EKONOMETRIA

26

Zastosowanie matematyki w ekonomii

Redaktor naukowy **Janusz Łyko**

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2009

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 76
Ekonometria 26 2009

Antoni Smoluk
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

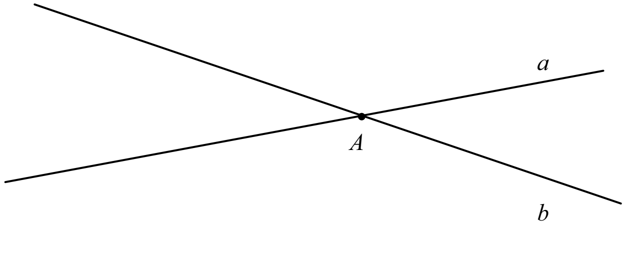
O ZASADZIE DUALNOŚCI W PROGRAMOWANIU LINIOWYM

Streszczenie: W artykule podano zasadę dualności wraz z krótkim i elementarnym jej dowodem. Program liniowy jest trójką (p^*, A, q); szuka się maksimum funkcji $f(x) = px$ przy ograniczeniach $Ax \leq q$ oraz $x \geq 0$. Symbolem $R(A, q)$ oznacza się zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\{x \in R^n \colon Ax \leq q, x \geq 0\}$, natomiast $v(p^*, A, q)$ jest wartością optymalną $\sup\{px \colon x \in R(A, q)\}$. Jeżeli program $(p^*, -A, q)$ jest zadaniem prymarnym, to problem $(-q^*, A^*, -p)$ jest do niego dualny, gdzie gwiazdka jest sprzężeniem, czyli transpozycją macierzy.

Zasada dualności. *Jeżeli zbiory* $R(-A, q)$ i $R(A^*, -p)$ *nie są puste, to istnieje para decyzji optymalnych* $(u, w) \in R^n \times (R^m)^*$ *i ponadto* $pu = v(p^*, -A, q) = -v(-q^*, A^*, -p) = qw$.

Słowa kluczowe: nierówność liniowa sprzeczna, program liniowy, zasada dualności.

1. Pojęcie dualności w matematyce jest silnie eksploatowane. Najważniejsze są dwie odmiany rzeczy dwoistych. Po pierwsze dwoistość oznacza pewną symetrię w zbiorze aksjomatów ze względu na niektóre pojęcia pierwotne. Jeśli dokona się permutacji tych obiektów, to układ aksjomatów nie zmieni się – może zmienić się tylko ich kolejność. Tak jest z dualnością w algebrach Boole'a. Przykładami praw dualnych są prawa de Morgana. Prawo negacji alternatywy jest dualne do prawa negacji koniunkcji. Aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej są także symetryczne. Każde dwie proste wyznaczają jeden punkt (rys. 1) i dualnie każde dwa punkty – jedną prostą (rys. 2); proste równoległe generują punkt w nieskończoności – kierunek.



Rys. 1. Zasada dualności – proste

Rys. 2. Zasada dualności – punkty

Dualność w programowaniu liniowym związana jest z teorią przestrzeni liniowych. Jest to inna – całkowicie odmienna – dualność. Wektor jest koszykiem dóbr, a obiektem dualnym jest funkcjonał liniowy, czyli cena. Naturalnie przestrzeń funkcjonałów liniowych, przestrzeń dualna, jest także przestrzenią liniową, a więc spełnia te same aksjomaty. Zasada dualności jest koroną programowania liniowego.

Dualność liniowa ma swój analogon w teorii grup. Grupy dualne, grupy charakterów są niezwykle piękną i głęboką nauką mającą ważne interpretacje w świecie fizycznym. Cała analiza Fouriera jest właśnie teorią dualności.

2. Przygodę z programowaniem liniowym rozpocząłem w 1961 r. od studium pierwszej pewnie książki z tego zakresu w języku polskim – zgrabnie opracowanego przez profesora Zbigniewa Czerwińskiego skryptu [Czerwiński 1961]. Do tej problematyki pragnę powrócić i przypomnieć [Yaglom i in. 1975] prosty i piękny drobiazg, znany w programowaniu liniowym pod nazwą *zasady dualności* – wynik podstawowy zarówno dla ekonomii, jak i dla matematyki. Z programowaniem liniowym byłem luźno związany przez całe swe życie zawodowe. Na starcie rozpocząłem od studium wspomnianej książki Czerwińskiego i zaraz – w tym samym roku – zainicjowałem pracę nad komputerową realizacją algorytmu *simplex*. W roku 1962 byłem w czasie wakacji na miesięcznym stażu naukowym w Instytucie Elektrotechniki w Międzylesiu koło Warszawy, gdzie weryfikowałem ten algorytm na angielskiej elektronicznej maszynie cyfrowej – tak to się wtedy mówiło – Elliott. Nawet dziś jeszcze wydaje się to dziwne, że w ciągu miesiąca sam jeden zrobiłem tak dużo: schemat blokowy algorytmu Dantziga i ten schemat blokowy zapisałem w języku MARK. Nie był to łatwy program komputerowy. Nośnikami informacji były taśmy perforowane; mój program mierzył kilka, może nawet kilkanaście, metrów długości. Działał sprawnie, chociaż sprawdzałem go tylko na wymyślonych – akademickich – przykładach, z natury dość prostych. Później – krótko – prowadziłem zajęcia z tego przedmiotu. Do programowania liniowego wróciłem w 1971 r., gdy byłem na rocznym stażu naukowym w Warszawie u profesora Jerzego Łosia. Był to w zasadzie semestr – przeciągnięty do roku szkolnego – poświęcony ekonomii matematycznej i wypukłości. Czas spędzony w Centrum Matematycznym imienia Stefana Banacha przy ulicy Mokotowskiej wykorzystałem głównie na przygotowanie rozprawy habilitacyjnej, a ubocznie zajmowałem się – obok opracowywania innych tematów seminaryjnych – także programowaniem liniowym. W tym czasie powstała idea programu liniowego jako trójki, którą prezentuję dalej w tym artykule. Jednak wtedy sprawy nie doprowadziłem do końca. Kolejny i ostatni powrót do programowania liniowego nastąpił na zakończenie pracy zawodowej: aby zilustrować wagę porządków liniowych w ekonomii, sformułowałem zasadę dualności. Było to na kursowym wykładzie algebry liniowej

w ramach przedmiotu matematyka. Okazuje się, że stożki i kliny znajdują się w ognisku badań ekonomicznych – objaśniają wiry gospodarcze i stanowią podstawę teorii równowagi. Do seminarium profesora Łosia wracałem często myślą z powodu niezwykłej atmosfery tam panującej, poruszanej tematyki oraz ludzi w nim uczestniczących – było to towarzystwo międzynarodowe, około 25 osób, a wśród nich takie nazwiska, jak: Koopmans – przyszły noblista, Czesław Olech, E.G. Golstein z Moskwy, Rubinow senior z Nowosybirska, R.T. Rockafellar ze Stanów Zjednoczonych, nie mówiąc o profesorze Jerzym Łosiu oraz plejadzie młodych z Polski i świata, jak: Andrzej Wieczorek, Emil Panek, Jan Sztaudynger, Jan Gajda i inni równie wielcy i sławni. Koopmans był z żoną; skromny i życzliwy, wszystkim oferował swe usługi. Jedno seminarium – każdy z uczestników był odpowiedzialny za jakieś seminarium i miał na nim referat, oczywiście po angielsku – zorganizował zgodnie z przyjętym zwyczajem Koopmans. Jego spotkanie wbiło mi się w pamięć z powodu przemeblowania całej sali seminaryjnej. W specjalny sposób ustawił stoliki, by mieć swobodny dostęp do każdego uczestnika i by wszyscy wzajemnie mogli się łatwo komunikować. Seminarium profesora Łosia było wspaniałą szkołą zespołowej pracy naukowej. Przerwa kawowa – *coffee break* – była porą niezwykłą. Kawę fundowali kolejno uczestnicy; czasem były jeszcze i pączki. Odświeżenie umysłu, ciąg dalszy dyskusji seminaryjnej, kontrprzykłady na kontrprzykłady – oto zajęcia podczas tej przerwy; jakaś twórcza aura była w pałacyku mieszczącym Centrum Banacha. Wszyscy byli przyjaciółmi, a łączyła nas wspólna pasja – jak budowlę naukową uczynić doskonałą. Krytyka była czymś naturalnym i koniecznym, nikt się nie obrażał. Usunięcie słabych punktów wzmacnia i poprawia przecież wyniki. W dyskusji teorię szlifowano jak najlepszy kryształ; pomysł przechodził przez kolejne próby ogniowe, badano także wytrzymałość na obalające przykłady, aby w końcu mógł zabłysnąć wewnętrznym światłem diamentu. Referat np. Andrzeja Wieczorka – obecnego profesora – był piękny i ciekawy, ale koledzy zauważyli, że pewna funkcja nie jest mierzalna, z tego powodu główny wynik upadł. Jednakowoż już na następnym seminarium referent dowód zmienił i uprościł; wynik pozostał, a nawet zyskał na ogólności. W takiej właśnie atmosferze powróciłem do programowania liniowego i zasady dualności. Chwilami byłem pewny, że znalazłem właściwy sposób ujęcia, ale później przychodziły zwątpienia i kontrprzykłady. Bliższa mi była teoria aproksymacji w przestrzeniach liniowych. Zająłem się oddzielaniem zbiorów wypukłych przez funkcjonały liniowe. Tej właśnie tematyce poświęciłem swoje seminaryjne wystąpienie. Profesor Łoś był nawet trochę niezadowolony, że tematyki wystąpienia nie uzgodniłem z nim.

Profesora Łosia spotkałem jeszcze kilka razy na różnych konferencjach, a ostatni raz w 1995 r. w Hagen na uroczystości nadania mu tytułu doktora *honoris causa* przez tamtejszy uniwersytet; sam również zostałem przy tej okazji wyróżniony, bo profesor Łoś uznał mnie za swego ucznia.

Zasada dualności jest ekonomicznym odpowiednikiem fizycznej zasady zachowania masy i energii; w świecie organicznym obowiązuje analogiczna zasada zachowania energii życiowej – biologicznej. W naturze wszystko się bilansuje: wpływ do systemu jest w równowadze z wypływem, materia zmienia tylko swą formę – ani znika, ani się tworzy. Programowanie liniowe jako nauka powstało w latach 1941--1951. W roku 1941 Hitchcock sformułował problem transportowy, który w następnym roku niezależnie podał także Kantorowicz. W związku z wojną i racjonalizacją wyżywienia Stiegler w 1945 r. wyróżnił matematyczny problem diety. W 1949 r. Dantzig wprowadził termin „programowanie liniowe” oraz sformułował zagadnienie ogólne obejmujące transport i dietę, a w roku 1951 zaproponował algorytm simplex; w tymże 1951 r. sformułowano i udowodniono także zasadę dualności. Zasada ta znana była już ok. roku 1947 von Neumannowi; jej dowód wynaleźli Gale, Kuhn i Tacker. Przy okazji warto przypomnieć, że w pierwszym okresie przyznawania nagród imienia Alfreda Nobla z ekonomii jej laureatami byli głównie twórcy programowania liniowego i liniowej ekonomii: Samuelson w 1970 r., Arrow w 1972 r., Leontiew w 1973 r., Kantorowicz i Koopmans w 1975 r., Stiegler w 1982 r.

Artykuł ten – dedykowany profesorowi Andrzejowi Barczakowi – jest nieco zmienioną wersją pracy [Smoluk 2008].

3. Twierdzenie o dualności w optymalizacji liniowej dowodzi się przeważnie długo i tym samym nieprzejrzyście. Już nawet samo sformułowanie tej pięknej zasady może stwarzać trudności interpretacyjne. Problem liniowy – zwany dalej krótko programem lub problemem – jest uporządkowaną trójką (p^*, A, q), gdzie p^* jest funkcjonałem liniowym, czyli układem cen, A – macierzą współczynników technologicznych, czyli operatorem liniowym z przestrzeni koszyków R^n w przestrzeń potrzebnych surowców R^m, natomiast wektor $q \in R^m$ oznacza dostępne zasoby surowcowe. Szuka się maksimum funkcjonału $f(x) = p^*x$ na zbiorze dopuszczalnych rozwiązań $R(A, q) = \{x \in K_n\colon Ax \le q\}$, gdzie K_n jest stożkiem wektorów nieujemnych w przestrzeni R^n. Badaniem tego typu zadań zajmuje się programowanie liniowe. Program jest niesprzeczny, gdy zbiór dopuszczalnych rozwiązań nie jest pusty. Z definicji problemu liniowego wynika, że zawsze poszukuje się koszyka maksymalizującego funkcję celu. Oczywiście przez zmianę znaku można mówić o minimalizacji. Tutaj przyjmujemy jednak konwencję, że z każdym problemem liniowym kojarzymy jego największą wartość.

Równowaga ekonomiczna łączy produkcję z rynkiem, stąd dwa problemy liniowe: *prymarny* $(p^*, -A, q)$ i *dualny* $(-q^*, A^*, -p)$, gdzie gwiazdka oznacza sprzężenie, czyli operację transponowania macierzy. Wektor jest macierzą. Jeżeli $p \in R^n$ jest koszykiem dóbr, to wektor sprzężony $p^* \in (R^n)^*$ jest funkcjonałem liniowym, czyli ceną. Operator sprzężony A^* jest macierzą transponowaną: jeśli $A \in M_{mn}(R)$, czyli jest macierzą o m wierszach i n kolumnach, to $A^* \in M_{nm}(R)$. Jeżeli wektor jest wierszem, to jego sprzężenie jest kolumną i odwrotnie; w dalszym ciągu, ze względów czysto technicznych, nie będziemy rygorystycznie odróżniać wektorów wierszowych od kolumnowych. Naturalnie program dualny do programu dualnego jest programem prymarnym. Program prymarny odnosi się do sfery produkcji, a dualny do obiegu, czyli rynku. Operator liniowy A^* odwzorowuje przestrzeń dualną do R^m, czyli przestrzeń cen surowców w przestrzeń dualną do R^n – przestrzeń cen towarów rynkowych. Szuka się tak samo jak w programie prymarnym maksimum funkcji $g(y) = -q^*y$, przy warunkach ograniczających: $A^*y \leq -p$ oraz $y \geq 0$. W ten sposób otrzymuje się pełną skośną symetrię pomiędzy zadaniem prymarnym i dualnym. Rozwiązania dopuszczalne będziemy nazywać także planami możliwymi. Wielkość $\sup\{p^*x : x \in R(A, q)\}$, należąca do rozszerzonej prostej $R + \{\infty_-, \infty_+\}$, nazywa się wartością programu (p^*, A, q) i oznacza symbolem $v(p^*, A, q)$.

Lemat. *Jeżeli programy prymarny i dualny nie są sprzeczne, to dla każdego koszyka dóbr $x \in R(-A, q)$ i każdego układu cen $y \in R(A^*, -p)$ prawdziwa jest nierówność*

$$px \leq qy.$$

Dowód lematu jest niezwykle prosty, ponieważ

$$Ax + q \geq 0 \quad \text{oraz} \quad A^*y + p \leq 0,$$

więc

$$yAx + yq \geq 0 \quad \text{i} \quad xA^*y + xp \leq 0.$$

Z symetrii iloczynu skalarnego $xp = px$ oraz równości $yAx = xA^*y$ wynika teza lematu.

Wniosek. *Jeżeli programy prymarny $(p^*, -A, q)$ i dualny $(-q^*, A^*, -p)$ nie są sprzeczne, to wartości tych programów są skończone*; *istnieją ponadto decyzje optymalne $u \in R(-A, q)$ oraz $w \in R(A^*, -p)$ takie*, *że*:

$$V = pu = v(p^*, -A, q) \leq -v(-q^*, A^*, -p) = \inf\{qy\colon y \in R(A^*, -p)\} = qw = V^*.$$

Liczbę V^* nazywa się tradycyjnie wartością programu dualnego, bo program dualny definiuje się inaczej – szuka się minimum, a wtedy program dualny nie jest programem liniowym zgodnie z ogólną podaną tu definicją. Traci się także symetrię i podobieństwo: w obu zadaniach maksymalizuje się funkcję celu, a układy ograniczeń są analogiczne. Jeżeli jeden z dwu programów – program prymarny albo dualny – ma rozwiązanie optymalne, to także drugi ma rozwiązanie optymalne.

Uwaga. *Jeżeli dla każdego funkcjonału liniowego $p^* \in (R^n)^*$ istnieje decyzja optymalna $w \in R\,(A, q)$, to zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest niepusty i ograniczony.*

4. **Lemat fundamentalny.** *Jeżeli nierówność macierzowa $Ax \geq q$ jest sprzeczna*, *to istnieje kombinacja liniowa wierszy również będąca nierównością sprzeczną*, $0 \geq 1$. *Jeśli nierówność $px \geq \alpha$ jest sprzeczna*, *to $p = 0$ i $\alpha > 0$.*

Ten prosty lemat załatwia wszystko, z niego właśnie wynika zasada dualności. Pomnożenie nierówności przez liczbę ujemną zmienia oczywiście jej zwrot; dodawać można nierówności jednakowego zwrotu.

Trzy nierówności: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $-x_1 - x_2 \geq 1$, w formie macierzowej zapisują się naturalnie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

jest to układ sprzeczny, więc zgodnie z lematem fundamentalnym istnieje kombinacja liniowa będąca nierównością sprzeczną. Każdą nierówność wystarczy pomnożyć przez 1, a następnie wszystkie dodać. Otrzyma się jedną sprzeczną nierówność $0 \geq 1$. Jest to uniwersalna sprzeczna nierówność – czysty fałsz.

Dowód lematu fundamentalnego jest indukcyjny ze względu na liczbę niewiadomych n. Jeżeli jest m nierówności i jedna zmienna x_1, to łatwo się zauważa, że sprzeczny układ nierówności jest równoważny tylko dwóm nierównościom $x_1 \geq a$ i $x_1 \leq b$, gdzie $a > b$. Stąd już prosto otrzymuje się odpowiednią kombinację liniową. Jeżeli lemat jest prawdziwy dla n zmiennych, to jego prawdziwość dla $n + 1$ zmiennych wykazuje się przez eliminację ostatniej zmiennej. Jeżeli podukład nierówności, w których współczynnik przy x_{n+1} jest zerem, jest sprzeczny, to indukcja przechodzi. Można więc przyjąć, że istnieją nierówności z różnym od zera współczynnikiem przy ostatniej zmiennej. Jeżeli te różne od zera współczynniki są jednego znaku – silnie dodatnie lub silnie ujemne, to układ nie jest sprzeczny. Wynika stąd, że część z nich jest silnie dodatnia, część silnie ujemna. Układ jest więc równoważny układowi nierówności: typu F

$$F(x_1, \ldots, x_n) \leq x_{n+1},$$

typu G

$$G(x_1, \ldots, x_n) \leq -x_{n+1}$$

i ewentualnie typu H

$$H(x_1, \ldots, x_n) \leq 0,$$

gdzie funkcje F, G, H są wielomianami stopnia pierwszego zmiennych $(x_1, \ldots, x_n)$. Dodając wzajemnie nierówności typu F i G, na wszystkie możliwe sposoby, otrzymujemy tak samo sprzeczny układ nierówności[1], ale tylko n zmiennych. Możemy więc powołać się na założenie indukcyjne. Nierówności typów F, G, H oraz

[1] *Pons asinorum.* Bryk ten ma ułatwić akceptację tej tezy. Jeśli układ nie jest sprzeczny, to również wcześniejszy układ jest niesprzeczny. Jeśli wektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ spełnia zredukowane nierówności, to istnieje wektor spełniający pełny układ; wystarczy przyjąć: $x_{n+1} = \max F$, wtedy

$$\max G + \max F = \max G + x_{n+1} \leq 0 = x_{n+1} - x_{n+1},$$

czyli

$$G(x_1, \ldots, x_n) \leq -x_{n+1}.$$

ewentualnie ich sumy powstają z nierówności początkowych przez operacje liniowe. Uwaga ta kończy dowód lematu.

Wniosek. *Jeżeli układ* $Ax + q \geq 0$ *jest sprzeczny przy dodatkowym warunku* $x \geq 0$, *to istnieje kombinacja liniowa*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c \geq 0,$$

tylko pierwszych m nierówności

$$a_{k1}\, x_1 + \ldots + a_{kn}\, x_n + q_k \geq 0,$$

$k = 1, \ldots, m$ – *wszystkich nierówności jest tu właściwie* $m + n$ – *taka, że* $a_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $c < 0$, *lub – co jest równoważne, że*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq 1$$

oraz $a_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Uwaga. *W* R^n *uniwersalna jedna nierówność sprzeczna jest postaci* $0 \geq 1$, *natomiast w* K_n *– postaci* $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \geq 1$, *gdzie* $a_i \leq 0$. *Naturalnie układ nierówności sprzeczny w* R^n *jest tym bardziej sprzeczny w* K_n, *ale nie odwrotnie.*

Zasada dualności. *Jeżeli programy dualny i prymarny nie są sprzeczne, to* $V = V^*$.

Zasada dualności jest prawem równowagi. Jeżeli teoretyczny wektor cen surowców jest większy od empirycznego wektora cen, to produkcja jest wskazana – jest opłacalna; jeśli jest mniejszy, to należy zaniechać produkcji i sprzedać posiadane surowce, zyska się wtedy więcej. Zasada dualności jest więc prawem nauki ułatwiającym podejmowanie korzystnych decyzji. Wiedza procentuje. Program dualny jest rynkową weryfikacją przedsięwzięcia.

Dowód zasady dualności jest prostym powołaniem się na wniosek z lematu fundamentalnego. Należy jedynie pokazać, że układ $m + n + 1$ nierówności: $Ax + q \geq 0$, $A^*y + p \leq 0$, $px - qy \geq 0$ nie jest sprzeczny, gdy $x \geq 0$ i $y \geq 0$; licząc te ostatnie, mamy tu w istocie $2m + 2n + 1$ nierówności. Jego rozwiązaniem jest para decyzji optymalnych $(u, w) \in R^n \times (R^m)^*$. Przyjmijmy, że ten układ jest sprzeczny. Wniosek z lematu fundamentalnego upoważnia nas do stwierdzenia, że istnieje kombinacja liniowa pierwszych $m + n + 1$ nierówności spełniająca odpowiednie warunki. Programy prymarny i dualny nie są jednak sprzeczne; oznacza to, że liczba a – przez którą mnożymy ostatnią nierówność $px - qy \geq 0$ – jest silnie dodatnia. Jeżeli nierówność

$$a_{k1}\, x_1 + \ldots + a_{kn}\, x_n + q_k \geq 0$$

pomnożymy przez $w_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, m$, zaś nierówność

$$-\,a_{1s}\, y_1 - \ldots - a_{ms}\, y_m - p_s \geq 0$$

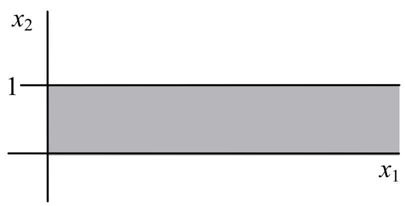
przez $u_s \geq 0$, $s = 1, \ldots, n$, to otrzymamy kombinację liniową $m + n + 1$ nierówności

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}w_k + ap_i)x_i - \sum_{j=1}^{m}(\sum_{s=1}^{n} a_{js}u_s + aq_j)y_j + \sum_{k=1}^{m} q_k w_k - \sum_{s=1}^{n} p_s u_s \geq 0$$

taką, że $\sum_{k=1}^{m} a_{ki}w_k + ap_i \leq 0$, i = 1, …, n, $\sum_{s=1}^{n} a_{js}u_s + aq_j \geq 0$, j = 1, …, m oraz $qw - pu < 0$.

Wynika stąd, że wektor $x = a^{-1}(u_1, \ldots, u_n)$ jest rozwiązaniem zadania prymarnego, natomiast $y = a^{-1}(w_1, \ldots, w_m)$ – zadania dualnego, ale jednocześnie $qy < px$ wbrew lematowi udowodnionemu w punkcie 3. Sprzeczność kończy dowód zasady dualności.

5. W książce czterech autorów, I. Yagloma, B. Trakhtenbrota, E. Ventsel, A. Solodovnikova [1975], zasada dualności jest sformułowana nie tyle błędnie, co myląco. *Si le problème initial possède une solution, le problème dual a aussi une solution.* Przez rozwiązanie należy tu rozumieć rozwiązanie optymalne. Jeżeli program prymarny nie jest sprzeczny, to stąd nie wynika niesprzeczność programu dualnego. Gdy program dualny jest sprzeczny, jak w podanym poniżej przykładzie, wtedy nie ma decyzji optymalnych, chociaż równość $V = V^*$ da się utrzymać. Praktyczna wartość tego wyniku jest naturalnie żadna; jest to równość typu $\infty_+ = \infty_+$ lub $\infty_- = \infty_-$, co oznacza, że zadanie jest źle postawione. Program liniowy ma więc walor empiryczny jedynie wtedy, gdy zadania prymarne i dualne nie są sprzeczne. Związek pomiędzy nieograniczonością zbioru rozwiązań dopuszczalnych zadania prymarnego i sprzecznością problemu dualnego widać na prostym przykładzie. W programie prymarnym ((1, 0), (0 1), (1)) szuka się maksimum funkcji $f(x_1, x_2) = x_1$ przy ograniczeniach: $x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest tutaj nieograniczonym paskiem (rys. 3); sytuacja ta jest oczywiście sztuczna, bo zasoby naturalne zawsze są ograniczone.



Rys. 3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych

Program nie jest sprzeczny, ale decyzji optymalnej nie ma. Wartość programu jest nieskończonością, $V = \infty_+$. Program dualny jest w tym wypadku trójką

$$((-1), \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix});$$

szuka się maksimum funkcji $g(y_1) = -y_1$ przy ograniczeniach

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}(y_1) \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } y_1 \geq 0.$$

Ograniczenia te są jednak sprzeczne, bo $0 \leq -1$. Supremum zbioru pustego jest ∞_{-}, a infimum ∞_{+}, więc $V^* = \infty_{+}$; równość $V = V^*$ naturalnie zachodzi.

6. Chociaż równowaga dynamiczna w przyrodzie i gospodarce jest zawsze, o idealną równowagę statyczną trudno. Ideał nie jest stabilny. *Incidis in Scyllam cupiens vitare Charybdim* – osiadasz na rafie bezrobocia, gdy pragniesz uniknąć wirów inflacji. Ceny optymalne surowców obliczone przez rozwiązanie problemu dualnego nigdy nie są zgodne z danymi empirycznymi. Zawsze albo korzystniej produkować, albo sprzedać posiadane zasoby. Stan idealny jest możliwy, jest tylko możliwy. Natura karmi się tolerancją gwarantującą stabilność systemu. Program prymarny pozwala wyliczyć plan produkcji dający maksymalny przychód ze sprzedaży wyrobów, natomiast zadanie dualne pokazuje, jakie ceny surowców gwarantują minimalne koszty. Te dwie wielkości są równe. Wynika to z zasady dualności. Maksymalny przychód ze sprzedaży wytworzonych dóbr jest równy minimalnym kosztom zużytych w produkcji zasobów. Jest to stan równowagi idealnej. Rozwiązanie problemu dualnego jest zawsze korzystne – pomaga podjąć właściwą decyzję: produkować, czy sprzedać surowce? Produkować, bo ceny rynkowe surowców są niższe niż te wyliczone; sprzedać surowce, bo jest odwrotnie – obserwowane na rynku ceny surowców są wyższe od teoretycznych. Informacja ma swą wartość.

Literatura

Czerwiński Z., *Wstęp do teorii programowania liniowego z elementami algebry wyższej*, PWN, Poznań 1961.

Smoluk A., *O perspektywie, dualności i equilibrium*, „Przegląd Statystyczny" 2008, Tom 55, z. 2, s. 5-14.

Yaglom I., Trakhtenbrot B., Ventsel E., Solodovnikov A., *Nouvelles orientations des mathématiques*, Editions Mir, Moscou 1975.

ON DUAL PRINCIPLE OF LINEAR PROGRAMMING

Summary: The article gives the dual principle of linear programming together with an elementary and short proof of it. Linear programme is defined as usual; it is an ordered triple (p^*, A, q), where p^* is a linear functional from the space of baskets of goods R^n into real line R, matrix A represents a technology – linear operator from R^n into R^m, and vector $q \in R^m$ says about materials – resources we have in stock. We are seeking the maximum of the function $f(x) = px$ under conditions $Ax \leq q$ and $x \geq 0$. Let symbol $R(A, q)$ denote the set $\{x \in R^n: Ax \leq q, x \geq 0\}$ of all feasible solutions, while $v(p^*, A, q)$ designates the optimal value

$\sup\{px\colon x \in R(A, q)\}$ of the programme (p^*, A, q). If a programme $(p^*, -A, q)$ is primary, than the programme $(-q^*, A^*, -p)$ is dual to it, where the asterisk means conjugations or simply the transposition of a matrix.

Principle of duality. *If primary and dual programmes are consistent, the sets of feasible solutions $R(-A, q)$ and $R(A^*, -p)$ are not empty, then there is a pair of optimal solutions $(u, w) \in R^n \times (R^m)^*$ and moreover*

$$pu = v(p^*, -A, q) = -v(-q^*, A^*, -p) = qw,$$

so we have equilibrium $v(p^*, -A, q) + v(-q^*, A^*, -p) = 0$.