i,j=1}^n m_i^2 E\left(X_j^2\right),$$

$$5) \quad \langle EX, EX \rangle^2 = \sum_{i,j=1}^n m_i^2 m_j^2,$$

gdzie $m_i = EX_i$, dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Dowód:

Korzystając z własności całki oraz z niezależności zmiennych losowych X_i^2 oraz X_j^2 dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takich, że $i \neq j$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} E\left(\langle X, X \rangle^2\right) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n X_j^2\right)\right] = \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E\left(X_i^2 X_j^2\right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E\left(X_i^2\right)E\left(X_j^2\right) + \sum_{i=1}^n E\left(X_i^4\right), \end{aligned}$$

czyli tezę 1.

Podobnie, wykorzystując niezależność zmiennych losowych X_i^2 oraz X_j dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takich, że $i \neq j$, otrzymujemy tezę 2.

Rzeczywiście, prawdziwy jest bowiem ciąg równości:

$$\begin{aligned} E(\langle X, X \rangle \langle X, EX \rangle) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n X_j m_j\right)\right] = \sum_{i,j=1}^n E\left(X_i^2 X_j m_j\right) = \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n m_j E\left(X_i^2\right)E\left(X_j\right) + \sum_{i=1}^n m_i E\left(X_i^3\right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E\left(X_i^2\right)m_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i E\left(X_i^3\right). \end{aligned}$$

Dla dowodu tezy 3 również korzystamy z założenia niezależności zmiennych losowych X_i oraz X_j , gdy $i \neq j$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} E\left(\langle X, EX \rangle^2\right) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i EX_i\right)\left(\sum_{j=1}^n X_j EX_j\right)\right] = \sum_{i,j=1}^n E\left(X_i X_j m_i m_j\right) = \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n m_i m_j E\left(X_i X_j\right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n m_i^2 m_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i^2 E\left(X_i^2\right). \end{aligned}$$

Z kolei teza 4 wynika z następującego ciągu przekształceń:

$$\langle EX, EX \rangle E(\langle X, X \rangle) = \left(\sum_{i=1}^n m_i^2 \right) E \left(\sum_{j=1}^n X_j^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^n m_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n E(X_j^2) \right) = \sum_{i,j=1}^n m_i^2 E(X_j^2).$$

Teza 5 jest oczywista.

Możemy teraz przystąpić do sformułowania i udowodnienia twierdzenia tej pracy.

Twierdzenie 1

Niech $X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow R^n$ będzie wektorem losowym, spełniającym założenia lematu 1.

Wówczas

$$\text{Kurt}X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^n (2 + \text{Excess}X_i)(D^2 X_i)^2}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j}.$$

Dowód:

Pokażemy najpierw, że

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=1}^n (2 + \text{Excess}X_i)(D^2 X_i)^2}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j} = \\ & = \frac{\sum_{i=1}^n \left(E(X_i^4) - 4m_i E(X_i^3) + 8m_i^2 E(X_i^2) - (E(X_i^2))^2 - 4m_i^4 \right)}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $m_i = EX_i$, dla wszystkich $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Wykorzystując (1), przeprowadzimy następujące przekształcenie:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (2 + \text{Excess}X_i)(D^2 X_i)^2}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{E(X_i^4) - 4m_i E(X_i^3) + 12m_i^2 E(X_i^2) - 3(E(X_i^2))^2 - 6m_i^4}{(D^2 X_i)^2} \right) (D^2 X_i)^2}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j} = \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{2((E(X_i^2))^2 - 2E(X_i^2)m_i^2 + m_i^2) + E(X_i^4) - 4m_i E(X_i^3) + 12m_i^2 E(X_i^2) - 3(E(X_i^2))^2 - 6m_i^4}{(D^2 X_i)^2} \right) (D^2 X_i)^2}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j} = \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \left(E(X_i^4) - 4m_i E(X_i^3) + 8m_i^2 E(X_i^2) - (E(X_i^2))^2 - 4m_i^4 \right)}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j}.
\end{aligned}$$

Z kolei korzystając z definicji parzystej potęgi wektora, dwuliniowości iloczynu skalarnego oraz własności całki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
E\left[(X - EX)^4\right] &= E\left[\langle X - EX, X - EX \rangle^2\right] = \\
&= E\left[\left(\langle X, X \rangle - 2\langle X, EX \rangle + \langle EX, EX \rangle\right)^2\right] = \\
&= E\left[\langle X, X \rangle^2 - 4\langle X, X \rangle \langle X, EX \rangle + 4\langle X, EX \rangle^2 + 2\langle X, X \rangle \langle EX, EX \rangle - \right. \\
&\quad \left. 4\langle X, EX \rangle \cdot \langle EX, EX \rangle + \langle EX, EX \rangle^2\right].
\end{aligned} \tag{3}$$

Zauważmy ponadto, że

$$E(\langle X, EX \rangle \langle EX, EX \rangle) = (\langle EX, EX \rangle)^2. \tag{4}$$

Istotnie

$$\begin{aligned}
E(\langle X, EX \rangle \langle EX, EX \rangle) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i EX_i\right)\left(\sum_{j=1}^n (EX_j)^2\right)\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i m_i\right)\left(\sum_{j=1}^n m_j^2\right)\right] = \\
&= \left(\sum_{j=1}^n m_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^n m_i EX_i\right) = \left(\sum_{j=1}^n m_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^n m_i^2\right) = \left(\sum_{k=1}^n m_k^2\right)^2 = (\langle EX, EX \rangle)^2.
\end{aligned}$$

Zatem – na mocy (4) – równość (3) można przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned}
E\left[(X - EX)^4\right] &= E\left(\langle X, X \rangle^2\right) - 4E\left(\langle X, X \rangle \langle X, EX \rangle\right) + \\
&4E\left(\langle X, EX \rangle^2\right) + 2\langle EX, EX \rangle E\left(\langle X, X \rangle\right) - 3\langle EX, EX \rangle^2.
\end{aligned} \tag{3'}$$

Zapisując teraz kolejne składniki prawej strony równości (3') tak, jak na to pozwala teza lematu 1, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
E\left((X - EX)^4\right) &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E\left(X_i^2\right) E\left(X_j^2\right) + \sum_{i=1}^n E\left(X_i^4\right) - \\
&4\left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E\left(X_i^2\right) m_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i E\left(X_i^3\right)\right) + \\
&+ 4\left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n m_i^2 m_j^2 + \sum_{i=1}^n m_i^2 E\left(X_i^2\right)\right) + 2\sum_{i,j=1}^n m_i^2 E\left(X_j^2\right) - 3\sum_{i,j=1}^n m_i^2 m_j^2 = \\
&= \sum_{i,j=1}^n E\left(X_i^2\right) E\left(X_j^2\right) - \sum_{i=1}^n \left(E\left(X_i^2\right)\right)^2 + \sum_{i=1}^n E\left(X_i^4\right) - 2\sum_{i,j=1}^n E\left(X_i^2\right) m_j^2 - 2\sum_{i,j=1}^n E\left(X_i^2\right) m_j^2 + \\
&+ 4\sum_{i=1}^n E\left(X_i^2\right) m_i^2 - 4\sum_{i=1}^n m_i E\left(X_i^3\right) + \sum_{i,j=1}^n m_i^2 m_j^2 + 3\sum_{i,j=1}^n m_i^2 m_j^2 - 4\sum_{i=1}^n m_i^4 + \\
&+ 2\sum_{i,j=1}^n m_i^2 E\left(X_j^2\right) - 3\sum_{i,j=1}^n m_i^2 m_j^2 = \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^n \left(E\left(X_i^2\right) E\left(X_j^2\right) - 2\sum_{i,j=1}^n E\left(X_i^2\right) m_j^2 + \sum_{i,j=1}^n m_i^2 m_j^2\right)\right) - 2\sum_{i,j=1}^n m_i^2 E\left(X_j^2\right) + \\
&+ 2\sum_{i,j=1}^n m_i^2 E\left(X_j^2\right) + 3\sum_{i,j=1}^n m_i^2 m_j^2 - 3\sum_{i,j=1}^n m_i^2 m_j^2 + \sum_{i=1}^n E\left(X_i^4\right) - 4\sum_{i=1}^n m_i E\left(X_i^3\right) + \\
&+ 4\sum_{i=1}^n E\left(X_i^2\right) m_i^2 + 4\sum_{i=1}^n E\left(X_i^2\right) m_i^2 + \\
&- \sum_{i=1}^n \left(E\left(X_i^2\right)\right)^2 - 4\sum_{i=1}^n m_i^4 = \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^n \left(E\left(X_i^2\right) E\left(X_j^2\right) - 2\sum_{i,j=1}^n E\left(X_i^2\right) m_j^2 + \sum_{i,j=1}^n m_i^2 m_j^2\right)\right) + \sum_{i=1}^n E\left(X_i^4\right) - \\
&4\sum_{i=1}^n m_i E\left(X_i^3\right) + 8\sum_{i=1}^n E\left(X_i^2\right) m_i^2 - \sum_{i=1}^n \left(E\left(X_i^2\right)\right)^2 - 4\sum_{i=1}^n m_i^4,
\end{aligned}$$

czyli ostatecznie

$$E\left((X - EX)^4\right) = \left(\sum_{i,j=1}^n \left(E(X_i^2)E(X_j^2) - 2E(X_i^2)m_j^2 + m_i^2m_j^2 \right) \right) + \quad (3'')$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left(E(X_i^4) - 4m_iE(X_i^3) + 8m_i^2E(X_i^2) - (E(X_i^2))^2 - 4m_i^4 \right).$$

Wykorzystując równość (3''), uzyskujemy:

$$\text{Kurt } X = \frac{E\left[(X - EX)^4\right]}{(D^2 X)^2} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i,j=1}^n \left(E(X_i^2)E(X_j^2) - 2E(X_i^2)m_j^2 + m_i^2m_j^2 \right) \right) + \sum_{i=1}^n \left(E(X_i^4) - 4m_iE(X_i^3) + 8m_i^2E(X_i^2) - (E(X_i^2))^2 - 4m_i^4 \right)}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j} =$$

$$= \frac{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j + \sum_{i=1}^n \left(E(X_i^4) - 4m_iE(X_i^3) + 8m_i^2E(X_i^2) - (E(X_i^2))^2 - 4m_i^4 \right)}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j} =$$

$$= 1 + \frac{\sum_{i=1}^n \left(E(X_i^4) - 4m_iE(X_i^3) + 8m_i^2E(X_i^2) - (E(X_i^2))^2 - 4m_i^4 \right)}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j}.$$

Wobec udowodnionej wcześniej równości (2) mamy więc:

$$\text{Kurt } X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^n (2 + \text{Excess} X_i) (D^2 X_i)^2}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j},$$

czyli żadaną tezę.

Prostą konsekwencją twierdzenia 1 jest następujący wniosek.

Wniosek 1

Jeżeli $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ będzie wektorem losowym spełniającym założenia lematu 1 oraz dodatkowo $D^2 X_1 = D^2 X_2 = \dots = D^2 X_n = \sigma^2$, to

$$\text{Kurt } X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^n (2 + \text{Excess}X_i)}{n^2}.$$

Dowód:

Dzięki tezie twierdzenia 1 otrzymujemy:

$$\text{Kurt } X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^n (2 + \text{Excess}X_i)(\sigma^2)^2}{(n\sigma^2) \cdot (n\sigma^2)} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^n (2 + \text{Excess}X_i)}{n^2}.$$

Twierdzenie 1 dostarcza również – w oczywisty sposób – poniższych wniosków.

Wniosek 2

Jeżeli $X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ będzie wektorem losowym, spełniającym założenia lematu 1 oraz dodatkowo $X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to:

$$\text{Kurt } X = 1 + \frac{2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^4}{\sum_{i,j=1}^n \sigma_i^2 \sigma_j^2} = 1 + \frac{2 \sum_{i=1}^n (D^2 X_i)^2}{\sum_{i,j=1}^n D^2 X_i D^2 X_j}.$$

Ponadto przy założeniu $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$ otrzymujemy

$$\text{Kurt } X = 1 + \frac{2}{n}.$$

Wniosek 3

Jeżeli $X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ będzie wektorem losowym spełniającym założenia lematu 1 oraz $X_i \sim t_{\nu_i}$ (tzn. X_i ma rozkład t -Studenta z ν_i stopniami swobody), gdzie $\nu_i > 4$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to

$$\text{Kurt } X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{6}{\nu_i - 4}\right) \left(\frac{\nu_i}{\nu_i - 2}\right)^2}{\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\nu_i}{\nu_i - 2}\right) \left(\frac{\nu_j}{\nu_j - 2}\right)}.$$

Przy dodatkowym założeniu $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n = \nu > 4$ uzyskujemy

$$\text{Kurt } X = 1 + \frac{2 + \frac{6}{\nu - 4}}{n}.$$

Wnioski 2 oraz 3 podają postać kurtozy dla wybranych typów rozkładów, co zostało także przedstawione w pracy [Tatar, Budny 2009].

Kolejny fakt jest natychmiastową konsekwencją tych wniosków.

Wniosek 4

Jeżeli $X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ będzie wektorem losowym spełniającym założenia wniosku 2 oraz znajdzie warunek $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$, a $Y = (Y_1, \dots, Y_n): \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$ będzie wektorem losowym spełniającym założenia wniosku 3 oraz dodatkowo $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n = \nu > 4$, to wówczas

$$\text{Kurt } Y > \text{Kurt } X.$$

Literatura

- Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. 1 i 2, PWN, Warszawa 1969.
- Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.
- Jakubowski J., Sztencel R., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa 2004.
- Osiewalski J., Tatar J., *Multivariate Chebyshev Inequality Based on a New definition of Moments of a Random Vector*, „Przegląd Statystyczny” 1999, z. 2.
- Plucińska A., Pluciński E., *Probabilistyka. Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna, procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa 2006.
- Tatar J., *O niektórych miarach rozproszenia rozkładów prawdopodobieństwa*, „Przegląd Statystyczny” 1996 z. 3/4.
- Tatar J., *Moments of a Random Variable in a Hilbert Space*, „Przegląd Statystyczny” 1999 z. 2.
- Tatar J., *Nowa charakteryzacja wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa*, Sprawozdanie z badań statutowych; um. nr: 92/KM/1/99/S, AE, Kraków 2000a.
- Tatar J., *Momenty absolutne wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa*, Komisja Statystyczno-Demograficzna PAN, O/Kraków, 17 listopada 2000b.
- Tatar J., Budny K., *Kurtosis of a Random Vector – Special Types of Distributions*, praca złożona do druku, 2009.

KURTOSIS OF A RANDOM VECTOR

Summary: Kurtosis is one of the measures of concentration distribution around expected value or measures of flattening, frequently used in the theory of single-dimensional random variables. To remind: kurtosis of a random variable is defined as the fourth central moment divided by the square of the variance.

Definitions of the power of a vector in the space with the scalar product and the central moment of a random vector proposed by J. Tatar [1996; 1999] allow to make an attempt to redefine the kurtosis of the multi-dimensional random vector.

In the paper the essential properties of such constructed indicator are presented and the theorem giving a form of kurtosis for a random vector with stochastically independent marginal variables is formulated and proved. To illustrate this theorem, the forms of kurtosis for special, multi-dimensional types of distributions are presented.