

PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

242

Taksonomia 19.

Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania



Redaktorzy naukowi
Krzysztof Jajuga
Marek Walesiak



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2012

Recenzenci: Eugeniusz Gatnar, Elżbieta Gołata, Tadeusz Kufel, Józef Pocięcha,
Mirosław Szreder, Feliks Wysocki

Redaktor Wydawnictwa: Aleksandra Śliwka

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Tytuł sfinansowano ze środków Sekcji Klasyfikacji i Analizy Danych PTS
i Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl>
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon [http://kangur.uek.krakow.pl/
bazy_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2012

ISSN 1899-3192 (Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu)
ISSN 1505-9332 (Taksonomia)

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM
Nakład: 320 egz.

Spis treści

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Wstęp | 13 |
| Stanisława Bartosiewicz , Jeszcze raz o skutkach subiektywizmu w analizie wielowymiarowej | 17 |
| Andrzej Sokolowski , Q uniwersalna miara odległości | 22 |
| Eugeniusz Gatnar , Jakość danych w systemach statystycznych banków centralnych (na przykładzie NBP) | 31 |
| Marek Walesiak , Pomiar odległości obiektów opisanych zmiennymi mierzonymi na skali porządkowej – strategię postępowania..... | 39 |
| Krzysztof Jajuga, Marek Walesiak , XXV lat konferencji taksonomicznych – fakty i refleksje | 47 |
| Józef Pocięcha, Barbara Pawelek , Model SEM w analizie zagrożenia bankructwem przedsiębiorstw w świetle koniunktury gospodarczej – problemy teoretyczne i praktyczne | 50 |
| Paweł Lula , Uczące się systemy pozyskiwania informacji z dokumentów tekstowych | 58 |
| Ewa Roszkowska , Zastosowanie metody TOPSIS do wspomagania procesu negocjacji..... | 68 |
| Andrzej Młodak , Sąsiedztwo obszarów przestrzennych w ujęciu fizycznym oraz społeczno-ekonomicznym – podejście taksonomiczne | 76 |
| Andrzej Bąk , Modele kategorii nieuporządkowanych w badaniach preferencji | 86 |
| Jacek Kowalewski , Zintegrowany model optymalizacji badań statystycznych..... | 96 |
| Jan Paradysz, Karolina Paradysz , Obszary bezrobocia w Polsce – problem benchmarkowy..... | 106 |
| Tomasz Szubert , W co grać, aby jak najmniej przegrać? Próba klasyfikacji systemów gry w zakładach bukmacherskich..... | 116 |
| Izabela Szamrej-Baran , Klasyfikacja krajów UE ze względu na ubóstwo energetyczne | 126 |
| Sylwia Filas-Przybył, Tomasz Klimanek, Jacek Kowalewski , Analiza dojazdów do pracy za pomocą modelu grawitacji..... | 135 |
| Marta Dziechciarz-Duda, Anna Król, Klaudia Przybysz , Minimum egzystencji a czynniki warunkujące skłonność do korzystania z pomocy społecznej. Klasyfikacja gospodarstw domowych | 144 |
| Hanna Dudek , Subiektywne skale ekwiwalentności – analiza na podstawie danych o satysfakcji z osiągniętych dochodów | 153 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Joanicjusz Nazarko, Ewa Chodakowska, Marta Jaročka , Segmentacja szkół wyższych metodą analizy skupień <i>versus</i> konkurencja technologiczna ustalona metodą DEA – studium komparatywne..... | 163 |
| Ewa Chodakowska , Wybrane metody klasyfikacji w konstrukcji ratingu szkół..... | 173 |
| Bartosz Soliński , Sektor energetyki odnawialnej w krajach Unii Europejskiej – klasyfikacja w świetle strategii zarządzania zmianą..... | 182 |
| Krzysztof Szwarz , Klasyfikacja powiatów województwa wielkopolskiego ze względu na sytuację demograficzną..... | 192 |
| Elżbieta Gołata, Grażyna Dehnel , Rejestry administracyjne w analizie przedsiębiorczości..... | 202 |
| Katarzyna Chudy, Marek Sobolewski, Kinga Stępień , Wykorzystanie metod taksonomicznych w prognozowaniu wskaźników rentowności banków giełdowych w Polsce..... | 212 |
| Katarzyna Dębkowska , Modelowanie upadłości przedsiębiorstw przy wykorzystaniu metod dyskryminacji i regresji..... | 222 |
| Alina Bojan , Wykorzystanie metod wielowymiarowej analizy danych do identyfikacji zmiennych wpływających na atrakcyjność wybranych inwestycji..... | 231 |
| Justyna Brzezińska , Analiza logarytmiczno-liniowa w badaniu przyczyn umieralności w krajach UE..... | 240 |
| Aneta Rybicka, Bartłomiej Jefmański, Marcin Pelka , Analiza klas ukrytych w badaniach satysfakcji studentów..... | 247 |
| Bartłomiej Jefmański , Pomiar opinii respondentów z wykorzystaniem elementów teorii zbiorów rozmytych i środowiska R..... | 256 |
| Julita Stańczuk , Porównanie rezultatów wielostanowej klasyfikacji obiektów ekonomicznych z wykorzystaniem analizy dyskryminacyjnej oraz sieci neuronowych..... | 265 |
| Jerzy Krawczuk , Skuteczność metod klasyfikacji w prognozowaniu kierunku zmian indeksu giełdowego S&P500..... | 275 |
| Anna Czapkiewicz, Beata Basiura , Symulacyjne badanie wpływu zaburzeń na grupowanie szeregów czasowych na podstawie modelu Copula-GARCH..... | 283 |
| Radosław Pietrzyk , Ocena efektywności inwestycji funduszy inwestycyjnych z tytułu doboru papierów wartościowych i umiejętności wykorzystania trendów rynkowych..... | 291 |
| Aleksandra Witkowska, Marek Witkowski , Zastosowanie metody Panzara-Rosse’a do pomiaru poziomu konkurencji w sektorze banków spółdzielczych..... | 306 |
| Marcin Pelka , Podejście wielomodelowe z wykorzystaniem metody <i>boosting</i> w analizie danych symbolicznych..... | 315 |
| Justyna Wilk , Analiza porównawcza oprogramowania komputerowego w klasyfikacji danych symbolicznych..... | 323 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tomasz Bartłomowicz, Justyna Wilk , Zastosowanie metod analizy danych symbolicznych w przeszukiwaniu dziedzinowych baz danych..... | 333 |
| Kamila Migdał-Najman , Propozycja hybrydowej metody grupowania opartej na sieciach samouczących | 342 |
| Dorota Rozmus , Porównanie dokładności taksonomii spektralnej oraz zagregowanych algorytmów taksonomicznych opartych na idei metody <i>bagging</i> | 352 |
| Krzysztof Najman , Grupowanie dynamiczne z wykorzystaniem samouczących się sieci GNG | 361 |
| Małgorzata Misztal , Wpływ wybranych metod uzupełniania brakujących danych na wyniki klasyfikacji obiektów z wykorzystaniem drzew klasyfikacyjnych w przypadku zbiorów danych o niewielkiej liczebności – ocena symulacyjna | 370 |
| Mariusz Kubus , Zastosowanie wstępnego uwarunkowania zmiennej objaśnianej do selekcji zmiennych..... | 380 |
| Barbara Batóg, Jacek Batóg , Wykorzystanie analizy dyskryminacyjnej do identyfikacji czynników determinujących stopę zwrotu z inwestycji na rynku kapitałowym | 387 |
| Katarzyna Wójcik, Janusz Tuchowski , Analiza porównawcza miar podobieństwa tekstów opartych na macierzy częstości i tekstów opartych na wiedzy dziedzinowej | 396 |
| Iwona Staniec , Analiza czynnikowa w identyfikacji obszarów determinujących doskonalenie systemów zarządzania w polskich organizacjach | 406 |
| Marek Lubicz, Maciej Zięba, Adam Rzechonek, Konrad Pawełczyk, Jerzy Kołodziej, Jerzy Błaszczak , Analiza porównawcza wybranych technik eksploracji danych do klasyfikacji danych medycznych z brakującymi obserwacjami | 416 |
| Iwona Foryś , Wykorzystanie analizy log-liniowej do wyboru czynników determinujących atrakcyjność cenową mieszkań w obrocie wtórnym na przykładzie lokalnego rynku mieszkaniowego..... | 426 |
| Ewa Genge , Analiza skupień oparta na mieszankach uciętych rozkładów normalnych..... | 436 |
| Jerzy Korzeniewski , Ocena efektywności metody uśredniania zmiennych i metody Ichino selekcji zmiennych w analizie skupień | 444 |
| Andrzej Dudek , SMS – propozycja nowego algorytmu analizy skupień | 451 |
| Artur Mikulec , Metody oceny wyniku grupowania w analizie skupień..... | 460 |
| Małgorzata Machowska-Szewczyk , Algorytm klasyfikacji rozmytej dla obiektów opisanych za pomocą zmiennych symbolicznych oraz rozmytych | 469 |
| Artur Zaborski , Analiza PROFIT i jej wykorzystanie w badaniu preferencji | 479 |
| Karolina Bartos , Analiza skupień wybranych państw ze względu na strukturę wydatków konsumpcyjnych obywateli – zastosowanie sieci Kohonena | 488 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Barbara Batóg, Magdalena Mojsiewicz, Katarzyna Wawrzyniak , Klasyfikacja gospodarstw domowych ze względu na bodźce do zawierania umowy o ubezpieczenie z wykorzystaniem modeli zmiennych jakościowych . | 496 |
| Izabela Kurzawa , Zastosowanie modelu LA/AIDS do badania elastyczności cenowych popytu konsumpcyjnego w gospodarstwach domowych w relacji miasto–wieś | 505 |
| Aleksandra Łuczak, Feliks Wysocki , Metody porządkowania liniowego obiektów opisanych za pomocą cech metrycznych i porządkowych | 513 |
| Agnieszka Sompolska-Rzechuła , Porównanie klasycznej i pozycyjnej taksonomicznej analizy zróżnicowania jakości życia w województwie zachodniopomorskim | 523 |
| Joanna Banaś, Małgorzata Machowska-Szewczyk , Ocena intensywności wykorzystania skrzynek poczty elektronicznej za pomocą uporządkowanego modelu probitowego | 532 |
| Iwona Bąk , Segmentacja gospodarstw domowych emerytów i rencistów pod względem wydatków na rekreację i kulturę | 541 |
| Aneta Becker , Zastosowanie metody ANP do porządkowania województw Polski pod względem dynamiki wykorzystania ICT w latach 2008-2010 | 552 |
| Katarzyna Dębowska , Klasyfikacja sektorów ze względu na ich kondycję finansową przy użyciu metod wielowymiarowej analizy statystycznej | 562 |
| Anna Domagała , Propozycja metody doboru zmiennych do modeli DEA (procedura kombinowanego doboru w przód)..... | 571 |
| Henryk Gierszal, Karina Pawlina, Maria Urbańska , Analiza statystyczna w badaniach zapotrzebowania na usługi teleinformatyczne sieci łączności ruchomej | 580 |
| Hanna Gruchociak , Konstrukcja estymatora regresyjnego dla danych o strukturze dwupoziomowej..... | 590 |
| Tomasz Klimanek, Marcin Szymkowiak , Zastosowanie estymacji pośredniej uwzględniającej korelację przestrzenną w opisie niektórych charakterystyk rynku pracy | 601 |
| Jarosław Lira , Prognozowanie opłacalności produkcji żywca wieprzowego w Polsce | 610 |
| Christian Lis , Wykorzystanie metody klasyfikacji w ocenie konkurencyjności portów południowego Bałtyku | 619 |
| Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz , Wykorzystanie wielomianowego modelu logitowego do oceny szansy podjęcia pracy przez bezrobotnych . | 628 |
| Lucyna Przezbórska-Skobiej, Jarosław Lira , Przestrzeń agroturystyczna Polski i ocena jej atrakcyjności..... | 637 |
| Paweł Ulman , Model rozkładu wydatków a funkcje popytu..... | 646 |
| Maria Urbańska, Tadeusz Mizera, Henryk Gierszal , Zastosowanie metod analizy statystycznej w badaniach mięczaków | 655 |

Summaries

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Stanisława Bartosiewicz , The effects of subjectivism in multivariate analysis revisited..... | 21 |
| Andrzej Sokółowski , Q universal distance measure | 30 |
| Eugeniusz Gatnar , Data quality in central banks' statistical systems (NBP example) | 38 |
| Marek Walesiak , Distance measures for ordinal data – strategies of proceedings..... | 46 |
| Krzysztof Jajuga, Marek Walesiak , XXV years of taxonomic conferences – some facts and remarks..... | 49 |
| Józef Pocięcha, Barbara Pawelek , General SEM model in researching corporate bankruptcy and business cycles – theoretical and practical problems..... | 57 |
| Paweł Lula , Learning-based systems of information extraction from textual resources | 67 |
| Ewa Roszkowska , The application of the TOPSIS method to support the negotiation process | 75 |
| Andrzej Młodak , Neighborhood of spatial areas in the physical and socio-economic context – a taxonomic approach..... | 85 |
| Andrzej Bąk , Models for unordered categories in preference analysis..... | 95 |
| Kowalewski Jacek , An integrated model of optimizing statistical surveys | 105 |
| Jan Paradysz, Karolina Paradysz , Areas of unemployment in Poland – benchmark problem | 115 |
| Tomasz Szubert , How to play to lose the least? Classification of systems in sports bets | 125 |
| Izabela Szamrej-Baran , Classification of EU member states in view of fuel poverty | 134 |
| Sylvia Filas-Przybył, Tomasz Klimanek, Jacek Kowalewski , An attempt to use the gravity model in the analysis of commuters..... | 143 |
| Marta Dziechciarz-Duda, Anna Król, Klaudia Przybysz , Subsistence minimum versus factors influencing tendency to benefit from social care. Classification of households | 152 |
| Hanna Dudek , Subjective equivalence scales – analysis based on data about satisfaction with incomes..... | 162 |
| Joanicjusz Nazarko, Ewa Chodakowska, Marta Jarocka , Segmentation of universities using cluster analysis versus technological competitors determined by the DEA method – a comparative study | 172 |
| Ewa Chodakowska , Selected methods of classification in schools' rating..... | 181 |
| Bartosz Soliński , Renewable energy sector in the European Union – classification in the light of change management strategy | 191 |
| Krzysztof Szwarc , Classification of Wielkopolska voivodeship due to the demographic situation | 201 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Elżbieta Gołata, Grażyna Dehnel , Administrative registers in business analysis..... | 211 |
| Katarzyna Chudy, Marek Sobolewski, Kinga Stępień , Application of taxonomic methods in forecasting the profitability ratios of listed banks in Poland..... | 221 |
| Katarzyna Dębowska , Modeling bankruptcy of firms by using discrimination and regression methods..... | 230 |
| Alina Bojan , Identification of variables which influence attractiveness of given investments with the usage of multivariate analysis..... | 239 |
| Justyna Brzezińska , Log-linear analysis in the study of mortality in EU..... | 246 |
| Aneta Rybicka, Bartłomiej Jefmański, Marcin Pelka , Latent class analysis in student satisfaction surveys..... | 254 |
| Bartłomiej Jefmański , The respondent's opinions measurement in the R program with an application of fuzzy sets theory..... | 264 |
| Julita Stańczuk , A comparison of the results of multistate classification of economic objects using discriminant analysis and artificial neural networks..... | 274 |
| Jerzy Krawczuk , Effectiveness of classification methods in S&P500 stock index direction changes forecasting..... | 282 |
| Anna Czapkiewicz, Beata Basiura , The simulation study of the utility of the Copula-GARCH models for clustering financial time series..... | 290 |
| Radosław Pietrzyk , Timing and selectivity in mutual funds performance measurement..... | 305 |
| Aleksandra Witkowska, Marek Witkowski , Use of the Panzar-Rosse method to assess of the competition level in the cooperative banks sector..... | 314 |
| Marcin Pelka , Ensemble learning with the application of <i>boosting</i> in symbolic data analysis..... | 322 |
| Justyna Wilk , Comparative study of symbolic data classification software..... | 332 |
| Tomasz Bartłomowicz, Justyna Wilk , Application of symbolic data analysis methods for domain database searching..... | 341 |
| Kamila Migdał-Najman , A proposal of hybrid clustering method based on self-learning networks..... | 351 |
| Dorota Rozmus , Comparison of accuracy of spectral clustering and cluster ensembles stability based on bagging idea..... | 360 |
| Krzysztof Najman , A dynamic grouping based on self-learning GNG networks..... | 369 |
| Małgorzata Misztal , Influence of data imputation methods on the results of object classification using classification trees in the case of small data sets – simulation assessment..... | 379 |
| Mariusz Kubus , The application of pre-conditioning of explanatory variable for feature selection..... | 386 |
| Barbara Batóg, Jacek Batóg , Application of discriminant analysis to the identification of factors determining the rate of return on the capital market..... | 395 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Katarzyna Wójcik, Janusz Tuchowski , Comparative analysis of text documents similarity measures based on frequency matrix and based on domain knowledge..... | 405 |
| Iwona Staniec , Factor analysis in the identification of areas that determine the improvement of management systems in Polish organizations..... | 415 |
| Marek Lubicz, Maciej Zięba, Adam Rzechonek, Konrad Pawełczyk, Jerzy Kołodziej, Jerzy Błaszczyk , Comparative analysis of selected data mining approaches to the classification of medical data with missing values (covariates)..... | 425 |
| Iwona Foryś , The log-linear analysis using to select the factors determining the attractiveness of the price of flats on the secondary market on the example of local housing market..... | 435 |
| Ewa Genge , Trimming approach to the mixtures of normal distributions..... | 443 |
| Jerzy Korzeniewski , Efficiency assessment of Ichino method and mean value method of selecting variables in cluster analysis..... | 450 |
| Andrzej Dudek , SMS – proposal of new clustering algorithm..... | 459 |
| Artur Mikulec , Evaluation methods for the grouping result in cluster analysis..... | 468 |
| Małgorzata Machowska-Szewczyk , Fuzzy clustering algorithm for objects described by symbolic or fuzzy variables..... | 478 |
| Artur Zaborski , PROFIT analysis and its using in the research of preferences..... | 487 |
| Karolina Bartos , Cluster analysis of selected countries due to the structure of their citizens' consumer expenditures – the use of Kohonen networks..... | 495 |
| Barbara Batóg, Magdalena Mojsiewicz, Katarzyna Wawrzyniak , Classification of households according to the impulses of concluding the insurance contract by means of qualitative variable models..... | 504 |
| Izabela Kurzawa , The application of LA/AIDS model to examine price elasticities of demand of households in the urban-rural relationship..... | 512 |
| Aleksandra Luczak, Feliks Wysocki , Linear ordering methods of objects described by a set of metric and ordinal characteristics..... | 522 |
| Agnieszka Sompolska-Rzechuła , The comparison of the classical and positional taxonomic analysis of the quality of life differentiation in Zachodniopomorskie voivodeship..... | 531 |
| Joanna Banaś, Małgorzata Machowska-Szewczyk , Evaluation of intensity of mailboxes using with the ordered probit model..... | 540 |
| Iwona Bąk , Segmentation of pensioners and annuitants households in terms of expenditures on recreation and culture..... | 551 |
| Aneta Becker , Application of ANP method to organize Polish voivodships in terms of dynamics of the use of ICT in 2008-2010..... | 561 |
| Katarzyna Dębowska , The classification of sectors' financial situation using the methods of multivariate statistical analysis..... | 570 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Anna Domagała , Proposal of a new method for variable selection in DEA models (combined forward stepwise selection method)..... | 579 |
| Henryk Gierszal, Karina Pawlina, Maria Urbańska , Statistical analysis in demand research of ICT services in mobile networks..... | 589 |
| Hanna Gruchociak , Construction of regression estimator for two-level data | 600 |
| Tomasz Klimanek, Marcin Szymkowiak , Application of spatial models in indirect estimation of some labor market characteristics | 609 |
| Jarosław Lira , Forecasting of hog livestock production profitability in Poland | 618 |
| Christian Lis , The utilization of taxonomic methods in the appraisal of competitiveness of south Baltic ports | 627 |
| Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz , The application of the multinomial logit model in evaluating employment odds for the unemployed job seekers | 636 |
| Lucyna Przezbórska-Skobiej, Jarosław Lira , Agritourism space of Poland and its valuation..... | 645 |
| Paweł Ulman , Model of expenses distribution and demand functions..... | 654 |
| Maria Urbańska, Tadeusz Mizera, Henryk Gierszal , Methods of statistical analysis in research of molluscs | 663 |

Paweł Ulman

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

MODEL ROZKŁADU WYDATKÓW A FUNKCJE POPYTU

Streszczenie: W pracy podjęto problem wpływu zmian poziomu dochodów na kształtowanie się rozkładu wydatków na dany typ dóbr i usług, a nie jedynie na przeciętny ich poziom. Wykorzystując jako model rozkładu wydatków teoretyczny rozkład Burra typu III (Daguma) oraz uzmienniając jego parametry przez odpowiednie funkcje dochodów, uzyskano możliwość badania wpływu zmian dochodu na kształtowanie się rozkładu wydatków. Jako funkcje dochodów przyjęto funkcję liniową, potęgową oraz funkcję Törnquista. Odpowiednie modele wydatków oszacowano na podstawie danych z budżetów gospodarstw domowych z 2009 r. przy wykorzystaniu MNW.

Słowa kluczowe: rozkład wydatków, parametryzacja rozkładu, funkcje popytu.

1. Wstęp

Funkcje popytu w postaci krzywych Engla wiążą wydatki ogółem lub wydatki na dane dobro z dochodami konsumenta. Pozwalają więc na przeprowadzenie analizy zmian poziomu wydatków (zmian popytu) ze względu na zmianę poziomu dochodu.

W standardowym podejściu na podstawie modelowania regresyjnego można oszacować przeciętny poziom wydatków dla określonego poziomu dochodów gospodarstwa domowego. W kolejnym kroku można spróbować określić zmiany całego rozkładu wydatków na dany typ dóbr i usług pod wpływem zmian poziomu dochodów. Celem pracy jest więc powiązanie rozkładu wydatków z dochodami za pomocą znanych postaci funkcyjnych wykorzystywanych w analizie popytu konsumpcyjnego. Takie podejście umożliwia śledzenie zmian różnych charakterystyk rozkładu wydatków wraz ze zmianami poziomu dochodów.

Jako model rozkładu wydatków wzięto pod uwagę rozkład Burra typu III (Daguma). W wielu opracowaniach¹ wskazano na użyteczność tego rozkładu teoretycz-

¹ Na temat teoretycznych rozkładów dochodów szeroko można znaleźć w [Kleiber, Kotz 2003]. Według McDonald i Xu [1995], empiryczne rozkłady dochodów najlepiej aproksymuje uogólniony rozkład Beta drugiego rodzaju, natomiast rozkład Burra typu III okazał się niewiele gorszy w tym względzie. Do podobnych wniosków doszli Bandourian, McDonald i Turley [2002, s. 9], dopasowu-

nego dla modelowania przede wszystkim rozkładów dochodów, ale także rozkładów wydatków. W podstawowej wersji rozkład ten ma trzy parametry, od wartości których zależy jego kształt i położenie. Jeśli jeden lub kilka z tych parametrów uczyni się funkcjami dochodów, to uzyskuje się możliwość badania wpływu zmian dochodu na kształtowanie się rozkładu wydatków. Jednak takie ujęcie związku wydatków (popytu) i dochodów nie pozwala na interpretację parametrów w sposób, jaki ma miejsce w przypadku „tradycyjnych” krzywych Engla. Jako funkcje dochodów rozważono funkcję liniową, potęgową oraz funkcję Törnquista.

Odpowiednie modele wydatków oszacowano na podstawie indywidualnych danych z budżetów gospodarstw domowych z 2009 r. przy wykorzystaniu metody największej wiarygodności (MNW).

2. Teoretyczny rozkład wydatków a dochody

Postać funkcji gęstości teoretycznego rozkładu Burra typu III (Daguma) jest następująca:

$$f(y) = \frac{c \cdot b \cdot \exp(-a) \cdot y^{-(b+1)}}{[1 + \exp(-a) \cdot y^{-b}]^{c+1}}, \quad (1)$$

gdzie: a , b , c są parametrami rozkładu ($b > 0$, $c > 0$), natomiast y oznacza wydatki ($y > 0$).

Dystrybuantę możemy zapisać wzorem:

$$F(y) = [1 + \exp(-a) \cdot y^{-b}]^c. \quad (2)$$

Parametry a , b , c estymuje się najczęściej za pomocą MNW, maksymalizując w sposób numeryczny funkcję wiarygodności. Po stronie zalet stosowania teoretycznych modeli dochodów czy wydatków należy zapisać także łatwe wyznaczanie wartości charakterystyk rozkładu wyłącznie na podstawie oszacowanych parametrów. Zazwyczaj oceny te nieco różnią się od wartości uzyskiwanych na podstawie rozkładu empirycznego, jednak różnice te nie powinny być znaczące.

W rozkładzie Burra III moment zwykły rzędu r oblicza się według wzoru²:

$$m_r = B\left(1 - \frac{r}{b}, c + \frac{r}{b}\right) \cdot \exp\left(-\frac{a}{b}\right) \cdot r \cdot c, \quad (3)$$

gdzie: $B(p, q)$ jest funkcją Beta Eulera.

jąc różne modele rozkładu dochodów dla 23 państw z kilku okresów. W Polsce rozkłady Burra do opisu rozkładów empirycznych płac, dochodów i wydatków stosował Kot [1995; 1999; 2000], Ulman [2011] i Kośny [2001].

² Wszystkie wzory zamieszczono na podstawie pracy [Kot 2000, s. 122-123].

Za pomocą wzoru (3) wyznaczana jest wartość średnia wydatków jako moment zwykły rzędu $r = 1$ oraz wariancja przy wykorzystaniu formuły:

$$s^2 = m_2 - (m_1^2). \quad (4)$$

Wzór (4) pozwala na wyznaczenie wartości odchylenia standardowego oraz współczynnika zmienności według standardowych formuł.

Kwantyl rzędu p ($0 < p < 1$) dany jest wzorem:

$$q_p = \left[p^{-1/c} - 1 \right]^{-1/b} \cdot \exp\left(-a/b\right). \quad (5)$$

Podstawiając za p wartość 0,5, uzyskuje się formułę na medianę.

Wartość najczęstszą, czyli modalną, wyznacza się następująco:

$$Mo = \left[\frac{b+1}{c \cdot b - 1} \right]^{-1/b} \cdot \exp\left(-a/b\right). \quad (6)$$

Spośród miar zmienności (nierówności) – oprócz wyżej wspomnianego współczynnika zmienności – wykorzystany zostanie współczynnik Giniego, którego wzór przedstawia się następująco:

$$G = \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma\left(2c + \frac{1}{b}\right)}{\Gamma(2c) \cdot \Gamma\left(c + \frac{1}{b}\right)} - 1, \quad (7)$$

gdzie $\Gamma(p)$ jest funkcją Gamma Eulera.

Powiązanie rozkładu wydatków z dochodami następuje przez uzmiennienie przynajmniej jednego z jego parametrów. W tym celu można wybrać odpowiednią funkcję, przez którą wprowadzony zostanie poziom dochodów w rozkład wydatków. W niniejszej pracy zdecydowano się rozważyć trzy podstawowe funkcje popytu: liniową ($w = b_0 + b_1 x$), potęgową ($w = b_0 x^{b_1}$) oraz Törnquista dla dóbr podstawowych ($w = \frac{b_0 x}{x + b_1}$). Jako parametr, który uzmienniono za pomocą wspomnianych

funkcji popytu, przyjęto parametr b funkcji (1) lub (2). Odpowiada on za kształt rozkładu, przez co ma wpływ na kształtowanie się wszystkich charakterystyk wykorzystywanego rozkładu teoretycznego.

W przypadku potęgowej funkcji popytu funkcja gęstości warunkowego rozkładu Burra III prezentuje się następująco:

$$f(y|x) = \frac{c \cdot (b_0 x^{b_1}) \cdot \exp(-a) \cdot y^{-(b_0 x^{b_1} + 1)}}{\left[1 + \exp(-a) \cdot y^{-b_0 x^{b_1}} \right]^{c+1}}, \quad (8)$$

gdzie: y to wydatki, x dochody oraz a , b_0 , b_1 , c parametry modelu. W miejsce parametru b funkcji (1) wstawiono postać potęgowej funkcji popytu.

W analogiczny sposób można zapisać funkcje gęstości dla liniowej funkcji popytu oraz funkcji Törnquista.

3. Wyniki estymacji teoretycznych rozkładów wydatków

W celu estymacji parametrów modelu rozkładu wydatków wykorzystano indywidualne dane z badania budżetów gospodarstw domowych z 2009 r. zebrane przez GUS. Jest to ciągle badanie reprezentacyjne przeprowadzone metodą rotacji miesięcznej gospodarstw domowych³. Taki charakter badania może prowadzić do tego, że w ramach badanego miesiąca w gospodarstwie domowym zaobserwowano nadzwyczajne wydatki lub nadzwyczajne dochody. Wpływa więc on na zróżnicowanie dochodów i wydatków, jak również powoduje nierzadko sytuację, że w okresie badanego miesiąca poziom wydatków w gospodarstwie domowym przewyższa uzyskane dochody. Najczęściej sytuacja taka nie zaistniałaby, gdyby obserwowano budżet gospodarstwa domowego w dłuższym czasie, np. w ciągu roku.

W tabeli 1 zestawiono wyniki estymacji MNW modelu rozkładu wydatków ogółem na gospodarstwo oraz wydatków ogółem na osobę. Wszystkie parametry modeli okazały się istotne.

Zarówno dla rozkładu wydatków na gospodarstwo, jak i rozkładu wydatków na osobę wartość średnia jest wyraźnie wyższa od wartości środkowej, a tym bardziej od wartości najczęstszej, co skutkuje oczekiwaną asymetrią prawostronną rozkładu. Poziom zróżnicowania wydatków mierzony współczynnikiem zmienności oraz współczynnikiem Giniego jest dość wysoki⁴.

Tabela 1. Wyniki estymacji rozkładu Burra III wydatków ogółem na gospodarstwo i wydatków ogółem na osobę

| Parametr | Model dla wydatków na gospodarstwo | | Model dla wydatków na osobę | |
|----------|------------------------------------|----------------|-----------------------------|----------------|
| | ocena | <i>p-value</i> | ocena | <i>p-value</i> |
| <i>a</i> | -21,0240 | 0,000 | -15,9059 | 0,000 |
| <i>b</i> | 2,73988 | 0,000 | 2,50586 | 0,000 |
| <i>c</i> | 1,04275 | 0,000 | 1,71106 | 0,000 |

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych indywidualnych z badania budżetów gospodarstw domowych z 2009 r.

³ Rotacyjne badanie gospodarstw domowych polega na comiesięcznej zmianie gospodarstw podanych badaniu, przez co budżet gospodarstwa (dochody i wydatki) obserwowany jest jedynie przez jeden miesiąc.

⁴ Współczynnik Giniego przyjmuje wartości z przedziału [0; 1], gdzie 0 oznacza brak nierówności, a 1 skrajnie nierówności. Jednak w praktyce dla państw europejskich obserwuje się wartości nieprzekraczające 0,4 (zob. wyniki EU-SILC na stronie http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/income_social_inclusion_living_conditions/data/database; dostęp luty 2012).

Tabela 2. Charakterystyki rozkładu wydatków ogółem na gospodarstwo i wydatków ogółem na osobę

| Kategoria wydatków | Średnia | Mediana | Modalna | Współczynnik zmienności | Współczynnik Giniego | Wskaźnik asymetrii |
|-------------------------|---------|---------|---------|-------------------------|----------------------|--------------------|
| Wydatki na gospodarstwo | 2759,81 | 2195,96 | 1665,39 | 95,89 | 0,362 | 0,414 |
| Wydatki na osobę | 981,96 | 754,43 | 557,40 | 112,47 | 0,366 | 0,384 |

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych indywidualnych z badania budżetów gospodarstw domowych z 2009 r.

Początkowo oszacowano modele warunkowych rozkładów wydatków i wydatków na osobę przy wykorzystaniu wszystkich trzech wcześniej określonych funkcji popytu. W każdym przypadku postać rozkładu sparametryzowana funkcją potęgową okazywała się według kryterium Akaike'a najlepiej dopasowana do empirycznych danych. Z tego powodu w dalszych rozważaniach poprzestano jedynie na wykorzystaniu potęgowej funkcji popytu. W tabeli 3 pokazano oceny parametrów warunkowego rozkładu Burra III dla wydatków na gospodarstwo i wydatków na osobę przy parametryzacji funkcją potęgową.

Tabela 3. Wyniki estymacji warunkowego rozkładu Burra III dla wydatków ogółem na gospodarstwo i wydatków ogółem na osobę – parametryzacja funkcją potęgową

| Parametr | Model dla wydatków na gospodarstwo | | Model dla wydatków na osobę | |
|-----------------------|------------------------------------|----------------|-----------------------------|----------------|
| | ocena | <i>p-value</i> | ocena | <i>p-value</i> |
| <i>a</i> | -32,7329 | 0,000 | -28,0472 | 0,000 |
| <i>b</i> ₀ | 9,67480 | 0,000 | 9,37613 | 0,000 |
| <i>b</i> ₁ | -0,102744 | 0,000 | -0,114821 | 0,000 |
| <i>c</i> | 1,30874 | 0,000 | 1,27582 | 0,000 |

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych indywidualnych z badania budżetów gospodarstw domowych z 2009 r.

Tabela 4. Charakterystyki rozkładu warunkowego wydatków ogółem na gospodarstwo i wydatków ogółem na osobę – parametryzacja funkcją potęgową

| Kategoria wydatków | Przy dochodzie | Średnia | Mediana | Modalna | Współczynnik zmienności | Współczynnik Giniego | Wskaźnik asymetrii |
|-------------------------|----------------|---------|---------|---------|-------------------------|----------------------|--------------------|
| Wydatki na gospodarstwo | 1000 | 1131,69 | 1048,65 | 952,83 | 39,82 | 0,197 | 0,397 |
| | 3000 | 2645,93 | 2407,53 | 2140,55 | 45,96 | 0,221 | 0,416 |
| | 5000 | 4065,73 | 3662,62 | 3218,22 | 49,28 | 0,233 | 0,423 |
| Wydatki na osobę | 500/osobę | 522,37 | 481,60 | 435,08 | 41,79 | 0,205 | 0,400 |
| | 1000/osobę | 883,11 | 803,39 | 714,30 | 46,27 | 0,223 | 0,413 |
| | 1500/osobę | 1225,49 | 1105,00 | 972,19 | 49,21 | 0,234 | 0,420 |

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych indywidualnych z badania budżetów gospodarstw domowych z 2009 r.

Wszystkie parametry są statystycznie istotne. Na ich podstawie i przy wykorzystaniu wzorów (3)-(7) można wyznaczyć wartości charakterystyk rozkładu warunkowego. W tabeli 4 pokazano kształtowanie się tych wartości dla wydatków ogółem na gospodarstwo i wydatków ogółem na osobę przy założonych trzech poziomach odpowiednio: dochodu na gospodarstwo i dochodu na osobę.

Zauważmy, że początkowo średnie wydatków są większe niż założony poziom dochodów. Sytuacja ta może być skutkiem wspomnianego rotacyjnego badania budżetów gospodarstw domowych. Nierzadko zdarza się, że w badanym miesiącu gospodarstwo więcej wydało, niż uzyskało dochodów. Te zwiększone wydatki są finansowane z oszczędności lub z kredytów i pożyczek. Można przypuszczać, że wydłużenie okresu obserwacji budżetów gospodarstw domowych zdecydowanie zmniejszyłoby częstość pojawiania się wyższych wydatków niż dochodów w gospodarstwie domowym. Byłoby to zgodne z teorią dochodu permanentnego i przejściowego Friedmana. Według tej teorii, poziom konsumpcji wynika z poziomu dochodu permanentnego (doświadczanego w dłuższym czasie i oczekiwanego w przyszłości), a nie zależy od poziomu dochodu przejściowego. Badanie budżetu gospodarstwa domowego przez jeden miesiąc sprzyja fluktuacjom dochodu wywoływanym dochodem przejściowym oraz przyczynia się do obserwowania zwiększonych wydatków w danym miesiącu, które są ponoszone ze świadomością poziomu dochodu permanentnego pozwalające go sfinansować te wydatki w dłuższej perspektywie niż jeden miesiąc.

Wraz ze wzrostem dochodów w gospodarstwie domowym rośnie poziom wszystkich charakterystyk rozkładu wydatków. Spośród miar przeciętnych stosunkowo największe przyrosty można zauważyć w przypadku średniej, natomiast najmniejsze dla modalnej, co skutkuje wzrostem asymetrii oraz może być przyczyną wzrostu nierówności w rozkładzie wydatków. Uzyskiwanie coraz wyższych dochodów niekoniecznie wiąże się z coraz wyższymi wydatkami.

Tabela 5. Porównanie przeciętnych wartości wydatków na gospodarstwo i wydatków na osobę uzyskanych na podstawie rozkładu Burra III oraz potęgowego modelu regresji

| Kategoria wydatków | Przy dochodzie | Średnia – Burr III | Przeciętna z modelu regresji |
|-------------------------|----------------|--------------------|------------------------------|
| Wydatki na gospodarstwo | 1000 | 1131,69 | 1098,60 |
| | 3000 | 2645,93 | 2465,00 |
| | 5000 | 4065,73 | 3589,32 |
| Wydatki na osobę | 500/osobę | 522,37 | 506,20 |
| | 1000/osobę | 883,11 | 824,60 |
| | 1500/osobę | 1225,49 | 1097,01 |

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych indywidualnych z badania budżetów gospodarstw domowych z 2009 r.

W tabeli 5 porównano średnie wartości wydatków uzyskane na podstawie rozkładu Burra III oraz określone za pomocą potęgowego modelu regresji dla wydatków i wydatków na osobę. Zmiany średnich wartości wydatków wynikające ze zmian

poziomu dochodów są analogiczne dla obydwu metod, jednak wartości średnich w rozkładzie Burra są wyższe niż uzyskane na podstawie modelu regresji.

W tabeli 6 umieszczono wyniki estymacji warunkowego rozkładu Burra dla wybranych grup wydatków na osobę. Podobnie jak wcześniej parametry w każdym przypadku okazały się istotnie różne od zera. Na ich podstawie wyznaczono wartości charakterystyk rozkładu wydatków na dane dobra i usługi, które zestawiono w tab. 7.

Tabela 6. Wyniki estymacji warunkowego rozkładu Burra III dla wybranych grup wydatków na osobę w 2009 r. – parametryzacja funkcją potęgową

| Parametr | Model dla wydatków na żywność | | Model dla wydatków na utrzymanie mieszkania | | Model dla wydatków na transport | | Model dla wydatków na łączność | |
|-----------------------|-------------------------------|----------------|---------------------------------------------|----------------|---------------------------------|----------------|--------------------------------|----------------|
| | ocena | <i>p-value</i> | ocena | <i>p-value</i> | ocena | <i>p-value</i> | ocena | <i>p-value</i> |
| <i>a</i> | -25,6255 | 0,000 | -14,4473 | 0,000 | -10,2538 | 0,000 | -12,5614 | 0,000 |
| <i>b</i> ₀ | 7,56117 | 0,000 | 6,42462 | 0,000 | 6,85311 | 0,000 | 10,1347 | 0,000 |
| <i>b</i> ₁ | -0,068143 | 0,000 | -0,122503 | 0,000 | -0,159952 | 0,000 | -0,162377 | 0,000 |
| <i>c</i> | 0,943204 | 0,000 | 0,580334 | 0,000 | 0,511393 | 0,000 | 0,635264 | 0,000 |

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych indywidualnych z badania budżetów gospodarstw domowych z 2009 r.

Tabela 7. Charakterystyki rozkładu warunkowego wybranych grup wydatków na osobę w 2009 r. – parametryzacja funkcją potęgową

| Grupa wydatków | Przy dochodzie na osobę | Średnia | Mediana | Modalna | Współczynnik zmienności | Współczynnik Giniego | Asymetria |
|----------------------------------|-------------------------|---------|---------|---------|-------------------------|----------------------|-----------|
| Wydatki na żywność | 500 | 186,11 | 173,98 | 160,42 | 40,54 | 0,205 | 0,340 |
| | 1000 | 240,52 | 223,29 | 204,16 | 42,91 | 0,215 | 0,352 |
| | 1500 | 281,09 | 259,82 | 236,29 | 44,37 | 0,221 | 0,359 |
| Wydatki na utrzymanie mieszkania | 500 | 114,98 | 93,39 | 70,31 | 90,47 | 0,384 | 0,429 |
| | 1000 | 179,64 | 139,61 | 97,09 | 105,88 | 0,415 | 0,434 |
| | 1500 | 238,02 | 179,54 | 117,88 | 117,82 | 0,434 | 0,428 |
| Wydatki na transport | 500 | 51,64 | 37,57 | 21,46 | 131,52 | 0,463 | 0,444 |
| | 1000 | 86,50 | 57,47 | 24,29 | 188,47 | 0,510 | 0,382 |
| | 1500 | 121,03 | 75,40 | 23,13 | 276,74 | 0,539 | 0,292 |
| Wydatki na łączność | 500 | 28,28 | 24,91 | 21,37 | 64,67 | 0,308 | 0,378 |
| | 1000 | 43,05 | 36,54 | 29,70 | 75,90 | 0,342 | 0,408 |
| | 1500 | 56,46 | 46,68 | 36,46 | 84,19 | 0,364 | 0,421 |

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych indywidualnych z badania budżetów gospodarstw domowych z 2009 r.

Wraz ze wzrostem dochodów na osobę rosną również wydatki na dobra i usługi z każdej grupy, na co wskazują przede wszystkim średnia i mediana. W przypadku wydatków na transport ich wartość najczęstsza jest mniej więcej jednakowa przy różnych poziomach dochodów. Względna stałość poziomu dominujących wydatków przy znacznym wzroście średniej odzwierciedla się w znacznym wzroście zróżnicowania tych wydatków. Tak wysokie zróżnicowanie jest również obserwowane na

podstawie analizy rozkładu empirycznego i występuje dla tych grup wydatków na towary i usługi, w przypadku których ich zakup w dłuższym okresie często jest jednorazowy. W ramach wydatków na transport istnieją takie pozycje wydatków, które ponosi się w większości przypadków stale (z miesiąca na miesiąc) na ustalonym poziomie (np. wydatki na bilety komunikacji miejskiej, paliwo itp.). Natomiast są tutaj również przypadki dużych wydatków związanych np. z podróżami samolotem czy zakupem różnego rodzaju pojazdów, które ponosi się rzadko i które dotyczą raczej bogatszych gospodarstw. Obserwując budżety gospodarstw domowych w ciągu jednego miesiąca, jesteśmy narażeni na odnotowanie w niektórych gospodarstwach relatywnie wysokich wydatków w odniesieniu do tych typowych, co powoduje znaczny wzrost zróżnicowania (nierówności) tych wydatków.

4. Wnioski

Uzależnienie rozkładu wydatków od poziomu dochodów przez sparometryzowanie tego rozkładu dało możliwości analizy zmian w rozkładzie wydatków wynikających ze zmian poziomu dochodu, przy czym najlepsze dopasowanie modelu rozkładu warunkowego uzyskano przy wykorzystaniu potęgowej funkcji dochodów. Uzyskane wyniki dla wydatków ogółem na gospodarstwo i wydatków ogółem na osobę pokazały stosunkowo wolniejszy przyrost wartości modalnej niż średniej oraz rosnące nierówności w rozkładzie wydatków wraz ze wzrostem dochodów. Porównanie średnich wartości wydatków w rozkładzie warunkowym oraz wartości przeciętnych uzyskanych z modelu regresji (dla funkcji popytu) pokazuje ich dużą zgodność, chociaż średnie z rozkładu przyjmują nieco większe wartości.

Zastosowanie prezentowanej metody analizy rozkładu wydatków ze względu na poziom dochodów sprawiło pewne kłopoty w przypadku niektórych grup wydatków. Problemy te wynikają z rotacyjnego charakteru badania budżetów gospodarstw domowych, przez co w przypadku niektórych grup wydatków (np. wydatków na transport, na odzież i obuwie, restauracje i hotele) obserwujemy bardzo dużą ich różnorodność, często przypadkową, co z kolei negatywnie wpływa na wykorzystanie modeli rozkładu wydatków. Problem ten można rozwiązać przez uzyskanie danych o wydatkach z okresu dłuższego niż jeden miesiąc.

Literatura

- Bandourian R., McDonald J.B., Turley R.S., *A Comparison of Parametric Models of Income Distribution Across Countries and Over Time*, Luxemburg Income Study Working Paper no 305, www.lisproject.org/publications/liswps/305.pdf, 2002 (dostęp październik 2011 r.).
- Kleiber Ch., Kotz S., *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, John Wiley, 2003.
- Kośny M., *Probabilistyczne modele rozkładu dochodów. Weryfikacja empiryczna*, „Wiadomości Statystyczne” 2001, nr 7.

- Kot S.M., *Modelowanie poziomu dobrobytu. Teoria i zastosowanie*, Ossolineum, Wrocław-Warszawa-Kraków 1995.
- Kot S.M., *Empiryczna weryfikacja postaci rozkładu płac w Polsce*, [w:] *Analiza ekonometryczna kształtowania się płac w Polsce w okresie transformacji*, red. S.M. Kot, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków 1999.
- Kot S.M., *Ekonometryczne modele dobrobytu*, PWN, Warszawa-Kraków 2000.
- McDonald J.B., Xu Y.J., *A generalization of beta distribution with application*, „Journal of Econometrics” 1995, vol. 66.
- Ulman P., *Sytuacja ekonomiczna osób niepełnosprawnych i ich gospodarstw domowych w Polsce*, Zeszyty Naukowe, Seria specjalna: Monografie nr 199, Wydawnictwo UE, Kraków 2011.

MODEL OF EXPENSES DISTRIBUTION AND DEMAND FUNCTIONS

Summary: The issue of the relationship between the level of income and the shape of expenses distribution is discussed in the paper. The theoretical Burr III (Dagum) distribution was used as a model of the empirical distribution of expenses. The parametrisation of the distribution by adequate demand functions allowed to analyze the influence changes in the level of income on the shape of expenses distribution. The linear, exponential and Törnquist function were used as a demand function. All results were based on the data from Polish households budget survey from 2009.

Keywords: expenses distribution, parametrisation of distribution, demand functions.