

# **ACTA SCIENTIARUM POLONORUM**

Czasopismo naukowe założone w 2001 roku przez polskie uczelnie rolnicze

## **Geodesia et Descriptio Terrarum**

Geodezja i Kartografia

7(1) 2008



Bydgoszcz Kraków Lublin Olsztyn  
Poznań Siedlce Szczecin Warszawa Wrocław

**Rada Programowa *Acta Scientiarum Polonorum***

Kazimierz Banasik (Warszawa), Janusz Falkowski (Olsztyn),  
Florian Gambuś (Kraków), Franciszek Kluza (Lublin), Edward Niedźwiecki (Szczecin),  
Janusz Prusiński (Bydgoszcz), Jerzy Sobota (Wrocław) – przewodniczący,  
Stanisław Socha (Siedlce), Waldemar Uchman (Poznań)

**Rada Naukowa serii *Geodesia et Descriptio Terrarum***

Bernard Kontny (Wrocław) – przewodniczący, Hieronim Olenderek (Warszawa),  
Alojzy Wasilewski (Olsztyn), Josef Weigel (Brno), Mirosław Żak (Kraków)

Korekta:  
Janina Szydłowska  
Elżbieta Winiarska-Grabosz

Łamanie  
Halina Sebzda

Projekt okładki  
Daniel Morzyński

ISSN 1644–0668

*Wydanie publikacji dofinansowane ze środków Uniwersytetu Przyrodniczego  
we Wrocławiu*

© Copyright by Wydawnictwo Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu,  
Wrocław 2008

Redaktor Naczelny – prof. dr hab. Andrzej Kotecki  
ul. Sopocka 23, 50–344 Wrocław, tel./fax 071 328–12–77  
e-mail: [wyd@up.wroc.pl](mailto:wyd@up.wroc.pl) <http://www.up.wroc.pl>

Nakład 200 + 16 egz. Ark. druk. 4,25  
Druk i oprawa: Wydawnictwo Tekst Sp. z o.o.  
ul. Kossaka 72, 85–307 Bydgoszcz

## **WPLYW WYBORU MODELU WYZNACZANIA PARAMETRÓW TRANSFORMACJI HELMERTA NA WYNIKI TRANSFORMACJI\***

Józef Beluch

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

**Streszczenie.** Parametry transformacji, w praktyce, wyznacza się z pominięciem wag współrzędnych punktów dostosowania. Postępowanie takie skłoniło autora do określenia wpływu pominięcia wag, w procedurze obliczeniowej, na wyniki wyznaczenia parametrów transformacji, a następnie na wyniki transformacji współrzędnych. Obliczenia porównawcze wykonano dla dwóch modeli funkcjonalnych wyznaczenia parametrów transformacji podanych w formie warunków: (6) i (12).

Rozważania prowadzono w oparciu o przykład liczbowy transformacji współrzędnych. Warianty obliczeń wykonano dla różnych założeń wartości średnich błędów współrzędnych, a stąd i wag współrzędnych (pseudoobserwacji). Między innymi stwierdzono, że wybór modelu funkcjonalnego nie ma wpływu na wyniki obliczeń, gdy macierze wag współrzędnych wtórnych w obu modelach będą jednakowe, a wagi współrzędnych pierwotnych w wydzielonych zbiorach punktów dostosowania spełnią warunek  $P_{w_i} = k P_{W_i}$  gdzie:  $P_{w_i}$  – jednakowe wagi w zbiorze  $w_i$  współrzędnych pierwotnych,  $P_{W_i}$  – wagi tych samych współrzędnych w zbiorze wtórnym,  $k$  – współczynnik proporcjonalności, jednakowy dla wszystkich relacji między zbiorami.

Istotne zmiany w wynikach obliczeń pomiędzy obu modelami wystąpiły, gdy wyżej podana relacja wag pomiędzy zbiorami nie zachodzi, a średnie błędy współrzędnych pierwotnych są większe od średnich błędów współrzędnych wtórnych. W przypadku odwrotnym wpływ zróżnicowania średnich błędów na wyniki obliczeń jest bardzo nieznaczny. Zróżnicowanie wag w wariantach obliczeniowych w stosunku do wariantu 1, w którym wagi wszystkich współrzędnych są jednakowe, powoduje istotne zmiany w wynikach obliczeń zarówno w pierwszym, jak i drugim modelu funkcjonalnym.

**Słowa kluczowe:** transformacja Helmerta, modele funkcjonalne transformacji, transformacja z wagami

---

\* Badania statutowe nr 11.11.150.478/07.

## WPROWADZENIE

Transformacja współrzędnych należy do powszechnie stosowanych operacji obliczeniowych w geodezji. W praktyce stosowane są różne wzory transformacyjne, uwzględniające warunki optymalnego przeliczenia (dopasowania) współrzędnych punktów z układu pierwotnego  $x, y$  do układu wtórnego  $X, Y$ . W powszechnym zastosowaniu istnieją wzory transformacji czteroparametrowej Helmerta dla układów współrzędnych na płaszczyźnie. Parametry te, tj. dwa parametry translacji ( $c, d$ ) oraz dwa parametry ( $a, b$ ) związane funkcyjnie z rotacją o kąt  $\varphi$  i współczynnikiem skali  $s$ , wyznaczone są z układów równań, najczęściej równań poprawek wynikających ze wzorów na transformację, z uwzględnieniem warunku identyczności współrzędnych przed i po transformacji, w granicach dopuszczalnych wartości poprawek w punktach dostosowania. Równania poprawek, w praktyce, rozwiązywane są metodą pośredniczącą bez uwzględnienia wag, czyli przy założeniu jednakowych błędów współrzędnych punktów w obu układach. Często założenie takie odbiega od rzeczywistości.

Ścisłe podejście do problemu wyznaczenia parametrów transformacji zaprezentował Osada w swoim podręczniku [1998]. Parametry wyznaczał z układu równań warunkowych z niewiadomymi, rozpisanych na podstawie wzorów transformacyjnych. Układ ten rozwiązuje z uwzględnieniem wag współrzędnych punktów dostosowania układu pierwotnego i wtórnego.

W niniejszym opracowaniu przedstawione zostaną rezultaty badań związanych z wpływem wyboru modelu funkcjonalnego i stochastycznego na wyznaczone parametry transformacji i wyniki transformacji współrzędnych.

## WYZNACZENIE PARAMETRÓW TRANSFORMACJI Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ BŁĘDÓW

Do transformacji współrzędnych sposobem Helmerta stosowane są wzory:

$$\begin{aligned} X_i &= c + bx_i - ay_i \\ Y_i &= d + ax_i + by_i \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

- $x_i, y$  – współrzędne układu pierwotnego,
- $X_i, Y_i$  – współrzędne układu wtórnego,
- $c, d$  – parametry translacji,
- $a, b$  – parametry zależne od skali podobieństwa  $s$  i rotacji osi układu współrzędnych pierwotnych w stosunku do osi układu współrzędnych wtórnych, przy czym:
 
$$\begin{aligned} a &= s \sin\varphi \\ b &= s \cos\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

stąd:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3)$$

$$\varphi = \arctg \frac{a}{b} \quad (4)$$

Najprawdopodobniejsze wartości parametrów rozpatrywanej transformacji mogą być wyznaczone, gdy spełniona będzie nierówność:

$$2n > 4 \tag{5}$$

gdzie:

$n$  – liczba punktów dostosowania.

Dla współrzędnych każdego punktu dostosowania napiszemy wówczas dwa warunki:

$$\begin{aligned} \overline{X}_i + v_{\overline{X}_i} &= \overline{X}'_i \\ \overline{Y}_i + v_{\overline{Y}_i} &= \overline{Y}'_i \end{aligned} \tag{6}$$

w których współrzędne  $\overline{X}'_i, \overline{Y}'_i$  liczone są wzorami (1) na podstawie danych współrzędnych pierwotnych  $\overline{x}_i, \overline{y}_i$ . Kreski nad współrzędnymi oznaczają, że są to współrzędne punktów dostosowania.

Z warunków (6), po uwzględnieniu wzorów (1), dochodzimy do równań błędów:

$$V = AX - \overline{W}_w \tag{7}$$

gdzie:

$$V = \begin{bmatrix} v_{\overline{X}_1} \\ v_{\overline{Y}_1} \\ \vdots \\ v_{\overline{X}_n} \\ v_{\overline{Y}_n} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -\overline{y}_1 & \overline{x}_1 & 1 & 0 \\ \overline{x}_1 & \overline{y}_1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\overline{y}_n & \overline{x}_n & 1 & 0 \\ \overline{x}_n & \overline{y}_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad \overline{W}_w = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{Y}_1 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \\ \overline{Y}_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

Pseudoobserwacjom  $\overline{X}_1, \overline{Y}_1, \dots, \overline{X}_n, \overline{Y}_n$  możemy przypisać macierz wariancyjno-kowariancyjną  $C_{\overline{W}_w}$ , wówczas:

$$P_{\overline{W}_w} = C_{\overline{W}_w}^{-1} \tag{9}$$

Najczęściej jednak dysponujemy tylko średnimi błędami współrzędnych i w tym przypadku:

$$P_{\overline{W}_w} = \text{diag} \left[ m \frac{2}{X_1} m \frac{2}{Y_1} \dots m \frac{2}{X_n} m \frac{2}{Y_n} \right]^{-1} \tag{10}$$

Niewiadome  $X(a, b, c, d)$  wyznaczamy z układu równań normalnych:

$$X = (A^T P_{\overline{W}_w} A)^{-1} A^T P_{\overline{W}_w} \overline{W}_w \tag{11}$$

Jak już wspomniano, prezentowany model matematyczny zadania jest dokładniejszy od modelu, w którym pomijane są wagi, ale nie jest to model ścisły, gdyż wprowadzono wagi odnoszące się tylko do współrzędnych punktów dostosowania układu wtórnego.

**WYZNACZENIE PARAMETRÓW TRANSFORMACJI  
Z WYKORZYSTANIEM RÓWNAŃ NORMALNYCH  
Z NIEWIADOMYMI**

Biorąc pod uwagę współrzędne punktów dostosowania i wzory (1), napiszemy dla każdego punktu dwa równania warunkowe z niewiadomymi:

$$\begin{aligned}\bar{X}_i + v_{\bar{X}_i} &= (c_0 + dc) + (b_0 + db)(\bar{x}_i + v_{\bar{x}_i}) - (a_0 + da)(\bar{y}_i + v_{\bar{y}_i}) \\ \bar{Y}_i + v_{\bar{Y}_i} &= (d_0 + dd) + (a_0 + da)(\bar{x}_i + v_{\bar{x}_i}) + (b_0 + db)(\bar{y}_i + v_{\bar{y}_i})\end{aligned}\quad (12)$$

Po przekształceniach wykonanych w równaniach (12) i pominięciu  $db \cdot v_{\bar{x}_i}$ ,  $da \cdot v_{\bar{y}_i}$ ,  $da \cdot v_{\bar{X}_i}$ ,  $db \cdot v_{\bar{Y}_i}$  – jako małych wartości wyrazów w stosunku do pozostałych, otrzymamy:

$$\begin{aligned}v_{\bar{X}_i} - b_0 v_{\bar{x}_i} + a_0 v_{\bar{y}_i} + \bar{y}_i da - \bar{x}_i db - dc + \bar{X}_i - (c_0 + b_0 \bar{x}_1 - a_0 \bar{y}_1) &= 0 \\ v_{\bar{Y}_i} - a_0 v_{\bar{x}_i} - b_0 v_{\bar{y}_i} - \bar{x}_i da - \bar{y}_i db - dd + \bar{Y}_i - (d_0 + a_0 \bar{x}_1 + b_0 \bar{y}_1) &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

Układ równań (13), rozpisany dla współrzędnych wszystkich punktów dostosowania, można przedstawić w następującej formie macierzowej:

$$E \mathbf{V}_{\bar{W}_w} + \mathbf{B}_p \mathbf{V}_{\bar{W}_p} + \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L} = \mathbf{0} \quad (14)$$

gdzie:

$E$  – macierz jednostkowa,

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} -b_0 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_0 & -b_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b_0 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_0 & -b_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 - \bar{x}_1 - 1 & 0 \\ -\bar{x}_1 - \bar{y}_1 & 0 - 1 \\ \cdots & \cdots \\ \bar{y}_n - \bar{x}_n - 1 & 0 \\ -\bar{x}_n - \bar{y}_n & 0 - 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 - (c_0 + b_0 \bar{x}_1 - a_0 \bar{y}_1) \\ \bar{Y}_1 - (d_0 + a_0 \bar{x}_1 + b_0 \bar{y}_1) \\ \cdots & \cdots \\ \bar{X}_n - (c_0 + b_0 \bar{x}_n - a_0 \bar{y}_n) \\ \bar{Y}_n - (d_0 + a_0 \bar{x}_n + b_0 \bar{y}_n) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{V}_{\bar{W}_w} = \begin{bmatrix} v_{\bar{X}_1} & v_{\bar{Y}_1} & \cdots & v_{\bar{X}_n} & v_{\bar{Y}_n} \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

$$\mathbf{V}_{\bar{W}_p} = \begin{bmatrix} v_{\bar{x}_1} & v_{\bar{y}_1} & \cdots & v_{\bar{x}_n} & v_{\bar{y}_n} \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

$$\mathbf{X} = [da \quad db \quad dc \quad dd]^T \quad (18)$$

W wyniku rozwiązania układu (14) z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów otrzymamy:

$$\mathbf{X} = - \left[ \mathbf{A}^T \left( \mathbf{P}_{\bar{W}_w}^{-1} + \mathbf{B}_p \mathbf{P}_{\bar{W}_p}^{-1} \mathbf{B}_p^T \right)^{-1} \mathbf{A}^T \right] \mathbf{A}^T \left( \mathbf{P}_{\bar{W}_w}^{-1} + \mathbf{B}_p \mathbf{P}_{\bar{W}_p}^{-1} \mathbf{B}_p^T \right)^{-1} \mathbf{L} \quad (19)$$

$$\mathbf{K} = \left( \mathbf{P}_{\bar{W}_w}^{-1} + \mathbf{B}_p \mathbf{P}_{\bar{W}_p}^{-1} \mathbf{B}_p^T \right)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L}) \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\bar{W}_w} \\ \mathbf{V}_{\bar{W}_p} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\bar{W}_w} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{\bar{W}_p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B}_p^T \end{bmatrix} \mathbf{K} \quad (21)$$

gdzie:

$$P_{\overline{W}_w} = C_{\overline{W}_w}^{-1} \tag{22}$$

$$P_{\overline{W}_p} = C_{\overline{W}_p}^{-1} \tag{23}$$

$P_{\overline{W}_w}, P_{\overline{W}_p}$  – macierze wagowe współrzędnych punktów dostosowania  $\overline{X}, \overline{Y}$  w układzie wtórnym oraz  $\overline{x}, \overline{y}$  w układzie pierwotnym,

$C_{\overline{W}_w}, C_{\overline{W}_p}$  – macierze wariancyjno-kowariancyjne współrzędnych punktów dostosowania,

$K$  – wektor korelat.

### WARIANTY OBLICZEŃ

Wyróżnimy dwa modele funkcjonalne:

I – z wykorzystaniem równań warunkowych z niewiadomymi,

II – z wykorzystaniem równań poprawek.

W zbiorze współrzędnych punktów dostosowania wydzielamy dwa podzbiory  $W_{w1}$  i  $W_{w2}$  w układzie wtórnym i dwa podzbiory  $W_{p1}$  i  $W_{p2}$  w układzie pierwotnym.

Zróżnicowanie średnich błędów pomiędzy podzbiorymi wyrazimy wielokrotnością  $n$  modułu średniego błędu  $m$ , czyli:

$$m_{\overline{W}} = n|m| \tag{24}$$

Warianty obliczeń zostały wykonane dla różnych układów średnich błędów współrzędnych punktów dostosowania zestawionych w tab. 1.

Tabela 1. Średnie błędy współrzędnych punktów dostosowania w wariantach obliczeń  
Table 1. The mean square errors of coordinates of common points in the different variants of calculations

Lp. No.	Model funkcjonalny Functional model	Wariant Variants	Średnie błędy współrzędnych punktów dostosowania w układach: The mean square errors of coorginates of common points in the:			
			wtórnym secondary sytem		pierwotnym primary system	
			$m_{W1}$	$m_{W2}$	$m_{w1}$	$m_{w2}$
1	2	3	4	5	6	7
1	I	1	m	m	m	m
2		2/A	2 m	2 m	m	m
3		2/B	m	2 m	0,5 m	m
4		2/C	2 m	m	m	0,5 m
5		2/D	m	3 m	0,33 m	m
6		2/E	3 m	m	m	0,33 m
7		3/A	m	m	2 m	2 m
8		3/B	0,5 m	m	m	2 m
9		3/C	m	0,5 m	2 m	m
10		3/D	0,33 m	m	m	3 m
11		3/E	m	0,33 m	3 m	m
12		2/B/1	m	2 m	0,33 m	0,5 m
13		2/C/1	2 m	m	0,5 m	0,33 m
14		2/D/1	m	3 m	2 m	4 m
15		2/E/1	3 m	m	4 m	2 m

Tabela 1 cd.  
Table 1 cont.

1	2	3	4	5	6	7
16	II	4	m	m	–	–
17		4/B	m	2 m	–	–
18		4/C	2 m	m	–	–
19		4/D	m	3 m	–	–
20		4/E	3 m	m	–	–
21		5/B	0,5 m	m	–	–
22		5/C	m	0,5 m	–	–
23		5/D	0,33 m	m	–	–
24		5/E	m	0,33 m	–	–

Wiadomo, że na wynik obliczenia niewiadomych  $X$  oraz poprawek  $V_{\bar{w}}$  i  $V_w$  nie ma wpływu wartość średnich błędów, tylko wielokrotność modułu błędów w poszczególnych podziorach. Stąd w przykładzie liczbowym nie operowano konkretnymi wartościami średnich błędów, tylko wielokrotnościami.

### PRZYKŁAD LICZBOWY

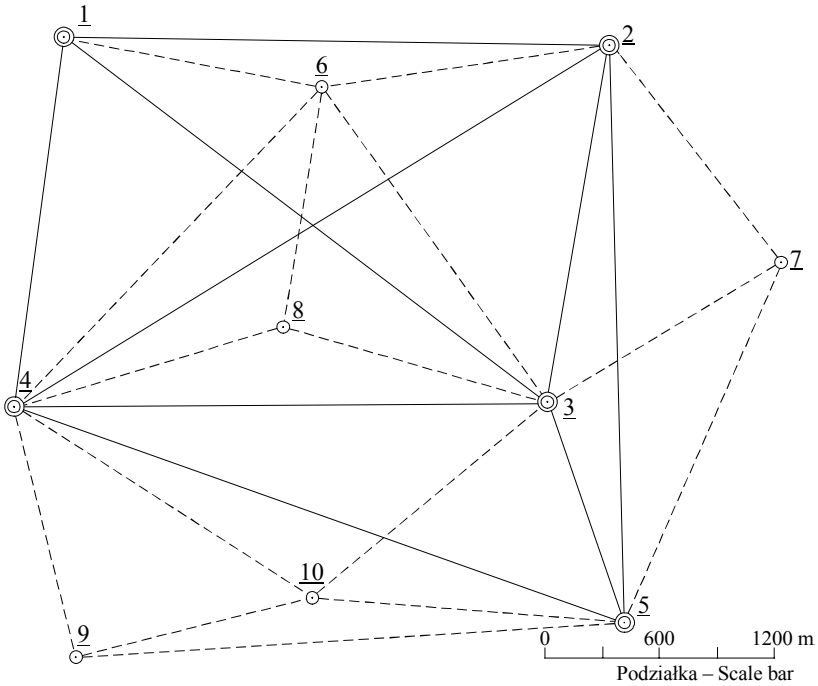
W przykładzie liczbowym ograniczono się do określenia wpływu wagowania na parametry i wyniki transformacji. Pominięty zostanie problem oceny dokładności, gdyż wiązałby się on z zagadnieniem optymalnego doboru wag w konkretnym przykładzie liczbowym, a to wykracza poza zakres przyjętych tu rozważań.

W tab. 2 zestawiono współrzędne punktów w dwu układach. W rozpatrywanym przykładzie transformacja obejmuje współrzędne 10 punktów, w tym 5 punktów dostosowania rozmieszczonych w sieci przedstawionej na rys. 1. W obrębie punktów dostosowania: podzbiory  $W_1$  i  $w_1$  stanowią punkty 1, 2, natomiast podzbiory  $W_2$  i  $w_2$  stanowią punkty 3, 4, 5, z wyjątkiem wariantów 12÷15, w których  $W_1 = \{1,2\}$ ,  $W_2 = \{3,4,5\}$ ,  $w_1 = \{1,2,3\}$ ,  $w_2 = \{4,5\}$ .

Tabela 2. Wykaz współrzędnych punktów w układzie pierwotnym i wtórnym  
Table 2. List of coordinates of points in the primary and secondary system

Nr punktów Number of points	Współrzędne w układzie: Coordinates in the:			
	pierwotnym primary system		wtórnym secondary system	
1	2	3	4	5
	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{X}_i$	$\bar{Y}_i$
1	18 836,47	18 834,09	4 358,45	2 306,88
2	18 803,34	21 650,43	4 110,02	5 112,42
3	16 936,95	21 326,25	2 273,88	4 646,48
4	16 905,60	18 570,03	2 453,46	1 895,95
5	15 803,06	21 714,48	1 113,69	4 946,80
	$x_i$	$y_i$		
6	18 580,90	20 153,69		
7	17 647,77	22 532,14		
8	17 336,00	19 949,95		
9	15 610,18	18 874,77		
10	15 942,73	20 095,94		





- ⊙ – punkty dostosowania – common points
- ⊙ – punkty o współrzędnych w układzie pierwotnym – points with coordinates in the primary system

Rys. 1. Szkic sieci punktów  
 Fig. 1. Network diagram

### WYNIKI OBLICZEŃ

Wartości parametrów transformacji wyznaczonych dla założeń podanych w lp. 1 tab. 1 wynoszą:

$$\begin{aligned}
 a &= 0,076\ 4807 \\
 b &= 0,997\ 0580 \\
 c &= -12\ 982,162 \\
 d &= -17\ 912,408
 \end{aligned}$$

W tab. 3 zestawimy różnice pomiędzy podstawowym wariantem 1 i pozostałymi wariantami, a także wybrane inne różnice istotne dla wyprowadzenia wniosków. Należy przy tym zwrócić uwagę, że dla transformowanych współrzędnych układu pierwotnego, danych w tab. 2, uznano za istotne różnice parametrów  $\delta a$  i  $\delta b$  rzędu  $10^{-7}$ .

Tabela 3. Różnice wartości parametrów transformacji między wariantami  
 Table 3. Differences of values of transformation parameters between the variants

Lp. No.	Oznaczn. różnic Denotation of differences	Różnice parametrów transformacji między wariantami Differences of transformation parameters among the variants					
		3	4	5	6	7	8
1	2	1-2/A	1-2/B	1-2/C	1-2/D	1-2/E	
2		1-3/A	1-3/B	1-3/C	1-3/D	1-3/E	
3		1-4	1-4/B	1-4/C	1-4/D	1-4/E	
4			1-5/B	1-5/C	1-5/D	1-5/E	
5	$\delta a$	0	$8,3 \cdot 10^{-7}$	$-25,8 \cdot 10^{-7}$	$5,5 \cdot 10^{-7}$	$-40,4 \cdot 10^{-7}$	
6	$\delta b$	0	$-27,6 \cdot 10^{-7}$	$29,9 \cdot 10^{-7}$	$-42,1 \cdot 10^{-7}$	$43,9 \cdot 10^{-7}$	
7	$\delta c$ [mm]	0	65,9	-102,5	87,6	-155,1	
8	$\delta d$ [mm]	0	46,2	-21,7	82,5	-27,9	
9		2/B-2/C	2/D-2/E	3/B-3/C	3/D-3/E	4/B-4/C	4/D-4/E
10	$\delta a$	$-34,1 \cdot 10^{-7}$	$-45,9 \cdot 10^{-7}$	$-34,1 \cdot 10^{-7}$	$-45,9 \cdot 10^{-7}$	$-34,1 \cdot 10^{-7}$	$-45,9 \cdot 10^{-7}$
11	$\delta b$	$57,4 \cdot 10^{-7}$	$86,0 \cdot 10^{-7}$	$57,4 \cdot 10^{-7}$	$86,0 \cdot 10^{-7}$	$57,4 \cdot 10^{-7}$	$86,0 \cdot 10^{-7}$
12	$\delta c$ [mm]	-168,4	-242,9	-168,4	-242,9	-168,4	-242,9
13	$\delta d$ [mm]	-68,0	-110,4	-68,0	-110,4	-68,0	-110,4
14		4-4/B	4-4/C	4-4/D	4-4/E		
15	$\delta a$	$8,3 \cdot 10^{-7}$	$-25,8 \cdot 10^{-7}$	$5,5 \cdot 10^{-7}$	$-40,4 \cdot 10^{-7}$		
16	$\delta b$	$-27,6 \cdot 10^{-7}$	$29,9 \cdot 10^{-7}$	$-42,1 \cdot 10^{-7}$	$43,9 \cdot 10^{-7}$		
17	$\delta c$ [mm]	65,9	-102,5	87,5	155,2		
18	$\delta d$ [mm]	46,2	-21,7	82,5	27,9		
19		1-4	2/A-4	2/B-4/B	2/C-4/C	2/D-4/D	2/E-4/E
20	$\delta a$	0	0	0	0	0	0
21	$\delta b$	0	0	0	0	0	0
22	$\delta c$ [mm]	0	0	0	0	0	0
23	$\delta d$ [mm]	0	0	0	0	0	0
24		3/A-4	3/B-5/B	3/C-5/C	3/D-5/D	3/E-5/E	
25	$\delta a$	0	0	0	0	0	
26	$\delta b$	0	0	0	0	0	
27	$\delta c$ [mm]	0	0	0	0	0	
28	$\delta d$ [mm]	0	0	0	0	0	
29		2/B/1-4/B	2/C/1-4/C	2/D/1-4/D	2/E/1-4/E		
30	$\delta a$	$-0,1 \cdot 10^{-7}$	$-4,0 \cdot 10^{-7}$	$-4,5 \cdot 10^{-7}$	$-38,4 \cdot 10^{-7}$		
31	$\delta b$	$-0,1 \cdot 10^{-7}$	$-1,5 \cdot 10^{-7}$	$5,0 \cdot 10^{-7}$	$-9,4 \cdot 10^{-7}$		
32	$\delta c$ [mm]	0	4,4	-19,8	-54,0		
33	$\delta d$ [mm]	0,7	8,8	1,1	74,9		

Wyniki transformacji współrzędnych dla założeń wariantu 1 zestawiono w tab. 4.

Tabela 4. Wyniki transformacji dla założeń z pierwszego wariantu  
 Table 4. Results of transformation under assumptions of the first variant

Oznaczn. współrz. Denotation of coordinates	Współrzędne punktów Coordinates of points									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X'_i$ [m]	4358,447	4110,018	2273,913	2453,453	1113,667	4002,705	2890,414	2777,049	1138,537	1376,713
$Y'_i$ [m]	2306,898	5112,419	4646,450	1895,941	4946,817	3603,070	5903,156	3304,719	2100,710	3343,721

W tab. 5 zestawiono przedziały bezwzględnych wartości różnic współrzędnych przetransformowanych pomiędzy różnymi wariantami obliczeń.

Tabela 5. Przedziały bezwzględnych wartości różnic współrzędnych po transformacji pomiędzy wariantami obliczeń  
 Table 5. Intervals of the absolute values of coordinate differences after transformation between the variants of calculation

Lp. No.	Przedziały bezwzględnych wartości różnic współrzędnych po transformacji pomiędzy wariantami obliczeń [mm]					
	Intervals of the absolute values of coordinate differences after transformation, between the variants of calculation [mm]					
1	2	3	4	5	6	7
1	1-2/A	1-2/B	1-2/C	1-2/D	1-2/E	
2	1-3/A	1-3/B	1-3/C	1-3/D	1-3/E	
3	1-4	1-4/B	1-4/C	1-4/D	1-4/E	
4		1-5/B	1-5/C	1-5/D	1-5/E	
5	0	0,6 ÷ 9,8	0 ÷ 14,2	0,2 ÷ 13,7	0,3 ÷ 21,3	
6	2/B-2/C	2/D-2/E	3/B-3/C	3/D-3/E	4/B-4/C	4/D-4/E
7	0,9 ÷ 24,0	0,8 ÷ 34,9	0,9 ÷ 24,0	0,8 ÷ 34,9	0,9 ÷ 24,0	0,8 ÷ 34,9
8		4-4/B	4-4/C	4-4/D	4-4/E	
9		4-5/B	4-5/C	4-5/D	4-5/E	
10		0,6 ÷ 9,9	0 ÷ 14,2	0,2 ÷ 13,7	0,3 ÷ 21,3	
11	1-4	2/A-4	2/B-4/B	2/C-4/C	2/D-4/D	2/E-4/E
12	0	0	0	0	0	0
13	3/A-4	3/B-5/B	3/C-5/C	3/D-5/D	3/E-5/E	
14	0	0	0	0	0	
15	2/B/1-4/B	2/C/1-4/C	2/D/1-4/D	2/E/1-4/E		
16	0 ÷ 0,3	0,1 ÷ 1,8	0,5 ÷ 4,9	0,6 ÷ 17,5		

**WNIOSKI**

1. Z porównania danych zestawionych w tab. 3, poz. 19÷28 wynika, że wpływ wyboru modelu funkcjonalnego nie uwidacznia się w wartościach parametrów, jeśli przyjęta zostanie jednakowa macierz wag dla współrzędnych wtórnych punktów dostosowania i gdy współczynnik proporcjonalności  $k$  średnich błędów współrzędnych w podzbiorach  $W_1 = w_1$  oraz  $W_2 = w_2$  punktów dostosowania, dla modelu I, będzie jednakowy, czyli, gdy:

$$P_{w_1} = k P_{W_1} ; P_{w_2} = k P_{W_2}$$

Stąd też różnice wyników transformacji współrzędnych, w wariantach podanych w tab. 5, lp. 11÷14, są równe zero.

2. Niewielkie zmiany parametrów  $a$  i  $b$  w przedziale  $(0,1÷4,0) \cdot 10^{-7}$  oraz  $c$  i  $d$  w przedziale  $(0÷8,8)$  mm wystąpiły pomiędzy wariantami obu modeli (tab. 3, lp. 29÷33, kol. 3 i 4), gdy średnie błędy współrzędnych pierwotnych są 3÷4 razy mniejsze od średnich błędów współrzędnych wtórnych punktów dostosowania (tab. 1, poz. 12 i 13). Różnice we współrzędnych przetransformowanych w obu modelach pomiędzy wariantami podanymi w tab. 5, lp. 15, kol. 2 i 3 są także niewielkie – obejmują przedział 0÷1,8 mm (tab. 5, lp. 16, kol. 2 i 3).

3. Istotne zmiany wystąpiły w obu modelach, w wartościach parametrów  $a$  i  $b$  w przedziale  $(4,5÷38,4) \cdot 10^{-7}$  oraz  $c$  i  $d$ , w przedziale  $(1,1÷74,9)$  mm (tab. 3, lp. 29÷33,

kol. 5÷6), gdy średnie błędy współrzędnych pierwotnych punktów dostosowania są większe od średnich błędów współrzędnych wtórnych tych punktów. W przykładzie obliczeniowym wielokrotność zmian średnich błędów wynosiła 1,3÷2 (tab. 1, lp. 14 i 15). Różnice współrzędnych przetransformowanych pomiędzy wariantami podanymi w tab. 5, l.p. 15, kol. 4 i 5 mieszczą się w przedziale (0,5÷17,5) mm, a więc w praktyce nie powinny być zaniedbywane. Należy zaznaczyć, że wnioski 2 i 3 są słuszne przy założeniu zróżnicowania współczynnika proporcjonalności wag współrzędnych pierwotnych i wtórnych w modelu I przynajmniej dla 2 podzbiorów współrzędnych obejmujących nieidentyczne punkty w obu układach.

4. Na podstawie wniosku 3 można stwierdzić, że wybór modelu może być istotny dla wyników transformacji współrzędnych, gdy występuje zróżnicowanie stosunku wag współrzędnych w podziorach punktów dostosowania dla układów pierwotnego i wtórnego. Szczególnie to zróżnicowanie uwidacznia się, gdy wagi współrzędnych pierwotnych są mniejsze od wag współrzędnych w układzie wtórnym.

5. Przy porównywaniu wyników obliczeń wariantu 1 z pozostałymi można stwierdzić, że zróżnicowanie wag współrzędnych ma wpływ na wartości parametrów transformacji (tab. 3, lp. 1÷8) i wartości przetransformowanych współrzędnych z wyjątkiem przypadków, gdy wielokrotności zmian wag są jednakowe dla wszystkich współrzędnych punktów dostosowania w obrębie zbioru wtórnego i pierwotnego (tab. 5, lp. 1÷5, kol. 2). W układzie pierwotnym wielokrotność zmiany wag może być inna w zbiorze wtórnym, ale wagi całego zbioru jednakowe. Można także zaobserwować, że jednakowe wyniki parametrów i przetransformowanych współrzędnych uzyskujemy dla porównywanych wariantów, w których wagi, w tych samych podziorach współrzędnych, zróżnicowane są w jednakowej proporcji, tj.  $\mathbf{P}_{\bar{w}_2}^{(q)} : \mathbf{P}_{\bar{w}_1}^{(q)} = \mathbf{P}_{\bar{w}_2}^{(q)} : \mathbf{P}_{\bar{w}_1}^{(q)} = k_q$  – dla modelu I i  $\mathbf{P}_{\bar{w}_2}^{(q)} : \mathbf{P}_{\bar{w}_1}^{(q)} = k_q$  – dla modelu II ( $q = B, C, D, E$ ). Wniosek ten wynika

z porównania danych w kolumnach 3÷6 tab. 5 obejmujących lp. 1÷5, z uwzględnieniem błędów średnich podanych w tab. 1 dla analizowanych wariantów.

6. W prezentowanym przykładzie liczbowym zróżnicowanie wag, w stosunku do wariantu, w którym wagi wszystkich współrzędnych są jednakowe (wariant 1 i 4), powoduje maksymalną zmianę współrzędnych przetransformowanych rzędu 21,3 mm zarówno w pierwszym, jak i drugim modelu funkcjonalnym (por. lp. 5 i 10 w tab. 5).

7. Wyniki obliczeń zamieszczone w tab. 3 lp. 10÷13 oraz w tabeli 5 lp. 7 pozwalają na określenie wpływu zamiany wag w podziorach współrzędnych, w dwu wariantach obliczeń  $i$  oraz  $j$ , na zmianę wartości parametrów transformacji i przetransformowane współrzędne. Jeśli średnie błędy współrzędnych w podziorach, brane do obliczenia wag, spełniają proporcję:

$$m_{\bar{w}_1}^i : m_{\bar{w}_1}^j = m_{\bar{w}_1}^i : m_{\bar{w}_1}^j = m_{\bar{w}_2}^i : m_{\bar{w}_2}^j = m_{\bar{w}_2}^i : m_{\bar{w}_2}^j = q \quad \text{– dla modelu I}$$

$$\text{i } m_{\bar{w}_1}^i : m_{\bar{w}_1}^j = m_{\bar{w}_2}^i : m_{\bar{w}_2}^j = q \quad \text{– dla modelu II}$$

to dla  $q = 2$  maksymalne różnice współrzędnych wynoszą 24 mm, natomiast dla  $q = 3$  różnice w przetransformowanych współrzędnych w obu wariantach dochodzą do 34,9 mm. Wyniki te mogą także wskazywać na wpływ niedokładnego oszacowania średnich błędów współrzędnych w poszczególnych podziorach, na rezultaty transformacji.

8. Jeśli do transformacji współrzędnych stosujemy model II i przyjmujemy jednakowe wagi dla wszystkich punktów dostosowania, to w przypadku, gdy w rzeczywistości,

przynajmniej w jednym podzbiore średnie błędy różnią się dwukrotnie, wtedy maksymalne różnice współrzędnych dochodzą do 14,2 mm (tab. 5, lp. 10, kol. 3.4), natomiast przy trzykrotnym zróżnicowaniu średnich błędów maksymalne różnice współrzędnych dochodzą do 21,3 mm (tab. 5, lp. 10, kol. 5.6). Wynika z tego, że przy stosowaniu w transformacji modelu II wagi współrzędnych wtórnych mają wpływ na wyniki przetransformowanych współrzędnych.

## PIŚMIENNICTWO

Osada E., 1998. Analiza, wyrównanie i modelowanie geo-danych. Wydawnictwo Akademii Rolniczej we Wrocławiu.

## THE EFFECT OF SELECTION OF MODELS FOR DETERMINING HELMERT TRANSFORMATION PARAMETERS ON CALCULATION RESULTS

**Abstract.** In practice, the transformation parameters are determined without taking into consideration the weights of coordinates of common points. Such practice has encouraged the author to determine the effect of disregarding such weights in the calculation procedures on determining the transformation parameters and, further on, the results of coordinate transformations. The comparative calculations have been performed for two functional models for determining the transformation parameters, provided as conditions (6) and (12).

The study has been based on a numerical example of coordinates transformation. The calculation variants have been provided for various assumptions as regards the mean square errors of coordinates, and consequently, the coordinate (pseudo-observation) weights. It has been found that the selection of the functional model does not affect the calculation results, when the matrixes of secondary coordinate weights in both models are identical, while the primary coordinate weights in separated sets of adjustment points satisfy the condition  $P_{w_i} = k P_{W_i}$  where:  $P_{w_i}$  – identical weights in  $w_i$  set of primary coordinates,

$P_{W_i}$  – weights of the same primary coordinates in the secondary set,  $k$  – proportionality factor, identical for all relations between the sets. Considerable variations in the calculation results between both models have become apparent when the above-mentioned weight relation between sets is not present, and the mean square errors of primary coordinates are greater than those of the secondary coordinates. In the opposite case, the effects of variation of mean square errors on the calculation results are very slight. The variety of weights in calculation variants in relation to variant 1, in which weights of all coordinates are identical, leads to considerable variations in the calculation results, both in the first and second functional model.

**Key words:** Helmert transformation, functional models of transformation, transformation with weights

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 31.03.2008

Do cytowania – For citation: Beluch J., 2008. Wpływ wyboru modelu wyznaczania parametrów transformacji Helmerta na wyniki transformacji. *Acta Sci. Pol. Geod. Descr. Terr.* 7(1), 3-13.

## CHARAKTERYSTYKA NOWYCH PUNKTÓW PRZEZNACZONYCH DO ABSOLUTNYCH POMIARÓW CIĘŻKOŚCI NA OBSZARZE KRAKOWA\*

Piotr Banasik, Bogdan Skorupa

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

**Streszczenie.** W pracy poruszono zagadnienie dotyczące absolutnych pomiarów przyspieszenia siły ciężkości na obszarze Krakowa. W ramach projektu KBN nr 5T12E03730 *Jednolity system grawimetrycznego odniesienia polskich stacji permanentnych GNSS i poligonów geodynamicznych* ustalone zostały na obszarze Krakowa dwa nowe punkty, przeznaczone do pomiarów absolutnych. Z dotychczasowego punktu pomiarów absolutnych nie korzysta się od kilkunastu już lat ze względu na niestabilne warunki pomiarowe. Pomiar przyspieszenia ciężkości ziemskiej były realizowane w odległym o kilkanaście kilometrów Ojcowie, w Obserwatorium Sejsmicznym PAN. Nowe krakowskie punkty znajdują się w budynku Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Jagiellońskiego w Forcie „Skała” oraz w Geodezyjnym Laboratorium Metrologicznym na Wydziale Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska Akademii Górniczo-Hutniczej. Punkt na terenie AGH położony jest w sąsiedztwie stacji permanentnej GPS KRAW, wchodzącej w skład sieci EPN. W pracy opisano przebieg stabilizacji obu punktów oraz sposób wyznaczenia ich położenia. Podano wartości współrzędnych i wysokości obu punktów. W maju 2007 r. na obu punktach została wykonana pierwsza seria dobowych pomiarów natężenia siły ciężkości.

**Słowa kluczowe:** pomiary grawimetryczne, stacja permanentna GPS, osnowa grawimetryczna

---

\* Pracę wykonano w ramach projektu KBN 5T12E03730 oraz badań statutowych AGH nr 11.11.150.478.

## WPROWADZENIE

Absolutne pomiary przyspieszenia siły ciężkości realizowane są na bazach grawimetrycznych oraz na licznych punktach osnowy grawimetrycznej kraju. Na obszarze Polski istnieje kilkanaście takich punktów. Jeden z nich zlokalizowany był w Krakowie, w dawnym budynku Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Jagiellońskiego. Wzrastający od dłuższego czasu ruch uliczny wywołuje w tym rejonie mikrosejsmy, które uniemożliwiają uzyskanie wymaganej dokładności pomiarów. Ostatnie bezwzględne pomiary przyspieszenia na tym punkcie zrealizowano w 1978 r. grawimetrem radzieckim GABL.

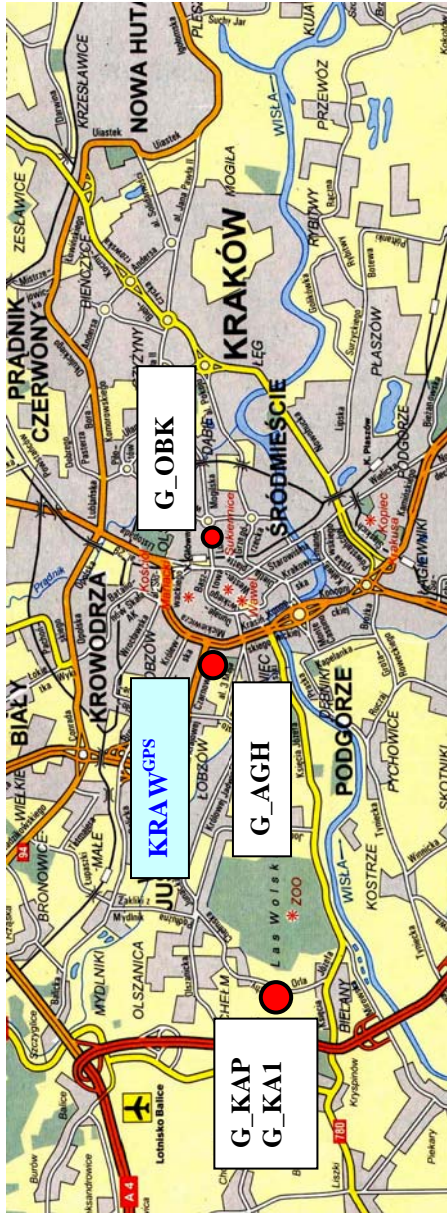
W ramach projektu badawczego KBN nr 5T12E03730 *Jednolity system grawimetryczny odniesienia polskich stacji permanentnych GNSS i poligonów geodynamicznych*, realizowanego na Wydziale Geodezji i Kartografii Politechniki Warszawskiej pojawiła się możliwość założenia w Krakowie dwóch nowych punktów przeznaczonych do absolutnych pomiarów przyspieszenia siły ciężkości. Na potrzeby niniejszego artykułu obydwa punktom nadano robocze nazwy: G\_KAP i G\_AGH.

## LOKALIZACJA PUNKTÓW G\_KAP I G\_AGH

Na wstępną lokalizację dwóch punktów absolutnych wyznaczeń przyspieszenia siły ciężkości w Krakowie wybrano teren Obserwatorium Astronomicznego UJ, znajdującego się na obszarze jednego z dawnych fortów (Fort „Skała”) oraz pomieszczenie Geodezyjnego Laboratorium Metrologicznego, znajdującego się w budynku Wydziału Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska AGH. Oba miejsca spełniają oczekiwania związane z pomiarami grawimetrycznymi.

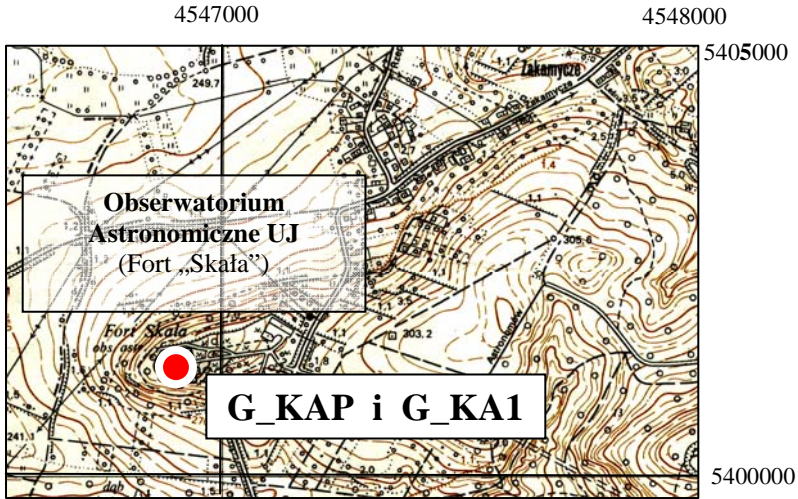
Punkt w Obserwatorium Astronomicznym znajduje się w odległości ponad 8 km od centrum Krakowa, w oddaleniu od niekorzystnego wpływu ruchu miejskiego (rys. 1). Zróżnicowane ukształtowanie terenu wokół fortu „Skała” (rys. 2) oraz fakt, że teren ten jest częścią Bielańsko-Tynieckiego Parku Krajobrazowego, wskazuje, że warunki obserwacji grawimetrycznych będą tu przez długi czas niezmiennie. Powstałe w końcu XIX w. zabudowania fortu zostały osadzone na wapiennej skale wzgórza, będącego pasmem Zrębu Sowińca, otaczającego Kraków od strony zachodniej. Stanowi to stabilną strukturę geologiczną do pomiarów grawimetrycznych (rys. 3).

Lokalizacja drugiego punktu w budynku C-4 Wydziału GGiŚ AGH jest pod tym względem mniej korzystna. Od strony północnej budynku, w odległości 150 m znajduje się najbliższa ulica (ul. Czarnowiejska), od strony wschodniej w odległości 300 m przebiega główny trakt Krakowa – al. Mickiewicza (rys. 1). Jednak miejsce to posiada inne cenne własności.



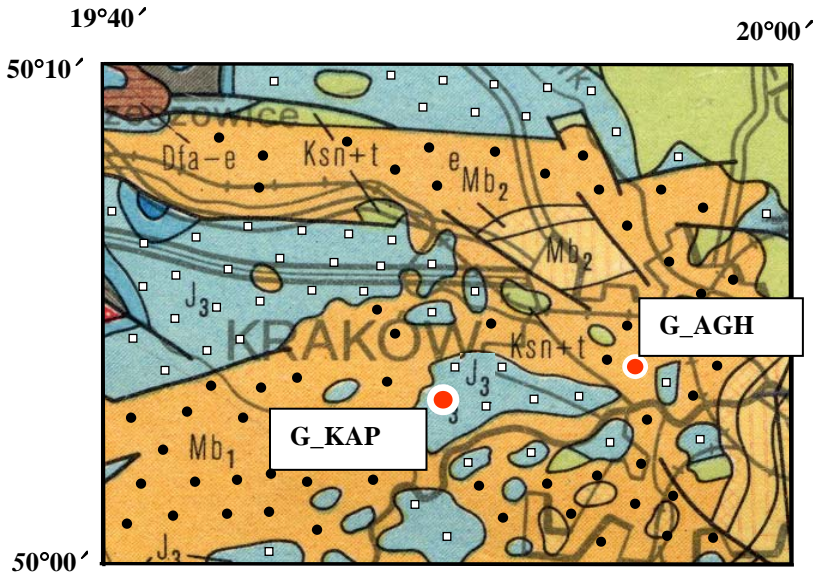
Rys. 1. Rozmieszczenie punktów grawimetrycznych na obszarze Krakowa  
Fig. 1. The location of gravimetric points on the area of Kraków





Rys. 2. Ukształtowanie powierzchni terenu w okolicach Obserwatorium Astronomicznego UJ (fragment mapy w układzie „1965”)

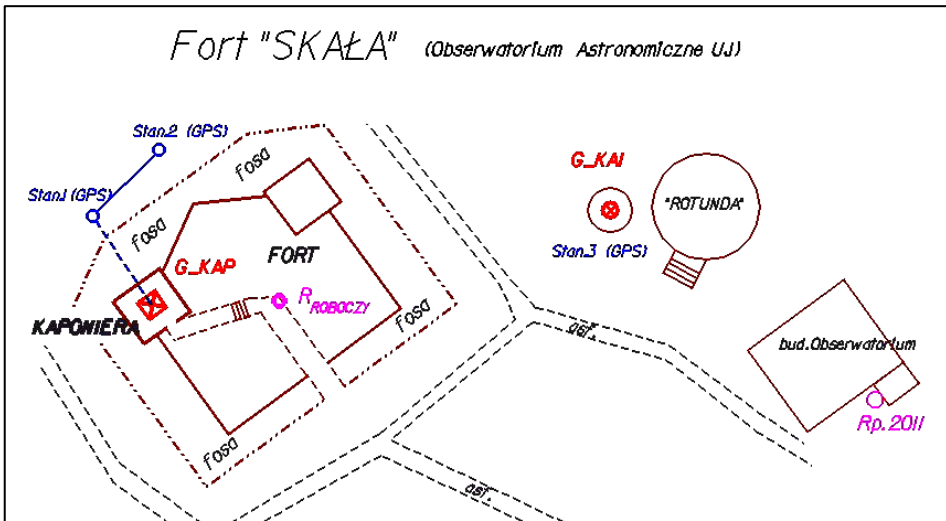
Fig. 2. The landscape on the area of Astronomical Observatory of the Jagiellonian University (a part on a map in „1965” co-ordinate system)



Rys. 3. Położenie punktów na tle mapy geologicznej z okolic Krakowa ( $J_3$  – jurajskie wapienie, dolomity;  $Mb_1$  – gliny, piaski)

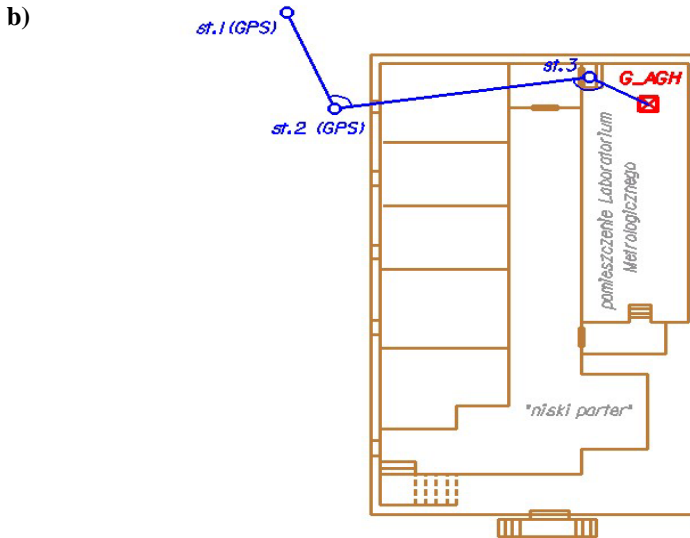
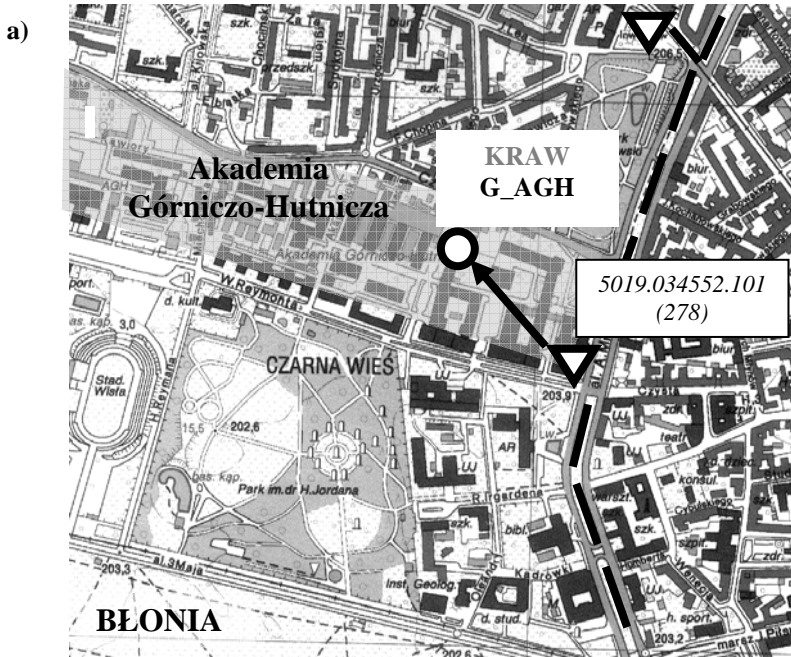
Fig. 3. The location of the points on the background of geological map on the area of Kraków ( $J_3$  – jurassic limestones, dolomites;  $Mb_1$  – clays, sands)

Na dachu budynku C-4, niemal dokładnie nad punktem grawimetrycznym, znajduje się stacja permanentna GPS – KRAW, wchodząca w skład sieci ASG-EUPOS i EPN. W pobliżu przebiega ciąg osnowy wysokościowej I kl. (rys. 5a). Punkt grawimetryczny został zlokalizowany w pomieszczeniu Laboratorium Metrologicznego AGH, wykonującego m.in. komparację łąt niwelacyjnych i instrumentów geodezyjnych. Pomieszczenie to znajduje się w podziemiach budynku na tzw. „niskim parterze”. Oba punkty G\_KAP i G\_AGH zlokalizowane zostały w budynkach placówek naukowych, wykorzystujących badania pola grawitacyjnego Ziemi. Wybór miejsca pod budowę obu punktów poprzedzony został wywiadem terenowym zrealizowanym w styczniu 2007 r. W Obserwatorium, na miejsce lokalizacji punktu, wybrano pomieszczenie tzw. Kaponierzy, znajdujące się w budynku Fortu „Skała” (rys. 4). Stabilność miejsca usadowienia (posadzki) obu punktów sprawdzono za pomocą pomiaru grawimetrem statycznym Scintrex CG-3. Wyniki testów wykazały brak mikrosejsm, uniemożliwiających wykonywanie pomiarów grawimetrycznych. Dodatkowo na zewnątrz budynku fortu, na betonowej płycie wyznaczono miejsce dla ekscentru (G\_KA1), przeznaczonego głównie do pomiarów względnych (rys. 4 i 7b).



Rys. 4. Rozmieszczenie punktów pomiarowych na terenie Obserwatorium Astronomicznego UJ (Fort „Skała”)

Fig. 4. The location of survey points on the area of Astronomical Observatory of the Jagiellonian University (the „Skała” Fort)



Rys. 5. Lokalizacja punktu G\_AGH na terenie Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie: a) położenie punktu względem stacji KRAW i osnowy wysokościowej kl. I, b) rozmieszczenie stanowisk GPS do wyznaczenia współrzędnych punktu G\_AGH

Fig. 5. The location of the G\_AGH point on the area of AGH in Kraków: a) the point's localisation in relation to KRAW and the first order vertical network, b) a distribution of GPS stations used for a co-ordinates determination of the G\_AGH point

## STABILIZACJA PUNKTÓW G\_KAP ORAZ G\_AGH

Na betonowej posadzce pomieszczenia Kaponiery wyznaczono kwadrat o boku 100 cm pod przysły słup punktu G\_KAP. Boki kwadratu zorientowano w kierunku N-S oraz W-E. Następnie nacięto posadzkę, odkuto i odgruzowano jęgo wnątrze (rys. 6).



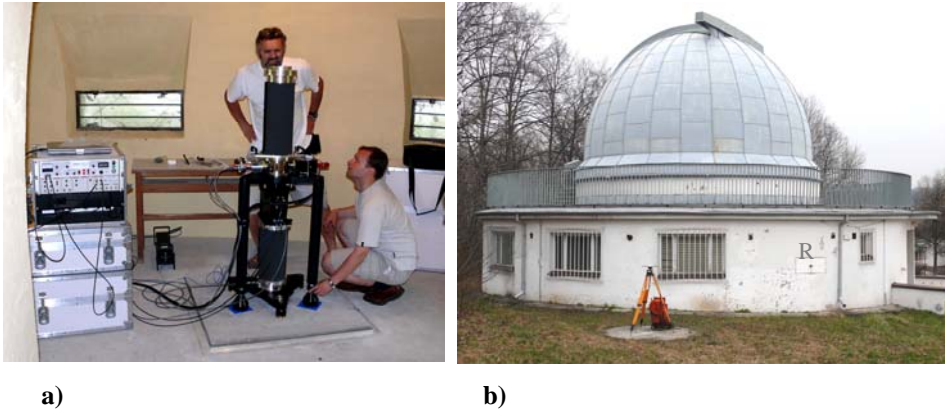
Rys. 6. Etapy stabilizacji punktu G\_KAP

Fig. 6. The stages of the G\_KAP point grounding proceedings

Podłózem posadzki jest lita skała wapienna, na której osadzony jest cały fort (rys. 8). Głębokość, na której znajdowała się skała, wynosiła 20÷30 cm. W skałe zamocowano 5 prętów stalowych, na których umieszczono zbrojenie betonowego słupa. Do zbrojenia przymocowano mosiężny centr punktu. Wnątrze wykucia zalano betonem, tworząc słup wystający 5 cm ponad posadzkę pomieszczenia. Boki odizolowano od posadzki styropianem grubości 2 cm. Brzegi styropianu pokryto warstwą silikonu i zamaskowano aluminiowymi listwami odizolowanymi od słupa. W końcu korytarza prowadzącego do Kaponiery zaistalowano reper ścienny  $R_{ROBOCZY}$  do kontroli wysokości punktu G\_KAP (rys. 4).

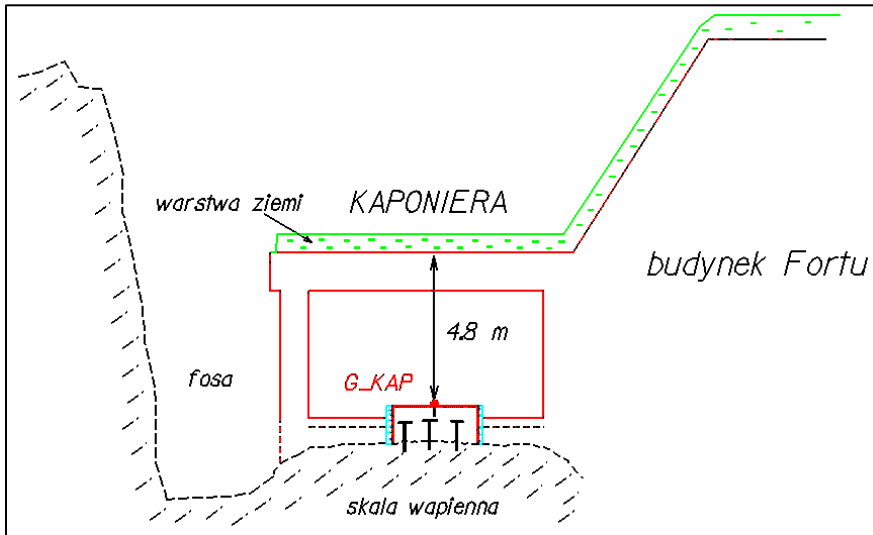
Punkt G\_KA1, będący ekscentrem dla G\_KAP, mieści się na zewnątrz fortu, przy budynku tzw. „Rotundy”, na betonowej okrągłej płycie o grubości, ok. 15 cm (rys. 7b). Centr punktu stanowi mosiężny, sferyczny bolec.

Na stropie Kaponiery (podobnie jak na pozostałych zabudowaniach fortu) znajduje się warstwa ziemi (rys. 8). Aby uwzględnić grawitacyjny wpływ tej warstwy, określono jej rozmiary i położenie względem punktu G\_KAP. Gęstość masy ziemnej warstwy wyznaczono w Laboratorium Zakładu Kształtowania i Ochrony Środowiska WGGiŚ AGH na podstawie pobranych próbek. Informacje te wraz ze wskazaniami wilgotnościomierza, zarejestrowanymi podczas pomiaru przyspieszenia siły ciężkości, umożliwią obliczenie odpowiedniej poprawki grawitacyjnej, wynikającej z przyciągania tej warstwy.



Rys. 7. Punkty G\_KAP i G\_KA1 na terenie Obserwatorium Astronomicznego UJ: a) pomiar przyspieszenia siły ciężkości na punkcie G\_KAP w dn. 27–28.05.2007 r. za pomocą grawimetru FG-5, b) pomiar GPS na punkcie G\_KA1 na terenie Obserwatorium Astronomicznego UJ

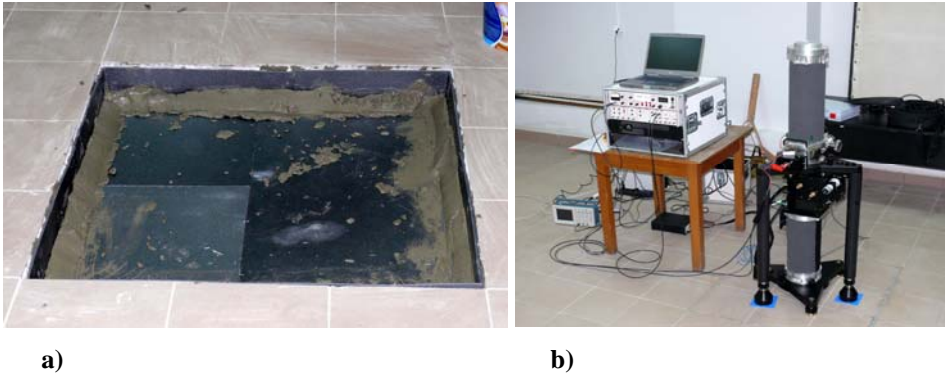
Fig. 7. The points G\_KAP and G\_KA1 on the area of Astronomical Observatory of the Jagiellonian University: a) the measurement of gravity on the G\_KAP point in 27–28.05.2007 with the use FG-5 gravimeter, b) the GPS survey on the G\_KA1



Rys. 8. Przekrój pionowy pomieszczenia Kaponiera

Fig. 8. The cross section of Kaponiera displacement

Podobnej stabilizacji wymagał również słup punktu G\_AGH w Geodezyjnym Laboratorium Metrologicznym na terenie AGH. W posadzce tego pomieszczenia wykuto płytę o rozmiarach  $90 \times 90$  cm i grubości 15 cm (rys. 9).



Rys. 9. Punkt G\_AGH w Geodezyjnym Laboratorium Metrologicznym: a) stabilizacja punktu; b) pomiar grawimetrem FG-5 w dniu 25–26.05.2007  
 Fig. 9. The G\_AGH point in the Geodetic Metrological Laboratory: a) the point's grounding, b) the measurement by FG-5 gravimeter in 25–26.05.2007

Orientacja boków otworu przebiega w kierunkach N-S i W-E. Podłoże oraz boki otworu wyłożono plastrami pianki PCV o grubości 5 mm, izolując płytę od posadzki. Otwór uzbrojono i zalano betonem równo z poziomem pozostałej posadzki. Na beton naklejono gresowe płytki, szczeliny między izolacją pionową uzupełniono silikonem. Na środku zamontowano sferyczną śrubę będącą centrum punktu. Interesująco przedstawiają się wstępne wyniki dobowych obserwacji przyspieszenia wykonanych na tym punkcie w dniu 25 i 26 maja 2007 roku. Okazuje się, że mimo bliskości ulic miasta warunki pomiaru są tu wyjątkowo stabilne. Należy przypuszczać, że korzystny, wyłumiający wpływ ma dodatkowa gruba warstwa izolacyjna (beton, styropian), stanowiąca podłoże całej posadzki pomieszczenia laboratorium.

## WYZNACZENIE WSPÓŁRZĘDNYCH PUNKTU G\_KAP W KAPONIERZE FORTU „SKAŁA”

Współrzędne punktu G\_KAP znajdującego się w Kaponierze Fortu „Skała” wyznaczono metoda kombinowaną, poprzez obserwacje GPS uzupełnione pomiarem kątowno-liniowym.

Na zewnątrz budynku fortu założono bazę dwóch stanowisk GPS: *Stan.1* i *Stan.2* (rys. 4 i 10). Wyznaczono współrzędne geodezyjne  $\varphi$ ,  $\lambda$  w nawiązaniu do stacji permanentnej KRAW (tab. 1).

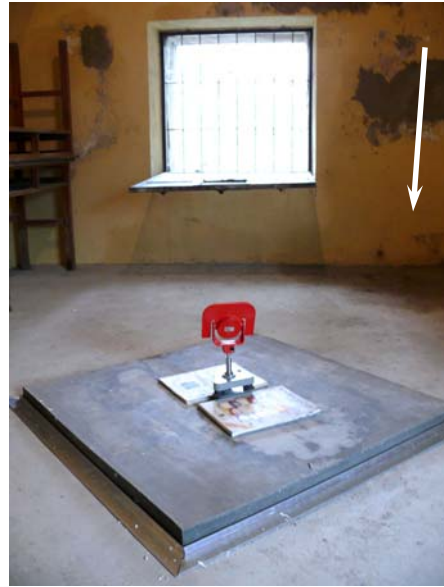
Wykorzystując spoziomowane statywy na obu stanowiskach, wykonano pomiar kąta poziomego, pionowego i długości do punktu G\_KAP. Wysokość elipsoidalną tego punktu wyznaczono metodą niwelacji trygonometrycznej. Uwzględniono różnicę wysokości między anteną GPS i tachimetrem na stanowisku *Stan.2* oraz wysokość lustra na punkcie G\_KAP (rys. 10). Wysokość elipsoidalną punktu G\_KAP wyznaczono również kontrolnie inną metodą. Wykorzystano do tego celu wyniki pomiaru niwelacyjnego w nawiązaniu do reperu nr 2011 osnowy wysokościowej IV kl., znajdującego się na budynku Obserwatorium Astronomicznego (rys. 4), oraz wartość odstepu quasi-geoidy od elipsoidy GRS-80 w punkcie G\_KA1. Wartość odstepu w tym punkcie obliczono

bezpośrednio na podstawie wysokości elipsoidalnej i normalnej uzyskanych z pomiarów GPS i nawiązania niwelacyjnego. W obliczeniu wysokości elipsoidalnej punktu G\_KAP uwzględniono niewielką poprawkę do odstępu, wynikającą z nachylenia quasi-geoidy do elipsoidy na kierunku G\_KA1-G\_KAP. Do jej obliczenia wykorzystano wyznaczone wartości składowych odchylenia linii pionu w tym rejonie [Boczar i in. 1995]. Tę metodę wyznaczenia wysokości elipsoidalnej ilustrują poniższe wzory:

$$h_{G\_KAP} = H_{G\_KAP} + \zeta_{G\_KAP} \quad (1)$$

$$\zeta_{G\_KAP} = \zeta_{G\_KA1} + \frac{\xi \cos A + \eta \sin A}{d}$$

gdzie:  $\zeta$  – odstęp quasi-geoidy od elipsoidy (GRS-80),  
 $\xi, \eta$  – składowe odchylenia linii pionu,  
 $A, d$  – azymut i odległość linii między punktami G\_KA1 i G\_KAP.



Rys. 10. Wyznaczanie współrzędnych punktu G\_KAP za pomocą techniki GPS i pomiarów kąto-liniowych

Fig. 10. Determination of the G\_KAP point's co-ordinates with the use of GPS and tachometric surveys

Obie metody wyznaczenia wysokości elipsoidalnej punktu G\_KAP (pomiar GPS uzupełniony niwelacją trygonometryczną oraz niwelacją geometryczną z uwzględnieniem lokalnego przebiegu quasi-geoidy) wykazały zgodność na poziomie 1 cm.

Obliczenie współrzędnych punktu G\_KAP (podobnie jak G\_AGH) zrealizowano wstępnie na płaszczyźnie układu „2000”, a uzyskane w ten sposób współrzędne płaskie  $X, Y$  przeliczono na elipsoidalne  $\varphi, \lambda$ .

Pomiar GPS wykonano odbiornikiem Ashtech Z-Surveyor, w nawiązaniu do stacji KRAW. Korzystne warunki pomiaru (stabilna atmosfera i w pełni odkryty horyzont) umożliwiły uzyskanie współrzędnych  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$  z dokładnością do pojedynczych milimetrów. Pomiar kątowno-liniowy wykonano tachimetrem Leica TC 407. Na wysoką dokładność tego pomiaru korzystnie wpłynęło zachmurzenie i niewielka temperatura, a także wymuszone centrowanie i poziomowanie tachimetru w spodarce anteny GPS.

Pomiar niwelacyjny wykonano niwelatorem Zeiss Ni 007 z kompletem łąt inwaryjnych oraz żabek. Ciąg niwelacyjny o długości ok. 200 m łączył reper nawiązania nr 2011 z punktem G\_KA1, reperem roboczym  $R_{ROBOCZY}$  (zastabilizowanym na końcu korytarza prowadzącego do Kaponiery) oraz z punktem G\_KAP (rys. 4). Odchyłka niezamknięcia ciągu na kierunku „tam” i „z powrotem” wyniosła mniej niż 1 mm. Ze względu na znaczne pochylenie chodnika prowadzącego do Kaponiery i jego małą wysokość odcinek niwelacyjny wewnątrz fortu został pomierzony dla minimalnych celowych ok. 2÷3 m.

### WYZNACZENIE WSPÓLRZĘDNYCH PUNKTU G\_AGH W LABORATORIUM METROLOGICZNYM AGH

Współrzędne punktu G\_AGH znajdującego się w pomieszczeniu Geodezyjnego Laboratorium Metrologicznego (pawilon C-4 Wydziału GGiŚ AGH) wyznaczono, podobnie jak w przypadku punktu G\_KAP, metodą kombinowaną: pomiar GPS wraz z pomiarem kątowno-liniowym. Ze względu na brak okien w tym pomieszczeniu ciąg wiszący, umożliwiający wyznaczenie współrzędnych tego punktu, musiał składać się z trzech stanowisk. Sposób pomiaru GPS oraz obliczenia współrzędnych  $\varphi$ ,  $\lambda$  tego punktu wyglądały podobnie jak w przypadku punktu G\_KAP.

Do obliczenia wysokości elipsoidalnej punktu G\_AGH wykorzystano wyniki pomiaru niwelacyjnego w nawiązaniu do reперu osnowy wysokościowej kl. I (5019.034552.101), znajdującego się na budynku A-0 AGH (rys. 6a), oraz znaną wartość odstepu quasi-geoidy od elipsoidy GRS-80 w punkcie KRAW według wzoru:

$$h_{G\_AGH} = H_{G\_AGH} + \zeta_{KRAW} \quad (2)$$

gdzie:  $\zeta_{KRAW} = 39.870$  m [Banasik 2007]

Punkt KRAW znajduje się niemal dokładnie nad stanowiskiem G\_AGH (odległość w poziomie wynosi ok. 2 m). W związku z tym wartość odstepu quasi-geoidy od elipsoidy potrzebną do obliczenia wysokości elipsoidalnej punktu G\_AGH przyjęto z punktu KRAW.

W tab. 1 podano wartości współrzędnych i wysokości wszystkich ww. punktów grawimetrycznych na obszarze Krakowa, a także współrzędne elipsoidalne stacji KRAW, do której wykonano nawiązanie pomiarów GPS. W kolumnie 3 tej tabeli podano dwie wartości wysokości normalnych, w układach Kronsztadt'60 i Kronsztadt'86. Wynika to z faktu, że na obszarze Krakowa wysokości reperów niwelacyjnych kl. I (w tym reперu nawiązania nr 7640 dla punktu G\_AGH) znane są w obu układach, zaś wysokość reperów niższych klas (w tym reперu nr 2011 wykorzystanego do nawiązania punktów G\_KAP i G\_KA1) jedynie w układzie Kronsztadt'60. Aby sprowadzić wysokości



wszystkich punktów do układu Kronsztadt'86 obliczono, średnią wartość przesunięcia wysokości między ww. układami. Na obszarze Krakowa wynosi ona 0.0338 m:

$$H^{Kronsztadt'86} = H^{Kronsztadt'60} - 0.0338 \text{ m} \quad (3)$$

Wartość przesunięcia obliczono na podstawie wysokości trzech reperów niwelacyjnych kl. I, zlokalizowanych w różnych częściach miasta. Pogrubioną czcionką podano w tabeli wartości pochodzące z bezpośredniego pomiaru GPS lub niwelacyjnego.

Tabela 1. Współrzędne i wysokości punktów grawimetrycznych,  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$  w nawiązaniu do KRAW w układzie ETRF'89

Table 1. The coordinates and heights of gravimetric points  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$  in relation to the KRAW point in ETRF'89 co-ordinate system

Punkt Point	$\varphi \lambda$ [° ' "] h [m]	H[m]	XY <sup>2000</sup>	$\zeta$ [m]	Lokalizacja Location
1	2	3	4	5	6
KRAW	<b>50 03 58.10489</b> <b>19 55 13.70794</b> <b>267.1010</b>	<b>227.231</b> <sup>(1)</sup> 227.265 <sup>(2)</sup>	5548334.89 7422715.58	39.870	Stacja permanentna GPS (ARP) The permanent station GPS (ARP)
G_AGH	50 03 58.0803 19 55 13.6187 241.54 <sup>(3)</sup>	<b>201.669</b> <sup>(1)</sup> 201.703 <sup>(2)</sup>	5548334.16 7422713.80	39.870 <sup>(3)</sup>	Geodezyjne Laboratorium Metrologiczne pawilon C-4, AGH The Geodetic Metrological Laboratory in pavilion C-4, AGH
G_KAP	50 03 11.8301 19 49 23.5260 335.53 <sup>(3)</sup>	<b>295.462</b> <sup>(2)</sup> 295.428 <sup>(1)</sup>	5547010.44 7415729.37	40.097 <sup>(3)</sup>	Fort „Skala”, Obserwatorium Astronomiczne UJ The „Skala”, Fort, Astronomical Observatory of the UJ
G_KAI	<b>50 03 14.04102</b> <b>19 49 27.64052</b> <b>341.599</b>	<b>301.531</b> <sup>(2)</sup> 301.497 <sup>(1)</sup>	5547077.46 7415812.29	40.102	Obserwatorium Astronomiczne UJ, przy pawilonie „Rotunda” Astronomical Observatory of the UJ at the “Rotunda” pavilion

(1) Kronsztadt'86; (2) Kronsztadt'60; (3) wartości obliczone na podstawie pomiaru niwelacji trygonometrycznej lub z wykorzystaniem undulacji quasi-geoidy

Kronsztadt'86, (2) Kronsztadt'60, (3) values calculated with the use of trigonometric levelling or quasi-geoid undulation

## PODSUMOWANIE

Zainstalowanie w Krakowie nowych punktów przeznaczonych do absolutnych pomiarów przyspieszenia siły ciężkości stanowiło jeden z etapów projektu badawczego dotyczącego *Jednolitego systemu grawimetrycznego odniesienia polskich stacji permanentnych GNSS i poligonów geodynamicznych*. Jeden z punktów znajduje się w budynku, na którym od kilku lat funkcjonuje stacja permanentna GPS KRAW. Dzięki temu punkt KRAW może w przyszłości stać się punktem wielowymiarowej, podstawowej osnowy geodezyjnej. Lokalizacja drugiego punktu nawiązuje do tradycji pomiarów grawimetrycznych na obszarze Krakowa i roli Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Jagiellońskiego. Do końca lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku pomiary bezwzględne wykonywano w piwnicach dawnego budynku obserwatorium, znajdującego się w centrum miasta. Punkt ten stracił na znaczeniu ze względu na wzmagający

się w tym rejonie ruch uliczny i związane z tym drgania podłoża uniemożliwiający wykonanie dokładnych obserwacji. Nowe stanowisko zlokalizowane zostało również w budynku obserwatorium, znajdującym się na obrzeżach Krakowa, w terenie słabo zainwestowanym. Taka lokalizacja zapewnia stałość warunków obserwacji przez długie lata. Oba nowe punkty grawimetryczne posiadają odpowiednią stabilizację, zapewniającą izolację od sąsiadujących posadzek. Wstępne obserwacje grawimetrem statycznym oraz dobowe obserwacje grawimetrem balistycznym FG-5, zrealizowane na tych punktach, wykazały stabilność uzyskiwanych wyników. Dla obu punktów wyznaczone zostały współrzędne geodezyjne  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$  w układzie EUREF'89 i wysokości w układzie Kronsztadt'86.

## PIŚMIENNICTWO

- Banasik P., 2007. Wyznaczenie wysokości normalnej oraz charakterystyk pola ciężkościowego dla stacji permanentnej KRAW, Geomatics and Environmental Engineering, 1/1/2007, Kraków.
- Boczar S., Góral W., Szewczyk J., 1995. Odchylenie pionu na obszarze Krakowa, Geodezja 1, Wydawnictwa AGH, Kraków.

## ESTABLISHMENT OF THE NEW POINTS DESTINATED TO ABSOLUTE GRAVITY DETERMINATIONS ON THE AREA OF KRAKÓW

**Abstract.** The problem of absolute gravity surveys on the whole area of the Krakow is discussed in the paper. There were two benchmarks grounded on the area of Krakow used for absolute surveys in the frame of KBN No. 5T12E03730 project "Uniform Gravimetric Reference Frame for Polish GNSS Stations and Geodynamic Test Fields". The already existing point has not been involved in the discussed surveys because of the ground instability. The gravimetric surveys were conducted dozen km away in Seismic Observatory in Ojców. New points in Krakow are located in the building of Astronomical Observatory of the Jagiellonian University in the Skala Fort and in Metrological Geodetic Laboratory of the Faculty of Mining Surveying and Environmental Engineering AGH University of Science and Technology. The point on the area of AGH is located nearby permanent GPS Kraw station which is involved to EPN network. The proceeding of the both points grounding and the method of determination their location is discussed in the paper. There are co-ordinate values presented in the paper as well. The first campaign of one day gravity determinations was carried on the both points in May 2007.

**Key words:** gravimetric measurements, GPS permanent station, gravimetric network

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 31.03.2008

Do cytowania – For citation: Banasik P., Skorupa B., 2008. Charakterystyka nowych punktów przeznaczonych do absolutnych pomiarów ciężkości na obszarze Krakowa. Acta Sci. Pol. Geod. Descr. Terr. 7(1), 15-27.

## WYZNACZANIE RÓŻNIC WYSOKOŚCI Z WYKORZYSTANIEM NIWELACJI SATELITARNEJ

Karol Dawidowicz, Jacek Lamparski, Krzysztof Świątek  
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono analizy dotyczące wpływu długości sesji obserwacyjnych GPS na wyniki wyznaczania różnic wysokości metodą niwelacji satelitarnej. W tym celu wykorzystano, przeprowadzone w ciągu kilku dni, ośmiogodzinne obserwacje wykonane na trzech punktach sieci testowej. Z przeprowadzonych analiz wynika, że sesje dwugodzinne mogą okazać się zbyt krótkie do wyznaczenia wysokości z dokładnością do 1–2 cm.

**Słowa kluczowe:** Globalny System Pozycyjny, niwelacja satelitarna

### WSTĘP

O ostatecznej dokładności wyznaczenia wysokości metodą niwelacji satelitarnej decyduje dokładność określenia wysokości elipsoidalnej oraz odstepu geoidy (quasi-geoidy) od elipsoidy WGS-84.

$$H = h - N \quad (1)$$

gdzie:  $H$  – wysokość normalna,  
 $h$  – wysokość elipsoidalna,  
 $N$  – odstęp geoidy od elipsoidy.

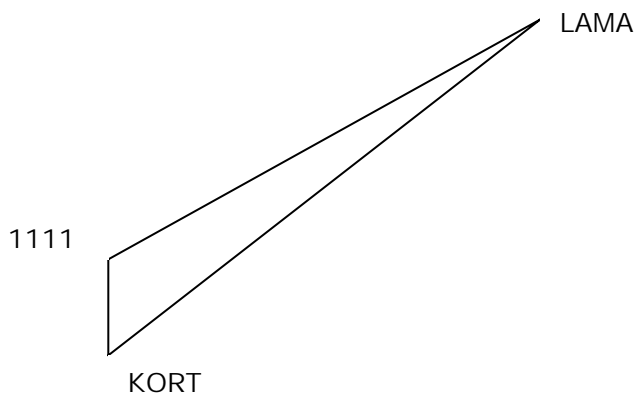
W literaturze trudno znaleźć analizy dotyczące czasu trwania sesji obserwacyjnej przy pomiarach związanych z wyznaczaniem wysokości. Jest to o tyle zrozumiałe, że długość ta jest uzależniona od wielu czynników, np.: metody pomiaru, długości wektorów, warunków pomiaru (geometria i ilość widocznych satelitów, występowanie zasłon itp.) czy wymaganej dokładności. Z reguły przyjmuje się, że dla wektorów 20–50 km sesja pomiaru statycznego powinna trwać 2–3 godziny. W instrukcjach programów obliczeniowych podkreśla się, że obserwacje wykonane odbiornikami dwuczęstotliwościowymi i opracowywane na częstotliwości L1c powinny trwać przynajmniej 2 godz. [ASHTECH XII GPPS 1990].

W jednym z dostępnych opracowań na temat wykorzystania systemu GPS do wyznaczania wysokości [Ollikainen 1997] – długości sesji nie przekraczały 3 godzin.

Autorzy opracowania analizują zmiany wartości różnic wysokości elipsoidalnych w zależności od długości sesji obserwacyjnych.

## OBSZAR BADAŃ

W niniejszej pracy przedstawiono analizy dotyczące zależności między uzyskiwanymi wysokościami a długością sesji. W obliczeniach wykorzystano ośmiogodzinne obserwacje GPS, wykonane na punktach sieci testowej. Szkic sieci przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Sieć testowa

Fig. 1. Test network

Najdłuższy mierzony wektor sieci (LAMA-1111) ma długość około 21,9 km, kolejny wektor (LAMA-KORT) – 20,1 km i najkrótszy (KORT-1111) – około 3,4 km.

Do analiz wykorzystano ośmiogodzinne sesje pomiarowe, wykonywane przez trzy dni w grudniu 2006 r. na punktach 1111 i KORT oraz wykorzystano obserwacje ze stacji permanentnej LAMA. Godziny rozpoczęcia i zakończenia sesji pomiarowych w poszczególnych dniach zawarte są w tab. 1.

Tabela 1. Czas trwania sesji pomiarowych

Table 1. Duration of measuring session

Dzień pomiarowy Measuring day	Sesje pomiarowe Measuring sessions	
	początek start	koniec end
347	13.00	21.00
350	10.00	18.00
351	10.00	18.00

**METODYKA BADAŃ I ANALIZA WYNIKÓW**

Obserwacje GPS opracowano z wykorzystaniem oprogramowania: GPPS5.2/FILLNET3.1. Programy GPPS i FILLNET są produktami firmy Ashtech [ASHTECH XII GPPS 1990]. Przeznaczone są głównie do opracowania pomiarów wykonanych odbiornikami tej firmy (tzw. „programy firmowe”). Programy GPPS i FILLNET dają dość szeroki zakres ingerencji w proces obliczeniowy.

W pierwszej kolejności z plików ośmiogodzinnych sesji obserwacyjnych wyodrębniono pliki sesji czterogodzinnych oraz dwugodzinnych. Do tego procesu wykorzystano program FILETOOL (program będący częścią pakietu GPPS), który umożliwia m.in. usuwanie części obserwacji z plików obserwacyjnych. Pozwoliło to na wyodrębnienie następujących sesji, które poddano standardowemu opracowaniu programem GPPS:

- 1 sesja ośmiogodzinna (oznaczenie **8H/0**),
- 2 sesje czterogodzinne (oznaczenia **4H/1** i **4H/2**),
- 4 sesje dwugodzinne (oznaczenia **2H/1**, **2H/2**, **2H/3** i **2H/4**).

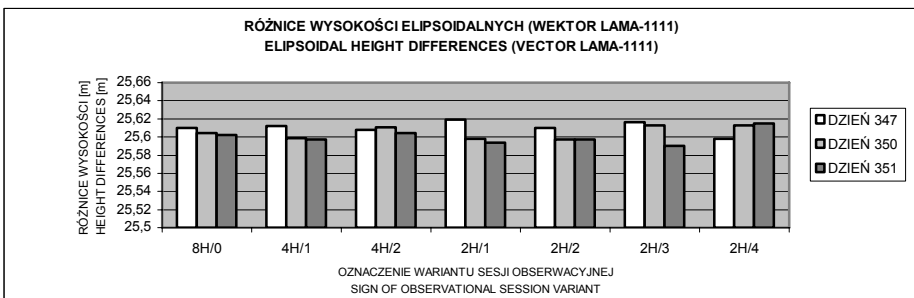
Wyżej wymienione, sztucznie wygenerowane sesje pomiarowe opracowywano przy użyciu zestawu programów GPPS/FILLNET. Opracowanie wykonano na częstotliwości L1 oraz z wykorzystaniem „wolno-jonosferycznej” kombinacji liniowej pomiarów fazowych (kombinacja L1c). Jako punkt stały sieci przyjęto stację permanentną LAMA ze współzrzednymi uzyskanymi z rozwiązania sieci EUREF-POL’92 [Zieliński i in. 1993]. Są to współzrzedne wyrażone w układzie ETRF’89:

$$B = 53^{\circ}53'32''63057$$

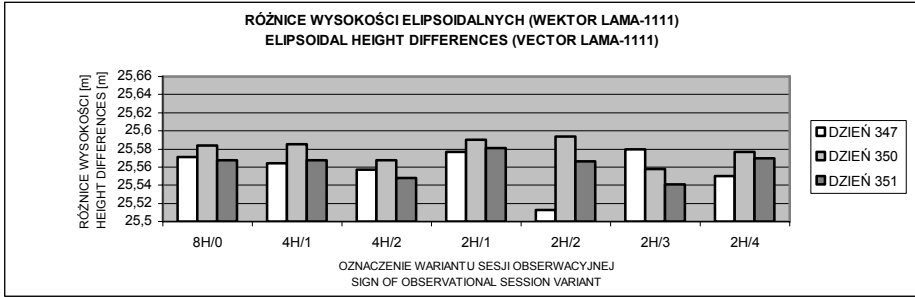
$$L = 20^{\circ}40'11''77529$$

$$H = 187.054 \text{ m}$$

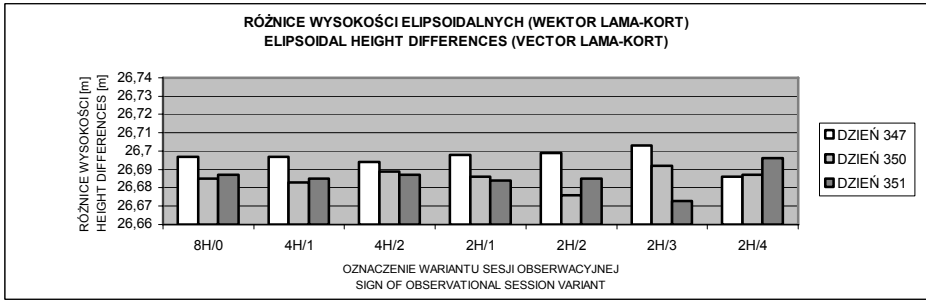
Uzyskane elipsoidalne wysokości punktów sieci w zależności od wygenerowanej wcześniej i przyjętej obecnie do opracowania sesji pomiarowej posłużyły do obliczenia różnic wysokości. W praktyce preferuje się wyznaczanie wysokości metodą niwelacji satelitarnej w oparciu o różnice wysokości elipsoidalnych, różnice odstępów geoidy od elipsoidy uzyskane z modelu wraz z dowiązaniem do reperów państwowych, a nie bezpośrednio ze wzoru 1. Takie podejście pozwala na wyeliminowanie z rozwiązania błędu systematycznego modelu geoidy [Instrukcja techniczna G-2]. Wyniki przedstawiono na wykresach 1–6.



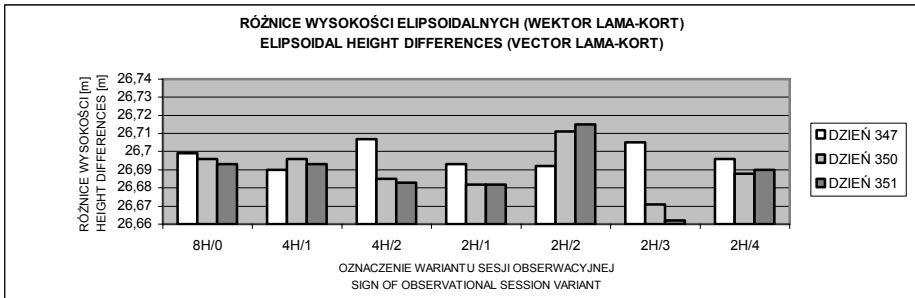
Wykres 1. Różnice wysokości elipsoidalnych (wektor LAMA-1111, strategia opracowania L1)  
 Diagram 1. Elipsoidal height differences (vector LAMA-1111, strategy of elaboration L1)



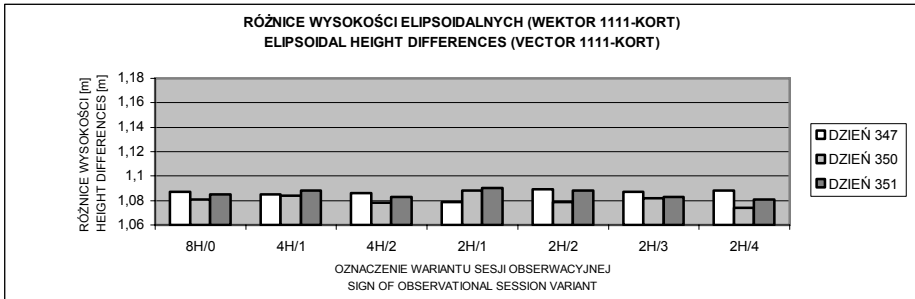
Wykres 2. Różnice wysokości elipsoidalnych (wektor LAMA-1111, strategia opracowania L1c)  
Diagram 2. Ellipsoidal height differences (vector LAMA-1111, strategy of elaboration L1c)



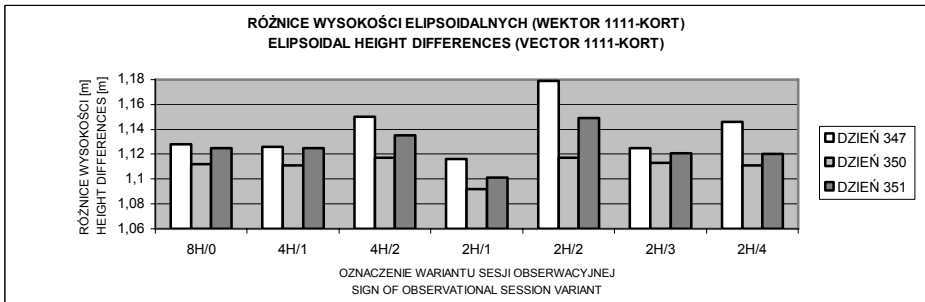
Wykres 3. Różnice wysokości elipsoidalnych (wektor LAMA-KORT, strategia opracowania L1)  
Diagram 3. Ellipsoidal height differences (vector LAMA-KORT, strategy of elaboration L1)



Wykres 4. Różnice wysokości elipsoidalnych (wektor LAMA-KORT, strategia opracowania L1c)  
Diagram 4. Ellipsoidal height differences (vector LAMA-KORT, strategy of elaboration L1c)



Wykres 5. Różnice wysokości elipsoidalnych (wektor 1111-KORT, strategia opracowania L1)  
Diagram 5. Elipsoidal height differences (vector 1111-KORT, strategy of elaboration L1)



Wykres 6. Różnice wysokości elipsoidalnych (wektor 1111-KORT, strategia opracowania L1c)  
Diagram 6. Elipsoidal height differences (vector 1111-KORT, strategy of elaboration L1c)

Na podstawie powyższych wykresów można stwierdzić, że różnice wysokości w poszczególnych wektorach uzyskane z opracowania sesji dwugodzinnych charakteryzują się wysoką niestabilnością. Dotyczy to zarówno porównań w jednym dniu pomiarowym, jak również porównań między kolejnymi dniami. W zależności od strategii opracowania i opracowywanego wektora różnice wysokości uzyskane z sesji dwugodzinnych zmieniają się w granicach 6–8 cm. Jednocześnie należy zwrócić uwagę, że wyniki uzyskane dla wektora 1111-KORT, opracowanego w strategii L1 (wykres 5), charakteryzują się wysoką zgodnością (zmiany w granicach 1–2 cm). Potwierdza to zasadę, że dla krótkich wektorów właściwszy jest pomiar i opracowanie obserwacji GPS na częstotliwości L1. Powyższe wykresy obrazują również, jak przyjęta strategia opracowania (L1 bądź L1c) może wpłynąć na końcowe rezultaty. Opracowanie tych samych sesji we wspomnianych wcześniej dwóch różnych strategiach prowadzi do wyraźnie odbiegających od siebie wyników. Szczególnie mocno widoczne jest to dla krótkich wektorów (takich jak 1111-KORT), gdzie opracowanie tych samych danych w dwóch wspomnianych wcześniej strategiach prowadzi do wyznaczenia wartości różnic wysokości wektora, odbiegających od siebie nawet do 10 cm (wykresy 5 i 6, dzień 347, sesja 2H/2).

**WNIOSKI**

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że długość sesji obserwacyjnej GPS ma istotny wpływ na wyznaczanie elipsoidalnych wysokości punktów. Szcze-

gólnie przy długich wektorach (rzędu 20 km i więcej), jak to miało miejsce w rozpatrywanym eksperymencie i wykorzystaniu firmowego oprogramowania w opracowaniu, sesje dwugodzinne mogą okazać się zbyt krótkie do wyznaczenia wysokości z dokładnością 1–2 cm. Duże znaczenie dla końcowych rezultatów, szczególnie przy tak krótkich sesjach, ma również wybór strategii opracowania. Przedstawione wyniki uwidaczniają, że dla krótkich wektorów (rzędu kilku kilometrów) lepszą strategią jest opracowanie na częstotliwości L1.

## PIŚMIENNICTWO

- ASHTeCH XII GPPS., 1990. GPS Post Processing System, Ashtech INC, Sunnyvale, CA, USA.
- Banasik P., 1999. Wyznaczenie przebiegu quasi-geoidy w rejonie Krakowa na podstawie pomiarów niwelacyjnych i GPS, rozprawa doktorska, Kraków.
- Dawidowicz K., Lamparski J., Świątek K., 1997. The Geoid Determination on the Basis of Satellite Levelling and a Chosen Model, Reports of Geodesy 5/97.
- Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Collins J., 1994. GPS Theory and Practice, Springer-Verlag, Austria, Wien.
- Łyszkowicz A., 1991. Wyznaczanie różnic wysokości z wyników pomiarów GPS i odstępów geoidy od elipsoidy, Geodezja i Kartografia, t. XL.
- Instrukcja technicznej G-2., 2001. Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna i przeliczenia współrzędnych między układami, wydanie piąte zmienione, GUGiK, Warszawa.
- Ollikainen M., 1997. Determination of Orthometric Heights using GPS Levelling, Publications of the Finnish Geodetic Institute, No. 123, Kirkkonummi.
- Praca zbiorowa., 1993. Niwelacja precyzyjna, Polskie Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych im. E. Romera S. A., Warszawa.
- Volcho P.I., Savchuk S.G., Trevogo I.S., Tretyak K.R., 1999. About efficient determination of normal points heights on local geodesic firing ground, International Scientific and Technological Symposium „Geomonitoring-99”, Ukraine, Morshyn.
- Zieliński J.B., Jaworski L., Zdunek R., Seeger H., Engelhardt G., Toppe F., Luthardt J., 1993. Final Report about EUREF-POL 1992 GPS Campaign, (praca niepublikowana), Warszawa.

## THE HEIGHT DIFFERENCES APPOINTMENT USING SATELLITE LEVELING

**Abstract.** The paper presents analyses concerning the influence of length GPS observational session on heights differences appointment results with satellite leveling. In elaboration the eight-hour GPS observation, carried within several days, on three points of test networks were used. Carried analyses have exerted that the two-hour GPS session can be too short for points appointment with 1-2 cm accuracy.

**Key words:** Global Positioning System, satellite leveling

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 31.03.2008

Do cytowania – For citation: Dawidowicz K., Lamparski J., Świątek K., 2008. Wyznaczanie różnic wysokości z wykorzystaniem niwelacji satelitarnej. Acta Sci. Pol. Geod. Descr. Terr. 7(1), 29-34.



## KONCEPCJA POMIARU I WYRÓWNIANIA PRZESTRZENNYCH CIĄGÓW TACHIMETRYCZNYCH W ZASTOSOWANIACH GEODEZJI ZINTEGROWANEJ

Krzysztof Karsznia

Leica Geosystems Sp. z o.o. w Warszawie

**Streszczenie.** Postępujący rozwój technologii geoinformatycznych, elektronicznych i telekomunikacyjnych powoduje, że liczne opracowania z zakresu integracji pomiarów geodezyjnych znajdują coraz szersze zastosowanie w różnych zadaniach inżynierskich. Wiele prac realizacyjnych, inwentaryzacyjnych czy związanych z monitorowaniem przemieszczeń i odkształceń wymaga wysokiej dokładności i wiarygodności pomiarów przy stosunkowo krótkim czasie pozyskiwania danych przestrzennych. Sprostanie tym założeniom staje się możliwe dzięki technologiom geodezji zintegrowanej. Istotą zintegrowanych prac geodezyjnych jest bowiem korzystanie z wielu znanych technik pomiarowych w celu wyznaczenia kształtu obiektu oraz różnych jego parametrów. Łącząc wspomniane technologie z odpowiednim oprogramowaniem sterującym oraz poddając standaryzacji, mówimy o geomatyce, której rozwiązania bazujące na różnych dziedzinach wiedzy zacieśniają powoli różnice wynikające z dotychczasowego, klasycznego podziału geodezji.

W artykule przedstawiono opracowaną koncepcję pomiaru i wyrównania przestrzennych ciągów tachimetrycznych w nawiązaniu do punktów kontrolnych (wyznaczonych przez pomiar GNSS) oraz do parametrów aktualnego modelu geoidy. Po wykonaniu precyzyjnej orientacji stanowiska tachimetru oraz nawiązaniu do punktów odniesienia możliwe będzie wiarygodne pozycjonowanie punktów terenowych metodą przestrzennego ciągu tachimetrycznego. Zaproponowano koncepcję wyrównania takiego ciągu metodami: rekurencyjną oraz wielomianowej aproksymacji poprawek składowych odchylenia linii pionu na poszczególnych stanowiskach. Bardzo ważnym zadaniem jest również analiza dokładności pomiarów, zarządzanie pozyskanymi danymi, ich wizualizacja i wnioskowanie (procesy decyzyjne mające wpływ na bezpieczeństwo ludzi i obiektów). Jako konkluzję tych rozważań przedstawiono propozycję opracowania systemu pomiarowego, przeznaczonego do monitorowania kształtu i stanu obiektu inżynierskiego. Dzięki implementacji opracowanych algorytmów wyrównań do opracowanej technologii możliwe będzie prowadzenie precyzyjnych, zintegrowanych pomiarów terenowych oraz efektywne wnioskowanie odnośnie krótkookresowych zmian zachodzących na badanym obszarze.

**Słowa kluczowe:** integracja pomiarów geodezyjnych, geomatyka, metody wyrównań, algorytmy obliczeniowe

## WSTĘP

W zadaniach inżynierskich, których istotą jest określenie kształtu badanego obiektu, jego aktualnego stanu oraz dynamiki, coraz częściej stosuje się kombinację różnych metod pomiaru oraz zintegrowaną pracę wielu sensorów. Prowadzony w ten sposób monitoring jest efektem interdyscyplinarnego działania specjalistów z dziedzin: geodezji, geotechniki, informatyki czy telekomunikacji. Zarówno dane przestrzenne dotyczące geometrii badanego obiektu, jak też informacje odnośnie zachodzących tam procesów geologicznych i geotechnicznych zasilają bazę danych, umożliwiając ich przetwarzanie i wizualizację. Wykonanie prac geodezyjnych poprzedzone jest doбором punktów nawiazania (znajdujących się poza strefą oddziaływania zjawiska badanego na danym obiekcie) i wyznaczeniem ich współrzędnych przestrzennych w określonym układzie odniesienia. Pomiar punktów kontrolowanych może odbywać się ze stanowisk tachimetrycznych (stałych bądź mobilnych) przy wsparciu technik satelitarnych GPS/GNSS (pomiar statyczny i w czasie rzeczywistym RTK). Szybkość obecnie stosowanych procesorów komputerowych, jak również nowe rozwiązania w zakresie transmisji danych dają możliwość opracowania wyników pomiarów w czasie rzeczywistym. Rozwiązania takie znajdują coraz szersze zastosowanie podczas badania deformacji terenów [Góral, Szewczyk 2004] oraz w różnorodnych projektach monitoringu geodezyjnego [Sippel 2001, Duffy et al. 2001]. Wspomnianych systemów używa się także podczas wyznaczania parametrów przemieszczeń i odkształceń obiektów terenowych oraz w trakcie obsługi inwestycji budowlanych [James 2006]. Szczęólnego znaczenia nabiera zatem zagadnienie integracji różnych technik pomiaru geodezyjnego oraz interoperacyjności systemowej [norma PN-ISO 19101]. Postęp technologiczny wpłynął także na sposób definiowania pojęć w dziedzinie geodezji. Mówiąc o tachimetrii elektronicznej, mamy na myśli precyzyjne, wysoce zaawansowane instrumenty pomiarowe pozwalające wykonać pomiar z dokładnością milimetrową. Połączenie tachimetru z odbiornikiem GPS – przykładem jest zintegrowana stacja „SmartStation” opatentowana przez firmę Leica Geosystems (rys. 1) – daje możliwość natychmiastowego wyznaczenia współrzędnych stanowiska z dokładnościami charakteryzującymi technikę RTK ( $\pm 2-3$  cm), a następnie pozyskiwanie danych przestrzennych z dokładnościami oferowanymi przez instrument (zwykle na poziomie kilku mm). Rozwój i rozbudowa systemów GNSS („Global Navigation Satellite Systems” – GPS+GLONASS+GALILEO) dają dodatkowe możliwości pozycjonowania punktów również w miejscach, w których dotychczasowy pomiar technikami satelitarnymi nie był w pełni możliwy (zakrycie horyzontu, lokalizacja u podnóży skarp, w wąwozach, dolinach itp.) [Takac et al. 2005]. Podczas prac terenowych służby geodezyjne wielu krajów korzystają z serwisów precyzyjnego pozycjonowania satelitarnego w czasie rzeczywistym. W czasie pracy w systemie aktywnej sieci geodezyjnej istnieje możliwość pozycjonowania punktów z dokładnością  $\pm 3-5$  cm [Bosy 2007]. Korzystając z zalet zintegrowanej stacji „SmartStation” [Lorse, Schleussinger 2006], łączącej zalety odbiornika satelitarnego GNSS oraz zaawansowanego tachimetru elektronicznego (rys. 1), możemy zaplanować w terenie sieć przestrzennych ciągów tachimetrycznych, których stanowiska wyznaczane będą techniką RTK, natomiast orientacja i nawiazanie zostaną wykonane w odniesieniu do zastabilizowanych wcześniej punktów kontrolnych (o współrzędnych wyznaczonych przez statyczny, precyzyjny pomiar GNSS).



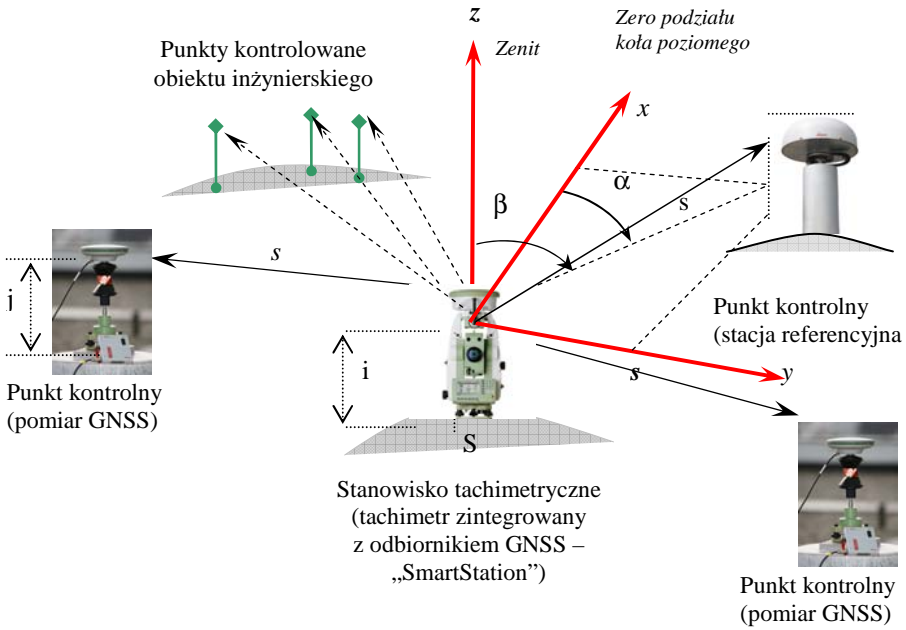
Rys. 1. Widok zintegrowanej stacji pomiarowej SmartStation stanowiącej połączenie odbiornika GPS z precyzyjnym tachimetrem elektronicznym oraz przykłady jej użycia (źródło: Leica Geosystems)

Fig. 1. View of an integrated surveying station (SmartStation) consisting of a GPS receiver and a precise electronic total station with usage example (source: Leica Geosystems)

Dysponując aktualnym modelem geoidy dla danego obszaru, możemy wykorzystywać także jego parametry (takie jak składowe odchylenia linii pionu  $\xi$  i  $\eta$  oraz wysokość geoidy  $N$  w danym punkcie pomiarowym) do precyzyjnego zorientowania stanowisk tachimetrycznych, a następnie do precyzyjnego pozycjonowania punktów kontrolowanych w przestrzeni. Programując stację tachimetryczną lub łącząc ją w sposób klasyczny (kabel) albo bezprzewodowy (moduł Bluetooth®) z komputerem zewnętrznym (laptop lub PDA), możemy zbudować system służący do badania deformacji terenu.

## POJEDYNCZE STANOWISKO TACHIMETRYCZNE

W celu wyznaczenia parametrów deformacji oraz krótkookresowych zmian geometrii obiektu terenowego należy na badanym obszarze zaplanować przebieg ciągu lub zespołu ciągów tachimetrycznych. Rysunek 2 przedstawia schemat pomiarowy pojedynczego stanowiska, na którym znajduje się precyzyjny tachimetr elektroniczny zintegrowany z odbiornikiem GPS/GNSS. Nawiązanie wykonane jest do punktów kontrolnych (o współrzędnych wyznaczonych techniką satelitarną GPS/GNSS), których pozycja może być aktualizowana co pewien czas w nawiązaniu do stacji referencyjnej (znajdującej się poza terenem oddziaływania badanego zjawiska).



Rys. 2. Schemat pomiarowy dla pojedynczego stanowiska tachymetrycznego  
Fig. 2. Surveying diagram for a single tacheometric station

W trakcie pomiaru tachymetrycznego pomiarowi w terenie podlegają kierunki poziome  $\alpha$ , kąty zenitalne  $\beta$ , odległości przestrzenne  $s$ , a także wysokość osi celowej instrumentu  $i$  oraz wysokość celu  $j$ . Współrzędne topocentryczne, wyznaczone w lokalnym układzie stacji tachymetrycznej, wyznaczone są według znanych zależności:

$$x = s \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (1.1)$$

$$y = s \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (1.2)$$

$$z = s \cdot \cos \beta - j \quad (1.3)$$

natomiast parametrami orientacji instrumentu są wartości składowych odchylenia pionu  $\xi$  i  $\eta$  oraz stała orientacyjna  $\Sigma$  – kierunek zera koła poziomego. Układ pomiarowy tachimetru  $(x, y, z)$  jest więc obrócony względem układu astronomicznego  $(x_a, y_a, z_a)$  w płaszczyźnie poziomej o kąt  $\Sigma$ , co opisuje formuła:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Sigma) & \sin(\Sigma) & 0 \\ -\sin(\Sigma) & \cos(\Sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Oznaczając  $R_1, R_2, R_3$  jako macierze transformacji [Osada 2002]:

$$R_1(B, L) = \begin{pmatrix} -\sin(B) \cdot \cos(L) & -\sin(B) \cdot \sin(L) & \cos(B) \\ -\sin(L) & \cos(L) & 0 \\ \cos(B) \cdot \cos(L) & \cos(B) \cdot \sin(L) & \sin(B) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$R_2(\xi, \eta, B) = \begin{pmatrix} 1 & -\eta \cdot \tan(B) & -\xi \\ \eta \cdot \tan(B) & 1 & -\eta \\ \xi & \eta & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$R_3(\Sigma) = \begin{pmatrix} \cos(\Sigma) & \sin(\Sigma) & 0 \\ -\sin(\Sigma) & \cos(\Sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

gdzie  $B$  i  $L$  oznaczają kolejno szerokość i długość geodezyjną stanowiska, otrzymuje się wzór dla przeliczenia przyróżów współrzędnych geocentrycznych  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  na współrzędne tachimetryczne  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(\Sigma) \cdot R_2(\xi, \eta, B) \cdot R_1(B, L) \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Dzięki rozwiązaniu układu uzyskamy:

- parametry orientacji układu topocentrycznego  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\Sigma$  – w wyniku wyznaczenia współrzędnych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  punktów kontrolnych,
- przeliczone współrzędne z układu topocentrycznego  $x$ ,  $y$ ,  $z$  na współrzędne geocentryczne  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – na podstawie wyznaczonych wcześniej parametrów  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\Sigma$ ,
- przybliżone współrzędne punktów w układzie topocentrycznym  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , a następnie przybliżone wartości obserwacji tachimetrycznych  $s$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Współrzędne  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pomierzonych punktów są przeliczane na współrzędne geocentryczne  $X, Y, Z$  według zależności [Osada 2002]:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} + (R_3(\Sigma) \cdot R_2(\xi, \eta, B_S) \cdot R_1(B_S, L_S))^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

gdzie jako  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $Z_S$ ,  $B_S$ ,  $L_S$ ,  $h_S$  oznaczono współrzędne elipsoidalne kartezjańskie oraz geodezyjne stanowiska tachimetrycznego.

Jako „przybliżone” współrzędne stanowiska przyjmuje się ich wartości z pomiaru RTK (wykorzystując moduł satelitarny SmartStation). Prowadzenie dalszych obliczeń polega na zastosowaniu metod numerycznych, dzięki którym, w sposób iteracyjny osiąga się bardzo dokładne wyniki – na poziomie pojedynczych milimetrów. W opracowaniu [Karsznia 2004], dla celów precyzyjnego wyznaczenia współrzędnych stanowisk tachimetrycznych, zaproponowano algorytm sprzężonych gradientów Levenberga-Marquardta [Moré 1978], którego główną zaletą jest wysoka zbieżność i odporność

(ang. „robustness”). Współrzędne elipsoidalne układu pomiarowego tachimetru  $B, L, h$  wyznaczone są na podstawie wcięcia i wyrównania stanowiska w nawiązaniu do kilku punktów kontrolnych badanego obiektu oraz do obowiązującego modelu geoidy. Testy weryfikujące założenia teoretyczne autor wykonał, przyjmując parametry modelu geoidy niwelacyjnej 2001 [Pażus et al. 2002]. Wiele obiektów poddanych inżynierskiemu monitoringowi deformacji i przemieszczeń posiada z reguły model geoidy lokalnej, której parametry  $(\xi, \eta, N)$  należy wówczas przyjąć.

Dla punktów nawiązania (o współrzędnych kartezjańskich geocentrycznych  $X, Y, Z$  oraz topocentrycznych  $x, y, z$ ) sporządzone zostaną równania transformacji według zależności (1.8). Wynik uzyskuje się po uruchomieniu algorytmu numerycznego przy zastosowaniu odpowiedniej funkcji rozwiązywania układów równań (aplikacja *Mathcad 2001i*):

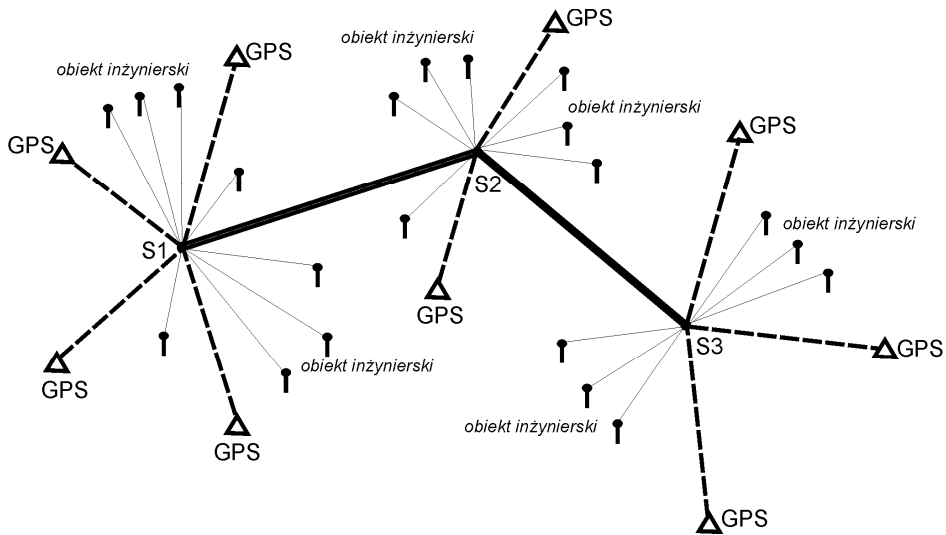
$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \Sigma \\ B_S \\ L_S \\ h_S \end{pmatrix} = \text{Minerr}(\xi, \eta, \Sigma, B_S, L_S, h_S) \quad (1.10)$$

Funkcja *Minerr* minimalizuje tzw. „wektor błędów”, czyli odchyłeń wartości oczekiwanych poszczególnych zmiennych od założonych początkowo ich warunków brzegowych. W przypadku układów nieliniowych użyta procedura wykorzystuje metody: sprzężonych gradientów, quasi-Newtona oraz algorytm MINPACK bazujący na rozwiązaniu Levenberga-Marquardta [Morè et al. 1980].

W wyniku prowadzonych obliczeń otrzymujemy precyzyjne współrzędne geocentryczne elipsoidalne stanowiska tachimetru oraz wartości parametrów orientacji układu lokalnego. Po przejściu ze współrzędnych elipsoidalnych na kartezjańskie  $X, Y, Z$  [Osada 2003, Vermeille 2002], stosując wzór transformacyjny (1.9), możliwe jest wyznaczenie współrzędnych wszystkich pomierzonych punktów kontrolnych. Wykonanie do nich pomiarów powtarzalnych pozwoli zatem określić parametry przemieszczeń i deformacji badanego obiektu.

## KONCEPCJE ZINTEGROWANYCH CIĄGÓW TACHIMETRYCZNYCH

Stosując metody zintegrowanego pomiaru geodezyjnego, można wyznaczać wszelkie stany deformacji terenu, a w szczególności przemieszczenia poziome i pionowe, odkształcenia poziome i pionowe oraz nachylenia i krzywizny [Góral, Szewczyk 2004]. Pojedyncze stanowiska tachimetryczne mogą być łączone w ciągi (rys. 3), co umożliwi pozyskiwanie danych terenowych w miejscach trudno dostępnych oraz wszędzie tam, gdzie warunki zewnętrzne utrudniają wykonanie samego tylko pomiaru satelitarnego GNSS. Dodatkową zaletą stosowania przestrzennych ciągów tachimetrycznych jest możliwość badania aktualnego stanu obiektów inżynierskich i inwestycji budowlanych, prowadzenia zintegrowanego monitoringu przemieszczeń, deformacji czy osiadań terenów objętych eksploatacją górniczą [Guziel 2002].



Rys. 3. Schemat ciągu tachimetrycznego złożonego z przestrzennych stanowisk instrumentu nawiązanego do punktów GPS

Fig. 3. Example diagram of a tacheometric traverse consisting of spatial stations connected to GPS points

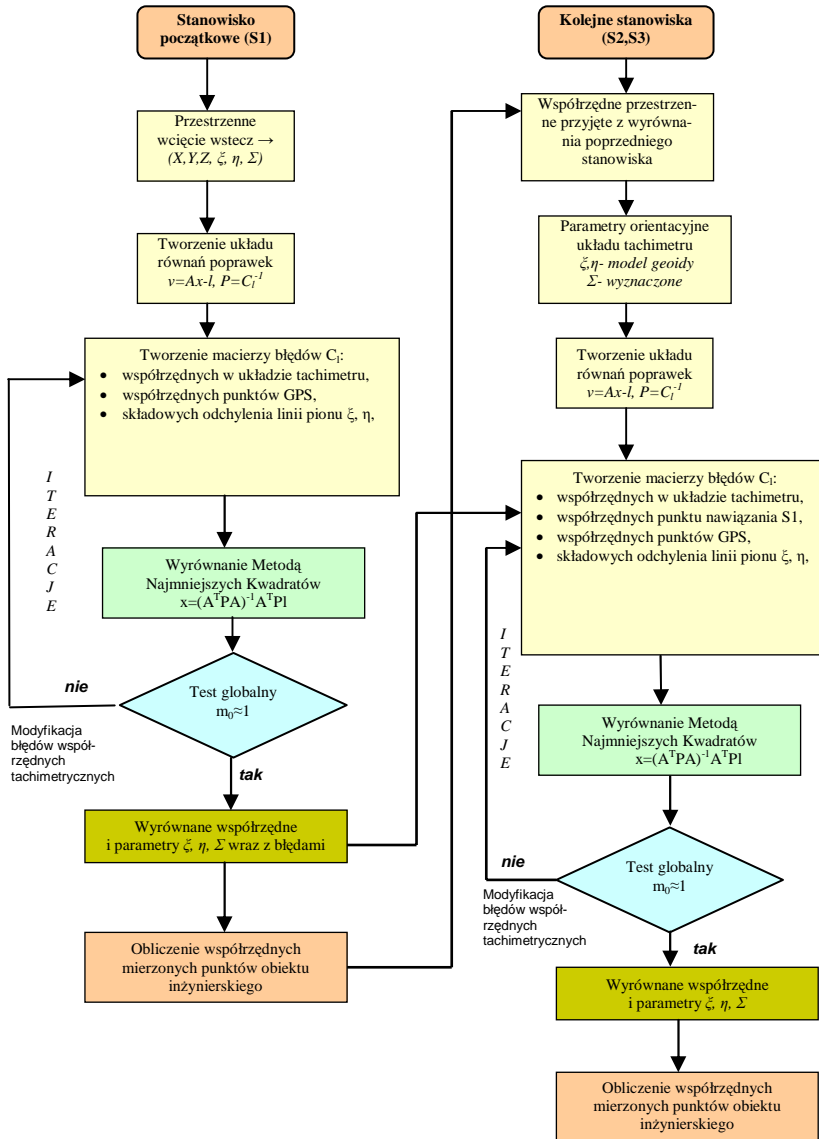
Bazując na analizach wykonanych dla pojedynczych stanowisk, zaproponować można rekurencyjny algorytm wyrównania przestrzennego ciągu tachimetrycznego w nawiązaniu do punktów kontrolnych i geoidy [Karsznia 2004]. Schemat przebiegu postępowania przedstawiono na rys. 4.

W kolejnym etapie badań opracowano sposób wyrównania ciągu tachimetrycznego z jednoczesnym modelowaniem poprawek do składowych odchylenia linii pionu pomiędzy stanowiskami. Wzajemny rozkład wartości  $\xi$ ,  $\eta$  przedstawiono za pomocą funkcji:

$$\xi_n = \xi_p + a_1 + b_1 \Delta B_{n-p} \quad (2.1)$$

$$\eta_n = \eta_p + a_2 + b_2 \Delta L_{n-p} \quad (2.2)$$

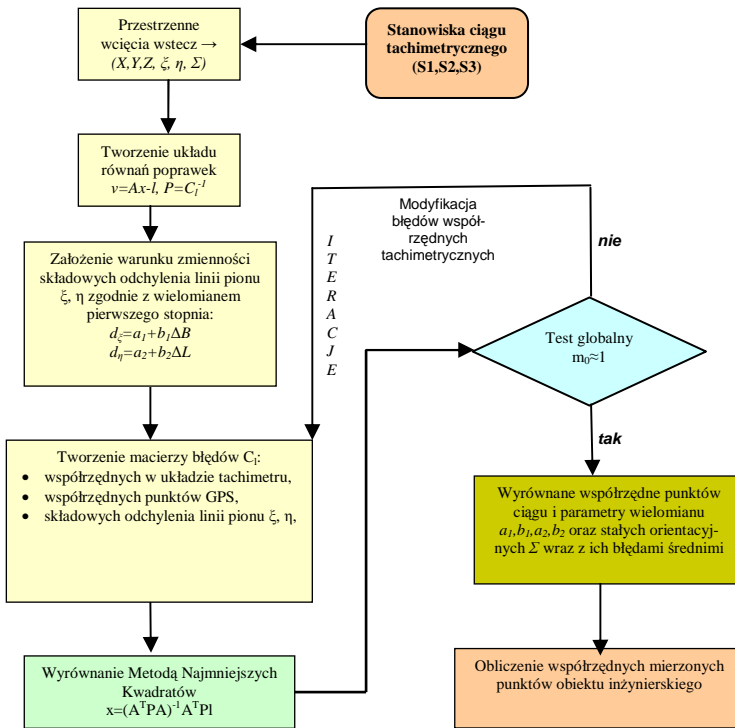
gdzie:  $p$  – poprzednie stanowisko ciągu,  $n$  – kolejne stanowisko ciągu,  $\Delta B$ ,  $\Delta L$  – przyrost współrzędnych geodezyjnych  $B$ ,  $L$  między kolejnymi stanowiskami ciągu.



Rys. 4. Schemat wyrównania przestrzennego ciągu tachimetrycznego – metoda rekurencyjna  
 Fig. 4. Flow chart of a tacheometric traverse adjustment – recurrent method



Schemat postępowania w takim przypadku uwidoczniony został na rys. 5.



Rys. 5. Schemat wyrównania przestrzennego ciągu tachimetrycznego – metoda warunkowa  
Fig. 5. Flow chart of a tacheometric traverse adjustment – conditional method

Opracowane procedury zweryfikowano za pomocą testów terenowych (dwa obiekty o odmiennej charakterystyce – tereny nizinne i górskie). Wyniki opracowań [Karsznia 2004] pozwalają sformułować wniosek, iż przyjęcie parametrów  $\xi$  i  $\eta$  z modelu geoidy umożliwia wykonanie bezwzględnej orientacji stanowiska, co przy zastosowaniu odpowiedniego instrumentu (precyzyjny tachimetr elektroniczny) oraz staranności pracy pomoże pozycjonować punkty z wysoką dokładnością (od kilku:  $\pm 3$  mm do kilkunastu:  $\pm 16$  mm). Wpływ błędów osobowych zminimalizuje się przez zwiększenie liczby obserwacji lub zastosowanie rozwiązań technologicznych – np. przez użycie zmotoryzowanych stacji tachimetrycznych z automatycznym rozpoznawaniem celu („Automated Target Recognition” – ATR) [Duffy et al. 2001]. Zaprezentowane algorytmy można oprogramować w środowisku GeoC++ Development Kit (Leica Geosystems), a następnie w postaci aplikacji pomiarowej zainstalować w zintegrowanej stacji „SmartStation”. Dzięki temu geodeta może wykonywać program pomiarowy w terenie i na bieżąco kontrolować wyniki swoich prac.

## PROPOZYCJE ZASTOSOWAŃ

Zaprezentowane w artykule metody wyrównań i integracji przestrzennych stanowisk i ciągów tachymetrycznych można zaimplementować do wielu zagadnień związanych z dynamiką otaczającego nas świata, choćby jako usprawnienie stosowanych systemów monitoringu obiektów inżynierskich. Stanowiska tachymetryczne umieszczone są często w kontenerach pomiarowych (rys. 6), skąd prowadzi się permanentne obserwacje punktów kontrolowanych. Tachimetria elektroniczna wsparta pomiarami GNSS oraz pracą sensorów geotechnicznych jest podstawą znanych rozwiązań – np. Geodetic Monitoring System” (Leica GeoMoS) czy „Dam Deformation Monitoring” (DDM) [Duffy et al. 2001]. Łączenie stanowisk tachymetrycznych w strukturę ciągów może mieć miejsce w przypadku monitoringu prowadzonego na znacznych obszarach (konieczność zapewnienia zasięgu pomiaru do punktów kontrolowanych) lub na terenach zurbanizowanych (przykładowo w trakcie realizacji inwestycji typu budowa kolei podziemnej czy tunelu). Wówczas istnieje potrzeba zainstalowania kilku lub nawet kilkunastu stanowisk tachymetrycznych pracujących w czasie rzeczywistym.



Rys. 6. Widok przykładowego kontenera stacji tachymetrycznej w zadaniach zintegrowanego monitoringu obiektów inżynierskich (źródło: Leica Geosystems)

Fig. 6. Example view of a measuring container with a total station in applications of integrated monitoring of engineering objects (source: Leica Geosystems)

Oprócz badania przemieszczeń i odkształceń dużych obiektów geotechnicznych, struktur geologicznych i konstrukcji inżynierskich system bazujący na przestrzennych ciągach tachymetrycznych oraz na rozwiązaniach geodezji zintegrowanej znajduje szereg zastosowań w badaniach osiadań terenów budowlanych, a także krótkookresowych zmian obiektów inżynierskich. Przy zastosowaniu pseudolitów [Dai et al. 2001] można zastosować go również w miejscach pozbawionych możliwości odbioru sygnałów GNSS (tunele, hale produkcyjne, górskie doliny, tereny uprzemysłowione). Dużym usprawnieniem prac realizowanych za pomocą opisanej technologii będzie, niewątpliwie, aktywna sieć geodezyjna, której serwisy pozwolą w pełni zastosować zintegrowaną stację typu „SmartStation”.

## PODSUMOWANIE

Geodezja zintegrowana zajmuje szczególne miejsce w pracach związanych z wyznaczaniem parametrów przemieszczeń i odkształceń obiektów inżynierskich oraz z badaniem deformacji. Dzięki możliwości łączenia i wspólnego przetwarzania wyników pomiarów terenowych możemy zoptymalizować proces pozyskiwania danych przy jednoczesnym zapewnieniu wysokiej dokładności i wiarygodności otrzymanych rezultatów.

W artykule przedstawiono możliwość zastosowania metody wyrównania i integracji przestrzennych stanowisk oraz ciągów tachimetrycznych w badaniu krótkookresowych zmian zachodzących na obiekcie. Na świecie obserwuje się wzmożony wzrost zainteresowania służb geodezyjnych i geotechnicznych problematyką automatycznego zbierania i przetwarzania informacji o obiektach inżynierskich czy o zjawiskach naturalnych. Poszukiwane są nowe rozwiązania technologiczne oraz pojawia się zapotrzebowanie na budowę systemów prowadzących analizę wyników włącznie z możliwością dalszego wnioskowania (interpolacja oraz ekstrapolacja danych, a także optymalizacja procesów decyzyjnych). Biorąc również pod uwagę wzrost inwestycji budowlanych oraz coraz większe zapotrzebowanie na surowce energetyczne, badanie stanu obiektów oraz deformacji terenu będzie z pewnością stanowiło jedno z głównych wyzwań stawianych współczesnej geodezji.

## PIŚMIENNICTWO

- Bosy J., 2007. Wielofunkcyjny system precyzyjnego pozycjonowania satelitarne ASG-EUPOS, prezentacja projektu podczas konferencji pt. „Zastosowania wielofunkcyjnego systemu precyzyjnego pozycjonowania satelitarne ASG-EUPOS, Główny Urząd Geodezji i Kartografii, Warszawa 21 marca 2007, (źródło:[http://www.asg-eupos.gov.pl/plain\\_site/promocja/do\\_pobrania/prezentacje\\_z\\_konferencji/asg\\_eupos\\_j\\_bosy](http://www.asg-eupos.gov.pl/plain_site/promocja/do_pobrania/prezentacje_z_konferencji/asg_eupos_j_bosy)).
- Dai L., Wang J., Rizos CH., Han SH., 2001. Applications of pseudolites in deformation monitoring systems, Proceedings of the 10th FIG Symposium on Deformation Measurements, 19–22 March 2001, Orange, California USA.
- Duffy M.A., Hill CH., Whitaker C., Chrzanowski A., Lutes J., Bastin G., 2001. An automated and integrated monitoring program for Diamond Valley Lake in California, Proceedings of the 10th FIG Symposium on Deformation Measurements, 19–22 March 2001, Orange, California USA.
- Góral W., Szewczyk J., 2004. Zastosowanie technologii GPS w precyzyjnych pomiarach deformacji, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków.
- Guziel A., 2002. Deformacje górotworu, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- James H., 2006. Automatic deformation monitoring, The American Surveyor, March/April 2006.
- Karsznia K., 2004. Metody wyrównań i integracji przestrzennych ciągów tachimetrycznych w nawiązaniu do punktów GPS i geoidy, rozprawa doktorska, Wydział Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji, Akademia Rolnicza we Wrocławiu.
- Karsznia K., 2004. Metody wyrównań i integracji przestrzennych ciągów tachimetrycznych w nawiązaniu do punktów GPS i geoidy, Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej we Wrocławiu, Geodezja i Urządzenia Rolne XXII, nr 500.
- Lorse G., Schleussinger K., 2006. Messen ohne stationieren, Effizienter Einsatz von GPS + TPS, Aktuell – Magazin für Vermessung und Systemlösungen, No. 23, Dezember 2006, Monachium, 3–7.
- Moré J.J., Garbow B.S., Hillstrom K.E., 1980. User Guide for MINPACK-1, Mathematics and Computers (UC-32), ANL 80-74, Argonne National Laboratory, Applied Mathematics Division, Argonne, Illinois.
- Osada E., 2002. Geodezja, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

- Osada E., Karsznia K., Muszyński Z., Olejnik P., 2002. Metoda przestrzennego wyrównania stanowiska pomiarowego tachimetru w nawiązaniu do punktów GPS i geoidy, Raport serii SPR 12/2002, Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Politechnika Wrocławska.
- Pazus R., Osada E., Olejnik S., 2002. Geoida niwelacyjna 2001, *Geodeta – Magazyn Geoinformacyjny* nr 5(84).
- PN-EN ISO 19101., 2005. Norma Polskiego Komitetu Normalizacyjnego, Informacja geograficzna – Model tworzenia norm, Warszawa 2005.
- SIPPEL K., 2001. Modern monitoring system development, Proceedings of the 10th FIG Symposium on Deformation Measurements, Session III – „Software for deformation data collection, processing and analysis”, 19–22 March 2001, Orange, California USA.
- Takac F., Hilker C., Kotthoff H., Richter B., 2005. Combining measurements from multiple Global Navigation Satellite Systems for RTK applications, literatura techniczna, International Symposium on GPS/GNSS, December 8–10, 2005, Hongkong.
- Vermeille H., 2002. Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates, *Journal of Geodesy* 76, Springer Verlag, 451–454.

## A CONCEPT OF SURVEYING AND ADJUSTMENT OF SPATIAL TACHEOMETRIC TRAVERSES IN THE APPLICATIONS OF INTEGRATED GEODESY

**Abstract.** Progressing development of geo-scientific technologies, electronics and telecommunication brings on constantly growing use of surveying integration in many engineering tasks. Various works carried out in the field of quantity surveying or deformation monitoring demand both a high accuracy and reliability at simultaneously relative short time of spatial data acquisition. Meeting such a principles becomes possible thanks to the technologies of integrated geodesy. The essence of integrated geodetic works is based on the use of many known surveying techniques in order to determine the shape of an object as well as its other important parameters. Combining the above-mentioned technologies with proper analytical software and subsequent standardizing a spatial data is called “geomatics”. Its solutions based on many knowledge spheres neutralize the differences coming out from hitherto classification of geodesy.

The author presents a concept of surveying and adjustment of spatial tacheometric traverses connected to control points (measured by using the GNSS methods) and to geoid model. After precise orientation of a single tacheometric station and connection the measurement to control points, it is possible to collect a spatial data by using tacheometric traverses. Furthermore, the author proposes to adjust such traverses by using both recurrent method and a polynomial approximation of plumb line deviations components. Processes like management, visualization and statistical inference of collected data are crucial in analytical monitoring systems, which have influence on people’s safety. Finally, the author points on some applications where such a system based on the presented principles could monitor a shape and conditions of engineering objects. Using the proposed algorithms in a measuring technology could enable to make precision surveying and its further analyzing in order to determine short-time changes taking place on the examined area.

**Key words:** structural monitoring, geomatics, integration of geodetic surveying

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 31.03.2008

Do cytowania – For citation: Karsznia K., 2008. Koncepcja pomiaru i wyrównania przestrzennych ciągów tachimetrycznych w zastosowaniach geodezji zintegrowanej. *Acta Sci. Pol. Geod. Descr. Terr.* 7(1), 35-46.

## **GEOIDA MILIMETROWA MIASTA I OKOLIC OLSZTYNA**

Jacek Lamparski

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

**Streszczenie.** Obecnie dostępne modele geoidy obszaru Polski pozwalają określić, na podstawie dokładnych wysokości elipsoidalnych, wysokości normalne z przeciętną dokładnością  $\pm 2$  cm. Przeprowadzone dotychczas weryfikacje rzetelności uzyskanych wysokości normalnych dotyczą tylko części obszaru Polski. W niniejszej pracy przedstawiono na przykładzie obszaru wielkości powiatu (Olsztyn i okolice) metodykę poprawiania dowolnego modelu geoidy na niewielkim obszarze na poziomie dokładności poniżej 1 cm. Ubocznym i cennym produktem w tej metodyce są dokładne wysokości elipsoidalne wszystkich znaków wysokościowych, położonych w badanym obszarze. Jakkolwiek, uzyskany poprawiony model geoidy jest tworem wirtualnym, daje on poprawne wyniki w stosunku do sieci reperów niwelacji precyzyjnej. Ograniczeniem metody jest zawężenie modelu do określonego obszaru – w przedstawionym przykładzie obszaru wielkości 30 x 40 km.

**Słowa kluczowe:** geodezja, geodezja satelitarna, GPS

### **WSTĘP**

Coraz szersze praktykowanie techniki pomiarowej przy zastosowaniu systemu GPS spowodowało potrzebę stworzenia dokładnego modelu geoidy obszaru Polski (rys. 1) w celu umożliwienia obliczania wysokości normalnych wyznaczanych punktów. Nie sposób także wymienić wszystkich korzyści, wynikających z posiadania dokładnego modelu geoidy w różnorodnych pracach naukowych zarówno krajowych, jak i międzynarodowych.

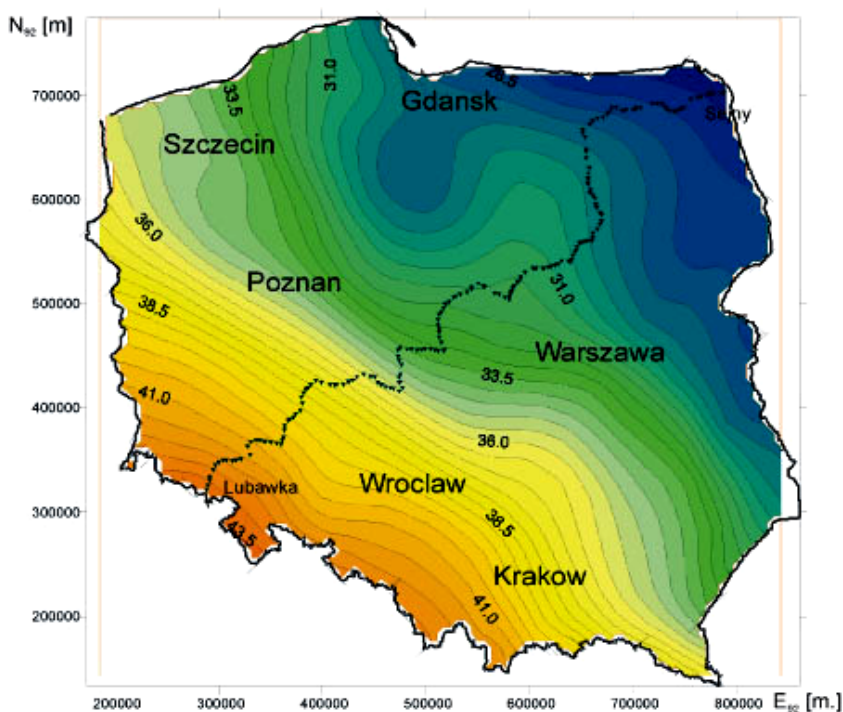
W ostatnich latach trwały w Instytucie Geodezji i Kartografii intensywne prace nad stworzeniem w Polsce modelu geoidy, dającego w praktyce dokładności centymetrowe. Zespół geodetów-naukowców z całej Polski pracował pod kierunkiem profesora Jana Kryńskiego nad wieloma problemami, których rozwiązanie miało doprowadzić do uzyskania końcowego produktu – modelu geoidy o dokładności większej od 1 cm.

Przeprowadzono kompleksowe, o szerokim zakresie zagadnień prace, wśród których należy wyróżnić:

- analizę jakości materiału obserwacyjnego, użytego do konstrukcji modelu,

- zbudowanie kilku modeli geoidy Polski, opartych na materiałach archiwalnych,
- zastosowanie różnych algorytmów obliczeniowych,
- przeprowadzenie kampanii pomiarowej GPS na trawersie niwelacyjnym o długości ok. 800 km z analizą uzyskanych wyników.

Uogólniając prace podsumowujące, można stwierdzić, że uzyskany model geoidy Polski „Geoida 2005” pozwala na uzyskanie undulacji geoidy z dokładnością 1–2 cm. Geoidę tę można nazwać niwelacyjną, ponieważ uzyskane dokładności odnoszą się do relacji względem sieci niwelacji precyzyjnej. Autor niniejszej pracy w celu „poprawienia” konkretnych rezultatów, jakimi są wysokości normalne, podjął próbę wykorzystania materiału obserwacyjnego, dotyczącego wysokości punktów sieci niwelacji precyzyjnej.



Rys. 1. Model geoidy obszaru Polski

Fig.1. Geoid model on Poland

## ZAŁOŻENIA KONSTRUKCYJNE

Sieć punktów niwelacji precyzyjnej charakteryzuje się wysoką dokładnością ich wysokości normalnych oraz stosunkowo dużą liczbą punktów, gwarantującą „dobre” pokrycie terenu. Jest ona jednak niezależna od innych układów – można ją nazwać siecią jednowymiarową. Ze względu na niedokładnie określone (przybliżone) współrzędne geodezyjne, a w szczególności brak wysokości elipsoidalnych, nie mogła posłużyć do budowania modelu geoidy niwelacyjnej.

Konstruując model quasi-geoidy, należy wykorzystać wszystkie dostępne informacje – nie tylko te, które w sposób bezpośredni pozwalają budować model. Ogromnym zbiorem danych są wysokości normalne reperów niwelacji precyzyjnej. Ich zaletami są: wysoka dokładność oraz jednorodność dokładności sieci.

Zakładając, że:

- punkty sieci POLREF, pokrywające w miarę równomiernie obszar kraju, posiadają wystarczająco dokładnie (w granicach  $\pm 1,5$  cm) określone wysokości elipsoidalne;
- punkty sieci POLREF mają dokładnie określone wysokości normalne, podobnie jak wysokości elipsoidalne ( $\pm 1,5$  cm);
- punkty sieci wysokościowej (repery) niwelacji precyzyjnej posiadają wysokości normalne, określone z dokładnością przewyższającą dokładność określenia wysokości normalnych punktów sieci POLREF;
- przebieg powierzchni geoidy w badanych obszarach jest na tyle „gładki”, że pozwala na dokładną (milimetrową) matematyczną transformację wysokości normalnych do wysokości elipsoidalnych;

można przystąpić do poprawiania istniejącego modelu geoidy niwelacyjnej (model 2002).

Wyżej wymienione założenia, postawione przed przeprowadzanymi obliczeniami, doprowadzają do mylnych wniosków:

- Wątpliwość może budzić ocena dokładności wyznaczenia wysokości elipsoidalnych punktów sieci POLREF. Nie można bezkrytycznie zakładać bezbłędności wysokości elipsoidalnych punktów nawiązania, jak również obliczenia wysokości elipsoidalnych w wyrównaniu sieci POLREF. Wiadomo, że określenie wysokości jest słabą stroną technologii GPS. Dokładność ta zależy od wielu czynników oddziałujących na system, np. aktywności Słońca czy pory roku, w której wykonano pomiary. O ile zadowalające geodetów są dokładności wyznaczenia współrzędnych poziomych  $B$  i  $L$ , o tyle dokładności wyznaczenia wysokości elipsoidalnych są niezadowalające.
- Niwelacja precyzyjna daje dokładności względne przewyższające wielokrotnie dokładności wyznaczeń satelitarnych GPS. Punkty POLREF posiadają również wysokości normalne, określone poprzez niwelację.
- Przyjęcie wysokości normalnych punktów POLREF za bezbłędne może również doprowadzić do mylnych wniosków.

## METODYKA OBLICZEŃ

Dane liczbowe, czyli wysokości reperów niwelacji precyzyjnej I i II klasy poddano wstępnej weryfikacji, polegającej na wyborze reperów podlegających wyrównaniu w latach 50. (tzw. Kronsztad'60) i 80. (tzw. Kronsztad'86). Sprawdzono podobieństwo sieci „Kronsztad 60” z siecią „Kronsztad 86”. Punkty odstające wyłączono z dalszego opracowania. Liczbowo punkty te stanowiły ok. 2% wszystkich reperów, przy założonej dokładności wpasowania  $\pm 3$  mm.

Następnym krokiem był wybór punktów POLREF jako punktów łącznych obejmujących i leżących w obszarze transformacji. Ze względu na wielkość obszaru poddanego eksperymentowi przyjęto w obliczeniach transformację wysokości normalnych do elipsoidalnych wielomianem stopnia drugiego. W ten sposób uzyskano wysokości elipsoidalne wszystkich z danego obszaru reperów niwelacji precyzyjnej. W rozważanym

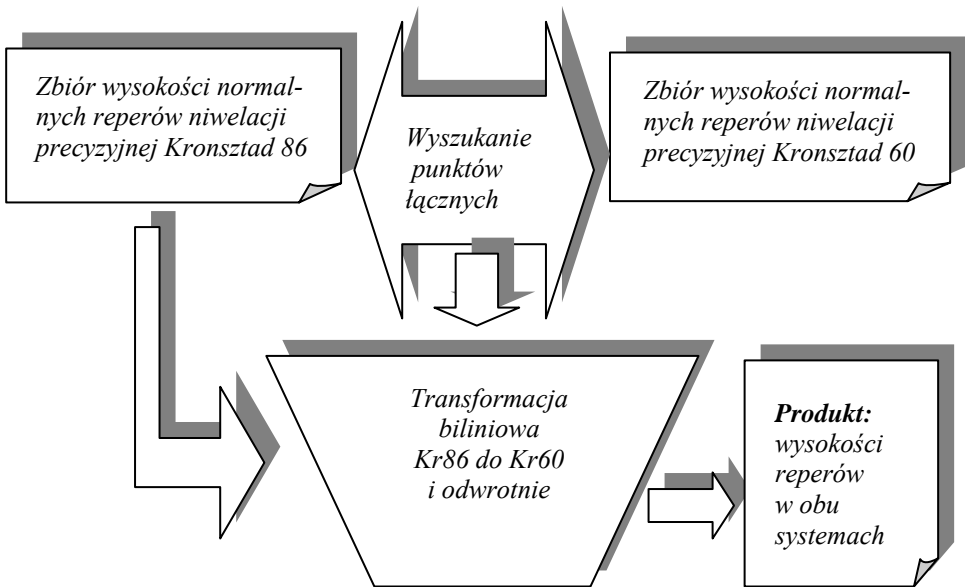
przypadku uzyskano wpasowanie 2 stopnia wysokości normalnych punktów POLREF w wysokości elipsoidalne z dokładnością mniejszą niż 1 cm.

Następnie wygenerowano dane, niezbędne do poprawienia danego modelu geoidy. Wyznaczono odstęp  $N$  w dostępnym modelu geoidy (Kadaż – 2001 – ETRF89, zwanym dalej „geoida 2002”) w węzłach siatki co 30”. Dla wygody obliczeń przyjęto wirtualne wysokości normalne w węzłach siatki równe  $100.00\text{ m} - N$ .

Przyjmując założenie, że punkty POLREF posiadają „pewne” z dokładnością  $\pm 1,5\text{ cm}$  wysokości elipsoidalne, wykonano transformację 2 stopnia od wysokości normalnych reperów wraz ze wszystkimi wirtualnymi wysokościami punktów-węzłów siatki modelu geoidy danego obszaru do wysokości elipsoidalnych. Po wpasowaniu dokonano tzw. „korekty Hausbrandta”, zakładając, że wysokości elipsoidalne punktów POLREF nie mogą ulec zmianie.

Dla kontroli obliczeń wykonano odwrotną procedurę obliczeniową, tym razem zakładając, że w korekcie Hausbrandta nie ulegną zmianie wysokości normalne reperów.

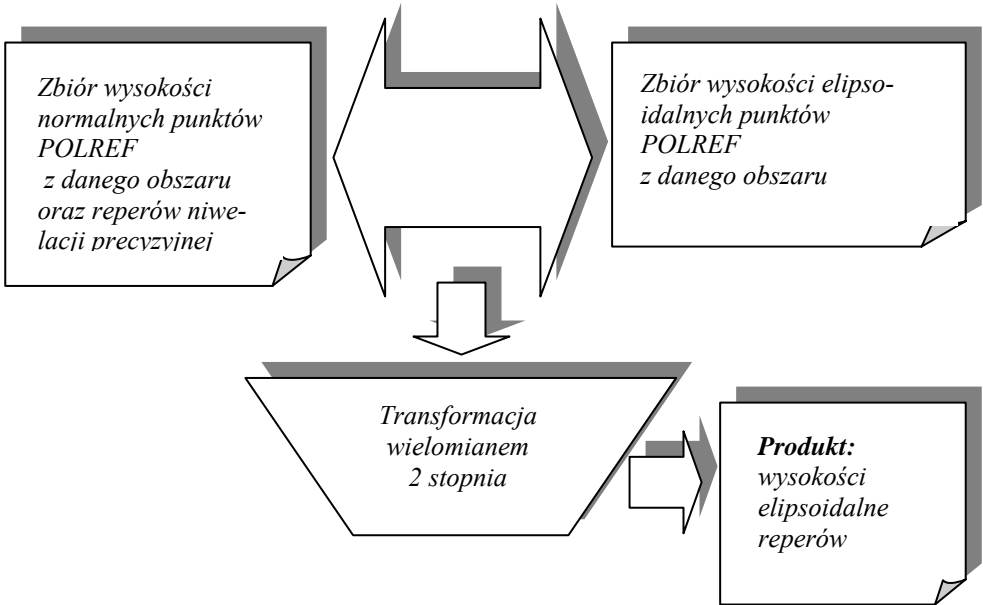
Obliczenia te można przedstawić za pomocą schematów (rys. 2, 3, 4).



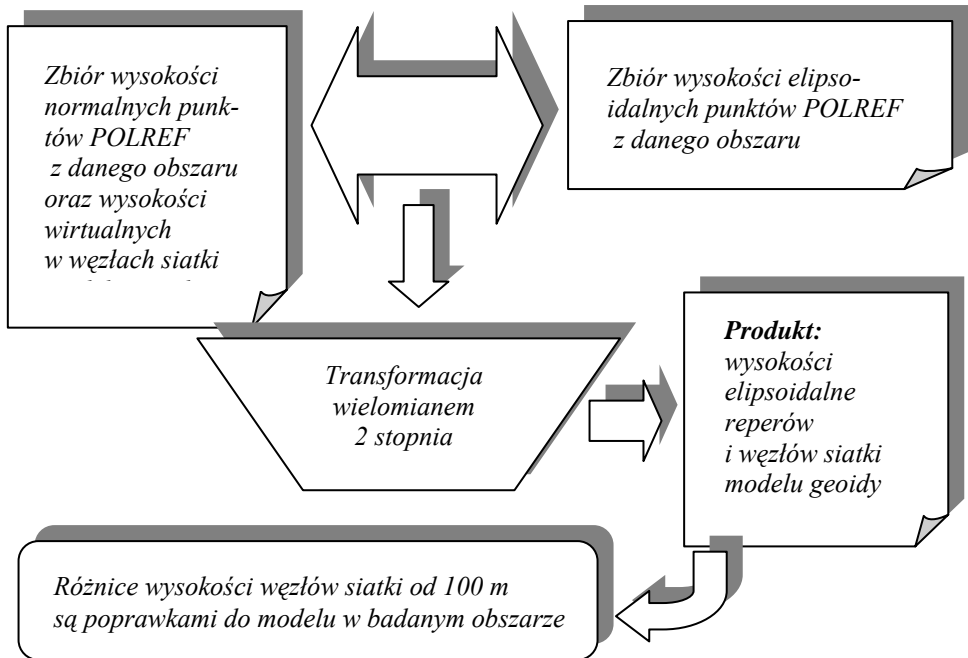
Rys. 2. Schemat transformacji między układami wysokościowymi

Fig. 2. Scheme of transformation between high normal systems





Rys. 3. Schemat transformacji między wysokościami normalnymi a elipsoidalnymi  
Fig.3. Scheme transformation between normal and ellipsoidal height



Rys. 4. Schemat obliczenia poprawek do modelu geoidy  
Fig. 4. Scheme calculation correction for the geoid model

## WERYFIKACJA ZAŁOŻEŃ TEORETYCZNYCH

Zweryfikowanie słuszności przyjętych założeń i przyjętych algorytmów obliczeniowych najlepiej oprzeć o konkretne pomiary w terenie i wyniki obliczeń. W niniejszej pracy analizie poddano dostępny materiał archiwalny (wysokości i współrzędne reperów) z terenu powiatu Olsztyn oraz wyniki prowadzonych w tych rejonach pomiarów GPS.

W celu wykonania analizy odstępów geoidy od elipsoidy GRS'80 dla modelu 2002 posłużono się zbiorem punktów, tworzących siatkę o rozdzielczości  $dB = dL = 30''$ . Zasięg siatki obejmuje obszar miasta Olsztyna – czyli obszar o wymiarach ok. 10 x 10 km. Granicę zachodnią i wschodnią wyznaczają odpowiednio południki  $L = 20^{\circ}22'00''$  oraz  $L = 20^{\circ}34'00''$ , granicę południową wyznacza równoleżnik  $B = 53^{\circ}43'00''$ , północną równoleżnik  $B = 53^{\circ}48'00''$ . Liczba punktów w tak przyjętym obszarze wyniosła 275. Określono współrzędne elipsoidalne  $B$  i  $L$  węzłów siatki, na podstawie których zostały obliczone odstępów quasi-geoidy od elipsoidy GRS'80 dla modelu „Geoidy niwelacyjnej 2002”. Odstępy quasi-geoidy od elipsoidy obliczono, korzystając z programu *geoida.exe* należącego do pakietu *Geonet Unitrans*.

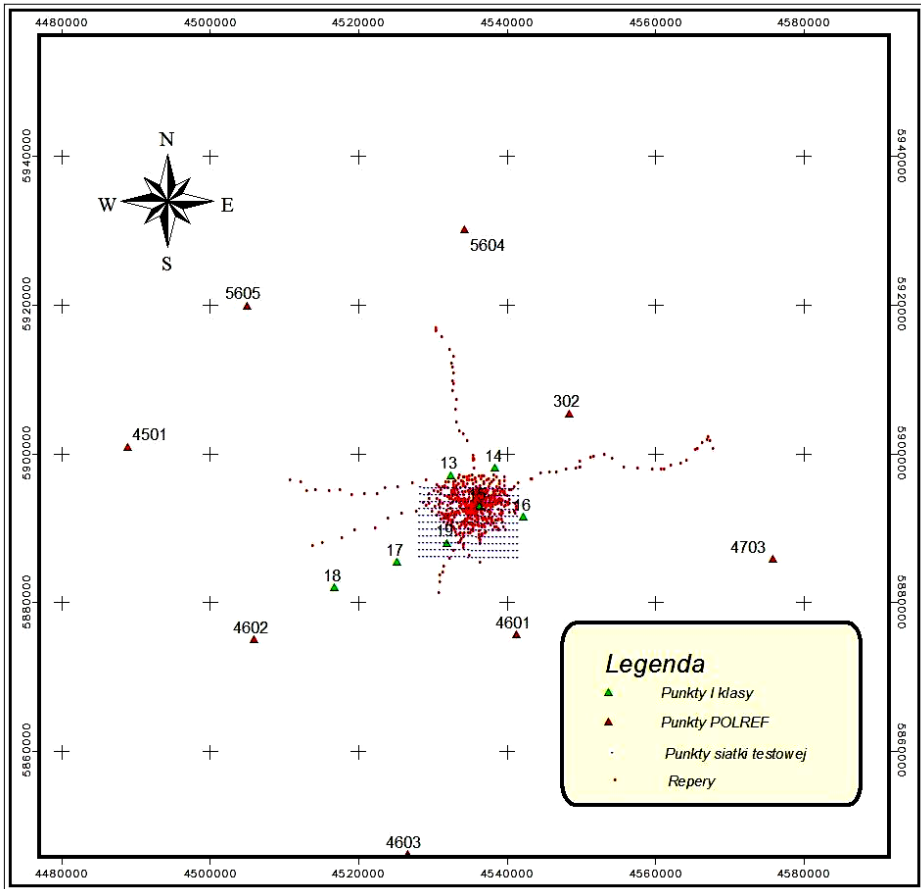
Punktów łącznych niezbędnych do przeprowadzenia transformacji od wysokości normalnych do elipsoidalnych znaleziono wokół Olsztyna aż 12 – były to punkty POLREF oraz punkty I klasy. Przeprowadzono transformację 2 stopnia wysokości normalnych do elipsoidalnych. Otrzymano następujące odchyłki na punktach łącznych:

- POLREF 4601 Butryny 0.0044 m
- POLREF 4602 Durąg -0.0017 m
- POLREF 4603 Rozdroże -0.0022 m
- POLREF 4703 Rańsk 0.0012 m
- POLREF 5604 Łaniewo 0.0035 m
- POLREF 5605 Lekławki -0.0020 m
- EUREF 0302 Lamkówko -0.0019 m
- Punkt I klasy 13 Redykajny -0.0036 m
- Punkt I klasy 15 Olsztyn – kościół SJ -0.0031 m
- Punkt I klasy 16 Klebark Mały -0.0077 m
- Punkt I klasy 17 Unieszewo -0.0004 m
- Punkt I klasy 18 Białe Błota 0.0059 m
- Punkt I klasy 19 Tomaszkowo 0.0074 m

Średniokwadratowa odchyłka:

$dH_s = 0.0041$ ,  
 ilość elementów nadwymiarowych  $lu = 6$ ,  
 błąd średni jednostkowy  $mo = 0.0056$ .

Rozmieszczenie punktów łącznych do transformacji przedstawiono na rys. 5. Są to punkty: klasy zerowej nr 0302 w Lamkówku oraz wszystkie punkty POLREF, znajdujące się w okolicach powiatu olsztyńskiego (6). Przyjęto także punkty I klasy, położone wokół miasta Olsztyna (5).



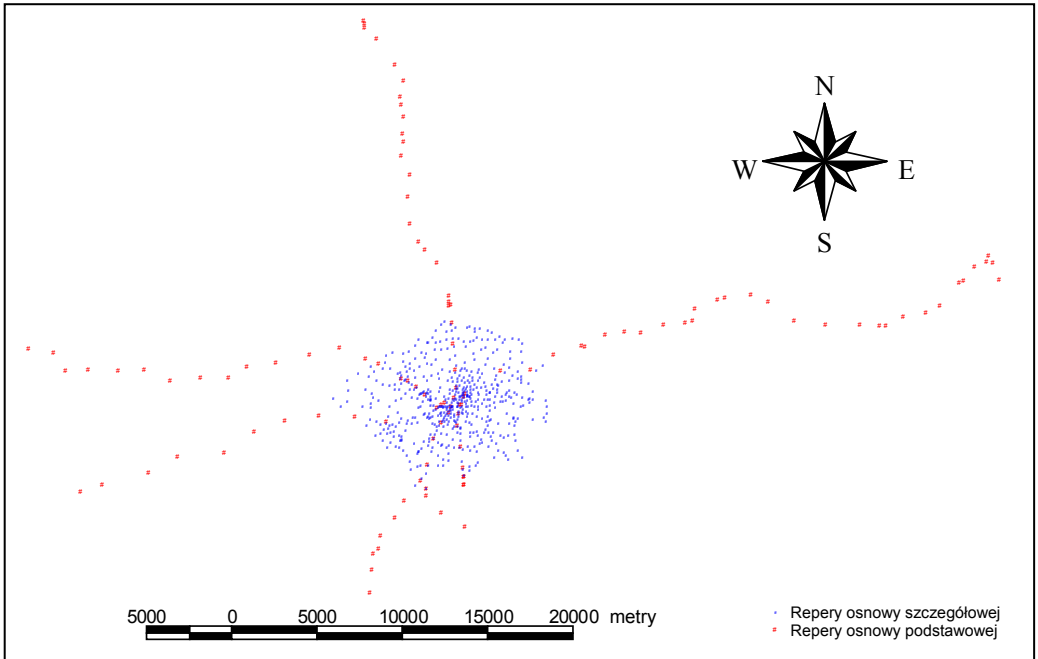
Rys. 5. Szkic rozmieszczenia punktów łącznych w transformacji wysokości normalnych do wysokości elipsoidalnych

Fig. 5. Sketch of common points from transformation normal heights to ellipsoidal heights

Na rys. 6 pokazano również linie niwelacyjne I i II klasy, zbiegające się w Olsztynie oraz wszystkie repery, położone w granicach administracyjnych miasta Olsztyna (ok. 600). Widoczna jest także regularna sieć punktów testowych, służących poprawieniu dostępnego modelu geoidy.

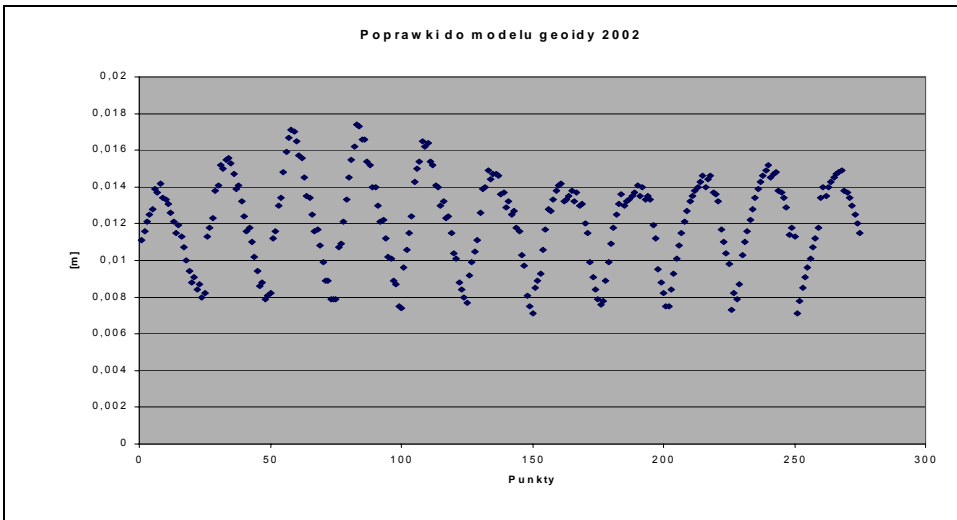
Czynnością, którą wykonano w celu sprawdzenia poprawności zapisu wysokości normalnych reperów, było wykonanie transformacji od układu Kronsztad 60 do układu wysokości Kronsztad 86. Znalezione ponad 60 reperów, posiadających wysokości określone w obu układach. Posłużyły one do przeprowadzenia transformacji biliniowej między tymi układami.

Repery niwelacji precyzyjnej I i II klasy, użyte w procesie transformacji od układu Kronsztad 86 do układu Kronsztad 60, zaznaczono na poniższym rysunku kolorem czerwonym.



Rys. 6. Repery niwelacji precyzyjnej wokół Olsztyna i wszystkie repery w Olsztynie  
 Fig. 6. Bench-marks of technical and precise leveling around city Olsztyn)

Posługując się schematem obliczeń, przedstawionym na rys. 4, obliczono poprawki do odstępów  $N$  dla węzłów siatki testowej, pokazanej na rys. 5. Wyniki przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. Poprawki na punktach sieci testowej do modelu geoidy 2002 w obszarze miasta Olsztyna  
 Rys. 7. Corrections of the test point of the geoid model from city Olsztyn

## WNIOSKI

- Na podstawie przeprowadzonych analiz można sformułować następujące wnioski:
- transformacja liniowa i biliniowa jest odpowiednia tylko dla małych obszarów. Dla terenów o większej powierzchni należy stosować transformację kwadratową. Problem zasięgu transformacji wysokości 2 stopnia wymaga głębszej analizy;
  - przy stosowaniu każdego z modeli geoidy wymagane jest korzystanie z dokładnie wyznaczonych wysokości elipsoidalnych;
  - poprawianie modelu geoidy na niewielkich obszarach jest możliwe, ale konieczne jest wykonanie kampanii pomiarowych GPS, kontrolujących uzyskane wyniki.

## PIŚMIENNICTWO

- Kadaj R., 2001. Raport z pracy badawczej. Warszawa.  
Kryński J., 2005. Ku centymetrowej geoidzie w Polsce. *Geodeta* nr 12 (127).  
Lamparski J., 2001. *Navstar GPS od teorii do praktyki*. Wydawnictwo UWM. Olsztyn.  
Pażus R., Osada E., Olejnik S., 2002. *Geoida niwelacyjna 2001*. *Geodeta* nr 5.  
Praca zbiorowa. 1993. *Niwelacja precyzyjna. Niwelacja geometryczna, trygonometryczna, satelitarna i hydroniwelacja*. Wydanie II zmienione i uzupełnione, PPWK, Warszawa – Wrocław.  
Śledziński J., 2005. *Niwelacja GPS*. *Nawi* nr 4 (6).

## SUB-CENTIMETER GEOID OF OLSZTYN AND ADJACENT AREAS

**Summary.** Currently available model of the geoid on Poland's territory enable to compute normal heights on the basic of accurate ellipsoidal heights, with an average accuracy of the  $\pm 2$  cm. Only some chosen parts of Poland have been verified to now.

In this paper, a method of correcting of the model for a small region (about city Olsztyn) to sub-centimeter accuracy is given. Additional – but important product – effect of the method are accurate ellipsoidal heights of all the bench–marks located at the region of interest. However the corrected model of geoid is virtual, but it given correct results for the precise leveling network points. The limit of the methods is small size of the region where the model is suitable – in the exemple it is area of about 30 x 40 km.

**Key words:** geodety, satellite geodety, GPS

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 31.03.2008

Do cytowania – For citation: Lamparski J., 2008. Geoida milimetrowa miasta i okolic Olsztyna. *Acta Sci. Pol. Geod. Descr. Terr.* 7(1), 47-55.

## **ANALIZA TECHNOLOGII OPRACOWANIA NUMERYCZNEGO MODELU TERENU PRZY UŻYCIU BEZPOŚREDNICH POMIARÓW SATELITARNYCH I TACHIMETRYCZNYCH**

Katarzyna Pająk, Adam Ciećko, Stanisław Oszczak  
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono analizę porównawczą technologii pozyskania danych terenowych w celu wygenerowania numerycznego modelu terenu przy użyciu precyzyjnej metody RTK/OTF z wykorzystaniem łącza GPRS do transmisji poprawek i technologii bezpośrednich pomiarów tachimetrycznych. Istnieje wiele metod pomiarowych służących pozyskiwaniu informacji geometrycznej o terenie. Wśród nich najbardziej dokładne i wiarygodne są metody pomiaru bezpośredniego. Ze względu na szybkość pozyskiwania danych pomiarowych oraz możliwość ich łatwej aktualizacji na szczególną uwagę zasługują metody rejestracji automatycznej, m.in. pomiary GPS. Bezpośrednia metoda satelitarna RTK GPS pozwoliła na pozyskanie bardzo dużej ilości punktów pomiarowych w stosunkowo krótkim czasie, tanio, szybko i bezpiecznie.

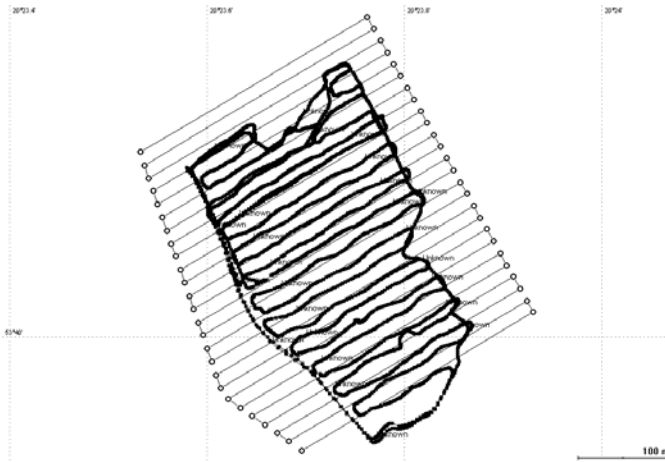
**Słowa kluczowe:** numeryczny model terenu, GPRS, RTK

### **WSTĘP**

Zarówno technologie pomiaru obiektu, jak i sposób ich opracowania czy rozmieszczenie punktów pomiarowych determinuje jakość uzyskanego numerycznego modelu terenu. Rozmieszczenie punktów pomiarowych lub krok siatki pomiarowej, jak również stosowane algorytmy interpolacyjne mają kluczowe znaczenie dla rezultatu końcowego. Dla jednego obiektu można uzyskać różne wyniki zobrazowania rzeźby terenu w zależności od sposobu wykonania samego pomiaru terenowego, jak i przyjętych założeń dotyczących opracowania.

## POMIARY BEZPOŚREDNIE RTK/OTF

Eksperyment przeprowadzono 21 września 2005 r. w okolicy wsi Stawiguda pod Olsztynem. Głównym celem pomiarów było uzyskanie dokładnych współrzędnych, na podstawie których można będzie stworzyć numeryczny model terenu. Dokładne współrzędne wyznaczono techniką GPS RTK/OTF w układzie „2000” w odstępach jedno-sekundowych. Pozycje RTK zostały następnie porównane z pozycjami odniesienia policzonymi jako średnia arytmetyczna z czterech niezależnych wyznaczeń OTF w trybie post-processing. Pomiaru wykonano wzdłuż profili w odstępach 15-metrowych, które wcześniej zaprojektowano w programie MikroMapa, a następnie przekonwertowano do odbiornika ruchomego Thales Mobile Mapper, dzięki czemu możliwa była precyzyjna nawigacja po zaprojektowanych profilach [Ciećko i in. 2006, Pająk i in. 2006].



Rys. 1. Zaprojektowane profile pomiarowe w programie MikroMap i nawigacja po profilach  
 Fig. 1. Measurement profiles in MikroMap program and actual track of the vehicle during real-time measurement

Do pomiarów wykorzystano pojazd czterokołowy typu quad, na którym umieszczono niezbędną aparaturę do pozyskania danych terenowych (rys. 2). Aparatura pomiarowa składała się z dwóch precyzyjnych geodezyjnych odbiorników firmy Ashtech, dwóch odbiorników nawigacyjnych Thales Mobile Mapper z opcją post-processing, anten GPS: geodezyjnej i nawigacyjnej oraz terminala GPRS [Ciećko i in. 2006, Pająk i in. 2006].

Po przeprowadzeniu pomiarów wykonano szereg obliczeń i analiz. Podczas pracy metodą RTK uzyskano współrzędne pojazdu w czasie rzeczywistym. Cały pomiar trwał 90 min, na początku zbierania danych, gdy liczba dostępnych satelitów była duża, a współczynniki DOP były małe, to dokładności wyznaczenia pozycji kształtowały się na poziomie 1–2 cm. W drugiej części pomiaru (od 40 minuty) spadła liczba widocznych satelitów, co spowodowało pogorszenie geometrycznego rozkładu satelitów, a tym samym spadek dokładności, dlatego do dalszych analiz wzięto dane z pomiaru pierwszych 40 minut. Pozycja dla każdej sekundy, wyliczona jako średnia arytmetyczna z czterech niezależnych wyznaczeń OTF, dała możliwość przeprowadzenia analiz dokładności.



Rys. 2. Pojazd czterokołowy z zamocowanymi odbiornikami geodezyjnymi i nawigacyjnymi  
 Fig. 2. The ATV with assembled equipment used in the experiment

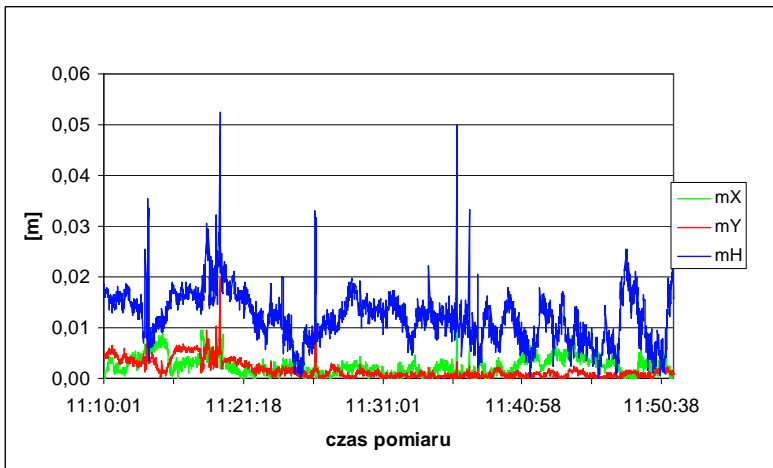
Błędy średnie pozycji odniesienia, korzystając z obserwacji nadliczbowych, policzono dla każdej współrzędnej  $X$ ,  $Y$ ,  $H$  przy użyciu wzorów:

$$m_x = \sqrt{\frac{\sum (X_{sr} - X_i)^2}{n-1}}, m_y = \sqrt{\frac{\sum (Y_{sr} - Y_i)^2}{n-1}}, m_H = \sqrt{\frac{\sum (H_{sr} - H_i)^2}{n-1}}$$

Przeciętne błędy współrzędnych  $X$ ,  $Y$ ,  $H$  dla analizowanej części pomiaru wyniosły:

- $M_x = 0,003$  m
- $M_y = 0,002$  m
- $m_H = 0,012$  m

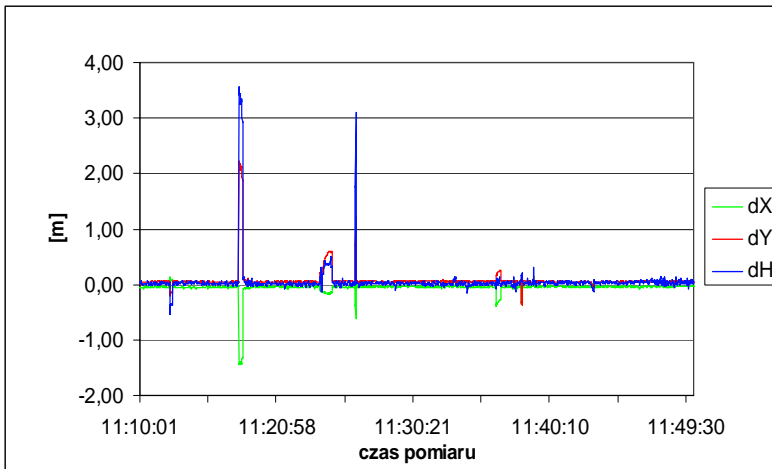
Uzyskane rezultaty na każdą sekundę pomiaru prezentuje rys. 3.



Rys. 3. Średnie błędy współrzędnych dla wartości odniesienia dla pierwszych 40 minut pomiaru  
 Fig. 3. Reference positioning accuracy for the first 40 minutes of test



Mając precyzyjne współrzędne obliczone na każdą sekundę pomiaru, możliwe było określenie dokładności metody RTK/OTF w trybie czasu rzeczywistego (rys. 4).



Rys. 4. Dokładności wyznaczenia współrzędnych metodą RTK (real-time)

Fig. 4. Accuracy of real time phase (RTK) positioning

Wartości średnich różnic pomiędzy współrzędnymi pozycji odniesienia a współzrędnymi otrzymanymi metodą RTK wyniosły:

- $dX = 0,060$  m
- $dY = 0,080$  m
- $dH = 0,060$  m

Otrzymane wyniki posłużyły do wygenerowania numerycznego modelu terenu w programie Surfer Software. Na skutek chwilowych spadków dokładności pozycji część obserwacji uzupełniono danymi pochodzącymi z pomiarów w trybie post-processing.

## POMIARY BEZPOŚREDNIE TACHIMETRYCZNE

Pierwszym etapem prac w metodzie pomiarów bezpośrednich tachimetrycznych był pomiar GPS metodą statyczną punktów pomiarowych.

Do tego celu wykorzystano stację referencyjną znajdującą się w budynku Wydziału Geodezji i Gospodarki Przestrzennej przy ulicy Prawocheńskiego 15 w Olsztynie. Anteny ustawiano nad punktami na statywach Wilda, używając spodarek z pionownikami optycznymi. Pomiarów wysokości anten nad punktami dokonywano przymiarami milimetrowymi. Wszystkie pomiary wysokości anten wykonywano dwukrotnie przed rozpoczęciem obserwacji GPS i dwukrotnie – po ich zakończeniu.

Odbiornik GPS typu Z-Xtreme był połączony z anteną. Po otrzymaniu pozycji w odbiorniku pomiar na punkcie był kontynuowany jeszcze przez około 60 minut. Dane ze stacji referencyjnej zostały zapisane na dysku twardym komputera stacji. Jako minimalną ilość satelitów podczas obserwacji przyjęto 3, minimalną wysokość satelitów nad horyzontem –  $15^\circ$ , współczynnik PDOP < 6.

Surowe współrzędne (XYZ) kartezjańskie oraz współrzędne (BLh) opracowane w AOSS (tab. 1) zostały następnie przetransformowane do układu płaskiego „2000”

za pomocą programu Transpol, który jest załącznikiem do Instrukcji Technicznej G-1.10. Ostatecznie uzyskano zestawienie porównywanych współrzędnych w formacie: (XY) „2000” i (*h*), wysokość elipsoidalną dla elipsoidy WGS-84 .

Tabela 1. Wyniki obliczeń współrzędnych stanowiska i nawiązania z programu AOSS Ashtech Office Suite (opracowanie własne na podstawie badań)

Table 1. The results of computation of position coordinates and references from AOSS Ashtech Office Suite for Survey (own elaboration based on the studies)

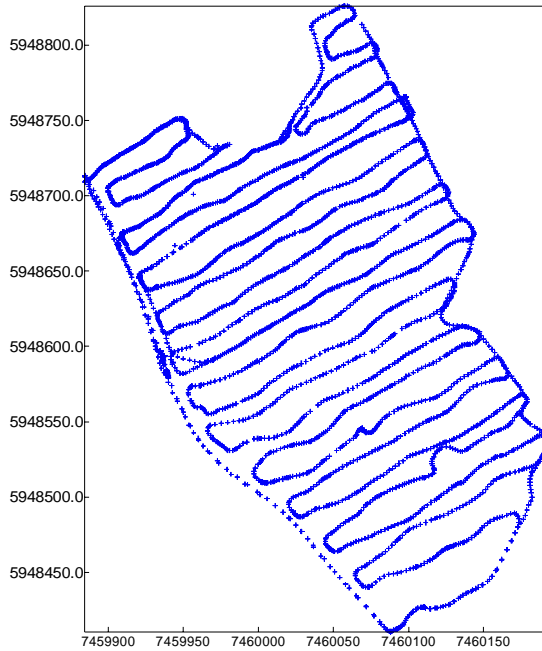
Point	X [m]	Y [m]	Z [m]	sX [mm]	sY [mm]	sZ [mm]
1000	3549825.364	1319767.355	5115025.315	2.6	1.6	3.2
3000	3549945.146	1320023.407	5114863.589	2.6	1.6	3.2
LAM6	3524631.141	1329777.991	5129764.005	0.0	0.0	0.0

Point	Lat [Deg]	Lon [Deg]	ell.H [m]	orth.H [m]	geoid.H [m]	sN [mm]	sE [mm]	sH [mm]
1000	N53° 40' 01.94002"	E20° 23' 39.53689"	174.206	174.206	0.000	2.4	1.5	3.4
3000	N53° 39' 53.59025"	E20° 23' 50.33426"	163.314	163.314	0.000	2.4	1.5	3.4
LAM6	N53° 53' 27.64726"	E20° 40' 14.02103"	197.716	197.716	0.000	0.0	0.0	0.0

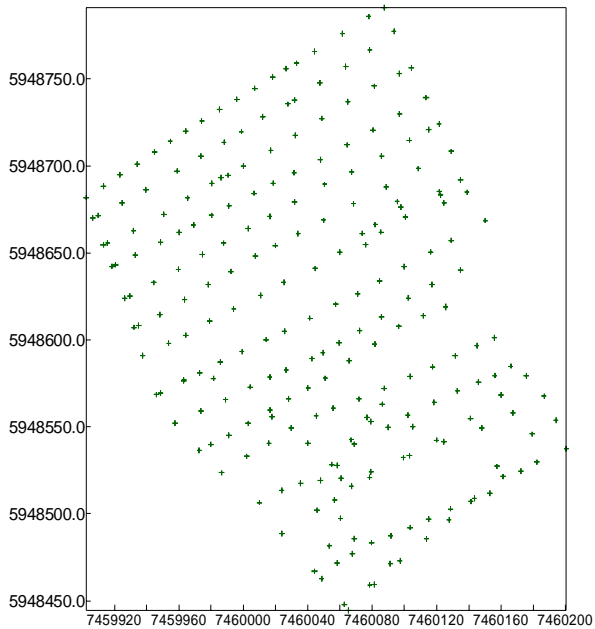
Otrzymane współrzędne wykorzystano do dalszych obliczeń tachimetrycznych w programie Winkalk. Jeden z punktów przyjęto jako stanowisko tachimetru zaopatrzonego w rejestrator wewnętrzny, a dwa pozostałe jako kierunki nawiązań. Kontrolnie dokonano pomiaru odległości i przewyższenia pomiędzy stanowiskiem a nawiązaniem. Pomierzona odległość zgadzała się z wartością obliczoną ze współrzędnych, odchyłka kątowna wyniosła tylko 0<sup>g</sup>,0010, a różnica wysokościowa miała zaledwie 4 mm. Po tak przygotowanej orientacji instrumentu i stwierdzeniu jej poprawności rozpoczęto pomiar. Pomiarowi podlegały pikiety rozproszone zlokalizowane w charakterystycznych punktach, pozwalających na wierną prezentację rzeźby terenu (lokalne ekstrema, pikiety wysokościowe). Pomierzonych zostało ok 300 punktów, z których został wygenerowany NMT w postaci siatki GRID.

## ANALIZA DANYCH POMIAROWYCH

Pozyskano dane pomiarowe, których rozkład przestrzenny prezentują rysunki 5, 6, 7.

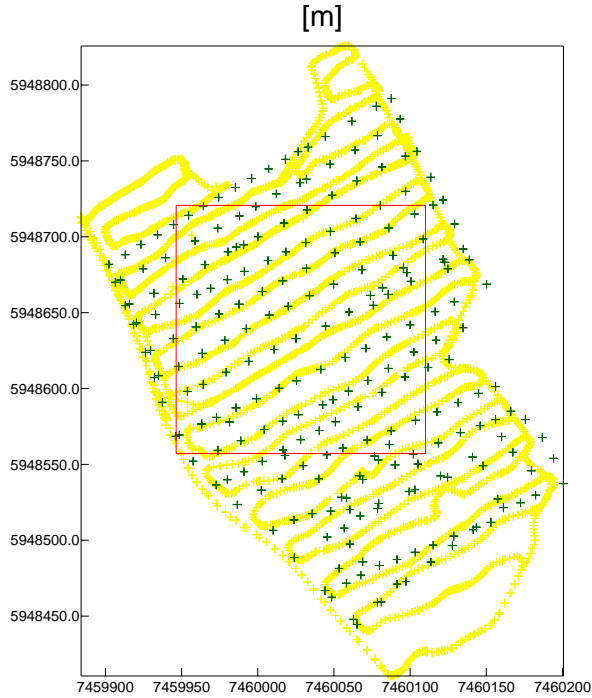


Rys. 5. Rozkład przestrzenny danych pozyskanych metodą satelitarną RTK (opracowanie własne)  
Fig. 5. Spatial distribution of data gathered by satellite RTK methods (own elaboration)



Rys. 6. Rozkład przestrzenny danych pozyskanych metodą tachymetryczną (opracowanie własne)  
Fig. 6. Spatial distribution of data gathered by tacheometric methods (own elaboration)

Po nałożeniu na siebie danych pozyskanych z dwóch metod wyznaczono wspólny obszar, który podlegał w dalszym etapie analizom (ilość punktów pomiarowych w obszarze wspólnym – bezpośrednie pomiary tachimetryczne – 102 punkty, bezpośrednie pomiary GPS RTK/OTF – 2522 punkty).



Rys. 7. Rozkład przestrzenny danych satelitarnych i tachimetrycznych z obszarem badań (opracowanie własne)

Fig. 7. Spatial distribution of satellite and tacheometric data in study area (own elaboration)

Przeprowadzono analizy, które oparto na powierzchniach GRID utworzonych na podstawie danych pozyskanych z dwóch metod pomiarowych, z których generowany był NMT. Do oceny statystycznej powierzchni GRID przyjęto następujący parametr:

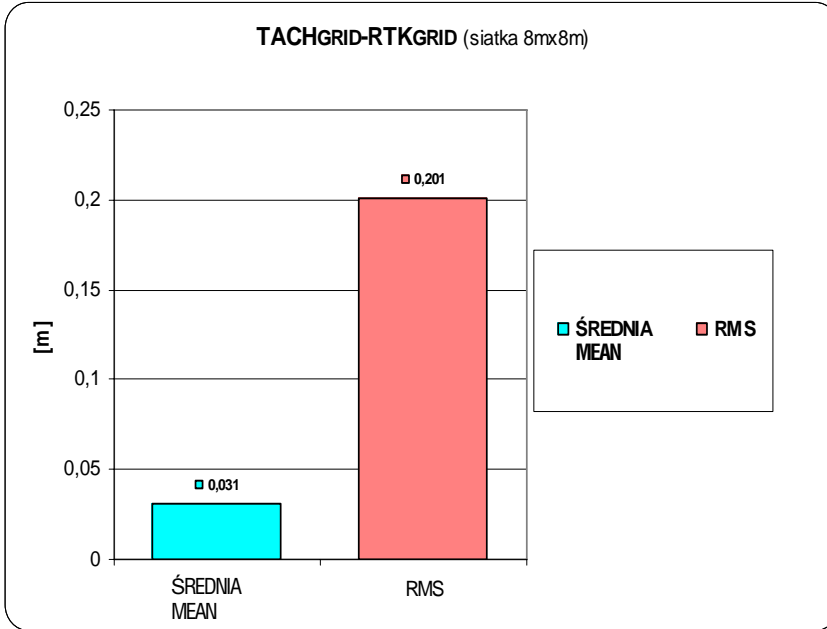
- Błąd RMS, pierwiastek z błędu średniokwadratowego (RMS – Root Mean Square). Błąd wyznaczany poprzez sumowanie kwadratów błędów indywidualnych, podzielenie uzyskanej sumy przez liczbę uwzględnionych wartości i wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z uzyskanego ilorazu. Błąd RMS stanowi pojedynczą wartość opisującą błąd sumaryczny.

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{\sum (dh_{sr} - dh_i)^2}{n}}$$

gdzie:  $dh_i = (H_{RTKi} - H_{TACHi})$  – wartości kolejnych różnic pomiędzy wysokościami siatki GRID uzyskanymi z pomiarów satelitarnych a wysokościami siatki GRID uzyskanymi z pomiarów tachimetrycznych,

$dh_{sr} = [(H_{RTK} - H_{TACH}) / n]$  – średnia wartość różnic pomiędzy wysokościami siatki GRID uzyskanymi z pomiarów satelitarnych a wysokościami siatki GRID uzyskanymi z pomiarów tachimetrycznych,  
 $n$  – liczba punktów.

Analiza polegała na wyliczeniu różnic wysokości w punktach węzłowych siatki powierzchniowej GRID między metodami i błędami RMS.

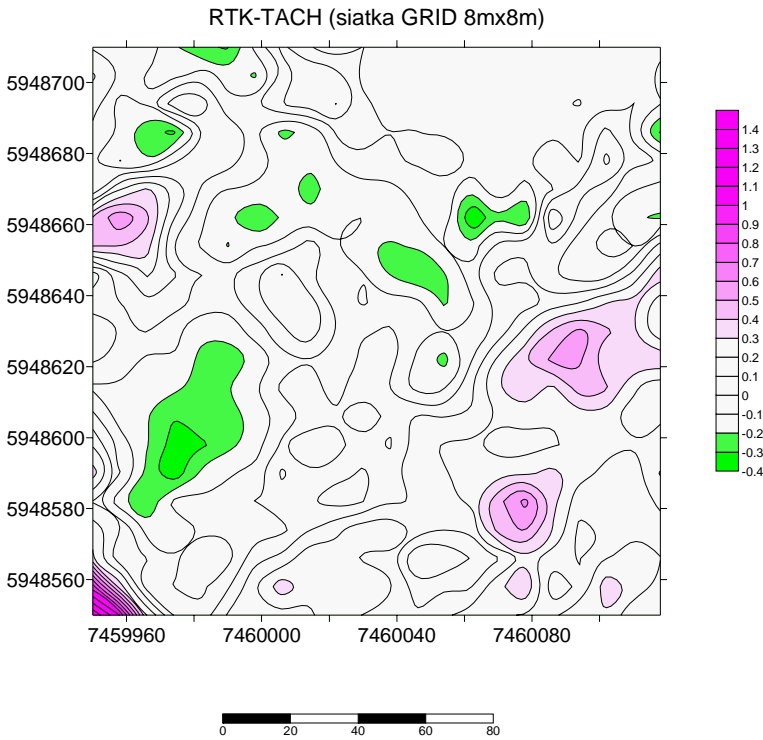


Rys. 8. Graficzna prezentacja wielkości średniej i błędu RMS (opracowanie własne)

Fig. 8. Graphic presentation of average value and RMS (own elaboration)

Średnia różnica w wysokościach pomiędzy metodami bezpośrednimi – klasyczną tachimetryczną i satelitarną RTK wyniosła 0,031 m, natomiast błąd RMS = 0,201 m (rys. 8).

Rys. 9 przedstawia rozkład różnic w wysokościach pomiędzy powierzchniami GRID utworzonymi z danych pozyskanych z pomiarów satelitarnych RTK i pomiarów tachimetrycznych TACH.

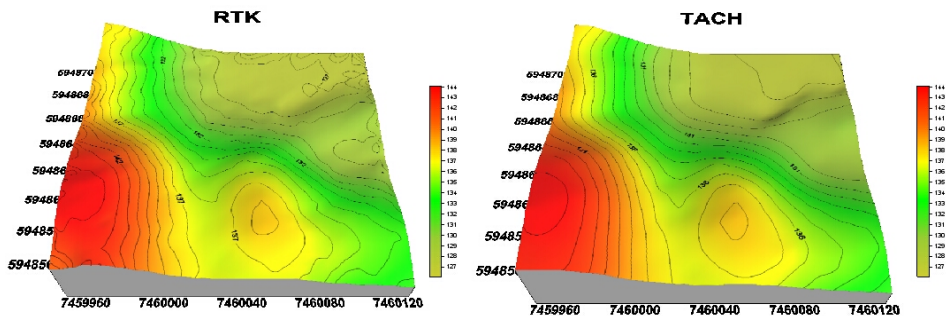


Rys. 9. Mapa rozkładu różnic wysokości na powierzchniach GRID dla siatki  $8 \times 8$  m (opracowanie własne)

Fig. 9. The map of height difference distribution on GRID surface for grid  $8 \times 8$  m (own elaboration)

Z danych pozyskanych metodami bezpośrednimi GPS RTK/OTF i tachimetryczną wygenerowano modele i nałożono na nie mapy warstwiczne.

W interpolacji graficznej modeli, zamieszczonej na rys. 10, widać, że nie ma zakłóceń charakterystyki przestrzennej badanego obszaru zarówno z danych pozyskanych z pomiarów satelitarnych, jak również z pomiarów tachimetrycznych.



Rys. 10. Numeryczne modele terenu z warstwicami (opracowanie własne)

Fig. 10. Digital Terrain Models with contour lines (own elaboration)

## PODSUMOWANIE

W nawiązaniu do wyników pomiarów okazało się, że zastosowanie nowej technologii do pomiarów bezpośrednich GPS RTK/OTF jest idealne w procesie precyzyjnego, szybkiego, taniego i łatwego pozyskania wiarygodnych i aktualnych danych dotyczących tworzenia NMT. Podczas badań metody RTK w czasie rzeczywistym uzyskano centymetrowe dokładności, co pozwoliło na otrzymanie wysokich dokładności obrazowania rzeźby terenu; w porównaniu z metodą tachimetryczną dla powierzchni utworzonych jako siatka GRID średnia różnica współrzędnych wysokościowych wyniosła 3 cm, natomiast odchylenie standardowe 20 cm.

Metoda RTK daje możliwość wykonania pomiarów w celu pozyskania danych do tworzenia NMT przez tylko jedną osobę, pomiary te, z wykorzystaniem poprawek przesyłanych poprzez GPRS, mają na celu usprawnienie wykonywania pomiarów, zmniejszenie nakładu pracy, czasu pozyskania oraz opracowania danych.

## PIŚMIENNICTWO

- Ciećko A., Oszczak B., Oszczak S., Determination of Accuracy and Coverage of Permanent Reference Station (DGPS/RTK) in Gdynia. 7th Bilateral Geodetic Meeting Italy-Poland, Bressanone, Italy, 22-24 May 2003, Published in Reports on Geodesy, No 2(65): 45-51.II.
- Ciećko A., Oszczak B., Oszczak S., Driver – By DTM. GPS and GSM Power Cost – Effective Terrain Modelling, GPS World, April 2006, Vol.17, No. 4.
- Gościński D., Bojanowski K., Technical Sciences, Supplement 2 (2005), Publisher UWM.
- Oszczak S., Ciećko A., Oszczak B., Teletransmisja DGPS/RTK za pomocą GSM/GPRS z wykorzystaniem n-stacji referencyjnych i dedykowanego APN, EGNOS Workshop, Kraków, 23-24 September 2004, CD ROM Proceedings.
- Pająk K., Ciećko A., Oszczak S., Analyses of Different Methods used for Creation of Digital Terrain Model (DTM). 8<sup>th</sup> Bilateral Geodetic Meeting Poland-Italy, Wrocław, Poland, 21-24 Juni 2006, Reports and Geodesy NO 2(77).

## ANALYSIS FOR CREATION OF DIGITAL TERRAIN MODEL (DTM) BY MEANS OF DIRECT SATELLITE AND TACHEOMETRIC MEASUREMENTS

**Abstract.** The analysis of comparison of ground data gathering technology for Digital Terrain Model generation by means of precise RTK/OTF method with GPRS for corrections transmission and direct tacheometric measurement technology were presented in this article. There are many methods which allow to acquire geometric information. The most accurate and reliable are direct measurement methods. With respect to the rate of measurement data obtaining and opportunity of their simple updating, methods of automatic registration, e.g. GPS measurements, should be taken into consideration. Direct satellite RTK GPS method let for gathering a lot of measurement points in relatively short period of time, as well as in cheap, fast and safe way.

**Key words:** Digital Terrain Model, GPRS, RTK

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 31.03.2008

Do cytowania – For citation: Pająk K., Ciećko A., Oszczak S., 2008. Analiza technologii opracowania numerycznego modelu terenu przy użyciu bezpośrednich pomiarów satelitarnych i tachimetrycznych. *Acta Sci. Pol. Geod. Descr. Terr.* 7(1), 57-66.

## SPIS TREŚCI CONTENTS

### **Józef Beluch**

- Wpływ wyboru modelu wyznaczania parametrów transformacji Helmerta na wyniki transformacji ..... 3  
The effect of selection of models for determining Helmert transformation parameters on calculation results

### **Piotr Banasik, Bogdan Skorupa**

- Charakterystyka nowych punktów przeznaczonych do absolutnych pomiarów ciężkości na obszarze Krakowa ..... 15  
Establishment of the new points destined to absolute gravity determinations on the area of Kraków

### **Karol Dawidowicz, Jacek Lamparski, Krzysztof Świątek**

- Wyznaczanie różnic wysokości z wykorzystaniem niwelacji satelitarnej ..... 29  
The height differences appointment using satellite leveling

### **Krzysztof Karsznia**

- Koncepcja pomiaru i wyrównania przestrzennych ciągów tachimetrycznych w zastosowaniach geodezji zintegrowanej ..... 35  
A concept of surveying and adjustment of spatial techeometric traverses in the applications of integrated geodesy

### **Jacek Lamparski**

- Geoida milimetrowa miasta i okolic Olsztyna ..... 47  
Sub-centimeter geoid of Olsztyn and adjacent areas

### **Katarzyna Pająk, Adam Ciećko, Stanisław Oszczak**

- Analiza technologii opracowania numerycznego modelu terenu przy użyciu bezpośrednich pomiarów satelitarnych i tachimetrycznych ..... 57  
Analysis for creation of digital terrain model (dtm) by means of direct satellite and tacheometric measurements