

EKONOMETRIA

26

Zastosowanie matematyki w ekonomii

Redaktor naukowy Janusz Łyko



**Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2009**

Spis treści

Wstęp	7
Beata Bal-Domańska , Ekonometryczna analiza sigma i beta konwergencji regionów Unii Europejskiej	9
Andrzej Bąk, Aneta Rybicka, Marcin Pelka , Modele efektów głównych i modele z interakcjami w <i>conjoint analysis</i> z zastosowaniem programu R	25
Katarzyna Budny , Kurtoza wektora losowego	44
Wiktor Ejsmont , Optymalna liczebność grupy studentów	55
Kamil Fijorek , Model regresji dla cechy przyjmującej wartości z przedziału $(0,1)$ – ujęcie bayesowskie	66
Paweł Hanczar , Wyznaczanie zapasu bezpieczeństwa w sieci logistycznej ...	77
Roman Huptas , Metody szacowania wewnątrzdziennej sezonowości w analizie danych finansowych pochodzących z pojedynczych transakcji	83
Aleksandra Iwanicka , Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w wieloklasowym modelu ryzyka.....	97
Agnieszka Lipieta , Stany równowagi na rynkach warunkowych	110
Krystyna Melich-Iwanek , Polski rynek pracy w świetle teorii histerezy.....	122
Rafał Piszczyk , Zastosowanie modelu logit w modelowaniu upadłości	133
Marcin Salamaga , Próba weryfikacji teorii parytetu siły nabywczej na przykładzie kursów wybranych walut	149
Antoni Smoluk , O zasadzie dualności w programowaniu liniowym	160
Małgorzata Szulc-Janek , Influence of recommendations announcements on stock prices of fuel market	170
Jacek Welc , Regresja liniowa w szacowaniu fundamentalnych współczynników Beta na przykładzie spółek giełdowych z sektorów: budownictwa, informatyki oraz spożywczego	180
Andrzej Wilkowski , O współczynniku korelacji	191
Mirosław Wójciak , Klasyfikacja nowych technologii energetycznych ze względu na determinanty ich rozwoju.....	199
Andrzej Wójcik , Wykorzystanie modeli wektorowo-autoregresyjnych do modelowania gospodarki Polski.....	209
Katarzyna Zeug-Żebro , Rekonstrukcja przestrzeni stanów na podstawie wielowymiarowych szeregów czasowych.....	219

Summaries

Beata Bal-Domańska , Econometric analysis of sigma and beta convergence in the European Union regions	24
Andrzej Bąk, Aneta Rybicka, Marcin Pelka , Main effects models and main and interactions models in <i>conjoint analysis</i> with application of R software.....	43
Katarzyna Budny , Kurtosis of a random vector	53
Wiktor Ejsmont , Optimal class size of students	65
Kamil Fijorek , Regression model for data restricted to the interval (0,1) – Bayesian approach.....	76
Paweł Hanczar , Safety stock level calculation in a supply chain network.....	82
Roman Huptas , Estimation methods of intraday seasonality in transaction financial data analysis	96
Aleksandra Iwanicka , An impact of some outside risk factors on the finite-time ruin probability for a multi-classes risk model.....	109
Agnieszka Lipieta , States of contingent market equilibrium	121
Krystyna Melich-Iwanek , The Polish labour market in light of the hysteresis theory	132
Rafał Piszczek , Logit model applications for bankrupcty modelling.....	148
Marcin Salamaga , Attempt to verify the purchasing power parity theory in the case of some foreign currencies.....	159
Antoni Smoluk , On dual principle of linear programming	168
Małgorzata Szulc-Janek , Analiza wpływu rekomendacji analityków na ceny akcji branży paliwowej (Analiza wpływu rekomendacji analityków na ceny akcji branży paliwowej).....	178
Jacek Welc , A linear regression in estimating fundamental betas in the case of the stock market companies from construction, it and food industries	190
Andrzej Wilkowski , About the coefficient of correlation	198
Mirosław Wójciak , Classification of new energy related technologies based on the determinants of their development	208
Andrzej Wójcik , Using vector-autoregressive models to modelling economy of Poland.....	218
Katarzyna Zeug-Żebro , State space reconstruction from multivariate time series	227

Andrzej Wójcik

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

WYKORZYSTANIE MODELI WEKTOROWO-AUTOREGRESYJNYCH DO MODELOWANIA GOSPODARKI POLSKI

Streszczenie: Modele wektorowo-autoregresyjne (VAR) wydają się dobrą alternatywą dla klasycznych modeli wielorównaniowych, zwłaszcza w prognozowaniu zjawisk makroekonomicznych.

Zbadano wzajemny wpływ wybranych zmiennych makroekonomicznych za pomocą modeli wektorowo-autoregresyjnych. Przedstawiono kolejne etapy budowy modelu VAR oraz jego weryfikacji, począwszy od ustalenia rzędu opóźnień autoregresyjnych dla wektora zmiennych na podstawie wybranego kryterium, przez estymację parametrów modelu, aż do analizy reszt poszczególnych równań modelu.

Kończącym etapem badania było postawienie prognoz wybranych zmiennych oraz porównanie ich z rzeczywistymi wartościami badanych zmiennych.

Artykuł jest pierwszym etapem budowy większego mikromodelu gospodarki Polski dla danych kwartalnych, zatem następnymi etapami budowy modelu będzie wprowadzanie kolejnych zmiennych.

Słowa kluczowe: model wektorowo-autoregresyjny VAR, modelowanie makroekonomiczne, prognozowanie.

1. Wstęp

W niniejszym opracowaniu autor proponuje zastosowanie modeli wektorowo-autoregresyjnych VAR do modelowania gospodarki Polski. Modele wektorowo-autoregresyjne są dobrą alternatywą dla tradycyjnych modeli wielorównaniowych.

Zmiennymi użytymi do analizy są płace realne brutto oraz inflacja. Dane pochodzą z okresu od I kwartału 2001 r. do III kwartału roku 2008. Zostały przedstawione w postaci indeksów zmian procentowych: dany kwartał bieżącego roku do tego samego kwartału roku poprzedniego minus 1. Przyjęto właśnie taką postać danych, aby zostały uwzględnione zmiany sezonowe płac oraz inflacji. Niestety, z powodu zbyt krótkiego szeregu czasowego nie uwzględniono w pracy cykli koniunkturalnych. Wszystkie dane pochodzą ze strony internetowej Banku Zachodniego WBK [Internet 1].

Autor pokazał kolejne etapy budowy oraz weryfikacji modeli wektorowo-autoregresyjnych, począwszy od zbadania stacjonarności zmiennych, przez estymację

parametrów modelu, weryfikację reszt, aż do obliczenia prognoz i ich zweryfikowania. Wszystkie obliczenia i wnioski będą wyciągane dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$.

2. Wstęp do modeli wektorowo-autoregresyjnych VAR

Podstawy modelowania wektorowo-autoregresyjnego zaproponował w 1980 r. C.A. Sims [1980] w pracy *Macroeconomics and Reality*. Zasady modelowania proponowane przez tego autora różnią się od zasad sformułowanych przez komisję Cowlesa. Wśród głównych różnic należy wyróżnić [Charemza, Deadman 1997]:

- brak podziału *a priori* na zmienne endogeniczne i egzogeniczne,
- brak warunków zerowych,
- brak teorii ekonomicznej, która stanowiłaby podstawę modelu.

Ponieważ w modelach wektorowo-autoregresyjnych każda zmienna jest zmienną objaśnianą (w modelach VAR jest tyle równań, ile zmiennych użyto do badania), a opóźnienia wszystkich zmiennych są zmiennymi objaśniającymi, dlatego nie ma podziału na zmienne endogeniczne i egzogeniczne.

Z pierwszej zasady wynika również, że nie ma potrzeby nakładania warunków zerowych, ponieważ tak naprawdę jest to model prosty i problem identyfikacji modelu nie występuje.

Jeżeli nie ma żadnych zmiennych endogenicznych wyróżnionych z równań modelu i jeśli żadnej zmiennej nie można nazwać egzogeniczną, to wszystko jest przyczyną wszystkiego i nie ma miejsca na nakładanie jakichkolwiek hipotez, poza bardzo ogólnymi, przyjmowanymi jako punkt początkowy [Kusideł 2000].

Klasyczna postać modelu wektorowo-autoregresyjnego zaproponowana przez C.A. Simsa przedstawia się następująco:

$$Z_t = \sum_{i=1}^k A_i Z_{t-i} + \varepsilon_t,$$

- gdzie: Z_t – wektor obserwacji bieżących wartości wszystkich n zmiennych modelu,
 A_i – macierz autoregresyjnych operatorów poszczególnych procesów, w których *a priori* nie zakłada się żadnych elementów zerowych,
 ε_t – wektor procesów resztkowych, w odniesieniu do którego przyjmuje się, że poszczególne składowe są jednocześnie skorelowane ze sobą, ale nie zawierają autokorelacji,
 k – rząd modelu VAR.

Kontynuatorzy prac C.A. Simsa zmodyfikowali postać klasyczną modelu VAR, dodając do niego składnik zawierający średnią procesu, deterministyczny trend oraz deterministyczną sezonowość.

Zmodyfikowany model wektorowo-autoregresyjny możemy zapisać w postaci:

$$Z_t = A_0 D_t + \sum_{i=1}^k A_i Z_{t-i} + \varepsilon_t,$$

gdzie: D_t – wektor deterministycznych składników równań.

3. Estymacja parametrów modelu wektorowo-autoregresyjnego VAR

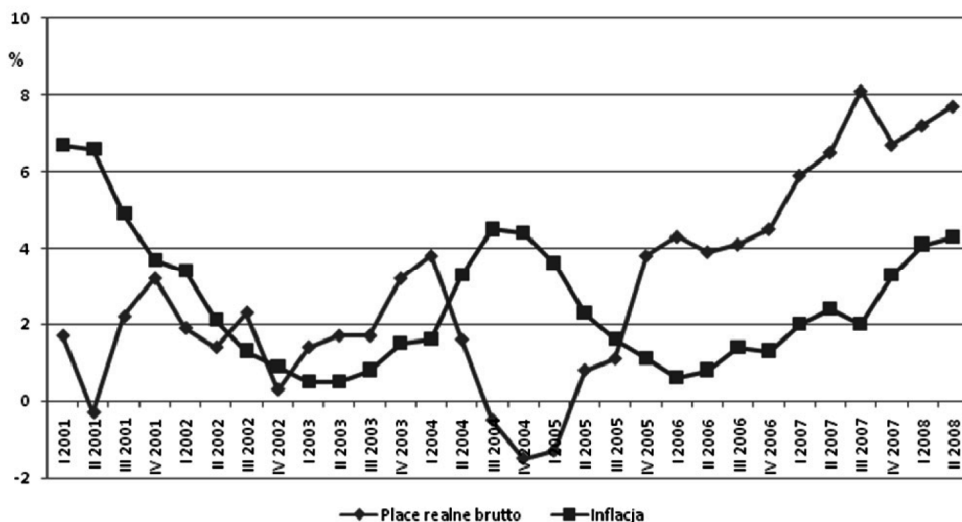
Istotnym warunkiem stawianym zmiennym użytym do modelowania wektorowo-autoregresyjnego jest ich stacjonarność, dlatego pierwszym krokiem do oszacowania parametrów modelu VAR jest zbadanie stacjonarności zmiennych. Jeżeli zmienne są stacjonarne (względnie trendostacjonarne), to należy wybrać rząd opóźnień zmiennych. Dopiero gdy znamy rząd opóźnień wektora zmiennych, możemy przystąpić do estymacji parametrów modelu. Parametry możemy oszacować klasyczną metodą najmniejszych kwadratów.

Kolejnym ważnym krokiem jest zbadanie reszt poszczególnych równań – reszty nie mogą wykazywać autokorelacji oraz muszą mieć rozkład normalny.

Jeżeli model przeszedł pozytywnie weryfikację, to możemy posłużyć się nim do wyznaczenia prognoz.

3.1. Badanie stacjonarności zmiennych

Na rysunku1 przedstawiono kształtowanie się badanych zmiennych w okresie od I kwartału 2001 r. do II kwartału 2008 r. Dane za III kwartał 2008 r. posłużyły do zweryfikowania obliczonych prognoz.

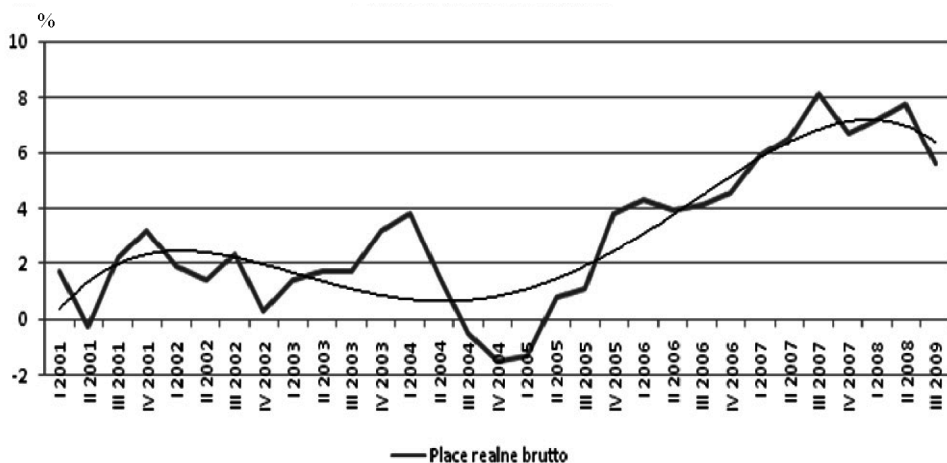


Rys. 1. Płace realne brutto oraz inflacja r/r (%)

Źródło: obliczenia własne.

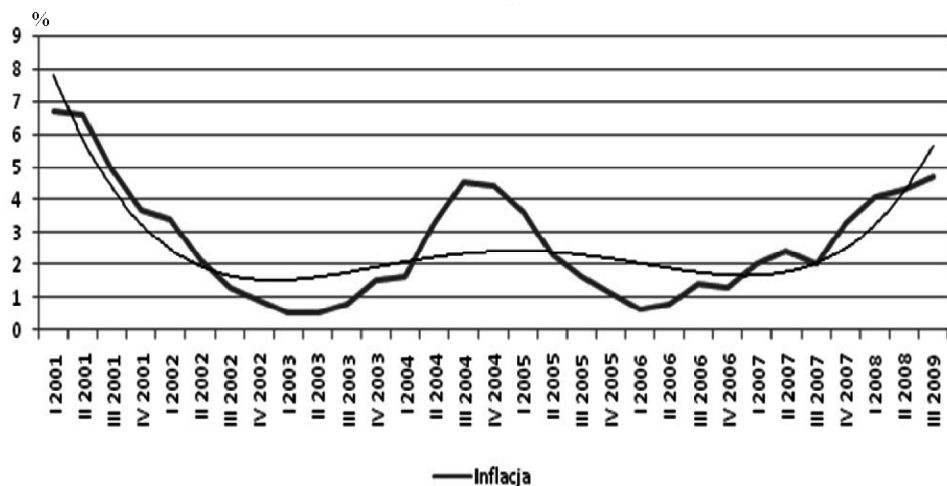
Do zbadania stacjonarności poszczególnych zmiennych posłużono się rozszerzonym testem Dickeya-Fullera, który szerzej jest opisany np. w pracy G.S. Mad-

dali *Ekonometria* [2006]. Zbadano stacjonarność zmiennych do drugiego rzędu włącznie. Okazało się, że zmienne są stacjonarne dopiero po uwzględnieniu trendu wielomianowego 4. stopnia.



Rys. 2. Plac realne brutto z uwzględnieniem trendu wielomianowego 4. stopnia

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 3. Inflacja z uwzględnieniem trendu wielomianowego 4. stopnia

Źródło: obliczenia własne.

Wykresy przedstawione na rys. 2 oraz 3 wskazują na to, że badane zmienne są trendostacjonarne. Do zbadania stacjonarności zmiennych użyto rozszerzonego

testu Dickeya-Fullera. Wartości zmiennej p mówiącej o możliwości przyjęcia bądź też odrzucenia hipotezy zerowej dla testu Dickeya-Fullera po uwzględnieniu trendów w badanych szeregach czasowych zamieszczono w tab. 1.

Tabela 1. Wartości p dla testu Dickeya-Fullera

Opóźnienia dla testu ADF	Wartość p	
	plące realne brutto	inflacja
0	0,0013	0,013
1	0,0005	0,003

Źródło: obliczenia własne.

Hipoteza zerowa w teście ADF wygląda następująco: H_0 : występuje pierwiastek jednostkowy. Ponieważ wszystkie wartości p są mniejsze od przyjętego poziomu istotności 0,05, możemy twierdzić, że badane zmienne są stacjonarne.

3.2. Wybór rzędu opóźnień zmiennych

Kolejnym krokiem jest wybór rzędu opóźnień badanych zmiennych na podstawie wybranego kryterium:

- kryterium informacyjnego Akaikiego AIC

$$AIC(k) = \ln |\tilde{\Sigma}_k| + \frac{2n^2k}{T},$$

- kryterium informacyjnego Schwarza BIC

$$BIC(k) = \ln |\tilde{\Sigma}_k| + \frac{n^2k \ln T}{T},$$

- kryterium informacyjnego Hannana-Quinna (HQC)

$$HQC(k) = \ln |\tilde{\Sigma}_k| + \frac{2n^2k \ln T}{T},$$

gdzie $|\tilde{\Sigma}_k|$ jest wyznacznikiem estymatora macierzy Σ dla stacjonarnego modelu VAR(k).

Do modelu wybieramy ten rząd opóźnień, dla którego wartość wybranego kryterium jest najmniejsza, ponieważ oznacza to, że utrata informacji jest najmniejsza.

Wyniki obliczeń zamieszczone w tab. 2 wskazują na to, że kryterium informacyjne Schwarza wskazuje na rząd opóźnień równy 1, pozostałe kryteria wskazują na ostatni rząd opóźnień. Gdy zwiększono maksymalny rząd opóźnień, wówczas kryteria AIC oraz HQC nadal wskazywały ostatni możliwy rząd opóźnień, a więc te dwa kryteria nie wskazują jednoznacznie na konkretny rząd opóźnień.

Tabela 2. Wybór rzędu opóźnień dla modelu VAR

Rząd opóźnień	AIC	BIC	HQC
1	4,747670	5,419585*	4,947465
2	4,653320	5,517211	4,910200
3	4,571081*	5,626948	4,885046*

Gwiazdka (*) wskazuje najlepszą (to jest minimalną) wartość dla odpowiednich kryteriów informacyjnych, AIC = kryterium Akaikego, BIC = kryterium Schwarza-Bayesiana i HQC = kryterium Hannana-Quinna

Źródło: obliczenia własne.

Kierując się wskazaniem kryterium Schwarza-Bayesiana, w kolejnym kroku oszacowano parametry modelu wektorowo-autoregresyjnego z opóźnieniami rzędu 1.

3.3. Estymacja parametrów modelu VAR(1)

Parametry modelu VAR(1) oszacowano klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. W tabelach 3 oraz 4 przedstawiono parametry modelu wraz ze statystykami opisowymi.

Tabela 3. Parametry równania dla zmiennej zależnej: Płace realne brutto

	Współczynnik	Błąd standardowy	Statystyka <i>t</i> -Studenta	Wartość <i>p</i>
Stała	4,1647	1,3575	3,068	0,0054 ***
Płace realne $t-1$	0,2351	0,1971	1,193	0,2451
Inflacja $t-1$	-0,4732	0,1858	-2,547	0,0180 **
t^2	-0,0532	0,0209	-2,537	0,0184**
t^3	0,0037	0,0015	2,426	0,0235**
t^4	-5,93E-05	2,85E-05	-2,075	0,0493**
Wsp. determinacji <i>R</i> -kwadrat = 0,854				
Statystyka <i>F</i> (5, 23) = 26,8368 (wartość <i>p</i> < 0,00001)				

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4. Parametry równania dla zmiennej zależnej: Inflacja

	Współczynnik	Błąd standardowy	Statystyka <i>t</i> -Studenta	Wartość <i>p</i>
Stała	-2,3180	0,6841	-3,388	0,0025***
Płace realne $t-1$	0,3835	0,0993	3,861	0,0008***
Inflacja $t-1$	1,0752	0,0936	11,48	5,31E-011***
t^2	0,0361	0,0106	3,415	0,0024***
t^3	-0,0025	0,0008	-3,241	0,0036 ***
t^4	4,24E-05	1,44E-05	2,947	0,0072***
Wsp. determinacji <i>R</i> -kwadrat = 0,895				
Statystyka <i>F</i> (5, 23) = 39,1763 (wartość <i>p</i> < 0,00001)				

Źródło: obliczenia własne.

Zmienna t w modelu oznacza czas; ponieważ czas nie wywierał istotnego wpływu na badane zmienne, został on usunięty z modelu, pozostał jedynie czas podniesiony do potęgi 2, 3 oraz 4. Gwiazdki w poszczególnych równaniach oznaczają istotność wpływu poszczególnych zmiennych objaśniających na zmienną objaśnianą – dwie gwiazdki oznaczają istotność na poziomie $\alpha = 0,05$, a trzy gwiazdki oznaczają istotność danego parametru na poziomie $\alpha = 0,01$.

Oba równania cechują się dobrym dopasowaniem do danych, na co wskazuje wysoka wartość współczynnika determinacji 85,4% oraz 89,5%. Statystyka F Fischera dowodzi istotnego wpływu wszystkich zmiennych objaśniających łącznie na zmienne objaśniane.

Z tabel 3 i 4 wynika, że płace realne brutto nie zależą od płac realnych brutto w poprzednim okresie, zależą jedynie od inflacji oraz od trendu. Z kolei inflacja oprócz tego, że zależy od trendu, zależy również od płac realnych brutto oraz od inflacji z poprzedniego okresu.

3.4. Weryfikacja reszt modelu

Następnym krokiem jest zweryfikowanie reszt poszczególnych równań modelu VAR(1). Reszty nie mogą wykazywać autokorelacji oraz muszą mieć rozkład normalny.

Badanie autokorelacji reszt przeprowadzono testem Ljunga-Boksa [Kufel 2004] dla każdego równania modelu VAR(1) oddzielnie. Sprawdzono autokorelację reszt rzędu 1-4, ponieważ dane są kwartalne.

Tabela 5. Badanie autokorelacji składnika losowego

Test na autokorelację rzędu	Równanie 1	Równanie 2
	statystyka testu Ljunga-Boksa z wartością p	
I	$Q' = 0,38$ $p = 0,54$	$Q' = 0,025$ $p = 0,88$
II	$Q' = 1,664$ $p = 0,44$	$Q' = 0,667$ $p = 0,717$
III	$Q' = 3,197$ $p = 0,37$	$Q' = 1,061$ $p = 0,79$
IV	$Q' = 8,729$ $p = 0,07$	$Q' = 5,098$ $p = 0,277$

Źródło: obliczenia własne.

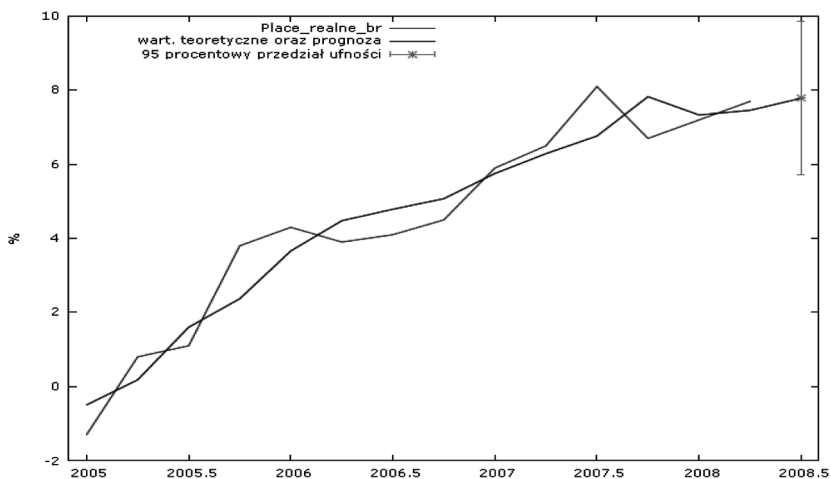
Obliczenia znajdujące się w tab. 5 wskazują na brak autokorelacji składnika losowego rzędu 1-4.

Statystyka testu Doornika-Hansena $\text{Chi-square}(4) = 1,44123$ z wartością $p = 0,837$ pozwala na przyjęcie hipotezy zerowej mówiącej o wielowymiarowym rozkładzie normalnym reszt.

Po zweryfikowaniu reszt modelu możemy przejść do obliczenia prognoz płac realnych brutto oraz inflacji na III kwartał 2008 r.

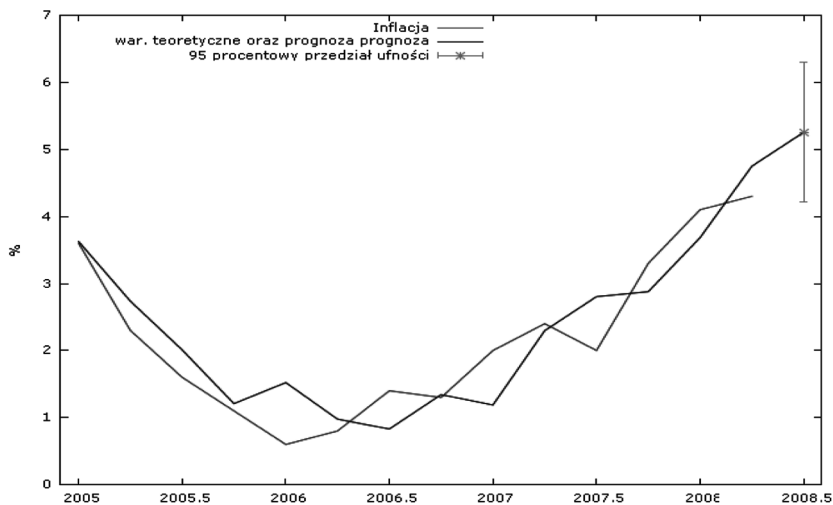
3.5. Prognozowanie na podstawie modelu VAR(1)

Ostatnim etapem budowy modelu jest wyznaczenie prognoz oraz zestawienie ich z rzeczywistymi obserwacjami płac realnych brutto oraz inflacją w III kwartale 2008 r.



Rys. 4. Prognoza płac realnych brutto na III kwartał 2008 r.

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 5. Prognoza inflacji na III kwartał 2008 r.

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 6. Prognoza płac realnych brutto oraz inflacji wraz z wartościami rzeczywistymi badanych zmiennych

	Prognoza	Błąd <i>ex ante</i>	95-procentowy przedział prognozy	Wartość rzeczywista
Płace realne brutto	7,8	1	5,7-9,9	5,6
Inflacja	5,3	0,5	4,2-6,3	4,7

Źródło: obliczenia własne.

Wykresy na rys. 4 oraz 5 przedstawiają wartości rzeczywiste, teoretyczne oraz prognozy badanych zmiennych. Jest również pokazany 95-procentowy przedział ufności prognozy.

Z tabeli 6 wynika, że prognoza płac realnych brutto była zbyt optymistyczna i nawet 95-procentowy przedział prognozy nie pokrył rzeczywistej wartości w III kwartale 2008 r. Również prognoza inflacji była zbyt wysoka, jednak w tym przypadku wartość rzeczywista inflacji wpadła do 95-procentowego przedziału prognozy. Błędy *ex ante* postawionych prognoz są stosunkowo duże, a mimo to wartość rzeczywista płac realnych brutto nie wpadła do 95-procentowego przedziału ufności prognozy.

Znacznie niższy wzrost płac realnych brutto, niż wynika to z prognozy, może być skutkiem kryzysu zarówno na rynkach światowych, jak i w Polsce.

4. Podsumowanie

Zaprezentowany w niniejszym opracowaniu model jest dobrą alternatywą dla tradycyjnych modeli wielorównaniowych. Zastosowanie modeli VAR do prognozowania podstawowych wskaźników makroekonomicznych wydaje się zasadne, ponieważ wszystkie wskaźniki makroekonomiczne są ze sobą w jakiś sposób powiązane. Główną wadą modeli VAR jest konieczność posiadania bardzo dużej liczby obserwacji, dlatego specyfikacja modelu VAR zalecana jest dla danych miesięcznych [Kufel 2004], a nie wszystkie dane są publikowane w cyklu miesięcznym. Niniejszy przykład jest próbą oszacowania modelu wektorowo-autoregresyjnego dla danych kwartalnych, a dokładnie dla wskaźników mierzonych w cyklu kwartału do kwartału.

Przedstawiony przykład pokazał, że można w prosty sposób prognozować płace realne brutto oraz inflację, jednak nie należy traktować tego modelu jako końcowego etapu badania głównych wskaźników makroekonomicznych Polski. Dalsze prace nad budową większego modelu gospodarki Polski będą przebiegać w trzech kierunkach:

- 1) rozbudowa modelu o indeksy kolejnych zmiennych,
- 2) przejście z indeksów na wartości zmiennych,
- 3) budowa modelu VAR dla danych miesięcznych i rezygnacja z umieszczenia w modelu zmiennych niemierzonych w cyklu miesięcznym (np. PKB).

Literatura

- Charemza W.W., Deadman D.F., *Nowa ekonometria*, PWE, Warszawa 1997.
- Kufel T., *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu GRETL*, PWN, Warszawa 2004.
- Kusideł E., *Modele wektorowo-autoregresyjne VAR. Metodologia i zastosowanie*, [w:] B. Suchecki, *Dane panelowe i modelowanie wielowymiarowe w badaniach ekonomicznych*, Wydawnictwo Absolwent, Łódź 2000.
- Maddala G.S., *Ekonometria*, PWN, Warszawa 2006.
- Sims C.A., *Macroeconomics and Reality*, „Econometrica” 1980 vol. 48.

Źródła internetowe

- [1] <http://skarb.bzwbk.pl>.

USING VECTOR-AUTOREGRESSIVE MODELS TO MODELLING ECONOMY OF POLAND

Summary: Vector-autoregressive models (VAR) seem to be a good alternative for classic multiequation models, especially in forecasting macroeconomic variables.

The author examines the mutual influence of chosen macroeconomic variables with the help of vector-autoregressive models. The article presents next stages of building VAR models and their verification as early as from the establishment of line autoregressive delays for vector of variables based on a chosen criterion through the estimation of parameters of a model to the analysis of the rest of individual equations of the model.

The final stage of the investigation was putting the prognoses forward of chosen variables as well as comparing them with real values of studied variables.

The article is the first stage of building the larger micromodel of economy of Poland for quarterly data so the next stages of model building will be introducing next variables.