

KOLEGIUM KARKONOSKIE

**w Jeleniej Górze
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa**

**ĆWICZENIA
LABORATORYJNE
Z FIZYKI**

TEORIA I PRAKTYKA

Stanisław KUŹMIŃSKI
Janusz DZIEDZIC
Jerzy PIETRUSZEWSKI

Jelenia Góra 2007

KOLEGIUM KARKONOSKIE

w Jeleniej Górze

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa



**ĆWICZENIA
LABORATORYJNE Z FIZYKI.
TEORIA I PRAKTYKA**

Stanisław KUŹMIŃSKI

Janusz DZIEDZIC

Jerzy PIETRUSZEWSKI

JELEŃ GÓRA 2007

RADA WYDAWNICZA
KOLEGIUM KARKONOSKIEGO

Grażyna Baran, Aleksander Dziuda, Henryk Gradkowski (przewodniczący), Urszula Liksztet, Wioletta Palczewska, Kazimierz Stapór, Leon Zarzecki, Józef Zaprucki

RECENZENT

Anna Szaynok

Niniejsze wydawnictwo można nabyć w Bibliotece Uczelnianej
Kolegium Karkonoskiego PWSZ
w Jeleniej Górze
ul. Lwówecka 18 tel. 0 75 645 33 52

ISBN 978-83-924736-5-7

Spis treści

1. Słowo wstępne.....	5
2. Błędy wyników pomiarów.....	6
3. Ćwiczenie 1	
Wyznaczanie modułu sztywności metodą dynamiczną.....	18
4. Ćwiczenie 2	
Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego.....	33
5. Ćwiczenie 3	
Pomiar prędkości dźwięku metodą składania drgań elektrycznych.....	47
6. Ćwiczenie 4	
Wyznaczanie częstości dudnień i momentu sprzęgającego wahadeł.....	60
7. Ćwiczenie 5	
Wyznaczanie współczynnika lepkości cieczy metodą Stokesa.....	67
8. Ćwiczenie 11	
Skalowanie termopary i wyznaczenie temperatury krzepnięcia stopu.....	75
9. Ćwiczenie 12	
Wyznaczanie współczynnika przewodnictwa cieplnego izolatorów.....	86
10. Ćwiczenie 13	
Wyznaczanie współczynnika rozszerzalności cieplnej metodą elektryczną.....	95
11. Ćwiczenie 14	
Wyznaczanie napięcia powierzchniowego cieczy	104
12. Ćwiczenie 21	
Sprawdzenie prawa Ohma dla prądu stałego.....	122
13. Ćwiczenie 22	
Badanie rezonansu elektromagnetycznego.....	135
14. Ćwiczenie 23	
Sprawdzenie prawa Ohma dla prądu zmiennego.....	145
15. Ćwiczenie 24	
Pomiary oscyloskopowe.....	157
16. Ćwiczenie 26	
Badanie ferromagnetyków.....	175

17. Ćwiczenie 33	
Sprawdzenie prawa Stefana – Boltzmana.....	182
18. Ćwiczenie 34	
Wyznaczanie długości fali świetlnej za pomocą siatki dyfrakcyjnej.....	193
19. Ćwiczenie 35	
Analiza spektralna.....	202
20. Ćwiczenie 36	
Wyznaczanie współczynnika załamania i kąta łamiącego pryzmatu.....	214
21. Ćwiczenie 37	
Wyznaczanie współczynnika załamania szkła i cieczy przy pomocy refraktometru Pulfricha.....	224
22. Ćwiczenie 38	
Wyznaczanie długości fali świetlnej i promienia krzywizny soczewki przy pomocy pierścieni Newtona.....	243
23. Dodatek.....	258

Słowo wstępne

Każde zjawisko we wszechświecie zachodzi według pewnych praw przyrody. Odkrywanie tych praw stanowi przedmiot badań różnych dziedzin nauki, a przede wszystkim fizyki.

Przedmiotem badań fizyki są takie zjawiska i zagadnienia jak, ruch, ciepło, promieniowanie, magnetyzm, elektryczność i budowa materii. Fizyka jest zatem nauką o otaczającym nas świecie i stanowi podstawę wszystkich nauk przyrodniczych wśród których wysuwa się na pierwsze miejsce, oraz jest podstawą rozwoju techniki. Mówi ona, jakim jest ten świat, w jaki sposób człowiek go poznawał i jak poznaje go dzisiaj. Ważną rolę spełnia tu eksperyment i dlatego konieczne jest pogłębienie wiadomości zdobytych na wykładach w laboratorium, gdzie każdy student znajdzie możliwość bezpośredniego badania przebiegu zjawisk fizycznych oraz wysnuwanie wniosków na podstawie badań i pomiarów. Laboratorium kształci umiejętności obserwacji i przeprowadzania doświadczeń, wykonywania pomiarów oraz stosowanie poznanych praw do rozwiązywania zadań i opracowywania zagadnień.

Ćwiczenia laboratoryjne są więc uzupełnieniem wykładów. Demonstracje na wykładzie, choćby najlepiej udane, nie zastąpią studentowi samodzielnego wykonania ćwiczeń w laboratorium. Laboratorium jest jednym z ogniw wiążących teorię z praktyką.

Ćwiczenia praktyczne z fizyki student rozpoczyna często przed wysłuchaniem wykładów, dlatego aby ułatwić przygotowanie ćwiczenia każdy temat poprzedza krótka teoria.

Na początku skryptu podano krótką teorię rachunku błędów i jej praktyczne zastosowanie w niektórych ćwiczeniach, aby wyrobić sobie pewien krytycyzm w szacowaniu stopnia dokładności pomiaru.

Na końcu skryptu znajdują się tablice najważniejszych stałych fizycznych.

Skrypt niniejszy zawiera opracowanie tych ćwiczeń, które znajdują się w zestawie ćwiczeń w laboratorium fizyki Instytutu Techniki Kolegium Karkonoskiego w Jeleniej Górze.

S. Kuźmiński

Błędy wyników pomiarów

S. Kuźmiński

Wyniki pomiarów wykonywanych w laboratorium nie odpowiadają nigdy dokładnie rzeczywistej wartości mierzonych wielkości. Są one obarczone mniejszym lub większym błędem. Błędem pomiaru nazywamy różnicę między zmierzoną wielkością a wielkością rzeczywistą. Rozróżniamy błędy systematyczne i przypadkowe.

Błędy systematyczne

Błędy systematyczne wynikają z: 1) niedokładności przyrządów pomiarowych np. źle wywzorcowanych 2) stosowania błędnej metody pomiarowej polegającej np. na nieprawidłowym odczycie położenia wskazówki miernika na skutek wadliwego ustawienia oka (błąd paralaksy). Błąd systematyczny może również wynikać z nieodpowiedniego ustawienia przyrządu, a także ze stosowania fałszywej metody obserwacji. 3) Z przyczyn zewnętrznych wpływających na wynik pomiaru np. obecność żelaza w pobliżu pomiarów magnetycznych. Sprowadzenie tych błędów do minimum leży w granicach technicznych możliwości. Podczas ćwiczeń musimy szczególnie zwracać uwagę aby nie popełniać błędów wymienionych w punktach 2 i 3 zakładając, że przyrządy dane nam do dyspozycji są poprawnie wywzorcowane.

Błędy grube

Tego typu błędy powstają wskutek fałszywego odczytania wyniku na przyrządach lub nieprawidłowego ich zapisania. Jaskrawym przykładem takiego błędu jest np. zapisanie odczytań długości w centymetrach zamiast w milimetrach. Błędy grube przewyższają zwykle kilkakrotnie błędy pozostałych pomiarów i dzięki temu można je łatwo zauważyć. Wyniki obarczone błędami grubymi powinniśmy odrzucać i powtarzać w takich przypadkach pomiary.

Błędy przypadkowe

Błędy przypadkowe są to błędy związane bezpośrednio z osobą wykonującą pomiar i wynikające z niedokładności zmysłów, głównie wzroku a czasem słuchu eksperymentatora, czasem zależą one także od zręczności jego rąk. Jeżeli mierzymy jakąś wielkość np. długość pręta, to za każdym razem otrzymujemy zwykle nieco inną wartość, różną od rzeczywistej.

Uniknięcie błędów przypadkowych jest rzeczą nieosiągalną, jednakże teoria podaje zasady, które pozwalają zmniejszyć ich wpływ na końcowy wynik pomiarów oraz dokładnie

ustalić ich wartość. Niżej przedstawiona teoria błędów stosuje się tylko do błędów przypadkowych.

Średnia arytmetyczna

Według Gaussa na podstawie metody najmniejszych kwadratów za wynik pomiarów należy przyjąć ten, dla którego suma z kwadratów odchyleń poszczególnych pomiarów ma wartość najmniejszą. Jest nim średnia arytmetyczna. Jeśli wykonamy n pomiarów i wyniki ich oznaczymy przez $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, to średnią arytmetyczną tych pomiarów jest wyrażenie:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum a_n}{n}$$

Średnia arytmetyczna nie pokrywa się jednak dokładnie z rzeczywistą wartością mierzonej wielkości. Różnicę pomiędzy wartością średnią A i wartościami poszczególnych pomiarów $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ nazywamy błędem poszczególnego pomiaru lub odchyłką pomiarową $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$x_1 = A - a_1$$

$$x_2 = A - a_2$$

$$x_n = A - a_n$$

Błędy $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ mogą być zarówno dodatnie, jak i ujemne. Przy dostatecznie dużej liczbie pomiarów liczba błędów dodatnich jest równa liczbie błędów ujemnych.

Jednakże z rozważań teoretycznych wynika, że dla zmniejszenia błędu średniej arytmetycznej pomiarów nie jest konieczne nadmierne zwiększanie liczby pomiarów, w praktyce wystarcza liczba dziesięciu. Jeśli pojedyncze błędy uporządkujemy według ich wielkości, to się okaże iż małych błędów jest znacznie więcej niż dużych i że skupiają się one około wartości zero, podczas gdy błędy duże występują tu w bardzo małej ilości. Rozkład błędów przypadkowych podlega pewnym prawom statystycznym i zachodzi według tzw. krzywej Gaussa przedstawionej na rys. 1 i wyrażonej funkcją:

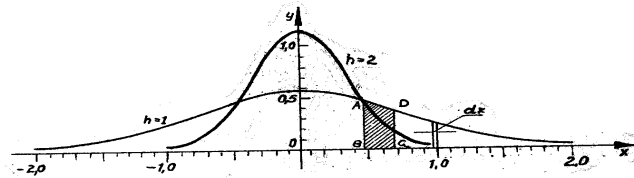
$$y(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \cdot x^2} \quad (1)$$

gdzie:

x – wartość błędu,

$y(x)$ - częstość występowania błędu albo tzw. gęstość prawdopodobieństwa występowania błędu o wartości x ,

h – stała zwana współczynnikiem dokładności pomiaru.



Rys.1. Krzywa normalnego rozkładu błędów statystycznych (krzywa Gaussa).

Na rys. 1 mamy przedstawione dwie krzywe rozkładu błędów przypadkowych wykreślone dla dwóch wartości h , jedną dla wartości $h = 1$ i drugą dla $h = 2$. Widzimy, że krzywa, dla której stopień dokładności jest większy ($h = 2$), jest bardziej stroma, tzn. rozrzut błędów jest mniejszy. Błędy są bardziej skupione około zera aniżeli w przypadku $h = 1$.

Z wykresu można też od razu odczytać prawdopodobieństwo występowania błędu w pewnych granicach x i $x + dx$. Wynosi ono:

$$P = y \, dx \quad (2)$$

Geometrycznym przedstawieniem takiego prawdopodobieństwa jest nieskończenie wąski prostokąt, którego wysokością jest y , a podstawą Δx . Prawdopodobieństwo występowania błędu w granicach $B C$ przedstawia wyrażenie:

$$P = \int_B^C y \, dx \quad (3)$$

Błąd średni kwadratowy

Aby określić błąd średni kwadratowy obliczamy błędy poszczególnych wyników (różnice pomiędzy wartością średnią a poszczególnymi pomiarami), tworzymy sumy ich kwadratów i dzielimy przez liczbę pomiarów pomniejszoną o jedność. Pierwiastek drugiego stopnia z tego wyrażenia daje nam błąd średni kwadratowy ε , zwany też średnim błędem poszczególnego pomiaru, a mianowicie:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum(a_k - a)^2}{n - 1}} \quad (4)$$

Średni błąd poszczególnego pomiaru, podzielony przez pierwiastek drugiego stopnia z liczby pomiarów n , daje średni błąd wyniku E :

$$E = \sqrt{\frac{\sum(a_k - a)^2}{n(n-1)}} \quad (5)$$

Mnożąc średni błąd poszczególnego pomiaru (zależność 4) przez 0.674 (w przybliżeniu 2/3) otrzymujemy błąd prawdopodobny poszczególnego pomiaru:

$$W = 0.674\varepsilon = \pm 0.674 \sqrt{\frac{\sum(a_k - a)^2}{n-1}} \quad (6)$$

Błąd prawdopodobny poszczególnego pomiaru jest to taki błąd, dla którego połowa pomiarów ma błędy bezwzględne mniejsze od niego, a połowa – bezwzględnie większe.

Mnożąc natomiast średni błąd wyniku przez 0.674, otrzymujemy błąd prawdopodobny wyniku, czyli:

$$W = 0.674E = \pm 0.674 E = \pm 0.674 \sqrt{\frac{\sum(a_k - a)^2}{n(n-1)}} \quad (7)$$

Błąd maksymalny

Błąd maksymalny określamy jako wartość bezwzględną między średnią arytmetyczną z n pomiarów a pomiarem najbardziej odbiegającym od wartości średniej;

$$B_{\max} = \left| \frac{\sum a_i}{n} - a_m \right| \quad (8)$$

gdzie:

a_m – jest wynikiem pomiaru najwięcej różniącego się od średniej.

Jeżeli na wykresie przedstawimy zależność średniego błędu wyniku E od liczby pomiarów n , $E = f(n)$ zgodnie z wzorem (5), to okazuje się, że z wzrostem liczby pomiarów zmniejsza się wartość błędu; jednakże począwszy od około $n = 10$ to zmniejszanie się jest bardzo małe, tak że w zupełności wystarczy wykonać w pracy laboratoryjnej maksymalnie 10 pomiarów tego samego rodzaju. Podobną zależność stwierdzamy również w przypadku błędu prawdopodobnego średniej arytmetycznej.

Jeśli przyrząd jest mało dokładny, to powtarzanie pomiarów daje każdorazowo ten sam wynik.

Z podobną sytuacją mamy też do czynienia jeśli z jakiegoś powodu możemy dokonać tylko jednego lub dwu pomiarów. W takich przypadkach oszacowania błędu dokonujemy wyłącznie na podstawie klasy przyrządu (błąd systematyczny przyrządu), a jeśli klasa nie

jest znana, to zakładamy, że prawidłowy odczyt jest możliwy co najwyżej z błędem $\pm |\Delta x|$ równym połowie najmniejszej działki w jaką zaopatrzone skalę przyrządu.

Rozważane powyżej błędy są błędami bezwzględnymi. W ocenie stopnia dokładności wykonanego pomiaru o wiele większe znaczenie mają błędy względne, które definiujemy jako stosunek wielkości błędu bezwzględnego do wartości średniej wyrażony w procentach.

Błędy wyników złożonych

Omawiane dotąd przypadki dotyczyły błędów wielkości mierzonych bezpośrednio, jak np. długość, temperatura, natężenie prądu itp. Jednak w praktyce laboratoryjnej zagadnienia sprowadzają się najczęściej do wyznaczania wielkości będących funkcją jednej lub kilku mierzonych wielkości. W przypadku, gdy wielkość wyznaczana jest iloczynem dowolnych potęg mierzonych wielkości np.

$$A = Cx_1^a x_2^b x_3^c, \quad (9)$$

przy wyznaczaniu błędu posługujemy się metodą tzw. pochoďnej logarytmicznej.

W tym przypadku logarytmujemy obie strony równania

$$\ln A = \ln C + a \ln x_1 + b \ln x_2 + c \ln x_3$$

i następnie różniczkujemy ten logarytm. Zastępując różniczki odpowiednimi wartościami błędów otrzymujemy:

$$\frac{\Delta A}{A} = \pm \left(|a| \frac{\Delta x_1}{x_1} + |b| \frac{\Delta x_2}{x_2} + |c| \frac{\Delta x_3}{x_3} \right) \quad (10)$$

Wyrażenie to daje nam błąd względny maksymalny. Nawias zawiera sumę wyrazów dodatnich, z których każdy przedstawia wkład błędu pomiaru danej wielkości w błąd wyniku końcowego. Aby otrzymać błąd bezwzględny mnożymy obie strony równania przez A i otrzymujemy:

$$\Delta A = \pm A \left(|a| \frac{\Delta x_1}{x_1} + |b| \frac{\Delta x_2}{x_2} + |c| \frac{\Delta x_3}{x_3} \right) \quad (11)$$

Z oczywistych względów tę metodę stosujemy tylko w takim przypadku, gdy wielkość wyznaczana nie jest sumą ani różnicą poszczególnych członów.

Przykład 1

Prosty przypadek tego rodzaju zachodzi np. gdy chcemy wyznaczyć powierzchnię koła mierząc jego średnicę. Powierzchnia koła jest funkcją tylko jednej zmiennej wyznaczonej doświadczalnie, mianowicie jego średnicy.

Powierzchnia ta wyraża się funkcją:

$$P = \pi r^2$$

Wyrażenie to najpierw logarytmujemy, po czym różniczkujemy i zastępujemy symbole d przez Δ ($d \rightarrow \Delta$). Otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned} \ln P &= \ln \pi + 2 \ln r \\ \frac{dP}{P} &= 2 \frac{dr}{r} \\ \frac{\Delta P}{P} &= 2 \frac{\Delta r}{r} \end{aligned} \quad (12)$$

Aby otrzymać błąd bezwzględny mnożymy stronami ostatnie wyrażenie przez $P = \pi r^2$.

Przykład 2

Przy wyznaczaniu przyspieszenia ziemskiego g za pomocą wahadła matematycznego otrzymujemy zależność:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}, \quad (13)$$

gdzie l oznacza długość wahadła, a T – jego okres drgań. Logarytmując ostatnie wyrażenie i obliczając jego pochodną otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \ln g &= \ln 4\pi^2 + \ln l + 2 \ln T, \\ \frac{dg}{g} &= \frac{dl}{l} + \frac{2dT}{T} \\ \frac{\Delta g}{g} &= \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T} \end{aligned} \quad (14)$$

W przypadkach gdy wielkość wyznaczana wyraża się sumą lub różnicą poszczególnych członów wówczas stosujemy tzw. metodę różniczki zupełnej.

Jeżeli mamy funkcję wielu zmiennych $R = f(x,y,z,\dots)$ to według twierdzenia Taylora:

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial R}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial R}{\partial z} \Delta z + \dots, \quad (15)$$

gdzie: ΔR – błąd wyniku, a Δx , Δy , Δz – błędy wielkości bezpośrednio mierzonych.

Błędy poszczególnych pomiarów mogą się częściowo albo nawet całkowicie kompensować wskutek różnicy znaków, lub w drugim skrajnym przypadku mogą się wszystkie dodawać. Wybieramy dla pewności dobrej oceny błędu przypadek mniej korzystny, tj. przypadek, w którym wszystkie błędy działają w jednym kierunku. Aby sobie to zapewnić, wyrażenie (14) piszemy w postaci:

$$\Delta R = \pm \left(\left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial R}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial R}{\partial z} \right| \Delta z + \dots \right), \quad (16)$$

Znak \pm oznacza, że błąd albo zwiększy wartość wyniku, albo ją zmniejszy, a dwie pionowe kreski wartość bezwzględną wielkości zawartych między nimi.

Praktycznie, aby obliczyć błąd bezwzględny ΔR według równania (15), tworzymy najpierw różniczkę zupełną danej funkcji dR a następnie przechodzimy od symboli różniczek do symboli błędów, zastępując symbol d przez Δ ($d \rightarrow \Delta$).

Dzieląc równanie (15) przez wartość funkcji R otrzymujemy wyrażenie na graniczny błąd względny (maksymalny):

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \frac{1}{f(xyz)} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z + \dots \right) \quad (17)$$

gdzie: Δx , Δy , Δz oznaczają wartości błędów średnich obliczonych według zależności (5).

Mnożąc równanie (16) przez 100 otrzymujemy błąd względny wyrażony w procentach.

Zależność (14) możemy również otrzymać korzystając z metody różniczki zupełnej:

$$\begin{aligned} |\Delta g| &= \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| |\Delta l| + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| |\Delta T| \\ |\Delta g| &= \left| \frac{4\pi^2}{T^2} \right| |\Delta l| + \left| \frac{8\pi^2 l}{T^3} \right| |\Delta T| \end{aligned} \quad (18)$$

ostatecznie

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \left| \frac{\Delta l}{l} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right| \quad (19)$$

Przykład 3

Współczynnik lepkości cieczy wyznaczamy metodą Stokesa i obliczamy z zależności:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{r^2}{\nu} (\rho_k - \rho_c) g \quad (20)$$

gdzie: g – przyspieszenie ziemskie, r – promień kulki, ν - prędkość opadania kulki,

ρ_k - gęstość kulki, ρ_c - gęstość cieczy.

Błąd względny

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \pm \left(\frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta\rho_k}{\rho_k - \rho_c} + \frac{\Delta\rho_c}{\rho_k - \rho_c} \right) \quad (21)$$

Ponieważ $v = \frac{l}{t}$ otrzymujemy:

$$\frac{\Delta v}{v} = \pm \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta t}{t} \right) \quad (22)$$

Δl , Δr i Δt obliczamy z większej liczby pomiarów na podstawie wzoru (5). W podobny sposób obliczamy $\Delta\rho_k$ i $\Delta\rho_c$, chyba że gęstości ρ_k i ρ_c są znane.

Przykład 4 (dot. Prawa Stokesa).

Za pomocą śruby mikrometrycznej wykonujemy 10 pomiarów średnicy kulki i dane wpisujemy w pierwszej kolumnie w poniższej tabeli. Kolumna druga zawiera błędy poszczególnych pomiarów, a trzecia ich kwadraty.

Tabela 1

Średnica kulki d (mm)	Błąd poszczególnego Pomiaru ($a_k - a$)	$(a_k - a)^2 10^4$ (mm) ²
3,61	0,02	4
3,60	0,01	1
3,57	0,02	4
3,59	0,00	0
3,60	0,01	1
3,62	0,03	9
3,59	0,00	0
3,58	0,01	1
3,59	0,00	0
3,58	0,01	1
Wartość średnia 3,59		21

Średni błąd wyniku wg. zal. (5)

$$E = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(a_k - a)^2}{n(n-1)}}$$

po podstawieniu $\Sigma(a_k - a)^2 = 0,0021$ oraz $n = 10$ daje:

$$E = \pm \sqrt{\frac{0,0021}{10 \cdot 9}} = \pm \sqrt{\frac{0,0021}{90}} \approx \pm 49 \cdot 10^{-4} \cong \pm 50 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

Błąd względny: $\pm \frac{48}{3,59} \cdot 10^{-4} \cong 0,0013$, błąd względny w procentach = $\pm 0,13\%$.

Ostatecznie średnica zmierzona :

$$d = (3,59 \pm 0,005)mm$$

Przykład 5,

W doświadczeniu mierzono współczynnik rozszerzalności liniowej ciał stałych stosując wzór końcowy

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{\delta l}{(t_2 - t_1)} \quad (23)$$

gdzie: l_0 – długość początkowa, δl – przyrost długości, $(t_2 - t_1)$ – przyrost temperatury.

Długość pręta zmierzona w temperaturze $t_1 = (18 \pm 1)^\circ C$ była równa $l_0 = (107,2 \pm 0,1)cm$. Pręt podgrzano do temperatury $t_2 = (98 \pm 1)^\circ C$ i stwierdzono, że jego długość wzrosła o $\delta l = (0,96 \pm 0,01)mm$. Obliczony ze wzoru (23) współczynnik rozszerzalności liniowej wynosi $\alpha = 11,207 * 10^{-6} K$. Błąd maksymalny obliczamy korzystając z metody różniczki zupełnej (zal. 17), zakładając, że $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t = 1^\circ C$

$$|\Delta \alpha| = \left| \frac{1}{l_0(t_2 - t_1)} \left[\left| \frac{\partial l}{\partial l_0} \Delta l_0 \right| + |\Delta \delta l| + 2 \left| \frac{\delta l}{t_2 - t_1} \Delta t \right| \right] \right| \quad (24)$$

Podstawiając wartości wyznaczone doświadczalnie otrzymujemy:

$$|\Delta \alpha| = \frac{1}{80 * 1,072} \left(\frac{0,96}{1,072} 10^{-3} + 0,01 + 2 \frac{0,96}{80} \right) K^{-1}$$

$$|\Delta \alpha| = 0,424 * 10^{-6} K^{-1} \approx 0,43 * 10^{-6} K^{-1}.$$

Ostateczny wynik zapiszemy w postaci:

$$\alpha = (11,21 \pm 0,43) * 10^{-6} K^{-1}$$

Błąd względny wynosi

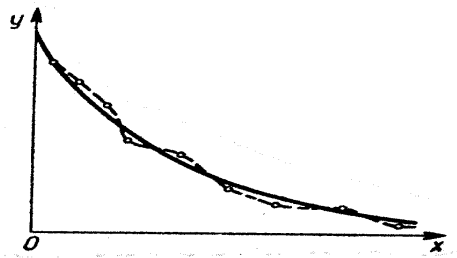
$$\left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha} \right) 100 = 3,9\%$$

Graficzne opracowanie wyników pomiarów

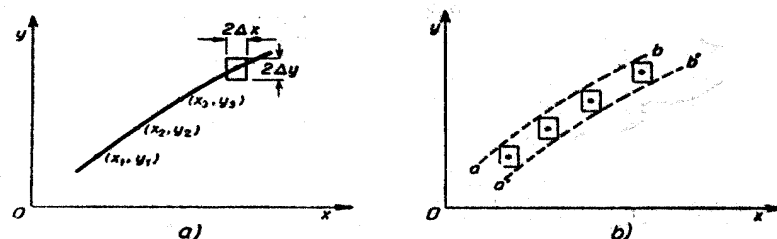
Gdy mamy dwie wielkości fizyczne y i x związane zależnością funkcjonalną $y = f(x)$ stosujemy często graficzne przedstawienie tej zależności. Obrazem graficznym posługujemy się wówczas, gdy drogą doświadczalną otrzymujemy szereg wartości wielkości y oraz szereg odpowiadających im wielkości wartości x . Tak jest np. przy badaniu termopary,

w której napięcie jest proporcjonalne do różnicy temperatur obu spojeń. Dane doświadczalne zbieramy w postaci par odpowiadających sobie wielkości: x_1 i y_1 , x_2 i y_2 itd.; na ich podstawie sporządzamy wykres. Najczęściej posługujemy się prostokątnym układem współrzędnych.

Nanosząc wyniki pomiarów na wykres otrzymamy szereg punktów doświadczalnych, które zaznaczamy w postaci małych kółeczek lub małych krzyżyków. Ponieważ położenie punktów doświadczalnych obarczone jest pewnym błędem krzywą doświadczalną prowadzimy między punktami doświadczalnymi, ale tak, aby przebieg jej był „płynny”, gdyż zakładamy, że przebieg zjawiska jest regularny tak jak pokazano na rys.2. Ponieważ zaznaczone na wykresie wartości x i y są obarczone błędami, na wykres powinniśmy nanosić nie punkty (x_1, y_1) , (x_2, y_2) lecz małe prostokąty, których boki są równe $2\Delta x$, $2\Delta y$ wówczas możemy twierdzić, że wyznaczone doświadczalnie punkty pomiarowe wolne od błędów znajdują się wewnątrz tych prostokątów (rys. 3).



Rys. 2 Graficzne przedstawienie zależności $y = f(x)$, na podstawie punktów doświadczalnych



Rys. 3 Graficzne przedstawienie wyników pomiarów

Wartości błędów maksymalnych bezwzględnych i względnych
niektórych funkcji w najczęściej spotykanych przypadkach

Tabela 2

L.p	Funkcja	Błąd bezwzględny	Błąd względny
1.	$R = x + y + z$	$dR = \pm(dx + dy + dz)$	$\frac{dR}{R} = \pm \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}$
2.	$R = x - y$	$dR = \pm(dx + dy)$	$\frac{dR}{R} = \pm \left(\frac{dx + dy}{x - y} \right)$
3.	$R = xyz$	$dR = \pm(yzdx + xzdy + xydz)$	$\frac{dR}{R} = \pm \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \right)$
4.	$R = ax$	$dR = \pm adx$	$\frac{dR}{R} = \pm \frac{dx}{x}$
5.	$R = x^n$	$dR = \pm nx^{n-1} dx$	$\frac{dR}{R} = \pm n \frac{dx}{x}$
6.	$R = \sqrt[n]{x}$	$dR = \pm \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} dx$	$\frac{dR}{R} = \pm \frac{1}{n} \frac{dx}{x}$
7.	$R = \frac{x}{y}$	$dR = \pm \frac{ydx + xdy}{y^2}$	$\frac{dR}{R} = \pm \left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right)$
8.	$R = \log_e x$	$dR = \pm \frac{dx}{x}$	$\frac{dR}{R} = \pm \frac{dx}{x \log_e x}$
9.	$R = \sin x$	$dR = \pm \cos x dx$	$\frac{dR}{R} = \pm \operatorname{ctg} x dx$
10.	$R = \cos x$	$dR = \pm \sin x dx$	$\frac{dR}{R} = \pm \operatorname{tg} x dx$
11.	$R = \operatorname{tg} x$	$dR = \pm \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\frac{dR}{R} = \pm \frac{2dx}{\sin 2x}$
12.	$R = \operatorname{ctg} x$	$dR = \pm \frac{dx}{\sin^2 x}$	$\frac{dR}{R} = \pm \frac{2dx}{\sin 2x}$

MECHANIKA I CIEPŁO

WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI METODĄ DYNAMICZNĄ

Wprowadzenie

Ciała stałe wyróżniają się uporządkowanym układem atomów (cząsteczek), które tworzą trwałą strukturę, uporządkowanie polega na periodycznym powtarzaniu się w trzech kierunkach układu współrzędnych podstawowego modelu przestrzennego zwaną komórką elementarną kryształu.

W ciałach stałych cząsteczki (atomy lub jony) dzięki siłom wzajemnego przyciągania i niewielkiej energii kinetycznej mogą wykonywać tylko drgania wokół stałych położeń i dzięki temu tworzą stosunkowo sztywny układ (trudno zmieniają kształt i objętość). Jeżeli natomiast oddziaływania między atomami lub cząsteczkami są słabe, to ciało jest miękkie i kruche. Pod wpływem wywieranej siły zmienia kształt, ale po zaprzestaniu wywierania siły wraca do pierwotnego kształtu. Ta cecha to sprężystość postaci. Ciało można także odkształcić trwale jak na przykład plastelinę. Jednak po przekroczeniu pewnej granicy działając siłą na ciało zniszczymy jego kształt, co świadczy o kruchości ciała. Do początków XX w. za ciała stałe uważano wszystkie substancje wykazujące sprężystość postaci (tzn. zdolność powracania do pierwotnych wymiarów i kształtu po przerwaniu działania sił odkształcających); właściwość tę mają także takie ciała, jak szkliwa i polimery, zaliczane dawniej do ciał stałych, chociaż w strukturze ich brak uporządkowania przestrzennego. Obecnie ciała te uważane są za przechłodzone ciecze (bezpostaciowe ciała). Ciało stałe składa się z atomów lub cząsteczek, które są rozmieszczone regularnie.

Regularne rozmieszczenie cząsteczek

W ciele stałym swoboda ruchu molekuł jest jeszcze bardziej ograniczona niż w cieczy. Molekuły ciała bez działania sił zewnętrznych nie mogą przesuwać się jedne względem drugich, a tylko wykonują w swym ruchu cieplnym drgania koło położeń równowagi. Wiemy, jak trudno jest przełamać czy rozciągnąć pręt metalowy lub rozłupać drewno. Każdorazowej bowiem zmianie objętości lub kształtu ciała stałego przeciwstawiają się znaczne siły międzymolekularne. Przy zbliżaniu molekuł działają (podobnie jak w cieczech) siły

odpychania, przy oddalaniu molekuł pojawia się działanie sił przyciągania. Własności substancji wynikają z układu oraz zachowania cząsteczek tworzących daną substancję. Odkształcenie ciała stałego pod wpływem sił zewnętrznych polega na przemieszczaniu się cząsteczek (atomów) tego ciała z pierwotnego położenia równowagi w inne. Przemieszczeniu temu przeciwdziałają siły wewnętrzne ciała pochodzące od wzajemnego oddziaływania między cząsteczkami (atomami). Jeżeli przemieszczenie cząsteczek było niewielkie, to po usunięciu sił zewnętrznych, siły wewnętrzne przywracają cząsteczkom pierwotne położenie. Odkształcenie odpowiadające takiemu odwracalnemu przemieszczeniu cząsteczek nazywamy odkształceniem sprężystym. Jeżeli natomiast siła zewnętrzna przemieszcza cząsteczki ciała stałego tak znacznie, że siły wewnętrzne działające między cząsteczkami nie są zdolne do przywrócenia im położenia pierwotnego po usunięciu siły zewnętrznej, to odkształcenie nazywamy plastycznym lub trwałym. Należy zaznaczyć, że przy długotrwałym działaniu nawet niewielkich sił zewnętrznych odkształcenie sprężyste może się stać odkształceniem plastycznym. Siły wewnętrzne działające między cząsteczkami odkształconego ciała stałego będziemy nazywali siłami sprężystości. Wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na ciało odkształcone jest równoważona właśnie przez siły sprężystości.

Ciała amorficzne

Ciało amorficzne (ciało bezpostaciowe) – stan skupienia materii charakteryzujący się własnościami zbliżonymi do ciała krystalicznego, w którym nie występuje dalekozasięgowe uporządkowanie cząsteczek. Ciało będące w stanie amorficznym jest ciałem stałym, ale tworzące je cząsteczki są ułożone w sposób dość chaotyczny, bardziej zbliżony do spotykanego w cieczech. Z tego powodu ciało takie dość często nazywa się stałą cieczą przechłodzoną.

W stanie amorficznym występują zwykle substancje, które są zdolne do krystalizacji, ale ze względu na duży rozmiar cząsteczek, zanieczyszczenia lub szybkie schłodzenie cieczy, nie mają warunków, aby w pełni skryształizować.

Faza amorficzna rzadko występuje w całej objętości substancji spotykanych w praktyce, lecz zwykle współistnieje z fazą krystaliczną. W ciałach takich pojawiają wówczas domeny (niewielkie obszary) fazy krystalicznej, przemieszane z domenami fazy amorficznej, przy czym zmieniając warunki schładzania cieczy, można zmieniać proporcje jednej fazy

do drugiej w dość szerokim zakresie. Amorfizm (beźpostaciowość) występuje w wielu substancjach spotykanych na co dzień. Są to na przykład:

- metale i stopy metali (np. stal węglowa jest zlepkiem domen krystalicznych żelaza, poprzedzielanych domenami amorficznymi tworzonymi przez węgiel żelaza, węgiel amorficzny oraz czyste żelazo amorficzne),
- szkło- zależnie od rodzaju ma większą lub mniejszą zawartość fazy amorficznej; czym większy jej udział w szkle, tym jest ono mniej kruche i łatwiej topliwe, ale też bardziej mętne; typowe szkło stosowane w szybach okiennych posiada od 40 do 60% fazy amorficznej; idealnie czysta krzemionka poddana procesowi bardzo szybkiego schładzania jest szkłem całkowicie amorficznym; z kolei szkła "kwarcowe", nie posiadają fazy bezpostaciowej prawie wcale,
- stopy polimerów - zależnie od ich budowy chemicznej oraz warunków schładzania z fazy ciekłej posiadają różną zawartość fazy amorficznej, która może się wahać od 1 do 99%; na przykład niektóre rodzaje włókien poliamidowych (kevlar)) charakteryzuje bardzo niewielka (ok. 2-3%) jej ilość, natomiast stałe żywice polisiloksanowe są niemal w 100% amorficzne; w tworzywach spotykanych na co dzień (np. polietylenie) udział fazy amorficznej waha się w zakresie 60-85%,
- niektóre minerały; opale, bursztyny.

Ciała krystaliczne

Ciało krystaliczne (kryształ) – stan skupienia materii, w którym cząsteczki, atomy lub jony nie mają pełnej swobody przemieszczania się w objętości ciała, gdyż zajmują ściśle określone miejsca w sieci przestrzennej.

Sieć krystaliczna

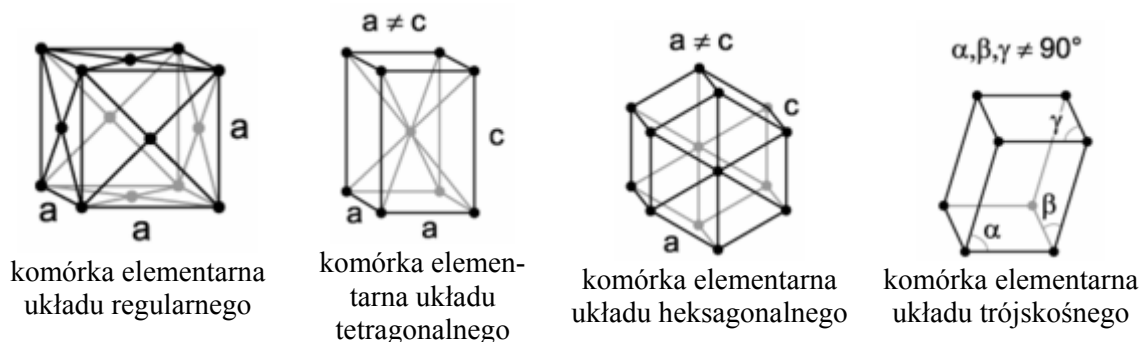
W sieci krystalicznej atomy ułożone są w określonym porządku. Porządek ten daje się stosunkowo prosto opisać przez podanie własności symetrii. Symetrię kryształu definiuje się poprzez poddanie operacji symetrii przekształcających kryształ sam w siebie. Przekształceniami symetrii są translacje, obroty, inwersja, obroty inwersyjne i płaszczyzny odbicia.

Ciało stałe zbudowane w ten sposób nazywamy kryształem. Istnieje 14 sposobów takiego wypełnienia przestrzeni, które różnią się kątami między krawędziami komórki elementarnej i nierównościami długości jej krawędzi. Te sposoby są znane pod nazwą sieci

Bravais. Dział fizyki, który się nimi zajmuje to krystalografia. Inna możliwa struktura ciała stałego to struktura amorficzna.

Przykłady komórek elementarnych sieci Bravais

Tabela 1.1



Oprócz tego istnieje układ jednoskośny, rombowy, romboedryczny.

Wiązania krystaliczne

Zależnie od charakteru wzajemnych oddziaływań jąder i powłok elektronowych sąsiednich atomów wiązania możemy podzielić na:

- **atomowe** - wiązanie to polega na utworzeniu jednej, dwóch lub trzech par elektronowych przez dwa atomy, z których każdy dostarcza do wytworzenia wspólnego dubletu taką samą liczbę niesparowanych elektronów
- **jonowe** - polega na przejściu jednego lub kilku elektronów walencyjnych z atomów pierwiastka elektrododatniego do atomów pierwiastka elektroujemnego
- **metaliczne** - polega na przekształceniu atomów tego samego metalu lub atomów różnych metali i swobodnie poruszających się między nimi elektronów
- **cząsteczkowe (molekularne)** - cechą charakterystyczną tych wiązań jest to, że w węzłach sieci krystalicznej umiejscowione są oddzielne cząsteczki, tworzące najczęściej dipole elektryczne, które oddziałując na siebie wzajemnie siłami przyciągania zapewniają trwałość struktury kryształu.

Właściwości kryształów

Tabela 1.2

	Atomowe	Jonowe	Metaliczne	Cząsteczkowe
właściwości mechaniczne	duża wytrzymałość, duża twardość	duża wytrzymałość, duża twardość	wytrzymałość różna dla różnych metali, na ogół duża, ciągliwość	mała twardość, mała wytrzymałość
właściwości termiczne	temperatury topnienia wysokie, mały współczynnik rozszerzalności cieplnej	temperatury topnienia wysokie, mały współczynnik rozszerzalności cieplnej	temperatury topnienia różne, duży współczynnik rozszerzalności cieplnej	temperatury topnienia niskie, duży współczynnik rozszerzalności cieplnej
właściwości elektryczne	w stanie oczyszczonym nie przewodzą prądu	w stanie stałym źle przewodzą prąd, w stanie stopionym i w roztworach wykazują przewodnictwo jonowe	przewodniki prądu	izolatory

Prawo Hooke'a opisuje związek między naprężeniami i deformacją ciała stałego w najprostszej postaci prawo to można opisać równaniem

$$\Delta l = \frac{l_0 F}{ES} \quad (1.1)$$

gdzie: Δl oznacza zmianę długości (wydłużenie lub skrócenie) ciała o długości początkowej l_0 , polu przekroju poprzecznego S poddanego działaniu siły F ,

E - współczynnik charakteryzujący własności sprężyste ciała nazywany modułem Young'a.

Dzieląc równanie (1.1) przez l_0 otrzymamy:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{1}{E} \sigma \quad (1.2)$$

Wielkość $\Delta l/l = \varepsilon$ nazywamy deformacją względną, natomiast $F/S = \sigma$ naprężeniem.

Opis naprężeń

Rozpatrzmy sześcián którego ściany są prostopadłe do osi kartezjańskiego układu współrzędnych, poddany działaniu sił zewnętrznych. Siłę działającą na każdą ze ścian można przedstawić jako sumę sił równoległych do poszczególnych osi. Jedną prostopadłą do wybranej ściany sześciánu i dwie równoległe do niej (rys.1.3). Naprężeniem σ , jak już wspomniano nazywamy stosunek siły F działającej na powierzchnię do wielkości tej powierzchni S

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.3)$$

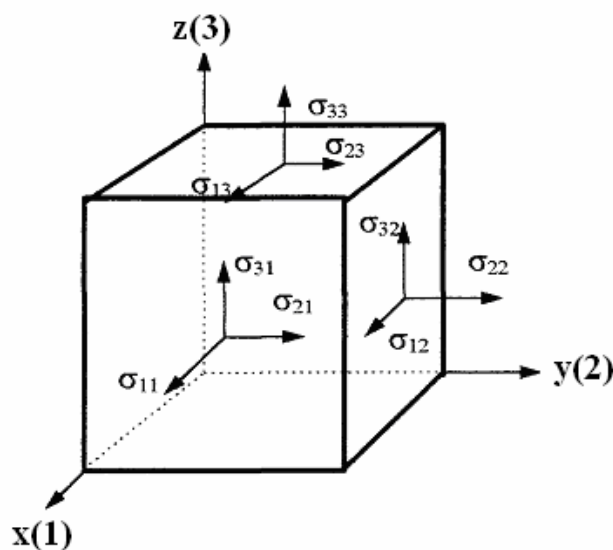
Ze wzoru (1.1) wynika, że jednostką naprężenia jest N/m^2 czyli Pa (pascal).

Aby jednoznacznie opisać naprężenie należy podać kierunek siły oraz określić poddaną działaniu tej siły ścianę. Określenie ściany polega na podaniu kierunku do którego prostopadła jest rozpatrywana ściana. Z przytoczonych rozważań wynika, że w ogólnym przypadku może być dziewięć składowych naprężenia - naprężenie jest więc tensorem drugiego rzędu. Do opisu takiej wielkości korzystamy z tablicy o trzech wierszach i trzech kolumnach;

$$\begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{matrix} \quad (1.4)$$

Pierwszy wskaźnik określa kierunek siły działającej na daną ścianę, drugi kierunek do którego jest prostopadła ściana poddana naprężeniu. Oś x oznaczamy cyfrą 1, oś y cyfrą 2 natomiast oś z 3. Na rysunku 1.3 przedstawiono sposób oznaczania naprężeń. Warto zwrócić uwagę, że dla składowych tensora naprężeń dla których wskaźniki są jednakowe - składowych diagonalnych ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$) siła jest prostopadła do powierzchni. Składowe te nazywamy naprężeniami normalnymi. Pozostałe składowe opisują naprężenia ścinające.

Aby wykluczyć ruch obrotowy (rozpatrujemy własności sprężyste ciało) musimy przyjąć że naprężenia ścinające $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ oraz $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Mówimy, że mamy do czynienia z symetrycznym tensorem drugiego rzędu ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)



Rys. 1.3 Sposób oznaczania naprężeń

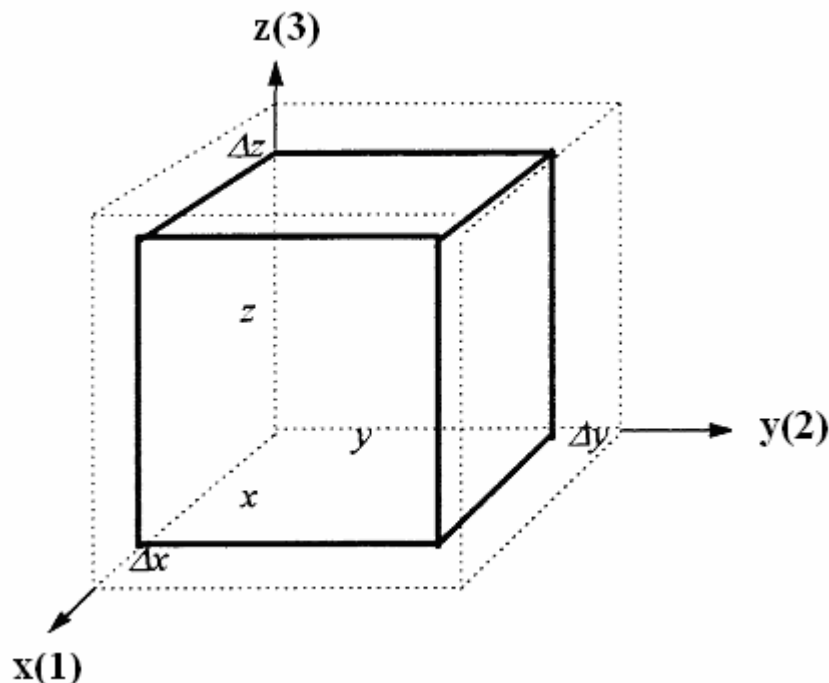
Na zakończenie opisu naprężeń warto zwrócić uwagę na to że ciśnienie hydrostatyczne p jest szczególnym przypadkiem naprężeń. Dla ciśnienia hydrostatycznego wszystkie naprężenia ścinające są równe zero ($\sigma_{ij} = 0$ dla $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$), natomiast naprężenia normalne są równe ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$). Ciśnienie hydrostatyczne można traktować jako skalar.

Opis deformacji

Podobnie jak uprzednio rozpatrujemy sześcian poddany deformacji. Przyjmijmy, że krawędzie o długościach początkowych x , y i z uległy wydłużeniu odpowiednio o Δx , Δy , Δz natomiast kąty między krawędziami pozostały niezmienione - rys 1.4. Przyjmujemy następujące oznaczenia:

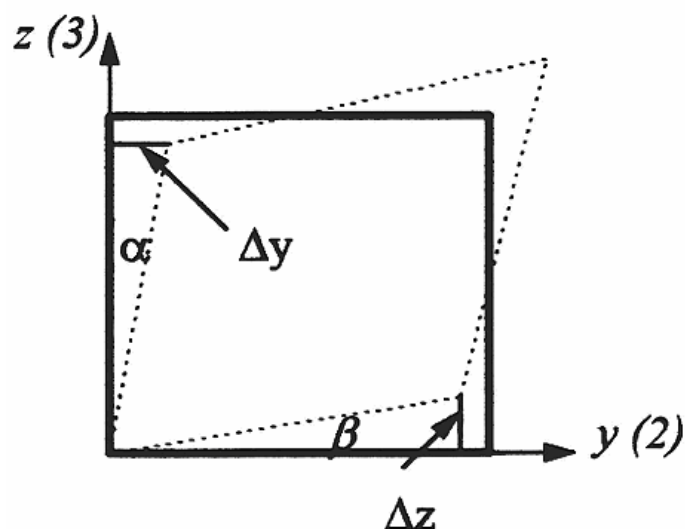
$$\frac{\Delta x}{x} = \varepsilon_{11}, \quad \frac{\Delta y}{y} = \varepsilon_{22}, \quad \frac{\Delta z}{z} = \varepsilon_{33} \quad (1.5)$$

Równania (1.5) określają odkształcenia (deformacje) normalne.



Rys. 1.4. Sposób oznaczania deformacji normalnych

W celu opisu deformacji ścicia rozpatrzmy ścianę kostki prostopadłą do osi x (rys. 1.5). Początkowo ściana jest kwadratem o bokach $z = y$. Po ścieniu ściana przechodzi w rąb, którego boki tworzą z osiami układu współrzędnych kąty α i β .



Rys. 1.5 Ilustracja deformacji ścicia w płaszczyźnie yz

Dla małych kątów:

$$\alpha = \frac{\Delta y}{z} = \varepsilon_{23} \quad \beta = \frac{\Delta z}{y} = \varepsilon_{32} \quad (1.6)$$

Gdyby $\alpha \neq \beta$ oznaczałoby to, że rąb obrócił się o kąt $\alpha - \beta$. Jeżeli wykluczmy obroty musi zachodzić równość $\alpha = \beta$ czyli $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$. W podobny sposób oznaczamy deformacje ścicia w płaszczyznach prostopadłych do osi y i z . W stosowanej przez nas notacji wszystkie możliwe deformacje możemy zapisać w postaci tablicy o wymiarach 3×3 .

$$\begin{matrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{matrix} \quad (1.7)$$

Tak więc deformacje tworzą symetryczny tensor drugiego rzędu ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ dla $i, j = 1, 2, 3$). Składowe diagonalne tensora deformacji (leżące na przekątnej) oznaczają deformacje normalne, natomiast pozostałe składowe oznaczają deformacje ścicia.

Dla ciała anizotropowego (takiego, którego własności fizyczne są różne w różnych kierunkach) jedna składowa naprężenia może wywołać dziewięć deformacji. Składowych naprężeń jest dziewięć i deformacji też jest dziewięć, a więc dla ciała anizotropowego należałoby podać 81 współczynników sprężystości. Współczynniki sprężystości tworzą ten-

sor czwartego rzędu o 81 składowych. Ze względu na symetrię tego tensora liczba liniowo niezależnych składowych redukuje się do 36. Warto dodać, że liczba składowych tensora współczynników sprężystości zależy od symetrii materiału (kryształ, ceramika lub folia) i może być mniejsza od 36, co nie zmienia faktu, że opis własności sprężystych ciała anizotropowego jest zagadnieniem bardzo skomplikowanym wykraczającym poza ramy tego opracowania.

Sprężystość a siły międzycząsteczkowe

Ciało będziemy nazywali sprężystym i do opisu zależności między naprężeniem i deformacją będziemy mogli stosować prawo Hooke'a jeżeli związek naprężenia z deformacją jest liniowy, a po zdjęciu naprężenia ciało powraca do początkowych rozmiarów.

W celu wyjaśnienia własności sprężystych ciał zwróćmy uwagę na to, że ciała są zbudowane z atomów lub cząsteczek, które oddziałują między sobą. Siły oddziaływa (nie zastanawiając się nad ich naturą) można podzielić na siły przyciągania F_p i odpychania F_o . Z doświadczenia wiadomo, że jeżeli atomy lub cząsteczki zbliżymy na dostateczną odległość to będą przeważały siły odpychania natomiast na dużych odległościach przeważają siły przyciągania. Do opisu sił spełniających te warunki wystarczy przyjąć potencjały sił przyciągających i odpychających w postaci:

$$U_p = \frac{C_p}{r^{k_p}} \quad U_o = \frac{C_o}{r^{k_o}} \quad (1.8)$$

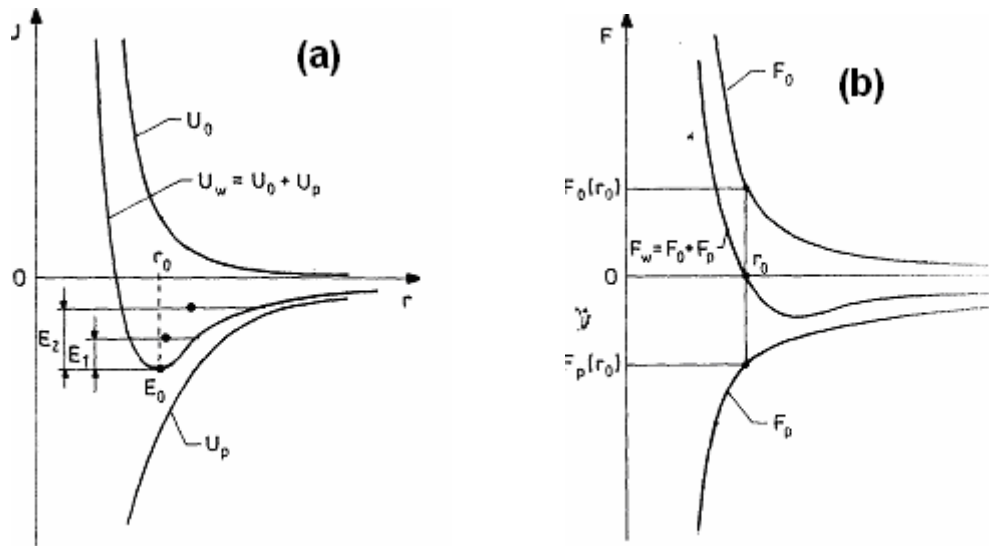
gdzie: C_p , C_o , k_p , k_o oznaczają stałe, przy czym $k_o > k_p > 3$. Efektywny potencjał jednej cząstki względem drugiej przedstawiono na rys.1.6a. Położenie równowagi r_o odpowiada minimum potencjału.

Przypomnijmy, że siła

$$F = -grad(U) = -\frac{dU}{dr} \quad (1.9)$$

Z równań (1.8) możemy obliczyć siły przyciągania i odpychania

$$F_p = \frac{C_p k_p}{r^{k_p+1}} \quad F_o = \frac{C_o k_o}{r^{k_o+1}} \quad (1.10)$$



Rys. 1.6 Zależności energii potencjalnej oddziaływania między cząsteczkami od ich wzajemnej odległości wynikająca z równania (1.8) oraz sił oddziaływania między tymi cząsteczkami (1.9)

Na rys. 1.6b przedstawiono zależności sił przyciągania i odpychania oraz siły wypadkowej; $F_w = F_p + F_o$ od odległości (wynikające z równań (1.8 i 1.9)

Dodatnia wartość siły odpowiada odpychaniu, natomiast ujemna przyciąganiu, w położeniu równowagi dla $r = r_o$, siły odpychania i przyciągania równoważą się i siła wypadkowa jest równa zero. Na prawo lub na lewo od tego położenia na cząstkę działa siła skierowana w kierunku położenia równowagi.

Rozciągnięcie ciała odpowiada zwiększeniu odległości międzycząsteczkowych i powstanie siły przyciągającej natomiast ścisnieniu towarzyszy powstanie wypadkowej siły odpychającej. Przedstawiony model własności sprężystych jest modelem bardzo uproszczonym w którym nie zastanawialiśmy się nad mechanizmami oddziaływań międzycząsteczkowych.

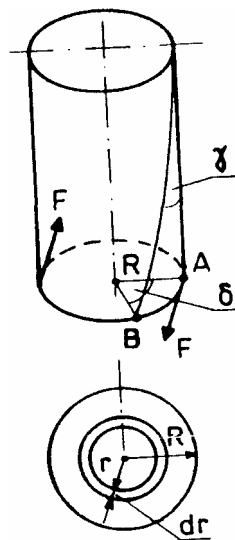
Skrećenie pręta

Rozpatrzmy pręt w kształcie walca o długości l i promieniu R , zamocowany jednostronnie, do którego przyłożono stycznie dwie siły F (rys.1.7). Pod działaniem pary sił pręt ulegnie skrećeniu tak, że tworząca walca przed skrećeniem będzie tworzyła kąt γ z tworzącą walca po skrećeniu. Promień walca obróci się o kąt δ . Skrećenie walca można traktować jako ścięcie każdego z nieskończenie małych elementów walca o kąt γ w płaszczyźnie prostopadłej do promienia i równoległej do tworzącej. Na element dolnej powierzchni walca o

promieniach r , $r+dr$ i polu powierzchni $dS = 2\pi r \delta r$ ($2\pi r$ oznacza długość elementu powierzchni - długość paska natomiast dr jego szerokość) działa siła $2dF$. Siła ta powoduje naprężenie ścinające τ .

$$\tau = \frac{2dF}{2\pi r dr} \quad (1.11)$$

Pod działaniem tego naprężenia nastąpi deformacja ścięcia o kąt γ . W zakresie stosowalności prawa Hooke'a można przyjąć, że deformacja ścięcia jest proporcjonalna do naprężeń ścinających:



Rys. 1.7 Skręcenie pręta

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (1.12)$$

G - oznacza moduł sztywności (odpowiednik modułu Young'a dla rozciągania lub ściskania). Z rys. 1.7 wynika, że:

$$\delta = \frac{AB}{r}, \quad \text{oraz.} \quad \gamma = \frac{AB}{l} \quad (1.13)$$

Z równań (1.13) otrzymujemy:

$$\gamma = \frac{\delta r}{l} \quad (1.14)$$

Z równań (1.11) i (1.12) możemy obliczyć:

$$dF = \pi \cdot G \cdot \gamma \cdot r dr = \frac{\pi \cdot G \cdot \delta \cdot r^3 dr}{l} \quad (1.15)$$

Mnożąc wektorowo r przez dF otrzymamy moment siły:

$$dM = 2rdF = \frac{2\pi \cdot G \cdot \delta \cdot r^3 dr}{l} \quad (1.16)$$

Całkowity moment siły otrzymamy całkując dM w granicach od 0 do R :

$$M = \int_0^R dM = \int_0^R \frac{2\pi \cdot G \delta}{l} r^3 dr = \frac{\pi \cdot Gr^4}{2l} \delta. \quad (1.17)$$

Z tego równania wynika, że kąt skręcenia pręta δ jest proporcjonalny do momentu siły i długości pręta oraz modułu sztywności a odwrotnie proporcjonalny do czwartej potęgi promienia pręta.

W warunkach równowagi, zewnętrzny moment siły jest kompensowany przez siły sprężystości. Jeżeli na skręcony pręt nie działa moment sił zewnętrznych to pod wpływem momentu sił sprężystości pręt powróci do położenia równowagi – moment siły jest proporcjonalny do kąta skręcenia i przeciwnie do tego kąta skierowany (kąt też jest wektorem!):

$$M = -D \delta \quad (1.18)$$

wielkość

$$D = \frac{\pi Gr^4}{2l} \quad (1.19)$$

nazywamy momentem kierującym (zwrotnym).

Drgania skrętne – torsyjne

Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego wynika, że jeżeli moment bezwładności ciała $I = \text{const}$ to:

$$M = I \frac{d^2 \delta}{dt^2} \quad (1.20)$$

Podstawiając do równania (1.20) moment siły wynikający z równania (1.18) otrzymamy:

$$-D \delta = I \frac{d^2 \delta}{dt^2} \quad (1.21)$$

Równanie (1.21) można przedstawić w postaci:

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{D}{I} \delta = 0 \quad (1.22)$$

Równanie (1.22) jest analogiczne do równania oscylatora harmonicznego ($\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$).

Rozwiązaniem równania (1.22) jest:

$$\delta = \delta_o \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.23)$$

gdzie: δ_o oznacza amplitudę drgań skrętnych, $\omega^2 = \frac{D}{I}$ częstość drgań natomiast φ - fazę początkową. Okres drgań omawianego oscylatora

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (1.24)$$

Metoda dynamiczna wyznaczania modułu sztywności

Podstawiając równanie (1.19) do (1.24) otrzymamy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I2l}{\pi Gr^4}} \quad (1.25)$$

Z równania (1.25) wynika, że do wzoru na okres drgań skrętnych wchodzi moment bezwładności oscylatora, wymiary geometryczne oraz moduł sztywności badanego ciała. Mierzając okres drgań oscylatora oraz wymiary geometryczne oraz wyznaczając moment bezwładności można obliczyć moduł sztywności G korzystając z równania (1.25).

Bezpośrednie wyznaczenie momentu bezwładności oscylatora torsyjnego jest sprawą dosyć skomplikowaną i mało dokładną, dlatego korzystamy z metody pośredniej.

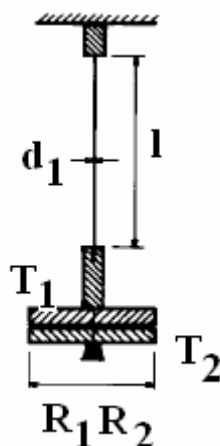
Do badanego pręta (drutu) mocujemy tarczę T_1 i wyznaczamy okres drgań T_1 ; rys.1.8, a następnie dodajemy tarczę T_2 o znanej masie m i promieniu R_2 (dzięki czemu możemy obliczyć moment bezwładności tej tarczy - $I_2 = \frac{mR_2^2}{2}$

Wyznaczając okres drgań oscylatora z dodatkową tarczą T_2 dysponujemy dwoma równaniami

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{D}} \quad \text{oraz} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{D}} \quad (1.26)$$

Obliczając I_1 z pierwszego z równań i podstawiając do drugiego otrzymamy:

$$D = \frac{4\pi^2 I^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (1.27)$$



Rys. 1.8 Schemat układu do badania modułu sztywności metodą dynamiczną

Podstawiając do równania (1.27) D obliczone z (1.19) otrzymamy ostatecznie:

$$G = \frac{16\pi \cdot m \cdot l \cdot d_2^2}{d_1^2 (T_2^2 - T_1^2)} \quad (1.28)$$

W równaniu (1.28) d_2 oznacza średnicę dodatkowej tarczy natomiast d_1 średnicę badanego drutu.

Wykonanie pomiarów

- 1 Za pomocą śruby mikrometrycznej zmierzyć kilkakrotnie średnicę badanego drutu. Obliczyć wartość średnią i średni błąd kwadratowy wartości średniej.
- 2 Za pomocą linijki z podziałką milimetrową zmierzyć długość badanego drutu.
- 3 Korzystając z suwmiarki zmierzyć kilkakrotnie średnicę tarczy dodatkowej.
- 4 Obliczyć wartość średnią i średni błąd kwadratowy wartości średniej.
- 5 Zważyć tarczę dodatkową.
- 6 Wyznaczyć okres drgań oscylatora z jedną tarczą.

Do pomiaru okresu drgań wykorzystujemy stoper połączony z czujnikiem zamocowanym do statywu oraz magnesy doklejone do tarczy T_1 . Stoper zlicza ilość okresów oraz czas ich trwania. Włączenie stopera następuje po wprowadzeniu w ruch oscylatora a wyłączenie po zatrzymaniu.

Ustawić tarczę w takiej pozycji by przyklejone do niej magnesy znajdowały się po lewej stronie ramienia do którego zamocowany jest czujnik. Wyzerować przelicznik naciskając jednocześnie przyciski żółty i szary odczekać około 2 s. Skręcić tarczę o około 45° w lewo i puścić. Zmierzyć czas około 100 drgań. Ilość drgań jest wyświetlana na polu Dst

zegara. Zatrzymać tarczę tak aby magnesy znajdowały się po lewej stronie czujnika. Po przyciśnięciu szarego przycisku odczytujemy czas t_2 w minutach i sekundach. Od odczytanego wyniku odjąć 2 sekundy. Pomiary powtórzyć kilkakrotnie. Obliczyć okres drgań dzieląc czas przez ilość drgań. Wyznaczyć okres drgań oscylatora z dwiema tarczami. Pomiary wykonać podobnie jak z jedną tarczą.

Tabela 1.1

L.p	d_1 [m]	Δd_1 [m]	$d_{2[m]}$	Δd_2 [m]	R_2 [m]	ΔR_2 [m]	m_2 [kg]	Δm_2 [kg]	l [m]	Δl [m]	T_1 [s]	T_2 [s]	ΔT [s]	G [N/m ²]	ΔG [N/m ²]	δG [%]
1																
2																
3																
4																
5																

Opracowanie wyników

- 1 Obliczyć moduł sztywności badanego drutu.
- 2 Korzystając z metody różniczki zupełnej oszacować błąd wyznaczenia modułu sztywności.
- 3 Porównać uzyskany wynik z danymi tabelarycznymi i spróbować odpowiedzieć na pytanie z jakiego materiału wykonany jest badany drut.

Tabela 1.2

G [N/m ²]	ΔG [N/m ²]	δG [%]

Literatura

- [1] J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, WNT Warszawa 1981
 [2] Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, PWN Warszawa 1981
 [3] Ch. A. Wert, R. Robb, M. Thomson, Fizyka ciała stałego, PWN Warszawa 1974

WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA REWERSYJNEGO

Wprowadzenie

Pod pojęciem bryły sztywnej rozumiemy ciało, którego elementarne masy nie zmieniają wzajemnych odległości pod działaniem sił zewnętrznych. Ciało takich w przyrodzie nie ma, ale w odniesieniu do ciał dostatecznie sztywnych, jak np. przedmioty metalowe i przy niezbyt dużych siłach działających na nie, model taki może być praktycznie zastosowany i pozwala znacznie uprościć opis niektórych zjawisk.

Bryła sztywna może poruszać się ruchem postępowym lub obrotowym albo też złożonym z jednego i drugiego.

W ruchu postępowym wszystkie punkty bryły posiadają jednakowe prędkości i przyspieszenia, a przebyte przez nie w dowolnym czasie drogi są sobie równe i równoległe. Tory poszczególnych punktów mogą być zarówno prostoliniowe jak i krzywoliniowe. Opisując zatem ruch postępowy bryły sztywnej można się ograniczyć do opisu ruchu jednego wybranego punktu. Zwykle jest nim środek masy, którego współrzędne w dowolnie obranym układzie współrzędnych prostokątnym dane są w następującej postaci:

$$x_s = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_s = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad z_s = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (2.1)$$

gdzie: m_i – masa dowolnego elementu punktowego bryły,

x_i, y_i, z_i - współrzędne tego elementu, a

M – masa całkowita bryły.

Ruch postępowy środka masy jest taki jakby w nim była skupiona cała masa bryły i jakby do tego punktu były przyłożone wszystkie siły zewnętrzne.

Ruch obrotowy charakteryzuje się tym, że wszystkie punkty bryły, oprócz punktów leżących na osi obrotu, poruszają się po okręgach współśrodkowych, a ich prędkości i przyspieszenia liniowe są zależne od odległości od osi obrotu, czyli promienia zakreślonego okręgu. Jeżeli w ciągu czasu dt ciało obróci się o kąt $d\varphi$ to droga ds , jaką w ciągu tego czasu przebędzie dowolny punkt ciała będzie oczywiście równa:

$$ds = r d\varphi$$

gdzie r - odległość rozpatrywanego punktu od osi obrotu.

Dzieląc ds przez dt znajdujemy wyrażenie na prędkość punktu:

$$v = r \frac{d\varphi}{dt}$$

Wielkość $\frac{d\varphi}{dt}$ jest jednakowa dla wszystkich punktów, nazywa się prędkością kątową ω i przedstawia przesunięcie kątowe ciała w jednostce czasu. Prędkość i przyspieszenie kątowe są wektorami, których kierunek pokrywa się z kierunkiem osi obrotu, a wartość jest równa odpowiednio prędkości ω i przyspieszeniu kątowemu ε . Tak więc prędkości różnych punktów ciała sztywnego, obracającego się dookoła pewnej osi, określone są iloczynem wektorowym:

$$v = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.2)$$

a ich przyspieszenia:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (2.3)$$

Kierunek wektora prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego, jest zgodny z tzw. regułą śruby prawoskrętnej, to znaczy kierunek, w którym wkręca się śruba obracająca się razem z ciałem.

Jeżeli obrót odbywa się ruchem jednostajnym, to znaczy ze stałą prędkością kątową, to ω można wyrazić przez okres obrotu T

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.4)$$

Ponieważ podczas ruchu postępowego bryły sztywnej wszystkie punkty ciała mają jednakowe prędkości więc energia kinetyczna takiej bryły jest po prostu równa

$$E_k = \frac{1}{2} M v^2 \quad (2.5)$$

gdzie: v – prędkość ciała,

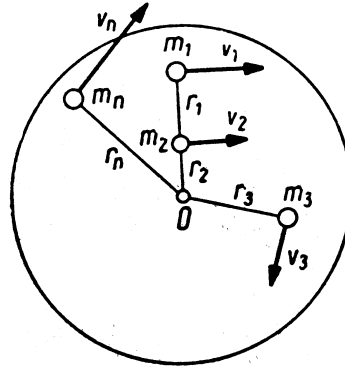
M – jego całkowita masa.

Rozpatrzmy obecnie energię kinetyczną ciała, znajdującego się w ruchu obrotowym jednostajnym. W tym celu założmy, że ciałem tym jest tarcza o masie m (rys. 2.1) złożona z bardzo dużej ilości cząsteczek tak małych, że można je podczas ruchu traktować jako punkty materialne o masach $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, obracające się dookoła osi przechodzącej przez środek masy tarczy ze stałą prędkością kątową ω .

Energia kinetyczna i - tego elementu jest równa

$$E_k = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Uwzględniając zależność (2.2) i sumując energie kinetyczne wszystkich elementów otrzymamy całkowitą energię kinetyczną ciała



Rys. 2.1 Wirująca tarcza

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots + \frac{1}{2} m_i v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots + m_i r_i^2) = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.6)$$

Występująca w tym wzorze suma zależy od tego, z jakim ciałem mamy do czynienia (zależy ona od jego kształtu, rozmiarów i rozkładu masy), a także od położenia osi obrotu względem ciała. Wielkość ta, charakteryzująca dane ciało sztywne i wybraną oś obrotu nazywa się *momentem bezwładności ciała względem danej osi*.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.7)$$

Jeśli masa ciała sztywnego jest w nim rozłożona w sposób ciągły, to dzieląc to ciało na nieskończenie wiele nieskończenie małych części, sumowanie w powyższym wzorze zastępujemy całkowaniem.

Tak więc energię kinetyczną obracającego się ciała możemy zapisać w postaci

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2} \quad (2.8)$$

Wyrażenie to jest formalnie bardzo podobne do wyrażenia na energię ruchu postępowego; różnica polega na tym, że zamiast prędkości v występuje tu prędkość kątowa ω , zamiast zaś masy – moment bezwładności. A więc moment bezwładności odgrywa w ru-

chu obrotowym rolę analogiczną do roli masy w ruchu postępowym, czyli jest miarą bezwładności w tym ruchu.

Energię kinetyczną dowolnie poruszającego się ciała sztywnego można przedstawić w postaci sumy energii ruchu postępowego i obrotowego

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} \quad (2.9)$$

gdzie I_0 oznacza, że moment ten jest określony względem osi przechodzącej przez środek masy. Zależność (2.9) jest słuszna wówczas gdy podczas ruchu oś obrotu zachowuje swój stały kierunek.

Punkt materialny o masie m poruszający się z prędkością v względem osi obrotu odległej o r od tego punktu posiada moment pędu określony wzorem

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (2.10)$$

W ruchu obrotowym kierunki wektorów \vec{r} i v są wzajemnie prostopadłe więc wartość liczbowa momentu pędu równa się rmv . Zwrot wektora momentu pędu J jest zgodny ze zwrotem wektora prędkości kątowej (wzdłuż osi obrotu). Całkowity moment pędu bryły znajdujemy sumując wszystkie momenty pędu jej elementarnych mas

$$J = r_1 m_1 v_1 + r_2 m_2 v_2 + r_3 m_3 v_3 + \dots + r_n m_n v_n$$

ponieważ $v = r\omega$ otrzymujemy

$$J = \omega(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots + m_n r_n^2) = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (2.11)$$

A więc moment pędu bryły określony jest wzorem

$$J = I\omega \quad (2.12)$$

W przypadku gdy na punkt materialny o masie m_i (Rys. 2.1) poruszający się po okręgu o promieniu r_i działa obwodowa siła F_i , to pod działaniem tej siły zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona uzyskuje on przyspieszenie

$$a_i = \frac{F_i}{m_i} \quad (2.13)$$

ponieważ $a_i = \varepsilon r_i$, gdzie ε - przyspieszenie kątowe otrzymujemy

$$F_i = \varepsilon r_i m_i$$

zatem moment siły względem osi obrotu wynosi

$$M_i = r_i F_i = m_i \varepsilon r_i^2$$

Ponieważ masa bryły jest sumą mas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ poszczególnych jej cząstek, dlatego aby nadać temu ciału przyspieszenie kątowe ε , trzeba na niego działać momentem siły M , równym sumie momentów siły $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ poruszających poszczególne cząsteczki ciała

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n m_i \varepsilon r_i^2 = \varepsilon \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Uwzględniając zależność (2.7) otrzymujemy

$$M = I\varepsilon \quad (2.14)$$

lub
$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

Zależność ta określa II zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego. Możemy ją sformułować w następującej postaci. *Jeżeli na ciało działa zmienny i niezerównoważony moment siły M , to powoduje on przyspieszenie kątowe ε tego ruchu, które jest wprost proporcjonalne do momentu siły M i odwrotnie proporcjonalne do jego momentu bezwładności I , i skierowane jest zgodnie z momentem siły.*

Zasadę tę możemy również przedstawić w postaci

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{M}{I} \quad (2.15)$$

lub
$$M\Delta t = I\Delta\omega$$

Lewa strona równania (2.15) przedstawia popęd momentu siły, a prawa zmianę momentu pędu obracającej się bryły. A więc *popęd momentu siły jest równy zmianie momentu pędu, który wywołał.* Ostatnią zależność, która również przedstawia II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego możemy przedstawić w postaci

$$M = \frac{\Delta J}{\Delta t} \quad (2.16)$$

czyli moment siły jest równy zmianie momentu pędu w czasie. W przypadku gdy na obracającą się bryłę nie działa żaden moment siły tzn. $M = 0$ to jak wynika z zależności (2.15) przyspieszenie kątowe jest równe zero, co oznacza że prędkość kąтова obracającej się bryły nie ulega zmianie, a więc bryła porusza się ruchem jednostajnym, $\omega = \text{const}$. Pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego mówi, że:

Bryła sztywna nie poddana działaniu momentu siły pozostaje nieruchoma lub wykonuje ruch obrotowy jednostajny. Istnienie momentu siły działającego na daną bryłę jest zawsze wynikiem oddziaływania dwóch brył.

Trzecia zasada dynamiki ruchu obrotowego mówi, że:

Jeżeli bryła B działa na bryłę A pewnym momentem siły M_{BA} to bryła A działa na bryłę B momentem M_{AB} równym co do wartości lecz przeciwnie skierowanym.

$$M_{BA} = -M_{AB} \quad (2.17)$$

Analogia między ruchem postępowym i obrotowym

W tabeli 2.1 zestawiono wielkości występujące w ruchu postępowym prostoliniowym i odpowiadające im wielkości w ruchu obrotowym bryły sztywnej wokół stałej osi.

Tabela 2.1

Ruch prostoliniowy		Ruch obrotowy	
Droga liniowa	s	Droga kątowna	φ
Prędkość liniowa	$v = \frac{ds}{dt}$	Prędkość kątowna	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Przyspieszenie liniowe	$a = \frac{dv}{dt}$	Przyspieszenie kątowne	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Masa	m	Moment bezwładności	$I = \sum_i m_i r_i^2$
Pęd	$p = mv$	Moment pędu (kręt)	$J = I\omega$
Siła	F	Moment siły	M
II zasada dynamiki	$F = ma = \frac{dp}{dt}$	II zasada dynamiki	$M = I\varepsilon = \frac{dJ}{dt}$
Energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	Energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

Wahadło matematyczne i fizyczne

Wahadło matematyczne

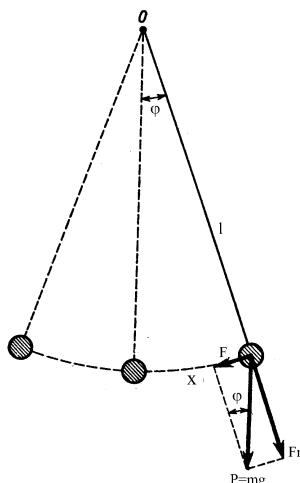
Wahadło matematyczne to punkt materialny o masie m zawieszony na jednym końcu nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l , której drugi koniec jest zamocowany (rys. 2.2). Siłą kierującą jest w tym przypadku rzut siły ciężkości $P = mg$ na kierunek ruchu ciała. Gdy wahadło wychylimy z położenia równowagi trwałej w punkcie O , w którym punkt materialny znajduje się w najniższym położeniu i puścimy to wykonuje on wahanie wokół tego punktu. W ruchu swym punkt ten porusza się po okręgu o promieniu l , równym długości nici. Na wychylone z położenia równowagi o kąt φ wahadło działa siła ciężkości, którą możemy rozłożyć na siłę kierującą F , wywołującą ruch wahadła, która jest rzutem siły ciężkości na kierunek ruchu ciała, oraz na siłę napinającą nić skierowaną wzdłuż naprężonej nici F_n . Składowa F_n jest równoważona siłą reakcji w punkcie zawieszenia wahadła.

Na podstawie rys. 2.2 możemy zapisać

$$F = -mg \sin \varphi$$

kąt φ liczymy dodatnio w prawo, znak $-$ oznacza że składowa F jest skierowana w lewo.

Ponieważ w przypadku małych drgań kąt φ jest mały, zatem funkcję $\sin \varphi$ możemy zastąpić przez sam kąt φ , tak, że $F \cong -mg\varphi$.



Rys. 2.2 Wahadło matematyczne

Biorąc pod uwagę, że $l\varphi$ (gdzie l – długość wahadła) przedstawia drogę x , jaką przebył punkt materialny, możemy wyrażenie na F zapisać w postaci

$$ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg\varphi$$

lub
$$l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -g\varphi$$

czyli
$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (2.18)$$

Jest to równanie ruchu wahadła, które aby było spełnione musimy złożyć że

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad (2.19)$$

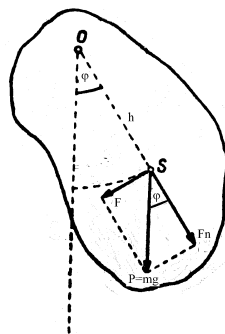
gdzie
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (2.20)$$

Uwzględniając (2.19) i (2.20) otrzymujemy zależność na okres drgań wahadła matematycznego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.21)$$

Wahadło fizyczne grawitacyjne

Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę sztywną obracającą się wokół stałej poziomej osi przechodzącej powyżej środka ciężkości bryły. W stanie równowagi środek ciężkości S zajmuje położenie najniższe i leży w pionie przechodzącym przez oś obrotu. Gdy wychylimy wahadło z położenia równowagi np. w prawo (rys. 2.3) wówczas moment siły ciężkości M wywołuje obrót w lewo, wskutek czego wahadło wraca do położenia równowagi i przekracza je dzięki posiadanej energii kinetycznej. Środek ciężkości bryły wznosi się na wysokość pierwotną, a energia kinetyczna bryły zamienia się na energię potencjalną. W ten sposób przy ustawicznej zamianie energii potencjalnej na kinetyczną i odwrotnie wahadło wykonuje ruch drgający prosty.



Rys. 2.3 Wahadło fizyczne

Składowa siły ciężkości F , styczna do toru wynosi

$$F = -mg \sin \varphi \quad (2.22)$$

Moment tej siły względem osi obrotu O

$$M = -mgh \sin \varphi \approx -mgh \varphi \quad (2.23)$$

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego (2.15) otrzymujemy:

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = -\frac{mgh}{I} \varphi \quad (2.24)$$

lub

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{mgh}{I} \varphi$$

Zatem równanie ruchu wahadła fizycznego możemy przedstawić w postaci

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \varphi = 0 \quad (2.25)$$

Jest to zależność analogiczna do (2.18), zatem aby była spełniona musimy i w tym przypadku założyć podobnie jak w (2.19) że

$$\omega_0^2 = \frac{mgh}{I} \quad (2.26)$$

skąd wykorzystując zależność (2.20) otrzymujemy wzór na okres drgań wahadła fizycznego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (2.27)$$

lub

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (2.28)$$

gdzie: D -- tzw. moment kierujący.

Wahadło rewersyjne

Dla każdego wahadła fizycznego możemy zawsze dobrać wahadło matematyczne o takiej długości, by okresy ich wahań były takie same. *Długość wahadła matematycznego o tym samym okresie wahań jak wahadła fizycznego nazywamy długością zredukowaną danego wahadła fizycznego.* Porównując zatem zależności (2.21) i (2.27) otrzymujemy wyrażenie na długość zredukowaną wahadła

$$l = \frac{I}{mh} \quad (2.29)$$

gdzie:

l - długość wahadła matematycznego,

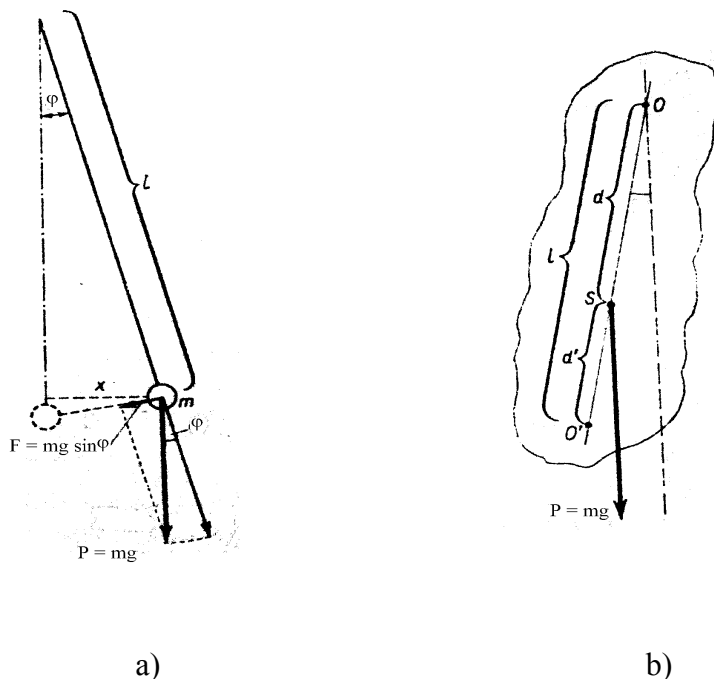
I - moment bezwładności wahadła fizycznego,

h - odległość od osi obrotu do środka masy wahadła.

Specjalną formą wahadła fizycznego, ułatwiającą wyznaczenie długości zredukowanej, jest wahadło rewersyjne. Wahadło rewersyjne jest to ciało sztywne, posiadające takie dwie osie obrotu O i O' (rys. 2.4), że okresy wahań względem nich są jednakowe. Znajdując doświadczalnie wzajemną odległość tych osi w przypadku gdy okresy wahań względem każdej z nich są takie same, wyznaczamy przyspieszenie ziemskie według wzoru

$$g = \frac{4\pi^2 l_{zr}}{T^2} \quad (2.30)$$

Punkt O' spełniający warunek (2.21) nazywamy środkiem wahań. Jeżeli w wahadle fizycznym środek wahań uczynimy osią obrotu, to punkt O czyli poprzednia oś obrotu, stanie się wówczas środkiem wahań, to znaczy okresy drgań w obu przypadkach będą jednakowe.



Rys. 2.4. a) Wahadło matematyczne, b) Wahadło fizyczne, l - długość zredukowana

Załóżmy w tym celu, że punkt S jest środkiem ciężkości leżącym na prostej OO' . Na podstawie twierdzenia Steinera, które mówi, że: *moment bezwładności względem dowolnej osi, ale równoległej do osi przechodzącej przez środek masy jest równy momentowi bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy i jest powiększony o iloczyn ca-*

lej masy bryły i kwadratu odległości między osiami, możemy zapisać moment bezwładności względem osi O

$$I_O = I_S + md^2 \quad (2.31)$$

gdzie I_S oznacza moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości. Okres wahań względem osi O możemy zapisać w postaci

$$T_O = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_S + md^2}{mgd}} \quad (2.32)$$

gdzie: d jest odległością środka ciężkości S od osi obrotu O

Jeśli zawiesimy wahadło na osi przechodzącej przez punkt O' to okres wahań względem niej będzie

$$T_{O'} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{O'}}{mgd'}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_S + md'^2}{mgd'}} \quad (2.33)$$

gdzie: d' jest odległością środka ciężkości S od osi obrotu O' . Ponieważ zgodnie z definicją wahadła rewersyjnego okresy wahań względem obu osi muszą być sobie równe $T_O = T_{O'}$, więc na podstawie zależności (2.32) i (2.33) otrzymujemy

$$\frac{I_S + md^2}{mgd} = \frac{I_S + md'^2}{mgd'} \quad (2.34)$$

$$mgI_S(d' - d) = m^2 g d d' (d' - d)$$

lub po uproszczeniu $I_S = dd'm$ (2.35)

Podstawiając ostatnią zależność do wzorów (2.32) i (2.33) otrzymujemy dla osi O

$$T_O = 2\pi \sqrt{\frac{dd'm + md^2}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{d' + d}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{gdź } d' + d = l \quad (2.36)$$

oraz dla osi O'

$$T_{O'} = 2\pi \sqrt{\frac{dd'm + md'^2}{mgd'}} = 2\pi \sqrt{\frac{d + d'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.37)$$

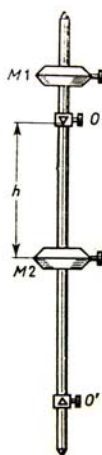
Zależności (2.36) i (2.37) mówią, iż okres wahań wahadła zredukowanego jest taki sam jak okres wahań wahadła matematycznego o długości l .

Widzimy więc, że okres wahań wahadła zawieszonoego w punkcie O jest równy okresowi wahań wahadła zawieszonoego w punkcie O' odległym od punktu O o długość zredukowaną. Zatem aby wyznaczyć długość zredukowaną wahadła, należy znaleźć dwa punkty O i O' wahadła względem, których okresy drgań są sobie równe. Równość okresów $T_O = T_{O'}$ można uzyskać albo przemieszczając punkt zawieszenia O , lub zmieniając położenie środka masy wahadła przez odpowiednie przesunięcie masy M_2 . Korzystając z wahadła rewersyjnego i zależności (2.37) możemy obliczyć przyspieszenie ziemskie g . W tym celu wyrażenie (2.37) przekształcimy do postaci

$$g = \frac{4\pi^2 l_{zr}}{T^2} \quad (2.38)$$

Opis ćwiczenia i wykonanie pomiarów

Wahadło rewersyjne składa się z metalowego pręta, na którym osadzone są dwie metalowe soczewki M_1 i M_2 oraz dwa ostrza O i O' zwrócone ku sobie tak jak pokazano na rys. 2.5. Na pręcie wykonano pierścieniowe nacięcia służące do dokładnego wyznaczenia długości wahadła rewersyjnego (odległość między nożami) Noże i masy M_1 i M_2 można przemieszczać wzdłuż pręta i unieruchamiać w dowolnie wybranym położeniu.



Rys. 2.5 Wahadło rewersyjne

Wykonanie ćwiczenia

Wykaz przyrządów: wahadło rewersyjne, stoper, przymiar metrowy z podziałką milimetrową.

1. Umocować noże O i O' wahadła w dużej odległości od siebie, tak aby były zwrócone ku sobie ostrzami. Jeden z nich umieścić w pobliżu wolnego końca pręta, a drugi między masami M_1 i M_2 .
2. Niesymetrycznie umieścić na pręcie i unieruchomić masy M_1 i M_2 tak aby jedna z nich znajdowała się blisko końca pręta a druga w pobliżu jego środka.
3. Sprawdzić czy krawędzie ostrzy noży pokrywają się z nacięciami na pręcie
4. Zamocować wahadło na panewce wspornika górnego na nożu O' znajdującym się blisko końca pręta.
5. Wychylić wahadło o kilka stopni od położenia równowagi i zmierzyć czas trwania $n = 25$ okresów (t).
6. Z zależności $T = t/n$ wyznaczyć okres drgań wahadła T_O .
7. Zdjąć wahadło z panewki, obrócić o 180° i zamocować je w tym miejscu na drugim nożu.
8. Powtórzyć czynności zapisane w punkcie 5 i 6, wyznaczyć okres $T_{O'}$ i porównać wynik z otrzymaną poprzednio wartością T_O .
9. Jeżeli $T_O > T_{O'}$ to ostrze O należy przesunąć w kierunku masy M_1 znajdującej się na końcu pręta na taką odległość, przy której okresy będą sobie równe, jeżeli natomiast $T_{O'} > T_O$ to ostrze przesunąć w kierunku środka pręta. Położenia mas i ostrza O' nie zmieniać.
10. Zmieniać położenie ostrza O do momentu uzyskania równości $T_{O'} = T_O$ z dokładnością 0,5 %.
11. Wyznaczyć długość zredukowaną (odległość między ostrzami).
12. Z zależności (2.38) wyznaczyć przyspieszenie ziemskie g .
13. Błąd pomiaru obliczyć metodą pochodnej logarytmicznej (przykład 2. zal. 14), przyjmując, że maksymalny błąd pomiaru czasu jest nie większy niż 0,02%.

Tabela 2.1

$t_{O'}$ [s]	$T_{O'}$ [s]	t_O [s]	T_O [s]	n	l_{zr}	g [m/s ²]

gdzie t_O i $t_{O'}$ czas trwania n okresów odpowiednio na osiach O i O'

Literatura

- [1] Sz. Szczeniowski *Fizyka doświadczalna* PWN Warszawa 1980, Roz. VIII i X.
- [2] J. Massalski, M. Massalska *Fizyka dla inżynierów* WNT Warszawa 1980, Roz. 9
- [3] M. Skorko *Fizyka* PWN Warszawa 1973, Roz. 10
- [4] J. Orear *Fizyka t.1.* WNT Warszawa 1993, Roz. 11

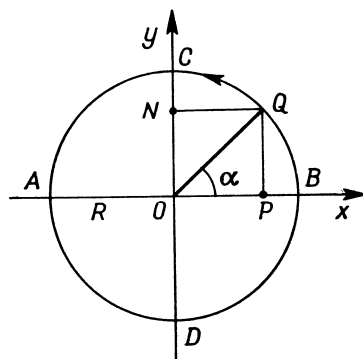
POMIAR PRĘDKOŚCI DŹWIĘKU METODĄ SKŁADANIA DRGAŃ ELEKTRYCZNYCH

Wprowadzenie

Ruch drgający harmoniczny

Ruch punktu nazywamy okresowym, jeśli wszystkie wielkości charakteryzujące jego ruch powtarzają się w regularnych odstępach czasu. Takimi wielkościami charakterystycznymi są: przesunięcie, prędkość i przyspieszenie. Odstęp czasu, w którym powtarza się ten sam stan ruchu punktu, nazywa się okresem. Ilość okresów w czasie jednej sekundy nazywamy częstotliwością. Największe przesunięcie nazywamy amplitudą przesunięcia, a największą prędkość lub przyspieszenie nazywamy odpowiednio amplitudą prędkości i przyspieszenia.

Faza jest to wielkość, która określa chwilowy stan punktu względem stanu odniesienia. Jako stan odniesienia przyjmuje się zwykle stan, gdy przesunięcie punktu jest największe, czyli równe amplitudzie lub też gdy równe jest zeru. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby fazę określać względem dowolnego stanu. Różnicę faz dwóch punktów drgających z taką samą częstotliwością nazywamy przesunięciem fazy. Fazę lub przesunięcie fazy wyrażamy w radianach, przy czym 2π radianów odpowiada przesunięciu o jeden pełny okres.



Rys. 3.1 Drgania harmoniczne rzutu punktu Poruszającego się po okręgu ze stałą prędkością.

Rozpatrzmy ruch po okręgu punktu Q poruszającego się ze stałą prędkością, oraz ruch jego rzutu na średnicę okręgu (rys. 3.1). Przez środek okręgu o promieniu R przeprowadźmy dwie osie poziomą x i pionową y. Niech P oznacza rzut ruchomego punktu Q na oś x, a N na oś y. W miarę obiegu punktu Q po kole punkty P i N przebiegają średnicę R ruchem wahadłowym. Ruch ten nazywamy ruchem harmonicznym prostym. Jeśli przez α oznaczymy kąt pomiędzy osią x a promieniem wodzącym punktu Q, to na podstawie rys.3.1 otrzymamy

$$x = R \cos \alpha = R \cos \omega t \quad (3.1)$$

gdzie $\alpha = \omega t$

Ponieważ prędkość punktu Q jest stała, więc stała jest też prędkość kątowa ω . Zależność (3.1) jest słuszna, gdy rozpoczynamy liczenie czasu w chwili gdy $\alpha = 0$, jeśli w chwili $t = 0$ kąt α ma wartość φ , to

$$x = R \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2)$$

$\omega t + \varphi$ nazywamy fazą drgania harmonicznego prostego, R zaś jego amplitudą.

Wzór na prędkość w drganiu harmonicznym prostym otrzymamy różniczkując wzór (3.1) względem czasu:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega R \sin \omega t, \quad (3.3)$$

różniczkując jeszcze raz względem czasu otrzymujemy przyspieszenie w ruchu harmonicznym prostym:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 R \cos \omega t = -\omega^2 x. \quad (3.4)$$

Z ostatniej zależności wynika, że przyspieszenie w ruchu harmonicznym prostym jest proporcjonalne do wychylenia punktu od środka drgań i jest zawsze skierowane ku środkowi okręgu. Jest to podstawowa zależność dla drgań harmonicznymi prostymi.

Pomnóżmy obie strony równania (3.4) przez masę punktu drgającego m wówczas otrzymamy:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x. \quad (3.5)$$

Wyrażenie to oznacza działającą na ten punkt siłę. Dla $x = 0$ siła ta jest równa zero, a więc punkt materialny znajdujący się w tym położeniu w chwili $t = 0$ nie podlega działaniu żadnej siły, znajduje się w spoczynku czyli w położeniu równowagi trwałej. Po wychyleniu

z położenia równowagi pojawia się siła skierowana ku temu położeniu. Znak minus oznacza, że dla dodatnich wartości x siła jest skierowana w lewo, a dla x ujemnych - w prawo.

Podobnie zachowuje się cząstka o masie m przyczepiona do końca sprężyny o współczynniku sprężystości k . Jeśli początek układu umieścimy w położeniu równowagi, a ruch odbywa się wzdłuż osi x , wówczas działa na nią siła F ,

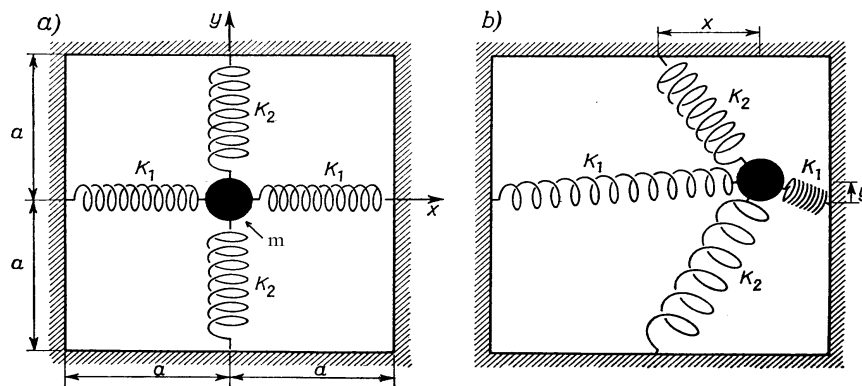
$$\text{gdzie} \quad F = -kx \quad (3.6)$$

Stosując drugą zasadę dynamiki Newtona otrzymujemy:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (3.7)$$

Zakładając, że $\omega^2 = \frac{k}{m}$, otrzymujemy równanie (3.5). Rozwiązaniem tego równania jest przedstawiona wyżej funkcja $x = R \cos(\omega t + \varphi)$.

Na rys. 3.2 przedstawiono kulkę o masie m , która może poruszać się bez tarcia w płaszczyźnie xy . Kulka jest przyczepiona do nieruchomych ścianek przy pomocy skierowanych wzdłuż osi x dwu identycznych nieważkich sprężyn o współczynniku sprężystości k_1 oraz skierowanych wzdłuż osi y dwu identycznych, nieważkich sprężyn o współczynniku sprężystości k_2 . Pobudzona do drgań kulka (rys. 3.2) jest przykładem ruchu złożonych dwóch drgań prostopadłych.



Rys. 3.2 Składanie drgań prostopadłych. Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny

Drgania składowe mogą się różnić amplitudami, częstotliwościami oraz mogą mieć różne od zera początkowe przesunięcie fazowe. Załóżmy, że nasze drgania składowe mają różne amplitudy A i B, tę samą częstotliwość lecz są względem siebie przesunięte w fazie o φ , wówczas równania ruchu drgań składowych mają postać

$$x = A \cos \omega t \quad y = B \cos(\omega t - \varphi) \quad (3.8)$$

Korzystając z zależności że

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

otrzymujemy:

$$y = B \cos \omega t \cos \varphi + B \sin \omega t \sin \varphi$$

ponieważ z zależności (3.8) $\cos \omega t = \frac{x}{A}$ (3.9)

otrzymujemy:

$$B \sin \omega t \sin \varphi = \frac{Ay - Bx \cos \varphi}{A}$$

stąd $\sin \omega t = \frac{Ay - Bx \cos \varphi}{AB \sin \varphi}$ (3.10)

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy że:

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{(Ay - Bx \cos \varphi)^2}{A^2 B^2 \sin^2 \varphi} = 1 \quad (3.11)$$

skąd $B^2 x^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + A^2 y^2 - 2ABxy \cos \varphi = A^2 B^2 \sin^2 \varphi$

a więc $B^2 x^2 + A^2 y^2 - 2ABxy \cos \varphi = A^2 B^2 \sin^2 \varphi$ (3.12)

Jest to równanie krzywej stożkowej (elipsy), której cechy są określone przez wartość różnicy faz φ . Rozpatrzmy przypadki szczególne. Przypuśćmy, że różnica faz $\varphi = 0$, wówczas równanie toru przybiera następującą postać:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0$$

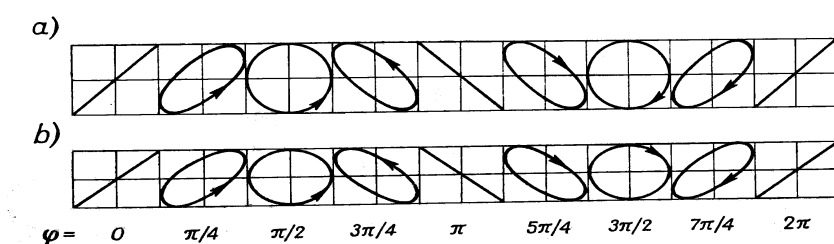
skąd $y = \frac{B}{A} x$ (3.13)

Jest to równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i tworzącej z osią x kąt, którego tangens równa się B/A (rys. 3.3b).

Jeżeli różnica faz φ drgań składowych równa się $\pi/2$ albo $3\pi/2$ to równanie toru będzie miało postać

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (3.14)$$

Jest to równanie elipsy wpisanej w prostokąt o bokach $2A$ wzdłuż osi x i $2B$ wzdłuż osi y .



Rys. 3.3 Wyniki składania drgań harmoniczych wzajemnie prostopadłych o różnych wartościach różnicy fazy:

a) drgania o jednakowych amplitudach, b) o różnych amplitudach

Jeżeli różnica faz $\varphi = \pi/2$ to punkt porusza się po elipsie w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, gdy zaś $\varphi = 3\pi/2$ ruch odbywa się w kierunku przeciwnym. Zmiana znaku stojącego przed różnicą faz odpowiada zmianie kierunku ruchu punktu po elipsie na kierunek przeciwny. Na przykład gdy $\varphi = -\pi/2$ kierunek ruchu jest przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara itp.

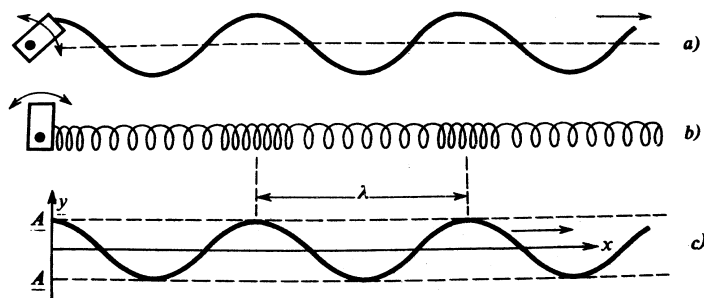
Ruch falowy

Jeżeli punkt drgający znajduje się w ośrodku, którego cząsteczki są ze sobą związane, wówczas energia drgającego punktu jest przekazywana otaczającym go punktom pobudzając je do drgań. Zjawisko to obserwujemy w ciałach sprężystych, gdzie pobudzona do drgań cząsteczka związana siłami spójności z sąsiednią cząsteczką – pobudza ją do drgań, a ta z kolei następną itd. W ten sposób odkształcenie rozchodzi się coraz dalej. Podczas rozchodzenia się odkształceń, cząsteczki drgające nie ulegają przemieszczeniu, lecz drgają wokół swych położenia równowagi. Rozchodzenie się odkształcenia nazywamy *ruchem falowym*, a rozchodzące się odkształcenie *falą*.

Przestrzeń objętą w danej chwili wynikającym stąd zaburzeniem nazywamy *polem falowym*. Powierzchnię, na której we wszystkich punktach zaburzenie ma tę samą fazę nazywamy *powierzchnią falową*. *Promieniem fali* nazywamy kierunek rozchodzenia się energii niesionej przez falę.

Jeśli drgania cząsteczek są równoległe do kierunku rozchodzenia się zaburzenia, to taką falę nazywamy podłużną, gdy zaś drgania cząsteczek są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się zaburzenia, falę nazywamy poprzeczną. To, czy fala rozchodząca się w ośrodku jest falą podłużną czy poprzeczną zależy od jego własności sprężystych. Fala poprzeczna może powstać tylko w ośrodku charakteryzującym się sprężystością postaci (sztywnością; $G \neq 0$). Natomiast dla zaistnienia fal podłużnych wystarczająca jest sprężystość objętości ($E \neq 0$). W cieczech i gazach rozchodzić się więc mogą jedynie fale podłużne. Nie dotyczy to powierzchni cieczechy, gdzie powstaje również fala poprzeczna. W ciałach stałych rozchodzić się więc mogą oba rodzaje fal.

Odległość, którą przebywa fala w czasie, gdy drgająca cząsteczka wykona jedno pełne drganie, nazywamy długością fali λ . Czas potrzebny na to jedno pełne drganie nazywamy okresem drgań T . A więc długość fali λ jest to odległość jaką przebywa fala w czasie jednego okresu T . Na rys. 3.4 pokazane są fale powstałe w strunie (lub w węźle gumowym) i w sprężynie, wytworzone przez oscylującą dźwignię. Fale w strunach są poprzeczne, a fale w sprężynach podłużne.



Rys. 3.4 (a) Periodyczne zaburzenie wytworzone w strunie przez oscylującą dźwignię przemieszcza się w prawą stronę. Linia przerywana wskazuje położenie równowagi struny.
 (b) Sprężyna jest na przemian ściskana i rozciągana.
 (c) Ten sam wykres reprezentuje obie fale.

Drgania harmoniczne cząsteczki znajdującej się np. w punkcie A (początek układu współrzędnych) (rys. 3.4) zgodnie z zależnością (3.1) możemy przedstawić w postaci

$$y = R \sin \omega t \quad (3.15)$$

Zaburzenie to docierając do punktu oddalonego o x od początku układu współrzędnych, jest opóźnione i po czasie t wychylenie y z położenia równowagi dla tego punktu możemy zapisać

$$y = R \sin \omega(t - t_x) \quad (3.16)$$

gdzie $t_x = x/v$ jest czasem potrzebnym na przebycie przez falę drogi o długości x . Ostatnią zależność możemy zatem zapisać w postaci

$$y = R \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{ponieważ } \lambda = vT$$

więc

$$y = R \sin \omega\left(t - \frac{xT}{\lambda}\right) = R \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

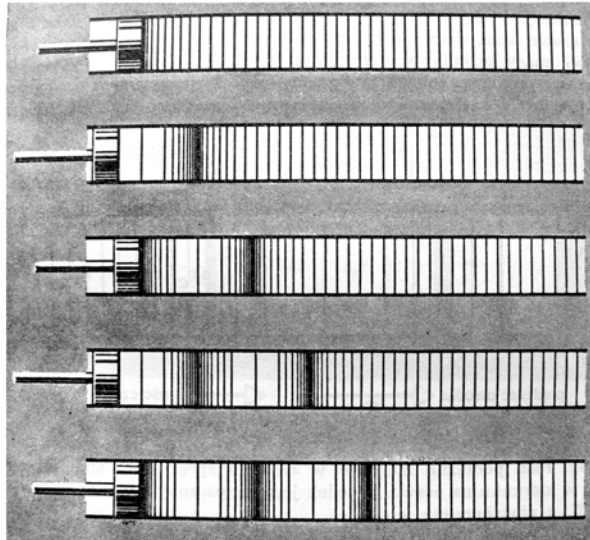
czyli

$$y = R \sin(\omega t - kx) \quad \text{gdzie } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ jest tzw. liczbą falową} \quad (3.17)$$

Liczba falowa k określa ile długości fal mieści się na odcinku o długości 2π .

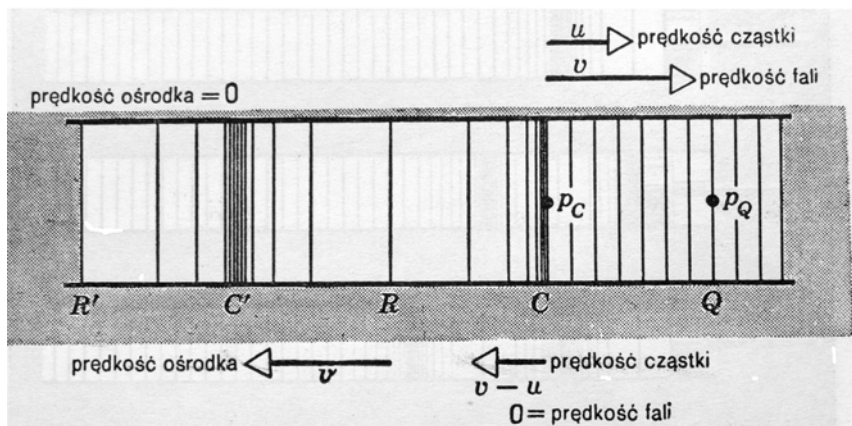
Zależność (3.17) przedstawia nam tzw. równanie fali płaskiej rozchodzącej się wzdłuż dodatniego kierunku osi x .

Fale podłużne (dźwiękowe) możemy również wytworzyć w rurze wypełnionej substancją ściśliwą, przez drgający tłok (Rys. 3.5). Linie pionowe przedstawiają warstwy cząsteczek, które są rozłożone równomiernie, gdy substancja, np. gaz lub ciecz znajduje się w spoczynku. Gdy przesuniemy tłok do przodu, cząsteczki gazu przed tłokiem zostaną ściśnięte. Te ściśnięte cząsteczki będą z kolei ścisnęły dalsze cząsteczki powodując, że wzdłuż rury przebiegnie impuls zgęszczenia. Gdy następnie szybko cofniemy tłok, warstewki gazu przed tłokiem zostaną rozrzedzone i przez całą rurę z warstwy na warstwę przebiegnie impuls rozrzedzenia. Jeżeli tłok będzie oscylował tam i z powrotem, wówczas powstanie ciąg zgęszczeń i rozrzedzeń rozchodzących się w całej rurze tworząc falę podłużną.



Rys. 3.5. Fale dźwiękowe wytwarzane w rurze przez drgający tłok.
Linie pionowe dzielą zgęszczany ośrodek w rurze na warstwy

Rozważmy odcinek rury, w którym znajduje się gaz lub ciecz pod ruchomym tłokiem.
(rys. 3.6).



Rys. 3.6. Fale podłużne biegnące w ośrodku sprężystym znajdującym się w rurze,
w kierunku na prawo. Ośrodek jest zagęszczony w C i C',
rozrzedzony w R i R', a niezaburzony w Q

Początkowo tłok jest w spoczynku, a następnie w chwili $t = t_0$ zaczyna równomiernie przesuwać się wzdłuż rury z prędkością u , wywołując objętościowe odkształcenie ośrodka. Po czasie Δt zaburzające działanie tłoka obejmie część ośrodka, którego długość jest równa $v\Delta t$, gdzie v i v jest tą samą prędkością rozchodzącego się zaburzenia (prędkością fali), a masa cząsteczek Δm biorących udział w zaburzeniu określona jest wzorem

$$\Delta m = \rho S v \Delta t,$$

gdzie S - powierzchnia tłoka, ρ - gęstość ośrodka.

Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że zmiana pędu tej masy gazu $\Delta m u$ jest równa popędowi siły $F\Delta t$, która działa na gaz od strony tłoka a więc

$$u\Delta m = F\Delta t$$

lub

$$\rho S \nu u = F \quad (3.18)$$

Ponieważ siła F równa się iloczynowi ciśnienia dodatkowego Δp przez powierzchnię tłoka: $F = \Delta p S$ a zgodnie z prawem Hooke'a zmiana ciśnienia Δp jest wprost proporcjonalna do względnej zmiany objętości ośrodka

$$\Delta p = K \frac{\Delta V}{V}, \quad (3.19)$$

gdzie K jest modułem ścisłości objętościowej ośrodka, więc

$$F = K \frac{\Delta V}{V} = \rho \nu u \quad (3.20)$$

W omawianym przypadku całkowita objętość gazu V tej części ośrodka, która ulega odkształceniu w czasie Δt , równa jest $V = \nu S \Delta t$, a odkształcenie objętościowe (zmiana objętości) $\Delta V = u S \Delta t$ dlatego zależność (3.20) przyjmie postać

$$K \frac{u S \Delta t}{\nu S \Delta t} = \rho \nu u$$

skąd po uproszczeniu otrzymujemy

$$\nu = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (3.21)$$

Wyprowadzając zależność (3.21) założyliśmy, że gęstość ośrodka $\rho = \text{const.}$

Prędkość dźwięku w ciałach stałych wyraża się wzorem

$$\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.22)$$

gdzie E jest modułem Younga.

Drgania dźwiękowe w gazie (w powietrzu) zachodzą tak szybko, że ściskanie i rozrzedzanie gazu można uważać za procesy adiabatyczne, czyli zachodzące bez wymiany ciepła z otoczeniem i wobec tego zmiana objętości gazu przebiega zgodnie z prawem Poissona

$$pV^\kappa = \text{const.} \quad (3.23)$$

gdzie κ jest to stosunek ciepła właściwego gazu przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego gazu w stałej objętości, $\kappa = C_p/C_v$.

Różniczkując wzór Poissona otrzymujemy

$$V^\kappa dp + \kappa V^{\kappa-1} p dV = 0 \quad \text{stad } dp = -\kappa \frac{p dV}{V}$$

a więc
$$\Delta p = -\kappa \frac{p \Delta V}{V} \quad (3.24)$$

Porównując zależności (3.19) i (3.24) znajdujemy, że $K = p\kappa$, zatem prędkość fal dźwiękowych w powietrzu określamy z zależności

$$v = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}} \quad (3.25)$$

Podstawiając do tego wzoru zamiast ρ wyrażenie z równania stanu gaz doskonałego

$$pV = nRT \quad (3.26)$$

gdzie; $n = m/\mu$ - ilość moli, m – masa gazu, μ - masa cząsteczkowa, R – stała gazowa otrzymujemy

$$p = \frac{m}{V\mu} RT = \frac{\rho}{\mu} RT$$

stad
$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

Podstawiając ostatnie wyrażenie do zależności (3.25) otrzymujemy ostateczną zależność na prędkość dźwięku w powietrzu

$$v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}} \quad (3.27)$$

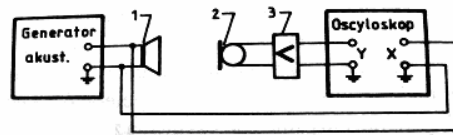
Widzimy więc, że prędkość rozchodzenia się fal dźwiękowych w danym gazie jest wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z temperatury bezwzględnej T i nie zależy od ciśnienia gazu p . Prędkość dźwięku w różnych gazach znajdujących się w jednakowych warunkach jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z ich mas cząsteczkowych.

Opis ćwiczenia

W ćwiczeniu wyznaczamy prędkość rozchodzenia się fal akustycznych w powietrzu dla różnych częstotliwości źródła. Metoda pomiaru oparta jest na składaniu dwóch drgań harmonicznym o tej samej częstotliwości, wzajemnie prostopadłych. Z zależności 3.12 oraz z rys. 3.3 wynika, że torem ruchu cząstki podlegającej równocześnie tym dwóm drganiom jest elipsa. W przypadkach szczególnych elipsa przechodzi w okrąg lub odcinek pro-

stej. Prosta obserwujemy wtedy gdy przesunięcie fazy wynosi $\Delta\varphi = n\pi$, gdzie $n = 0,1,2,3 \dots$ itd. Przesunięcie fazy od 0 do 2π odpowiada długości fali λ i jak widać na rys. 3.3 obserwujemy wówczas prostą nachyloną pod tym samym kątem.

Źródłem drgań jest generator akustyczny, natomiast wynik złożenia drgań obserwujemy na oscyloskopie katodowym. Rys. 3.7. Na rys. 3.8 przedstawiono widok aparatury pomiarowej.

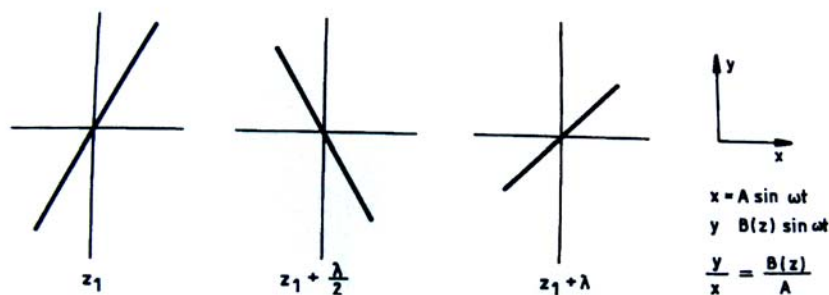


Rys. 3.7 Schemat układu pomiarowego
1 – głośnik, 2 – mikrofon, 3 – wzmacniacz



Rys. 3.8 Widok aparatury pomiarowej

Do pary płytek X oscyloskopu, w którym wyłączono podstawę czasu, przykładamy napięcie bezpośrednio z generatora. Do pary płytek Y sygnał dociera z głośnika przez mikrofon i wzmacniacz, dlatego jest on opóźniony w fazie w stosunku do sygnału na płytkach X. Opóźnienie to wynika z różnicy prędkości sygnału elektromagnetycznego i fali akustycznej w powietrzu. W zależności od odległości głośnik – mikrofon zmienia się przesunięcie fazowe między obydwoma sygnałami i na ekranie oscyloskopu obserwujemy odpowiadające im krzywe Lissajous (rys. 3.3).



Rys. 3.9 Odcinki prostych szczególnie przydatne w pomiarach długości fali λ

Amplituda fali wysyłanej przez głośnik maleje ze wzrostem odległości od głośnika, dlatego pomiary długości fali λ szczególnie dogodnie można określić, wyznaczając odległości między odcinkami prostych o tym samym nachyleniu. (rys. 3.9) Ruch mikrofonu w lewo lub w prawo w sąsiedztwie położenia, przy którym na ekranie obserwujemy prostą, powoduje przejście prostej w dwie różnie usytuowane elipsy. Zakres zmian położenia mikrofonu Δz , przy którym prosta nie rozdwaja się w elipsy, może posłużyć do wyznaczenia długości fali i do oceny błędu pomiaru $\Delta\lambda$. Znając częstotliwość drgań możemy wyznaczyć prędkość fali dźwiękowej w powietrzu

$$v = \lambda f \quad (3.28)$$

Przebieg pomiarów

1. Włączyć oscyloskop.
2. Włączyć generator i ustawić żądaną częstotliwość (powyżej 1 kHz)

3. Zmieniając wzajemną odległość głośnika i mikrofonu, na ekranie oscyloskopu ustawić prostą i zanotować jej położenie na ławie optycznej.
4. Przesuwając mikrofon ustawić kolejne położenie prostej identycznie usytuowanej i zanotować jej położenie na ławie optycznej.
5. Powtórzyć czynność 4 dla co najmniej dwóch różnych położen mikrofonu.
6. Na podstawie pomiaru zmian tych odległości po wyznaczeniu ich wartości średnich obliczyć średnią długość fali λ .
7. Pomiaru wykonać dla 10 różnych częstotliwości generatora. Wyniki pomiarów zanotować w podanej niżej tabeli.
8. Na podstawie danych zawartych w tabeli i zależności 3.28 obliczyć prędkość rozchodzenia się fali dźwiękowej w powietrzu dla różnych częstotliwości.
9. Sporządzić wykres zależności prędkości dźwięku od częstotliwości f .
10. Oszacować bezwzględny błąd pomiaru $\Delta\lambda$ (dokładność podziałki na ławie pomiarowej).
11. Błąd pomiaru prędkości fali dźwiękowej obliczyć metodą pochodnej logarytmicznej, zależność 1.10 lub rachunek błędów tabela poz. 3.
12. Zaznaczyć na wykresie błędy pomiaru Δf i Δv .

Tabela pomiarów

Lp	f[Hz]	λ [m]	λ_{sr} [m]	$v = \lambda_{sr}f$ [m/s]	v_{sr} [m/s]	$\Delta\lambda$ [m]	Δf [Hz]	Δv [m/s]	$\Delta v/v$ [%]
1
...									
...									
10

Literatura

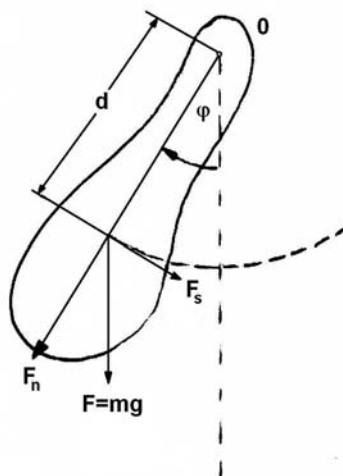
- [1] J. Massalski, M. Massalska *Fizyka dla inżynierów*, WNT Warszawa 1980, Roz. 10 i 11
- [2] Sz. Szczeniowski *Fizyka doświadczalna* PWN Warszawa 1980, Roz. XVI.
- [3] F.C. Crawford Fale, PWN Warszawa 1975.

WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI DUDNIĘĆ I MOMENTU SPRZĘGAJĄCEGO WAHADEŁ

Wprowadzenie

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne jest to bryła sztywna zawieszona na osi obrotu. Przykład wahadła fizycznego pokazano na rys. 4.1.



Rys. 4.1 Wahadło fizyczne

Równanie ruchu tego wahadła możemy zapisać w postaci:

$$M = I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (4.1)$$

gdzie: M – jest momentem sił, I – momentem bezwładności wahadła względem osi obrotu, φ – wychylenie wahadła z położenia równowagi. Na podstawie rysunku można policzyć M jako:

$$M = -d \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (4.2)$$

gdzie: d – odległość środka masy bryły od osi obrotu, m – masa bryły, g – przyspieszenie ziemskie.

Podstawiając (4.2) do (4.1) otrzymujemy:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + m \cdot g \cdot d \cdot \sin \varphi = 0 \quad (4.3)$$

Rozpatrujemy ruch tylko dla małych kątów wychylenia wahadła z położenia równowagi $\varphi \ll 1$, wtedy $\sin \varphi \cong \varphi$. Po uwzględnieniu tego otrzymamy równanie:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot d \cdot \varphi}{I} = 0 \quad (4.4)$$

podstawiając $\omega_o^2 = mgd/I$ otrzymamy równanie wahadła fizycznego w postaci:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_o^2 \varphi = 0 \quad (4.5)$$

Rozwiązaniem tego równanie jest funkcja;

$$\varphi = \varphi_o \cos(\omega_o t) \quad (4.6)$$

gdzie: φ_o – jest to amplituda ruchu, t – czas i $\omega_o = \sqrt{\frac{D}{I}}$, a $D = mgd$ (moment kierujący wahadła).

Wahadła sprzężone

Wahadła sprzężone stanowi układ dwu identycznych wahadeł fizycznych, zawieszonych na przyrmatycznych ostrzach (rys.4.2). Kiedy wahadła połączymy ze sobą nitką na środku, której zawiesimy obciążenie (jak na rysunku 4.2), oprócz siły grawitacyjnej będzie występować dodatkowa siła sprzęgająca.



Rys. 4.2 Wahadła sprzężone

Zakładamy, że siła ta jest proporcjonalna do różnicy wychyleń wahadeł i do momentu sprzęgającego D_s .

Ruch obu wahadeł sprzężonych będzie opisany następującymi równaniami:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \omega_0^2\varphi_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \omega_0^2\varphi_2 + k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (4.8)$$

$$\omega_0^2 = \frac{D}{I} \quad (4.9)$$

$$k = \frac{D_s}{I} \quad (4.10)$$

gdzie: I – moment bezwładności wahadła, D_s – moment sprzęgający pochodzący od drugiego wahadła, D – moment kierujący wahadła.

Częstości normalne

Będziemy szukać rozwiązania równań (4.7) i (4.8) mających takie same częstości drgań. Zakładamy więc rozwiązania w postaci:

$$\varphi_1 = \varphi_{01} \cos(\omega t) \quad (4.11)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{02} \cos(\omega t) \quad (4.12)$$

Po podstawieniu (4.11) i (4.12) do (4.7) i (4.8) oraz redukcji otrzymamy:

$$(\omega^2 - \omega_0^2 - k)\varphi_{01} = k\varphi_{02} \quad (4.13)$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2 - k)\varphi_{02} = k\varphi_{01} \quad (4.14)$$

Mnożąc stronami oba równania otrzymamy:

$$\left[(\omega^2 - \omega_0^2 - k)^2 - k^2 \right] \varphi_{01} \varphi_{02} = 0 \quad (4.15)$$

W czasie ruchu wahadeł amplitudy są różne od zera $\varphi_{01} \neq 0$ i $\varphi_{02} \neq 0$, w związku z tym

$$(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_0^2 - 2k) = 0. \quad (4.16)$$

To równanie ma dwa rozwiązania, są to częstości normalne wahadeł sprzężonych:

$$\omega_1 = \omega_0 \quad (4.17)$$

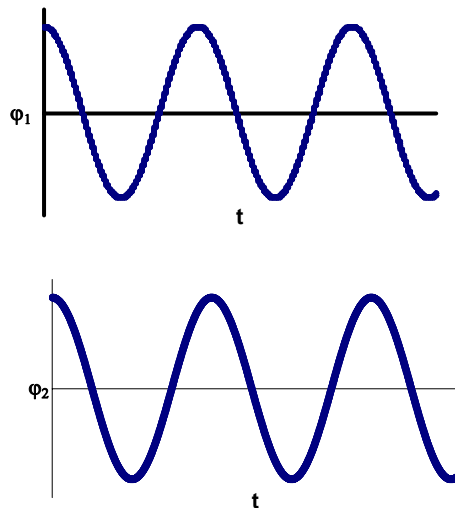
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k} \cong \omega_0 + \frac{k}{\omega_0}. \quad (4.18)$$

Po uwzględnieniu (4.9) i (4.10) otrzymamy następujące zależności na częstości normalne wahadeł sprzężonych:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (4.19)$$

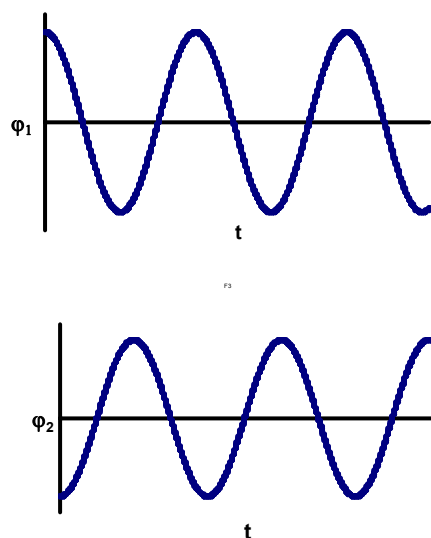
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{I} + \frac{D_s}{\sqrt{ID}}}. \quad (4.20)$$

Pierwsze rozwiązanie ω_1 jest dla warunków początkowych: $\varphi_1 = \varphi_2$ tzn. gdy oba wahadła zostaną wychylone w tę samą stronę o ten sam kąt oraz puszczane jednocześnie. Drgać będą wtedy synchronicznie. Drgania te pokazano na rys.4.3.



Rys. 4.3 Drgania normalne synchroniczne

Drugie rozwiązanie ω_2 będzie dla warunków początkowych: $\varphi_2 = -\varphi_1$ tzn. gdy wahadła zostaną wychylone w przeciwne strony o taki sam kąt oraz puszczane jednocześnie. Drgać będą wtedy asynchronicznie (w przeciwnych fazach). Drgania te przedstawione są na rys.4.4.



Rys. 4.4 Drgania normalne asynchroniczne

Częstość proporcjonalna

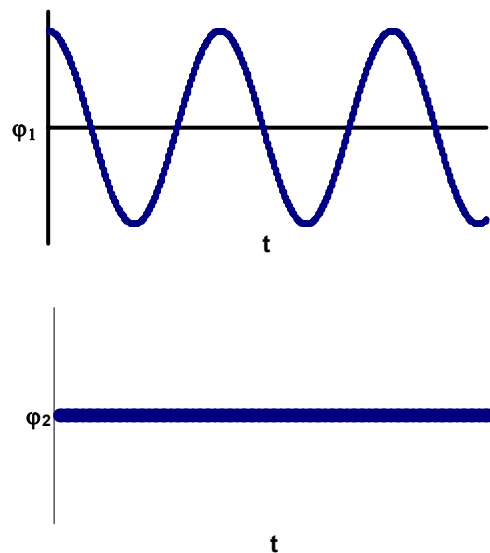
Zakładamy, że $\varphi_2 = 0$ (unieruchamiamy drugie wahadło przez cały czas ruchu pierwszego wahadła). Dla takich warunków otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 + k} \cong \omega_0 + \frac{k}{2\omega_0} \quad (4.21)$$

jest to częstość proporcjonalna drgań. Jeśli podstawimy (4.9) i (4.10) otrzymamy:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{D}{I} + \frac{D_s}{2\sqrt{ID}}}. \quad (4.22)$$

Obraz tych drgań pokazano na rys.4.5.



Rys. 4.5 Częstość proporcjonalna drgań sprzężonych

Częstość dudnień wahadeł sprzężonych

Gdy następuje przekazywanie energii pomiędzy wahadłami wtedy występują dudnienia. Po wprowadzeniu nowych zmiennych do równań (4.7) i (4.8) w postaci:

$$\phi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (4.23)$$

$$\phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (4.24)$$

otrzymamy

$$\frac{d^2\phi_1}{dt^2} + \omega_0^2\phi_1 = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{d^2\phi_2}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2k)\phi_2 = 0 \quad (4.26)$$

Zakładamy, że w chwili początkowej pierwsze wahadło jest nieruchome $\phi_1=0$, a drugie wychylone o pewien kąt z położenia równowagi $\phi_2=\phi_{02}$, daje to następujące warunki początkowe:

$$\phi_1 = 0, \quad \frac{d\phi_1}{dt} = 0, \quad \phi_2 = \phi_{02}, \quad \frac{d\phi_2}{dt} = 0$$

które dla wprowadzonych przez nas funkcji ϕ_1 i ϕ_2 mają postać:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_0, \quad \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt} = 0$$

Po uwzględnieniu tego rozwiązaniem równań (4.25) i (4.26) będą funkcje:

$$\phi_1 = \phi_0 \cos(\omega_1 t), \quad \phi_2 = \phi_0 \cos(\omega_2 t) \quad (4.27)$$

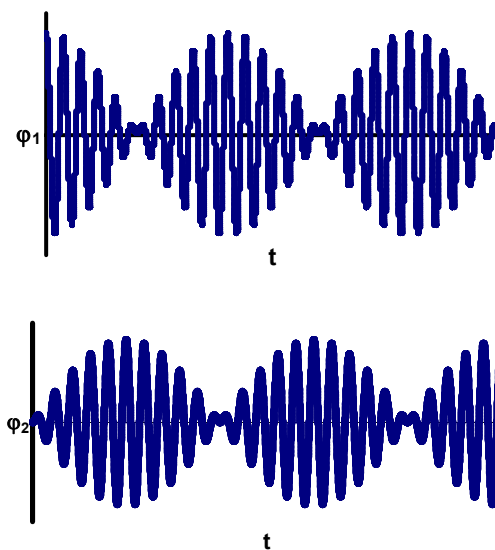
Na podstawie podstawień (4.23), (4.24) i (4.27) otrzymamy:

$$\phi_1 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \phi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (4.28)$$

$$\phi_2 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} = \phi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (4.29)$$

Z powyższych równań wynika, że każde wahadło wykonuje drgania o częstotliwości $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

oraz amplitudzie zmieniającej się z częstością dudnień $\omega_d = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ jak na rysunku 4.6.



Rys. 4.6 Przebieg dudnień dla wahań sprzężonych

Wykonanie pomiarów

1. Zmierzyć częstotliwość drgań własnych każdego wahadła f_0 .
2. Odchylając w jedną stronę wahadła ($\varphi_{01} = \varphi_{02}$) zmierzyć częstotliwości normalne f_1 .
3. Odchylając w przeciwną stronę wahadła ($\varphi_{01} = -\varphi_{02}$) zmierzyć częstotliwości normalne f_2 .
4. Zmierzyć doświadczalnie częstotliwość dudnień f_d , odchylając jedno wahadło, gdy drugie będzie nieruchome.
5. Zmierzyć częstotliwość dudnień f_d dla kilku różnych odległości zawieszonych ciężarka od osi obrotu wahadła.

Uwaga:

Nitka obciążona nie powinna być zawieszona zbyt nisko w stosunku do osi obrotu, ponieważ takie zawieszenie daje dużą siłę sprzęgającą i dużą różnicę częstotliwości normalnych drgań.

Opracowanie wyników pomiarów

- 1) Policzyc częstość dudnień ω_d na podstawie pomiarów f_d oraz ze wzorów. Porównac te wielkości ze sobą.
- 2) Obliczyć moment kierujący $D = I\omega_0^2$ oraz moment sprzęgający $D_s = \omega_d \sqrt{ID}$.
- 3) Obliczyć moment sprzęgający dla kilku zawieszonych ciężarka.
- 4) Wykreślić zależność $D_s = f(d)$ (gdzie d – odległość zawieszenia ciężarka od osi obrotu wahadła).
- 5) Policzyc błędy otrzymanych wyników stosując metodę różniczki zupełnej.

Literatura

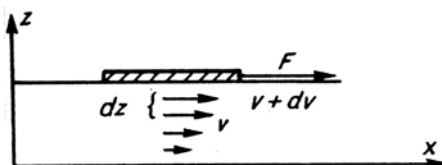
- [1] J. J. Massalski, M Massalska Fizyka Dla Inżynierów, WNT Warszawa 1985.
- [2] Sz. Szczeniowski Fizyka doświadczalna t.1, PWN Warszawa 1980.
- [3] M. Skorko, Fizyka, PWN Warszawa 1973.

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI CIECZY METODĄ STOKESA

Wprowadzenie

Zjawisko lepkości (tarcia wewnętrznego) występuje przy ruchu cieczy i gazów rzeczywistych. Jest ono wynikiem oddziaływania międzycząsteczkowego (sił van der Waal-
sa). Wskutek tego oddziaływania poruszająca się cząsteczka pociąga za sobą cząsteczkę z nią sąsiadującą tym silniej, im ciecz jest bardziej lepka. Natomiast cząsteczka pozostająca w spoczynku, hamuje poruszające się sąsiednie cząsteczki, a więc tarcie wewnętrzne cieczy występuje przy poślizgu jednej warstwy cieczy po drugiej. W przypadku ciał stałych siły tarcia występują tylko na ich powierzchni, to w cieczach i gazach wpływ lepkości ujawnia się w całej ich objętości.

Jeżeli po powierzchni cieczy znajdującej się w bardzo szerokim i płytkim naczyniu będziemy przesuwali płaską płytkę ze stałą prędkością v to musimy działać na nią stycznie do jej powierzchni siłą F równoważącą opór siły tarcia wewnętrznego cieczy. Warstwa cieczy przylegająca do płyty porusza się z prędkością płyty. Warstwy leżące niżej mają tym mniejszą prędkość, im leżą głębiej.



Rys. 5.1 Rozkład prędkości warstw cieczy lepkiej przepływających między ruchomą i nieruchomą płytą.

Warstwy o mniejszej prędkości powiększają swą prędkość kosztem prędkości warstw poruszających się szybciej. Natomiast warstwa cieczy przylegająca do dna naczynia ma prędkość równą zero.

Z doświadczenia wynika, że na pokonanie tarcia wewnętrznego cieczy trzeba użyć siły wyrażonej wzorem:

$$F = \eta S \frac{dv}{dz} \quad (5.1)$$

gdzie η - charakterystyczna dla danej cieczy wielkość, zwana współczynnikiem lepkości cieczy, S – powierzchnia płyty, dv/dz - gradient prędkości wzdłuż normalnej do powierzchni cieczy. Zgodnie z równaniem (5.1) siła lepkości jest proporcjonalna do powierzchni styku warstw oraz szybkości zmian prędkości wzdłuż normalnej do kierunku przepływu cieczy (gradient prędkości). Gdy $dv/dz \rightarrow 0$ (np. naczynie bardzo głębokie) wówczas tarcie wewnętrzne można pominąć, natomiast jeśli spadek prędkości jest duży (np. naczynie płytkie), to nawet w cieczy mało lepkiej powstaje duża siła tarcia wewnętrznego np. trudniej jest pływać w płytkiej wodzie. Jednostką lepkości w układzie SI jest niuton razy sekunda na metr kwadratowy:

$$[\eta] = N * s * m^{-2} = kg * m^{-1} * s^{-1}. \quad (5.1a)$$

Jednostka ta jest dziesięciokrotnie większa od powszechnie stosowanych i nie należących do układu SI jednostkę poise (czyt. puaz), czyli $1 \text{ poise} = 0.1 \text{ N*s*m}^{-2}$. Jest to lepkość takiej cieczy, w której siła działająca na powierzchnię 1 cm^2 przy gradiencie prędkości $dv/dz = 1/\text{sek}$ wynosi 1 dynę.

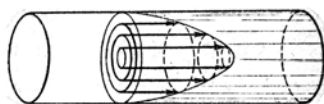
Lepkość cieczy w dużym stopniu jest zależna od temperatury; ze wzrostem temperatury zwiększa się np. dla wody o 2.5 % na 1°C .

Podczas przepływu cieczy przez cylindryczną rurę występują również opory lepkości, gdyż i tu istnieją spadki prędkości pomiędzy warstwami cieczy w różnej odległości od osi przewodu.

Ruch cieczy, w którym możemy wyróżnić warstwy cieczy poruszające się z różnymi prędkościami nazywamy ruchem warstwowym lub laminarnym. Największą prędkość przepływu posiada ciecz płynąca wzdłuż osi przewodu, na ściankach zaś prędkość ta spada do zera, gdyż ciecz przylega do ścianek.(rys. 5.2).

Charakter przepływu jest określony wartością tzw. liczby Reynoldsa Re zdefiniowanej wzorem:

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta}, \quad (5.2)$$



Rys. 5.2 Profil prędkości cieczy przepływającej przez rurę

gdzie: ρ - gęstość cieczy, v – średnia prędkość wypływu, r – promień przewodu i η - współczynnik lepkości.

Z dokładnych pomiarów wynika, że przepływ laminarny zachodzi gdy $Re < 1160$. Przy osiągnięciu tej wartości liczby Reynoldsa przepływ cieczy przestaje być laminarnym i przybiera charakter tzw. turbulentny, powstają zawirowania prowadzące do nieregularności przepływu strug cieczy.

Należy zauważyć, że podczas przepływu laminarnego cieczy przez przewody (rurki) mamy do czynienia z poślizgiem jednych warstw cieczy po drugich, nigdy zaś z poślizgiem cieczy po ściankach naczynia, gdyż ścianki są zawsze pokryte cieniutką warstewką cieczy nieruchomej. Przepływem cieczy w tym przypadku rządzi prawo Poiseuille'a, które wyraża się wzorem:

$$V = \frac{\pi}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{L} R^4, \quad (5.3)$$

gdzie V jest to objętość cieczy o współczynniku lepkości η przepływająca w ciągu 1 sekundy przez rurkę o promieniu R i długości L przy różnicy ciśnień $p_1 - p_2$ na końcach rurki. Ze wzoru tego widać, że objętość V jest wprost proporcjonalna do różnicy ciśnień i czwartej potęgi promienia przewodu, zaś odwrotnie proporcjonalna do jego długości i bezwzględnego współczynnika lepkości danej cieczy.

Rozumowanie powyższe pozostaje słuszne, jeżeli zamiast poruszającej się cieczy względem ciała stałego rozpatrywać będziemy ruch ciała stałego w cieczy, np. kuleczki.

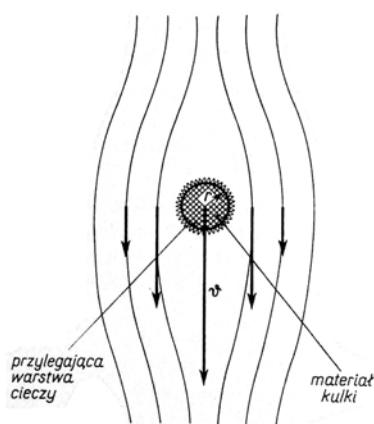
Ruch takiej kuleczki rzuconej do lepkiej cieczy, początkowo niejednostajny, przechodzi w jednostajny w momencie, gdy jej siła ciężkości F_g skierowana pionowo w dół będzie równoważona siłami wyporu F_w (prawo Archimedesesa) i tarcia wewnętrznego F_T (prawo Stokesa). W każdym momencie ruchu jest spełniona zależność:

$$F = F_T + F_w - F_g \quad (5.4)$$

W przypadku ruchu jednostajnego kulki, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona otrzymujemy:

$$0 = F_T + F_w - F_g \quad (5.5)$$

Ciecz zwilżająca pokrywa cienką warstwą zanurzoną w niej w kulkę. W przypadku, gdy kulka jest w ruchu, tarcie występuje nie tylko wewnątrz samego płynu pomiędzy jego warstwami lecz także między kulką i płynem (rys 5.3).



Rys. 5.3 Ruch kulki w płynie

Kulka unosi ze sobą warstwę przylegającego do niej płynu, a ten na skutek tarcia wewnętrznego wprawia w ruch następne warstwy. Z omawianych wyżej powodów siła oporu F_T jaki płyn stawia poruszającej się kulce zależy od współczynnika lepkości płynu i wyraża się wzorem Stokesa

$$F_T = 6\pi\eta r v \quad (5.6)$$

Jeżeli kulka wykonana jest z materiału o gęstości ρ_k większej od gęstości ρ_c cieczy, to ruch kulki odbywa się na skutek siły ciężkości F_g równej:

$$F_g = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g \quad (5.7)$$

Zgodnie z prawem Archimedesesa siła wyporu w naszym przypadku wyraża się wzorem:

$$F_w = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c g \quad (5.8)$$

Siły lepkości F_T , oraz wyporu F_w są skierowane pionowo ku górze (przeciwnie do ruchu kulki). Uwzględniając zależności (5.5), (5.6), (5.7) i (5.8) możemy zapisać:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c g + 6\pi\eta r v \quad (5.9)$$

lub po przekształceniu

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_k - \rho_c) g = 6\pi\eta r v, \quad (5.10)$$

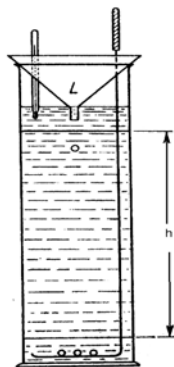
a stąd

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{r^2}{v} (\rho_k - \rho_c) g \quad (5.11)$$

Opis ćwiczenia

Chcąc zatem na podstawie wzoru (5.11) wyznaczyć lepkość cieczy, należy kolejno określić gęstość cieczy ρ_c , gęstość kulki ρ_k , promień kulki r i jej prędkość spadania v . Gęstość cieczy wyznaczamy za pomocą areometru, promień kulki mierzymy śrubą mikrometryczną, natomiast gęstość kulki jeśli nie jest znana wyznaczamy ze stosunku jej masy do objętości.

Dla wyznaczenia prędkości v umieszczamy na cylindrze dwa metalowe pierścienie: górny w miejscu w którym kuleczka zaczyna poruszać się ruchem jednostajnym, a dolny w pobliżu dna (rys. 5.4).



Rys. 5.4 Aparatura Stokesa

Mierząc odległość h między pierścieniami i czas spadania t za pomocą stopera, obliczamy ν ze wzoru $\nu = \frac{h}{t}$ i wówczas zależność (5.11) przyjmuje ostatecznie postać:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{gr^2t(\rho_k - \rho_c)}{h} \quad (5.12)$$

Spoczywająca na dnie cylindra siatka druciana, przymocowana do pionowego pręta, ułatwia wyjmowanie kuleczek z cieczy. Należy jeszcze zaznaczyć, że zależność (5.12) jest słuszna przy założeniu, że promień cylindra jest dostatecznie duży. Gdy warunek ten nie jest spełniony, trzeba do tej zależności wprowadzić pewną poprawkę, uwzględniającą oddziaływanie ścianek. W tym przypadku poprawiony wzór przyjmuje postać:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{r^2t}{h} (\rho_k - \rho_c) g * \frac{1}{1 + 2.4 \frac{r}{R}}, \quad (5.13)$$

gdzie R – promień cylindra. Z zależności tej widać, że jeżeli stosunek r/R jest wielkością bardzo małą, to wyrażenie przechodzi w (5.12).

Przyrządy

- Naczynie z badaną cieczą,
- aeometr,
- zestaw kulek,
- waga analityczna,
- śruba mikrometryczna,
- linijka z podziałką milimetrową,
- stoper.

Wykonanie pomiarów

1. Zmierzyć średnicę kulek wskazanych przez prowadzącego.
2. Kulki dokładnie oczyścić, wysuszyć i zważyć na wadze analitycznej.
3. Zmierzyć za pomocą śruby mikrometrycznej średnicę kulek. Pomiar średnicy ($2r$) każdej kulki przeprowadzić kilka razy w różnych kierunkach i obliczyć średnią wartość promienia każdej kulki.
4. Zmierzyć odległość h między pierścieniami naczynia. Górny pierścień powinien znajdować się co najmniej 6 cm od powierzchni cieczy.

5. Zmierzyć kilkakrotnie (około 10 razy) czas spadania t każdej kulki na drodze h i obliczyć jego średnią wartość dla każdej kulki. Kulki należy puszczać swobodnie tuż nad powierzchnią cieczy tak aby tor w przybliżeniu pokrywał się z osią naczynia.
6. Zmierzyć areometrem gęstość badanej cieczy.
7. Obliczyć bezwzględny współczynnik lepkości cieczy η dla każdej kulki a następnie jego wartość średnią korzystając z zależności (5.12) i (5.13).

Otrzymane wyniki pomiarów umieścić w tabelkach według niżej podanych wzorów:

Tabela 5.1

Lp. kulek	Pomiary promienia r danej kulki [m]	Średnia wartość r [m]
1		
2		
3		

Tabela 5.2

L.p kulki	Pomiary czasu spadania danej kulki	Obliczony średni czas spadania t (średnie)
1	
2		
3		

Tabela 5.3

Nr kulki	Promień kulki r (średni) [m]	Gęstość kulki ρ_k [kg/m ³]	Czas spadania t (średni) [s]	Prędkość $v = h/t$ [m/s]	Lepkość η [Nsm ⁻²]
1					
2					
3					
4					

Uwaga: Przy wyjmowaniu kulek za pomocą sitka, które znajduje się na dnie cylindra nie należy wyciągać go całkowicie, lecz pozostawić około 3 cm pod powierzchnią cieczy, aby nie wprowadzać do jej wnętrza banieczek powietrza.

Ocena błędów

Rachunek błędów przeprowadzamy korzystając z rozdziału pt. „Rachunek błędów jego zastosowanie”. Przykład 3, zależności 20, 21 i 22.

Literatura

- [1] Sz. Szczeniowski *Fizyka doświadczalna* PWN Warszawa 1980 Rozdz. XIV
- [2] L. D. Landau, A. I Achijezer, E. M. Lifszyc. *Fizyka ogólna* WNT Warszawa 1968,
Roz. XV
- [3] J. Massalski, M. Massalska *Fizyka dla inżynierów*, WNT Warszawa 1980, Roz. 8

SKALOWANIE TERMOPARY I WYZNACZANIE TEMPERATURY KRZEPNIĘCIA STOPU

Wprowadzenie

Każda mierzalna wielkość fizyczna, która zmienia się z temperaturą, może być wykorzystana do budowy termometru. W ćwiczeniu poznajemy dwa zjawiska umożliwiające pomiar temperatury metodami elektrycznymi:

- oporność elektryczna metali,
- zjawisko termoelektryczne.

Oporność elektryczna metali

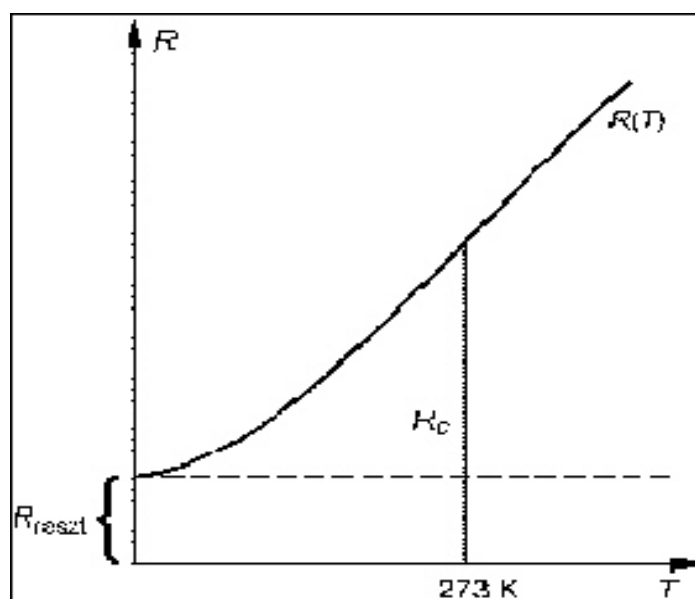
Metal jest zbudowany z jonów dodatnich tworzących sieć krystaliczną oraz swobodnych elektronów poruszających się pomiędzy jonami. Swobodne elektrony zwane inaczej gazem elektronowym stanowią swego rodzaju lepiszczkę łączące dodatnie jony. Elektrony poruszają się bezładnym ruchem cieplnym. Gdy przyłożymy pole elektryczne, na bezładny ruch elektronów nakłada się uporządkowany ruch w kierunku przeciwnym do pola elektrycznego. Ten ruch uporządkowany powoduje przepływ prądu elektrycznego w metalu, a więc elektrony są nośnikami prądu. Zjawisko oporu elektrycznego w metalu jest wynikiem rozpraszania elektronów. Rozpraszanie zakłóca ich uporządkowany ruch w kierunku wyznaczonym przez przyłożone pole elektryczne. Mechanika kwantowa uczy, że doskonale periodyczny układ atomów nie rozprasza elektronów. W konsekwencji opór doskonałego kryształu, bez domieszek obcych atomów i bez dyslokacji, w temperaturze zera bezwzględnego powinien zmaleć do zera.

W rzeczywistym metalu istnieją dwa podstawowe mechanizmy rozpraszania elektronów, a więc dwa źródła oporności:

1. Rozpraszanie elektronów na drganiach termicznych sieci krystalicznej. W języku mechaniki kwantowej mówimy o zderzeniach elektronów z fononami czyli kwantami drgań sieci krystalicznej. W wysokich temperaturach energia drgań sieci,

a więc i liczba fononów jest proporcjonalna do temperatury bezwzględnej T . Prawdopodobieństwo zderzenia elektronu z fononem, a w konsekwencji opór elektryczny są w grubym przybliżeniu wprost proporcjonalne do T . W niskich temperaturach liczba fononów szybko maleje do zera. W konsekwencji składnik oporu związany z fononami również maleje do zera. Zależna od temperatury i malejąca do zera w 0 K część oporu nosi nazwę oporu idealnego R_i . Nazwa bierze się stąd, że opór ten występuje w każdym kryształ, również w idealnym kryształ bez domieszek i wad struktury. Rozpraszanie elektron-fonon jest głównym, lecz nie jedynym źródłem oporu idealnego. Mniejszy wkład wnosi rozpraszanie elektron-elektron, a w atomach pierwiastków magnetycznych takich jak Fe czy Mn – rozpraszanie na momentach magnetycznych atomów.

2. Rozpraszanie na niedoskonałościach sieci, które zaburzają jej periodyczność. Są nimi obce atomy (zwłaszcza w stopach) i dyslokacje. Ta część oporu jest niezależna od temperatury i nosi nazwę oporu resztkowego, gdyż jest „resztką” oporu, która pozostaje również w zerze bezwzględnym (rys. 11.1).



Rys. 11.1 Typowa zależność oporu metalu od temperatury

W czystych pierwiastkach metalicznych oporność resztkowa jest mała. Natomiast w stopach osiąga duże wartości (większe od oporu idealnego), gdyż losowe rozmieszczenie różnych atomów w węzłach sieci czyni ją siecią nieperiodyczną. Dlatego oporność stopów jest na ogół dużo większa od oporności metali czystych i słabo zależy od temperatury. (Faktu tego nie należy mylić ze zjawiskiem nad-

przewodnictwa, które polega na tym, że w wielu metalach opór raptownie znika poniżej określonej temperatury rzędu kilku kelwinów, również w przypadku obecności w metalu dużej liczby obcych atomów i innych niedoskonałości struktury).

Doświadczalne prawo głoszące, że oporność właściwa metalu jest sumą oporności idealnej i oporności resztkowej

$$\rho(T) = \rho_i(T) + \rho_{reszt} \quad (11.1)$$

nosi nazwę reguły Matthiessena.

Nie ma analitycznego wzoru, który mógłby opisać funkcje $R(T)$ w pełnym zakresie temperatur. W małym zakresie temperatur, np. $0 \div 100^\circ\text{C}$, zależność $R(T)$ jest w przybliżeniu liniowa. Zależność liniową można opisać wzorem

$$R(T) = R_0(1 + \alpha\Delta t), \quad (11.2)$$

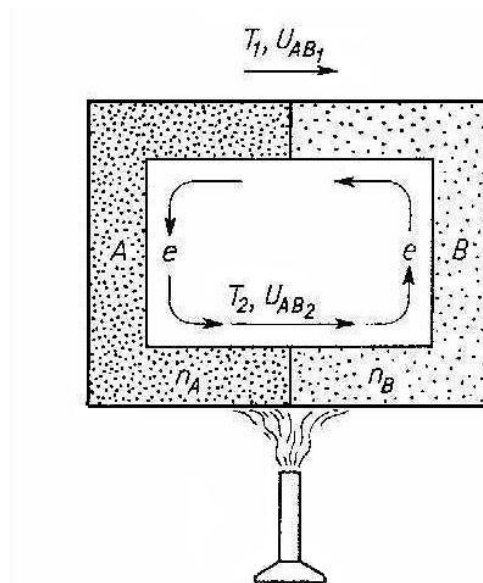
gdzie t oznacza temperaturę w $^\circ\text{C}$, natomiast R_0 jest wartością oporności metalu w temperaturze 0°C . Współczynnik α nazywany temperaturowym współczynnikiem oporu. Jego wartość zależy od rodzaju metalu.

Zależność oporności metali od temperatury została wykorzystana do konstrukcji termometrów oporowych. Pożądana jest odporność metalu na utlenianie oraz zmianę temperaturowego współczynnika oporu. Szczególne znaczenie mają termometry oporowe platynowe, które umożliwiają pomiar temperatury w zakresie od kilkunastu K do około 900 K. Dzięki chemicznej obojętności platyny wskazania termometru cechuje wyjątkowa dokładność i stabilność w czasie. Wadą termometrów Pt są stosunkowo duże rozmiary sondy oraz konieczność stosowania układów nieczułych na oporność doprowadzeń.

W zakresie temperatur helowych (4 K), gdzie oporność i napięcie termoelektryczne metali stają się bardzo mało czułe na zmiany temperatury, szerokie zastosowanie znalazł oporowy termometr węglowy.

Zjawisko termoelektryczne

Utwórzmy obwód elektryczny z dwóch różnych metali (rys.11.2). Jeżeli cały obwód znajduje się w jednakowej temperaturze, to nie zaobserwujemy przepływu żadnego prądu w obwodzie. Gdy jednak temperatury na obu złączach metali będą różne, włączony w obwód galwanometr wykaże powstawanie różnicy potencjałów i przepływ prądu. Doświadczenie wykazuje, że powstałe napięcie termoelektryczne zależy wyłącznie od wartości temperatur na złączach A i B oraz rodzaju metali tworzących złącze. Zjawisko to nazywa się zjawiskiem termoelektrycznym i zostało odkryte przez Seebecka.



Rys. 11.2 Obwód zamknięty zbudowany z metalu A o większej koncentracji elektronów oraz metalu B o mniejszej koncentracji elektronów

Zjawisko to można wyjaśnić na podstawie elektronowej budowy metali. Koncentracja elektronów swobodnych jest różna w różnych metalach i słabo zależy od temperatury. Na styku dwóch metali następuje dyfuzja elektronów z metalu o większej koncentracji do metalu o mniejszej koncentracji. Wskutek tego jeden z metali ładuje się dodatnio, drugi ujemnie. Powstające na złączu pole elektryczne przeciwdziała przepływowi ładunku. Ustala się stan równowagi dynamicznej. Powstająca w ten sposób na złączu różnica potencjałów nazywa się kontaktową różnicą potencjałów, a jej wartość zależy od rodzaju stykających się metali oraz temperatury złącza. W przypadku obwodu zamkniętego złożonego z dwóch metali, w których temperatury złącz są jednakowe, napięcie U_{AB} powstające na jednym ze złącz jest kompensowane przez napięcie U_{BA} na drugim złączu. W obwodzie prąd nie popłynie. Jeżeli temperatury $T_1 \neq T_2$, to $U_{AB1} \neq U_{AB2}$ i w obwodzie pojawi się napięcie termoelektryczne

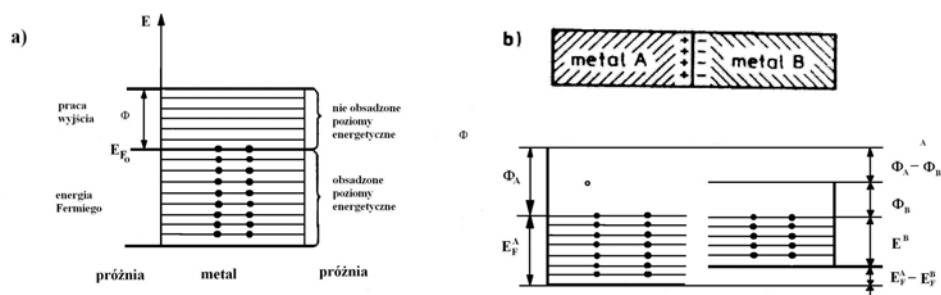
$$U = U_{AB2} - U_{AB1} \quad (11.3)$$

powodująca przepływ prądu.

Elektrony swobodne w metalu można traktować podobnie jak elektrony w studni potencjału i opisać przy pomocy równania Schrödingera. Rozwiązanie tego równania dla kryształu jednowymiarowego prowadzi do następujących wniosków:

- Elektrony mogą zajmować tylko stany o dyskretnych wartościach energii.
- Na każdym poziomie energetycznym mogą znajdować się nie więcej niż dwa elektrony o przeciwnie skierowanych spinach.

W temperaturze zera bezwzględne elektrony wypełniają stany o najniższych wartościach energii. Energia ostatniego wypełnionego stanu nazywa się energią Fermiego E_F . Stany mające większą energię od E_F pozostają puste.



Rys. 11.3 Schematyczna ilustracja rozkładu energii elektronów swobodnych w metalu w temperaturze 0 K: (a) oraz kontaktowej różnicy potencjałów Galwaniego i Volty (b)

W temperaturze wyższej od zera bezwzględne część elektronów zajmuje stany o energii wyższej od energii Fermiego, a więc część stanów o energii niższej pozostaje nieobsadzona. Energia Fermiego w tym przypadku jest to energia stanu, dla którego prawdopodobieństwo obsadzenia wynosi $1/2$. Energia Fermiego w temperaturze $T > 0$ dana jest przybliżonym wyrażeniem i zależy od koncentracji elektronów i temperatury

$$E_F = E_{F_0} \left(1 - \frac{\pi^2 k_B T}{E_{F_0}} \right), \quad (11.4)$$

gdzie:

$$E_{F_0} = \frac{h^2}{8\pi \cdot m_e} (3n)^{2/3}. \quad (11.5)$$

E_{F_0} - energia Fermiego w temperaturze zera bezwzględne,

k_B - stała Boltzmanna, h - stała Plancka, n - koncentracja elektronów, m_e - masa elektronu.

Jeżeli wykonamy złącze dwóch różnych metali A i B, to na złączu powstanie kontaktowa różnica potencjałów Galwaniego (rys. 11.3b)

$$U_{AB}^G = \frac{E_F^A - E_F^B}{e}. \quad (11.6)$$

gdzie e - jest ładunkiem elektronu. Różnica potencjałów Galwaniego zależy od temperatury złączy (11.4) oraz różnicy koncentracji elektronów swobodnych w metalach A i B (11.5, 11.4, 11.6).

Napięcie Volty powstaje wówczas, gdy metale znajdują się blisko siebie, ale kontakt jest na tyle słaby, że elektrony, aby przejść z jednego metalu do drugiego, muszą pokonać pracę wyjścia. W próżni odległość między metalami może być duża (np. w lampach próżniowych). Napięcie kontaktowe Volty wynosi

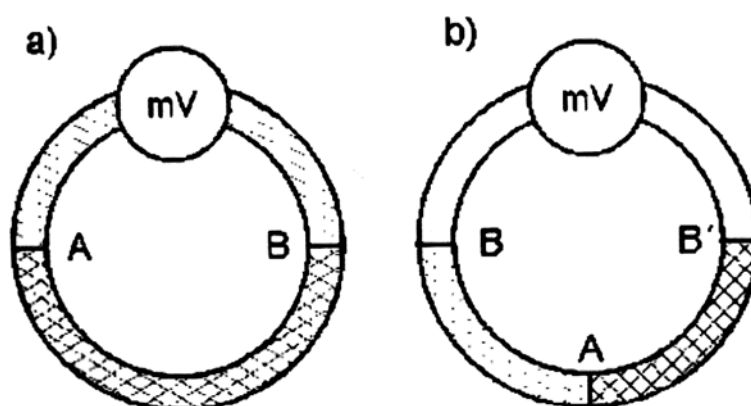
$$U_{AB}^V = \frac{\Phi_A - \Phi_B}{e} \quad (11.7)$$

gdzie Φ_A , Φ_B oznaczają odpowiednio, pracę wyjścia elektronu z metalu A oraz B.

Praca wyjścia elektronu z metalu W jest to energia, jaką należy dostarczyć elektronowi, aby go przenieść z metalu (z poziomu Fermiego) do nieskończoności (w praktyce na zewnątrz metalu).

Termopara

Zjawisko powstawania siły termoelektrycznej na złączu dwu metali zostało wykorzystane do pomiaru temperatury za pomocą tzw. termopar. Typowa termopara różnicowa pokazana jest na rys.11.4a. Złącze odniesienia B należy utrzymywać w stałej temperaturze na przykład 0°C . Wtedy napięcie termoelektryczne jest zależne od różnicy temperatur złączy A oraz B.



Rys. 11.4 Schemat budowy termopary:
a) złożonej z dwu metali; b) zawierającej trzy metale

Jeżeli taką termoparę chcemy podłączyć do miernika napięcia musimy zastosować dwa dodatkowe przewody (rys.11.4b). Te dodatkowe przewody tworzą dodatkowe złącze B'. Napięcie termoelektryczne w takim obwodzie będzie sumą napięć termoelektrycznych na złączach A oraz B i B'. Jeżeli temperatury złączy B i B' będą utrzymywane w stałej temperaturze to pojawi się w obwodzie wypadkowe napięcie termoelektryczne zależne od różnicy temperatur pomiędzy złączami B i B' oraz A.

Charakterystyką termopary $E(t)$ nazywamy zależność napięcia termoelektrycznego E od temperatury złącza pomiarowego A w sytuacji, gdy drugie złącze B (lub złącza B i B' w układzie z rysunku 11.4b) utrzymujemy w 0°C . Charakterystykę termopary podaje się w formie tabeli, wykresu, albo rozwinięcia w szereg potęgowy

$$E(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \quad (11.8)$$

W rozwinięciu (11.8) nie ma wyrazu wolnego, gdyż gdy obydwa złącza utrzymywane są w temperaturze 0°C ($t = 0$), napięcie termoelektryczne jest równe zero. Współczynniki a_1, a_2, a_3, \dots wyznacza się przez komputerowe dopasowanie wielomianu (11.8) do zmierzonej zależności $E(t)$. Liczba wyrazów potrzebna do odtworzenia charakterystyki termopary zależy od zakresu temperatury i dokładności pomiaru. W przypadku małego zakresu temperatur rzędu kilkudziesięciu stopni może okazać się, że wystarcza wyraz liniowy

$$E(t) = a_1 t. \quad (11.9)$$

Zastosowanie termopar pozwala na wykonywanie pomiarów temperatury w szerokim zakresie sięgającym od 4 K do 2000 K. Złącze pomiarowe termopary może być wykonane z cienkich drucików, posiada wtedy znikomą pojemność cieplną i krótki czas reakcji na zmianę temperatury. Wygodnym sposobem pomiaru niewielkich napięć termoelektrycznych (rzędu kilku mV) jest zastosowanie woltomierza cyfrowego ze względu na jego duży opór wewnętrzny (spadek napięcia na oporze wewnętrznym termopary jest wtedy do pominięcia). Wadą termopary (w porównaniu z termometrem oporowym) jest konieczność utrzymywania złącza odniesienia w stałej temperaturze i nieco mniejsza dokładność pomiaru różnicy temperatur.

W zakresie $77 \div 600$ K najczęściej stosowana jest termopara miedź-konstantan, charakteryzująca się stosunkowo dużą wartością napięcia termoelektrycznego. Dla zakresu $4 \div 77$ K stosuje się specjalne stopy, gdyż zwykle termopary posiadają zbyt małą czułość. Dla wysokich temperatur stosuje się układy metali trudno topliwych i odpornych na utlenienie. Przykładowo, termopara Pt-Pt_{0.90}Rh_{0.10} umożliwia pomiary do 1800 K.

Termopary najczęściej wykonywane są z:

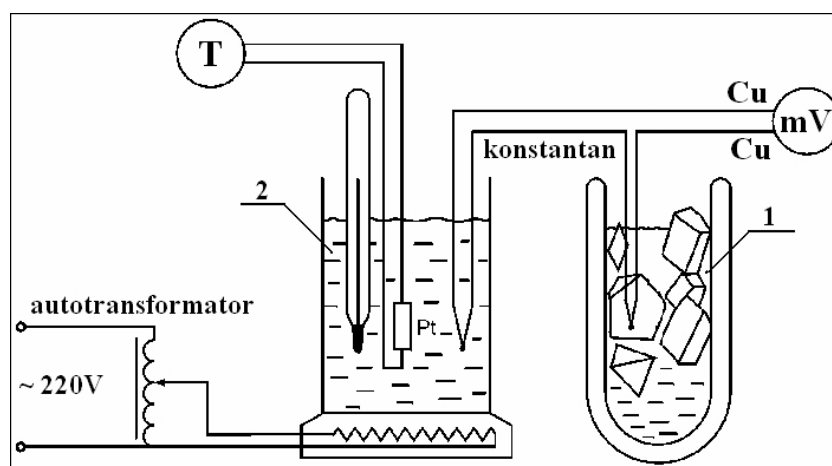
- miedzi i konstantanu (40% Ni i 60% Cu),
- platyny i platynorodu (90% Pt i 10% Rh),
- irydu i stopu irydu z rodem.

Zasada pomiaru - układ pomiarowy

Skalowanie termopary polega na wyznaczeniu zależności siły termoelektrycznej od różnicy temperatur między spojeniami. Najczęściej jako temperaturę odniesienia przyjmu-

je się temperaturę 0°C , którą łatwo uzyskać wykorzystując mieszaninę wody z lodem. Aby zabezpieczyć tę mieszaninę przed pobieraniem ciepła z otoczenia umieszcza się ją w naczyniu Dewara (termosie).

Schemat układu służącego do skalowania termopary przedstawiono na rys. 11.5. Jedno ze spojeń termopary umieszczone jest w mieszaninie wody z lodem 1, drugie zaś w pojemniku 2. Temperaturę pojemnika 2 można zmieniać w kontrolowany sposób, a jej wartość wyznaczać za pomocą termometru wzorcowego (cieczowego lub oporowego). Wyniki skalowania termopary można przedstawić w formie wykresu zależności siły termoelektrycznej termopary od różnicy temperatur między spojeniem zimnym i gorącym, lub wyznaczyć wartość współczynników rozwinięcia (11.8) wiążącego siłę termoelektryczną z temperaturą



Rys. 11.5 Schemat układu pomiarowego służącego do skalowania termopary

Najdokładniejszą metodą wyznaczania siły termoelektrycznej jest metoda kompensacyjna. Budowane obecnie woltomierze cyfrowe mają tak duży opór wewnętrzny, że wyznaczone za ich pomocą napięcie można uznać za siłę termoelektryczną.

Wyznaczanie temperatury krzepnięcia stopu

Temperaturę krzepnięcia stopu wyznaczamy mierząc zależność temperatury stopu od czasu (podczas stygnięcia). W celu opisanego zjawiska rozpatrzmy proces stygnięcia ciała. Zakładamy, że różnica temperatur między stygnącym ciałem i otoczeniem jest mała. Ciało o temperaturze wyższej od temperatury otoczenia stygnie, przekazując energię do otoczenia. Energia przekazywana jest poprzez konwekcję, przewodnictwo cieplne oraz promieniowanie.

Ilość ciepła przekazywana do otoczenia w jednostce czasu (moc) poprzez konwekcję:

$$\frac{dQ_k}{dt} = Sk_k \Delta T, \quad (11.10)$$

gdzie: T - temperatura, S - powierzchnia stygnącego ciała, k_k – stała, ΔT - różnica między temperaturą ciała i temperaturą otoczenia T_o

Moc przekazywana do otoczenia na skutek przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{dQ_p}{dt} = SK \Delta T, \quad (11.11)$$

gdzie K oznacza współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Moc tracona przez promieniowanie E_R jest różnicą między mocą wypromieniowaną przez ciało E_E i mocą pobraną z otoczenia E_A (otoczenie promieniując przekazuje energię rozpatrywanemu przez nas ciału). Moc traconą przez ciało (na skutek promieniowania) możemy opisać korzystając z prawa Stefana-Boltzmann'a:

$$\frac{dQ_R}{dt} = \frac{dQ_E}{dt} - \frac{dQ_A}{dt} = SA\sigma_{SB}T^4 - SA\sigma_{SB}T_o^4 \approx 4T_o^3 SA\sigma_{SB}\Delta T \quad (11.12)$$

gdzie: A – współczynnik absorpcji, σ_{SB} – stała Stefana-Boltzmann'a. Sumując moce występujące w równaniach (11.10, 11.11 i 11.12) otrzymujemy

$$\frac{dQ}{dt} = A\Delta T(k_k + K + 4T_o^3 A\sigma_{SB}) = K_s S \Delta T \quad (11.13)$$

gdzie: $K_s = k_k + K + 4T_o^3 A\sigma_{SB}$ oznacza sumaryczny współczynnik ciepła.

Ciepło dQ przekazane przez stygnące ciało do otoczenia powoduje obniżenie temperatury o dT

$$\frac{dQ}{dt} = -mc \frac{dT}{dt} \quad (11.14)$$

Ponieważ szybkość zmian temperatury jest równa szybkości zmian różnicy temperatur, możemy zastąpić $\frac{dT}{dt}$ (równaniem 11.14) przez $\frac{d(\Delta T)}{dt}$.

Przyrównując prawe strony równań (11.13) i (11.14) otrzymujemy

$$K_s S \Delta T = -mc \frac{d(\Delta T)}{dt} \quad (11.15)$$

po przekształceniu

$$d(\Delta T) = -\frac{K_s S \Delta T}{mc} dt \quad (11.16)$$

lub

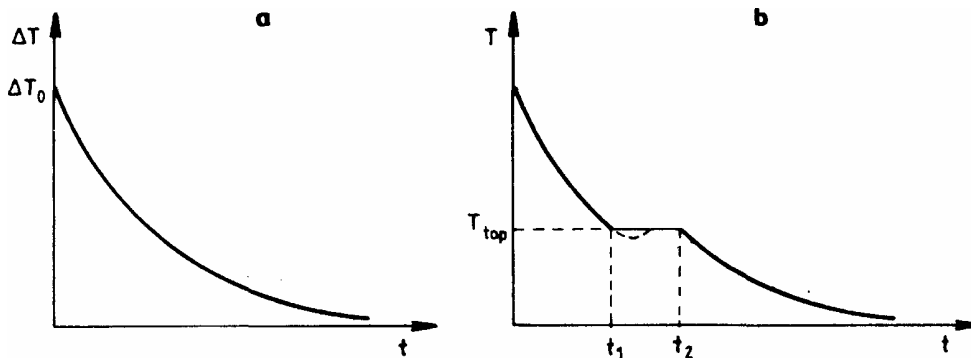
$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = -\frac{K_s S}{mc} \Delta T \quad (11.17)$$

Rozwiązując równanie (11.17) otrzymujemy zależność temperatury stygnięcia ciała od czasu

$$T = T_o + \Delta T(t) = T_o + \Delta T_o \exp\left(-\frac{K_s S}{mc} t\right) \quad (11.18)$$

ΔT_o oznacza różnicę między temperaturą ciała i otoczenia w chwili $t = 0$.

Równanie (11.18) nazywane jest równaniem Newtona. Z tego równania wynika, że szybkość stygnięcia ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą ciała oraz temperaturą otoczenia i zależy eksponencjalnie od sumarycznego współczynnika strat ciepła oraz pola powierzchni stygnącego ciała. Szybkość stygnięcia jest tym mniejsza, im większa jest pojemność cieplna (iloczyn mc) stygnącego ciała. Wnioski wynikające z równania (11.18) są bardzo ważne dla wielu rozwiązań technicznych, w których mamy do czynienia z procesami przekazywania ciepła. Zależność temperatury ciała od czasu wynikająca z równania (11.18) przedstawiono na rys. 11.6(a).



Rys. 11.6 Zależność temperatury stygnącego ciała od czasu:
a) wynikająca z równania 11.16;
b) dla ciała w którym występuje przemiana fazowa pierwszego rodzaju

Jeżeli podczas stygnięcia ciała zachodzi przemiana fazowa pierwszego rodzaju, np. krzepnięcie ciała, to z przemianą tą związany jest efekt polegający na wydzielaniu ciepła bez zmiany temperatury ciała. W rozpatrywanym przez nas przypadku jest to ciepło krzepnięcia. Ciepłem przemiany fazowej (krzepnięcia, topnienia, parowania, skraplania lub innej) nazywamy ilość ciepła wydzieloną lub pochłoniętą; podczas przemiany fazowej bez zmiany temperatury ciała.

W temperaturze przemiany fazowej na krzywej stygnięcia pojawia się plateau - pozioma część wykresu (czytaj: plato). Temperatura, w której jest obserwowane plateau od-

powiada temperaturze przemiany fazowej. Długość plateau związana jest z ciepłem przemiany fazowej. Na rysunku 11.6(b) przedstawiono schematycznie krzywą stygnięcia dla ciała, w którym zachodzi przemiana fazowa pierwszego rodzaju. Podczas ochładzania substancji, w której następuje przemiana pierwszego rodzaju może wystąpić zjawisko przechłodzenia (podczas ogrzewania - zjawisko przegrzania). Można uzyskać ciecz o temperaturze niższej od temperatury krzepnięcia. Po pojawieniu się zarodków fazy stałej ciecz gwałtownie krystalizuje wydzielając ciepło krzepnięcia. Taką sytuację ilustruje linia przerywana na rys. 11.6(b).

Wykonanie pomiarów

1. Przeprowadzić skalowanie termopary wyznaczając zależność siły termoelektrycznej od temperatury gorącego spojenia, gdy spojenie zimne znajduje się w temperaturze 0°C .
2. Wyznaczyć temperaturę krzepnięcia stopu. W tym celu wyznaczyć zależność siły termoelektrycznej termopary od czasu. Przed pomiarem stop należy podgrzać do temperatury wyższej o kilka stopni od temperatury topnienia.

Opracowanie wyników

1. Sporządzić wykres zależności siły termoelektrycznej od różnicy temperatur między spojeniami
2. Aproksymując uzyskaną zależność funkcją liniową wyznaczyć współczynnik termoelektryczny. Wykonując aproksymację warto skorzystać z programu komputerowego „**Microsoft Excel**” lub dowolnego arkusza kalkulacyjnego.
3. Przeliczyć zmierzone wartości siły termoelektrycznej termopary na temperaturę.
4. Narysować krzywą stygnięcia stopu - zależność temperatury stopu od czasu.
5. Z krzywej stygnięcia wyznaczyć temperaturę krzepnięcia stopu.
6. Na wykresy, w kilku punktach, nanieść prostokąty błędów; oszacować błąd wyznaczenia współczynnika termoelektrycznego oraz temperatury krzepnięcia stopu.

Literatura

- [1] Sz. Szczeniowski *Fizyka doświadczalna cz.2* PWN Warszawa 1976, Rozdz. III
[2] J. Massalski, M. Massalska *Fizyka Dla Inżynierów t.1* WNT Warszawa 1980

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO IZOLATORÓW

Wprowadzenie

Jeżeli pomiędzy różnymi ciałami lub elementami tego samego ciała powstanie różnica temperatur to następuje samorzutny przepływ ciepła w kierunku obszaru o niższej temperaturze, trwa on do chwili, gdy temperatury wyrównają się.

Istnieją trzy sposoby przenoszenia ciepła:

- a. przez promieniowanie,
- b. przez konwekcję (unoszenie),
- c. przez przewodzenie.

Wymiana ciepła przez promieniowanie polega na emisji promieniowania elektromagnetycznego wytworzonego kosztem ciepła oraz na powstaniu ciepła kosztem energii promieniowania.

Wszystkie ciała mające temperaturę powyżej 0 K są źródłami promieniowania (rys.12.1)



Rys. 12.1 Zdjęcie lwa wykonane w średniej podczerwieni (kolory umowne)

W miarę wzrostu temperatury ciała, długość fali emitowanego promieniowania odpowiadająca maksimum jego natężenia przesuwa się w stronę fal krótszych (prawo przesunięć Wiena).

Natężenie promieniowania emitowanego przez dane ciało związane jest z jego zdolnością absorpcyjną, która określa jaką część energii padającego promieniowania pochłania ciało. Oznaczając przez $M(T)$ moc wypromieniowaną przez jednostkę powierzchni ciała, czyli jego zdolność emisyjną, a przez $\alpha(T)$ zdolność absorpcyjną można dla określonej temperatury napisać relację

$$\frac{M(T)}{\alpha(T)} = M_{cz}(T) \quad (12.1)$$

gdzie T jest temperaturą w skali bezwzględnej.

Stosunek ten jest równy zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego, dla którego $\alpha(T)=1$. Ciało doskonale czarne całkowicie pochłania padające nań promieniowanie.

Obliczenia teoretyczne jak i badania doświadczalne wykazały, że

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (12.2)$$

przy czym $\sigma = 5,75 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$.

Dla ciała nie czarnego $\alpha(T) < 1$, zdolność emisyjna wyrazi się wzorem

$$M(T) = \alpha(T)\sigma T^4 \quad (12.3)$$

Gdy ciało i jego otoczenie mają jednakową temperaturę, ciało zyskuje od otoczenia tyle ciepła ile traci przez promieniowanie a zatem temperatura jego nie ulega zmianie.

Jeżeli temperatura ciała T jest wyższa od temperatury otoczenia T_o wówczas ciepło traczone przez ciało w jednostce czasu wyniesie

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \alpha(T)S\sigma(T^4 - T_o^4) \quad (12.4)$$

gdzie S oznacza powierzchnię ciała.

Wzór (12.4) uwzględnia energię emitowaną przez ciało i pochłoniętą przez nie od otoczenia. Przepływ ciepła będzie zachodził do chwili wyrównania się temperatur.

W przypadku konwekcji ciepło przenoszone jest wraz z cząstkami, co wiąże się ze zmianą gęstości wraz z temperaturą. Na ogół gęstość cieczy i gazów maleje ze wzrostem temperatury, powoduje to wypchnięcie ogrzanej części gazu lub cieczy ku górze rys.12.2 czyli jej konwekcję. Zjawisko to prowadzi do wyrównywania temperatur. Przewodzenie ciepła w ciałach stałych związane jest z innymi mechanizmami niż w rozpatrywanych wyżej przypadkach.

Przewodnictwo ciepła jest to zjawisko przepływu energii cieplnej pomiędzy nierównomiernie ogrzаныmi ciałami. W przypadku gazu polega ono na wzajemnym przekazie energii bezładnego ruchu cieplnego molekuł prowadzącym do wyrównywania się (uśredniania) tej energii. (temperatury).



Rys. 12.2 Płomień świecy

Dla ciał stałych w mikroskopowym opisie procesu przewodnictwa ciepła istotną rolę pełnią drgania sieci krystalicznej (fonony) i wzajemne oddziaływanie nośników prądu (gaz elektronowy). Przewodnictwo ciepła opisuje prawo wyrażone równaniem:

$$Q = -\lambda \text{grad } T \quad (12.5)$$

gdzie Q – wektor gęstości strumienia cieplnego, λ - współczynnik przewodzenia ciepła, T – temperatura. Dla ciał stałych $\lambda = \lambda_e + \lambda_s$ (odpowiednio współczynnik przewodzenia ciepła dla gazu elektronowego i sieci krystalicznej)

Jeżeli przeciwległe ścianki płyty z danego materiału o powierzchni S i grubości d mają odpowiednio temperatury T_1 i T_2 ($T_1 > T_2$), to następuje przepływ ciepła w kierunku powierzchni o niższej temperaturze. Ilość ciepła przepływająca w jednostce czasu w stanie stacjonarnym wyrazi się wzorem

$$Q = KS \frac{T_1 - T_2}{d_1} \quad (12.6)$$

K - współczynnik przewodności cieplnej, oznacza ilość ciepła przechodzącą w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni przy jednostkowym gradiencie temperatury (różnica temperatury 1 K przypada na jednostkę grubości).

Z mikroskopowego punktu widzenia przewodzenie ciepła w ciałach odbywa się poprzez drgania sieci krystalicznej i udział elektronów przewodnictwa, przy czym należy rozróżnić przewodnictwo cieplne metali i dielektryków. Drgania sieci krystalicznej tworzą pole sił o strukturze kwantowo-mechanicznej (kwant pola nazywany jest fononem).

W metalach istotne znaczenie ma ruch i wzajemne oddziaływanie elektronów z pasma przewodnictwa. W ogólnym przypadku można przyjąć, że współczynnik przewodności cieplnej metalu $K = K_s + K_e$, co oznacza że zależy od przewodnictwa związanego z drganiami sieci (K_s) i udziałem elektronów (K_e)

W zakresie wyższych temperatur K_e jest o około dwa rzędy większe od K_s z czego wynika, że metale są dobrymi przewodnikami ciepła.

Stosując do strumienia elektronów kinetyczną teorię gazów oraz zakładając, że ich średnia droga swobodna nie zależy od prędkości otrzymuje się prawo Wiedemanna-Franza, zgodnie z którym stosunek współczynnika przewodności cieplnej K do przewodnictwa elektrycznego σ jest liniową funkcją temperatury

$$\frac{K}{\sigma_e} = LT \quad (12.7)$$

L - wielkość stała.

Przewodnictwo cieplne dielektryków (izolatorów) jest uwarunkowane kolektywnymi drganiami atomów przybierającymi w kryształach postać fal ($K \sim K_s$). Atom, który wykonuje drgania wokół swego położenia równowagi z amplitudą zależną od temperatury oddziałuje okresową siłą na swoich sąsiadów powodując zwiększenie amplitudy ich drgań, które początkowo odpowiadały niższej temperaturze.

Gdy na przeciwległych powierzchniach płytki izolatora powstanie różnica temperatur to przepływ ciepła nastąpi wskutek przekazywania energii przez atomy o większej amplitudzie drgań będące od strony powierzchni o wyższej temperaturze. Kolektywne drgania atomów powodują fluktuacje gęstości. Fale niosące energię ruchu cieplnego po napotkaniu takiego obszaru ulegają rozproszeniu. Rozproszenie będzie tym większe im większa jest amplituda drgań atomów a zatem im wyższa temperatura. Prowadzi to w zakresie wy-

sokich temperatur do relacji pomiędzy współczynnikiem przewodności cieplnej i temperaturą

$$K \approx \frac{1}{T}. \quad (12.8)$$

Zależność powyższa została dla dielektryków sprawdzona doświadczalnie. Ciała o małej wartości współczynnika przewodności cieplnej ($10^{-1} - 10^{-2}$ J/msK) nazywają się izolatorami. Płytkę, której współczynnik przewodnictwa cieplnego K należy wyznaczyć ma kształt walca, w związku z czym zależność (12.5) można napisać w postaci

$$Q = K\pi r_1^2 \frac{T_1 - T_2}{d_1} \quad (12.9)$$

r_1 - promień badanej płytki.

Jak wynika ze wzoru (12.9), aby wyznaczyć współczynnik przewodności cieplnej płytki, należy zmierzyć jej grubość d_1 , promień r_1 , temperatury T_1 i T_2 przeciwległych powierzchni oraz ilość ciepła Q przechodzącą w jednostce czasu pomiędzy powierzchniami o tych temperaturach. Tej ilości ciepła nie można bezpośrednio zmierzyć, dlatego wyznacza się ją pośrednio metodą stygnięcia.

Układ do wyznaczania przewodności cieplnej (rys. 12.3) składa się z mosiężnej puszkii o grubym dnie (P_1), płytki mosiężnej P_2 i badanej płytki P. Puszka, oraz płytki badana i mosiężna są okrągłe. Płyty wraz z puszką ogrzewane są za pomocą ultratermostatu Hoepplera (rys.12.4).



Rys. 12.3 Układ płyt do pomiaru przewodności cieplnej izolatorów

Mosiężna płyta opiera się na trzech izolowanych nóżkach, na niej położona jest badana płytką, a następnie mosiężna puszka, która za pomocą gumowego węża połączona jest z ultratermostatem. W dnie puszki oraz w mosiężnej płycie znajdują się spojenia termopary (w metalowych oprawkach).



Rys. 12.4 Ultratermostat Hoepplera

Układ płyt ogrzewa się do momentu ustalenia się temperatury T_1 górnej płyty (puszki) i temperatury T_2 dolnej płyty. Można wówczas przyjąć, że temperatura górnej powierzchni płytki badanej jest równa temperaturze puszki T_1 , a temperatura dolnej powierzchni płyty badanej jest równa temperaturze dolnej powierzchni płyty mosiężnej T_2 . Ustalenie temperatur zachodzi wówczas, gdy ilość ciepła przewodzona przez badaną płytkę jest równa ilości ciepła traconej na skutek promieniowania i konwekcji przez dolną płytę. Aby określić tę ilość ciepła należy wyznaczyć szybkość stygnięcia dolnej płytki w pobliżu temperatury T_2 . W tym celu po wyjęciu badanej płytki ogrzewa się dolną płytkę do temperatury $T_2 + 5\text{ K}$, a następnie po zdjęciu puszki wyznacza się szybkość stygnięcia. W jednakowych odstępach czasu (co 5 s) mierzy się temperaturę do chwili, gdy temperatura dolnej płyty będzie równa $T_2 - 5\text{ K}$. Przebieg chłodzenia należy przedstawić graficznie odkładając na osi rzędnych temperatury T , na osi odciętych czas (t). Z wykresu można określić szybkość stygnięcia $n = \Delta T / \Delta t$ w pobliżu temperatury T_2 .

Jeżeli szybkość stygnięcia jest równa n , to ilość traconego ciepła w jednostce czasu jest równa $m \cdot c \cdot n$, przy czym m oznacza masę mosiężnej płyty, c - ciepło właściwe mosiądzu. Zakładając, że ilość ciepła przekazywanego do otoczenia jest proporcjonalna do powierzchni, można wyrazić ilość ciepła traconą przez jednostkę powierzchni płyty w jednostce czasu jako

$$Q_j = \frac{c \cdot m \cdot n}{2\pi r_2^2 + 2\pi d_2 r_2} \quad (12.10)$$

gdzie: r_2 - promień mosiężnej płytki, d_2 - grubość mosiężnej płytki.

Biorąc pod uwagę, że po ustaleniu się temperatur T_1 i T_2 ilość ciepła przewodzona przez badaną płytkę jest równa ilości ciepła traconej przez boczną i dolną powierzchnię płyty mosiężnej można napisać

$$K\pi r_1^2 \frac{T_1 - T_2}{d_1} = \frac{\pi r_2^2 + 2\pi r_2 d_2}{2\pi r_2^2 + 2\pi r_2 d_2} m \cdot c \cdot n, \quad (12.11)$$

skąd

$$K = \frac{m \cdot c \cdot n \cdot d_1 (r_2 + 2d_2)}{2\pi r_1^2 (T_1 - T_2) (r_2 + d_2)} \quad (12.12)$$

Wzór (12.12) został wyprowadzony, przy założeniu, że strumień ciepła jest prostopadły do powierzchni badanej płytki. Warunek ten jest spełniony jedynie częściowo ze względu na wypromieniowywanie ciepła z brzegów badanej płytki.

Szybkość stygnięcia mosiężnej płytki w stanie stacjonarnym może być nieco różna od wyznaczonej doświadczalnie, ze względu na większy wpływ prądów konwekcyjnych na stygnięcie górnej powierzchni płytki P_2 niż dolnej. Ponadto założenie proporcjonalności wypromieniowanego ciepła do wielkości powierzchni jest pewnym przybliżeniem.

Wykonanie pomiarów

- 1) Zmierzyć średnicę $2r_2$, grubość d_2 płytki mosiężnej oraz średnicę $2r_1$, i grubość d_1 , badanej płytki.
- 2) Zestawić układ pomiarowy w takiej konfiguracji jak na rys.12.3.
- 3) Ogrzać płyn w ultratermostacie do temperatury około 80°C .
- 4) Po ustaleniu się równowagi termodynamicznej odczytać temperaturę T_1 i T_2 .
- 5) Wyjąć badaną płytkę i ogrzać dolną płytę mosiężną do temperatury $T_2 + 5 \text{ K}$.

- 6) Zdjąć puszkę i co 5 s notować temperaturę płytki aż do momentu osiągnięcia przez nią temperatury $T_2-5\text{ K}$.

Opracowanie wyników

- 1) Zależność $T(t)$ wykreślić graficznie. Prędkość stygnięcia n określić na podstawie wykresu lub skorzystać z programu komputerowego „*Microsoft Excel*” oraz aproksymować krzywą na wykresie równaniem:

$$T = a + b \cdot t$$

- 2) oraz wyznaczyć szybkość stygnięcia n jako współczynnik kierunkowy prostej $n=b$. Na wykres nanieść w kilku punktach prostokąty błędów pomiaru.
- 3) Zmierzone wielkości podstawić do wzoru (12.12) i wyznaczyć współczynnik przewodności cieplnej (ciepło właściwe mosiądku $c = 384,56\text{ J/kgK}$, masa płyty jest na niej wygrawerowana).
- 4) Ocena błędów pomiarów.

Wzór (12.12) wyrażający współczynnik przewodności cieplnej może być zapisany w postaci

$$K = \frac{A}{T_1 - T_2}$$

gdzie

$$A = \frac{mcnd_1(r_2 + 2d_2)}{2\pi r_1^2(r_2 + d_2)}$$

Błąd wyznaczenia K ze względu na dokładność pomiaru r , r_1 , d_1 jest mały w związku z czym ocenę błędu pomiaru przeprowadza się biorąc uwagę dokładność pomiaru temperatur. Podstawiając $T = T_1 - T_2$ otrzymamy $K = A/T$, przy czym $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2$. Błąd względny pomiaru współczynnika przewodnictwa cieplnego wynosi $\Delta K/K = \Delta T/T$. Błąd pomiaru ΔT_1 i ΔT_2 należy oszacować uwzględniając zmiany wskazań miernika temperatury w czasie wykonywania pomiarów.

Tabela 12.1.

L.p	m kg	Δm kg	C J/kg K	r_1 m	Δr_1 m	r_2 m	Δr_2 m	d_1 m	Δd_1 m	d_2 m	Δd_2 m	n K/s	Δn K/s	K	ΔK	δK %
1																
2																
3																
4																

Literatura:

[1] Sz. Szczeniowski *Fizyka doświadczalna*, PWN Warszawa 1976, Rozdz. V

[2] J. J. Massalski, M. Massalska *Fizyka Dla Inżynierów*, WNT Warszawa 1980

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA ROZSZERZALNOŚCI CIEPLNEJ METODĄ ELEKTRYCZNĄ

Wprowadzenie

Ciała stałe zbudowane są z atomów umieszczonych w węzłach sieci krystalicznej. Atomy te wykonują drgania cieplne wokół położenia równowagi. Energia kinetyczna ruchów cieplnych przypadająca na jeden stopień swobody ruchu wynosi $E = \frac{1}{2}k_B T$. Jeżeli założymy, że drgania te są harmoniczne, tzn. że siła występująca między atomami jest wprost proporcjonalna do wychylenia $F = -kx$ (rys.13.1) to równanie ruchu ma postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0. \quad (13.1)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0). \quad (13.2)$$

Średnie położenie atomu wynosi $\langle x \rangle = \langle A \cdot \cos(\omega \cdot t) \rangle = 0$. A więc wzrost amplitudy drgań nie powoduje przesuwania atomów z położenia równowagi r_0 . Energia potencjalna jest symetryczna względem położenia równowagi i dana jest wzorem $E = \frac{1}{2}kA^2$ (rys. 13.1).

Nie pozwala to wyjaśnić rozszerzalności cieplnej ciał stałych. Aby można było wyjaśnić zjawisko rozszerzalności cieplnej trzeba przyjąć, że atomy wykonują drgania anharmoniczne pod wpływem siły:

$$F = -kx + skx^2. \quad (13.3)$$

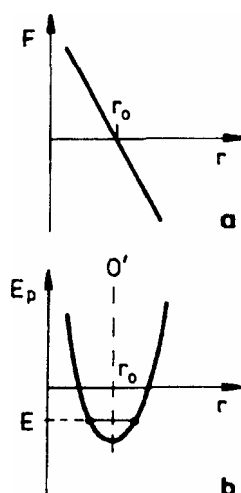
Daje to następujące równanie ruchu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x - s\omega_0^2 x^2 \quad (13.4)$$

gdzie: k – współczynnik sprężystości, s – stała anharmoniczności, ω_0 – częstość drgań.

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$x = A[(\cos(\omega \cdot t) - \frac{1}{6}s \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t))] + \frac{1}{2}s \cdot A^2 \quad (13.5)$$



Rys. 13.1 a) zależność siły od odległości między atomami w przybliżeniu harmonicznym
 b) zależność energii potencjalnej od odległości pomiędzy atomami w przybliżeniu harmonicznym.

Średnia czasowa położenia jest uzależniona od $\langle \cos(\omega t) \rangle = 0$ oraz $\langle \cos(2\omega t) \rangle = 0$:

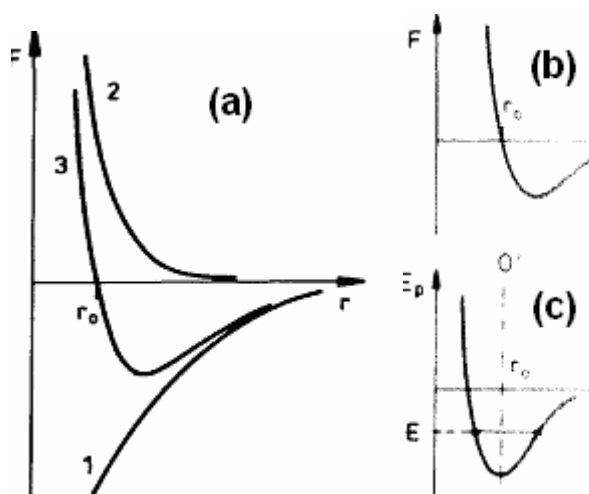
$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} s \cdot A^2 \quad (13.6)$$

W wyniku tego następuje przesunięcie środka drgań atomu proporcjonalne do kwadratu amplitudy drgań oraz stałej anharmoniczności.

Zjawisko rozszerzalności cieplnej polega na zmianie rozmiarów ciał spowodowanej zmianami temperatury. Zwiększonym rozmiarom ciała odpowiada w obrazie mikroskopowym większa średnia odległość między jego atomami. Wzrost średnich odległości międzyatomowych, towarzyszący wzrostowi temperatury ciała, znajduje uzasadnienie w charakterze wzajemnych oddziaływań między atomami tego ciała.

Doświadczenie wskazuje na istnienie między atomami ciał stałych, cieczy i gazów zarówno sił przyciągania, jak i odpychania. Zależność tych sił od wzajemnej odległości między atomami jest różna dla sił przyciągania i odpychania. Dla bardzo małych odległości przeważają siły odpychania, dla większych - przyciągania. Przykładowy przebieg zależności sił przyciągania F_1 i odpychania F_2 od wzajemnej odległości między dwoma oddziałującymi atomami przedstawiono na rys.13.2. Na rysunku tym pokazano również zależność siły wypadkowej $F = F_1 + F_2$, od odległości między atomami. Dla $r = r_0$ siły F_1 i F_2 równoważą się wzajemnie i siła wypadkowa $F = 0$. Gdy odległość między sąsiadującymi atomami staje się mniejsza od r_0 , przeważają siły odpychania; gdy odległość ta jest większa od r_0 - przeważają siły przyciągania. Odległość r_0 jest odległością między ato-

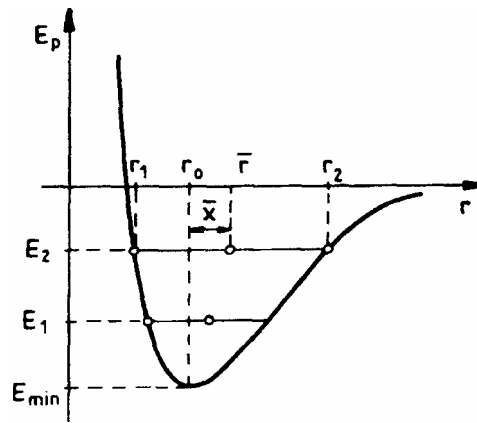
mami, odpowiadająca, stanowi równowagi, w jakiej znajdowałyby się atomy wówczas, gdyby nie było ruchu cieplnego zakłócającego równowagę.



Rys. 13.2 Siły oddziaływań międzyatomowych w funkcji odległości między cząsteczkami: 1 - siły przyciągania F_1 2 - siły odpychania F_2 , 3 - wypadkowa si F_3 .

Ze wzrostem temperatury zwiększa się amplituda drgań poszczególnych: atomów.

Gdyby wychylenia z położenia równowagi były w obydwie strony, jednakowe, średnia odległość między atomami byłaby niezależna od amplitudy drgań i równa r_0 . Samo zwiększenie amplitudy drgań nie prowadziłoby do zwiększenia objętości ciała. Sytuacja taka wystąpiłaby wówczas, gdy zależność siły wypadkowej działającej na atom wychylony z położenia równowagi od wielkości tego wychylenia była liniowa jak na rys. 13.1a. Wówczas krzywa przedstawiająca zależność energii potencjalnej od wzajemnej ich odległości między atomami byłaby symetryczna względem osi O' , przechodzącej przez punkt r_0 na rys. 13.2b. W rzeczywistości siła przywracająca atom do położenia równowagi nie ma przebiegu liniowego w otoczeniu punktu r_0 . Konsekwencją tego jest asymetria krzywej przedstawiającej zależność energii potencjalnej od wzajemnej odległości między atomami (rys. 13.2c). Atom o całkowitej energii równej E drga wokół punktu r_0 , któremu odpowiada minimum energii potencjalnej. Ruch atomu ograniczony jest barierą energii potencjalnej. Cząstka o energii całkowitej równej E nie może znaleźć się w obszarze, któremu odpowiada energia potencjalna większa od E .



Rys. 13.3 Energia potencjalna oddziaływań międzyatomowych w funkcji odległości między atomami

Jak widać z rysunków 13.2 i 13.3 maksymalne wychylenia atomu z położenia równowagi nie są symetryczne względem r_0 . Wraz ze wzrostem energii obszar dostępny dla danego atomu, zawarty między r_1 i r_2 poszerza się, co odpowiada większej amplitudzie drgań, a średnie położenie atomu r względem najbliższego sąsiada przesuwają się ku wartościom większym od r_0 . (rys. 13.3).

Przedstawiony obraz jest oczywiście bardzo uproszczony. Krzywe na rysunkach 13.1 i 13.3 przedstawiają siły i energie wzajemnych oddziaływań tylko dwu atomów i to w przypadku, gdy nie tworzą one wiązania chemicznego. Tymczasem charakter oddziaływań międzyatomowych w ciałach stałych i cieczech jest bardziej złożony. Każdy atom oddziałuje z wieloma atomami jednocześnie. Można jednak z pewnym przybliżeniem rozwiązać zagadnienie rozszerzalności cieplnej ciał, zakładając określoną zależność siły wzajemnego oddziaływania między atomami od wielkości wychylenia atomu z położenia równowagi.

Siła wzajemnego oddziaływania między atomami ciała stałego nie zależy od przemieszczenia x atomu z położenia równowagi według równania $F = -cx$ (c -współczynnik sprężystości), lecz zawiera także składniki nieliniowe, opisujące odstępstwa od harmonicznego charakteru drgań. Przyjmijmy w pierwszym przybliżeniu, że siła działająca na atom wychylony z położenia równowagi wyraża się zależnością.

$$F = -cx + bx^2 \quad (13.7)$$

Przyjmując opisaną równaniem (13.7) zależność siły oddziaływań międzyatomowych od wzajemnej odległości między atomami można pokazać, że w wyniku drgań cieplnych średnia odległość między atomami ciała stałego różni się od r_0 o wartość x , proporcjonalną do temperatury bezwzględnej ciała

$$\bar{x} = \frac{bkT}{c^2} \quad (13.8)$$

przy czym: k - stała Boltzmann, T - temperatura bezwzględna, b i c - współczynniki występujące w równaniu (13.7).

Zwiększenie średniej odległości między atomami ciała stałego podczas jego nagrzewania jest przyczyną liniowej i objętościowej rozszerzalności cieplnej ciała. W celu ilościowego ujęcia zjawiska rozszerzalności cieplnej ciał stałych wprowadza się pojęcie współczynnika rozszerzalności liniowej. Współczynnik rozszerzalności liniowej α można zdefiniować równaniem

$$\alpha = \frac{1}{r_0} \frac{d\bar{x}}{dT} \quad (13.9)$$

Wstawiając do równania (13.9) dx/dT obliczone z równania (13.8) uzyskamy

$$\alpha = \frac{bk}{r_0 c^2} \quad (13.10)$$

Obliczone w ten sposób dla różnych materiałów wartości współczynników α nie zależą od temperatury i są zgodne co do rzędu wielkości z wielkościami otrzymanymi doświadczalnie w dostatecznie wysokich temperaturach. Należy jednak pamiętać, że otrzymano je przy założeniu, że odchylenie od harmonicznego charakteru drgań opisuje składnik bx^2 w równaniu (13.7). Jeśli składnik anharmoniczny będzie zawierał także wyższe potęgi x , to charakter zależności współczynnika rozszerzalności liniowej od temperatury będzie bardziej złożony. W ciałach stałych, w których nie występują przejścia fazowe, wartości współczynników rozszerzalności termicznej maleją w miarę obniżania temperatury dążąc do zera w temperaturze zera bezwzględnego.

Podgrzewanie drutu

W doświadczeniu badamy rozszerzalność cieplną długiego drutu metalowego. Drut jest podgrzewany przez ciepło Joule'a-Lentza wydzielane w przewodzie przez przepływający prąd elektryczny. Wartość tego ciepła można policzyć ze wzoru:

$$Q = i^2 \cdot R \cdot t \quad (13.11)$$

Ilość ciepła wydzielana w jednostce czasu w przewodniku wynosi:

$$P = \frac{Q}{t} = i^2 \cdot \rho \frac{l}{S} \quad (13.12)$$

gdzie: i – natężenie prądu, ρ - oporność właściwa, l – długość przewodu, S – przekrój poprzeczny przewodu.

Gdy ustali się równowaga termodynamiczna moc wydzielana w przewodzie zostanie zrównoważona przez ciepło oddawane do otoczenia w jednostce czasu, wtedy temperatura przewodu przestanie się zmieniać.

Ciało o temperaturze wyższej od temperatury otoczenia stygnie, przekazując energię do otoczenia. Energia przekazywana jest poprzez konwekcję, przewodnictwo cieplne oraz promieniowanie. Ilość ciepła przekazywana do otoczenia w jednostce czasu (moc) poprzez konwekcję

$$\frac{dQ_k}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot k_k \cdot \Delta T, \quad (13.13)$$

gdzie: T - temperatura, $2\pi r l$ - powierzchnia stygnącego ciała, k_k – stała, ΔT - różnica między temperaturą ciała i temperaturą otoczenia T_o

Moc przekazywana do otoczenia na skutek przewodnictwa cieplnego

$$\frac{dQ_p}{dt} = K \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \Delta T, \quad (13.14)$$

gdzie K oznacza współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Moc tracona przez promieniowanie E_R jest różnicą między mocą wypromieniowaną przez ciało E_E i mocą pobraną z otoczenia E_A (otoczenie promieniując przekazuje energię rozpatrywanemu przez nas ciału). Moc traconą przez ciało (na skutek promieniowania) możemy opisać korzystając z prawa Stefana-Boltzmannna

$$\begin{aligned} \frac{dQ_R}{dt} &= \frac{dQ_E}{dt} - \frac{dQ_A}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot A \cdot \sigma_{SB} \cdot T^4 - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot A \cdot \sigma_{SB} \cdot T_o^4 \\ &\approx 8 \cdot T_o^3 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot A \cdot \sigma_{SB} \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (13.15)$$

gdzie: A – współczynnik absorpcji, σ_{SB} – stała Stefana-Boltzmannna. Sumując ciepła (mocy) występujące w równaniach (13.13, 13.14, 13.15) otrzymujemy w warunkach równowagi

$$\frac{dQ}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \Delta T (k_k + K + 8 \cdot T_o^3 \cdot A \cdot \sigma_{SB}) \quad (13.16)$$

Przyrównując moc traconą przez ciało z mocą wydzielaną na skutek przepływu prądu:

$$i^2 \cdot \rho \frac{l}{S} = 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \Delta T (k_k + K + 8 \cdot T_0^3 \cdot A \cdot \sigma_{SB}) \quad (13.17)$$

można znaleźć temperaturę równowagi termodynamicznej:

$$T = \frac{i^2 \cdot \rho}{2 \cdot \pi^2 \cdot r^3 \cdot l \cdot K_s} - T_0, \quad (13.18)$$

gdzie: - $K_s = k_k + K + 8 \cdot T_0^3 \cdot A \cdot \sigma_{SB}$ jest sumarycznym współczynnikiem przewodnictwa cieplnego.

Zasada pomiaru i układ pomiarowy

Badanie rozszerzalności cieplnej ciał stałych jest oparte zwykle na prawie opisującym zależność długości ciała od temperatury

$$l_T = l_o (1 + \alpha \Delta T), \quad (13.19)$$

gdzie: l_T - długość ciała w temperaturze T , l_o - długość ciała w temperaturze T_o , $\Delta T = T - T_o$, α - współczynnik rozszerzalności liniowej. Przekształcenie ostatniego równania do postaci

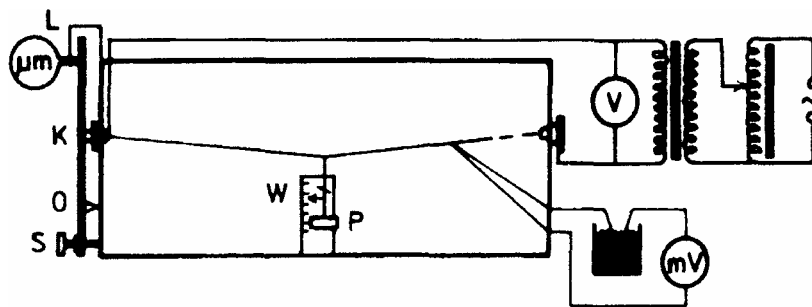
$$\frac{l_T - l_o}{l_o} = \alpha \Delta T \quad (13.20)$$

daje wygodną formę wyznaczenia współczynnika α na podstawie zmierzonej zależności względnego wydłużenia od przyrostu temperatury. Wartość współczynnika rozszerzalności liniowej jest bowiem równa tangensowi kąta nachylenia krzywej na wykresie, przedstawiającym zależność wydłużenia względnego $\Delta l/l_o$ od przyrostu temperatury ΔT .

Istota metod stosowanych do badania rozszerzalności liniowej sprowadza się do ogrzewania próbki i pomiaru jej wydłużenia. Przyrosty długości, spowodowane wzrostem temperatury ciał stałych są zwykle niewielkie. W celu zapewnienia odpowiedniej dokładności pomiaru stosuje się zwykle próbki w kształcie długich prętów oraz specjalne metody zapewniające dużą dokładność pomiaru przyrostu długości.

W omawianym ćwiczeniu próbka ma kształt drutu (rys.13.4). Podwyższenie temperatury drutu osiąga się w wyniku ogrzewania go prądem elektrycznym, który bezpośrednio przezeń przepływa. Temperaturę drutu mierzy się za pomocą termopary (miedz-konstantan), której jedno spojenie jest przymocowane do badanego drutu, drugie umieszczone w naczyniu Dewara, zawierającym mieszaninę lodu i wody. Siła termoelektryczna wytworzona w obwodzie termopary jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur

między spojeniami termopary. Wartości siły termoelektrycznej mierzone są za pomocą miliwoltomierza o bardzo dużym oporze wejściowym. Temperatura drutu musi być stała na całej długości. W miarę wzrostu długości drutu zwiększa się niebezpieczeństwo wystąpienia gradientu temperatury wzdłuż próbki. Aby wyeliminować niekorzystny wpływ przypadkowych ruchów powietrza, badany drut zamocowuje się w oszklonej gablocie.



Rys. 13.4 Schemat układu pomiarowego

Środek drutu jest obciążony ciężarkiem P , powodującym stałe jego naprężenie. W czasie ogrzewania drutu jego długość zwiększa się i ciężarek P opada (zwiększa się strzałka ugięcia drutu). Pomiaru wydłużenia dokonuje się czujnikiem mikrometrycznym z zastosowaniem odpowiedniej przekładni mechanicznej. Jeden koniec badanego drutu jest zamocowany w połowie długości ramienia dźwigni OL (rys. 13.6), którego koniec pozostaje w kontakcie z trzpieniem czujnika mikrometrycznego. Za pomocą śruby S można spowodować obrót dźwigni wokół osi O , aż do uzyskania pierwotnej strzałki ugięcia badanego drutu, co osiąga się przez sprowadzenie wskazówki W do wyjściowego położenia na skali. Ze względu na sposób zamocowania drutu do dźwigni (w połowie długości jej ramienia) rzeczywiste przyrosty długości badanego drutu są dwukrotnie mniejsze od odczytanych na skali czujnika mikrometrycznego.

Wykonanie pomiarów i opracowanie wyników

- 1) Zestawić układ pomiarowy według schematu przedstawionego na rys. 13.4 Zwiększając stopniowo natężenie prądu w obwodzie wykonać pomiary przyrostu długości drutu w funkcji temperatury w zakresie od pokojowej do 100°C co 5°C .
- 2) Sporządzić wykres zależności $\Delta l/l_0 = f(\Delta T)$.
- 3) Na wykres nanieść prostokąty błędów pomiarów.

4) Z nachylenia wykresu wyznaczyć współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej badanego materiału.

5) Oszacować błędy wyznaczenia współczynnika rozszerzalności termicznej.

Opracowując wyniki warto skorzystać z regresji liniowej, a obliczenia wykonać korzystając z programu komputerowego „**Microsoft Excel**” lub dowolnego arkusza kalkulacyjnego



Rys. 13.5 Sposób naprężenia drutu po ustaleniu się równowagi termodynamicznej



Rys.13.6 Sposób pomiaru wydłużenia drutu po ustaleniu się równowagi termodynamicznej

Literatura:

[1] C. Kittel, W. D.Knihht, M. A. Ruderman *Mechanika*, PWN 1973, rozdz. 7

[2] M. Skorko, *Fizyka*, PWN 1973, Część 2, rozdz. 14

WYZNACZANIE NAPIĘCIA POWIERZCHNIOWEGO CIECZY

Wprowadzenie

Ciecz jest to stan skupienia materii pośredni między ciałem stałym a gazem, w którym ciało fizyczne trudno zmienia objętość, a łatwo zmienia kształt. Wskutek tego ciecz przyjmuje kształt naczynia, w którym się znajduje, ale w przeciwieństwie do gazu nie rozszerza się, aby wypełnić je całe. Powierzchnia styku cieczy z gazem lub [próżnią](#) nazywa się powierzchnią swobodną cieczy. Istnienie cieczy ogranicza od strony niskich temperatur temperatura krzepnięcia, a od wysokich temperatura wrzenia. Czysta ciecz może istnieć w temperaturze niższej od temperatury krzepnięcia - nazywana jest wówczas cieczą przechłodzoną. Może ona także istnieć w temperaturze wyższej od temperatury wrzenia - jest wtedy nazywana cieczą przegrzaną. Ciecz przechłodzona lub przegrzana jest w nietrwałym stanie termodynamicznym i pod wpływem zanieczyszczenia lub zaburzenia odpowiednio krzepnie lub wrze. Niektóre substancje ciekłe o dużej lepkości nie krystalizują, pozostając w stanie amorficznym, które formalnie biorąc jest cieczą przechłodzoną.

Własności cieczy wynikają z zachowania się jej cząsteczek:

- podobnie jak w gazie, mają one pełną swobodę przemieszczania się w objętości zajmowanej przez ciecz,
- występują między nimi oddziaływania międzycząsteczkowe, które się jednak w obrębie objętości cieczy znoszą nawzajem.
- oddziaływania międzycząsteczkowe nie znoszą się na granicy cieczy z inną fazą na skutek czego występuje zjawisko zwane napięciem powierzchniowym.

Napięcie powierzchniowe jest to zjawisko występujące na styku powierzchni cieczy z ciałem stałym, gazowym, lub inną cieczą. Polega na powstawaniu dodatkowych sił działających na powierzchnię cieczy w sposób kurczący ją (dla powierzchni wypukłej przyciągający do wnętrza cieczy, dla wklęsłej odwrotnie). Zjawisko to ma swoje źródło w siłach przyciągania pomiędzy molekułami cieczy. Występuje ono zawsze na granicy faz termodynamicznych, dlatego zwane jest też "napięciem międzyfazowym".



Rys. 14.1 Owady pływające po powierzchni wody dzięki istnieniu napięcia powierzchniowego

Owady dzięki swoim nietypowym odnóżom biegają, utrzymując się równocześnie na błonie powierzchniowej wody. Odnóża tych owadów pokryte są niezwilżanymi włoskami, dlatego błonka powierzchniowa wody nie ulega przerwaniu, lecz ugięciu.

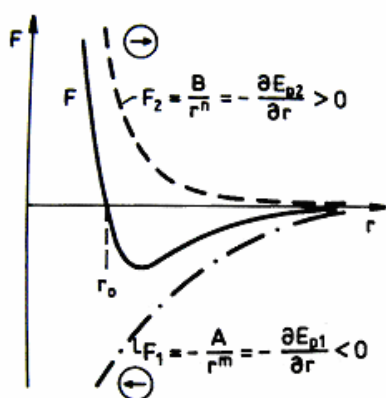
Efektom napięcia powierzchniowego jest np. utrudnione zanurzanie w cieczy ciał nie podatnych na zwilżanie tą cieczą (znika ono w momencie całkowitego zanurzenia takiego ciała). Innym zjawiskiem związanym z napięciem powierzchniowym jest podnoszenie się (np. woda) lub opadanie (np. rtęć) cieczy w wąskich rurkach, tzw. kapilarach – zjawisko to należy do zjawisk kapilarnych. Kapilara jest to bardzo cienka rurka, tak cienka, że praktycznie cała ciecz przepływająca przez nią znajduje się w polu oddziaływania sił związanych jej ściankami i cieczy bezpośrednio przylegającej do ścianek, w wyniku czego prędkość poruszania się cząsteczek silnie zależy od odległości od ścianek (profil paraboliczny).

Sily międzycząsteczkowe

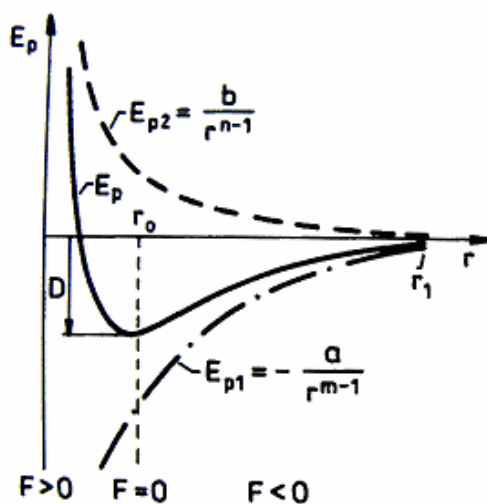
Cząsteczki składają się z atomów, te zaś z dodatnich jąder i ujemnych elektronów. Gdy dwie cząsteczki zbliżają się do siebie, pomiędzy ich elektronami i jądrami działają siły elektrostatyczne przyciągania i odpychania (siły kulombowskie), siły magnetyczne pomiędzy momentami magnetycznymi atomów i elektronów (moment magnetyczny $\mu = I S$) i siły elektryczne pomiędzy momentami elektrycznymi cząsteczek. W rezultacie siły działające pomiędzy cząsteczkami sprowadzają się do przyciągania ładunków znaku przeciwnego i sił odpychających pomiędzy ładunkami jednakowego znaku. Jeśli dwie obojętne cząsteczki zbliżamy do siebie i odległość między nimi jest dostatecznie mała, to rozkłady ładunków w tych cząsteczkach ulegają deformacji (polaryzacji) wówczas występuje mię-

dzy nimi przyciąganie elektryczne, ale z chwilą gdy tę odległość jeszcze bardziej zmniejszymy to zaczynają dominować siły odpychania, które są związane z oddziaływaniem ich powłok elektronowych.

Istnieje zatem taka odległość między cząsteczkami, przy której siły przyciągania i odpychania się równoważą, a zatem ich energia oddziaływania osiąga minimum (rys. 14.2a i b).



Rys. 14.2 a Zależność siły Van der Waalsa od odległości dla dwóch atomów



Rys. 14.2 b Zależność energii potencjalnej od odległości dla dwóch atomów

Siły oddziaływań międzycząsteczkowych gazów i cieczy nazywamy siłami Van der Waalsa i są one wypadkową sił elektrycznych i magnetycznych działających między cząsteczkami.

Siłę Van der Waalsa można zapisać w postaci

$$F = F_1 + F_2 = -\frac{A}{r^m} + \frac{B}{r^n} \quad (14.1)$$

gdzie r jest odległością między dwiema cząsteczkami

Pierwsza składowa odpowiada przyciąganiu, druga – odpychaniu. Zwykle m jest mniejsze od n , a więc siła odpychania szybciej maleje w miarę wzrostu odległości cząsteczek (atomów) niż siła przyciągania, wobec tego na większych odległościach cząsteczki się przyciągają, a przy znacznym zbliżeniu zaczynają się odpychać (rys. 14.2a).

Siłom przyciągania i odpychania odpowiadają energie potencjalne wyrażające się wzorami:

$$E_{p1} = \frac{-a}{r^{m-1}} \quad \text{I} \quad E_{p2} = \frac{b}{r^{n-1}} \quad (14.2)$$

Zatem wypadkowa energia potencjalna (rys. 14.4 b) jest równa

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{-a}{r^{m-1}} + \frac{b}{r^{n-1}} \quad (14.3)$$

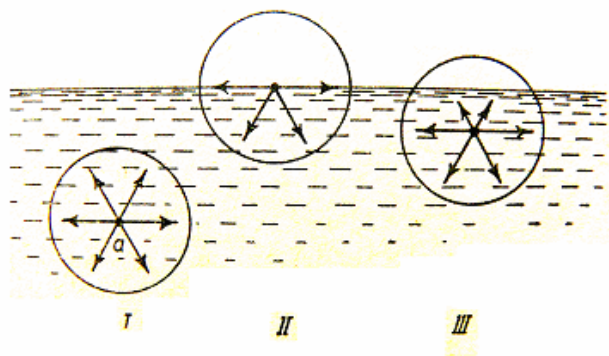
i jest ich sumą algebraiczną.

Dla odległości r_0 (zwanej długością wiązania) występuje stan równowagi, w którym energia potencjalna osiąga minimum, a siła $F(r_0) = 0$. Na odległościach mniejszych od r_0 dominują siły odpychania, zaś na odległościach większych od r_0 - siły przyciągające. Siły Van der Waalsa stają się znikomo małe w odległości rzędu 1 nm, która opisuje tzw. sferę oddziaływania cząsteczkowego. Przeważnie $m \approx 7$, zaś $n \approx 13$. A, B, a, b są pewnymi stałymi, charakterystycznymi dla określonego rodzaju cieczy.

Opis Van der Waalsa jest poprawny dla oddziaływań międzycząsteczkowych i częściowo do opisu oddziaływań w cząsteczce. Energia potencjalna dla odległości r_0 , której odpowiada punkt D nazywa się energią dysocjacji cząsteczki.

Siły przyciągania działające między cząsteczkami cieczy nazywamy siłami spójności lub kohezji. Działanie tych sił na cząsteczkę znajdującą się wewnątrz cieczy wzajemnie się kompensuje (rys. 14.3), natomiast cząsteczki znajdujące się na powierzchni cieczy podlegają tylko działaniu sił spójności z jednej strony od wnętrza cieczy i dlatego wypadkowa tych sił jest różna od zera i jest skierowana do wnętrza cieczy. Ta siła wypadkowa przesuwająca cząsteczki znajdujące się na powierzchni cieczy do jej wnętrza dotąd, dopóki powierzchnia cieczy nie przybierze rozmiarów najmniejszych. Siła ta powoduje powstanie tzw. napięcia powierzchniowego, które przeciwdziała wyrwaniu drobin z wnętrza cieczy. Gdy na ciecz nie działają siły zewnętrzne, np. grawitacji, przyjmuje ona kształt kuli, tzn.

kształt, dla którego stosunek powierzchni do objętości jest najmniejszy (obserwuje się to na pokładzie sztucznych satelitów ziemi).



Rys. 14.3 Siła spójności przy powierzchni cieczy

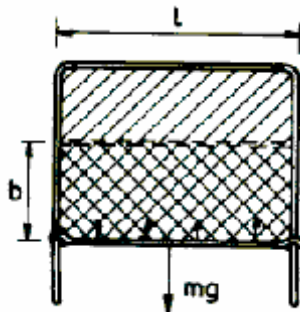
Wynika to z tego, że stanom równowagi trwałej układów odpowiada minimum energii potencjalnej, więc i ciecz swobodna przybiera taki kształt, który dla danej objętości zapewnia minimalną powierzchnię, a więc także minimalną wartość energii powierzchniowej. Określona objętość ciała ma najmniejszą powierzchnię wtedy, gdy ciało ma kształt kuli.

Przeniesienie cząsteczek z wnętrza na powierzchnię cieczy jest związane z wykonaniem pracy przeciw wypadkowej sił międzycząsteczkowych. Cząsteczki na powierzchni cieczy mają większą energię potencjalną niż cząsteczki wewnątrz cieczy. Ilość energii powierzchniowej jest w danych warunkach proporcjonalna do wielkości powierzchni. *Stosunek energii powierzchniowej do wielkości powierzchni nazywamy współczynnikiem napięcia powierzchniowego σ . Jest on liczbowo równy pracy jaką należy wykonać powiększając izotermicznie powierzchnię cieczy o 1 m^2 .* Współczynnik σ jest charakterystyczny dla danego rodzaju cieczy, a ściślej mówiąc jest charakterystyczny dla danej pary środowisk: cieczy i znajdującego się nad nim gazu.

Definicję tę zrozumiemy lepiej na przykładzie. Jeżeli na ramce z drutu (rys. 14.4), której część o długości l jest ruchoma, utworzymy błonkę mydlaną przez zanurzenie jej w roztworze mydła, to zauważymy, że napięcie powierzchniowe powoduje zmniejszenie powierzchni błonki. Pod działaniem ciężaru części ruchomej ramki z jednej strony i sił

napięcia powierzchniowego błonki z drugiej strony, część ruchoma ramki zajmie położenie równowagi oznaczone na rys. 14.4 linią przerywaną.

Powierzchnia błonki jako granica dwóch faz (cieczy i gazu) stanowi podwojoną wartość powierzchni zakreślonej liniami ukośnymi.



Rys. 14.4 Ramka z błoną mydlaną

Gdy do części ruchomej ramki podwiesimy ciężarek, jego ciężar mg spowoduje przesunięcie części ruchomej o b . W ten sposób zostanie wykonana praca $W = mgb$, pod wpływem której powierzchnia błonki powiększy się o $2s = 2lb$ (bo błonka ma dwie powierzchnie). Z definicji napięcia powierzchniowego wynika, że stosunek pracy W do powierzchni $2s$ jest cechą charakterystyczną dla danej granicy faz i jest równy

$$\sigma = \frac{W}{2s} = \frac{mgb}{2lb} = \frac{mg}{2l} \quad (14.4)$$

Z ostatniej zależności wynika, że współczynnik napięcia powierzchniowego jest także równy stosunkowi siły ciężkości mg do długości elementu brzegu cieczy $2l$. W układzie SI wymiarem napięcia powierzchniowego jest $[\sigma] = \text{N/m} = \text{J/m}^2$.

Napięcie powierzchniowe silnie zależy od temperatury cieczy, maleje ze wzrostem temperatury i osiąga wartość zero w temperaturze krytycznej lub kilka stopni poniżej niej. Zależność tą opisuje nam wzór **Eötvösa**:

$$\sigma V^{\frac{2}{3}} = k(T_c - T) \quad (14.5)$$

gdzie: V - objętość molowa substancji, T_c - temperatura krytyczna, k - współczynnik zależny od rodzaju substancji. Przykładowo dla wody $k = 1.03 \text{erg}/^\circ\text{C}$, $V = 18 \text{ ml/mol}$, a $T_c = 374^\circ\text{C}$.

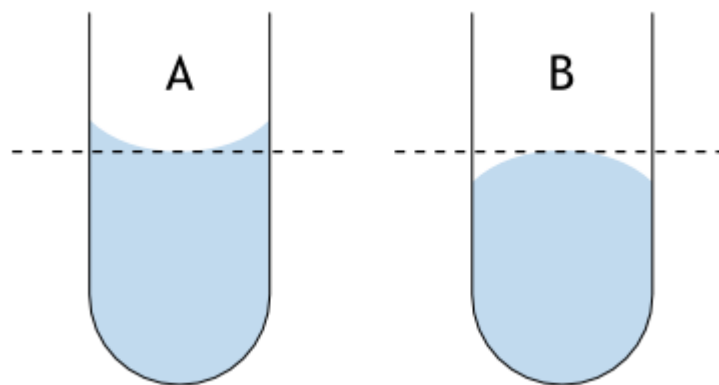
Menisk jest to powierzchnia rozdzielająca od siebie dwie fazy – gaz i ciecz lub dwie, nie mieszające się z sobą ciecze. Powierzchnia swobodna cieczy zakrzywia się w pobliżu miejsca zetknięcia się cieczy z ciałem stałym, np. ze ścianką naczynia i tworzy tak zwany

menisk (rys. 14.5). Menisk przybiera kształt płaskiej powierzchni, wycinka lub hiperboloidy, albo też w szczególnych przypadkach kombinacji wycinka sfery i hiperboloidy. Kształt menisku i kierunek jego wypukłości zależy od wypadkowej energii powierzchniowej obu stykających się faz. W przypadku układu - ciecz-gaz od wypadkowej energii powierzchniowej ścianek naczynia i napięcia powierzchniowego lustra cieczy, a więc od rodzaju cieczy. Oprócz własności samej cieczy kształt menisku zależy także od rozmiarów lustra cieczy, który wynika z przekroju naczynia.

Dla układu gaz/ciecz w rurce z materiału trudno zwilżanego przez tą ciecz (np. rtęć w rurce szklanej) ciecz tworzy menisk wypukły. Jeżeli ciecz odpowiednio dobrze zwilża materiał rurki (np. woda w rurce szklanej) tworzy się menisk wklęsły. W ostatnim przypadku, przy bardzo wąskim przekroju rurki (różnym dla każdego układu ciecz-materiał ścianek) pojawia się efekt kapilarny, polegający na tendencji do pełnienia cieczy po ściankach, która jest na tyle silna, że przewyżcza siłę grawitacji.

Przykłady:

- 1) Menisk wody w rurce szklanej jest wklęsły (woda dobrze zwilża szkło) i słup cieczy jest podnoszony na wysokość zależną od jej średnicy, menisk rtęci w rurce szklanej jest wypukły (rtęć nie zwilża szkła) i jest obniżany w porównaniu z powierzchnią cieczy swobodnej (rys. 14.5).

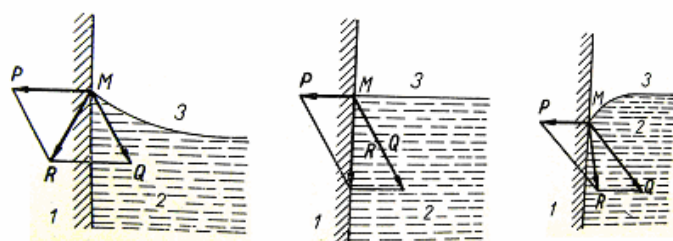


Rys. 14.5 Menisk w kapilarze
A - wklęsły, B - wypukły.

- 2) Przepływ krwi przez naczynia włoskowate. Krew przez naczynia włoskowate (zwane też kapilarnymi) dociera do najodleglejszych tkanek bez konieczności stosowania bardzo wysokich ciśnień.

- 3) Przepływ wody w naczyniach roślin - zjawiska kapilarne umożliwiają rośnięcie drzew na wysokość większą niż 10 m (bez zjawiska kapilarnego słup wody w naczyniach ulegałby przerwaniu).
- 4) Nasiąkanie tkanin, bibuły, papieru, itp. - ciecz utrzymywana jest pomiędzy gęsto umieszczonymi cienkimi włóknami za pomocą sił kapilarnych.

Pory gruntu tworzą naczynia kapilarne, w których woda podnosi się ponad zwierciadło wody podziemnej. Wysokość podnoszenia zależy bezpośrednio od frakcji gruntu (mniejsze ziarna tworzą kanaliki o mniejszej średnicy).



Rys. 14.6 Kształt swobodnej powierzchni cieczy w zależności od kierunku siły wypadkowej R

Menisk jest wynikiem rozkładu sił, które działają na cząsteczki cieczy znajdujące się w pobliżu granic trzech faz: cieczy, gazu i ciała stałego. Na cząsteczki cieczy znajdujące się na jej powierzchni i przylegające bezpośrednio do ściany naczynia (cząsteczka M na rys. 14.6) działa siła przylegania (adhezji) P skierowana prostopadle do ściany, oraz siła Q pochodząca od cząsteczek cieczy i skierowana w głąb cieczy. Powierzchnia swobodna cieczy ustawia się zawsze prostopadle do siły wypadkowej R sił P i Q. W zależności od kierunku siły wypadkowej R, powierzchnia swobodna cieczy może być wklęsła, płaska lub wypukła.

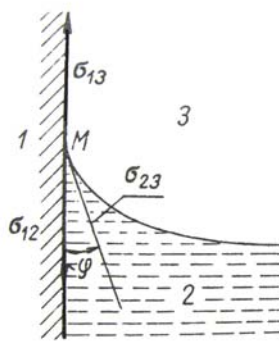
Jeżeli oznaczymy napięcie powierzchniowe na powierzchni granicznej ciecz-gaz przez $\sigma_{2,3}$, na powierzchni granicznej ciecz-ciało stałe przez $\sigma_{1,2}$, oraz na powierzchni granicznej gaz-ciało stałe symbolem $\sigma_{1,3}$ (rys. 14.7), to jak można wykazać, kąt φ między ścianą naczynia przylegającą do cieczy, a styczną do powierzchni cieczy zwany kątem przylegania możemy wyznaczyć z zależności

$$\cos \varphi = \frac{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}}{\sigma_{2,3}} \quad (14.6)$$

Z warunku $-1 < \cos \varphi \leq 1$ wynika, że

$$|\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}| < \sigma_{2,3} \quad (14.7)$$

Ze wzoru (14.7) wynika, że gdy $\sigma_{1,3} = \sigma_{1,2}$ i $\cos \varphi = 0$ to $\varphi = 90^\circ$ i powierzchnia jest płaska. Jeśli zaś $\sigma_{1,3} > \sigma_{1,2}$, ale $\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2} < \sigma_{2,3}$, to kąt zetknięcia φ jest kątem ostrym i obserwujemy menisk wklęsły, Taki menisk np. tworzy woda na granicy ze szkłem.



Rys. 14.7 Napięcie powierzchniowe działające na cząsteczkę cieczy na powierzchni

Mówimy wówczas, że ciecz zwilża ciało stałe. Gdy natomiast $\sigma_{1,3} < \sigma_{1,2}$ to φ jest kątem rozwartym, menisk jest wypukły i nie ma zwilżania. W granicznym przypadku, gdy $\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2} = \sigma_{2,3}$, kąt φ jest równy zero.

Jeśli ciecz znajduje się w cienkiej rurce (kapilarze) o promieniu r , to zakrzywioną powierzchnię cieczy można w dobrym przybliżeniu traktować jako wycinek powierzchni kuli o promieniu R , przy czym jak widać z rys. 14.8 zachodzi zależność

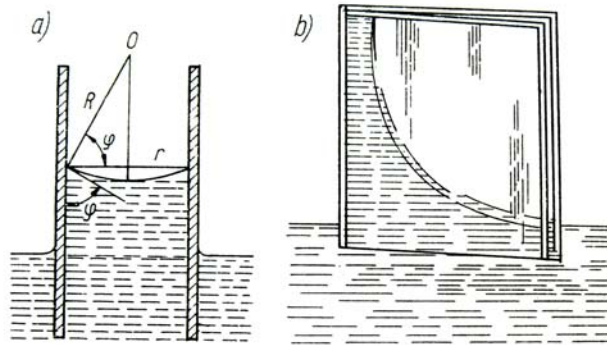
$$r = R \cos \varphi \quad (14.8)$$

Ta zakrzywiona powierzchnia kulista cieczy wywiera ciśnienie odwrotnie proporcjonalne do promienia krzywizny lustra cieczy. Uwzględniając zależność 14.8 ciśnienie to może być zapisane w postaci

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma \cos \varphi}{r} \quad (14.9)$$

Zależność ta wynika bezpośrednio z prawa Laplace'a, według którego dzięki istnieniu napięcia powierzchniowego pod zakrzywioną powierzchnią cieczy działa dodatkowe ciśnienie

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14.10)$$



Rys. 14.8 Wznoszenie się cieczy w naczyniach włoskowatych
 a) wysokość wzniesienia w rurce kapilarnej
 b) wznoszenie się cieczy w szczelinie między dwiema płytkami.

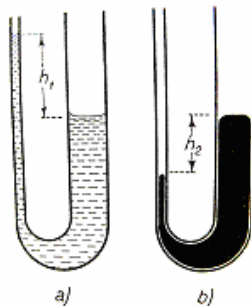
przy czym R_1 i R_2 są promieniami krzywizn prostopadłych względem siebie przekrojów normalnych, dla których promienie krzywizny przyjmują wartości ekstremalne. Promienie te uważamy za dodatnie, gdy środki krzywizn przekrojów normalnych znajdują się po stronie cieczy, natomiast za ujemne, jeżeli środki znajdują się po stronie przeciwnej. W związku z tym, dla menisku wklęsłego $\Delta p < 0$, a dla menisku wypukłego $\Delta p > 0$. Dodatkowe ciśnienie Δp jest zawsze wywierane w kierunku środka krzywizny menisku. Gdy $R_1=R_2=R$ (wycinek powierzchni kuli), wtedy otrzymujemy zależność (14.9). Jeśli menisk cieczy jest wklęsły, to ciśnienie to jest skierowane ku górze, natomiast dla menisku wypukłego ciśnienie skierowane jest w głąb cieczy.

Wobec występowania ciśnienia wywieranego przez zakrzywioną powierzchnię cieczy, poziom cieczy w rurce kapilarnej może różnić się znacznie od poziomu cieczy w dużym naczyniu (rys. 14.9). Wysokość h_1 wzniesienia lub h_2 obniżenia możemy znaleźć z warunku równowagi ciśnienia hydrostatycznego i ciśnienia wywieranego przez powierzchnię zakrzywioną.

$$\Delta p = \rho g h_1 = \frac{2\sigma \cos \varphi}{r}$$

skąd

$$h_1 = \frac{2\sigma \cos \varphi}{\rho g r} \quad (14.11)$$



Rys. 14.9 Zjawisko włoskowatości

Jeśli r jest małe, to h_1 może osiągać bardzo duże wartości.

Napięcie powierzchniowe w znacznym stopniu zależy od temperatury oraz od fazy, z którą styka się ciecz, dlatego podczas podawania konkretnych wartości napięcia powierzchniowego należy podać fazę, z którą dana ciecz się styka oraz temperaturę cieczy. Na ogół napięcie powierzchniowe maleje liniowo wraz ze wzrostem temperatury.

Wszystko co wyżej opisano dotyczy przypadku, gdy ciecz stanowi tzw. czystą fazę tzn. ciecz jednoskładnikową. Gdy mamy do czynienia z cieczą dwu lub wieloskładnikową występujące zjawiska są bardziej złożone.

Opis ćwiczenia

Z rozważań przeprowadzonych wyżej wynika, że działające między cieczą i ciałem stałym siły przylegania zależą przede wszystkim od rodzaju ciała.

Dla wody, szkła i metali przewyższają one znacznie siły spójności. Z tego powodu woda pokrywa cienką warstwą ich powierzchnie. Zjawisko to wykorzystuje się do pomiaru napięcia powierzchniowego.

Istnieje kilka metod pozwalających wyznaczyć napięcie powierzchniowe cieczy. Najczęściej spotykane to tzw. metoda odrywania i stalagmometru. Na rys. 14.10 przedstawiono ogólny widok aparatury pomiarowej.



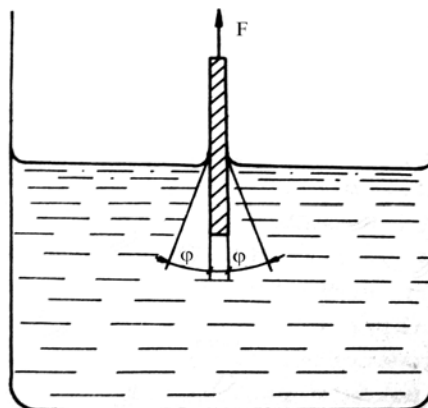
Rys. 14.10 Ogólny widok aparatury pomiarowej

Pomiar napięcia powierzchniowego metodą odrywania

Do pomiarów używamy płytek metalowych wykonanych z materiałów, które są dobrze zwilżane przez badaną ciecz. Aby wyciągnąć płytkę z cieczy musimy użyć siły F , co najmniej równej sumie sił ciężkości płytki Q i siły pochodzącej od napięcia powierzchniowego F_n potrzebnej do oderwania płytki od powierzchni cieczy. Zachodzi zatem oczywista zależność

$$F = F_n + Q \quad (14.12)$$

Uwzględniając rys.14.11 oraz [4] możemy zapisać



Rys.14.11 Zwilżenie powierzchni metalu przez ciecz.

$$F_n = 2 \sigma (l+d) \cos \varphi \quad (14.13)$$

gdzie: σ - napięcie powierzchniowe,

l - długość zanurzonej części płytki w momencie odrywania,

d - grubość płytki,

φ - kąt między powierzchnią płytki i płaszczyzną styczną do powierzchni cieczy.

W przypadku cieczy zwilżającej metal, w wyniku działających sił adhezji (przylegania) cząsteczki cieczy przylegają do metalu i kąt φ jest w przybliżeniu równy zeru, a więc $\cos \varphi \approx 1$, wówczas zależność (14.13) po wykorzystaniu (14.12) przybiera postać

$$\sigma = \frac{F - Q}{2(l + d)} \quad (14.14)$$

Jeśli grubość płytki d jest mała w porównaniu z długością jej krawędzi l to d można pominąć i otrzymujemy

$$\sigma = \frac{F - Q}{2l} \quad (14.15)$$

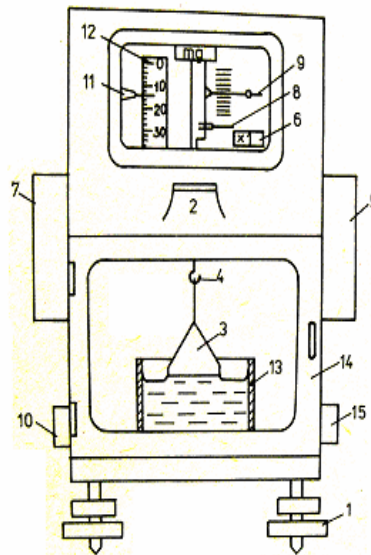
Wykonanie pomiarów

Do pomiaru siły F i Q używamy wagi torsyjnej rys. 14.11 i stalagmometru rys.14.12 do pomiaru siły Q . Siła ciężkości badanego ciała Q wytwarza pierwotny moment skręcający wagi torsyjnej, który działa na jeden koniec pręta. Przez pokręcenie pokrętła połączonego z bębniem skali, które działa na drugi koniec pręta, możemy wytworzyć moment kompensacyjny skierowany przeciwnie do pierwotnego. Jeśli te momenty kompensacyjne będą sobie równe, wówczas środkowa część pręta, do której przymocowana jest ruchoma wskazówka nie ulegnie skręceniu i wskazuje zero. Wtedy to siła kompensacyjna będzie równała się sile ciężkości wytwarzającej pierwotny moment pręta. Siła kompensacyjna jest różna dla różnych kątów skręcenia i jej wartość jest zaznaczona na bębnie.

Przed przystąpieniem do pomiarów sprawdzić na poziomicy 2 stan wypoziomowania wagi i ewentualnie przeprowadzić odpowiednie korekty śrubami nastawczymi 1.

1. Suwmiarką zmierzyć długość i grubość tej części badanej płytki, która ma być zanurzona w cieczy.
2. Odtłuścić płytkę denaturatem i wysuszyć.
3. Wysuszoną płytkę 3 zawiesić bardzo ostrożnie na haczyku wagi torsyjnej i wyznaczyć jej ciężar. W tym celu należy:
 - przełącznik zakresów pomiarowych 5 ustawić w położeniu x 1 (okienko 6),

- pokrętkiem 7 obracać w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara aż do momentu, gdy ruchoma wskazówka 8 ustawi się dokładnie na czerwonej linii,



Rys. 14.11 Schemat układu pomiarowego metodą odrywania

- pokrętkiem 10 sprawdzić czy uda nam się ustawić położenie stałej wskazówki 11 na zero na tle ruchomej skali 12, jeśli nie to stałą wskazówkę stawić w wygodnym do odczytu miejscu i jej nie ruszać do końca pomiarów. Ciężar płytki Q wskazuje stała wskazówka na ruchomej skali 12.
4. Zmierzyć kilkakrotnie siłę ciężkości płytki Q.
 5. Naczynko 13 z badaną cieczą podsunąć pod płytkę tak aby była ona nieco zanurzona w cieczy.
 6. Zamknąć osłonę szklaną 14 i pokrętkiem 7 obracać w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara do momentu, aż płytka oderwie się od powierzchni cieczy.
 7. Zmierzyć siłę odrywania F, odczytując położenie wskazówki 11 na tle ruchomej skali 12.
 8. Pomiary wykonać kilkakrotnie.

9. Po każdym pomiarze siły odrywania F i siły ciężkości Q pokręćło 7 obrócić w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, aż do oporu, przygotowując w ten sposób wagę do wykonania następnego pomiaru.
10. Zmierzyć temperaturę badanej cieczy.
11. Wyniki pomiarów zapisać w tabeli.
12. Obliczyć wartości napięcia powierzchniowego badanych cieczy i umieścić je w tabeli.
13. Obliczyć błędy pomiarowe metodą różniczki zupełnej.

Uwaga! Wielkości F i Q są mierzone w mG i należy je przeliczyć na jednostki układu SI. W tym celu przyjąć, że $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Tabela pomiarów

L.p.	F[mG]	F_{sr} [N]	Q[mG]	Q_{sr} [N]	l[m]	l_{sr} [m]	σ_{sr} [N/m]	Δl [m]	ΔF [N]	ΔQ [N]	$\Delta\sigma/\sigma$ [%]

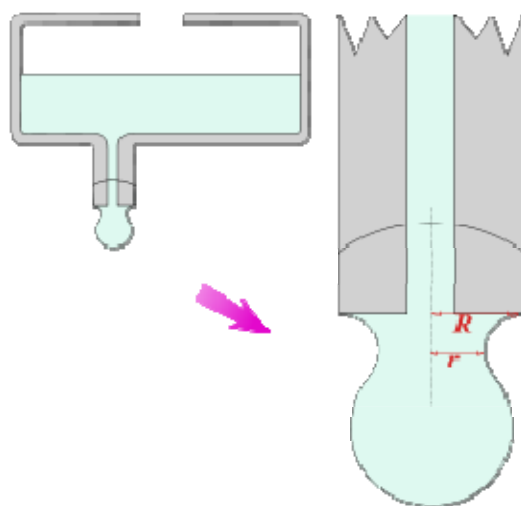
Pomiar napięcia powierzchniowego metodą stalagmometru.

Opis ćwiczenia

Metoda stalagmometryczna opiera się na wypływie kroplel cieczy pod wpływem własnego ciężaru z pionowej kapilary. Ciecz przepływa powoli przez kapilarę pod wpływem siły ciężkości, tworząc na jej końcu kroplę rys. 14.10 i 14.12. Kropla znajduje się pod działaniem siły ciężkości oraz przeciwnie skierowanych sił napięcia powierzchniowego, działających wzdłuż zewnętrznego obwodu rurki włoskowatej o promieniu R .

Przed oderwaniem się od podstawy kapilary kropla ulega przewężeniu, którego obwód jest okręgiem o promieniu r . Odrywa się wtedy gdy jej ciężar $P = mg$, zrównoważy siłę napięcia powierzchniowego skierowanego ku górze które, zgodnie z zależnością 14.4 możemy zapisać

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r} \quad (14.16)$$



Rys. 14.12 Schemat stalagmometru

Promień przewężenia jest nieznan. Należy go zmierzyć bezpośrednio albo też wyznaczyć pośrednio. Pomiar bezpośredni przeprowadzamy za pomocą mikroskopu, a pośredni polega na zastąpieniu promienia przewężenia r promieniem zewnętrznym kapilary R (rys. 14.12), oraz na wprowadzeniu pewnego współczynnika k , który uwzględnia nam kształt kropli w momencie oderwania się jej od kapilary. Wtedy otrzymujemy $r = R/k$

Czyli

$$\sigma = \frac{mg}{R} \frac{k}{2\pi} \quad (14.17)$$

Podstawiając $k/2\pi = K$ otrzymujemy ostatecznie

$$\sigma = \frac{mg}{R} K \quad (14.18)$$

Aby określić współczynnik K musimy najpierw wyznaczyć wyrażenie,

$$U = \frac{m}{\rho_T R^3}$$

w którym m jest masą pojedynczej kropli, a ρ_T jest gęstością cieczy w temperaturze pomiaru. Współczynnik K jest funkcją zależną od wyrażenia U i jest podana w tablicy....

Wykonanie pomiarów i opracowanie wyników

1. Dobrze osuszone małe naczynko szklane zważyć na wadze analitycznej.
2. Nalać badaną ciecz do zbiorniczka stalagmometru.
3. Odczytać temperaturę badanej cieczy.
4. Do naczynka wprowadzić 50 kropeł badanej cieczy.

5. Zważyć naczynko z 50 kroplami badanej cieczy i wyznaczyć masę jednej kropli cieczy.
6. Wyznaczyć gęstość badanej cieczy doświadczalnie lub odczytać jej wartość w odpowiednich tablicach.
7. Pomiary wykonać co najmniej trzykrotnie, obliczając dla każdego z nich wartość U .
8. Z odpowiedniej tablicy odczytać odpowiadającą danej wartości U wartość współczynnika K . Dokładną wartość K wyznaczyć stosując interpolację liniową. W tym celu z tablicy odczytać z nadmiarem i niedomiarem wartości U i odpowiadające im wartości K .
9. Korzystając z zależności (14.18) obliczyć napięcie powierzchniowe odpowiadające każdej wartości U .
10. Wyniki pomiarów umieścić w poniższej tabeli.
- 11.

Tabela pomiarów

L.p.	m_1	m_2	Δm	t^0 [c]	ρ_T	U	K	σ	σ_{sr}	$\Delta\sigma/\sigma$
1										
2										
3										
4										

Ocena błędów

Dokładność pomiaru masy na wadze analitycznej należy przyjąć $5 \cdot 10^{-7}$ kg, $\Delta m = 10^{-6}$ kg dla 50 kropli, a dla jednej kropli $\Delta m = 2 \cdot 10^{-8}$ kg. Błąd względny pomiaru napięcia powierzchniowego obliczyć metodą pochodnej logarytmicznej. Przyjąć $g = 9.8112 \text{ m/s}^2$.

Literatura

- [1] Sz. Szczeniowski Fizyka doświadczalna t. 2. PWN Warszawa 1980
- [2] J. Massalski, M. Massalska Fizyka dla inżynierów t. 1. WNT Warszawa 1980
- [3] B. Jaworski, A. Dietław t. 1. PWN Warszawa 1969
- [4] L. Lewowska, S. Kuźmiński, R. Poprawski Cwiczenia laboratoryjne z fizyki, Oficyna Wyd. Pol. Wrocław. 2004
- [5] L.D. Landau, A.I. Achijezer, E.M. Lifszic, Fizyka Ogólna. WNT Warszawa 1968

ELEKTRYCZNOŚĆ
I
MAGNETYZM

SPRAWDZENIE PRAWA OHMA DLA PRĄDU STAŁEGO

Wprowadzenie

Prawo Ohma wiąże ze sobą trzy wielkości, natężenie prądu elektrycznego I , napięcie U , opór elektryczny R . Prąd elektryczny jest to uporządkowany ruch ładunków elektrycznych przepływających przez przekrój poprzeczny przewodnika pod działaniem pola elektrycznego.

Przewodnik jako ośrodek przewodzący prąd charakteryzowany jest przez stałe materiałowe:

- opór właściwy (rezystywność) ρ ,
- przewodność właściwą (konduktywność) γ ,

Rozróżniamy trzy rodzaje prądów:

- prąd przewodzenia,
- prąd unoszenia (konwekcji),
- prąd przesunięcia.

Wśród ośrodków jako przypadek wyidealizowany wyróżniamy dielektryk idealny, który nie zawiera ładunków swobodnych, a więc jego przewodność właściwa γ jest zerem, a opór właściwy ρ nieskończenie wielki. W takim ośrodku płynie prąd przesunięcia.

Wyjątkiem wyidealizowanego środowiska są przewodniki, zawierają one ładunki swobodne, a więc ich przewodność właściwa γ jest różna od zera, i płynie w nich prąd przewodzenia.

Ładunki elektryczne są ściśle związane z atomową budową materii. Protony zawarte w jądrach atomowych mają ładunek dodatni, a elektrony znajdujące się w powłokach atomów – ładunek ujemny. W ciele elektrycznie obojętnym suma algebraiczna ładunków dodatnich i ujemnych jest równa zeru. Wynika stąd, że ładunki protonu i elektronu są różne co do znaku. Ładunek elektryczny o najmniejszej wartości nazywamy ładunkiem elementarnym i oznaczamy literą e , wartość ładunku elementarnego wynosi $e = 1,603 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ gdzie:

C – kulomb jednostka ładunku elektrycznego.

Kulomb jest to ładunek przenoszony przez prąd o natężeniu 1 ampera w czasie 1 sekundy

$$1C = 1A \cdot 1s$$

Każdy dowolny ładunek Q jest całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego $Q = ne$ (n - liczba naturalna).

Aby w przewodniku płynął prąd muszą być spełnione dwa warunki:

- istnienie wewnątrz przewodnika nośników ładunku elektrycznego, posiadających swobodę ruchu, w metalach nośnikami ładunku są elektrony,
- występowanie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika, siły tego pola działają na nośniki ładunku powodując ich uporządkowany ruch.

Przepływ prądu elektrycznego powstaje pod wpływem działania pola elektrycznego \vec{E} , na ładunki swobodne Q .

Prąd elektryczny charakteryzujemy za pomocą wielkości zwanej natężeniem prądu i , którą określamy jako wielkość skalarną, będącą granicą stosunku ładunku elektrycznego ΔQ , przepływającego przez przekrój przewodnika w bardzo małym odstępie czasu Δt , do tego czasu, gdy $\Delta t \rightarrow 0$

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (21.1)$$

W przypadku ogólnym natężenie prądu $I = I(t)$ jest funkcją czasu. Przyjmując

$\frac{dQ}{dt} = \text{const.}$, mamy wówczas przypadek prądu niezmiennego w czasie, który nazywamy

prądem stacjonarnym lub częściej stałym, któremu odpowiada równość $I(t) = \text{const.}$

Natężenie prądu stałego określamy za pomocą wyrażenia

$$I = \frac{Q}{t} \quad (21.2)$$

i definiujemy:

natężeniem prądu I nazywamy stosunek ładunku Q przepływającego przez dany przekrój poprzeczny S przewodnika do czasu przepływu t tego ładunku. Jednostką natężenia prądu jest amper – A.

Prąd płynący przez przewodnik, w poszczególnych punktach przekroju poprzecznego posiada rozkład nierównomierny. Dlatego do charakterystyki prądu elektrycznego wprowadzamy pojęcie gęstości prądu j , które określimy zależnością

$$j = \frac{dI}{dS} \quad (21.3)$$

gdzie:

dS – jednostkowy element poprzecznego przekroju przewodnika,

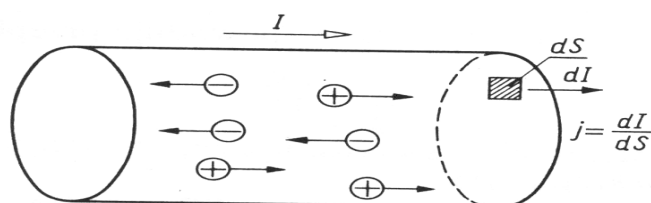
dI – natężenie prądu przepływającego przez element dS .

Przy prądzie stałym, prąd I rozkłada się równomiernie na całym przekroju poprzecznym przewodnika i wówczas gęstość prądu definiujemy jako, stosunek natężenia prądu I do pola przekroju poprzecznego S prostopadłego do kierunku ruchu ładunków

$$J = \frac{I}{S} \quad (21.4)$$

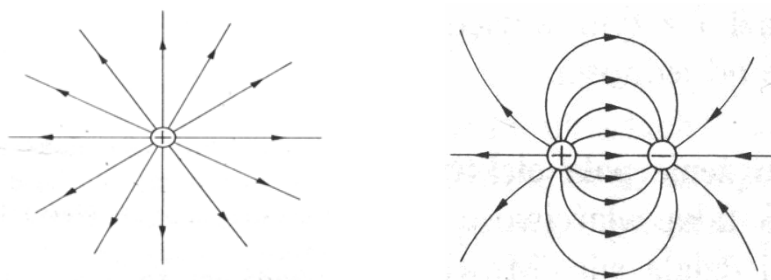
Jednostką gęstości prądu jest A/m^2 .

Za umowny kierunek prądu przyjmuje się kierunek ruchu nośników dodatnich (rys. 21.1).



Rys. 21.1 Kierunek prądu i gęstości prądu

Prąd elektryczny w przewodniku może płynąć tylko wtedy, gdy wewnątrz przewodnika istnieje pole elektryczne, tj. $E \neq 0$. Pole elektryczne w przewodniku wytworzone jest różnicą potencjałów na jego końcach. Graficznie pole elektryczne przedstawiamy za pomocą linii sił pola. Na (rys. 21.2) pokazano przebieg linii sił różnych pól elektrycznych.



Rys. 21.2 Linie pola elektrycznego

Linie pola zaczynają się zawsze na ładunkach dodatnich, a kończą na ładunkach ujemnych. Na nośniki ładunku w polu elektrycznym działają siły elektryczne, pod wpływem, których poruszają się one ruchem uporządkowanym. Nośniki dodatnie poruszają się w kierunku pola, ujemne w kierunku przeciwnym. Za umowny kierunek prądu przyjmuje się kierunek nośników dodatnich. Oznacza to, że prąd elektryczny płynie w kierunku wektora E , czyli w kierunku spadku potencjału.

W celu ilościowego opisu pola elektrycznego wprowadzamy wielkość wektorową zwaną natężeniem pola elektrycznego, którą określamy zależnością:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (21.5)$$

gdzie:

\vec{F} - siła działająca na ładunek,

q_0 - dodatni ładunek próbny.

Z wzoru (21.5) wynika, że na ładunek próbny znajdujący się w polu elektrycznym działa siła. Siła ta może wykonać pracę przesuując ładunek próbny q_0 w polu elektrycznym o elementarny odcinek drogi Δl , którą wyrażamy w postaci zależności

$$\Delta W = \vec{F} \Delta l \quad (21.6)$$

Praca W wykonana przy przesunięciu ładunku q_0 na drodze l jest sumą elementarnych prac ΔW , wyrażającą się w granicy wzorem całkowym

$$\sum (\vec{F} \Delta l) = \int_l F dl \quad (21.7)$$

Wobec tego, że $\vec{F} = q_0 \vec{E}$, można zależność (21.7) przedstawić w postaci

$$W = q_0 \int_l E dl \quad (21.8)$$

lub

$$\frac{W}{q_0} = \int_l E dl \quad (21.9)$$

Stosunek pracy do ładunku W/q_0 jest wielkością fizyczną pola, nazywaną napięciem elektrycznym i oznaczaną literą U

$$U = \frac{W}{q_0} \quad (20.10)$$

Jednostką napięcia elektrycznego jest wolt V.

Praca sił pola elektrycznego na drodze między punktami A i B wyrazi się wzorem

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B E dl \quad (21.11)$$

Z zależności (20.9) wynika, że napięcie między punktami A i B możemy wyrazić wzorem

$$U_{AB} = \int_A^B E dl \quad (21.12)$$

Napięcie elektryczne między punktami A i B jest stosunkiem pracy wykonanej przy przesunięciu ładunku z punktu A do punktu B do wielkości tego ładunku. W polu elektrycznym wykorzystując jego bezwirowość, możemy określić wielkość zwaną potencjałem elektrycznym punktu pola. Przyjmując w nieskończoności zerowy poziom potencjału elektrycznego, możemy określić potencjał pola w dowolnym punkcie A wzorem

$$V_A = \frac{W_{A\infty}}{q_0} = \int_A^{\infty} E dl \quad (21.13)$$

Jednostką potencjału elektrycznego jest wolt – V.

Potencjał elektryczny w punkcie A pola elektrycznego, jest stosunkiem pracy wykonanej przy przesunięciu ładunku q_0 z punktu A do nieskończoności do wartości tego ładunku. Z porównania wzorów (21.12) i (21.13) wynika, że napięcie między punktami A i B jest równe różnicy potencjałów punktów A i B

$$V_{AB} = V_A - V_B \quad (21.14)$$

Ograniczenia w ruchu nośników ładunku elektrycznego powodują, że natężenie prądu I w przewodniku przy danej różnicy potencjałów U między jego dwoma punktami nie może wzrastać dowolnie, lecz przyjmuje ustaloną wartość. Przy zmianie napięcia U zmienia się również natężenie prądu I w przewodniku $I = f(U)$.

Iloraz

$$R = \frac{U}{I} \quad (21.15)$$

nazywamy oporem elektrycznym lub rezystywnością danego przewodnika. Jednostką oporu jest Ohm - Ω , przy czym $1\Omega = 1V/1A$.

Z doświadczenia wynika, że stosunek napięcia między dwoma punktami przewodnika do natężenia przepływającego prądu jest wielkością stałą i nie zależy, ani od napięcia, ani od natężenia prądu.

Wtedy natężenie prądu jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia

$$I = \frac{U}{R} \quad (R = \text{const.}) \quad (20.16)$$

Zależność (21.16) nazywamy prawem Ohma dla odcinka przewodu. Prawo Ohma jest słuszne tylko wtedy, gdy dany przewodnik znajduje się w stałej temperaturze. Prąd prze-

plywający przez przewodnik wydziela w nim ciepło, temperatura wzrasta i jego opór się zmienia. O efekcie tym należy pamiętać stosując prawo Ohma.

Zależność oporu od temperatury wyraża się w przybliżeniu wzorem

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (21.17)$$

gdzie:

R_0 – opór w temperaturze odniesienia T_0 (273 K),

α - temperaturowy współczynnik oporu.

Opór danego przewodnika zależy od jego wymiarów geometrycznych, długości l i przekroju poprzecznego S , prostopadłego do długości l . Uwzględniając, że napięcie związane jest ze stałym natężeniem pola elektrycznego \vec{E} wzór (21.12) przyjmie postać $U = El$ i dla stałej gęstości prądu j natężenie prądu przyjmuje wartość $I = jS$, wtedy

$$R = \frac{U}{I} = \frac{El}{jS} \quad (21.18)$$

Wyrażenie E/j występujące w powyższym wzorze nazywamy oporem właściwym ρ materiału, z którego zbudowany jest opornik

$$\rho = \frac{E}{j} \quad (21.19)$$

Aby określić jednostkę oporu właściwego w układzie SI rozpatrzmy element przewodnika o długości $l = 1 \text{ m}$ i przekroju poprzecznym $S = 1 \text{ m}^2$, wówczas otrzymamy

$$[\rho] = \frac{\Omega \text{m}^2}{\text{m}} = [\Omega \text{m}]$$

Jednostką oporu właściwego jest ($\Omega \text{ m}$).

Ze względów praktycznych dogodnie jest wyrazić długość przewodnika l w metrach, lecz przekrój poprzeczny S w milimetrach kwadratowych, wówczas jednostką oporu właściwego będzie

$$1 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$$

Przeliczanie jednostek praktycznych na jednostki układu SI:

skoro $1 \text{mm}^2 = 10^{-6} \text{m}^2$, to zależność jest następująca

$$1 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \text{m}.$$

Opór R przewodu o długości l i powierzchni przekroju poprzecznego S , wykonany z materiału o oporze właściwym ρ wyrażony jest wzorem

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (21.20)$$

Wykorzystując zależność (21.19) gęstość prądu wynosi

$$j = \frac{E}{\rho} = \sigma E \quad (21.21)$$

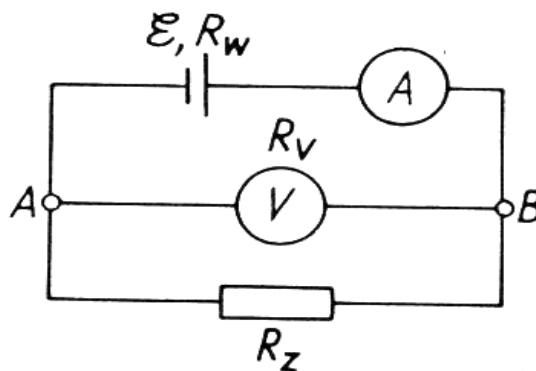
gdzie: $\sigma = \frac{1}{\rho}$ - nazywamy przewodnością właściwą.

Jeżeli opór właściwy ośrodka nie zależy od natężenia pola \vec{E} i gęstości prądu \mathbf{j} , czyli $\rho = const$, to wzór (21.21) wyraża prawo Ohma. Aby w obwodzie płynął prąd elektryczny, to jak wynika z prawa Ohma, musi w nim działać, siła elektromotoryczna o napięciu U . W tym celu do zacisków obwodu przyłączamy źródło prądu. Źródło prądu charakteryzują dwie wielkości:

- siła elektromotoryczna $SEM \mathcal{E}$ (napięcie na zaciskach źródła nie obciążonego),
- opór wewnętrzny źródła R_w .

Rozważmy obwód zamknięty zawierający źródło prądu \mathcal{E} , rezystor zewnętrzny R_z , woltomierz i amperomierz (rys. 21.3). Amperomierz mierzy natężenie prądu płynącego przez opór R_z i źródło prądu. Woltomierz dołączony do zacisków A i B mierzy napięcie na zaciskach źródła prądu U_z równe napięciu na oporniku R_z . Napięcie U_z występujące na zaciskach źródła, przy przepływie prądu w obwodzie o natężeniu I wynosi

$$U_z = \mathcal{E} - IR_w \quad (21.20)$$



Rys. 21.3 Obwód zamknięty z oporem zewnętrznym R_z ($R_v = \infty$).

Ponieważ $U_z = IR_z$, stąd

$$E = I(R_z + R_w) \quad (21.21)$$

Powyższy wzór wyraża prawo Ohma dla obwodu całkowitego, które zapiszemy

$$I = \frac{E}{(R_z + R_w)} \quad (21.22)$$

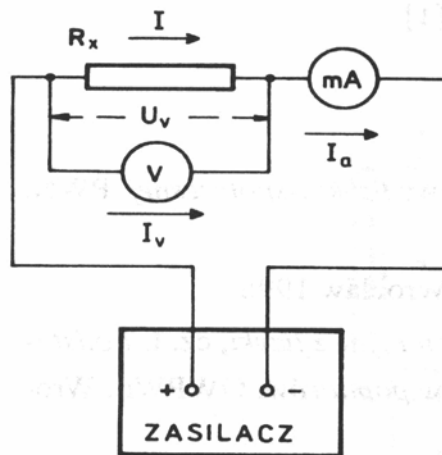
Opis ćwiczenia

Ćwiczenie polega na wyznaczeniu wartości rezystorów znajdujących się na płycie pomiarowej metodą techniczną oraz za pomocą rejestratora.

Metoda techniczna pomiaru rezystancji danego rezystora polega na pomiarze natężenia prądu płynącego przez dany rezystor i napięcia występującego na jego końcówkach. W metodzie technicznej dąży się do maksymalnego uproszczenia pomiarów i obliczeń. Należy tak dobrać układ i mierniki, aby z dobrym przybliżeniem obliczyć opór badanego rezystora. Pomiarów dokonujemy za pomocą amperomierza i woltomierza, a rezystancję obliczamy na podstawie prawa Ohma (21.15).

Pomiary możemy wykonać wykorzystując jeden z niżej opisanych układów pomiarowych.

- 1) Układ przedstawiony na rys. 21.4 w którym woltomierz mierzy spadek napięcia na badanym rezystorze R_x , miliamperomierz (mA) wskazuje natężenie prądu I_a , które jest sumą natężenia prądu I , płynącego przez rezystor R_x oraz natężenia prądu I_v płynącego przez woltomierz.

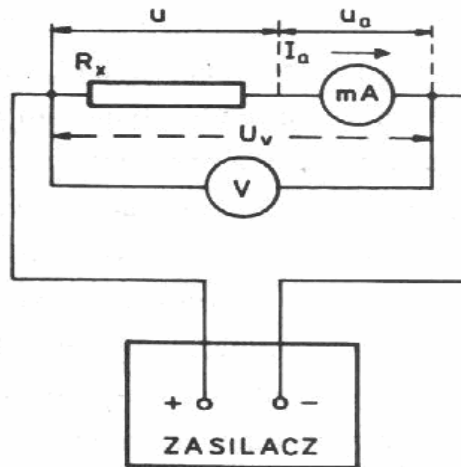


Rys. 21.4 Układ do pomiaru rezystorów metodą dokładnego pomiaru napięcia

W układzie tym wolno stosować zależność (21.15) wówczas, gdy natężenie prądu płynącego przez woltomierz będzie dużo mniejsze niż natężenie prądu płynącego przez badany rezystor R_x , czyli gdy $R_v \gg R_x$. rezystancja woltomierza jest znacz-

nie większa od rezystancji mierzonej. Układ ten nazywany jest układem dokładnego napięcia. Układ ten wykorzystywany jest do małych rezystancji mierzonych.

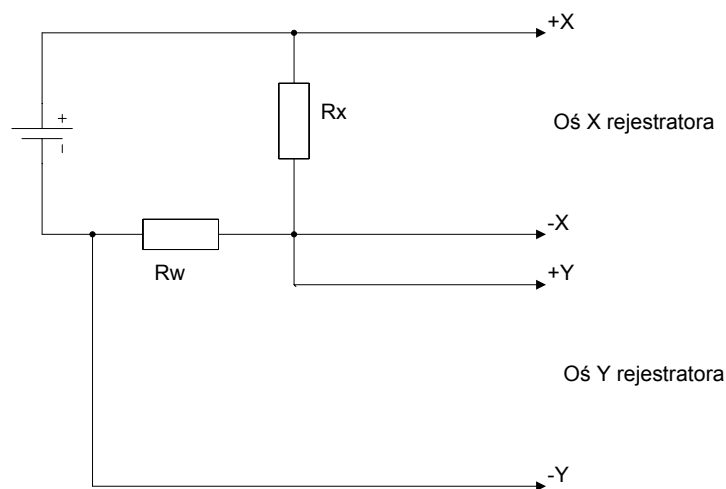
- 2) Układ (rys.21.5), w którym woltomierz mierzy spadek napięcia na badanym rezystorze R_x i amperomierzu. Miliamperomierz (mA) wskazuje natężenie prądu I_a , które jest takie samo jak natężenie prądu płynącego przez rezystor R_x .



Rys.21.5. Układ do pomiaru rezystorów metodą dokładnego pomiaru prądu

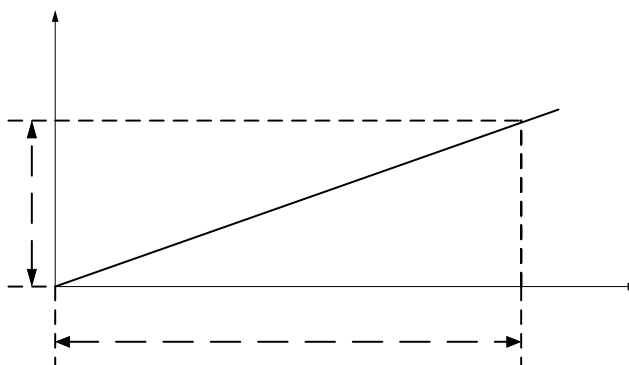
Woltomierz mierzy napięcie U_v , które jest sumą napięcia U na badanym rezystorze i napięcia U_a na miliamperomierzu. W układzie (rys.21.5) dobrym przybliżeniem stosowania zależności (21.15) jest, jeżeli spadek napięcia na miliamperomierzu będzie dużo mniejszy niż spadek napięcia na rezystorze R_x , czyli gdy $R_a \ll R_x$. rezystancja amperomierza jest znacznie mniejsza od rezystancji mierzonej. Układ ten nazywany jest układem dokładnego pomiaru prądu, i służy do pomiaru dużych rezystancji.

Pomiaru oporności możemy również dokonać za pomocą rejestratora XY (rys.21.8) jest metodą pośrednią, która wymaga ustawienia odpowiednich parametrów rejestratora i dobrania dzielnika napięć.



Rys. 21.6. Dzielnik napięcia z zasilaczem

Dzielnik napięć (rys. 21.6) dobrano zgodnie z warunkiem $R_x \gg R_w$, gdzie R_x rezystor badany, R_w rezystor wzorcowy. Napięcie z rezystora R_x podawane jest na oś X rejestratora, a napięcie z rezystora wzorcowego $R_w = 1\Omega$ na oś Y. Rejestrator wykreśli prostą nachyloną do osi X pod kątem zależnym od ustawienia czułości osi Y. Wykres z rejestratora pokazano na (rys.21.7).



Rys. 21.7 Wykres z rejestratora dla rezystora R_x

Wartość rezystancji R_x z wykorzystaniem (rys.21.7) obliczamy w następujący sposób:

- 1) Odczytujemy wartość napięcia U_x z osi X mnożąc czułość osi przez ilość centymetrów odpowiadającą danemu punktowi rezystancji R_x (czułość $1V/cm.10\text{ cm.}=10V$).
- 2) W podobny sposób obliczamy napięcie U_w (mnożąc czułość osi Y np. $20\text{ mV/cm.}5\text{cm.}=100\text{ mV}$).
- 3) Obliczamy prąd płynący przez badany rezystor I_x , ponieważ rezystory tworzą gałąź szeregową prąd obliczamy z wzoru

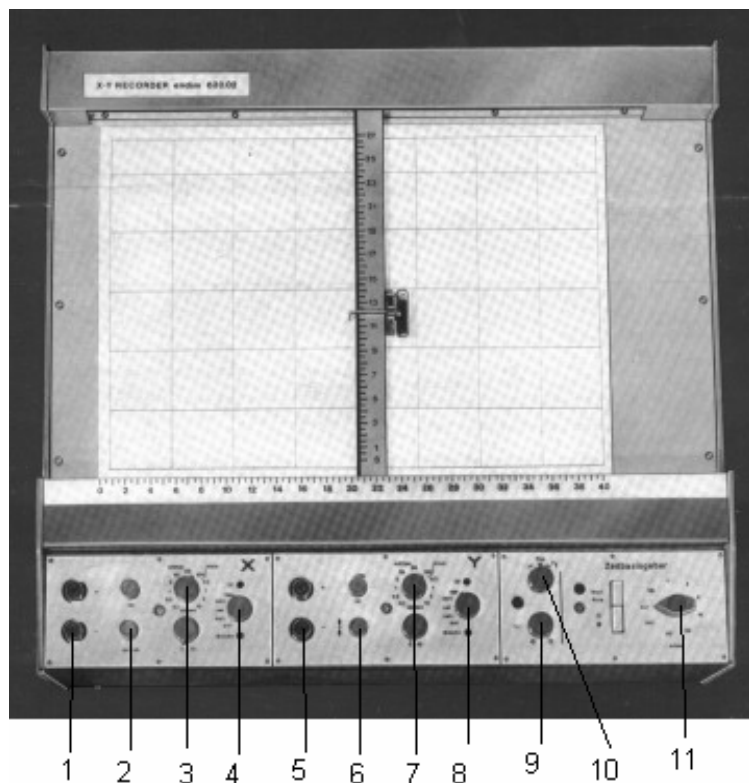
$$I_x = I = \frac{U_w}{R_w} \quad (21.23)$$

dla naszego przykładu będzie to $I_x = 100 \text{ mV} / 1 \Omega = 0,1 \text{ A} = 100 \text{ mA}$.

4) Wartość rezystancji mierzonej obliczamy z wzoru

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} \quad (21.24)$$

dla naszego przykładu będzie to $R_x = 10 \text{ V} / 100 \text{ mA} = 100 \Omega$.



Rys.21.8 Rejestrator XY

Opis przełączników i gniazd rejestratora:

1. gniazda wejściowe +X i -X
2. potencjometr ustawienia pisaka w dowolnym miejscu osi X
3. przełącznik ustawienia czułości osi X
4. przełącznik ustawienia rodzaju pracy (ustawić na „cal”)
5. gniazda wejściowe +Y i -Y
6. potencjometr ustawienia pisaka w dowolnym miejscu osi Y

7. przełącznik ustawienia czułości osi Y
8. przełącznik ustawienia rodzaju pracy (ustawić na „cal”)
9. włącznik sieciowy
10. włącznik pisaka
11. przełącznik szybkości przesuwu pisaka

Przebieg pomiarów

a). Wykaz przyrządów:

- woltomierz prądu stałego (miernik uniwersalny „Metex”),
- amperomierz prądu stałego (miernik uniwersalny „Metex”),
- zestaw rezystorów,
- zasilacz prądu stałego,
- komplet przewodów elektrycznych.

b). Wykonanie pomiarów z wykorzystaniem metody technicznej:

- 1) Wybrać układ pomiarowy w zależności od wartości oporów badanych rezystorów wskazanych przez prowadzącego zajęcia. Wielkość R_x oszacować za pomocą omomierza.
- 2) Połączyć wybrany układ według schematu pokazanego na (rys. 21.4), (rys. 21.5) i po sprawdzeniu przez prowadzącego włączyć zasilanie układu.
- 3) Dla trzech wskazanych rezystorów, wykonać po dziesięć pomiarów natężenia prądu i napięcia dla różnych napięć zasilacza.
- 4) Wyniki zapisać w tabeli.
- 5) Zanotować zakresy i klasę mierników.

Tabela

Lp.	$R_1 =$			$R_2 =$			$R_3 =$		
	U[V]	I[mA]	R[Ω]	U[V]	I[mA]	R[Ω]	U[V]	I[mA]	R[Ω]
1									
...									
10									

c) Wykonanie pomiarów za pomocą rejestratora:

- 1) Połączyć układ zgodnie z (rys.21.6).
- 2) Przełączniki 3 i 7 (rys. 21.8) ustawić czułość osi X – 1 V/cm i Y – 20 mV/cm,
- 3) przełączniki 4 i 8 (rys. 21.8) ustawić na „cal”.
- 4) Przełącznik 11 (rys. 21.8) szybkość zapisu ustawić na 100 s/cm.
- 5) Po sprawdzeniu przez prowadzącego zajęcia poprawności połączeń przełącznikiem (rys. 21.8) włączyć zasilanie rejestratora oraz przełącznikiem 10 (rys. 21.8) włączyć pisak.
- 6) Sporządzić wykresy wskazanych rezystorów za pomocą rejestratora poprzez płynną zmianę napięcia zasilacza.
- 7) Obliczyć wartości oporności zgodnie z powyższym przykładem.

Opracowanie wyników pomiaru:

- 1) Obliczyć wartości mierzonych rezystorów z zależności (21.15) dla metody technicznej, oraz z (21.23) i (21.24) z zapisu rejestratorem XY.
- 2) Narysować na papierze milimetrowym wykresy $I = f(U)$ dla badanych rezystorów metodą techniczną.
- 3) Przeprowadzić dyskusję błędów zmierzonych oraz obliczonych wartości.

Literatura

- [1] Praca zbiorowa-Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, cz. III, OWPWr, Wrocław 1997r.
- [2] R. Poprawski, W. Salejda – Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, cz. I, OWPWr. Wrocław 1996r.
- [3] I. W. Saweliew – Wykład z fizyki, PWN, Warszawa 1994r. (t. I, t. II)

BADANIE REZONANSU ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Wprowadzenie

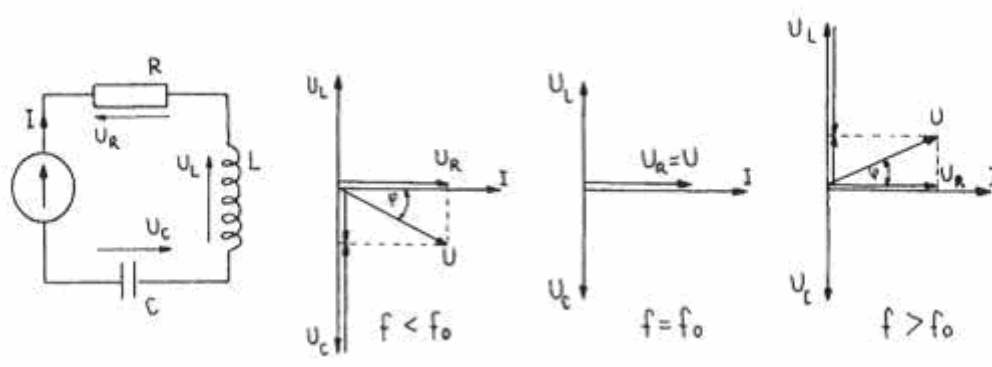
W obwodzie R,L,C zasilanym napięciem sinusoidalnie zmiennym powstają wymuszone oscylacje. Oscylacje te powstają w obwodzie zasilanym źródłem zewnętrznym, o sygnale przemiennym, które narzuca obwodowi drgania o częstotliwości źródła.

Jeżeli częstotliwość drgań wymuszonych jest równa częstotliwości drgań swobodnych, to w obwodzie elektrycznym występuje zjawisko zwane rezonansem. Rezonans charakteryzuje tzw. częstotliwość rezonansowa.

W obwodach elektrycznych może wystąpić:

- rezonans napięć, zwany rezonansem szeregowym,
- rezonans prądów, zwany rezonansem równoległym.

W ćwiczeniu będziemy badać zachowanie się szeregowego obwodu RLC pobudzanego sygnałem sinusoidalnie zmiennym, a więc poszukiwać rezonansu napięć. Rozpatrywany obwód pobudzany będzie ze źródła o **ustalonej amplitudzie**, którego częstotliwość (pulsację) będziemy zmieniać w przedziale $(0, +\infty)$. Cechą charakterystyczną analizy takich obwodów, jest badanie ich właściwości w funkcji częstotliwości. (Zapoznać się z częścią wstępną do ćwiczenia 23).



Rys. 22.1 Szeregowy obwód RLC

Zbadamy jak zmienia się amplituda i faza prądu w funkcji częstotliwości (pulsacji) źródła zasilającego, przy stałej amplitudzie $U_m = const.$ w szeregowym obwodzie rezonansowym RLC pobudzany napięciem o postaci $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Obwód z wykresami wektorowymi przedstawiono na (rys.22.1)

Na poszczególnych elementach obwodu odłożą się spadki napięć :

$$U_R = RI \sin \omega t ,$$

$$U_L = X_L I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (22.1)$$

$$U_C = X_C I \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

Uwzględniając w równaniach (22.1), że $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ i korzystając z drugiego prawa Kirchoffa otrzymujemy:

$$RI \sin \omega t + (X_L - X_C) I \cos \omega t = U \sin \omega t \cos \varphi + U \cos \omega t \sin \varphi$$

Przyrównując do siebie współczynniki przy $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$ otrzymamy:

$$\cos \varphi = \frac{RI}{U} \quad (22.2)$$

$$\sin \varphi = \frac{(X_L - X_C)I}{U} \quad (22.3)$$

Podnosząc do kwadratu (22.2) i (22.3) oraz dodając stronami otrzymamy po przekształceniach

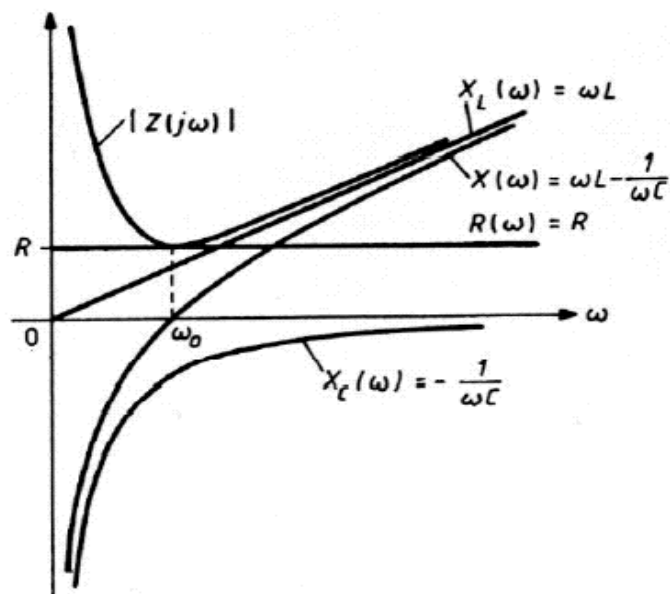
$$U = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} I \quad (22.4)$$

Kąt φ przesunięcia fazowego między natężeniem prądu i przyłożonym napięciem obliczamy

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (22.5)$$

Na rys. 22.2 przedstawiono wykresy:

- rezystancji $R = const.$
- reaktancji indukcyjnej $X_L(\omega) = \omega L$
- reaktancji pojemnościowej $X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}$
- reaktancji wypadkowej $X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$
- modułu impedancji $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$



Rys. 22.2 Wykres parametrów obwodu rezonansowego

Jeżeli pulsacja ω źródła jest równa pulsacji rezonansowej ω_0 , wówczas obwód znajduje się w stanie rezonansu. Rezonans w obwodzie RLC wystąpi, gdy reaktancja wypadkowa obwodu równa się zero stąd warunkiem wystąpienia rezonansu jest

$$X = X_L - X_C = 0 \quad (22.6)$$

czyli

$$X_L = X_C \quad (22.7)$$

Reaktancja X przyjmuje wartość równą zero dla pulsacji rezonansowej:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (22.8)$$

W stanie rezonansu impedancja obwodu wynosi

$$Z_0 = R \quad (22.9)$$

Z zależności (22.8) wynika, że obwód w rezonansie nie staje się, ani zwarcie, ani rozwarciem. Przy pulsacji rezonansowej ω_0 napięcie i prąd są w fazie; przesunięcie fazowe jest równe zero.

Dla pulsacji źródła $\omega < \omega_0$ reaktancja obwodu $X(\omega) < 0$, obwód znajduje się w stanie przed rezonansem i ma charakter pojemnościowy (rys.22.2).

Dla pulsacji źródła $\omega > \omega_0$ reaktancja obwodu $X(\omega) > 0$, obwód znajduje się w stanie po rezonansie i ma charakter indukcyjny (rys.22.2).

Warunek rezonansu (22.7) zapiszemy w postaci

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (22.10)$$

z której wynika, że aby w obwodzie uzyskać rezonans, należy zmieniać pulsację (częstotliwość) źródła napięcia zasilającego obwód, bądź zmieniając wartości L lub C .

Prąd w obwodzie jest odwrotnie proporcjonalny do impedancji i ma postać:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (22.11)$$

W stanie rezonansu, dla $\omega = \omega_0$

$$I_0 = \frac{U}{R} \quad (22.12)$$

Amplituda $I(\omega)$ oraz faza $\varphi(\omega)$ prądu płynącego w szeregowym obwodzie rezonansowym, zmieniają się w funkcji pulsacji ω zgodnie z zależnościami (22.11)

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \quad (22.13)$$

Wykresy obu funkcji (22.11) i (22.13), zwane krzywymi rezonansowymi amplitudową i fazową, pokazane są odpowiednio na (rys. 22.3a i b).

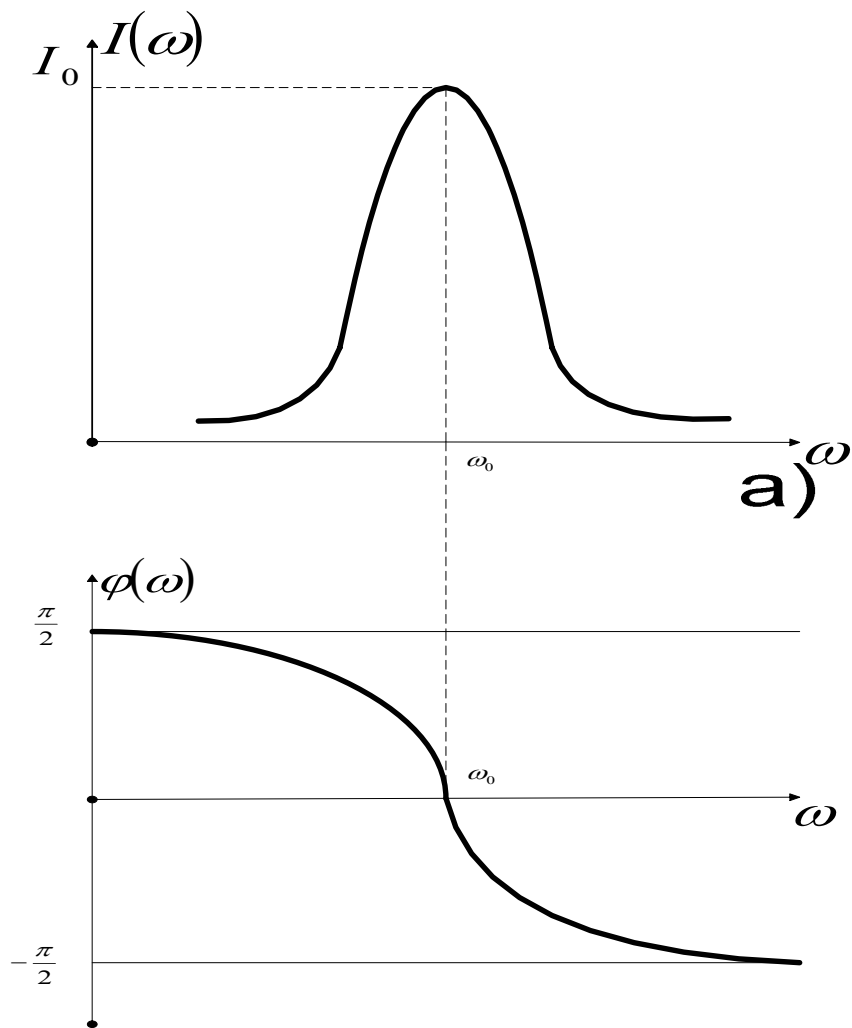
Z wykresu krzywej rezonansowej amplitudowej (rys.22.3a) widzimy, że dla pulsacji ω źródła należących do otoczenia pulsacji rezonansowej ω_0 prąd w obwodzie niewiele jest mniejszy od amplitudy I_0 w rezonansie, natomiast w miarę oddalania się pulsacji ω od pulsacji ω_0 amplituda prądu maleje. Powyższą właściwość obwodu rezonansowego nazywamy selektywnością. Właściwości selektywne obwodu charakteryzuje wielkość Q nazywana dobrocią obwodu. Ogólną definicją dobroci obwodu rezonansowego jest definicja energetyczna:

$$Q = 2\pi \frac{E_{LC}}{E_{trac.}} \quad (22.14)$$

gdzie:

E_{LC} – maksymalna całkowita energia gromadzona w obwodzie $E_{LC} = E_L + E_C$;

$E_{trac.}$ – energia tracona w obwodzie w jednym okresie $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.



Rys. 22.3 Krzywe rezonansowe: a) amplitudowa, b) fazowa

Uwzględniając we wzorze (22.14) zależności na energię gromadzoną w cewce i kondensatorze, otrzymamy:

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R} \quad (22.15)$$

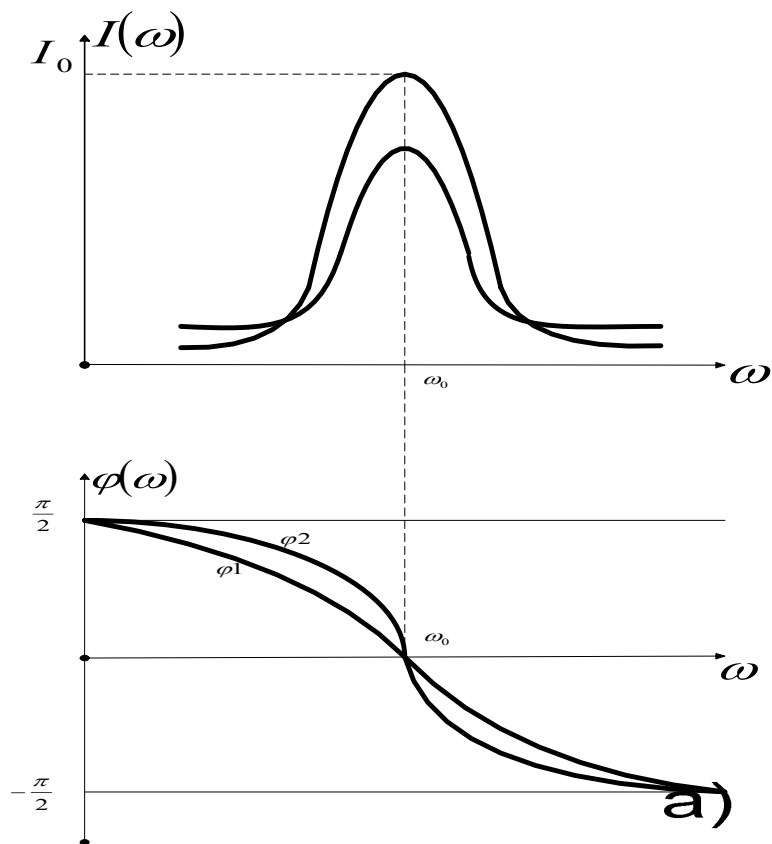
gdzie:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ - nazywamy oporem charakterystycznym obwodu rezonansowego.}$$

Korzystając ze wzoru (22.8) i (22.15) można wykazać, że dobroć przyjmie postać

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (22.16)$$

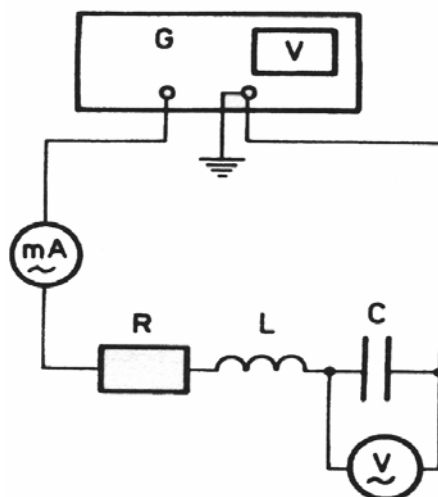
Wartość dobroci jest odwrotnie proporcjonalna do oporu R i w zasadniczy sposób wpływa na kształt krzywych rezonansowych. Kształt krzywych rezonansowych ilustrują wykresy przedstawione na (rys.22.4a i b)



Rys. 22.4 Krzywe rezonansowe: a) amplitudowa, b) fazowa.

Opis ćwiczenia i wykonanie pomiarów

Schemat układu pomiarowego do zdejmowania krzywych rezonansowych metodą punkt po punkcie w szeregowym obwodzie RLC przedstawiono na (rys.22.5).



Rys. 22.5 Układ pomiarowy

Układ pomiarowy zasilany jest z generatora napięciem sinusoidalnie zmiennym o częstotliwości regulowanej w sposób ciągły. Wartość napięcia wyjściowego z generatora mierzymy woltomierzem i utrzymujemy ją stałą (pokrętłem amplitudy) przez cały czas pomiaru. Natężenie prądu w badanym obwodzie RLC mierzymy miliamperomierzem prądu zmiennego.

Do pomiaru przesunięcia fazowego φ wykorzystamy oscyloskop dwukanałowy podłączony do układu jak pokazano na rys. 22.6.

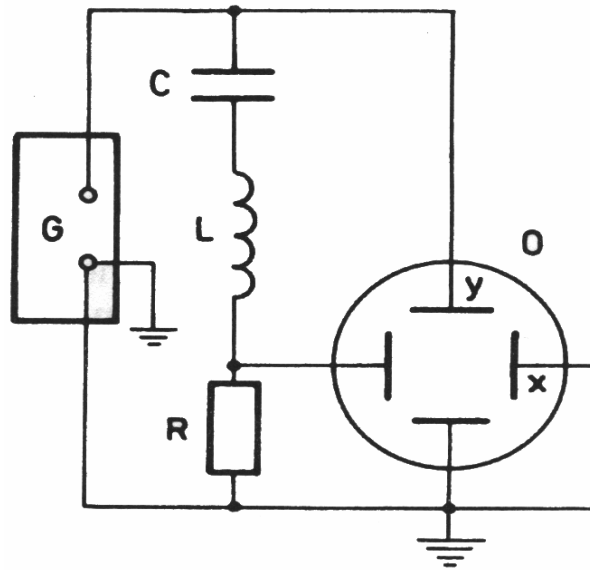
Metoda pomiaru kąta polega na składaniu wzajemnie prostopadłych drgań o tej samej częstotliwości. Na układ odchylenia pionowego podajemy sygnał z generatora, a na układ odchylenia poziomego sygnał z elementów obwodu. W wyniku złożenia tych sygnałów otrzymamy elipsę (rys.22.7). Zmieniając częstotliwość sygnału wyjściowego z generatora zmienia się kształt elipsy.

Kąt fazowy oblicza się korzystając z tablic funkcji sinus ze wzorów:

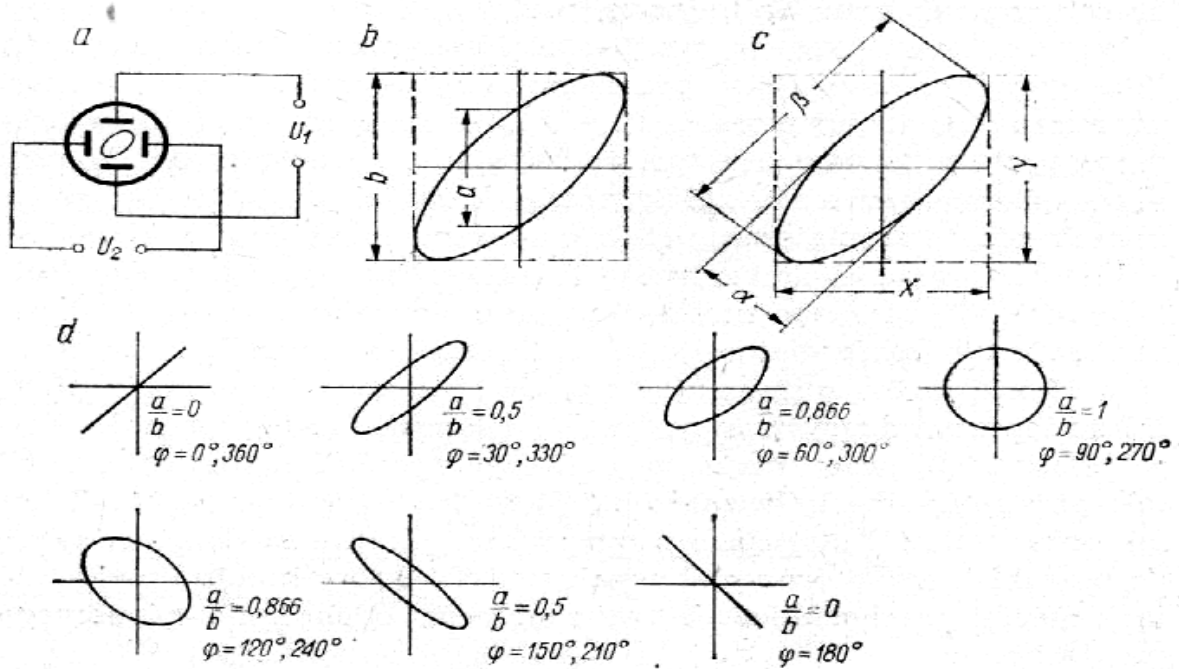
$$\varphi = \arcsin \frac{a}{b} \quad (\text{dla dużych kątów}) \quad (22.17)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\alpha\beta}{XY} \quad (\text{dla kątów małych } < 10^0) \quad (22.18)$$

Wielkości występujące we wzorze (22.17) są podane na (rys. 22.7b), a we wzorze (22.18) na (rys. 22.7c).



Rys. 22.6 Układ pomiarowy do mierzenia kąta przesunięcia fazowego.



Rys.22.7. a- pomiar kąta fazowego za pomocą parametrów elipsy
 b- parametry elipsy do wzoru (22.18),
 c- parametry elipsy do wzoru (22.19),
 d- przykłady dla różnych kątów fazowych

Wykaz przyrządów

- 1) miernik uniwersalny jako amperomierz prądu zmiennego,
- 2) miernik uniwersalny jako woltomierz napięcia zmiennego,
- 3) miernik uniwersalny jako częstotliwościomierz do pomiaru częstotliwości,

- 4) generator przebiegów zmiennych,
- 5) oscyloskop dwukanałowy.

Wykonanie pomiarów

- 1) Połączyć układ jak na rys. 22.5.
- 2) Na generatorze ustawić amplitudę sygnału wejściowego podaną przez prowadzącego zajęcia i utrzymywać stałą w całym zakresie zmian częstotliwości.
- 3) Częstotliwość zmienić o wartość podaną przez prowadzącego zajęcia.
- 4) W tabeli zapisywać wartości częstotliwości, prądu i napięcia.
- 5) Pomiary powtórzyć dla różnych R.

Tabela

L	f [Hz]	I [mA]	$U_{C,(L)}$ [V]

- 6) zapisywać dane odczytane z ekranu oscyloskopu (rys. 22.7b), (rys. 22.7c) w tabeli.

Tabela

Lp.	f[Hz]	a[mm]	b[mm]

Opracowanie wyników

- 1) na podstawie wyników narysować wykres zależności $I = I(f)$ dla różnych R,
- 2) z wykresu wyznaczyć pasmo przenoszenia obwodu,
- 3) obliczyć L, lub C z wzoru na pulsację rezonansową (dane L, lub C),
- 4) obliczyć współczynnik dobroci obwodu Q z wzorów

$$2\Delta f_{3dB} = f_r / Q$$

gdzie:

$2\Delta f_{3dB}$ – pasmo przenoszenia obwodu mierzone na poziomie -3dB,

f_r – częstotliwość rezonansowa,

oraz

$$Q = \frac{U_L}{U_0} = \frac{U_C}{U_0}$$

gdzie:

U_L, U_C – napięcie na elementach L, C w chwili rezonansu,

U_0 - napięcie zasilające z generatora.

- 5) obliczyć kąt przesunięcia fazowego z wzorów (22.17) i (22.18).
- 6) wykreślić krzywą przesunięcia fazowego w funkcji częstotliwości $\varphi = \varphi(f)$.
- 7) obliczyć błędy dla wartości obliczanych.

Literatura

- [1] Praca zbiorowa – Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, cz. III, OWPWr, Wrocław 1997r.
- [2] R. Poprawski, W. Salejda – Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, cz. I, OWPWr. Wrocław 1996r.
- [3] I. W. Sawieliew – Wykład z fizyki, PWN, Warszawa 1994r. (t. I, t. II).

SPRAWDZENIE PRAWA OHMA DLA PRĄDU ZMIENNEGO

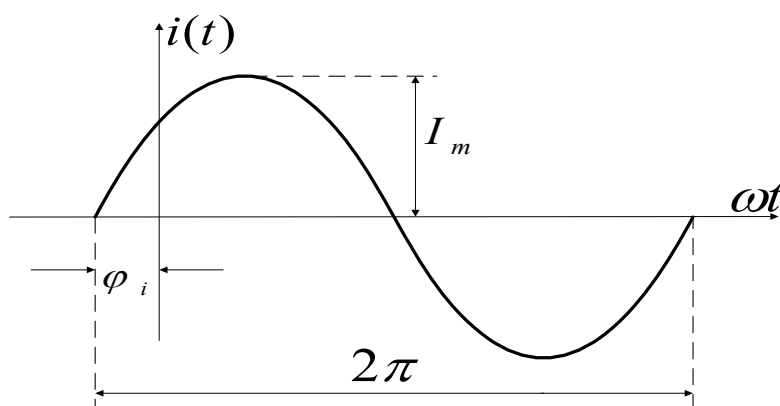
Wprowadzenie

Przypomnijmy sobie prawo Ohma dla obwodu w którym znajduje się tylko rezystor R . Prawo to ma postać

$$I = \frac{U}{R} \quad (23.1)$$

Prawo to stosuje się również do obwodu w którym występuje rezystor R , cewka L , kondensator C , połączone w odpowiednią konfigurację.

W ćwiczeniu zbadamy zachowanie prądu w obwodzie składającym się z szeregowo połączonych elementów RLC, przy zmianie amplitudy napięcia wejściowego. Omówimy wpływ tych elementów na parametry przepływającego przez nie prądu sinusoidalnie zmiennego, którego wykres przedstawiono na rys. 23.1, a postać analityczna zapisana jest za pomocą funkcji sinusoidalnej zależnej od czasu wzorem



Rys. 23.1 Sygnał sinusoidalny

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (23.2)$$

gdzie:

$i(t)$ – wartość chwilowa prądu,

I_m – wartość maksymalna prądu (amplituda),

$(\omega t + \varphi_i)$ - faza prądu w chwili t ,

ω - pulsacja,

φ_i - faza początkowa prądu w chwili $t = 0$.

Okres prądu sinusoidalnego oznaczamy przez T , a okresem funkcji sinusoidalnej jest 2π , stąd dla argumentu równego okresowi zachodzi równość

$$\omega T = 2\pi \quad (23.3)$$

z której otrzymamy zależność na pulsację

$$\omega = \frac{2}{T} \pi = 2\pi f \quad (23.4)$$

gdzie: f - częstotliwość sygnału, jest to odwrotność okresu $f = \frac{1}{T}$.

Jednostką pulsacji ω jest rad/s,

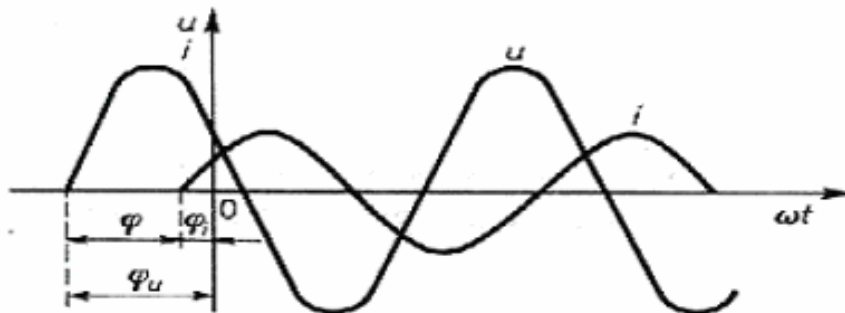
Jednostką częstotliwości f jest Herc.

Wartość chwilową napięcia sinusoidalnie zmiennego, podobnie jak dla prądu (zal. 23.2) możemy przedstawić w postaci,

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (23.5)$$

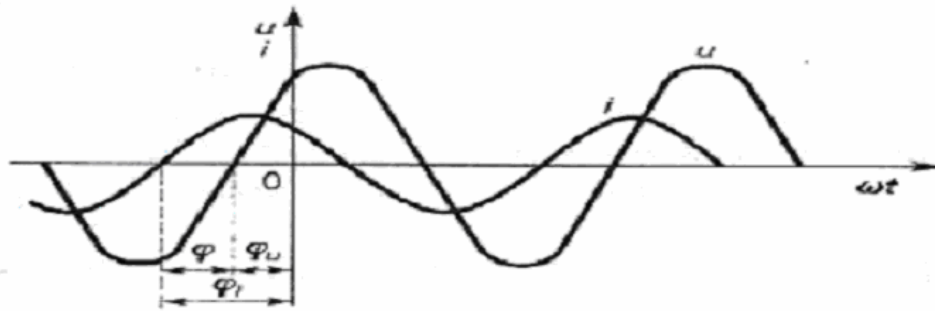
W ogólnym przypadku faza napięcia φ_u jest wielkością różną od fazy prądu φ_i , dlatego rozpatrzmy występujące przypadki:

$\varphi_u > \varphi_i$ - napięcie przybiera wartość maksymalną wcześniej niż prąd, mówimy, że napięcie wyprzedza w fazie prąd o kąt $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ rys. 23.2.



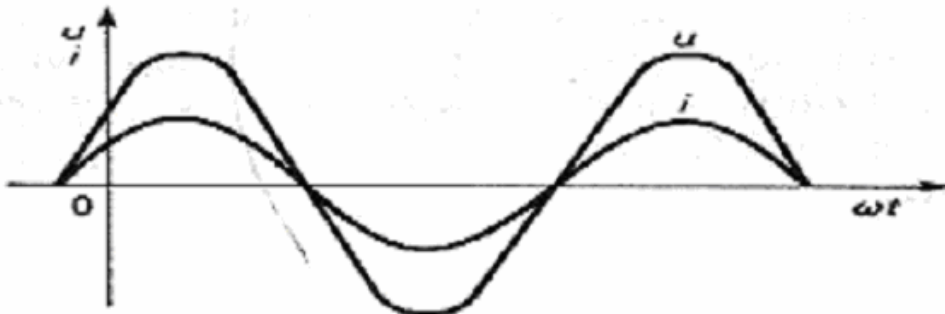
Rys. 23.2 Przebieg napięcia wyprzedzającego w fazie prąd

$\varphi_i > \varphi_u$ - prąd przybiera wartość maksymalną wcześniej niż napięcie, mówimy, że prąd wyprzedza w fazie napięcie o kąt $\varphi = \varphi_i - \varphi_u$ rys. 23.3.



Rys. 23.3 Przebieg napięcia opóźnionego w fazie względem prądu

$\varphi_u = \varphi_i$ – napięcie i prąd przybierają wartości maksymalne w tym samym czasie, mówimy, że napięcie i prąd są w fazie, a kąt przesunięcia fazowego $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$ (rys.23.4).



Rys. 23.4 Przebieg napięcia w fazie z prądem

Różnicę faz napięcia i prądu nazywamy kątem przesunięcia fazowego φ i wyznaczamy z zależności

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (23.6)$$

W przebiegach sinusoidalnie zmiennych występują ponadto takie wielkości jak wartość średnia całokresowa, oraz wartość skuteczna.

- wartość średnią całokresową wyznaczamy z zależności

$$X_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (23.7)$$

Dla prądu zatem możemy zapisać

$$i(t) = \frac{I_m}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \varphi_i) dt \quad (23.8)$$

Wartość średnia całokresowa funkcji sinusoidalnej jest równa zero, ponieważ pola ograniczone krzywą w zakresie okresu są dodatnie i ujemne, równe co do wartości liczbowej. Przebiegi okresowe o wartości średniej równej zero nazywamy przemiennymi.

Prądem przemiennym nazywamy taki prąd okresowy $i(t)$, którego wartość średnia całookresowa jest zerem, czyli który spełnia równość

$$i(t) = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = 0 \quad (23.9)$$

Wśród prądów przemiennych wyróżniamy te prądy, które są antysymetryczne.

Prąd antysymetryczny spełnia dwa warunki:

- periodyczności (okresowości) $i(t + T) = i(t)$,
- antysymetrii $i(t + \frac{T}{2}) = -i(t)$.

W analizie obwodów zasadnicze znaczenie wśród przebiegów antysymetrycznych odgrywają funkcje sinusoidalne czasu. Dlatego prąd (23.2) nazywamy prądem przemiennym.

Wartość skuteczną wyznaczamy z zależności

$$X_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (23.10)$$

Wykorzystując zależność (23.10) obliczymy wartość skuteczną prądu (23.2). W tym celu obliczamy całkę kwadratu prądu w przedziale 0-T

$$\int_0^T i^2(t) dt = I_m \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_i) dt = I_m^2 \frac{T}{2} \quad (23.11)$$

następnie podstawiając (23.11) pod pierwiastek wyrażenia (23.10) otrzymamy wartość skuteczną prądu sinusoidalnego

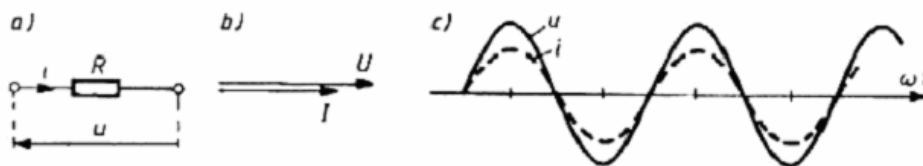
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (23.12)$$

Rozpatrzmy teraz elementy (idealne) obwodu, zasilane napięciem sinusoidalnie zmiennym (23.5) przez, które płynie prąd sinusoidalnie zmienny (23.2).

Z elementem wiążemy dwie wielkości:

- prąd płynący przez element
- napięcie na elemencie.

a). Opornik idealny (rezystor) symbolicznie przedstawiany jest jak na rys. 23.5



Rys. 23.5 a) schemat rezystora, b) wektory napięcia i prądu, c) wykres fazy początkowej napięcia i prądu na rezystorze

Parametrem charakteryzującym opornik jest rezystancja R lub konduktancja G . Jednostką rezystancji jest **Ohm (Ω)**, a konduktancji **Simens (S)**

Napięcie $u(t)$ na zaciskach opornika idealnego wynosi

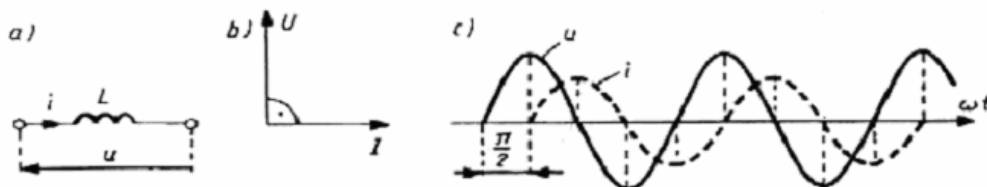
$$u(t) = R i(t) = R I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_m \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (23.13)$$

gdzie:

$U_m = R I_m$ – amplituda napięcia na rezystorze,

Napięcie i prąd są w fazie $\varphi = (\varphi_u - \varphi_i) = 0$.

b). Cewka idealna (induktor) symbolicznie przedstawiana jest jak na (rys. 23.6)



Rys. 23.6 a) schemat cewki, b) wektory napięcia i prądu, c) wykres fazy początkowej napięcia i prądu na cewce.

Parametrem charakteryzującym cewkę idealną jest indukcyjność własna L ,

jednostką jest henr-H. Indukcyjność własną cewki określamy wzorem $L = \frac{\psi}{i(t)}$,

gdzie ψ strumień magnetyczny skojarzony z cewką. Strumień magnetyczny skojarzony obliczamy z wzoru $\psi = z \Phi$ w którym z – liczba zwojów cewki, Φ – strumień magnetyczny. Zgodnie z prawem Faradaya $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$, w cewce indukuje się

siła elektromotoryczna,

$$\varepsilon_L = -\frac{d\psi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (23.14)$$

k którą w obwodzie przenosimy na stronę bilansu napięć, ponieważ cewka w obwodzie jest elementem pasywnym.

Uwzględniając powyższe, napięcie na cewce zapiszemy w postaci

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) \quad (23.15)$$

Gdzie

$$U_m = \omega L I_m \quad (23.16)$$

jest amplitudą napięcia indukowanego.

Wielkość fizyczną ωL nazywamy reaktancją indukcyjną i oznaczamy

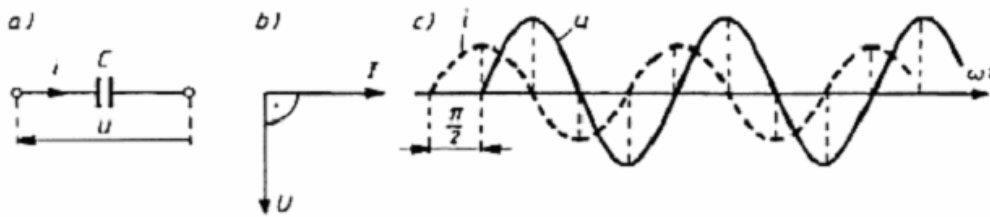
$$X_L = \omega L \quad (23.17)$$

Reaktancja cewki jest proporcjonalna do pulsacji (częstotliwości).

Jednostką reaktancji jest Ohm (Ω).

- c) Na rys. 23.7 przedstawiono sytuację gdy napięcie wyprzedza prąd o kąt $\varphi = 90^\circ$ w przypadku idealnego kondensatora, czyli

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = (\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2} - \omega t - \varphi_i) = \frac{\pi}{2} \quad (23.18)$$



Rys. 23.7 a) schemat kondensatora, b) wskazania napięcia i prądu, c) wykres fazy początkowej napięcia i prądu na kondensatorze

Parametrem charakteryzującym kondensator jest pojemność C , określona zależno-

$$\text{ścią } C = \frac{q(t)}{u(t)}$$

Jednostką pojemności jest farad (F).

Przy zmianie ładunku w sposób w ciągły prąd określamy z zależności $i(t) = \frac{dq}{dt}$.

Wartość ładunku określamy z zależności $q(t) = \int i(t) dt$.

Uwzględniając powyższe zależności napięcie gromadzone na okładkach kondensatora wyraża się wzorem

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{I_m}{C} \int \sin(\omega t + \varphi_i) dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \quad (23.19)$$

Amplitudę napięcia na kondensatorze określamy wzorem

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m \quad (23.20)$$

Wielkość fizyczną $\frac{1}{\omega C}$ nazywamy reaktancją pojemnościową i oznaczamy

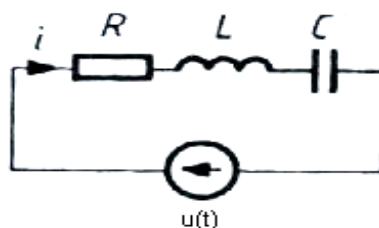
$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (23.21)$$

Jednostką reaktancji jest Ohm (Ω).

Rozpatrzmy przypadek gdy napięcie na kondensatorze opóźnione jest o kąt $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2} - \omega t - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \quad (23.22)$$

Połączmy elementy R, L, C szeregowo jak na (rys.23.8) i podajmy napięcie sinusoidalnie zmienne $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$



Rys. 23.8 Obwód szeregowy R, L, C

Prawo Kirchoffa w odniesieniu do napięć, mówi że:

suma algebraiczna wartości chwilowych napięć źródłowych występujących w oczku równa się sumie algebraicznej wartości chwilowych napięć na poszczególnych elementach obwo-
du. Wartości chwilowe napięć źródłowych są znaną funkcją czasu, a wartości chwilowe napięć na poszczególnych elementach idealnych R, L, C przez które płynie prąd sinusoidalnie zmienny o postaci (23.2) wyrażamy zależnościami:

$$\begin{aligned} u_R(t) &= R i(t) = R I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \\ u_L(t) &= L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) \\ u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (23.23)$$

Z powyższych zależności wynika, że napięcie na rezystancji R jest w fazie z prądem, a jego wartość maksymalna (amplituda) wynosi RI_m . Napięcie na indukcyjności L wyprzedza w fazie prąd o kąt prosty, jego wartość maksymalna wynosi ωLI_m . Napięcie na pojemności C opóźnia się w fazie względem prądu o kąt prosty, a jego wartość maksymalna wynosi $\frac{1}{\omega C} I_m$.

Równanie bilansu napięć powyższego obwodu względem prądu ma postać

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t) \quad (23.24)$$

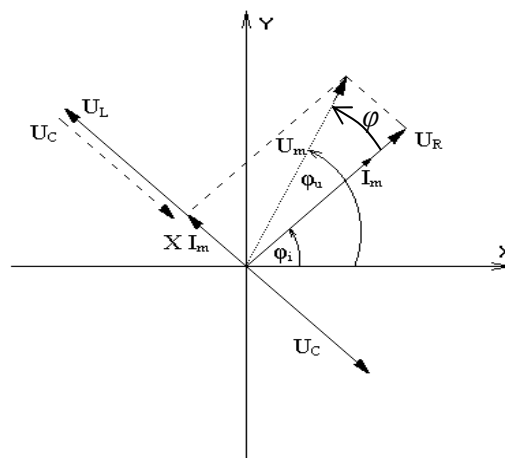
Podstawiając do wzoru (23.24) zależności (23.23) otrzymamy równanie napięć o postaci

$$RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) + \omega LI_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (23.25)$$

Uwzględniając w równaniu (23.25), że $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$ otrzymamy po przekształceniach

$$RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) + (\omega L - \frac{1}{\omega C}) I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (23.26)$$

Wielkość $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ nazywamy reaktancją wypadkową. Reaktancja X jest podstawową wielkością fizyczną charakteryzującą przy danej częstotliwości f obwód szeregowy. Na (rys.23.9) przedstawiono wykres wektorowy bilansu napięć w szeregowym obwodzie R, L, C .



Rys. 23.9 Wykres wektorowy napięć w obwodzie szeregowym RLC
Prąd w gałęzi opóźnia się w fazie za napięciem o kąt φ . Wynika stąd że $\varphi_u = \varphi_i + \varphi$

Wykorzystując tę zależność do prawej strony równania (23.26), otrzymamy

$$RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) + XI_m \cos(\omega t + \varphi_i) = U_m \sin(\omega t + \varphi_i) \cos \varphi + U_m \cos(\omega t + \varphi_i) \sin \varphi \quad (23.27)$$

Przyrównując do siebie współczynniki przy sinusie i cosinusie kąta $(\omega t + \varphi_i)$ otrzymamy:

$$RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_m \sin(\omega t + \varphi_i) \cos \varphi$$

stąd

$$\cos \varphi = \frac{RI_m}{U_m} \quad (23.28)$$

oraz

$$\sin \varphi = \frac{XI_m}{U_m} \quad (23.29)$$

Podnosząc do kwadratu (23.28) i (23.29), oraz dodając otrzymamy:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \frac{(RI_m)^2}{U_m^2} + \frac{(XI_m)^2}{U_m^2} = 1$$

Po wykonaniu działań i przekształceniu otrzymamy zależność

$$U_m = \sqrt{R^2 + X^2} I_m \quad (23.30)$$

którą nazywamy prawem Ohma dla obwodu szeregowego zasilanego napięciem sinusoidalnie zmiennym.

Występująca w (23.30) wielkość $\sqrt{R^2 + X^2}$ nazywamy zawadą (modułem impedancji) i oznaczamy

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (23.31)$$

Prawo Ohma możemy wyrazić w wartościach skutecznych po podzieleniu amplitudy napięcia i prądu przez $\sqrt{2}$, wtedy (23.30) ma postać

$$U = ZI \quad (23.32)$$

Opis ćwiczenia i przebieg pomiarów

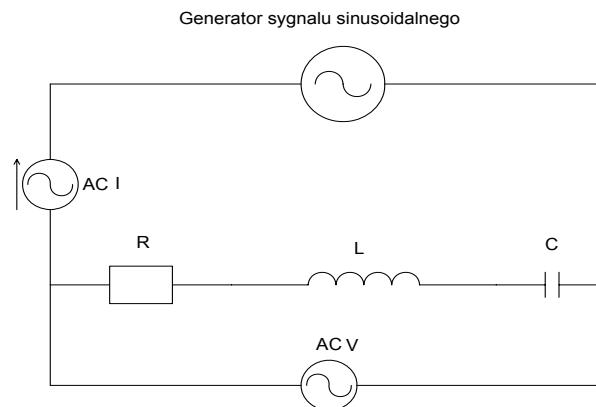
Zestaw przyrządów:

1. woltomierz prądu zmiennego,
2. amperomierz prądu zmiennego,
3. zestaw indukcyjności,
4. zestaw kondensatorów,

5. zestaw rezystorów,
6. generator.

Wykonanie pomiarów

- 1) Połączyć układ z elementów wskazanych przez prowadzącego zajęcia pokazany na rys.23.10



Rys. 23.10 Układ pomiarowy do badania prawa Ohma dla prądu zmiennego

- 2) Omomierzem zmierzyć wartość rezystora R oraz rezystancję uzwojenia cewki R_L .
- 3) Zmieniając amplitudę sygnału wyjściowego generatora odczytać wskazania amperomierza dla dziesięciu różnych wartości napięć.
- 4) Z otrzymanych wartości prądu i napięcia obliczyć zawadę (impedancję) z zależności

$$Z = \frac{U_{sk}}{I_{sk}} \quad \text{dla wszystkich pomiarów} \quad (23.33)$$

- 5) Sporządzić wykres $I_{sk} = f(U_{sk})$ na papierze milimetrowym.
- 6) Przeprowadzić analizę błędów pomiarowych, oraz obliczonej wartości.
- 7) Wyniki pomiarowe wpisać do tabeli.

Tabela

Lp.	U [V]	I [mA]	R_L [Ω]	R [Ω]	Z [Ω]
1					
...					
10					

Pomiar indukcyjności cewki

- 1) Zmontować układ z tych samych elementów RL co w układzie z (rys.23.10).
- 2) Zmierzyć wartość prądu płynącego w obwodzie dla dziesięciu wartości napięcia.
- 3) Wyniki pomiarowe wpisać do tabeli 23.2.

Tabela 23.2

Lp.	U [V]	I [mA]	R _L [Ω]	L [H]
1				
...				
10				

- 4) Obliczyć indukcyjność cewki z zależności (poniższy wzór otrzymamy po przekształceniu (23.30))

$$L = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{U_{sk}^2}{I_{sk}^2} - (R_L - R)^2} \quad (23.34)$$

gdzie:

U_{sk}, I_{sk} – wartości napięcia i prądu odczytane na przyrządach,

R_L - oporność uzwojenia cewki,

R - oporność rezystora,

Stosunek U_{sk} / I_{sk} jest zawadą dla tego obwodu.

Pomiar pojemności kondensatora

- 1) Zmontować układ z tych samych elementów RC co w układzie z (rys.23.10).
- 2) Zmierzyć wartość prądu płynącego w obwodzie dla dziesięciu wartości napięcia.
- 3) Wyniki pomiarowe wpisać do tabeli 23.3

Tabela 23.3

Lp.	U [V]	I [mA]	R[Ω]	C[F]
1				
...				
10				

- 4) Obliczyć pojemność kondensatora z zależności (poniższy wzór otrzymamy po przekształceniu (23.30)).

$$C = \frac{1}{2\pi f \sqrt{\frac{U_{sk}^2}{I_{sk}^2} - R^2}} \quad (23.35)$$

Opracowanie wyników

1. Korzystając z otrzymanych wyników pomiarowych i powyższych wzorów obliczyć L, C oraz Z_1 z wzoru

$$Z_1 = \sqrt{(R_L + R)^2 + (2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C})^2} \quad (23.36)$$

2. Obliczyć zawadę Z ze wzoru (23.33)
3. Sprawdzić czy zawady Z_1 i Z są równe z dokładnością do błędów wyznaczonych?
4. Metodą różniczki zupełnej obliczyć błędy ΔL , ΔC , ΔZ_1 , ΔZ .

Literatura

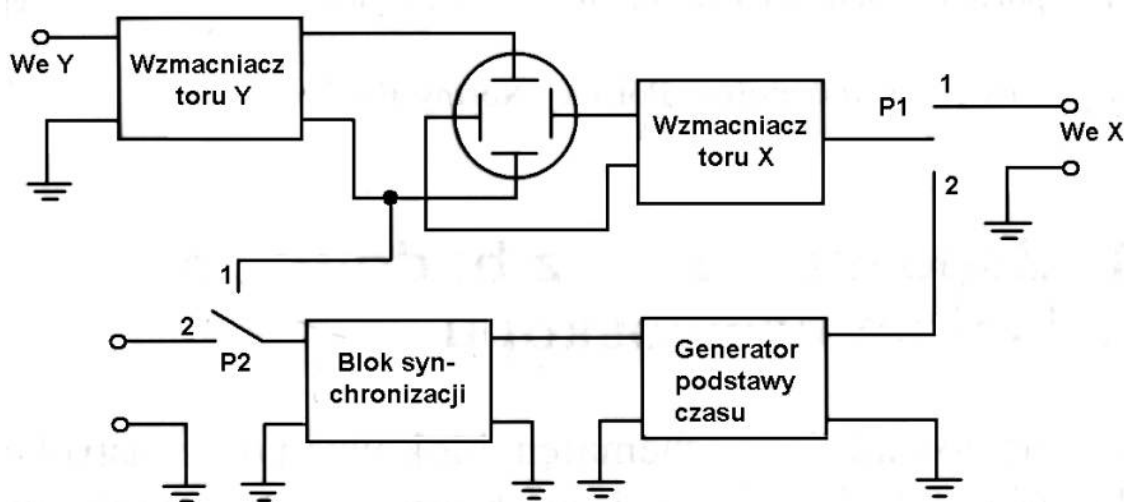
- [1] Praca zbiorowa - Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, cz. III, OWPWr, Wrocław 1997r.
- [2] R. Poprawski, W. Salejda – Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, cz. I, OWPWr. Wrocław 1966r.
- [3] I. W. Sawieliew – Wykład z fizyki, PWN, Warszawa 1994r. (t. I, t. II)
- [4] Sz. Szczęniowski Fizyka Doświadczalna t.3. PWN Warszawa 1980
- [5] E. M. Purcell, Elektryczność i Magnetyzm PWN Warszawa 1971
- [6] J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, WNT Warszawa 1980

POMIARY OSCYLOSKOPOWE

Wprowadzenie

Zasada działania oscyloskopu

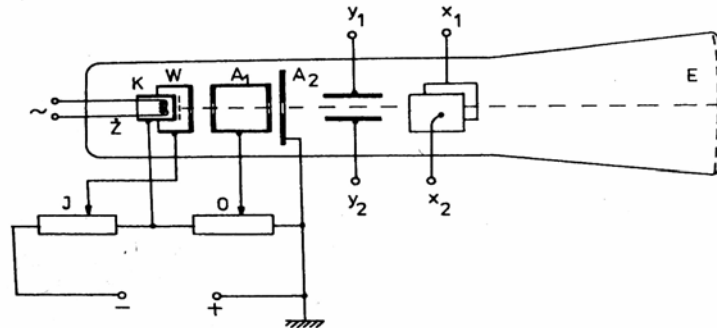
Oscyloskop jest to urządzenie elektroniczne przeznaczone do obserwacji napięcia stałego i przemiennego, znajduje również zastosowanie przy pomiarze wartości prądu, częstotliwości, kąta fazowego i innych wielkości elektrycznych oraz nieelektrycznych dających się przetworzyć na napięcie. Schemat blokowy oscyloskopu pokazany jest na rys.24.1. Głównymi podzespołami oscyloskopu są lampa oscyloskopowa wraz z zasilaczem wysokiego napięcia, wzmacniacz toru Y, wzmacniacz toru X, generator podstawy czasu oraz blok synchronizacji. niezbędne do obserwacji przebiegów elektrycznych w funkcji czasu.



Rys. 24.1 Schemat blokowy oscyloskopu elektronicznego

Na rysunku 24.2. przedstawiono schematycznie lampę oscyloskopową. Źródłem elektronów w lampie oscyloskopowej jest cylindryczna katoda, pośrednio żarzona. Katoda mieści się wewnątrz cylindra z niewielkim otworem, nazywanego cylindrem Wehnelta lub

siatka. sterująca. Przez zmianę potencjału tej elektrody w stosunku do katody uzyskuje się zmianę natężenia wiązki elektronów bombardujących ekran, a więc zmianę jaskrawości świecenia.



Rys. 24.2 Schemat lampy oscyloskopowej:

- K – katoda,
- Ż – grzejnik katody,
- W – cylinder Wehnelta,
- A₁, A₂ – anody, y₁, y₂ – płytki odchylenia pionowego,
- x₁, x₂ – płytki odchylenia poziomego, E – ekran, J – regulacja jasności plamki,
- O – regulacja ostrości plamki.

Umieszczone za siatką sterującą. elektrody ogniskujące - anody A_1 o odpowiednio dobranych kształtach i wysokich dodatnich względem katody potencjałach, mają za zadanie zogniskowanie wiązki elektronów na powierzchni ekranu lampy. Ostatnia anoda, A_2 , o najwyższym potencjale jest elektrodą przyspieszającą. Ponieważ anoda ta musi mieć potencjał zbliżony do średniego potencjału płytek odchyłających, to zwykle połączona jest ona z masą oscyloskopu, a katoda lampy znajduje się na wysokim (kilka kV) ujemnym potencjale względem tej masy. Odchylenie strumienia elektronów, a więc i plamki na ekranie od położenia osiowego odbywa się za pomocą dwóch par płytek-wzajemnie prostopadłych: płytek odchylenia poziomego X i płytek odchylenia pionowego Y .

Po doprowadzeniu napięcia stałego U_y , np. do płytek Y , w obszarze między płytkami zostanie wytworzone pole elektryczne o natężeniu $E = U_y/d$, gdzie d jest odległością między płytkami. Wówczas na elektron działa siła $F_y = qE$ W wyniku działania tej siły elektron porusza się po torze krzywoliniowym, a odchylenie od osi lampy na ekranie można opisać następującym równaniem:

$$y = \frac{U_y L \cdot l}{2U_a \cdot d} \quad (24.1)$$

gdzie:

U_a - napięcie przyspieszające,

l - długość płytek odchylających,

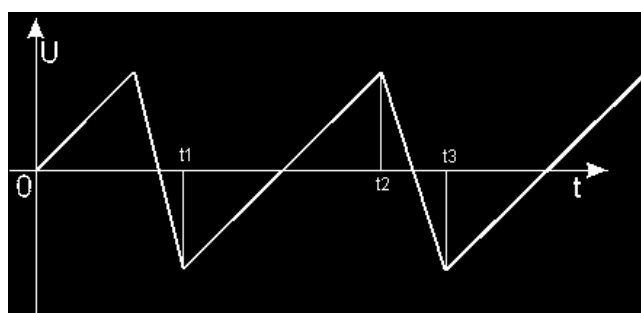
L - odległość od końca płytek do ekranu.

Jak wynika z równania (24.1) odchylenie plamki od osi jest proporcjonalne do wartości przyłożonego napięcia U_y .

Badane napięcie elektryczne podłącza się do płytek odchylenia pionowego Y . Wzmacniacz napięciowy Y wzmacnia to napięcie tak, aby możliwa była jego obserwacja. Wybór wzmocnienia umożliwia pokrętko $WZM Y$ regulacji współczynnika wzmocnienia, w_y , który jest równy odwrotności czułości odchylenia Y . Mierząc odległość h w kierunku osi Y między dwoma punktami badanego przebiegu, możemy obliczyć odpowiadającą mu wartość napięcia zgodnie ze wzorem

$$U_y = w_y \cdot h \quad (24.2)$$

Jeżeli do pary płytek Y przyłożymy stałą różnicę potencjałów to pole elektrostatyczne odchyli wiązkę elektronów w kierunku elektrody o wyższym potencjale. Po przyłożeniu zmiennej w czasie różnicy potencjałów elektrony będą wykonywały drgania pomiędzy tymi elektrodami. Przy dostatecznie dużej częstotliwości zmian napięcia będziemy obserwować na ekranie oscyloskopu jasną kreskę jako ślad drogi, po której wędruje strumień elektronów. W celu obserwacji przebiegu napięć do płytek odchylenia poziomego X należy przyłożyć napięcie o przebiegu piłokształtnym (rys. 24.1., klucz P2).



Rys. 24.3. Przebieg piłokształtnego napięcia z generatora podstawy czasu

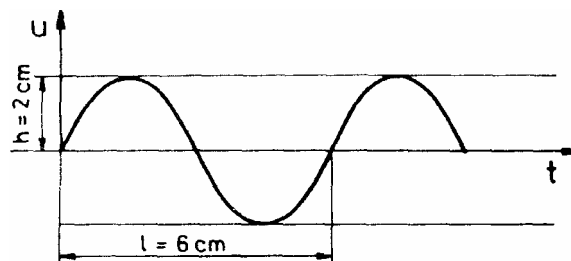
Napięcie takie jest generowane przez generator podstawy czasu rys.24.3. W czasie od t_1 do t_2 napięcie wzrasta linowo proporcjonalnie do czasu, a plamka świetlna przesuwa się równomierne od lewej strony ekranu do prawej, po osiągnięciu wartości maksymalnej napięcia bardzo szybko powraca do swojej wartości początkowej, w czasie od t_2 do t_3 , jeżeli

teraz do płytek odchylenia pionowego Y przyłoży się napięcie o nieznanym przebiegu to zostanie ono odwzorowane na ekranie przez ruchomą wiązkę elektronów.

Oscyloskop jest wyposażony w pokrętkę regulacji skokowej częstotliwości generatora podstawy czasu. Pozwala ona na dostosowanie czasu przesuwu plamki na ekranie do okresu badanego przebiegu elektrycznego. To pokrętko jest wycechowane w jednostkach skali w_t , czyli w s/cm. Mierząc w centymetrach odległość l między dwoma punktami na osi x badanego przebiegu, możemy jej przyporządkować czas zgodnie z relacją

$$t = w_t l. \quad (24.3)$$

Na rysunku 24.4 przedstawiono przykładowy oscylogram przebiegu przemiennego i obliczone na podstawie wzorów (24.2) i (24.3): amplitudę i okres obserwowanego przebiegu.



Rys. 24.4. Oscylogram przebiegu sinusoidalnie zmiennego

Aby otrzymać stabilny obraz konieczna jest synchronizacja napięcia otrzymywanego z generatora podstawy czasu z napięciem badanym (patrz schemat blokowy - rys. 24.1). W oscyloskopie znajdują się odpowiednie przyciski zapewniające możliwość wyboru źródła synchronizacji oraz pokrętkę regulacji ciągłej synchronizacji (poziom wyzwalania).

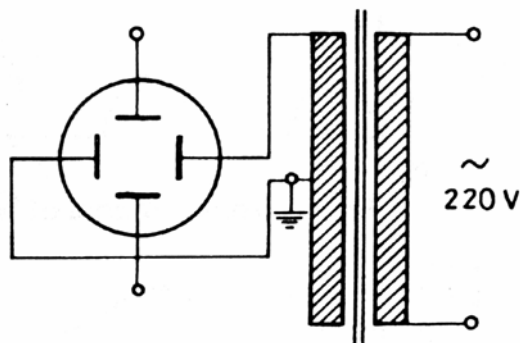
Ponadto każdy oscyloskop jest wyposażony w pokrętkę regulacji położenia początkowego plamki na ekranie (zmiana stałego potencjału początkowego płytek Y i X). Zakres częstotliwości generatora podstawy czasu stanowi o paśmie częstotliwości oscyloskopu.

Należy pamiętać, że pokrętki współczynników wzmocnienia $WZM Y$ i $WZM X$ oraz pokrętkę regulacji częstotliwości generatora podstawy czasu zostały wycechowane w pozycji „*Kalibracja*”.

Opis ćwiczenia.

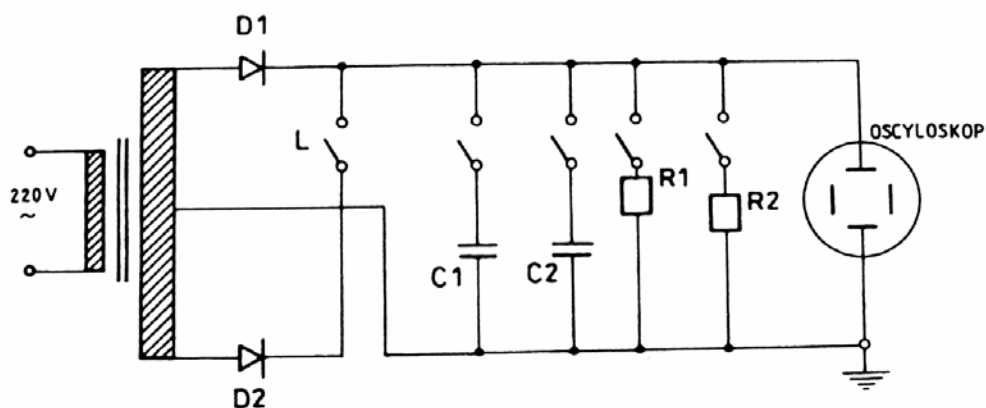
Pomiar napięcia za pomocą oscyloskopu

Na rysunku 24.5 przedstawiono schemat układu pomiarowego do obserwacji napięcia na wyjściu uzwojenia wtórnego transformatora sieciowego. W celu dokonania pomiaru tego napięcia należy podłączyć wyjście uzwojenia wtórnego przesuwника fazowego na *WE* oscyloskopu zgodnie ze schematem przed-stawionym na rysunku 24.5.



Rys. 24.5 Schemat układu do pomiaru napięcia na wyjściu transformatora sieciowego

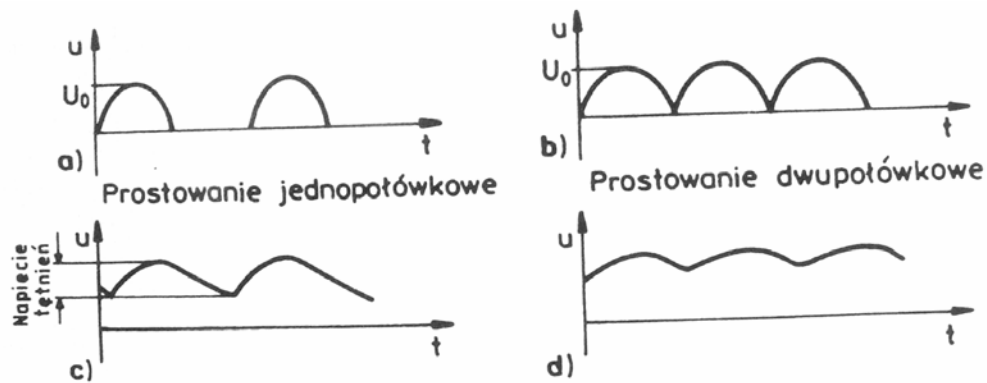
Na rysunku 24.6 przedstawiono schemat układu pomiarowego do obserwacji napięć na wyjściu układów prostowania jedno- (klucz *L* otwarty) i dwu półówkowego (klucz *L* zamknięty). W celu dokonania pomiaru tego napięcia należy podłączyć wyjście układu prostownika z *WE* oscyloskopu zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 24.6.



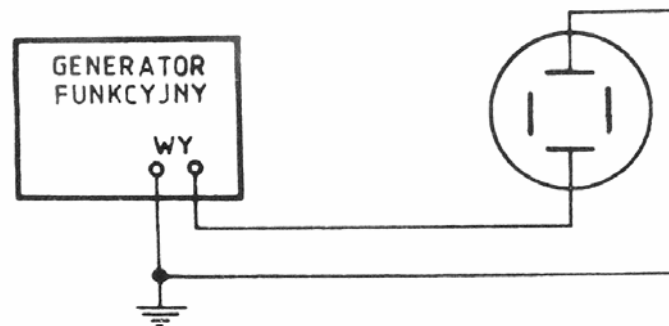
Rys. 24.6 Schemat układu do pomiaru napięć na wyjściu prostownika jedno półówkowego i dwu półówkowego

Na rysunku 24.7 pokazano przykładowe oscylogramy napięć dla układu pomiarowego przedstawionego na rys. 24.6. Zaznaczono również napięcia tętnień.

Na rysunku 24.8 przedstawiono schemat układu pomiarowego do obserwacji napięć na wyjściu generatora funkcyjnego. W celu dokonania pomiaru tego napięcia należy połączyć wyjście generatora z *WE Y* oscyloskopu zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 24.8.



Rys. 24.7 Przykładowe oscylogramy przebiegów otrzymanych w wyniku prostowania:
 a) jednopółkowego, b) dwupółkowego.
 Napięcia tętnień w przypadku:
 c) prostowania jednopółkowego, d) dwupółkowego

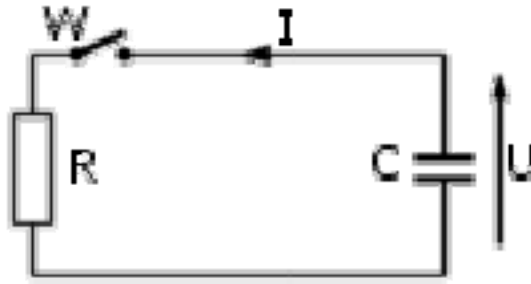


Rys. 24.8 Schemat układu do obserwacji napięć otrzymywanych za pomocą generatora funkcyjnego

Wyznaczanie wielkości charakteryzujących przebiegi przemiennie na wyjściu układów formujących

Rozładowanie kondensatora w układzie RC.

Na rys. 24.9. pokazany jest najprostszy układ RC.



Rys. 24.9 Obwód rozładowania kondensatora RC

Kondensator C został naładowany do napięcia U_0 , jeżeli do tak naładowanego kondensatora zostanie w chwili $t=0$ dołączony rezystor R (po zamknięciu wyłącznika W), to

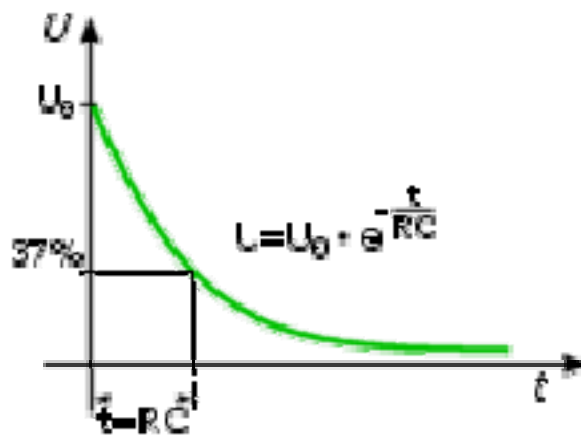
$$I = C \frac{dU}{dt}; \quad I = -\frac{U}{R}$$

$$-\frac{U}{R} = C \frac{dU}{dt} \quad \text{to} \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{U}{R \cdot C} \quad (24.4)$$

Jest to równanie różniczkowe którego rozwiązaniem jest:

$$U = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (24.5)$$

Z powyższego wzoru widać, że naładowany kondensator, obciążony rezystorem zostanie rozładowany, a krzywa rozładowania obwodu RC będzie wyglądała tak jak na rys. 24.10.



Rys. 24.10 Krzywa rozładowania obwodu RC

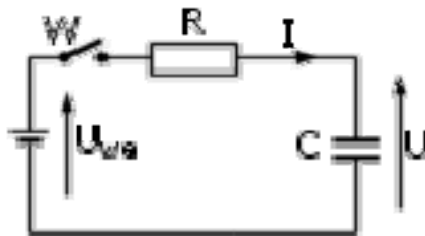
Iloczyn $R \cdot C$ jest nazywany stałą czasową t , jeżeli R będzie podawane w omach, C w faradach to jednostką stałej czasowej będzie sekunda. Stałą A można wyliczyć z warunków

początkowych, czyli dla $t=0$ to $U=U_0$, z czego wynika, że $A=U_0$. Wzór na rozładowanie kondensatora można więc zapisać następująco:

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (24.6)$$

Ładowanie kondensatora w układzie RC.

Na rys. 24.11 pokazany jest układ, w którym po zamknięciu wyłącznika W w chwili $t=0$, rozpocznie się ładowanie kondensatora C poprzez rezystor R .



Rys. 24.11 Układ ładowania kondensatora RC

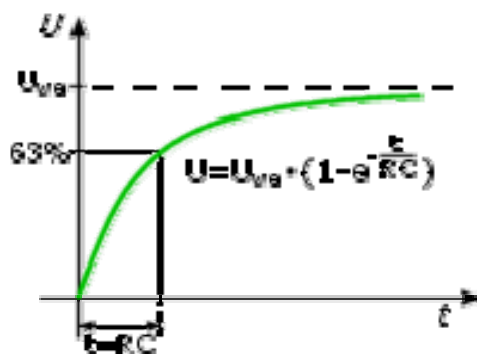
Kondensator C będzie ładowany prądem I z baterii o napięciu U_{we} . Można to zapisać w postaci równań:

$$I = C \frac{dU}{dt}, \quad I = \frac{U_{we} - U}{R} \\ \frac{U_{we} - U}{R} = C \frac{dU}{dt} \quad \text{to} \quad \frac{dU}{dt} = \frac{U_{we} - U}{R \cdot C} \quad (24.7)$$

Ostatnie równanie jest równaniem różniczkowym, którego rozwiązaniem jest:

$$U = U_{we} + A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (24.8)$$

Jak widać ze wzoru, kondensator C zostanie naładowany do wartości U_{we} dla t znacznie większego od RC , co jest uwidocznione na rys. 24.12 w postaci krzywej ładowania kondensatora.



Rys. 24.12 Krzywa ładowania kondensatora.

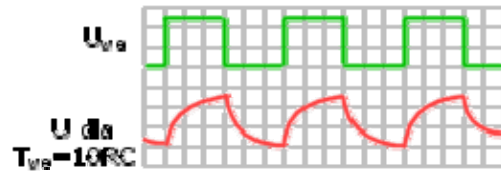
Wartość stałej A wylicza się uwzględniając warunki początkowe, czyli w chwili $t=0$. Wówczas $U=0$, a więc $A=-U_{we}$. Ostatecznie otrzymuje się wzór na ładowanie kondensatora w układzie RC :

$$U = U_{we} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (24.9)$$

Zarówno układ, ładowania jak i rozładowania kondensatora dążą do równowagi, to znaczy do stanu gdy U jest równe U_{we} . Taki stan jest osiągnięty dla czasu znacznie większego od stałej czasowej $\tau=RC$. Z doświadczenia wynika, że czas taki to $t=5RC$. Po tym czasie napięcie na kondensatorze osiąga swoją końcową wartość z dokładnością 1%. Jeżeli wówczas zmieni się wartość napięcia U_{we} na przeciwną to napięcie U będzie dążyć do tej nowej wartości. W tabeli pokazana jest zależność dokładności ustalania napięcia na kondensatorze od czasu ustalania.

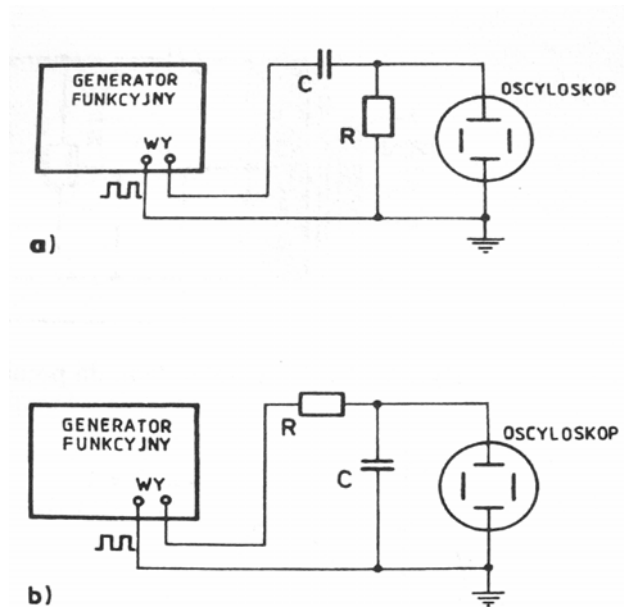
Tabela				
Dokładność	37%	10%	1%	0,1%
Czas	τ	$2,3\tau$	$4,6\tau$	$6,9\tau$

Na rys. 24.13 pokazany jest przykładowy przebieg dla układu RC z rys.24.11. z tym, że zamiast napięcia wejściowego w postaci baterii i wyłącznika podany został sygnał prostokątny o okresie $T=10RC$. Można zauważyć, że przebieg na kondensatorze składa się kolejno z krzywych ładowania i rozładowania kondensatora" (porównaj z rys. 24.12 i 24.10).



Rys. 24.13 Oscylogram układu całkującego RC

Na rysunkach 24.14a i 24.14b przedstawiono schematy układów pomiarowych do obserwacji napięć na wyjściu układu różniczkującego i całkującego. W celu obserwacji napięć należy na wejście tych układów podać napięcie prostokątne z generatora funkcyjnego, zaś napięcia z wyjścia tych układów na *WE* Y oscyloskopu.



Rys. 24.14 Schemat stanowiska do obserwacji przebiegów na wyjściu:
a) układu różniczkującego, b) układu całkującego

Pomiar różnicy faz dwóch drgań harmoniczných.

Na rysunku 24.15 przedstawiono schemat układu do pomiaru różnicy faz za pomocą oscyloskopu. Układ przesuwnika fazowego zrealizowany jest na obwodzie RC.

Drugie prawo Kirchhoffa dla tego obwodu można zapisać w postaci:

$$IR - \frac{Q}{C} = \varepsilon_o \sin(\omega \cdot t) \quad (24.19)$$

Różniczkując to równanie stronami oraz uwzględniając że $I = \frac{dQ}{dt}$ otrzymamy

$$R \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} I = \varepsilon_o \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (24.20)$$

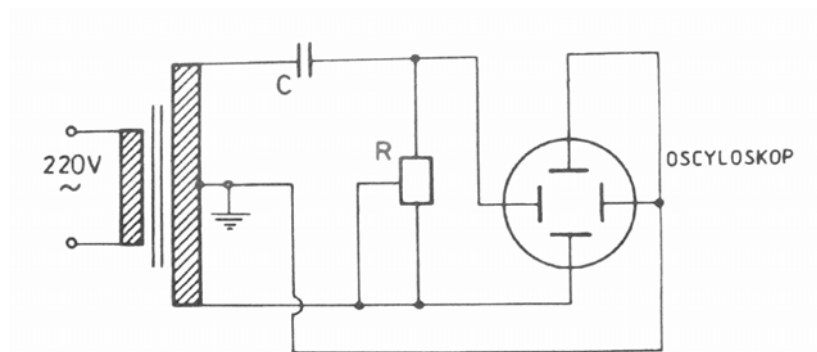
Rozwiązaniem tego równania jest

$$I = I_o \sin(\omega \cdot t - \varphi), \quad (24.21)$$

gdzie przesunięcie fazowe φ dane jest wzorem:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\omega RC}\right). \quad (24.22)$$

Zależność (24.22) wykorzystano do zmiany przesunięcia fazowego poprzez zmianę wartości rezystora R (rys.24.15).

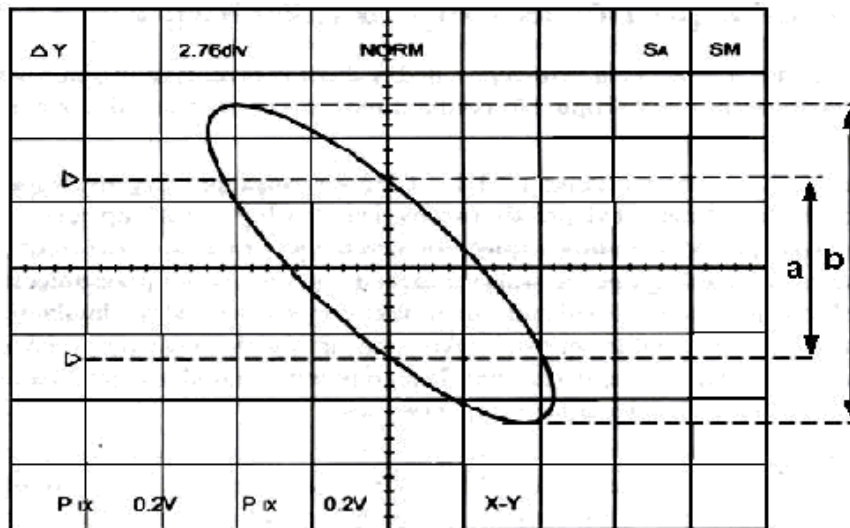


Rys. 24.15 Schemat układu do pomiaru przesunięcia fazowego

Pomiar przesunięcia fazowego metodą krzywych Lissajous

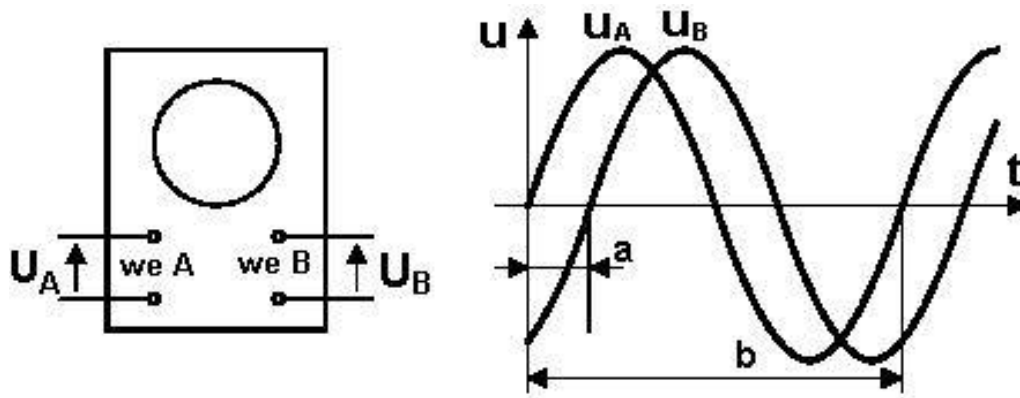
Przebiegi pomiędzy którymi należy mierzyć przesunięcie fazowe podaje się na wejścia X i Y oscyloskopu. Kształt otrzymanej na ekranie figury będzie zależał od wartości kąta fazowego φ . Gdy przesunięcie fazowe wyniesie 0 lub 180°, wówczas oscyloskop narysuje prostą przechodzącą przez I i III ćwiartkę układu współrzędnych lub odpowiednio II i IV ćwiartkę. Przy kącie fazowym równym 90° na ekranie powstanie elipsa symetryczna względem osi układu współrzędnych. Do pośrednich wartości przesunięcia fazowego oscyloskop narysuje elipsę o wymiarach zależnych od wartości kąta fazowego φ . Należy wyskalować otrzymaną figurę i obliczyć wartość kąta przesunięcia fazowego z zależności.

$$\varphi = \arcsin \frac{a}{b} \quad (24.23)$$



Rys. 24.16 Pomiar przesunięcia fazowego na podstawie figury Lissajous

Pomiar przesunięcia fazowego za pomocą oscyloskopu dwukanałowego



Rys. 24.17 Pomiar przesunięcia fazowego

Do wejść kanałów A i B doprowadza się badane napięcia. Poziome osie zerowe obu obrazów muszą się pokrywać. Kąt przesunięcia fazowego φ oblicza się ze wzoru:

$$\varphi = 2\pi \frac{a}{b} \quad (24.24)$$

Błąd względny określenia kąta przesunięcia fazowego wyznaczyć można ze wzoru:

$$\delta_{\varphi} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad (24.25)$$

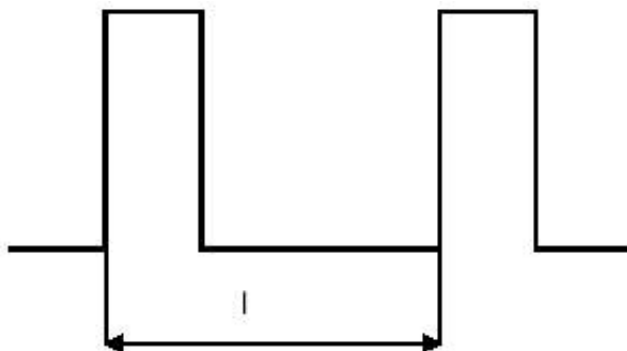
Z uwagi na to, że błąd określenia kąta przesunięcia fazowego jest tym większy im mniejsze są długości odcinków a i b , należy pokrętłem płynnej regulacji podstawy czasu

dobrac taką nastawę (nie trzeba jej znać) wartości podstawy czasu, aby wartości a i b były możliwie jak największe

Pomiar częstotliwości drgań harmonicznyc

Pomiar częstotliwości przez pomiar okresu

Pomiar częstotliwości przez pomiar okresu wymaga ustawienia pokręła płynnej regulacji podstawy czasu w pozycję CAL (obrót pokręła zgodnie z ruchem wskazówek zegara aż do zaskoku) i wybrania takiej pozycji przełącznika skokowej regulacji podstawy czasu, aby na ekranie wystąpiła jak najmniejsza liczba okresów, jednak nie mniejsza niż jeden okres. Przykładowy przebieg sygnału prostokątnego o współczynniku wypełnienia różnym od 50% pokazano na rysunku 24.18.



Rys. 24.18 Pomiar okresu drgań

Częstotliwość badanego przebiegu określa się ze wzoru:

$$f = \frac{1}{lC} \quad (24.26)$$

gdzie:

l - odczytana z ekranu oscyloskopu długość w cm odcinka odpowiadająca okresowi badanego przebiegu.

C - wartość współczynnika podstawy czasu w μs , ms , s .

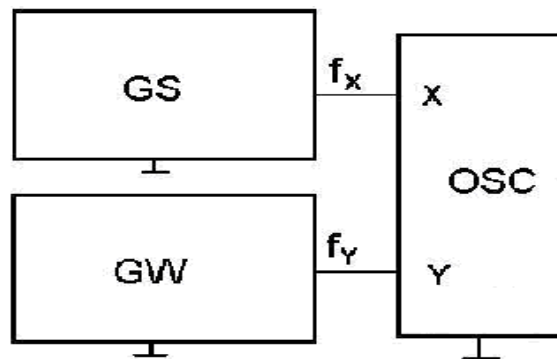
Błąd pomiaru częstotliwości jest równy:

$$\delta_f = \frac{\Delta l}{l} + \delta_c \quad (24.27)$$

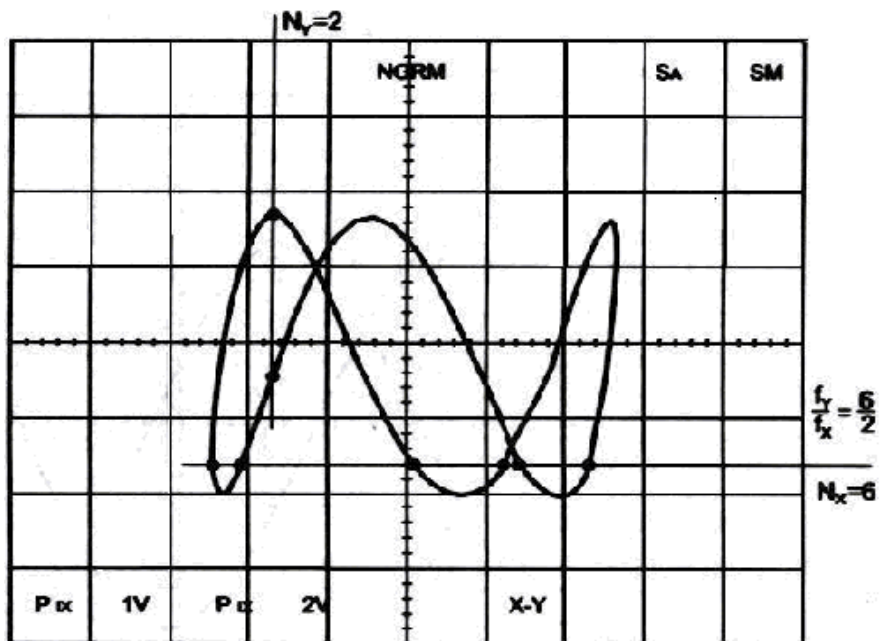
Pomiar częstotliwości metodą figur Lissajous

Dokładność metody jest równa dokładności generatora wzorcowego i nie zależy od oscyloskopu, który jest tylko wskaźnikiem przedstawiającym geometryczną interpretację wyniku porównania. Na wejście wzmacniacza odchylenia pionowego Y oscyloskopu należy podać sygnał o częstotliwości mierzonej z generatora sygnałowego GS, a na wejście wzmacniacza poziomego - sygnał z generatora wzorcowego GW (rys.24.19). Czułość wzmacniaczy torów X i Y musi być dobrana tak, aby otrzymana figura wypełniała ekran. Częstotliwość generatora wzorcowego należy zmieniać do chwili otrzymania na ekranie nieruchomego obrazu. Po uzyskaniu możliwie prostej, nieruchomej figury na ekranie należy poprowadzić proste: pionową i poziomą, przecinające figurę (rys. 24.20). Linie te nie mogą przechodzić przez węzły. Jeżeli liczba przecięć prostej poziomej z figurą zostanie oznaczona jako N_x a liczba przecięć prostej pionowej jako N_y to stosunek częstotliwości badanego generatora f_y do częstotliwości generatora wzorcowego f_x wynosi:

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{N_x}{N_y} \quad (24.28)$$



Rys. 24.19 Schemat blokowy układu do pomiaru częstotliwości metodą krzywych Lissajous



Rys. 24.20 Sposób pomiaru częstotliwości z krzywej Lissajous

Figury Lissajous

Kąt φ Stosunek częstotliwości	0°	45°	90°	135°	180°
	$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{1}$				
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{2}$					
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{3}$					
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{2}{3}$					

Pomiary

1. Wykonać pomiary amplitudy, okresu i częstotliwości napięć okresowo przemien-nych, odczytując wartość h oraz l (rys. 24.4)
 - Na wyjściu uzwojenia wtórnego przesuwника fazowego. Podłącz układ zgodnie ze schematem na rys. 24.5.
 - Na wyjściu układu prostownika jednopółwkowego i dwupółwkowego. Podłącz układ zgodnie ze schematem na rys. 24.6. Zdejmij oscylogramy napięć przy kluczu L rozwartym (prostowanie jednopółwkowe), przy kluczu L zwartym (pro-stowanie dwupółwkowe), przy różnych kombinacjach R i C na wyjściu układu filtrującego.
 - Na wyjściu generatora funkcyjnego. Podłącz układ zgodnie ze schematem na rys. 24.8. Wyznacz amplitudę i okres dla kilku różnych częstotliwości generatora i różnych napięć wyjściowych.
2. Zdjąć oscylogramy napięć na wyjściu układów: różniczkującego i całkującego:
 - Podłącz układ różniczkujący i całkujący zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 24.14.
3. Wykonać pomiar różnicy faz dwóch drgań harmoniczných metodą Lissajous.
 - Połącz układ pomiarowy zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 24.15. Tu zmianę przesunięcia fazowego realizuje się poprzez zmianę oporności układu RC.
 - Zdejmij obserwowane oscylogramy oraz pomierz wartości a i b (rys.24.16) dla kilku położeń potencjometru obrotowego.
 - Zmierz wartości rezystancji potencjometru R dla w/w położeń
 - Zmierz pojemność kondensatora C
4. Wykonaj pomiar przesunięcia fazowego za pomocą oscyloskopu dwukanałowego:
 - Podłącz układ przesuwника fazowego (rys.24.15) według schematu przedstawio-nego na rys.24.17.
 - Zdejmij obserwowane oscylogramy oraz pomierz wartości a i b (rys.24.17) dla kilku położeń potencjometru obrotowego.
 - Zmierz wartości rezystancji potencjometru R dla w/w położeń
 - Zmierz pojemność kondensatora C
5. Zmierzyć częstotliwość za pomocą figur Lissajous:
 - Połącz układ pomiarowy zgodnie ze schematem przedstawionym na rys.24.19.

- Zdejmij obserwowane oscylogramy dla kilku wybranych częstotliwości generatora funkcyjnego. Powinny to być takie częstotliwości, aby N_x/N_y było niewielką liczbą naturalną (wzór 24.28).
6. Wykonaj pomiary częstotliwości poprzez pomiar okresu:
- Podłącz wyjście generatora do wejścia Y oscyloskopu
 - Wykonaj pomiar okresu T dla kilku wybranych częstotliwości

Opracowanie wyników

ad. 1 i 2.

Przerysuj obserwowane oscylogramy na papier milimetry.

na rysunkach zaznacz wartości amplitud, okresów, częstotliwości napięć przemennych obliczone za pomocą wzorów (24.2) i (24.3).

opisując napięcia na wyjściu prostownika zaznacz obliczone wartości napięcia tętnień.

ad 3.

- Przerysuj oscylogramy. Zaznacz a i b na rysunku i oblicz przesunięcia fazowe wg wzoru (24.3)
- oblicz wartości przesunięcia fazowego ze wzoru 24.22
- policz błędy $\Delta\varphi$ oraz $\delta\varphi$ Wyniki obliczeń zamieść w tabeli

ad 4.

- Przerysuj oscylogramy. Zaznacz a i b na rysunku i oblicz przesunięcia fazowe wg wzoru (24.24).
- oblicz wartości przesunięcia fazowego ze wzoru 24.22.
- policz błędy $\Delta\varphi$ oraz $\delta\varphi$ Wyniki obliczeń zamieść w tabeli

ad 5.

- Przerysuj oscylogramy.
- zaznacz punkty przecięcia figury z sieczną poziomą i pionową.
- oblicz nieznaną częstotliwość korzystając ze wzoru (24.28).

ad.6.

- przerysuj oscylogramy.
- zaznacz wartości okresów na rysunku.
- oblicz nieznaną częstotliwość korzystając ze wzoru (24.26).

Literatura

- [1] KARKOWSKI **Z.**, *Miernictwo elektroniczne*, WSiP, Warszawa 1980.
- [2] SAWIELIEW I. W., *Wykłady z fizyki*, 1.1, PWN, Warszawa 1994.
- [3] Fizyka t. 2, D. Halliday, R. Resnick, wyd. PWN, Warszawa 1972.
- [4] Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, St. Szuba, wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1985.

BADANIE FERROMAGNETYKÓW

Wprowadzenie

Ferromagnetyczne własności materii

Orbitalny moment pędu elektronu, spinowy moment pędu elektronu, kwantowanie momentu pędu, moment magnetyczny atomu, ferromagnetyk, paramagnetyk, diamagnetyk, namagnesowanie spontaniczne, domeny ferromagnetyczne, efekt Barkhausena, temperatura Curie, pole magnetyczne, polaryzacja magnetyczna, indukcja magnetyczna, pętla histerezy, pole koercji, pozostałość magnetyczna, strumień magnetyczny, prawo indukcji magnetycznej.

Pole magnetyczne w ośrodkach można scharakteryzować za pomocą następujących wielkości wektorowych; indukcji magnetycznej \mathbf{B} , natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} i polaryzacji magnetycznej \mathbf{J} . Ogólny związek między tymi wektorami ma postać

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} \quad (26.1)$$

gdzie μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s} / \text{A} \cdot \text{m}$).

W wielu ośrodkach spełniony jest ponadto związek

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} = (\mu - 1) \mathbf{H} = \chi \mathbf{H} \quad (26.2)$$

gdzie

χ – podatność magnetyczna ośrodka,

μ – względna przenikalność magnetyczna ośrodka ($\mu = \chi + 1$),

Z obu tych związków wynika zależność

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (26.3)$$

Podatność magnetyczna χ i przenikalność magnetyczna μ charakteryzują własności magnetyczne ośrodka. W zależności od znaku i wartości χ oraz μ ośrodki dzielą się na:

- diamagnetyki ($\chi < 0$ i $\mu < 1$),

- paramagnetyki ($\chi > 0$ i $\mu > 1$,
- ferromagnetyki ($\chi \gg 0$ i $\mu \gg 1$ ponadto $\mu \neq \text{const}$).

Diamagnetyki i paramagnetyki należą do materiałów słabo magnetycznych, ich przenikalność magnetyczna jest bliska jedności. Ferromagnetyki mają bardzo dużą przenikalność magnetyczną.

Z mikroskopowego punktu widzenia ciała ferromagnetyczne są to takie ciała, których atomy mają nieskompensowane spinowe momenty magnetyczne elektronów. Orbitalne momenty magnetyczne elektronów nie biorą udziału w magnesowaniu ciał ferromagnetycznych. Tak więc warunkiem istnienia ferromagnetyzmu jest istnienie nieskompensowanych spinowych momentów magnetycznych, które mogą wystąpić tylko w atomach z niezapełnionymi całkowicie powłokami elektronowymi.

Drugim warunkiem wystąpienia ferromagnetyzmu jest oddziaływanie między momentami spinowymi elektronów sąsiednich atomów, prowadzące do ich wzajemnej orientacji równoległej. Oddziaływanie to jest czysto kwantowe i nie da się zrozumieć jego natury na gruncie fizyki klasycznej.

W podwyższonych temperaturach uporządkowanie spinowych momentów magnetycznych ulega zniszczeniu, ponieważ drgania cieplne przeszkadzają porządkującemu działaniu sił wymiany. Powyżej temperatury Curie spontaniczne namagnesowanie znika i następuje przejście do fazy paramagnetycznej.

Każdy ferromagnetyk ma strukturę domenową. Spiny w każdej domenie uporządkowane są jednakowo, lecz zorientowane w innym kierunku niż spiny sąsiednich domen. Pomimo tego, że lokalne namagnesowanie wewnątrz domen osiąga nasycenie, całkowity moment magnetyczny próbki jest zwykle równy zero. Struktura domenowa ferromagnetyków jest wynikiem dążenia do konfiguracji o minimalnej energii.

Zewnętrzne pole magnetyczne powoduje porządkowanie domen w kierunku tego pola. Proces ten może zachodzić dwoma sposobami:

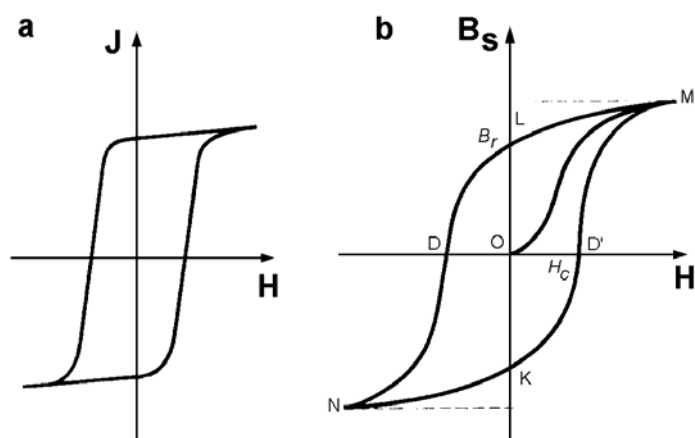
- w słabych polach magnetycznych objętości domen korzystniej zorientowanych w stosunku do zewnętrznego pola wzrastają kosztem domen zorientowanych niekorzystnie,
- w silnych zewnętrznych polach magnetycznych kierunek namagnesowania w obszarze domen obraca się w kierunku zewnętrznego pola.

Wzrost namagnesowania w pierwszym przypadku nie odbywa się w sposób ciągły, lecz drobnymi skokami odpowiadającymi nieregularnościom ruchu ścianek Blocha po-

szczególnych domen. Efekty towarzyszące skokom krzywej namagnesowania zostały nazwane od ich odkrywcy trzaskami Barkhausena.

Zależność indukcji magnetycznej od natężenia pola magnetycznego w rozmagnesowanej próbce ferromagnetyka ilustruje krzywa OM na rys. 26.1(b).

Gdy natężenie pola maleje od wartości $+H_{max}$ do zera, indukcja magnetyczna nie przebiega po krzywej pierwotnego namagnesowania OM , lecz wedle krzywej ML i dla natężenia pola $H = 0$ indukcja przyjmuje wartość OL .



Rys. 26.1 Pętla histerezy: a) w układzie H - J , b) w układzie H - B

Po zmianie kierunku pola i zwiększeniu jego wartości następuje spadek indukcji magnetycznej wzdłuż krzywej LD . Wraz ze wzrostem pola do wartości $-H_{max}$, indukcja magnetyczna rośnie zgodnie z krzywą DN . Gdy pole zmniejsza się od wartości $-H_{max}$ do zera, zmianę indukcji ilustruje krzywa NK ; po zmianie kierunku H i jego wzroście do $+H_{max}$ indukcja zmienia się zgodnie z krzywą KM , osiągając nasycenie w punkcie M . Otrzymaną w ten sposób zależność nazywa się pętlą histerezy magnetycznej. Wartość indukcji magnetycznej $OL=OK$ dla natężenia pola $H = 0$ nazywa się pozostałością magnetyczną B_r . Natężenie pola magnetycznego $OD = OD'$, które doprowadza do zera indukcję magnetyczną materiału, nazywa się polem koercji H_c . Jeżeli indukcję zastąpimy polaryzacją to pętla histerezy przyjmuje kształt pokazany na rysunku 26.1(a).

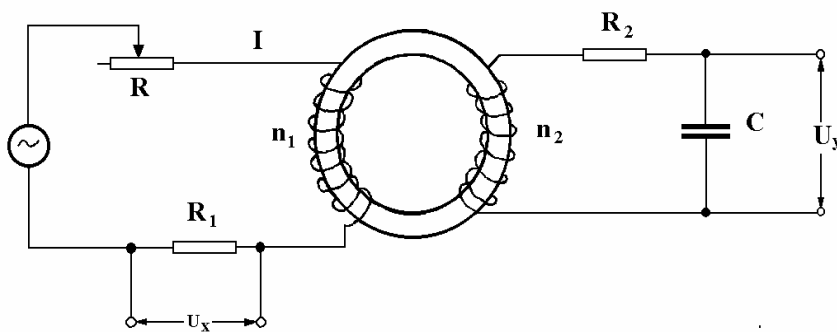
Wartości pozostałości magnetycznej B_r i pola koercji H_c są charakterystyczne dla danego materiału ferromagnetycznego i decydują o jego przydatności w zastosowaniach technicznych. Pole powierzchni pętli histerezy o wymiarze gęstości energii jest miarą pracy przemagnesowania (wzór 26.4). Przy cyklicznym przemagnesowywaniu praca ta zamienia się na ciepło.

$$[\mathbf{HB}] = \left[\frac{V \cdot s}{m^2} \frac{A}{m} \right] = \left[\frac{V \cdot A \cdot s}{m^3} \right] = \left[\frac{J}{m^3} \right] \quad (26.4)$$

Przebieg doświadczenia

Wyznaczanie pętli histerezy ferromagnetycznej

Do wyznaczania pętli histerezy wykorzystuje się metodę oscyloskopową. Schemat układu pomiarowego pokazano na rys.26.2. Próbkę stanowi rdzeń w kształcie toroidu. Uzwojenie magnesujące, złożone z n_1 zwojów, zasilane jest



Rys. 26.2 Schemat układu do obserwacji pętli histerezy ferromagnetycznej

prądem zmiennym I_1 o regulowanej amplitudzie. Wartość pola magnesującego H można znaleźć ze wzoru

$$H = \frac{n_1 \cdot I_1}{l} \quad (26.5)$$

gdzie l - średnia długość drogi magnetycznej w rdzeniu.

Ponieważ

$$I_1 = \frac{U_x}{R_1} \quad (26.6)$$

więc

$$H = \frac{n_1 \cdot U_x}{l \cdot R_1} \quad (26.7)$$

natężenie pola magnetycznego jest wprost proporcjonalne do napięcia U_x przyłożonego do płytek x oscyloskopu.

W uzwojeniu wtórnym o liczbie zwojów n_2 indukuje się siła elektromotoryczna U_2

$$U_2 = n_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (26.8)$$

gdzie $d\phi/dt$ jest prędkością zmian strumienia magnetycznego w rdzeniu toroidu.

Elementy $R_2 C$ obwodu wtórnego są tak dobrane, że stanowi on obwód całkujący, tzn. $R_2 \gg 1/\omega C$. Można zatem przyjąć, że napięcie U_y na wyjściu obwodu całkującego wynosi

$$U_y = \frac{1}{RC_2} \int_0^t U_2 dt = \frac{n_2}{R_2 C} \int_0^\Phi d\Phi = \frac{n_2 \Phi}{R_2 C} = \frac{n_2 \cdot S \cdot B}{R_2 C} \quad (26.9)$$

gdzie S - powierzchnia przekroju poprzecznego rdzenia toroidu.

Widać, że napięcie U_y podawane na płytce oscyloskopu jest wprost proporcjonalne do indukcji B .

Wierzchołek pętli histerezy leży na krzywej namagnesowania pierwotnego. Zmieniając wartość napięcia zasilającego układ pomiarowy U , można wyznaczyć krzywą pierwotnego namagnesowania oraz pętlę histerezy.

b). Pomiar temperatury Curie

Temperatury przejść fazowych typowych ferromagnetyków wynoszą kilkaset stopni Celsjusza. Tak więc wyznaczanie temperatury przejścia fazowego z temperaturowych zależności przenikalności magnetycznej ośrodka, czy polaryzacji magnetycznej, związane jest z trudnościami natury technicznej. W związku z tym zdecydowano się na inną metodę o wiele prostszą.

Własności ferromagnetyczne stwierdza się przez oddziaływanie igły magnetycznej z ferromagnetykiem. Igła magnetyczna jest przyciągana przez próbkę tak długo, jak długo materiał wykazuje własności ferromagnetyczne. Z chwilą przejścia materiału do fazy paramagnetycznej oddziaływanie zanika. Tak więc zanik oddziaływania badanej próbki na igłę magnetyczną określa moment przejścia fazowego.

Jeżeli w czasie doświadczenia badaną próbkę ustawi się tak, aby spowodowała odchylenie igły magnetycznej od kierunku N-S, to z chwilą zaniku oddziaływania między igłą i próbką, igła odchyli się do kierunku N-S.

Próbkę można podgrzewać elektrycznie (trzeba wtedy zadbać o to, aby bardzo dokładnie zaekranować pole magnetyczne pochodzące od grzejnika) lub za pomocą palnika gazowego. Do pomiaru temperatury próbki wykorzystuje się termoparę różnicową. Siłę termoelektryczną termopary mierzy się woltomierzem cyfrowym.

Wykonanie pomiarów i opracowanie wyników

13. Wyznaczanie krzywej pierwotnej namagnesowania.
14. Obserwacje i pomiar dynamicznej pętli histerezy.
15. Wyznaczanie wartości pozostałości magnetycznej.
16. Wyznaczanie wartości pola koercji.
17. Pomiar temperatury przejścia fazowego.
18. Wykorzystując pomierzone wartości U_x oraz U_y policzyć wartości B oraz H .
19. Przedstawić na wykresach zależności $B = f(H)$.
20. Wyznaczyć pole koercji.
21. Wyznaczyć pozostałość magnetyczną.
22. Wyznaczyć pracę przemagnesowania.
23. Korzystając z wcześniej wyliczonych wartości B i H policzyć wartości μ .
24. Przedstawić na wykresach zależności $\mu = f(H)$.
25. Przedstawić na wykresach zależności $J = f(H)$.
26. Błędy wyznaczyć metodą różniczki zupełnej.

Literatura

- [1]. A. Januszajtis, FIZYKA DLA POLITECHNIK - POLA t.2 , PWN Warszawa 1986
- [2]. J.Blinowski, J.Trylski, FIZYKA DLA KANDYDATÓW NA WYŻSZE UCZELNIE,
PWN, Warszawa 1973
- [3]. B.Jaworski, A.Dietlaf, L.Miłkowska, KURS FIZYKI, t.2, PWN, Warszawa 1976
- [4]. N.W. Ashcroft, N. D. Mermin, FIZYKA CIAŁA STAŁEGO, PWN, Warszawa 1986

OPTYKA
I
BUDOWA MATERII

SPRAWDZENIE PRAWA STEFANA- BOLTZMANA

Wprowadzenie.

Ciało nagrzane do odpowiednio wysokiej temperatury ma zdolność świecenia. Na przykład rozgrzane do wysokiej temperatury ciecze lub ciała stałe wysyłają białe światło o widmie ciągłym. Przy obniżaniu temperatury świecącego ciała zmienia się nie tylko natężenie, lecz również skład widmowy promieniowania, przesuując się w kierunku fal dłuższych (czerwonych i podczerwonych). W miarę dalszego obniżania temperatury ciało przestaje wysyłać promieniowanie widzialne, wysyła natomiast niewidzialne promieniowanie podczerwone (ciepłe). Promieniowanie to może się rozchodzić nie tylko w ośrodkach materialnych, ale również w próżni. Tak dociera do nas ciepło wysyłane przez Słońce. Promieniowanie ciepłe jest promieniowaniem elektromagnetycznym, emitowanym przez ciała w każdej temperaturze. Po ostygnięciu ciała do temperatury otoczenia dochodzi do stanu równowagi termicznej, w której ilość absorbowanej i emitowanej przez ciało energii jest taka sama. Jeśli temperatura ciała jest wyższa od temperatury otoczenia, to ciało emituje więcej energii niż pochłania i stygnie. W przeciwnym przypadku, tzn. gdy temperatura otoczenia przewyższa temperaturę ciała, ciało to będzie się ogrzewać, ponieważ więcej energii promienistej pochłonie niż wyemituje.

Wielkością charakteryzującą widmowy rozkład promieniowania ciepłego jest tzw. *zdolność emisyjna ciała*, którą określamy następująco:

$$E_{vT} = \frac{dW_{prom}}{dv} \quad (33.1)$$

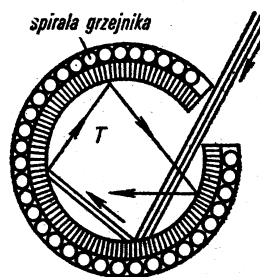
gdzie dW_{prom} – energia promieniowania elektromagnetycznego wysyłanego w ciągu jednostki czasu z jednostki powierzchni ciała w przedziale częstotliwości od ν do $\nu + d\nu$. Zdolność emisyjna jest więc równa mocy wypromieniowanej z jednostki powierzchni w przedziale częstotliwości o wartości jednostkowej. Można także ją określić jako ilość energii promieniowania monochromatycznego wysyłanego przez jednostkę powierzchni ciała o ustalonej temperaturze T w jednostce czasu w obrębie jednostkowego kąta bryłowego. W międzynarodowym Układzie Jednostek wielkość E_{vT} ma wymiar J/m^2 .

Różne ciała w różnym stopniu pochłaniają energię padających na nie fal elektromagnetycznych. Wielkością charakteryzującą rozkład widmowy pochłaniania jest *zdolność absorpcyjna ciała* (*współczynnik absorpcji monochromatycznej*), określona następująco:

$$A_{\nu T} = \frac{dW_{poch}}{dW} \quad (33.2)$$

Zdolność absorpcyjna ciała określa, jaka część energii fali elektromagnetycznej o częstotliwościach zawartych w przedziale od ν do $\nu + d\nu$ padającej w jednostce czasu na jednostkę powierzchni ciała zostaje przez nie pochłonięta. Oczywiście $A_{\nu T}$ jest wielkością bezwymiarową. Zdolność emisyjna i absorpcyjna ciała stałego zależą od częstotliwości ν wysyłanych i pochłanianych fal, temperatury ciała, jego składu chemicznego i właściwości jego powierzchni.

Ciało nazywamy *doskonale czarnym*, jeśli niezależnie od temperatury pochłania całą energię padającej na nie fali elektromagnetycznej, bez względu na jej częstotliwość. Tak więc zdolność absorpcyjna ciała doskonale czarnego jest równa jedności: $A_{\nu T}^{czarn} = 1$. Ciało doskonale czarne, tak jak każde inne ciało szare także emituje energię, dlatego dla odróżnienia zdolność emisyjną ciała doskonale czarnego oznaczamy przez $\epsilon_{\nu T}$. Zależy ona tylko od częstotliwości ν i temperatury bezwzględnej ciała T . Chociaż ciało doskonale czarne nie istnieje to jednak niektóre z ciał rzeczywistych w określonym przedziale częstotliwości mają właściwości do niego zbliżone. Na przykład w przedziale promieniowania widzialnego zdolność absorpcyjna sadzy, czerni platynowej i czarnego aksamitu mało różni się od jedności. Najbardziej idealnym modelem ciała doskonale czarnego jest niewielki otwór w nieprzezroczystej ścianie zamkniętej komory (Rys.33.1)



Rys. 33.1. Model ciała doskonale czarnego

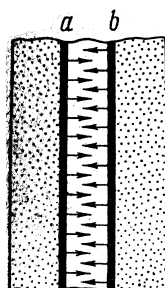
Wiązka światła wpadająca do wnętrza takiej komory przez ten otwór odbija się wielokrotnie od ścianek zanim ponownie ją opuści. Przy każdym odbiciu część energii wiązki

światła zostaje pochłonięta przez ścianki a ulegając wielokrotnemu odbiciu zostaje całkowicie zaabsorbowana. Jest rzeczą oczywistą, że model ten tym lepiej spełnia własności ciała doskonale czarnego, im stosunek powierzchni wewnętrznej naczynia do powierzchni otworu jest większy.

Wszystkie ciała mogą wymieniać między sobą energię cieplną. Wymiana ciepła przez promieniowanie różni się od wymiany przez konwekcję lub przewodzenie tym, że może ona zachodzić między ciałami nie tylko w środowisku materialnym, lecz również w próżni.

Rozpatrzmy układ ciał izolowany cieplnie, który znajduje się w równowadze termodynamicznej. Temperatury wszystkich ciał tego układu są takie same i nie zmieniają się w czasie i dla dowolnego ciała tego układu energia W_{prom} wypromieniowana w jednostce czasu z jednostki powierzchni musi być równa energii W_{poch} pochłoniętej w tym czasie przez taką samą powierzchnię ciała (w przeciwnym przypadku ciało by się ogrzewało lub ochładzało) (Rys.33.2) czyli:

$$dW_{\text{prom}} = dW_{\text{poch}} \quad (33.3)$$



Rys. 33. 2 Ciało doskonale czarne „a” i ciało szare „b”
w równowadze termodynamicznej

Jeśli w tej równowadze termodynamicznej znajduje się ciało doskonale czarne o zdolności emisyjnej $\varepsilon_{\nu T}$ gdzie:

$$\varepsilon_{\nu T} = \frac{dW}{d\nu} \quad (33.4)$$

wówczas ilość energii pochłoniętej przez dowolne ciało jest równa ilości energii wypromieniowanej przez ciało doskonale czarne, czyli;

$$dW_{\text{poch}} = dW = \varepsilon_{\nu T} d\nu \quad (33.5)$$

Podstawiając do zależności 33.3 wzory 33.1, 33.2 i 33.4 otrzymujemy;

$$E_{\nu T} d\nu = A_{\nu T} dW = A_{\nu T} \varepsilon_{\nu T} d\nu \quad (33.6)$$

czyli:

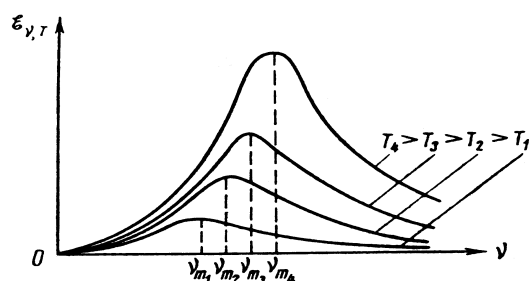
$$\varepsilon_{\nu T} = \frac{E_{\nu T}}{A_{\nu T}} \quad (33.7)$$

Otrzymujemy zatem, że stosunek zdolności emisyjnej do zdolności absorpcyjnej dowolnego ciała, nie zależy od materiału ciała, jest równy zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego i jest funkcją tylko temperatury i częstotliwości. Prawo to zostało po raz pierwszy sformułowane przez G. Kirchhoffa i zostało nazwane *prawem Kirchhoffa*, a funkcja $\varepsilon_{\nu T}$ funkcją Kirchhoffa. Z prawa tego wynika, że ciało, które w danej temperaturze T nie pochłania promieniowania w przedziale częstotliwości ν i $\nu + d\nu$ nie może w tej temperaturze promieniować w tym przedziale częstotliwości. Widać także, że zdolność emisyjna dowolnego ciała szarego $E_{\nu T}$ zależy od zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego w danej temperaturze dla określonej częstotliwości ν . Na przykład w temperaturze pokojowej ciało pokryte warstwą czerwonej farby silnie pochłania światło zielone. Jednak nie wypromieniowuje ono światła o tej długości fali, gdyż w temperaturze pokojowej ciało doskonale czarne również nie emituje światła zielonego gdyż zachodzi zależność;

$$\varepsilon_{\nu T} \approx 0 \quad E_{\nu T} = A_{\nu T} \varepsilon_{\nu T} \approx 0 \quad (33.8)$$

Widzimy więc, że znajomość zależności zdolności emisyjnej (zwana często funkcją Kirchhoffa) $\varepsilon_{\nu T}$ ciała doskonale czarnego od temperatury T i częstotliwości ν jest bardzo ważna dla teorii promieniowania cieplnego.

Doświadczenia wykazały, że zależność $\varepsilon_{\nu T}$ od częstotliwości ν , przy różnych temperaturach T ciała doskonale czarnego, ma postać przedstawioną na rys. 33.3



Rys. 33.3. Zależność widmowej zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego od częstotliwości ν i temperatury bezwzględnej T .

Początkowo udało się znaleźć zależność całkowitej zdolności emisyjnej ε_T (zdolność emisyjna przypadająca na wszystkie częstotliwości) a więc

$$\varepsilon_T = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu T} d\nu \quad (33.9)$$

L. Boltzman wykazał, że całkowita zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury bezwzględnej i wyraża się zależnością:

$$\varepsilon_T = \sigma T^4 \quad (33.10)$$

Prawo to zostało nazwane prawem **Stefana-Boltzmana**. Współczynnik proporcjonalności $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$, nazywamy stałą Stefana- Boltzmana.

Znacznie trudniejsze okazało się znalezienie w oparciu o prawa fizyki klasycznej zależności, która by dokładnie opisywała rozkład widmowy promieniowania $\varepsilon_{\nu T}$, znaleziony doświadczalnie i przedstawiony na rys.33.3, z którego wynika, że dla małych częstotliwości $\varepsilon_{\nu T} \sim \nu^2 T$, natomiast w obszarach dużych częstotliwości (prawa część krzywej daleko od maksimum) $\varepsilon_{\nu T}$ ma następującą postać;

$$\varepsilon_{\nu T} \sim \nu^3 e^{-\alpha \nu / T} \quad (33.11)$$

gdzie α - stała o wymiarze K s. Zależność (33.11) została znaleziona teoretycznie przez W.Wiena, i pokrywa się dobrze z krzywą doświadczalną (Rys.33.4) w zakresie średnich i dużych częstotliwości.

Jak widać ciało doskonale czarne prawie nie promieniuje w obszarach częstotliwości bardzo małych i bardzo dużych. Przy podnoszeniu temperatury ciała maksimum $\varepsilon_{\nu T}$ przesuwa się w stronę dużych częstotliwości. Na podstawie prawa Wiena możemy otrzymać zależność od temperatury częstotliwości ν_m odpowiadającej maksymalnej wartości zdolności emisyjnej $\varepsilon_{\nu T}$ ciała doskonale czarnego. W tym celu pochodną cząstkową $\frac{\partial \varepsilon_{\nu T}}{\partial \nu}$ przyrównujemy do zera i dla $\nu = \nu_m$ otrzymujemy zależność:

$$\nu_m = bT \quad (33.12)$$

gdzie b – stała, która jest pierwiastkiem rozwiązania tego równania.

Z ostatniej zależności wynika, że *częstość odpowiadająca maksymalnej wartości zdolności emisyjnej $\varepsilon_{\nu T}$ ciała doskonale czarnego jest wprost proporcjonalna do jego temperatury bezwzględnej*. Jest to tzw. prawo przesunięć Wiena, które wyraźnie ilustruje rys.33.3. Prawo Wiena nie opisuje dobrze eksperymentalnej krzywej (Rys.33.4) w zakresie niskich częstotliwości.

Stosując prawa klasycznej elektrodynamiki dla promieniowania zrównoważonego Rayleigha, a następnie Jeans otrzymali następujące wyrażenie na funkcję Kirchhoffa.

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \bar{\varepsilon}_\nu \quad (33.13)$$

gdzie $\bar{\varepsilon}_\nu$ to średnia w czasie wartość energii oscylatora o częstotliwości własnej ν i przy temperaturze układu T.

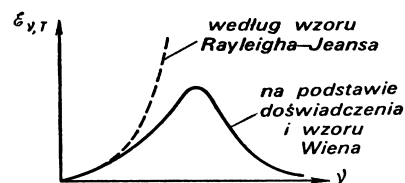
Średnią wartość energii $\bar{\varepsilon}_\nu = k \cdot T$ określili korzystając z klasycznego prawa o równomiernym rozkładzie energii na wszystkie stopnie swobody układu znajdującego się w równowadze termodynamicznej. Tak więc zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego spełnia następująca zależność Rayleigh'ego-Jeansa:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT \quad (33.14)$$

gdzie k – stała Plancka, c – prędkość światła w próżni.

Zależność (33.14) jest zgodna z wynikami doświadczalnymi w obszarze małych częstotliwości promieniowania ν . Natomiast w obszarze dużych częstotliwości zależność Rayleigh'ego – Jeansa nie jest zgodna z wartościami doświadczalnymi $\varepsilon_{\nu,T}$, z prawem Wiena ani z prawem Stefana – Boltzmana po zatem zależność $\varepsilon_{\nu,T}$ rośnie monotonicznie wraz ze wzrostem częstotliwości, nie ma maksimum, a całkowita zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego w dowolnej temperaturze dąży do nieskończoności i prowadzi do tzw. katastrofy fioletowej:

$$\varepsilon_T = \int_0^\infty \varepsilon_{\nu,T} d\nu = \frac{2\pi kT}{c^2} \int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty \quad (33.15)$$



Rys.33.4. Porównanie krzywej doświadczalnej z zależnością Rayleigha-Jeansa i Wiena.

Zgodnie z prawem Stefana – Boltzmana ε_T powinno być proporcjonalne do czwartej potęgi temperatury bezwzględnej, tzn. powinno być wielkością skończoną.

Tak więc fizyka klasyczna okazała się niezdolną do wyjaśnienia rozkładu energii promieniowania ciała doskonale czarnego. Prawidłową postać funkcji Kirchhoffa udało się ustalić dopiero na podstawie całkowicie nowych idei dotyczących mechanizmów promieniowania światła. W roku 1900 Max Planck wysunął hipotezę, że absorpcja i emisja energii promieniowania elektromagnetycznego przez atomy i cząsteczki ciał może odbywać się tylko określonymi porcjami, a więc energia oscylatora może przybierać tylko określone nieciągłe wartości, równe całkowitej liczbie elementarnych porcji energii ε_0 , które nazwał on kwantami energii, zatem:

$$\varepsilon_\nu = n\varepsilon_0 \quad (33.16)$$

gdzie n – dowolna liczba naturalna. Wielkość kwantu energii ε_0 jest wprost proporcjonalna do częstości promieniowania i wyraża się wzorem:

$$\varepsilon_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (33.17)$$

Współczynnik proporcjonalności $h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ nazywamy stałą Plancka.

W widzialnej części widma przy długości fali $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ kwant energii równa się:

$$\varepsilon_0 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0.5 \cdot 10^{-6}} = 3.79 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2.4 \text{ eV}$$

Uwzględniając zależność (33.16) Planck otrzymał następujące wyrażenia na średnią wartość $\bar{\varepsilon}_\nu$ energii oscylatora kwantowego:

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (33.18)$$

Zakładając, że Rayleigh i Jeans popełnili błąd jedynie przy wyznaczaniu średniej energii oscylatorów i podstawiając otrzymaną zależność do wzoru (33.13) otrzymujemy wzór Plancka na zdolność emisyjną ciała doskonale czarnego:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (33.19)$$

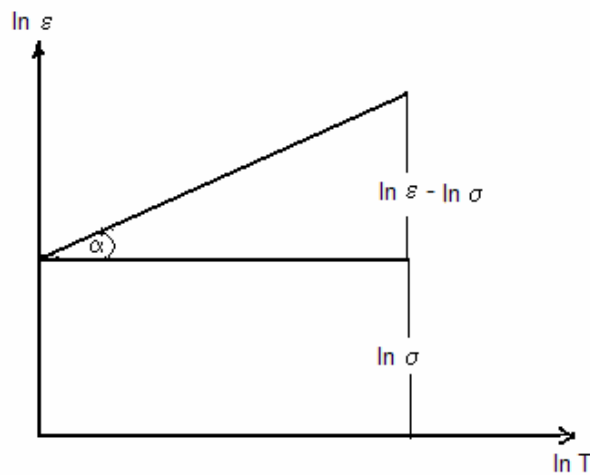
Zależność ta jest zgodna z wynikami doświadczalnymi pomiarów rozkładu energii promieniowania ciała doskonale czarnego w całym zakresie badanych częstotliwości przy różnych temperaturach. Z wzoru Plancka łatwo możemy otrzymać prawo Stefana – Boltzmana, prawo Przesunięć Wiena i prawo Rayleigha – Janes'a.

33.1 Opis ćwiczenia.

Sprawdzenie prawa Stefana – Boltzmana polega na eksperymentalnym wyznaczeniu wykładnika potęgi 4 w wyrażeniu $\varepsilon_T = \sigma T^4$. Logarytmując tę zależność otrzymujemy

$$\ln \varepsilon_T = \ln \sigma + 4 \ln T \quad (33.20)$$

Odczytujemy na piroelektrycznym detektorze promieniowania moc ε_T odpowiadającą bezwzględnej temperaturze T, następnie wykreślamy zależność logarytmu naturalnego mocy $\ln \varepsilon_T$ od logarytmu naturalnego temperatury bezwzględnej – $\ln T$. Wyznaczamy współczynnik potęgi x w prawie Stefana – Boltzmana, tak jak przedstawiono na rys. (33.5).



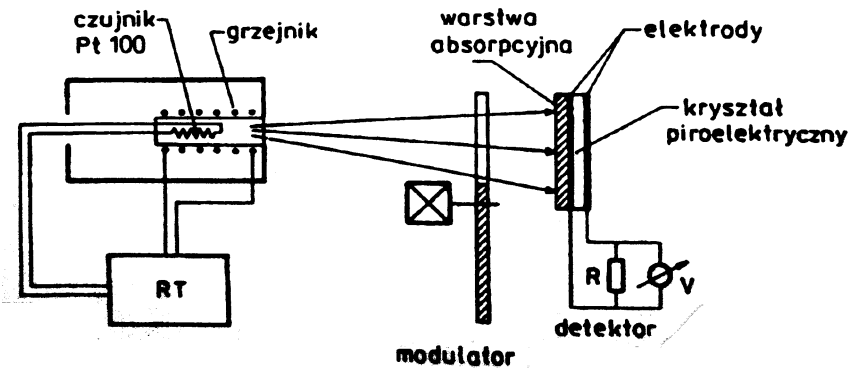
Rys.33.5. Zależność mocy promieniowania ciała doskonale czarnego od temperatury bezwzględnej T.

Z rysunku widać, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\ln \varepsilon_T - \ln \sigma}{\ln T}$, lecz z zależności (33.10) otrzymujemy

również, że $4 = \frac{\ln \varepsilon_T - \ln \sigma}{\ln T}$, a więc $\operatorname{tg} \alpha = 4 = x$

Przyrządy:

1. Regulator temperatury z modelem ciała doskonale czarnego i modulatorem.
2. Piroelektryczny detektor promieniowania podczerwonego.



Rys. 33.6 Schemat układu pomiarowego.



Rys. 33.7 Widok aparatury pomiarowej

33.2. Wykonanie pomiarów i opracowanie wyników

-połączyć wejście grzejnika ciała doskonale czarnego z wyjściem na tylnej ścianie

regulatora temperatury.

-ustawić piroelektryczny detektor promieniowania podczerwonego przed otworem wyjściowym promieniowania ciała doskonale czarnego w odległości około 1 cm od tarczy modulatora.

-włączyć modulator oraz piroelektryczny detektor promieniowania, odczekać około 3 min.

-za pomocą przełączników znajdujących się na przedniej ścianie regulatora temperatury nastawić żadaną temperaturę, np. 90° C. W tym momencie zapalą się zielone diody a ich liczba jest proporcjonalna do odchylenia temperatury modelu ciała doskonale czarnego od temperatury zadanej (90° C). Po zapaleniu się czerwonych lampek odczekać tak długo, aż ponownie zapali się pierwsza lampka zielona i w tym momencie zanotować moc promieniowania wysyłaną przez ciało doskonale czarne i odpowiadającą jej temperaturę pokazaną na wyświetlaczu umieszczonym w obudowie modulatora. W podobny sposób postępować przy każdej kolejnej zmianie nastawy temperatury. Pomiary wykonać w zakresie temperatur od 90° C do 400° C co 20° C.

Po wykonaniu pomiarów wyłączyć modulator, regulator temperatury oraz detektor.

Uwagi:

- detektor jest wrażliwy na wstrząsy i wibracje, dlatego wymaga bardzo delikatnej obsługi.
- Podczas pomiarów nie należy zmieniać geometrii układu – wzajemnego położenia detektora i modelu ciała doskonale czarnego.
- w zakresie do 350° C pomiary prowadzić w położeniu „1” przełącznika mocy na przedniej ścianie modelu C.D.C. a powyżej w pozycji „2”
- potencjometr w prawym dolnym rogu służy do regulacji histerezy termicznej regulatora. Pozycja zaznaczona czarną kreską jest optymalna dla obu zakresów temperatur.

Tabela pomiarów.

Lp.	t ° [C]	T[K]	ln T	ε	ln ε	ln σ	x
1.							
2.							
3.							

Wyniki pomiarów przedstawić na wykresie $\ln \varepsilon = f(\ln T)$, oraz na jego podstawie wyznaczyć wykładnik potęgi „x” występujący w prawie Stefana - Boltzmana (Rys.33.5). Przeprowadzić dyskusję błędów.

Literatura

- [1] B. Jaworski, A. Dietław *Procesy falowe optyka, fizyka atomowa i jądrowa*, PWN Warszawa 1969. Część VII Roz.X
- [2] J. Massalski, M. Massalska, *Fizyka dla inżynierów cz.1* PWN Warszawa 1980. Roz. 25.
- [3] Sz. Szczeniowski *Fizyka doświadczalna cz.4 Optyka* PWN Warszawa 1980.
- [4] A. Piekara, *Elektryczność, materia i promieniowanie* PWN Warszawa 1986. Roz. 6.

**WYZNACZANIE DŁUGOŚCI FALI ŚWIETLNEJ ZA
POMOCĄ SIATKI DYFRAKCYJNEJ****Wprowadzenie**

Dyfrakcją, czyli ugięciem światła nazywamy zjawisko uginania się promieni świetlnych od ich prostoliniowego biegu, spowodowane przeszkodami w postaci krawędzi, przesłon, otworów oraz szczelin o wymiarach porównywalnych z długością fali. W następstwie interferencji, czyli nakładania się ugiętych fal, otrzymujemy obraz dyfrakcyjny o zmiennym natężeniu, którego rozkład podlega zasadzie Huygensa. Zasada ta mówi, że każdy punkt czoła rozchodzącej się fali jest źródłem wtórnych fal spójnych (patrz ćwiczenie Wyznaczanie promieni krzywizny soczek metodą pierścieni Newtona). Zasada ta umożliwia nam wyznaczenie kierunków rozchodzenia się fal ugiętych oraz oszacowanie rozkładu natężeń interferujących wiązek światła. Fale wtórne są falami fikcyjnymi i służą do konstrukcji kształtu czoła fali ugiętej. Rys. 34.1a ilustruje wykorzystanie zasady Huygensa do opisu obrazu interferencyjnego powstałego w wyniku nakładania się fal świetlnych ugiętych na dwóch szczelinach.

Jeśli czoło monochromatycznej fali płaskiej dochodzi do przesłony P, obydwie szczeliny – zgodnie z zasadą Huygensa - stają się źródłami spójnych, kolistych fal wtórnych, rozchodzących się poza przesłoną we wszystkich możliwych kierunkach w obrębie kąta półpełnego. W wyniku interferencji obydwu ciągów fal, na ekranie obserwujemy szereg symetrycznie rozłożonych, na przemian ciemnych i jasnych prążków o różnej intensywności. Maksima interferencyjne (prążki jasne) powstają w tych miejscach ekranu , w których ugięte na szczelinach fale spotykają się w zgodnych fazach. Gdy fazy interferujących ciągów są przeciwne, na ekranie obserwujemy prążki ciemne. Jeżeli fala płaska pada prostopadle na przesłonę, to obydwie ciągi opuszczają szczeliny w tej samej fazie. Maksima rejestrujemy na tych kierunkach ugięcia φ , na których różnica dróg optycznych pokonywanych przez obydwie ciągi jest równa wielokrotności długości fali (rys. 34.1b).

. Zwykle odległość d pomiędzy szczelinami jest znacznie mniejsza od odległości dzielącej przesłonę od ekranu i wówczas interferujące fale biegną prawie równolegle, a kąty φ , pod którymi obserwujemy maksima są w dobrym przybliżeniu opisane równaniem:

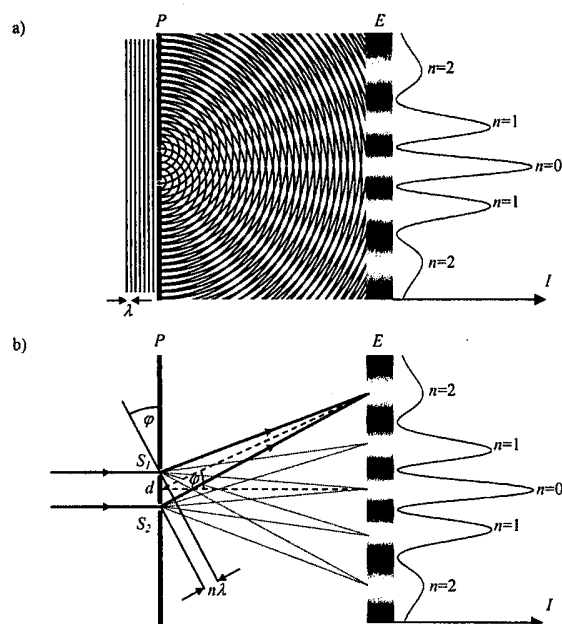
$$d \sin \varphi = n\lambda \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (34.1)$$

gdzie:

d – odległość pomiędzy szczelinami

n – numer rzędu widma

λ - długość fali świetlnej



Rys. 34.1 Ilustracja zasady Huygensa (a) oraz mechanizm powstawania maksimum interferencyjnych (b) po dyfrakcji światła na dwóch szczelinach. P – przesłona, S_1 i S_2 – szczeliny, E – ekran, d – odległość pomiędzy szczelinami, φ - kąt ugięcia światła, I – natężenie obrazu interferencyjnego, n – rząd widma, λ - długość fali świetlnej

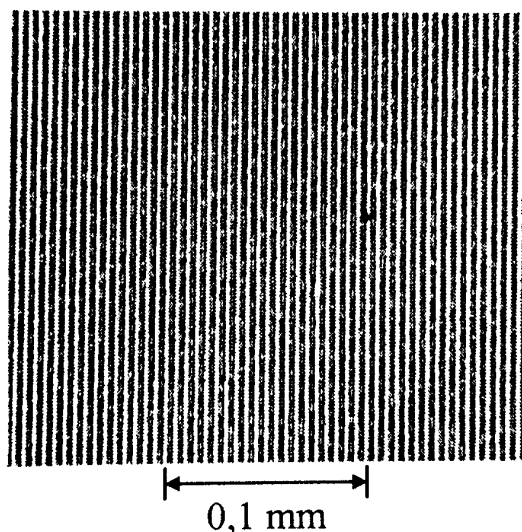
Minima interferencyjne rejestrujemy na tych kierunkach, na których różnica dróg optycznych przebytych przez obydwa ciągi jest nieparzystą wielokrotnością połowy długości fali:

$$d \sin \varphi \approx (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2,3,\dots \quad (34.2)$$

Zależności (34.1 i 34.2) wyznaczają kątowy rozkład maksimum i minimum, gdy z założenia rozważamy równoległe względem siebie i padające na szczeliny – ugięte pod tym samym kątem promienie świetlne.

Zjawisko dyfrakcji wykorzystuje się powszechnie do analizy widmowej światła. Podstawowym instrumentem wykorzystywanym do tego celu jest siatka dyfrakcyjna będąca

zbiorem dużej liczby równoległych i jednakowych szczelin w nieprzeźroczystej przesłonie. Siatkę taką tworzy najczęściej szereg rys naniesionych metodą mechaniczną lub fotograficzną na cienką płasko-równoległą płytkę szklaną (rys. 34.2).

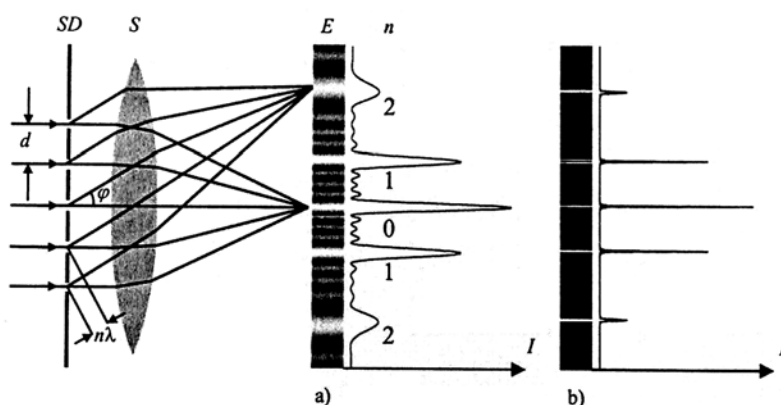


Rys. 34.2 Mikroskopowy obraz fragmentu transmisyjnej siatki dyfrakcyjnej w 200-krotnym powiększeniu. Stała siatki $d = 0.005$ mm. Ciemne i białe pasy to odpowiednio rysy (przesłony) oraz części niezarysowane płytki (szczeliny).

Nieprzeźroczyste rysy oraz przepuszczające światło przestrzenie pomiędzy nimi pełnią odpowiednio rolę przesłon i szczelin. Liczba szczelin przypadających na 1 mm siatki wynosi zwykle od kilkudziesięciu do tysiąca. Oznacza to, że odległość pomiędzy środkami sąsiadujących szczelin – tzw. stała siatki dyfrakcyjnej może się zmieniać od setnych do tysięcznych części milimetra.

Gdy prostopadle na siatkę pada skolimowana wiązka światła o długości fali λ , to zgodnie z zasadą Huygensa, każda ze szczelin staje się źródłem wtórnych fal spójnych, które mogą ze sobą interferować. Jeżeli używamy niespójnego źródła światła (np. lampy sodowej), to wypadkowy obraz interferencyjny powstaje przez nałożenie się wszystkich obrazów otrzymanych w wyniku interferencji poszczególnych fal spójnych wyemitowanych przez pojedyncze atomy źródła. Istotną rolę w powstawaniu obrazu interferencyjnego odgrywają rozmiary źródła światła. Składowe obrazy interferencyjne pochodzące z różnych segmentów powierzchni źródła są nieznacznie względem siebie przesunięte, co powoduje rozmycie obrazu wypadkowego. Efekt ten pogłębia się przy większych rozmiarach źródła światła i mniejszych odległościach od siatki dyfrakcyjnej. Przy pewnych granicznie

dużych gabarytach źródła, jasne prążki interferencyjne pochodzące z jego centralnej części pokrywają się z sąsiednimi – ciemnymi prążkami z obrzeży źródła, co prowadzi do wygaszenia wypadkowego obrazu interferencyjnego. Aby uzyskać nierozmyty obraz, ograniczamy rozmiary źródła przesłaniając je zwykle odpowiednio wąską szczeliną ustawioną w dostatecznie dużej odległości od siatki dyfrakcyjnej. Obraz interferencyjny szczeliny oświetlającej ulega wówczas wyraźnemu wzmocnieniu lub wygaszeniu na różnych kierunkach obserwacji, w zależności od różnicy dróg optycznych przebytych przez spójne ciągi fal ugięte na szczelinach siatki (rys. 34.3)



Rys. 34.3 Schemat powstawania obrazu interferencyjnego (widma) przy przejściu światła przez siatkę dyfrakcyjną o pięciu (a) i pięćdziesięciu (b) szczelinach:

SD – siatka dyfrakcyjna, S – soczewka skupiająca, E – ekran, d – stała siatki dyfrakcyjnej, φ – kąt ugięcia światła, I – natężenie obrazu interferencyjnego, n – rząd widma, λ - długość fali świetlnej.

Wzmocnienie obrazu rejestrujemy na tych kierunkach φ , dla których różnica dróg optycznych przebytych przez promienie wychodzące z dowolnych dwóch sąsiednich szczelin siatki spełnia zależność (34.1). Zależność ta wyznacza kierunki, na których rejestrujemy tzw. maksima główne kolejnych rzędów widma określonych przez liczbę n . Dla $n=0$, obserwujemy zerowe maksimum główne odpowiadające $\varphi = 0$, tj. kierunkowi, na którym promienie świetlne nie uległy ugięciu. Maksimum to odpowiada największemu

wzmocnieniu interferujących fal. Dla dostatecznie wąskich (w porównaniu ze stałą siatki) szczelin, pozostałe maksima główne odpowiadające kolejnym liczbom $n = 1, 2, 3, \dots$ cechują się monotonicznie malejącym natężeniem interferującego światła. Z dokładnej analizy zagadnienia wynika, że pomiędzy sąsiednimi maksimami głównymi występuje $N - 1$ minimum oddzielonych od siebie $N - 2$ niewielkimi maksimami wtórnymi powstałymi w wyniku interferencji promieni z niektórych tylko szczelin N siatki. Największe natężenie maksimum wtórnego nie przekracza 5% natężenia najbliższego maksimum głównego. Z zależności (34.1) wynika ponadto, że liczba maksimów głównych nie zależy od liczby szczelin w siatce. Ich wzrost powoduje natomiast proporcjonalny wzrost energii przepuszczonego przez siatkę światła, w wyniku czego maksima główne stają się wysokie i ostre, a ich natężenie rośnie jak N^2 . Przy dużej liczbie szczelin, maksima wtórne są praktycznie niezauważalne, a obraz interferencyjny tworzą jedynie wyraźne maksima główne oddzielone od siebie ciemnymi pasami ekranu (rys. 34.3). Z relacji (34.1) wynika także, że kąty φ pod którymi rejestrujemy maksima interferencyjne zależą tylko od stałej siatki d i długości fali λ . Im mniejsza jest stała siatki, tym większy jest kąt obserwacji widma ustalonego rzędu. Kąt ten również rośnie ze wzrostem długości fali światła przechodzącego przez siatkę. W przypadku światła emitowanego przez pierwiastki lub związki chemiczne, każdy rząd widma zawiera tyle prążków, ile jest barw składowych emitowanego światła. Jeśli liczba szczelin jest zbyt mała, maksima interferencyjne pochodzące od fal różniących się nieznacznie długością mogą na siebie nachodzić, dając prążek widmowy odpowiadający jednej długości fali. Parametrem charakteryzującym możliwość rozróżnienia dwóch sąsiednich linii należących do tego samego rzędu widma, odpowiadających falom o długości λ i maksymalnie zbliżonej do niej długości $\lambda + \Delta\lambda$, jest zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej określona zależnością,

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN \quad (34.3)$$

z której wynika, że zdolność rozdzielcza siatki rośnie ze wzrostem ilości szczelin i jest większa w obszarach widmowych wyższych rzędów.

34.1. Opis ćwiczenia.

W ćwiczeniu wykorzystujemy zestaw optyczny składający się z ławy optycznej, na której umieszczono źródło światła (laser półprzewodnikowy), skalę pomiarową, oraz siatkę dyfrakcyjną o znanej lub nieznannej stałej siatki. Laser ustawiamy przed siatką i tak orientujemy wiązkę światła by zerowe maksimum interferencyjne pokrywało się ze środ-

kiem skali pomiarowej. Ugięte pod kątami φ promienie tworzą wówczas po obu stronach skali symetrycznie rozłożone, rzeczywiste obrazy wiązki światła odpowiadające maksimum interferencyjnym kolejnych rzędów (rys. 34.4). Położenia L_n i P_n maksimum n – tego rzędu odczytujemy wprost ze skali pomiarowej. Średnia arytmetyczna obydwu odczytów wyznacza średnią odległość y_n obrazu interferencyjnego od środka ekranu:

$$y_n = \frac{L_n + P_n}{2} \quad (34.4)$$

Stosownie do warunku (34.1) kąt φ , pod którym obserwujemy maksimum interferencyjne n – tego rzędu, określa zależność:

$$\sin \varphi_n = \frac{y_n}{\sqrt{x^2 + y_n^2}} = \frac{n\lambda}{d}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (34.5)$$

gdzie: x – odległość siatki dyfrakcyjnej od ekranu

n - numer rzędu widma

λ - długość fali emitowanego światła.

Związek (34.5) umożliwia nam wyznaczenie zarówno stałej siatki d jak również długości fali λ , na podstawie pomiaru odległości dowolnego maksimum od środka skali pomiarowej.

W pierwszej części ćwiczenia wyznaczamy długość fali λ przy znanej wartości stałej siatki nr.1, natomiast w drugiej części nie znaną stałą siatki d dla siatki nr. 2. Obliczenia wykonujemy na podstawie pomiaru odległości dowolnego maksimum od środka skali pomiarowej. Za stałą siatki przyjmujemy średnią arytmetyczną wynikającą z obliczeń przeprowadzonych dla wszystkich widocznych na skali obrazów interferencyjnych.

W ćwiczeniu demonstrujemy również rozszczepienie światła białego emitowanego przez lampę oświetleniową wyposażoną w soczewkę kolimującą. Lampę ustawiamy przed siatką dyfrakcyjną uzyskując na skali pomiarowej rzeczywisty obraz widma ciągłego. Dokonujemy pomiaru położenia linii widmowych odpowiadających środkom pasm poszczególnych barw składowych światła białego. Sprawdzamy, czy obliczone długości fal mieszczą się w odpowiednich zakresach długości fal odczytanych w tablicach.

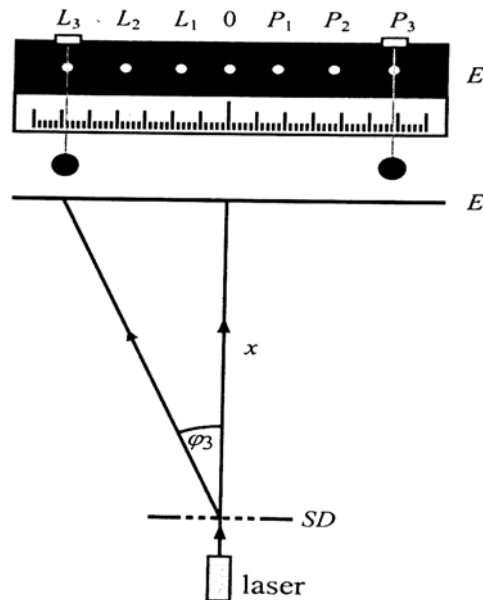
34.2. Przebieg pomiarów

a) Wyznaczanie długości fali świetlnej (rys. 34.4)

Przyrządy:

1. Ława optyczna
2. Siatka dyfrakcyjna

3. Laser półprzewodnikowy
4. Lampa oświetleniowa – źródło światła białego



Rys. 34.4. Schemat układu optycznego do wyznaczania długości fali świetlnej i stałej siatki dyfrakcyjnej.

E – ekran ze skalą, SD – siatka dyfrakcyjna, L_n i P_n – położenia maksimum interferencyjnych n – tego rzędu.

Przebieg czynności

1. Siatkę dyfrakcyjną o znanej stałej d umieścić w odległości około 0.5 m przed skalą pomiarową tak, aby siatka i skala leżały w płaszczyznach względem siebie równoległych. Włączyć laser i ustawić go przed siatką w takim położeniu, aby zerowe maksimum interferencyjne pokrywało się ze środkiem skali pomiarowej.
2. Odczytać położenie wszystkich widocznych na ekranie maksimum interferencyjnych z lewej i prawej strony od środka skali pomiarowej. Dla pary obrazów interferencyjnych z każdego rzędu widma obliczyć ich średnią odległość od środka ekranu (zal. 34.4)

Pomiary wykonać dla co najmniej 3 różnych odległości x siatki od skali.

3. Obliczyć długość fali promieniowania laserowego z zależności:

$$\lambda = \frac{d \sin \varphi}{n} \quad (34.6)$$

gdzie:
$$\sin \varphi = \frac{y_n}{\sqrt{y_n^2 + x^2}} \quad (34.7)$$

stąd
$$\lambda = \frac{dy_n}{n\sqrt{y_n^2 + x^2}}, \quad n = 1,2,3 \quad (34.8)$$

Wyniki pomiarów umieszczamy w poniższej tabeli;

Tabela 34.1

n	L _n [cm]	P _n [cm]	y _n [cm]	d [mm]	x [cm]	λ [nm]
1						
2						
3						

b) Wyznaczanie stałej siatki dyfrakcyjnej.

1. Siatkę dyfrakcyjną o nie znanej stałej d umieścić w odległości około 0.5 m przed skalą.
2. Wykonać czynności 1 i 2 dotyczące części a)
3. Stałą siatki wyznaczyć z zależności:

$$d = n\lambda \frac{\sqrt{x^2 + y_n^2}}{y_n}, \quad n = 1,2,3, \quad (34.9)$$

Otrzymane wyniki pomiarów umieścić w tabeli:

Tabela 34.2

N	L _n [cm]	P _n [cm]	y _n [cm]	x [cm]	λ [nm]	d [mm]
1						
2						
3						

Obliczyć wartość średnią stałej siatki. Oszacować błąd maksymalny, tj. wartość bezwzględną z różnicy pomiędzy średnią wartością stałej siatki i wartością najbardziej od niej odbiegającą. Podobnie obliczyć błąd przy wyznaczaniu długości fali λ.

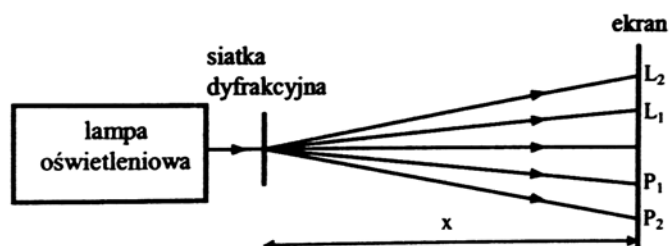
c) Wyznaczanie zdolności rozdzielczej siatki dyfrakcyjnej.

1. Zmierzyć za pomocą suwmiarki długość siatki dyfrakcyjnej
2. Określić doświadczalnie najwyższy rząd widma n jeszcze dostatecznie jasnego dla obserwacji.
3. Obliczyć zdolność rozdzielczą siatki dyfrakcyjnej z zależności (34.3)

$$R = n N$$

d) Badanie widma źródła światła białego.

1. Przed siatką dyfrakcyjną ustawić lampę oświetleniową w takim położeniu, aby obraz interferencyjny zerowego rzędu (jasny obraz włókna żarówki) znalazł się pośrodku skali (jak na rys. 34.5)



Rys. 34.5. Schemat do badania widma światła białego.

2. Odczytać położenie linii widmowych odpowiadających środkom pasm podstawowych barw rzeczywistego widma ciągłego 1 i 2 rzędu.
3. Obliczyć długości fal odpowiadające poszczególnym barwom i sprawdzić czy mieszczą się w odpowiednich zakresach długości podanych w tablicach

Tabela 34.3

Barwa	L ₁ [cm]	P ₁ [cm]	L ₂ [cm]	P ₂ [cm]	λ ₁ [nm]	λ ₂ [nm]	λ _{sr} [nm]	Δλ _{tab} [nm]
Czerwona								
Żółta								
Zielona								
Niebieska								
Fioletowa								

Literatura

- [1] J. Massalski, M. Massalska, *Fizyka dla inżynierów cz.1*. PWN Warszawa 1980. Roz. 23.
- [2] Sz. Szczeniowski *Fizyka doświadczalna cz.1*. PWN Warszawa.1980.
- [3] J. R. Meyer-Arndt, *Wstęp do optyki*, PWN Warszawa 1977. Roz. 2

ANALIZA SPEKTRALNA

Wprowadzenie

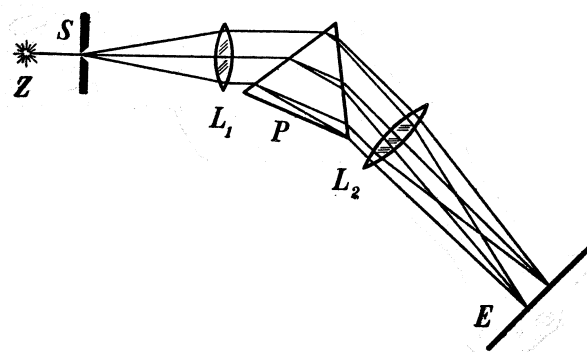
Bunsen i Kirchhoff odkryli w r. 1859, że pobudzone do świecenia gazy dają charakterystyczne widma nieciągłe. Fakt ten stał się podstawą analizy widmowej. Do świecenia pobudzać możemy ciała w różny sposób np. wprowadzając je do płomienia, wywołując wyładowania iskrowe między elektrodami z badanego metalu, albo możemy wywołać wyładowanie łukowe, przy czym jedna z elektrod łuku jest wykonana z badanego metalu; możemy też po prostu wywołać wyładowania elektryczne w parze danego metalu w lampach spektralnych. W tych wszystkich przypadkach obserwujemy charakterystyczne widmo złożone z oddzielnych linii. Widmo to charakteryzuje atomy poszczególnych pierwiastków. Typowym przykładem takiego widma jest widmo sodu, które w zakresie widzialnym składa się z dwu żółtych linii tzw. Linii D_1 i D_2 . Liniom tym odpowiada światło ściśle określonej długości fali: $D_1 = 5895,932 \text{ \AA}$, $D_2 = 5889,965 \text{ \AA}$. Żółte linie sodu D charakteryzują więc widmo atomów sodu. Możemy je zauważyć wprowadzając do płomienia palnika dowolny związek sodu np. kryształy soli NaCl .

Każdy pierwiastek posiada swoje charakterystyczne widmo złożone z linii, których położenie w widmie podlega określonemu prawu tworząc tzw. serie widmowe. Widma liniowe są charakterystyczne dla każdego rodzaju atomów w stanie gazu lub pary. Pojawienie się widma liniowego charakteryzującego atomy wymaga dysocjacji związków w których skład te atomy wchodzi. Dysocjacja taka występuje zawsze w warunkach świecenia płomienia, łuku lub iskry. Na rys. 35.3 przedstawiono widok widma liniowego.

Na tej zasadzie oparta jest analiza widmowa. Polega ona na tym, że z występowania określonych linii w widmie nieznanym nam gazów lub par wnioskujemy, że w skład tych gazów wchodzi atomy wysyłające odpowiednie linie i w ten sposób przeprowadzamy jakościową analizę składu badanej pary czy gazu.

Metoda analizy widmowej jest bardzo czuła; pozwala ona wykryć np. już $3 \cdot 10^{-7}$ mg sodu lub 10^{-7} mg litu. Z natężenia linii możemy również wnioskować o ilości danego pierwiastka w badanym stopie czy w innym nieznanym związku tak, że analiza widmowa daje także wyniki ilościowe.

Widmo liniowe możemy otrzymać rzucając promieniowanie badanego gazu na szczelinę S i następnie przez soczewkę L_1 na pryzmat P (rys. 35.1). Po wyjściu z pryzmatu wiązka światła zostaje zebrana za pomocą soczewki L_2 , tworząc na ekranie E obraz widma rys. 35.3.



Rys. 35.1. Schemat układu do obserwacji widma.

Widmo w ten sposób otrzymane składa się z szeregu jasnych linii na ciemnym tle.

Jeżeli w otrzymanym widmie – nawet przy dużym powiększeniu – nie można wyodrębnić poszczególnych linii odpowiadających danym długościom fal, lecz obserwujemy wstęgę barwną, to takie widmo nazywamy ciągłym. Widma ciągłe dają rozżarzone ciała stałe,



Rys. 35.2. Widok widma pasmowego



Rys.35.3. Widok widma liniowego

ciekle i gazy pod wysokim ciśnieniem. Pobudzone do świecenia cząsteczki związków chemicznych dają tzw. widmo pasmowe. Widma tego typu składają się z wielu jasnych pasm, posiadających po jednej stronie wyraźne krawędzie. Przy dużym powiększeniu wi- dać, że te składają się z szeregu dużej ilości linii, zagęszczających się w kierunku krawędzi każdego pasma. Na rys. 35.2 przedstawiono wygląd widma pasmowego.

Omówione przykłady widm należą do tzw. widm emisyjnych. Widma te powstają wówczas, gdy światło emitowane przez źródło dociera bezpośrednio do urządzenia rozsz- czepiającego np. spektroskopu.

Innym rodzajem widm są tzw. widma absorpcyjne. Tego typu widma powstają, gdy między źródłem światła a pryzmatem umieścimy ciało absorbujące promieniowanie, np. gaz o odpowiednio niższej temperaturze od temperatury źródła światła. W widmie ciągłym źródła światła pojawiają się wówczas ciemne miejsca odpowiadające długościom fali za- absorbowanym przez badany gaz. W zależności od substancji absorbującej możemy otrzy- mać widma ciągłe, liniowe lub pasmowe. Podobnie jak w przypadku widm emisyjnych, widma ciągłe dają ciała stałe i większość cieczy, natomiast gazy i pary jednoatomowe – widma liniowe, a gazy i pary wieloatomowe – widma pasmowe. Na rys. 35.4. Przedsta- wiono przykład widma absorpcyjnego liniowego.



Rys. 35.4 Widok widma absorpcyjnego liniowego

Do obserwacji widm liniowych używa się tzw. rurek Plücker'a, które są odmianą rur do wyładowań w gazach rozrzedzonych. Są one przewężone w środku, a na końcach mają wtopione w szkło metalowe elektrody, do których przykładamy stałe wysokie napięcie. Rurki te są napełnione parami lub gazami pod ciśnieniem 1 –2 mm Hg. W czasie wyłado- wań gaz jarzy się najintensywniej w przewężonej środkowej części rurki.

Wewnątrz rurki Plücker'a istnieje zawsze pewna ilość jonów, które powstają pod wpływem działania promieniowania kosmicznego i promieniowania domieszek radioaktywnych zawartych w powietrzu na atomy gazu znajdujące się w rurce. Przyłożone napięcie do elektrod powoduje ruch jonów dodatnich w kierunku katody i ujemnych do anody. Jednakże, aby jony te mogły uzyskać dostatecznie dużą energię, w rurce musi panować bardzo niskie ciśnienie, dzięki czemu rośnie droga swobodna jonów, co w konsekwencji prowadzi do wzrostu ich energii kinetycznej. Jony dodatnie przyspieszane w polu elektrycznym uderzają z dużą energią w katodę, wybijając z niej elektrony. Te z kolei, ponieważ posiadają bardzo małą masę, uzyskują duże prędkości i zderzając się z obojętnymi atomami gazu wypełniającego rurkę, powodują ich jonizację. Jonizacja ta jest podstawowym zjawiskiem podtrzymującym zachodzący proces, zwany wyładowaniem samoistnym. Równocześnie występują zderzenia jonów o przeciwnych znakach powodując zjawisko rekombinacji. Podczas tych zjawisk atomy wypromieniowują nadmiar energii w postaci światła charakterystycznego dla atomów danego gazu. Sam efekt wypromieniowania fotonu przez atom można wyjaśnić w oparciu o prawa fizyki kwantowej.

35.1 Model atomu w teorii kwantów.

Jak zaznaczyliśmy wcześniej, każda linia widmowa ma swoją długość fali. Można ją zmierzyć metodą interferencyjną, np. za pomocą siatki dyfrakcyjnej, lub za pomocą spektrometru z pryzmatem. W przypadku wodoru, widmo w zakresie widzialnym składa się z pięciu linii oznaczonych symbolami: H_α , H_β , H_γ , H_σ i H_ϵ . Balmer w 1885 roku doświadczalnie znalazł związek jaki zachodzi między długościami poszczególnych linii widmowych i ustalił wzór pozwalający obliczyć długość fali λ dla kolejnych linii. Oto wzór Balmera.

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (35.1)$$

gdzie R_H – jest tzw. stałą Rydberga równą 109678 cm^{-1} , a „n” oznacza kolejne liczby całkowite większe od 2. Podstawiając $n = 3, 4, 5, \dots$ otrzymujemy λ dla kolejnych linii wodoru: $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma \dots$ itd.

Według teorii Rytherforda – Bohra, atom składa się z części wewnętrznej zwanej jądrem, w którym skupiona jest prawie cała masa atomu i całkowity ładunek dodatni o średnicy około 10^{-14} m . Dookoła jądra krążą elektrony o liczbie równej dodatniemu ładunkowi jądra, tak że atom jako całość jest elektrycznie obojętny. Aby taki model wyjaśniał trwa-

Łość budowy atomu oraz mechanizm tworzenia charakterystycznych widm liniowych Niels Bohr wprowadza następujące założenia, zwane postulatami Bohra:

1. Elektron krążący po dozwolonych orbitach kołowych stacjonarnych, nie wysyła ani nie pobiera energii (krąży bez wypromieniowania energii). Każdy z dozwolonych poziomów musi spełniać następujący warunek kwantowy,

$$m_e v r = \frac{n h}{2\pi} \quad (35.2)$$

to znaczy że moment pędu elektronu na orbicie jest skwantowany.

2. W stanie normalnym atomu elektrony krążą po orbitach stacjonarnych leżących najbliżej jądra atomu. Na każdej orbicie stacjonarnej elektron posiada ściśle określoną energię np. na orbicie n posiada energię E_n itp. Orbitom bliższym jądra odpowiada mniejsza energia a dalszym większa.
3. Dostarczenie energii z zewnątrz elektronom powoduje wzbudzenie atomu i wiąże się z przeniesieniem elektronu na orbitę wyższą położoną dalej od jądra, a więc odpowiadającej większej energii. Wzbudzenie atomu jest wynikiem pochłonięcia porcji energii równej różnicy wartości energii orbity końcowej np. E_n i początkowej E_m . Atom jest zdolny do wysyłania energii tylko wtedy, gdy został wcześniej wzbudzony. Emisja promieniowania wiąże się wówczas z przeskokiem elektronów z orbit wyższych na niższe. Możemy to zapisać w postaci równania

$$E_n - E_m = h \nu \quad (35.3)$$

Atom wodoru składa się z jądra, w którym znajduje się jeden proton i jednego krążącego po orbicie kołowej elektronu. Na poruszający się elektron działają dwie siły:

- a) siła dośrodkowa, wywołana przyciąganiem elektrycznym jądra,

$$F_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = k \frac{e^2}{r^2} \quad (35.4)$$

gdzie; $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.010^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$, $\epsilon_0 = 8.8510^{-12} \text{ C} / \text{Nm}^2$, $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

- b) siła odśrodkowa,

$$F_o = \frac{m_e v^2}{r} \quad (35.6)$$

Z pierwszego postulatu Bohra wynika, że musi zachodzić zależność $F_d = F_o$, a więc;

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{k e^2}{r^2} \quad \text{skąd}$$

$$ke^2 = m_e v^2 r \quad (35.7)$$

Podstawiając zależność (35.2) do wzoru (35.7) otrzymujemy zależność na promień atomu r ;

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi k e^2 m_e} \quad (35.8)$$

Podstawiając zamiast n kolejno wartości; $n = 1, 2, 3, \dots$ itd, oraz $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg (masa elektronu), i $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ J*s (stała Plancka) otrzymujemy wartości kolejnych promieni dozwolonych orbit w atomie wodoru. Dla orbity najbliższej jądra otrzymujemy, $r_1 = 0.5 \cdot 10^{-8}$ cm. Promienie dalszych orbit rosną jak widać ze wzoru (35.8), proporcjonalnie do kwadratu liczby n . Korzystając z wyrażeń 35.7 i 35.8 otrzymujemy zależność na prędkość elektronu na orbicie.

$$v = \frac{2ke^2}{nh} \quad (35.9)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych znajdujemy, że prędkość elektronu na pierwszej orbicie ($n = 1$) równa się 1/137 prędkości światła w próżni. Na dalszych orbitach prędkość maleje proporcjonalnie do n .

Nils Bohr zauważył że, w celu znalezienia dozwolonych częstości przewidzianych przez zależność 35.3 i wyprowadzenia wzoru Balmera, konieczna jest znajomość wartości energii na poziomie „ n ” równej E_n i poziomie „ m ” równej E_m . Całkowita energia elektronu na danej orbicie składa się z jego energii kinetycznej E_k i potencjalnej E_p .

Energię kinetyczną możemy obliczyć z prostej zależności;

$$E_k = \frac{m_e v^2}{2}$$

Ponieważ zachodzi zależność 35.7 więc

$$E_k = \frac{ke^2}{2r} \quad (35.10)$$

Energię potencjalną możemy wyznaczyć względem określonej orbity odległej od jądra o „ r ”. W nieskończenie dużej odległości od jądra jest ona równa zero.

Ponieważ energia jest równa pracy więc

$$E_p = L = \int_{\infty}^r F dr = ke^2 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{ke^2}{r} \quad (35.11)$$

Uwzględniając zależności 35.10 i 35.11 możemy wyznaczyć energię elektronu na poziomie „ n ”.

$$E_n = E_k + E_p = \frac{ke^2}{2r_n} - \frac{ke^2}{r_n} = -\frac{ke^2}{2r_n} \quad (35.12)$$

lub korzystając z zależności 35.8 otrzymujemy

$$E_n = -\frac{2\pi^2 k^2 m_e e^4}{n^2 h^2}$$

ponieważ $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

więc

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2} \quad (35.13)$$

Analogicznie energia elektronu na poziomie „m” wynosi

$$E_m = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 m^2 h^2} \quad (35.14)$$

Na podstawie zależności 35.3, energia emitowanego kwantu jest równa różnicy obu energii i wynosi

$$h\nu = E_n - E_m = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Ponieważ zachodzi zależność $\nu = c/\lambda$, więc

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (35.15)$$

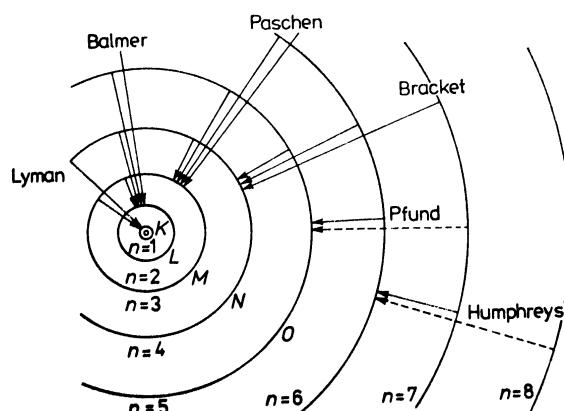
Porównując zależności 35.1 oraz 35.15 widzimy, że stała Rydberga dla wodoru może być wyznaczona z zależności

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \quad (35.16)$$

Okazuje się, że różnica wartości R_H , obliczonej na podstawie tego wzoru i wyznaczonej doświadczalnie przez Balmera jest mniejsza niż 1%. Wzór otrzymany przez Bohra (35.15), jest ogólniejszy niż wzór Balmera, obejmuje bowiem wszystkie znane serie wodorowe.

Zespół linii widmowych wyrażony wzorem (35.1) występujących w zakresie widzialnym i przedstawiony na rys. 35.5 nazywamy serią Balmera. Oprócz serii Balmera w atomie wodoru podanej przez Bohra (35.15) istnieje jeszcze kilka nowych serii, z których jedna leży w dalekim ultrafiolecie (seria Lymana), a inne w podczerwieni. Wzory określające nowe serie różnią się od wzoru Balmera jedynie tym, że zamiast „2” występuje w nich inna liczba całkowita. Zatem ogólny wzór określający daną serię widmową możemy zapisać w postaci:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (35.2)$$



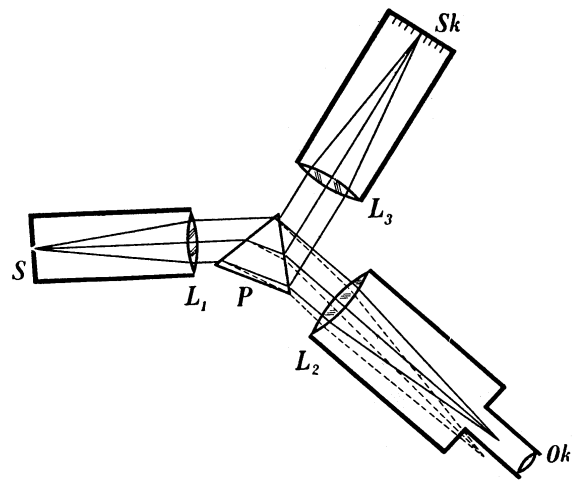
Rys. 35.5 Model atomu wodoru według Bohra. Strzałki objaśniają jak powstają serie linii emisyjnych atomu wodoru.

Na rys. 35.5 widać, że dla $m = 1$, $n = 2, 3, 4, \dots$ itd. seria Lymana, dla $m = 2$, $n = 3, 4, 5, \dots$ itd. seria Balmera, dla $m = 3$, $n = 4, 5, 6, \dots$ itd. seria Paschena, itd. Ostatnią serią jest seria Humphreysa, która występuje w postaci jednej linii, spełniającej warunek $m = 6$, i $n = 7$.

35.2. Opis ćwiczenia.

Do badań widmowych a więc do wyznaczania położenia linii w widmie, ich długości fal lub natężeń stosujemy spektroskopy lub spektrografy. Za pomocą tych przyrządów możemy rozszczepić badane promieniowanie na poszczególne długości fal i następnie badać otrzymane widmo. Klasycznym przyrządem tego rodzaju jest spektroskop przyzmatyczny Bunsena i Kirchhoffa. Schemat jego układu optycznego przedstawiono na rys. 35.6.

Badane źródło światła umieszczamy przed wąską szczeliną S, znajdującą się w płaszczyźnie ogniskowej soczewki zbierającej L_1 . Rozbieżne wiązki światła wychodzące ze szczeliny (z różnych jej punktów) zostają po przejściu przez tę soczewkę zamienione na szereg wiązek równoległych, przy czym każda wiązka odpowiada innemu punktowi szczeliny. Szczelina i soczewka L_1 umocowane w rurze metalowej tworzą układ optyczny zwany kolimatorem. Wiązki równoległe światła wychodzące z kolimatora padają następnie na pryzmat ulegając w nim załamaniu i rozszczepieniu. Każdej z równoległych wiązek padających na pryzmat odpowiada po przejściu przez niego szereg równoległych wiązek załamanych, przy czym każdej barwie odpowiada już inna wiązka o innym kierunku.



Rys. 35.6. Schemat układu optycznego spektroskopu Bunsena



Rys. 35.7 Widok aparatury pomiarowej

Wiązki te padają na soczewkę zbierającą L_2 , która zbiera je na powierzchni w odległości ogniskowej tej soczewki w postaci szeregu barwnych obrazów szczeliny S składających się na badane widmo. Widmo to możemy obserwować przez okular Ok . Soczewka L_2 i okular Ok tworzą lunetkę spektroskopu. Aby można było za pomocą spektroskopu wy-

znaczyć położenie linii w badanym widmie, używamy skali, której obraz rzucamy na widmo. W tym celu spektroskop zaopatrzony jest w pomocniczy układ złożony ze skali S_k i soczewki zbierającej L_3 . Skala jest umieszczona w płaszczyźnie ogniskowej tej soczewki, tak że każdemu z punktów skali odpowiada inna wiązka równoległa promieni wychodząca z soczewki. Wiązki te ulegają odbiciu na ściance pryzmatu i padają jako wiązki równoległe na soczewkę L_2 , która wytwarza na swej powierzchni ogniskowej obraz skali nałożony na widmo. Szerokość szczeliny wywiera wpływ nie tylko na wyrazistość, lecz również na jasność i ostrość obrazu, przy czym otrzymujemy tym czystsze widmo im węższą zastosujemy szczelinę.

35.3. Wykonanie pomiarów.

Ćwiczenie polega na badaniu liniowych widm emisyjnych świecących gazów w rurkach Plückera, oraz badaniu absorpcji filtrów selektywnych szklanych i cieczowych oświetlonych światłem białym.

1. Skalowanie spektroskopu.

Aby spektroskop mógł być wykorzystany do pomiarów ilościowych, należy go wyskalować. Do tego celu stosujemy źródło światła o możliwie dużej liczbie linii widmowych. W naszym przypadku będzie to rurka Plückera napełniona helem, której długości fal linii występujących w widmie są znane. (tab. 35.1).

Badania wykonać w następującej kolejności:

- a) Oświetlić otwartą szczelinę kolimatora światłem z rurki Plückera napełnionej helem.
- b) Przez obrót statywu spektroskopu uzyskać takie położenie, aby obserwowane przez lunetę widmo było maksymalnie jasne.
- c) Przesuwając w tubusie kolimatora część ze szczeliną, uzyskać w lunecie ostry obraz widma. Za pomocą śruby wyregulować tak szerokość szczeliny, aby linie widma były wąskie i dostatecznie jasne.
- d) Oświetlić skalę. Przesuwając część tubusa ze skalą, uzyskać w lunecie wyraźny obraz skali na tle obserwowanego widma. Czerwone linie powinny pokrywać się z początkową częścią skali. Zablokować układ aby uniemożliwić w dalszych pomiarach zmianę położenia linii widmowych na tle skali
- e) Odczytać na skali położenie każdej linii widma wzorcowego (He)

- f) Posługując się tabelą 35.1 zidentyfikować długości fal odpowiadające poszczególnym liniom widma. Otrzymane wyniki pomiarów zestawić w tabeli charakteryzując barwę, jej natężenie (silne, średnie, słabe lub bardzo słabe), oraz odpowiadające im długości fal.
- g) Wykreślić krzywą skalowania spektroskopu, odkładając na osi odciętych (x) położenie poszczególnych linii widmowych, a na osi rzędnych (y) odpowiadające im długości fal.

2. Badanie absorpcji filtrów.

- a) Nie zmieniając wzajemnego położenia kolimatora, pryzmatu lunety ze skalą, oświetlić szczelinę kolimatora światłem białym. Wyregulować jasność widma tak, aby było ono widoczne na tle całej skali.

Tabela 35.1 Wazniejsze linie widmowe wybranych pierwiastków i ich barwy.

Pierwiastek	Długość fali [nm]	Barwa linii	Natężenie
H	397,01	fioletowa	słabe
	410,77	fioletowa	słabe
	434,05	fioletowa	średnie
	486,13	nieb-zielona	średnie
	656,38	czerwona	silne
He	447,15	fioletowa	słabe
	471,31	niebieska	silne
	492,19	nieb-zielona	średnie
	501,57	zielona	średnie
	587,56	żółta	bardzo silne
	667,81	czerwona	średnie
Hg	706,52	czerwona	średnie
	404,65	fioletowa	bardzo słabe
	407,78	fioletowa	słabe
	435,83	niebieska	średnie
	491,60	nieb-zielona	średnie
	546,07	zielona	silne
	576,96	żółta	bardzo silne
579,07	żółta	bardzo silne	
623,41	czerwona	słabe	
Na	588,99	żółta	bardzo silny
	589,59	żółta	bardzo silny $\lambda = 589,3 \text{ nm}$

- b) Między kolimatorem a źródłem światła białego umieścić badane filtry. Obserwować i porównać otrzymane widmo absorpcyjne z otrzymanym wcześniej widmem światła białego. Wynotować ze skali położenie przedziałów, w których światło zostało przepuszczone i zaabsorbowane.

- c) Uwzględniając krzywą cechowania (dyspersji) zaznaczyć odpowiednie przedziały transmisji i absorpcji światła dla poszczególnych filtrów i przedstawić je na wykresie w postaci $T = f(\lambda)$, gdzie T- jest transmisją wyrażoną w %.

Tabela 35.2 Wyniki pomiarów.

Kolor linii								
Natężenie								
λ [nm]								
Położenie								

Dyskusja błędów.

Podczas skalowania spektroskopu zwrócić szczególną uwagę na ostrość i szerokość prążków. Powinny być bardzo ostre i wąskie. W przeciwnym razie należy uwzględnić szerokość prążka widmowego, mierzonego w jednostkach skali, na przedstawionym wykresie zależności: długości fali λ od położenia na skali.

Literatura

- [1] J. Orear, *Fizyka t.2*. WNT Warszawa 1993. Roz. 26
- [2] B. Jaworski, A. Dietław *Procesy falowe, optyka, fizyka atomowa i jądrowa*, PWN Warszawa 1969. Roz. XIII
- [3] A. Piekara, *Elektryczność, materia i promieniowanie*. PWN Warszawa 1986. Roz. 6
- [4] Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna t.4*, PWN Warszawa 1980

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA ZAŁAMANIA I KĄTA ŁAMIĄCEGO PRYZMATU

36.1 Wprowadzenie

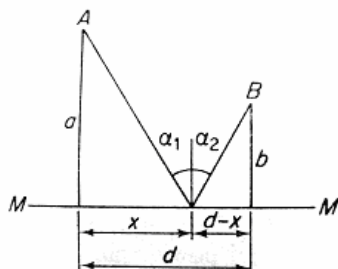
Gdy wiązka światła trafia na swej drodze na inne środowisko, to na powierzchni granicznej część promieniowania zostaje odbita, część rozproszona, część może ulec pochłonięciu; reszta przechodzi do drugiego środowiska ulegając załamaniu. Prawa odbicia i załamania można ująć razem w tzw. zasadę **Fermata**, która mówi, że rzeczywista droga optyczna, jaką przebywa promień świetlny pomiędzy dwoma punktami, jest najkrótszą spośród wszystkich możliwych dróg optycznych między tymi punktami, a zatem jej przebycie wymaga najkrótszego czasu. Drogą optyczną nazywamy iloczyn drogi geometrycznej s przez współczynnik załamania n środowiska w stosunku do próżni, można więc zasadę Fermata zapisać w postaci

$$\sum_i n_i s_i = \text{minimum} \quad (36.1)$$

36.1.1. Zasada Fermata dla odbicia

Na rys. 36.1 przedstawiono schematycznie wiązkę światła przychodzącą z kierunku A i odbitą od zwierciadła MM w kierunku B. Kąty α_1 i α_2 są odpowiednio kątami padania i odbicia. Odległości punktów A i B od zwierciadła MM są oznaczone przez a i b . Zatem długość drogi geometrycznej s od A do B jak wynika z twierdzenia Pitagorasa jest równa

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}. \quad (36.2)$$



Rys. 36.1 Zasada Fermata dla odbicia

Zgodnie z zasadą Fermata pochodna s względem x musi być równa zero (szukamy minimum funkcji), $ds/dx = 0$

Różniczkowanie równania (36.2) daje

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} 2x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} 2(d-x)(-1) = 0 \quad (36.3)$$

skąd otrzymujemy że

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \quad (36.4)$$

Z konstrukcji przedstawionej na rys. 36.1 wynika że

$$\sin \alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{oraz} \quad \sin \alpha_2 = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

tak więc na podstawie zależności (36.4) możemy zapisać

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 \quad \text{lub} \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad (36.5)$$

Zależność ta określa nam tzw. prawo odbicia.

A więc kąt padania jest równy kątowi odbicia, przy czym promień padający, odbity i prostopadła wystawiona z powierzchni w punkcie padania (prostopadła padania) leżą w tej samej płaszczyźnie. Płaszczyznę tę nazywamy płaszczyzną padania. Jest ona prostopadła do powierzchni odbijającej.

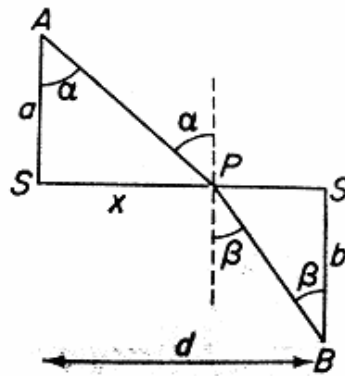
36.1.2. Zasada Fermata w zjawisku załamania

Niech A będzie punktem początkowym, a B punktem końcowym promienia świetlnego załamanego na powierzchni SS (Rys. 36.2). Wiązka światła biegnie przez punkt P leżący na trasie spełniającej warunek minimalnego czasu. Odległości punktów A i B od powierzchni SS wynoszą odpowiednio a i b. Całkowita długość drogi s od A do B w tym przypadku jest równa

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \quad (36.6)$$

Czas jaki światło zużywa na przebycie tej drogi, wynosi

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2} \quad (36.7)$$



Rys. 36.2 Zasada fermata dla załamania

gdzie: v_1 i v_2 są prędkościami światła w tych dwóch ośrodkach.

Podobnie jak w przypadku odbicia aby znaleźć minimalny czas (minimum funkcji) należy znaleźć pochodną tej funkcji i przyrównać ją do zera

$$\frac{dt}{dx} = 0 = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \quad (36.8)$$

Jak wynika z rysunku 36.2 Równanie to jest równoważne wyrażeniu

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{\sin \beta}{v_2} = 0$$

Ponieważ zachodzi zależność $n_1 v_1 = n_2 v_2 = c$ (36.9)

Więc
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} \quad (36.10)$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni. Z równania (36.10) otrzymujemy wyrażenie

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad (36.11)$$

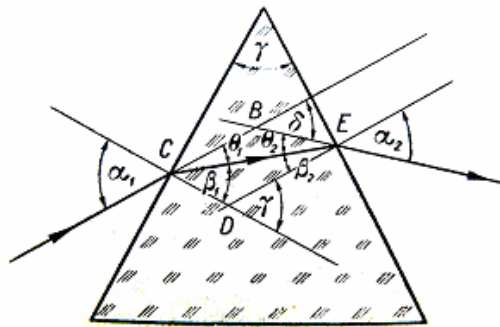
które jest prawem załamania światła odkrytym przez **Snelliusa** i nosi nazwę *prawa Snelliusa*.

Stosunek $\sin \alpha / \sin \beta$ nazywamy *względny współczynnik załamania* drugiego ośrodka względem pierwszego, $n_2/n_1 = n_{2/1} = v_1/v_2$. Jeśli współczynnik załamania pierwszego ośrodka jest równy jedności, tak jak na przykład dla próżni, wówczas względny współczynnik załamania drugiego ośrodka jest równy jego *bezwzględnemu współczynnikowi załamania*.

Podobnie jak w przypadku odbicia prawo to jest spełnione gdy promień padający, załamany i prostopadła padania leżą w tej samej płaszczyźnie – płaszczyźnie padania.

36.1.3. Załamanie w pryzmacie

Pryzmatem nazywamy przezroczystą bryłę, ograniczoną dwiema płaszczyznami pochylonymi pod pewnym kątem γ . Kąt ten nazywamy kątem łamiącym pryzmatu rys. 36.3



Rys. 36.3 Bieg promieni w pryzmacie (γ - kąt łamiący, δ - kąt odchylenia)

Prosta, wzdłuż której przecinają się wspomniane płaszczyzny nosi nazwę krawędzi łamiącej pryzmatu. Trzecia płaszczyzna ograniczająca nie odgrywa istotnej roli przy załamaniu światła. Promień padający na pryzmat ulega dwukrotnie załamaniu i w rezultacie odchyła się o kąt δ (kąt ten tworzą ze sobą przedłużenia promieni padającego i załamanego). Oznaczmy kąt padania na pierwszą ściankę przez α_1 , kąt załamania przez β_1 , kąt padania na drugą ściankę przez β_2 , kąt załamania przez α_2 . Z trójkąta BCE otrzymujemy, (kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów przy podstawie)

$$\delta = \Theta_1 + \Theta_2 = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \quad (36.12)$$

Na tej samej podstawie możemy zapisać dla trójkąta DEC

$$\beta_1 + \beta_2 = \gamma \quad (36.13)$$

a więc

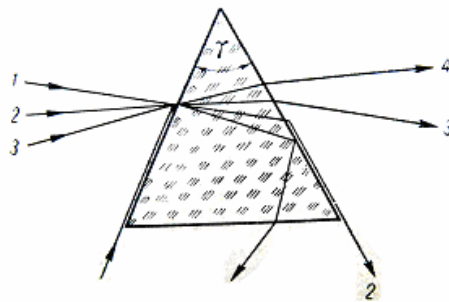
$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma \quad (36.14)$$

Kąt odchylenia δ promieni padających na pryzmat zależy od kąta padania α_1 .

Ponieważ kąt α_2 zależy od współczynnika załamania n pryzmatu, z ostatniej zależności wynika, że odchylenie promienia przez pryzmat zależy od materiału, z którego jest on wykonany, od kąta łamiącego γ pryzmatu i od kąta α_1 padania wiązki światła na pryzmat.

Równocześnie jednak współczynnik załamania zależy od barwy światła (t.j. od jego długości fali) dlatego kąt odchylenia wiązki zależy będzie również od barwy. Promienie różnych barw są zatem rozmaicie odchylane przez pryzmat. Jeżeli wiązka padająca na pryzmat składa się z promieni różnych barw, po przejściu przez pryzmat ulegnie ona rozszczepieniu i tak jeżeli na pryzmat wprowadzimy dwie równoległe wiązki np. czerwoną i niebieską, to po załamaniu wiązki przestają być równoległe. Dla wiązki niebieskiej odchylenie jest większe niż dla czerwonej.

Jeżeli na pryzmat rzucimy wiązkę promieni i będziemy go skręcać w stosunku do niej tak jak to pokazano na rys. 36.4 to zauważymy, że plamka świetlna ustawiona za pryzmatem zmienia swe położenie. Istnieje taki kąt padania, przy którym odchylenie wiązki jest najmniejsze.



Rys. 36.4 Bieg promieni w pryzmacie dla promieni padających pod różnymi kątami

Plamka świetlna dochodzi do pewnego położenia, najbardziej zbliżonego do tego, które zajęłaby, gdyby wiązka światła nie spotykała na swej drodze pryzmatu, a następnie cofa się mimo, że pryzmat skręcamy w dalszym ciągu w tym samym kierunku, uzyskujemy w ten sposób tzw. odchylenie minimalne. Odchylenie minimalne zachodzi wtedy, gdy bieg promieni w pryzmacie jest symetryczny, tzn. gdy $\alpha_1 = \alpha_2$ i $\beta_1 = \beta_2$. Wtedy na podstawie zależności (36.13) i (36.14) otrzymujemy

$$\beta = \frac{1}{2}\gamma, \quad \alpha = \frac{1}{2}(\gamma + \delta_{\min}) \quad (36.15)$$

Korzystając z prawa Snelliusa otrzymujemy

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{\gamma + \delta_{\min}}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad (36.16)$$

gdzie δ_{\min} oznacza kąt minimalnego odchylenia. Wzór powyższy służy do pomiaru współczynnika załamania n . Kąty δ_{\min} i γ wyznaczamy doświadczalnie za pomocą spektrometru. W przypadku gdy kąty α , β i γ mają bardzo małe wartości wówczas z wystarczającym przybliżeniem możemy zapisać

$$\sin \alpha = \alpha, \quad \sin \beta = \beta \quad (36.17)$$

Prawo załamania możemy zapisać w postaci

$$n = \frac{\alpha}{\beta} \quad (36.18)$$

skąd $\alpha_1 = n\beta_1, \quad \alpha_2 = n\beta_2 \quad (36.19)$

Promienie padają wówczas i wychodzą z pryzmatu prawie prostopadle do jego ścianek.

Kąt odchylenia δ w tym przypadku na podstawie zależności (36.14) możemy zapisać

$$\delta = n\beta_1 + n\beta_2 - \gamma = n(\beta_1 + \beta_2) - \gamma = n\gamma - \gamma$$

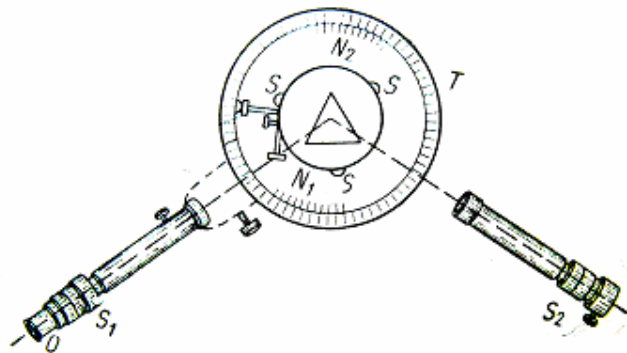
czyli ostatecznie $\delta = (n - 1)\gamma \quad (36.20)$

36.2 Zasada pomiaru. Układ pomiarowy

Współczynnik załamania światła wyznaczamy w oparciu o zależność (36.16). W tym celu wyznaczamy kąt łamiący pryzmatu γ i jego kąt minimalnego odchylenia δ_{\min} . Układ pomiarowy składa się z sodowej lampy spektralnej, spektrometru oraz badanego pryzmatu i jest przedstawiony na rys. 36.5 a jego schemat na rys. 36.6.



Rys. 36.5 Widok aparatury pomiarowej



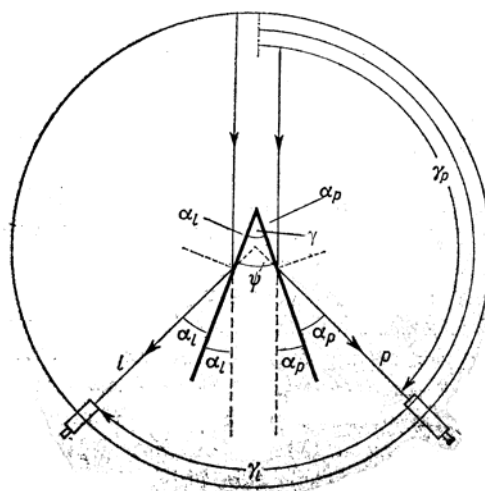
Rys. 36.6 Schemat spektrometru widzianego z góry

36.2.1 Wyznaczanie kąta łamiącego pryzmatu

Pomiaru możemy dokonać dwiema metodami

Metoda 1

Metoda ta polega na pomiarze kąta wyznaczonego przez kierunki dwu wiązek odbitych od ścian kąta łamiącego pryzmatu. Wiązka światła padająca na pryzmat równoległe do dwusiecznej kąta łamiącego rozdziela się na dwie wiązki, przy czym kąt $\gamma = \alpha_l + \alpha_p$, przy czym $\alpha_l = \alpha_p$. Podobnie dwusieczna kąta ψ dzieli ten kąt na połowę, przy czym jak wynika z rys. 36.6 zachodzi zależność $\psi = 2\alpha_l + 2\alpha_p = 2(\alpha_l + \alpha_p)$, lecz $\alpha_l + \alpha_p = \gamma$ czyli $\psi = 2\gamma$,



Rys. 36.7. Odbicie promieni od ścian pryzmatu.

Skąd
$$\gamma = \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}(\gamma_i - \gamma_p) \quad (36.21)$$

Wzór powyższy jest słuszny przy założeniu, że kąty γ mierzymy od kierunku promienia padającego (w prawo lub w lewo).

Wykonanie pomiarów

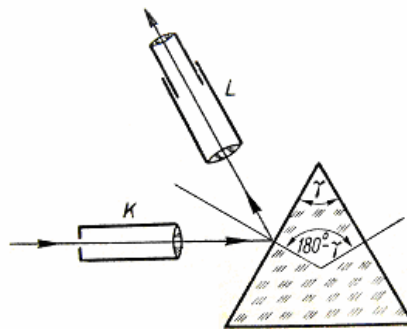
1. Zamocować nieruchomo stolik spektrometru.
2. Włączyć spektralną lampę sodową i odczekać około 5 min
3. Sprawdzić ostrość obrazu szczeliny przy położeniu lunety na wprost kolimatora.
4. Ustawić pryzmat, jak na rysunku 36.7, tak by krawędź kąta łamiącego dzieliła wiązkę wychodzącą z kolimatora na dwie części.
5. Ustawić lunetę na obserwację wiązki odbitej od jednej ściany kąta łamiącego np. I (Rys. 36.7). Prążek świetlny powinien być dokładnie naprowadzony na widoczny w lunecie krzyż przy pomocy śrub mikrometrycznej.
6. Odczytać na skali na skali kątowej znajdującej się pod lunetą wartość kąta i zanotować wynik pomiaru γ_i .
7. Analogicznie oznaczyć położenie lunety naprowadzonej na obraz szczeliny dany przez wiązkę odbitą od drugiej ściany kąta łamiącego pryzmatu. Notujemy wynik γ_p
8. Obliczyć kąt łamiący pryzmatu z zależności (36.21)
9. Czynności opisane powtórzyć kilkakrotnie, za każdym razem zmieniając nieznacznie położenie pryzmatu.
10. Obliczyć średnią wartość kąta łamiącego, jako średnią arytmetyczną otrzymanych wyników.

Metoda 2

1. Ustawić lunetę w pobliżu kolimatora (Rys. 36.8) i zamocujemy ją nieruchomo.
2. Pryzmat umieścić w pośrodku stolika tak, by jedna ze ścian kąta łamiącego leżała prostopadle do dwusiecznej kąta utworzonego przez osie kolimatora i lunety (Rys. 36.8). Wówczas wiązka promieni wychodząca z kolimatora zgodnie z prawem odbicia, po odbiciu od ściany pryzmatu będzie widoczna w lunecie.
3. Obraz szczeliny naprowadzić na środek krzyża w lunecie. Odczytać i zanotować położenie stolika np. α .

4. Nie zmieniając położenia lunety i kolimatora, obracając stolik, ustawić w takim samym położeniu drugą ściankę kąta łamiącego pryzmatu. Zanotować położenie stolika np. β .
5. Obliczyć kąt łamiący pryzmatu γ z zależności

$$\gamma = 180^{\circ} - (\alpha - \beta) \quad (36.22)$$



Rys.36.8 Schemat pomiaru kąta łamiącego pryzmatu.
L – luneta, K – kolimator, γ - kąt łamiący.

Jeżeli lunetka i kolimator są nieruchome (patrz p.1) to aby zobaczyć odbicie światła od drugiej ścianki pryzmatu musimy pryzmat obrócić o taki kąt, by normalna do drugiej ścianki zajęła miejsce normalnej do ścianki pierwszej. Ale normalne tworzą ze sobą kąt $180^{\circ} - \gamma$, co uzasadnia zależność (36.22).

36.2.2. Wyznaczanie kąta minimalnego odchylenia

1. Włączyć i ustawić przed szczeliną kolimatora lampę sodową
2. Włączyć zasilacz i oświetlić w lunecie podziałkę i znajdujący się pod nią krzyż.
3. Oświetlić podziałkę kątową w tubusie pod lunetą .(Wyłącznik znajduje się w podstawie spektrometru)
4. Ustawić lunetę na przeciw kolimatora a widoczny w lunecie krzyż ustawić na środku prążka świetlnego. Odczytać i zanotować wartość kąta δ_1 (górna zielona podziałka).
5. Ustawić badany pryzmat na stoliku tak jak pokazano na rys. 36.8

6. Obracając stolik w lewo lub w prawo znaleźć wiązkę światła w lunecie wychodzącą z pryzmatu w postaci prążka.
7. Znaleźć, obracając w dalszym ciągu stolik takie położenie pryzmatu przy, którym wiązka światła się cofa mimo, że obracamy pryzmat dalej w tym samym kierunku. Ustawić widoczny w lunecie krzyż na środku prążka
8. Odczytać i zanotować wartość kąta odpowiadającego temu zjawisku δ_2 .
9. Obliczyć kąt minimalnego odchylenia z zależności $\delta_{\min} = \delta_1 - \delta_2$.
10. Obliczyć współczynnik załamania szkła pryzmatu z zależności (36.16)
11. Wyniki pomiarów umieścić w tabelach 1 i 2.

Tabela 1. Pomiar kąta łamiącego pryzmatu

Lp	γ_i	γ_p	$\gamma = \frac{\gamma_i - \gamma_p}{2}$	α	β	$\gamma = 180 - (\alpha - \beta)$	γ_{sr}
1							
2							
3							

Tabela 2. Pomiar kąta minimalnego odchylenia

L.p	δ_1	δ_2	$\delta_{\min} = \delta_1 - \delta_2$	n
1				
2				
3				

Ocena błędów. Błąd popełniony przy wyznaczaniu n zależy od błędów, którymi obarczony jest pomiar kątów γ oraz δ_{\min} . Przy ocenie błędów bezwzględnych poza stopniem dokładności danym przez przyrząd, należy wziąć pod uwagę nieuniknione dla oka ludzkiego błędy przy nastawianiu obrazu szczeliny na krzyż w polu widzenia okularu.

Literatura

1. Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna PWN. Warszawa 1980
2. J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów WNT. Warszawa 1980
3. S. Pieńkowski, Fizyka doświadczalna, PWN Warszawa 1955
4. J.R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1977
5. M. Skorko, Fizyka, PWN Warszawa 1973

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA ZAŁAMANIA SZKŁA I CIECZY PRZY POMOCY REFRAKTOMETRU PULFRICHA

37.1 Wprowadzenie

Przed przystąpieniem do ćwiczenia zapoznać się z § 36.1.2.

Gdy światło przechodzi z ośrodka o współczynniku załamania równym n_1 do ośrodka o współczynniku załamania n_2 , wówczas, jak wiemy z § 36, względny współczynnik załamania ośrodka drugiego względem pierwszego jest równy $n_{2,1} = n_2/n_1$. W tym przypadku zgodnie z prawem Snelliusa będziemy mieli

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1}, \quad (37.1)$$

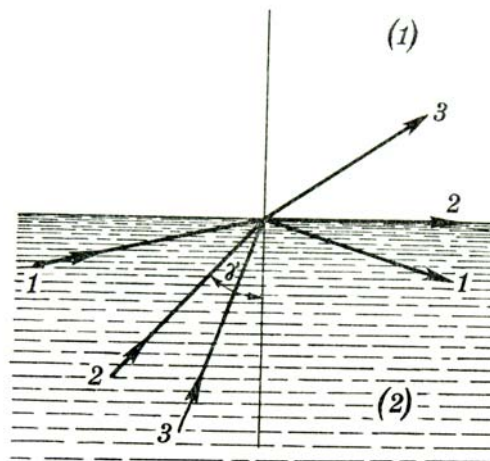
Gdy $n_2 > n_1$, wówczas $\alpha > \beta$, jeżeli jednak $n_2 < n_1$, to wtedy $\alpha < \beta$, a więc promień załamany odchyła się bardziej od prostopadłej do powierzchni granicznej niż promień padający. Gdy współczynnik załamania pewnego ośrodka jest większy aniżeli współczynnik załamania innego ośrodka, mówimy, że ten pierwszy ośrodek jest optycznie gęstszy od drugiego, natomiast drugi jest ośrodek jest optycznie rzadszy od pierwszego. A więc gdy światło przechodzi z ośrodka optycznie gęstszego do ośrodka optycznie rzadszego, np. z wody do powietrza, wówczas kąt załamania jest większy niż kąt padania. W tych warunkach przy pewnym kącie padania γ kąt załamania osiąga wartość 90° , a więc jego sinus jest równy 1. Korzystając zatem z zależności (37.1) otrzymujemy

$$\frac{\sin \gamma}{\sin 90^\circ} = n_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \sin \gamma = \frac{1}{n_{2,1}} \quad (37.2)$$

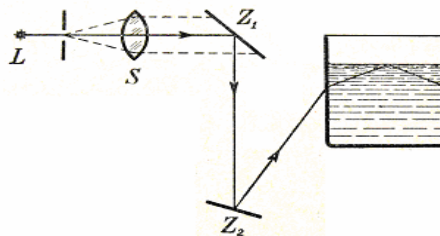
Kąt γ nosi nazwę kąta granicznego.

Jeżeli kąt padania jest większy od kąta granicznego γ wówczas nie otrzymujemy już wiązki załamanej przechodzącej do drugiego ośrodka, lecz jedynie wiązkę odbitą. Mamy wtedy do czynienia ze zjawiskiem całkowitego wewnętrznego odbicia. Zjawisko to może-

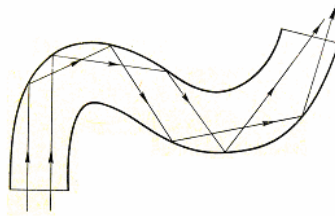
my obserwować przy przejściu światła z wody do powietrza, rys. 37.1, w którym promień 2 jest promieniem padającym pod kątem granicznym γ , promień 1, odbitym od granicy ośrodków, a promień 3 promieniem załamanym. Przy całkowitym odbiciu energia wiązki odbitej wynosi 100% energii wiązki padającej. Przy kącie padania mniejszym od granicznego mamy odbicie tylko częściowe, a znaczna część światła ulega złamaniu. Na rys. 37.2 przedstawiono sposób praktyczny realizacji tego zjawiska, a rys. 37.3, wykorzystanie go w technice np. w światłowodach. Połysk diamentu wynika też z całkowitego odbicia światła we wnętrzu diamentu, kąt graniczny jest w nim stosunkowo bardzo mały; wyliczamy go ze wzoru 37.2, podstawiając za $n_{2,1} = 2.41$, skąd $\gamma = 24^{\circ}30'$. Jeśli diament odpowiednio oszlifujemy, a taki oszlifowany diament nazywamy brylantem i wprowadzimy do wnętrza promienie, wówczas ulegają całkowitemu odbiciu na ściankach i przeważnie wydostają się na zewnątrz mało osłabione, co powoduje efektowny połysk brylantu. (rys. 37.4).



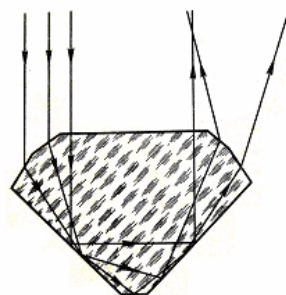
Rys. 37.1 Kąty: załamania (3), całkowitego wewnętrznego odbicia (1), i kąt graniczny γ (2).



Rys. 37.2. Całkowite wewnętrzne odbicie



Rys. 37.3. Bieg promieni w światłowodzie

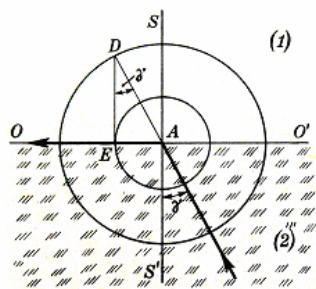


Rys. 37.4. Odbicie światła w brylancie

Kąt graniczny możemy również bardzo dokładnie wyznaczyć metodą graficzną. W tym celu wykreślmy powierzchnię graniczną dwóch ośrodków $O O'$, na którą pada promień np. z wody do powietrza, tak jak na rys 37.5. W punkcie A wystawiamy normalną do niej SS' i zakreślamy dookoła tego punktu dwa okręgi, tak by stosunek ich promieni był równy współczynnikowi załamania drugiego środowiska względem pierwszego.

Przedłużamy kierunek promienia padającego z wody do powietrza i z punktu przecięcia tego promienia z większym okręgiem, (punkt D) prowadzimy prostopadłą do powierzchni granicznej i łączymy punkt A z punktem E, który leży na obwodzie mniejszego okręgu.

Kąt γ odpowiadający tej sytuacji jest kątem granicznym. Wykreślony w ten sposób kąt γ jest równy kątowi wyliczonemu z zależności 37.2.



Rys. 37.5. Konstrukcja kąta granicznego na granicy dwu środowisk. OO' - granica środowisk.

W przypadku gdy prostopadła spuszczone z punktu D nie przecina w ogóle mniejszego okręgu oznacza, że promień załamany nie istnieje i mamy wówczas do czynienia ze zjawiskiem całkowitego wewnętrznego odbicia.

37.2. Opis ćwiczenia.

Zjawisko całkowitego odbicia znalazło zastosowanie do określenia wartości współczynnika załamania. Do wyznaczenia współczynników załamania cieczy i przezroczystych ciał stałych z pomiarów kąta granicznego stosuje się refraktometrię. Najczęściej spotykamy refraktometrię E. Abbego i Pulfricha.

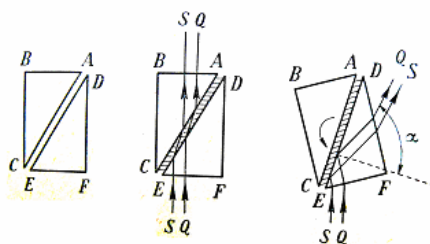
a) Refraktometr Abbego.

Zasadę działania refraktometru Abbego ilustruje rys. 37.6. Główną jego część stanowi kostka szklana, składająca się z dwóch pryzmatów prostokątnych ABC i DEF złożonych razem przeciwprostokątnymi AC i DE.

Między ścianki tych pryzmatów wprowadzamy badaną ciecz o współczynniku załamania mniejszym niż współczynnik załamania szkła pryzmatów.

Gdy teraz rzucimy poprzez ściankę EF pryzmatu wiązkę światła monochromatycznego SQ, to padnie ona na powierzchnię ED pod kątem mniejszym od granicznego i przejdzie przez układ pryzmatów doznając tylko równoległego przesunięcia. Jeśli jednak zaczniemy kostkę obracać dookoła osi przechodzącej przez środek pola ACED i prostopadłej do

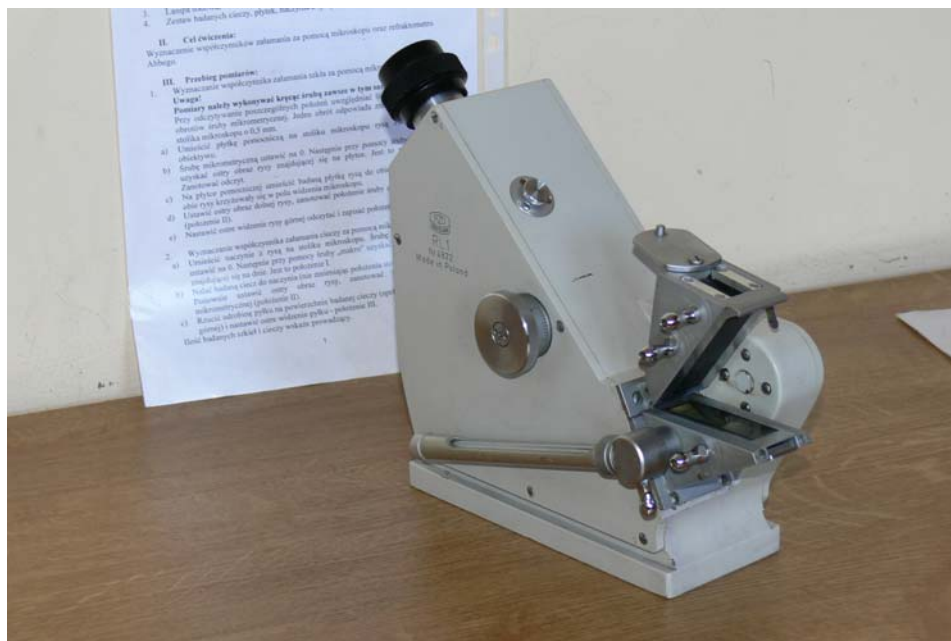
płaszczyzny rysunku; wówczas przy wzroście kąta padania co odpowiada obrotowi w kierunku strzałki na rysunku, dojdziemy do takiego położenia, przy którym wiązka światła pada na powierzchnię ED pod kątem granicznym. Dla wszystkich kątów padania większych od granicznego nastąpi więc całkowite odbicie na powierzchni ED i wiązka padająca nie przejdzie przez układ. W tym przypadku pole widzenia lunetki obserwacyjnej będzie ciemne. Jeśli jednak kostka będzie ustawiona pod kątem bardzo bliskim granicznego, wówczas w polu widzenia zauważymy ostro zaznaczone przejście między polem oświetlonym i ciemnym. Granica ta odpowiada kątowi granicznemu. Dokładnego ustawienia na kąt graniczny dokonujemy za pomocą lunetki z krzyżem w polu widzenia ustawiając linię graniczną na skrzyżowaniu rys krzyża. Na rys. 37.7 przedstawiono widok refraktometru Abbego



Rys. 37.6 Zasada działania refraktometru Abbego

Refraktometry Abbego są zaopatrzone w skalę pozwalającą na bezpośrednie odczytanie wartości współczynnika załamania dla światła żółtej linii sodu.

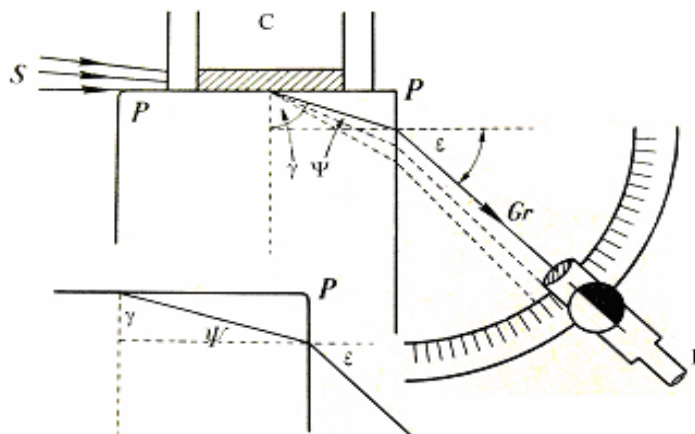
Przy użyciu światła białego zamiast ostrej granicy cienia otrzymujemy, w wyniku zależności współczynnika załamania od długości fali rozmyty pasek barwny. Aby znieść to rozszczepienie refraktometr Abbego jest zaopatrzone w odpowiedni kompensator złożony z dwóch pryzmatów Amici. Kompensator ustawiamy przez obrót specjalnego pokrętła tak, abyśmy mogli widzieć ostro zaznaczoną i bezbarwną granicę cienia i jasności. Podziałka tego pokrętła wskazuje bezpośrednio dyspersję badanej cieczy.



Rys. 37.7 Refraktometr Abbego

b) **Refraktometr Pulfricha.**

Schemat innego często spotykanego typu refraktometru pozwalającego wyznaczyć współczynniki załamania cieczy i ciał stałych, tzw. refraktometru Pulfricha widzimy na rys. 37.8. Zasadniczą jego częścią składową jest kostka o współczynniku załamania N , której boczna oszlifowana i wypolerowana ściana jest dokładnie prostopadła do również oszlifowanej i wypolerowanej ścianki górnej.



Rys. 37.8. Schemat refraktometru Pulfricha

(P– kostka szklana, C - naczynie do badanej cieczy, L –luneta, γ - wewnętrzny kąt padania)

Do górnej ścianki przyklejone jest naczynie C w kształcie walca, do którego wlewamy badaną ciecz o szukanym współczynniku załamania n , lub też wkładamy płasko oszlifowaną próbkę ciała stałego o nieznanym współczynniku załamania. Dookoła osi poziomej leżącej w płaszczyźnie górnej ścianki kostki obraca się lunetka L sztywno związana ze skalą kątową, a nieruchomy noniusz pozwala odczytywać położenie lunetki. Wiązka światła, która pada na poziomą ściankę kostki, ślizgając się po jej powierzchni (kąt padania 90^0) wychodzi z niej pod kątem ε . Patrząc przez lunetę w kierunku wiązki załamanej, dostrzeżemy bardzo wyraźną granicę utworzoną przez promienie załamane pod kątem granicznym γ . Mianowicie dla kątów ε odpowiadających wartościom Φ większym od γ promienie światła nie przechodzą do szkła i pole widzenia będzie ciemne, przeciwnie będzie dla kątów ε dla których Φ jest mniejsze od γ . Pole widzenia jest wtedy jasne, gdyż światło przechodzi wówczas do szkła. Granica podziału pola jasnego i ciemnego odpowiada kątowi granicznemu całkowitego odbicia. Tę właśnie wartość kąta γ odczytujemy na skali sprzężonej z obracającą się lunetą.

Wygląd refraktometru Pulfricha przedstawiony jest na rys. 37.9.

Współczynnik załamania możemy również wyznaczyć przez pomiar kąta odchylenia ε . W tym przypadku korzystając zależności 37.2 i uwzględniając rys. 37.8 możemy zapisać

$$\frac{N}{n} = \frac{1}{\sin \gamma} \quad (37.3)$$

czyli
$$n = N \sin \gamma = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \psi} \sin \gamma$$

Jak widać z rysunku, $\gamma + \psi = 90^0$, a więc $\psi = 90^0 - \gamma$, skąd

$$\sin \psi = \sin(90 - \gamma) = \cos \gamma$$

A więc
$$N = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \psi} = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \gamma};$$

$$N \cos \gamma = \sin \varepsilon,$$

$$N^2 \cos^2 \gamma = \sin^2 \varepsilon$$

lub
$$N^2 (1 - \sin^2 \gamma) = N^2 - n^2 = \sin^2 \varepsilon$$

i ostatecznie
$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 \varepsilon} \quad (37.4)$$

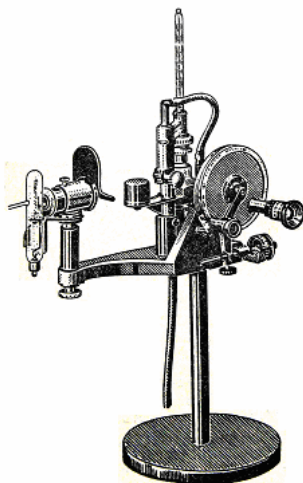
Jeżeli dla każdej mierzonej długości fali światła, znamy współczynnik załamania pryzmatu refraktometru N_λ , to mierząc kąt ε , możemy wyznaczyć współczynnik załamania badanej próbki dla danej długości fali λ

$$n_\lambda = \sqrt{N_\lambda^2 - \sin^2 \varepsilon} \quad (37.4)$$

Według tego właśnie wzoru zostały wyliczone tabele z N_λ dołączone do poszczególnych pryzmatów refraktometru. Tabela 2.

Aby uniknąć niewygodnego patrzenia w lunetę nachyloną pod większymi kątami do poziomu, wiązka światła zostaje odbita za pomocą pryzmatu całkowicie odbijającego tak, że część lunety zawierająca okular jest zawsze pozioma. Odczytanie kątów odchylenia przeprowadzamy przy pomocy silnie powiększającej lupy.

Rys. 37.9 przedstawia widok jednego ze starszych modeli refraktometru Pulfricha



Rys.37.9 Wygląd refraktometru Pulfricha starszego typu.

c) Refraktometr Pulfricha PR2 firmy Carl Zeiss Jena.

Nowoczesny refraktometr Pulfricha PR2 firmy firmy Carl Zeiss Jena, przedstawiony na rys. 37.10, opisany poniżej i stosowany w ćwiczeniu pozwala na pomiar kąta z dokładnością większą niż $5''$, co daje wartość współczynnika załamania z błędem względnym mniejszym od 0.000005. Umożliwia pomiar współczynnika załamania dla ciał stałych i cieczy przez pomiar kąta granicznego γ lub odchylenia ε .

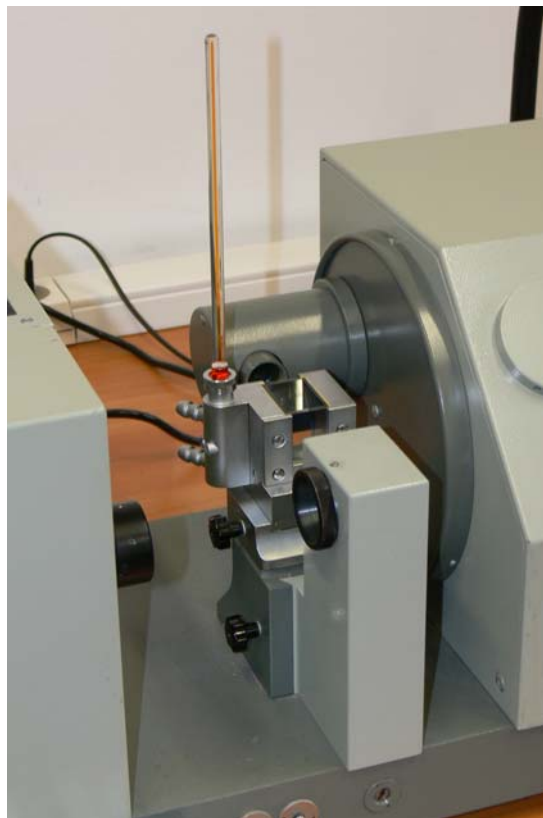
Na rysunku wprowadzono następujące oznaczenia;

- 1- obudowa lamp spektralnych
- 2- podstawka z pryzmatem pomiarowym
- 3- okular
- 4- obudowa urządzenia pomiarowego
- 5- pokrętko autokolimatora
- 6- pokrętko dokładnej skali



Rys. 37.10 Refraktometr PR2 firmy Carl Ziess Jena

- 7- przełącznik dwu dźwigniowy ; luneta - kąt graniczny,
- 8- Gałka napędowa lunety pomiarowej,
- 9- kolimator,
- 10- śruba regulacyjna pryzmatu,
- 11- śruba regulacyjna kolimatora
- 12- dodatkowe źródło światła, lampa sodowa,
- 13- włącznik lampy rtęciowej,
- 14- główny włącznik zasilania układu,
- 15- przełącznik lamp spektralnych,
- 16- przełącznik filtrów,
- 17- zasilacz lamp spektralnych,
- 18- luneta,
- 19- termometr.



Rys. 37.11 Przystawka pryzmatyczna, pryzmat i luneta pomiarowa.

Refraktometr PR2 przedstawiony na rys. 37.10, składa się z trzech głównych części:

- umieszczonych w obudowie wewnętrznych źródeł światła (lewa część urządzenia),

- cokołu z pryzmatem i przystawką oświetleniową lub kolimatorem (środek urządzenia rys. 37.11)
- urządzenia pomiarowego (prawa część urządzenia).

1) źródła światła

Refraktometr zaopatrzony jest w trzy znajdujące się wewnątrz obudowy różne źródła światła, którymi są lampa wodorowa, helowa i rtęciowa. Ponadto w zakresie widzialnym mamy do dyspozycji filtry optyczne oznaczone literami C, d, e, F, g i h, które umożliwiają nam wybór następujących długości fal:

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1. filtr C – czerwona linia wodoru | - $\lambda = 656,3 \text{ nm}$ |
| 2. filtr d – żółta linia helu | - $\lambda = 587,6 \text{ nm}$, |
| 3. filtr e - zielona linia rtęci | - $\lambda = 546,1 \text{ nm}$, |
| 4. filtr F - niebieska linia wodoru | - $\lambda = 486,1 \text{ nm}$, |
| 5. filtr g - fioletowa linia rtęci | - $\lambda = 435,9 \text{ nm}$, |
| 6. filtr h - ciemno fioletowa linia rtęci | - $\lambda = 404,7 \text{ nm}$ |

Odpowiednie długości fal przypisane do danych filtrów i lamp są oznaczone na obwodzie pokręta 16, natomiast wyboru lampy dokonujemy przy pomocy pokręta 15, przy czym odpowiednie lampy oznaczone są na obwodzie tego pokręta punktami;

- lampa Hg - jednym punktem
- lampa H₂ - dwoma punktami
- lampa He - trzema punktami

Urządzenie ponadto wyposażone jest w zewnętrzne dodatkowe źródło światła w postaci lampy kadmowej lub sodowej. Obudowy tych lamp zaopatrzone są w odchylane zwierciadło, które umożliwia skierowanie wiązki światła do przystawki oświetleniowej lub kolimatora.

Położenie zwierciadła względem przystawki oświetleniowej możemy zmieniać przy pomocy śruby regulacyjnej znajdującej się w pobliżu jego osi. Zamknięcie zwierciadła umożliwia pracę z lampami wewnętrznymi refraktometru, natomiast otwarcie z lampą zewnętrzną.

Na obudowie lampy znajdują się dwa przesuwane w pionie kołki. Kołek trójpozycyjny górny, zmienia filtry. W najniższym położeniu światło z lampy bezpośrednio pada na przystawkę. Położenie środkowe kołka wprowadza filtr C', a górne F'. Kołek dwupozycyjny dolny umożliwia w położeniu górnym wykorzystanie soczewki, która znacznie poprawia

oświetlenie pryzmatów podczas pomiarów kątów granicznych, natomiast w dolnym położeniu umożliwia bezpośredni bieg wiązki światła na przystawkę.

2) Pryzmaty

Refraktometr zaopatrzony jest w trzy różne wymienne pryzmaty i nasadki pryzmatyczne. Pryzmaty umieszczamy w prowadnicach usytuowanych na cokole pryzmatycznym i dociskamy umieszczoną z boku śrubą. Mają one różne kształty i przeznaczone są do pomiarów kąta granicznego różnych ciał, przy czym pierwsza litera oznacza:

G – dla szkiele i innych ciał stałych,

Z - dla cieczy (nawet dwóch cieczy metodą porównawczą),

A - dla cieczy korodujących,

Pryzmat V – jest pryzmatem uniwersalnym i służy do pomiaru kąta odchylenia dla szkiele i innych ciał stałych, a także cieczy. Pryzmat ten wykonany jest tak, że jego pionowe ściany tworzą płytkę płasko-równoległą, a w górnej jego części, wewnętrzne ścianki V tworzą kąt prosty. Miedzy te ścianki wstawiamy badane próbki prostokątne, które są w kontakcie z powierzchniami pryzmatu przez ciecz immersyjną, o współczynniku załamania pośrednim między współczynnikiem mierzonym n , a współczynnikiem pryzmatu N . Zawsze musi zachodzić zależność $n < N$. Pryzmat V możemy też wypełnić badaną cieczą, przy czym powierzchnia cieczy powinna leżeć około 4 mm poniżej górnej krawędzi pryzmatu.

Równoległa wiązka padających promieni odchyła swój bieg o kąt ε i zachodzi wtedy następująca zależność

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1.5 \cdot N_{\lambda}^2 - n_{\lambda}^2} - \sqrt{n_{\lambda}^2 - 0.5 \cdot N_{\lambda}^2}) \quad (37.5)$$

Przekształcając ostatnią zależność i znając współczynnik załamania pryzmatu oraz mierząc kąt ε , możemy wyznaczyć współczynnik załamania badanej próbki z wzoru

$$n_{\lambda} = \sqrt{N_{\lambda}^2 - \cos \varepsilon \cdot \sqrt{N_{\lambda}^2 - \cos^2 \varepsilon}} \quad (37.6)$$

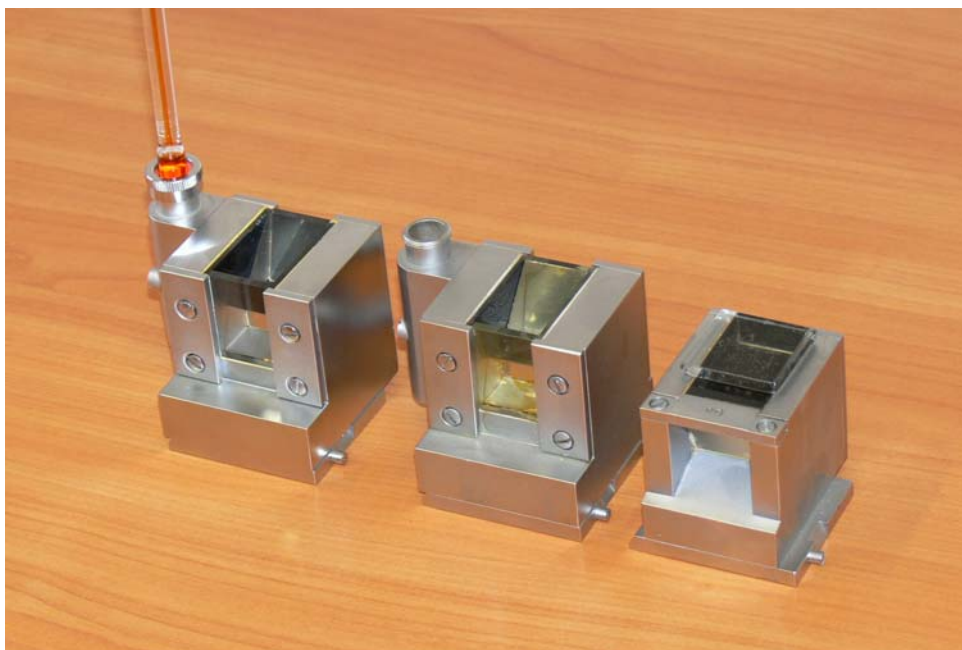
Na rys. 37.12 przedstawiono pryzmaty G i V.

Zakres pomiarowy każdego z pryzmatów podany jest na cokole, przy czym oznaczenia są następujące:

u – odpowiada zakresowi $n_e = 1.31 - 1.61$,

o - odpowiada zakresowi $n_e = 1.46 - 1.74$, dla kąta odchylenia $n_e = 1.29 - 1.83$ dla V_0

e - odpowiada zakresowi $n_e = 1.47 - 2.01$.



Rys. 37.12 Pryzmaty stosowane w refraktometrze PR-2 .

Trzecia i następane litery określają rodzaj szkła, z którego wykonany jest pryzmat np. F1, F2 itp. Pryzmaty służące do pomiaru kąta granicznego (G_o , Z_o , A_u , A_o) posiadają dwie gładko wypolerowane powierzchnie, które stykają się ze sobą dokładnie pod kątem 90° , poziomą powierzchnią pomiarową i pionową powierzchnią wyjściową. Pryzmat V_o składa się z dwóch spojonych ze sobą pryzmatów szklanych, które zetknięte są bocznymi ściankami. Kąt łóżyska pryzmatu V wynosi 90° . Pryzmat ten może być używany do pomiaru kąta granicznego i odchylenia dla cieczy i ciał stałych, przy czym należy w tym przypadku stosować zawsze kolimator. Kolimator zapatrzonny jest w śrubę regulacyjną (11 rys. 37.10), która umożliwia nam ustawienie biegu wiązki świetlnej dokładnie na oś lunety ustawionej na 90° .

3) Urządzenie pomiarowe.

Prawa strona urządzenia pomiarowego zawiera cztery pokręta oznaczone cyframi 5,6,7 i 8. Pierwsze z nich (5) służy do autokolimacji i może być w czasie pomiarów przekręcone w lewo (pokrętko wówczas wyskakuje). Pokrętko to w tym położeniu służy do nastawienia lunety na 90° z autokolimacją. Tylko wówczas (przy wyciągniętym pokrętku), podświetlana jest skala odczytu kąta γ . Gdy pokrętko jest wciśnięte i przekręcone w prawo, pole obrazu jest znacznie większe, widoczne są tzw. przeciw wskaźniki. W tym położeniu możemy nastawić widoczny krzyż lub pojedynczą linię na granicę podziału lub na środek

obrazu. W przypadku gdy wykonujący pomiar nie posiada wprawy w eksperymencie, należy wyciągnąć pokrętkę podczas wstępnych justowań i wszystkich pomiarów.

37.3 Justowanie przyzmatu i kolimatora.

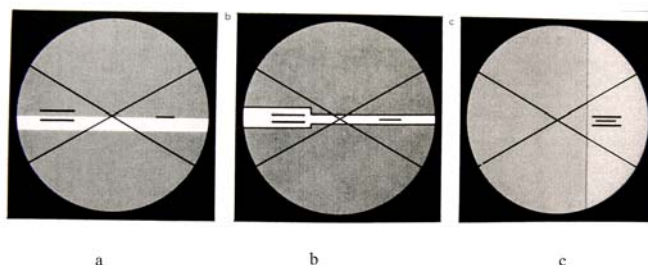
Przed przystąpieniem do pomiarów należy przeprowadzić justowanie przyzmatu i kolimatora.

37.3.1 Justowanie przyzmatu.

Aby uzyskać dokładne wyniki pomiarów, przyzmat przy pomocy, którego wykonujemy pomiary powinien być tak usytuowany względem lunety, aby jego powierzchnia wyjściowa była ustawiona pod kątem prostym do jej osi. W tym celu należy przeprowadzić justowanie przyzmatu w następujący sposób;

- a) włączyć główne zasilanie przyrządu (p. 14 rys.37.10),
- b) dźwignię przełączającą 7 przestawić do przodu,
- c) okular ustawić na ostre widzenie obrazu skali,
- d) znajdującą się w dolnym polu widzenia skalę dokładnego pomiaru, przy pomocy pokrętki 6 ustawić na 0,
- e) górną skalę przy pomocy pokrętki 8 ustawić na 90^0 ,
- f) dźwignię przełączającą 7 przestawić do tyłu,
- g) obrócić w lewo gałkę 5 do włączenia autokolimacji (gałka powinna odskoczyć).

Pojedyncza kreska w okularze powinna teraz zajmować położenie symetryczne w obszarze kreski podwójnej tak jak pokazano na rys. 37.13 c. Jeśli tak nie jest to przy pomocy śruby regulacyjnej 10 rys. 37.10 ustawiamy żądane symetryczne położenie kresek.



Rys. 37. 13 Widok w lunecie systemu pomiarowego

37.3.2. Justowanie kolimatora.

Podczas pomiarów światło powinno padać równoległe do poziomo przebiegającej osi lunety. W tym celu należy;

- a) ustawić lunetę na kąt 90^0 (patrz 37.3.1, d, e),
- b) włączyć autokolimację, (patrz 37.3.1, g)
- c) pryzmat V ustawić śrubą regulacyjną 10 rys.37.10 tak aby obraz kreski podwójnej zajmował symetryczne położenie względem kreski pojedynczej (rys. 37.13 c),
- d) wyłączyć autokolimację (przekręcić gałkę 5 w prawo (rys. 37.10),
- e) włączyć lampę rtęciową (13),
- f) przełącznik dwu dźwigniowy (7) przestawić do tyłu,
- g) obserwować położenie obrazu szczelinowego w stosunku do przeciw wskaźnika. Jeśli pojedyncza linia nie leży dokładnie w obrazie szczeliny, należy przy pomocy śruby regulacyjnej 11 tam ją ulokować.

37.4 Przygotowanie próbek i wykonanie pomiarów.

1. Przygotowanie próbek.

Pomiary współczynników załamania wykonamy używając pryzmatów G_0 i V, przy włączonej autokolimacji (pokrętko 5 przekręcić w lewo, gałka powinna odskończyć). Badane próbki ciał stałych powinny być przezroczyste i mieć powierzchnie wypolerowane. Wielkość powierzchni próbki stykającej się z pryzmatem powinna być porównywalna z powierzchnią stykową pryzmatu. Mniejsze próbki obniżają ostrość linii granicznych i obniżają dokładność pomiarów. Między badane próbki i pryzmat wprowadzamy ciecz immersyjną w takiej ilości aby cała powierzchnia próbki była zwilżona. W przypadku pryzmatu G_0 druga wypolerowana powierzchnia próbki powinna być zwrócona do kolimatora lub przystawki oświetlającej. Współczynnik załamania cieczy immersyjnej powinien być większy od współczynnika badanej próbki, dla danej długości fali i mniejszy od współczynnika załamania pryzmatu refraktometru. Jako cieczy immersyjnej najczęściej używamy alfabromonaftalenu $n = 1.66$, roztworu jodku potasowo- rtęciowego $n = 1.73$, lub jodku metylenu $n = 1.74$. Ciecze te są trujące i należy stosować dużą ostrożność. Często stosuje się także olejek immersyjny $n = 1.515$, lub glicerynę $n = 1.47$. Powierzchnie stykowe próbki i pryzmatów powinny być oczyszczone miękką czystą szmatką nawilżoną alkoholem. Przy pomiarach V – pryzmatem ciał stałych, ich powierzchnie mogą być matowe, jednakże kąt między ściankami próbki powinien wynosić 90^0 , przy błędzie

nie przekraczającym ± 0.02 . Ilość wprowadzonej cieczy immersyjnej między ścianki V – pryzmatu i próbkę nie powinna być, jak poprzednio ani za duża ani za mała.

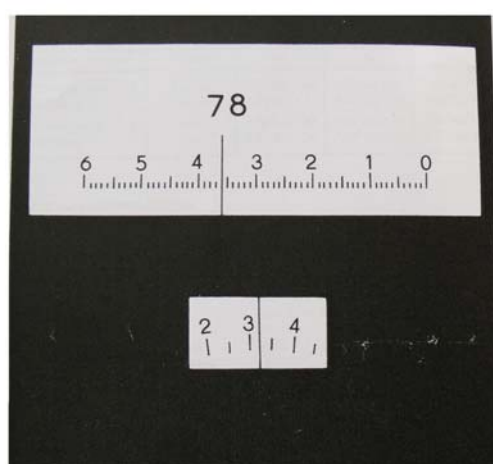
Przy pomiarze współczynników załamania cieczy należy zachować dużą czystość. Po wyczyszczeniu pryzmatów należy odczekać kilka minut aż wyschną, po czym bardzo ostrożnie nalewamy badaną ciecz. Powierzchnia cieczy dla pryzmatu V powinna leżeć około 3 mm poniżej górnej krawędzi pryzmatu. Przy zbyt małych ilościach cieczy obraz obserwowanych krawędzi może się znacznie pogorszyć. Po wprowadzeniu cieczy pryzmat przykrywamy szklaną płytką. Obraz linii granicznych początkowo mętny, w miarę wyrównywania się temperatur stopniowo się wyostrza i wówczas wykonujemy pomiary. Dla cieczy współczynnik załamania znacznie silniej zależy od temperatury niż dla ciał stałych, dlatego pryzmat V przystosowany do pomiaru cieczy posiada oprawkę z termometrem o zakresie od 0 do 50° C. Istnieje także w tym przypadku możliwość podłączenia pryzmatu do ultratermostatu, umożliwiając w ten sposób utrzymanie stałej temperatury z dokładnością do 0.02° C w czasie pomiarów. Wyrównanie temperatury między badaną cieczą a pryzmatem trwa od 5 do 10 minut.

2. Wykonanie pomiarów.

Jeżeli wcześniej nie przeprowadzono justowania pryzmatu i kolimatora, należy je teraz przeprowadzić zgodnie z § 37.3.1 i 37.3.2. Pomiary współczynników załamania ciał stałych i cieczy wykonujemy przez pomiar kąta odchylenia, wykorzystując do tego celu pryzmat V przy włączonej autokolimacji. Czynności należy wykonać w niżej podanej kolejności;

1. Wyczyścić i wypłukać w alkoholu próbkę i pryzmat. Próbkę odpowiednio umieścić w refraktometrze.
2. Dźwignię 7 rys.37.10 przesunąć do przodu, pokrętko 8 ustawić na 90° , a pokrętko 6 na 0.
3. Dźwignię 7 przesunąć do tyłu (do siebie).
4. Obrócić gałką 5 do siebie (powinna odskoczyć) włączając w ten sposób autokolimację.
5. Włączyć lampę rtęciową 13 odczekać kilka minut, posługując się pokrętkiem 15 wybrać lampę rtęciową Hg a pokrętkiem 16 odpowiednią linię emisyjną, np. g (fiolet).

6. Wybrana linia emisyjna powinna znajdować się między dwiema kreskami tak jak na rys. 37.13 c. Jeśli tak nie jest to oznacza że źle przeprowadzono justowanie pryzmatu i należy wówczas śrubą regulacyjną 10 doprowadzić do takiego położenia.
7. Wprowadzić badaną ciecz lub ciało stałe do pryzmatu
8. Obracać pokręteł 8 w lewo (przeciwnie do obrotu wskazówek zegara) tak długo, aż tę samą linię zaobserwujemy na ciemnym tle (gałka 5 wyciągnięta) i ustawić ją dokładnie między dwiema kreskami tak jak pokazano na rys. 37.13.b.
9. Przesunąć dźwignię 7 do przodu (od nas) i odczytać wartość kąta odchylenia, tak jak to pokazano na rys. 37.14.



Rys. 37.14 Skala pomiarowa kąta ε . Górna – stopnie i minuty,
Dolna – ułamkowe części minut. Odczyt; $78^{\circ}36,32'$

10. Podobne pomiary przeprowadzić dla serii F (pokrętko 16)
11. W podobny sposób wyznaczyć dla nich kąty odchylenia ε .
12. Wyliczyć współczynnik załamania próbki dla badanej długości fali λ , korzystając z zależności 37.7

$$n_{\lambda} = \sqrt{N_{\lambda}^2 - \cos^2 \varepsilon} \quad (37.7)$$

gdzie $N_{\lambda} = 1.7482$ jest współczynnikiem załamania światła pryzmatu dla $\lambda = 546$ nm.

Błąd pomiaru jest stały i wynosi mniej niż 0.00005.

13. Otrzymane wyniki pomiarów umieścić w tabeli 1.

Tabela 1

Lp.	N_λ	λ [nm]	γ	$\cos \gamma$	n_λ
1					
2					
3					
4					

Tabela 2

Lp	Linia λ [nm]	Typ pryzmatu				
		G ₀ F2	V ₀ F2	A ₀ F3	A _u F3	F _u F3
1	365.0	1.825384	1.824274	1.820663	1.667707	1.666012
2	397.0	1.796876	1.796856	1.796780	1.651044	1.650938
3	404.7	1.792205	1.792219	1.792257	1.648348	1.648302
4	407.8	1.790471	1.790491	1.790549	1.647347	1.647312
5	410.8	1.788863	1.788886	1.788954	1.646417	1.646388
6	434.0	1.778193	1.778210	1.778241	1.640196	1.640149
7	435.8	1.777468	1.777484	1.777512	1.639768	1.639719
8	447.1	1.773173	1.773187	1.773202	1.637220	1.637161
9	467.8	1.766276	1.766292	1.766312	1.633070	1.633013
10	471.3	1.765218	1.765234	1.765255	1.630897	1.630846
11	480.0	1.762708	1.762724	1.762749	1.630897	1.630846
12	486.1	1.761047	1.761062	1.761088	1.629880	1.629832
13	491.6	1.759615	1.759629	1.759655	1.629001	1.628955
14	492.2	1.759463	1.759476	1.759502	1.628907	1.628862
15	501.6	1.757164	1.757175	1.757198	1.627491	1.627447
16	508.6	1.755556	1.755565	1.755586	1.626497	1.626454
17	546.1	1.748203	1.748218	1.748242	1.621921	1.621872
18	576.9	1.743343	1.743364	1.743397	1.618858	1.618810
19	579.1	1.743027	1.743047	1.743078	1.618658	1.618609
20	587.6	1.741839	1.741624	1.741646	1.617756	1.617708
21	589.3	1.741608	1.741624	1.741646	1.617756	1.617708
22	623.4	1.737416	1.737415	1.737404	1.615079	1.615027
23	643.8	1.735282	1.735296	1.735322	1.613709	1.613658
24	656.3	1.734073	1.734088	1.734111	1.612924	1.612875
25	667.8	1.732986	1.732942	1.732817	1.612203	1.612145
26	690.7	1.730685	1.729892	1.727957	1.610582	1.610335
27	706.5	1.728768	1.726154	1.719853	1.609097	1.608313
28	768.2	1.716756	1.657897	1.516020	1.596656	1.575050

Tabela 3. Wybrane linie widmowe lamp spektralnych. * - linie szczególnie zalecane.

Lampa	Barwa linii	Intensywność	Oznaczenie	Długość fali λ [nm]
H ₂	czerwona	silna	C *	656.3
	niebiesko-zielona	średnia	F *	486.1
	fiolet	średnia	G' *	434.0
	fiolet	słaba		410.8
	fiolet	słaba		397.0
He	czerwona	średnia	r	706.5
	czerwona	średnia		667.8
	żółta	bardzo silna	d *	587.6
	zielona	średnia		501.6
	niebiesko-zielona	średnia		492.2
	niebieska	silna		471.3
	fiolet	słaba		447.1
Hg	czerwona	słaba	c *	690.7
	czerwona	słaba		623.4
	żółta	b. silna dublet		579.1
	żółta	b. silna dublet		576.9
	zielona	Silna	e **	546.1
	niebiesko-zielona	Średnia		491.6
	niebiesko-fioletowa	Średnia	g. *	435.8
	fioletowa	Słaba		407.8
	ciemny fiolet	bardzo słaba	h *	404.7
	bardzo ciemny fiolet	bardzo b. słaba	j	365.0
Cd	czerwona	bardzo silna	C' **	643.8
	zielono-niebieska	bardzo silna		508.6
	niebieska	bardzo silna	F' **	480.0
	niebieska	bardzo silna		467.8
Na	żółta	b. silna dublet	D *	589.3
K	czerwona ciemna	średnia	A'	768.2

Literatura

1. Sz.Szczeniowski Fizyka doświadczalna cz. IV. PWN Warszawa 1980r.
2. J.Massalski, M.Massalska Fizyka dla inżynierów. WNT Warszawa 1980r.

WYZNACZANIE DŁUGOŚCI FALI ŚWIETLNEJ I PROMIENIA KRZYWIZNY SOCZEWKI PRZY POMOCY PIERŚCIENI NEWTONA

38.1 Wprowadzenie.

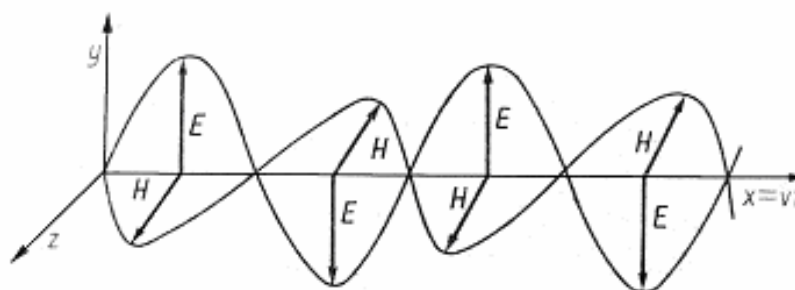
Fale świetlne są falami elektromagnetycznymi, które polegają na rozchodzeniu się w czasie i przestrzeni zmian natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} i sprzężonego z nim nierozdzielnie pola magnetycznego \mathbf{B} . Wektory \mathbf{E} i \mathbf{B} są wzajemnie prostopadłe i leżą w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali (rys. 38.1). Fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną, a wektorem świetlnym jest wektor elektryczny \mathbf{E} . Okazuje się bowiem, że tylko ten wektor wywołuje na siatkówce oka wrażenia wzrokowe i działa na emulsję fotograficzną. Drgania magnetyczne fali posiadają w rozważaniach optycznych mniejsze znaczenia. Jeżeli kierunek rozchodzenia się fali obierzemy za oś x , to falę taką możemy przedstawić jako falę harmoniczną płaską w postaci

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx) \quad (38.1)$$

gdzie

$$\omega = 2\pi / T, \text{ a } k = 2\pi / \lambda$$

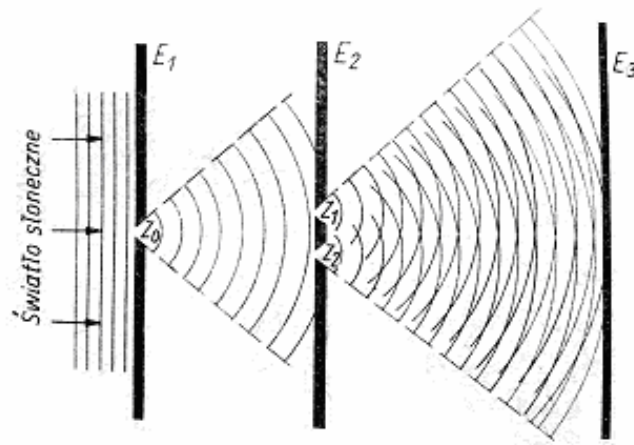
E_0 – amplituda natężenia pola elektrycznego E , T – okres fali, λ - długość fali



Rys. 38.1. Obraz fali elektromagnetycznej.

38.1.1 Interferencja światła. Doświadczenia Younga.

Zjawiskiem charakterystycznym dla każdego ruchu falowego jest interferencja. Interferencja polega na nakładaniu się dwóch lub większej liczby ciągów fal spójnych (koherentnych), tj. takich fal, które mają tę samą częstość drgań i stałą różnicę faz. Klasycznym doświadczeniem z dziedziny interferencji jest doświadczenie z dwiema szczelinami, wykonane po raz pierwszy w 1801 roku przez Thomasa Younga. Doświadczenie to przedstawiono schematycznie na rys. 38.2



Rys. 38.2 Schemat doświadczenia Younga

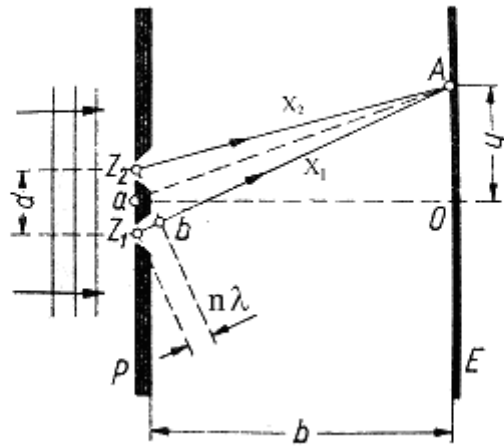
Young ustawił ekran E_1 zaopatrzony w mały otworek Z_0 prostopadłe do promieni światła słonecznego. Zgodnie z zasadą Huygensa, otworek ten działa jako źródło rozchodzących się elementarnych fal kulistych, które padając na otworki Z_1 i Z_2 umieszczone w ekranie E_2 ponownie generują dwie fale kuliste, które interferując z sobą na ekranie E_3 dają szereg rozłożonych na przemian prążków jasnych i ciemnych. Otworki Z_1 i Z_2 możemy nazwać spójnymi źródłami światła.



Rys. 38.3 Interferencja światła w doświadczeniu Younga

Jeśli zamiast otworków umieścimy szczeliny wówczas na ekranie zaobserwujemy obraz interferencyjny przedstawiony na rys. 38.3. Pojawienie się prążków jasnych i ciemnych świadczy, że zjawisku interferencji fal spójnych towarzyszy zmiana amplitudy fali powstałej w wyniku tej interferencji.

Rozpatrzmy dwie spójne fale harmoniczne o jednakowych amplitudach i częstościach, emitowane przez źródła Z_1 i Z_2 i znajdziemy wynik nałożenia się tych fal w punkcie A rys. 38.4



Rys. 38.4. Rysunek pomocniczy do analizy doświadczenia Younga

Zgodnie z zależnością 38.1 równania fal płaskich o takiej samej amplitudzie i częstotliwości, wywołane przez źródła Z_1 i Z_2 oddalone od siebie o a możemy zapisać w postaci

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t - kx_1) \quad (38.2)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t - kx_2) \quad (38.3)$$

gdzie x_1 i x_2 oznaczają odległości źródeł Z_1 i Z_2 od punktu A, $\omega = 2\pi/T$ a $k = 2\pi/\lambda$ jest liczbą falową. Drganie wypadkowe w punkcie A wywołane obu falami możemy zapisać w postaci

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \sin(\omega t - kx_1) + E_0 \sin(\omega t - kx_2)$$

Przekształcając to za pomocą znanego z trygonometrii wzoru

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (38.4)$$

otrzymamy

$$E = 2E_0 \cos k \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \left[\omega t - k \frac{(x_1 + x_2)}{2} \right] \quad (38.5)$$

Drganie wypadkowe w punkcie A jest zatem również sinusoidalne, o tym samym okresie T co drgania składowe i o amplitudzie równej

$$A = 2E_0 \cos k \frac{x_2 - x_1}{2} = 2E_0 \cos \pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \quad (38.6)$$

Wielkość amplitudy wypadkowej zależy więc, jak widać, od różnicy odległości punktów x_1 i x_2 od punktu A. Jeżeli różnica dróg $x_2 - x_1$ jest równa całkowitej wielokrotności długości fali, tj. gdy $x_2 - x_1 = n \lambda$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (38.7)

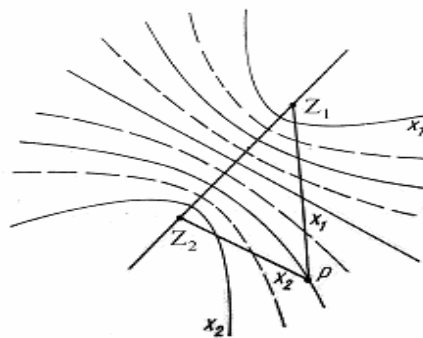
to zależność (38.6) przybierze postać: $|A| = 2A$. Oznacza to, że amplituda drgania wypadkowego jest dwukrotnie większa od amplitudy drgań źródeł fali. We wszystkich punktach, które spełniają warunek (38.7), fale maksymalnie wzmacniają się wzajemnie przez interferencję.

Jeżeli różnica dróg $x_2 - x_1$ jest równa nieparzystej wielokrotności połowy długości fali, tzn. gdy $x_2 - x_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$ (38.8)

To
$$A = 2E_0 \cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (38.9)$$

Amplituda drgań wypadkowych staje się równa zero. Mówimy, że fale w tych punktach znoszą się lub „wygaszają” wzajemnie. Dodajmy, że omówione wyżej maksymalne wzmocnienie, oraz całkowite wygaszenie zachodzi tylko wtedy, gdy $x_2 - x_1 \ll$ od x_1 i x_2 .

Punkty, które dla danego n spełniają warunki (38.7) i (38.8) leżą w przypadku fal dwuwymiarowych, na hiperbolach, natomiast dla fal trójwymiarowych na powierzchni hiperboloid obrotowych o osi przechodzącej przez ogniska Z_1 i Z_2 .



Rys. 38.5 Interferencja fal

Obraz interferencyjny obserwowany na ekranie E (rys.38.4) przedstawiono na rys.38.5. Liniami ciągłymi zaznaczono hiperbole, wzdłuż których występuje maksymalne wzmocnienie i obserwujemy wówczas prążki jasne. Są to tzw. linie (lub powierzchnie) strzałkowe. Linie przerywane oznaczają miejsca wygaszania drgań, prążki ciemne, czyli linie węzłów. Amplitudy drgań punktów leżących między tymi hiperbolami przybierają wartości pośrednie, od 0 do $2A$.

Szczególnym przypadkiem interferencji jest powstawanie tzw. fal stojących. Powstają one w wyniku nałożenia się fali, np. płaskiej, biegnącej w danym kierunku i fali biegnącej w kierunku przeciwnym np. odbitej. Równania tych fal możemy zapisać w następującej postaci;

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + kx)$$

Korzystając z zależności (38.4) otrzymujemy równanie fali wypadkowej

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos kx \sin \omega t = 2E_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \omega t \quad (38.10)$$

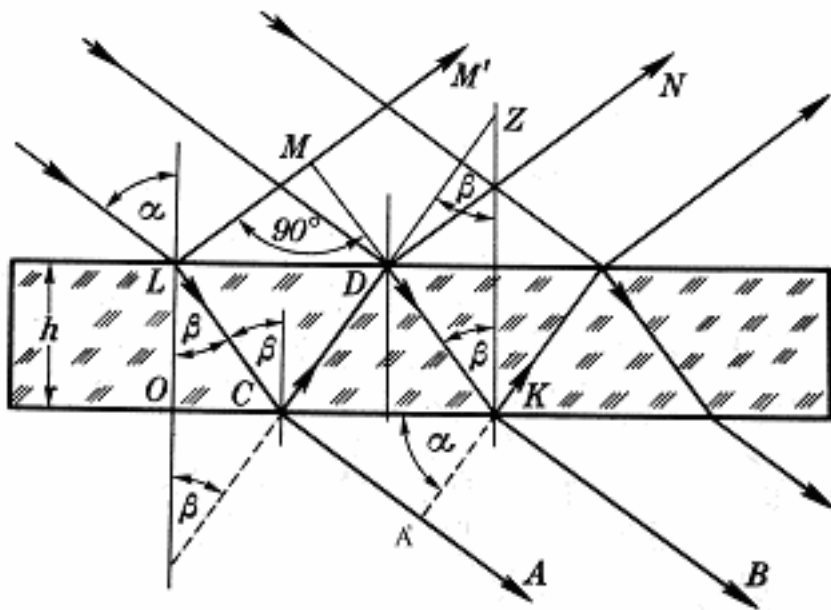
Fala wypadkowa jest również falą harmoniczną o amplitudzie $A = \cos kx$

Gdy $\cos kx = 0$, wtedy $E = 0$. Zbiory punktów spełniających ten warunek nazywamy węzłami, natomiast gdy $\cos kx = \pm 1$, wówczas amplituda A osiąga wartość maksymalną, a zbiory punktów nazywamy strzałkami fal stojących. Nazwa – fala stojąca – pochodzi stąd, że przy równych amplitudach obu fal interferujących nie obserwujemy w polu interferencyjnym ruchu postępowego. W fali stojącej jednowymiarowej, liniowej, miejsca węzłowe są to po prostu punkty. Gdy fala stojąca jest powierzchniowa (dwuwymiarowa), wówczas węzły są liniami. W przestrzeni trójwymiarowej węzły i strzałki są powierzchniami. Odległość dwóch sąsiednich strzałek lub węzłów wynosi $\lambda/2$. Drgania w sąsiednich strzałkach różnią się w fazie o π . Jeśli amplitudy obu fal interferujących nie są dokładnie równe, to w strzałkach amplituda wynosi $E_1 + E_2$, w węzłach zaś nie ma spoczynku, lecz występują drgania o amplitudzie $|E_1 - E_2|$. Gdy częstotliwości obu drgań różnią się nieznacznie, wówczas cały obraz interferencyjny wędruje z wolna, nie tracąc swego charakteru, w kierunku źródła o częstotliwości mniejszej. Przez dany punkt pola falowego przechodzą kolejno węzły i strzałki, czyli występują w nich dudnienia. Energia pola falowego równa się sumie energii emitowanej przez oba źródła, jednakże w polu falowym jest ona rozmieszczona nierównomiernie.

38.1.2 Interferencja w cienkich płytkach.

Wiele bardzo pięknych i znajdujących szerokie zastosowanie zjawisk obserwowanych często w życiu codziennym wywołanych jest przez interferencję wiązek światła odbitego na dwu powierzchniach cienkich, przezroczystych płytek. Zjawiska te są powszechnie znane w postaci zabarwienia baniek mydlanych, czy też oleju rozlanego na powierzchni wody. Barwy takie znane od dawna badał już Newton.

W celu dokładniejszego rozpatrzenia tego zjawiska wyobraźmy sobie płasko-równoległą płytkę przezroczystą o grubości h . Pod kątem α pada na nią wiązka promieni równoległych (rys. 38.6). Część wiązki ulega odbiciu na przedniej ściance płytki, część załamuje się i pada na tylną ściankę. Na tylnej ściance następuje znów częściowe odbicie i załamanie.



Rys. 38.6. Bieg wiązki światła w cienkiej płytce

Promienie odbite padają z powrotem na przednią ściankę, tam znów częściowo się odbijają i częściowo załamują itd. W ten sposób z płytki wychodzi szereg wiązek, równoległych do wiązki przechodzącej bezpośrednio, które wykazują w stosunku do niej różnice faz wywołane przez różnicę dróg optycznych. Drogą optyczną promienia świetlnego w środku o współczynniku załamania n nazywamy iloczyn długości odcinka przebytego

przez promień i współczynnika załamania. Różnica dróg optycznych między interferującymi promieniami LMM' i LCDN liczona od punktu L, w którym te promienie się rozchodzą jak wynika z rys. 38.6 wynosi

$$\Delta = (LC + CD)n - LM \quad (38.11)$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania płytki. Jeżeli grubość płytki oznaczymy przez h to

otrzymamy że
$$LC = CD = \frac{h}{\cos \beta}, \quad (38.12)$$

Z rysunku widać, że zachodzi również zależność

$$\sin \alpha = \frac{CA'}{CK} = \frac{LM}{LD}$$

skąd otrzymujemy
$$LM = LD \sin \alpha \quad (38.13)$$

ale
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{LD}{2h}$$

a więc
$$LM = 2h \operatorname{tg} \beta \sin \alpha \quad (38.14)$$

Ponieważ $LC = CD$ więc różnica dróg optycznych (38.11) wynosi

$$\Delta = \frac{2h}{\cos \beta} n - 2h \operatorname{tg} \beta \sin \alpha = \frac{2h}{\cos \beta} n - 2h \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin \alpha$$

skąd
$$\Delta = \frac{2h}{\cos \beta} (n - \sin \alpha \sin \beta)$$

korzystając z prawa Snelliusa; $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, oraz z zależności $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ otrzymujemy

$$\Delta = \frac{2hn}{\cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) \quad (38.15)$$

lub
$$\Delta = 2hn \cos \beta \quad (38.16)$$

Gdyby różnica dróg optycznych była wielokrotnością długością fali to jak wynika z zależności (38.7) powinniśmy obserwować maksima interferencyjne. Ale tak nie jest, ponieważ przy odbiciu na granicy powietrze – szkło (górna powierzchnia) faza zmienia się o π czyli $\lambda/2$. Wobec tego różnica dróg dla promieni odbitych wynosi

$$\Delta = 2hn \cos \beta \pm \frac{1}{2} \lambda \quad (38.17)$$

Jeśli ten fakt weźmiemy pod uwagę to maksima interferencji powstają tam gdzie

$$2nd \cos \beta \pm \frac{1}{2} \lambda = m \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (38.18)$$

a więc
$$2hn \cos \beta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (38.19)$$

Natomiast minima gdy
$$2dn \cos \beta = m\lambda \quad (38.20)$$

W przypadku promieni przechodzących przez płytkę, w których nie występuje skok fazy, zależność (38.20) jest warunkiem maksimum interferencji, a (38.19) na minimum.

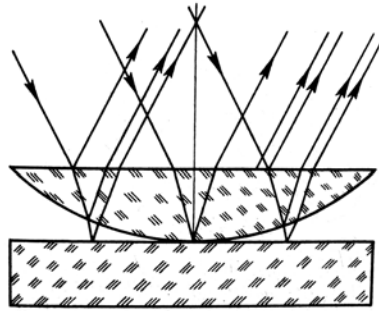
Jeśli na płytkę lub błonkę wprowadzimy wiązkę światła białego, które jest mieszaniną wielu długości fal, to wzmocnieniu po odbiciu ulegną tylko te długości fali, które spełniają warunek (38.19), pozostałe zaś zostaną całkowicie lub częściowo wygaszone. Powoduje to charakterystyczne zabarwienie błonki. Przykładem mogą tu służyć piękne barwy baniek mydlanych, smarów samochodowych na mokrym asfalcie, masy perłowej, czy też skrzydeł owadów. Jak wynika z zależności (38.19) ze wzrostem grubości płytek h ich barwy przesuwają się w stronę fal długich, przy czym barwy w świetle odbitym są dopełniające do barw widzianych w świetle przechodzącym. Interferencja zachodzi jednak tylko wtedy, gdy różnica dróg optycznych nie jest zbyt duża w stosunku do długości fali λ . W przeciwnym przypadku wiązki odbite od przedniej i tylnej powierzchni błonki lub płytki mogą być niespójne, gdyż źródło światła emituje ciągi fal o skończonej długości. Każdy nowy ciąg fal jest niespójny z poprzednim.

Zjawisko interferencji w cienkich błonkach znalazło zastosowanie w tak zwanych urządzeniach przeciwooblaskowych. Obiektywy aparatów fotograficznych mają lekkie zabarwienie niebieskofioletowe, które powstaje wskutek istnienia cieniutkiej warstwy przezroczystej naniesionej na szkło obiektywu. Jej współczynnik załamania jest mniejszy niż soczewki, co powoduje częściowe zmniejszenie odbicia światła od jej powierzchni. Grubość błonki dobiera się tak, by fale odbite od obu jej powierzchni wygaszały się wzajemnie.

38.1.3 Pierścienie Newtona.

Prążki interferencyjne możemy otrzymać również przy użyciu warstwy powietrza o zmiennej grubości pomiędzy soczewką wypukłą o dużym promieniu krzywizny i płytką płasko-równoległą stykającą się z soczewką (rys. 38.7).

Promienie światła padające pod bardzo małym kątem na płaską powierzchnię soczewki ulegają odbiciu na jej przedniej i tylnej ścianie oraz na powierzchni płytki płasko-równoległej.



Rys. 38.7. Powstawanie pierścieni Newtona.

Prążki powstają wskutek interferencji promieni odbitych od tylnej powierzchni soczewki z odbitymi od przedniej powierzchni płytki płasko-równoległej. Te ostatnie przebywają na swej drodze cienką warstwę powietrza o grubości h . Ponieważ dla prostopadłego padania $\cos \beta = 1$, oraz możemy przyjąć, że współczynnik załamania powietrza równy jest jedności, różnicę dróg optycznych, (zal. 38.17) promieni interferujących możemy zapisać wzorem

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} \quad (38.21)$$

Ze wzoru tego widać, że prążki interferencyjne, będą miały postać współśrodkowych pierścieni otaczających miejsce zetknięcia się soczewki z płytką. Punkt styczności soczewki z płytką będzie ciemny, gdyż dla niego $h = 0$. Promienie odbite od przedniej ścianki soczewki i tylnej ścianki płytki nie wchodzi w rachubę, nie są spójne, gdyż grubość soczewki i płytki jest zbyt duża na to by mogło zajść zjawisko interferencji. Oznaczmy punkt zetknięcia soczewki z płytką przez O (rys. 38.8). Grubość warstwy powietrza w tym punkcie jest równa zero, zaś w punkcie A jest równa h . Pierścienie ciemne otrzymamy dla

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (38.22)$$

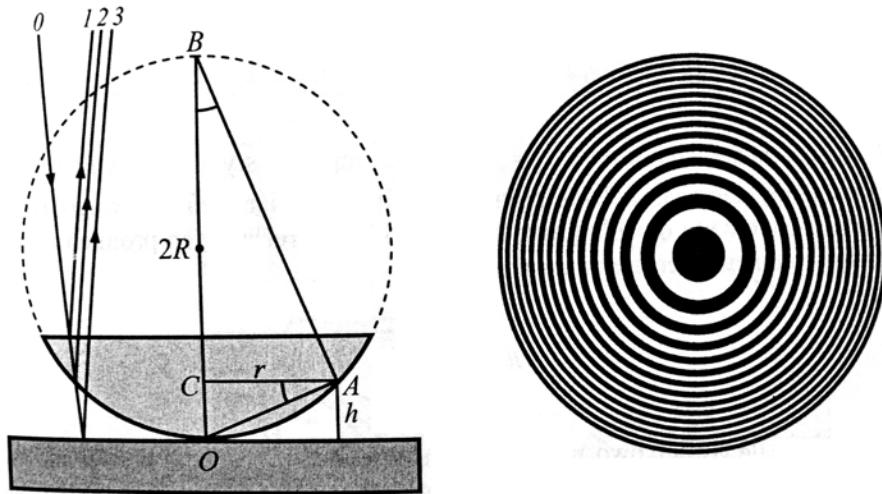
Z podobieństwa trójkątów prostokątnych OCA i ACB na rys. 38.8 otrzymamy;

$$\frac{h}{r} = \frac{r}{2R - h} \approx \frac{r}{2R}, \quad \text{dla } h \ll 2R \quad (38.23)$$

stąd

$$h = \frac{r^2}{2R} \quad (38.24)$$

gdzie r oznacza promień pierścienia ciemnego, R – promień krzywizny soczewki.



Rys. 38.8. Schemat do pierścieni Newtona Rys. 38.9. Pierścienie Newtona

Podstawiając zależność (38.24) do (38.22) otrzymujemy;

$$2\frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (38.25)$$

skąd otrzymujemy dla pierścienia ciemnego o promieniu r_m zależność

$$m\lambda = \frac{r_m^2}{R} \quad (38.26)$$

i analogicznie dla pierścienia o promieniu r_n

$$n\lambda = \frac{r_n^2}{R} \quad (38.27)$$

Środkową ciemną plamę można nazwać pierścieniem rzędu zerowego.

Odejmując stronami ostatnie wyrażenia otrzymujemy;

$$m\lambda - n\lambda = \frac{r_m^2}{R} - \frac{r_n^2}{R}$$

skąd
$$\lambda = \frac{r_m^2 - r_n^2}{R(m-n)} \quad (38.28)$$

lub jeżeli znana jest długość fali λ promień krzywizny soczewki R możemy obliczyć z

zależności;
$$R = \frac{r_m^2 - r_n^2}{\lambda(m-n)} \quad (38.29)$$

Promień krzywizny soczewki możemy również wyznaczyć przekształcając zależność (38.26). Otrzymujemy wówczas

$$R = \frac{r_m^2}{m\lambda} \quad (38.30)$$

Należy zatem zmierzyć promień r_m dowolnego m – tego ciemnego pierścienia oraz znać długość fali λ użytego światła.

38.2 Opis ćwiczenia i wykonanie pomiarów.

38.2.1. Opis ćwiczenia.

W celu wyznaczenia promieni pierścieni ciemnych posługujemy się mikroskopem. Szkic urządzenia przedstawiono na rys. 38.10. Pod obiektywem mikroskopu umieszczamy płytkę płasko-równoległą p i leżącą na niej badaną soczewkę S . Układ ten jest oświetlony równoległą monochromatyczną wiązką światła przez obiektyw mikroskopu za pomocą soczewki i półprzepuszczalnej płytki Z ustawionej pod kątem 45° umieszczonej nad obiektywem mikroskopu. Wiązka światła odbija się częściowo od tej płytki, biegnie w dół i pada na układ płytek, dających skutek odbicia i interferencji – pierścienie Newtona. Promienie odbite ku górze przechodzą przez obiektyw mikroskopu i trafiają na półprzepuszczalną płytkę p a następnie do oka obserwatora. Do samego procesu interferencji mikroskop nic nie wprowadza. Pozwala on tylko dzięki powiększeniu na dokładny pomiar małych odległości między poszczególnymi pierścieniami.

Mikroskop jest zaopatrzony w okular, z krzyżem celowniczym, który ustawiamy na wybrany obraz prążka. Ustawienie to i pomiar r_m umożliwia przesuwany stolik mikroskopu, którego przesuw jest mierzony przy pomocy czujnika zegarowego. Mała wskazówka tego czujnika jest wyskalowana w milimetrach (1 działka to 1 mm), a duża – setne części milimetra. Zakres przesuwu wynosi 10 mm.

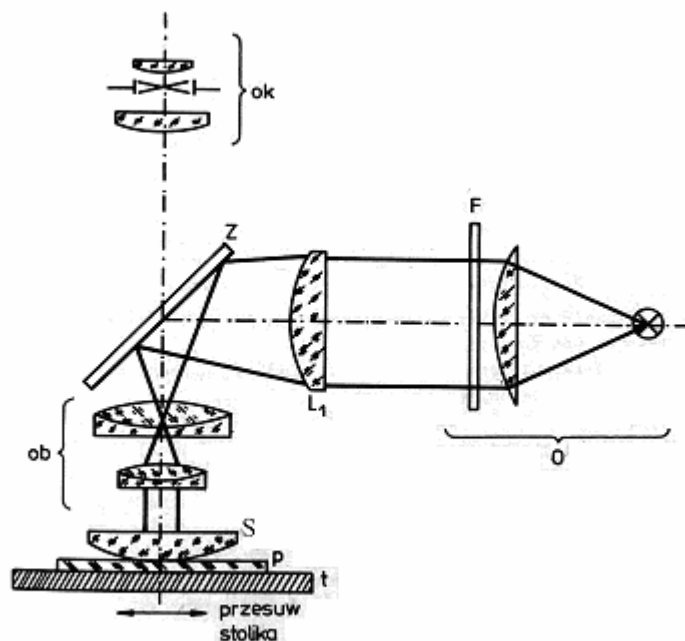
38.2.2. Wykonanie pomiarów.

Pomiary wykonujemy wykorzystując układ przedstawiony na rys. 38.11.

a) Pomiar promienia krzywizny R soczewki.

Przyrządy

- Mikroskop
- Płytkę płasko-równoległą
- Badane soczewki
- Oświetlacz z lampą sodową ($\lambda = 589 \text{ nm}$).



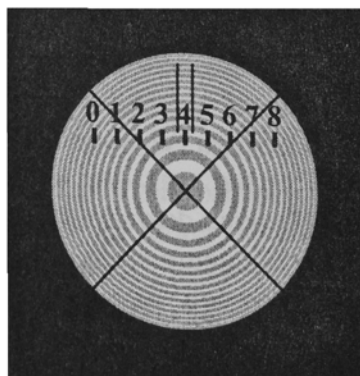
Rys. 38.10. Schemat układu optycznego do pomiaru promienia krzywizny soczewki;
 t – stolik mikroskopu, ob – obiektyw mikroskopu, S – badana soczewka,
 p – płytkę płasko-równoległą, L_1 – soczewka kondensora, F – filtr,
 ok – okular mikroskopu, O – oświetlacz, Z – zwierciadło półprzepuszczalne.



Rys. 38.11. Zestaw pomiarowy do wyznaczania promieni krzywizny soczewek.

Wykonanie pomiarów

1. Włączyć lampę sodową. Po upływie około 5 minut, przesuając lampę uzyskać ostry obraz pola widzenia w okularze mikroskopu.
2. Obracając bębnem mikrometrycznym znajdującym się przy okularze, ustawić krzyż nici pajęczych na środku skali rys. 38.12.
3. Na ciemnej płytce płasko-równoległej umieścić badaną soczewkę stroną wypukłą na płytkę płaską. Obrotami pokręteł ruchu zgrubnego i dokładnego, znajdujących się z boku mikroskopu, uzyskać maksymalnie ostry obraz pierścieni interferencyjnych.
4. Ręcznie przesunąć soczewkę tak, aby pierścień centralny (zerowy) znalazł się na przecięciu krzyża rys. 38.12. Czujnik mikrometryczny ustawić na zero. Jeśli pierścień centralny nie jest ciemny, to powierzchnie soczewki i płytki płaskiej należy przemyć spirytusem, przetrzeć do sucha czystą flanelką i ponownie umieścić pod mikroskopem.



Rys. 38.12. Ustawienie krzyża celowniczego i mikropodziałki.

5. Przy pomocy pokręteła znajdującego się pod stolikiem mikroskopu środek nici pajęczych (4) ustawić na lewej stronie pierwszego pierścienia r_1^l i odczytać jego wartość na czujniku mikrometrycznym z dokładnością do 0.01 mm. To samo wykonać dla prawej strony pierścienia r_1^p

Obliczyć średnią wartość promienia pierwszego pierścienia z zależności

$$r_1 = \frac{r_1^l + r_1^p}{2} \quad (38.31)$$

Obliczyć promień krzywizny soczewki korzystając zależności (38.30) przyjmując $m = 1$.

$$R_1 = \frac{r_1^2}{\lambda}$$

6. W podobny sposób dokonać pomiaru promieni dwóch następnych pierścieni r_2 i r_3 , zakładając odpowiednio $m = 2$ i 3 , wyznaczyć odpowiadające im wartości promieni krzywizny soczewki oraz wyznaczyć średnią wartość promienia krzywizny soczewki

$$R = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} \quad (38.32)$$

b) Pomiar długości fali światła

Korzystając z zależności 38.30 możemy również przy znanej wartości promienia krzywizny R , wyznaczyć nieznaną długość fali światła wydzielonej z wiązki światła białego, np. przez filtr interferencyjny.

1. Na oświetlacz z żarówką 6 V założyć filtr interferencyjny
2. Zmierzyć jak w p. 5 średnicę m – tego ciemnego prążka. Pomiar powtórzyć kilkakrotnie dla różnych wartości m .
3. Wyznaczyć długość fali z zależności

$$\lambda = \frac{r_m^2}{mR} \quad (38.33)$$

Wyniki pomiarów przedstawić w tabeli 38.1

Tabela 38.1

Nr. soczewki	Rząd pierścienia	r_l [m]	r_p [m]	r_{sr} [m]	λ [nm]	R [nm]
1	$m = 1$					
1	$m = 2$					
1	$m = 3$					
2	$m = 1$					
2	$m = 2$					
2	$m = 3$					
3	$m = 1$					
3	$m = 2$					
3	$m = 3$					

4. Oszacować błąd pomiaru promienia krzywizny soczewki metodą różniczki zupełnej, przyjmując niedokładność wskazań czujnika mikrometrycznego jako ± 0.01 mm.

Literatura

- [1] Sz. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna cz. IV. PWN Warszawa 1980
- [2] H. Szydłowski, Pracownia Fizyczna PWN Warszawa 1975
- [3] J.R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki PWN Warszawa 1977
- [4] S. Pieńkowski, Fizyka doświadczalna- optyka, PWN Warszawa 1965.
- [5] Cz. Bobrowski, Fizyka dla inżynierów, WNT Warszawa 1978
- [6] J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, WNT Warszawa 1980.

DODATEK

1. Definicje jednostek podstawowych układu SI

1.1 Odległość

Metr – m

Metr jest to odległość, jaką przebywa światło w próżni w czasie $\frac{1}{299792458}$ s.

1.2 Czas

Sekunda – s

Sekunda jest definiowana jako 9192631770 okresów promieniowania elektromagnetycznego emitowanego podczas przejścia elektronu między jednoznacznie określonymi poziomami energetycznymi atomu cezu 133.

1.3 Masa

Kilogram – kg

Wzorcem jednostki masy (kilogram), jest cylinder wykonany ze stopu platyny i irydu, przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i wag w pobliżu Paryża.

1.4 Temperatura

Kelwin – K

Kelwin jest definiowany jako $\frac{1}{273.16}$ część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody.

1.5 Natężenie prądu

Amper – A

Amper jest definiowany jako natężenie prądu płynącego w dwóch długich, równoległych przewodach, oddległych o 1m, znajdujących się w próżni, powodującego powstanie siły oddziaływania magnetycznego między tymi przewodnikami wynoszącej $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr ich długości.

1.6 Natężenie źródła światła

Kandela – Cd

Natężenie promieniowania o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ Hz, emitowanego przez źródło jest równe jednej kandelii, jeżeli w kąt bryłowy równy jednemu steradianowi jest wypromieniowana moc $\frac{1}{683}$ wata.

2 Jednostki uzupełniające

2.1 Kąt płaski

Radian – rad

Radian jest to kąt płaski o wierzchołku umieszczonym w środku okręgu, którego ramiona wyznaczają na okręgu łuk o długości równej promieniowi tego okręgu.

2.2 Kat bryłowy

Steradian – Sr

Steradian jest to kąt sferyczny (bryłowy) o wierzchołku umieszczonym w środku sfery, wyznaczający na jej powierzchni wycinek, którego pole jest równe kwadratowi promienia tej sfery.

Tabela 1
Wybrane stałe fizyczne

Wielkość	Symbol	Wartość i jednostki
Prędkość światła w próżni	c	$2.99792458 \cdot 10^8$ m/s
Przenikalność elektryczna próżni	ϵ_0	$8.854187818 \cdot 10^{-12}$ F/m
Przenikalność magnetyczna próżni	μ_0	$12.5663706144 \cdot 10^{-7}$ H/m
Ładunek elementarny	e	$1.6021892 \cdot 10^{-19}$ C
Stała Plancka	h	$6.626176 \cdot 10^{-34}$ J s
Liczba Avogadra	N_A	$6.022045 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹
Masa spoczynkowa elektronu	m_e	$9.109534 \cdot 10^{-31}$ kg
Masa spoczynkowa protonu	m_p	$1.67252 \cdot 10^{-27}$ kg
Masa spoczynkowa neutronu	m_n	$1.67482 \cdot 10^{-27}$ kg
Ładunek właściwy elektronu	e/m_e	$1.7588047 \cdot 10^{11}$ D/kg
Stała Faradaya	F	$9.648456 \cdot 10^4$ C/mol
Stała Rydberga	R_∞	$1.097373177 \cdot 10^7$ m ⁻¹
Stała gazowa	R	8.31441 J/mol K
Stała Boltzmanna	k_B	$1.380662 \cdot 10^{-23}$ J/mol K
Stała Stefana – Boltzmanna	σ_{S-B}	$5.67032 \cdot 10^{-8}$ W/m ² K ⁴
Stała grawitacyjna	G	$6.6720 \cdot 10^{-11}$ m ³ /s ³ kg
Stała Wiena	C	$2.8978 \cdot 10^{-3}$ k m
Magneton Bohra	μ_B	$9.2732 \cdot 10^{-24}$ J/T
Temperatura punktu potrójnego wody	T_{Tr}	273.1600 K

Tabela 2
Własności fizyczne wody

Temp. K	Gęstość *10 ³ kg/m ³	Ciepło Właściwe *10 ³ J/kg K	Napięcie powierzchniowe *10 ⁻² N/m	Prężność pary nasyconej *10 ³ Pa	Lepkość dynamiczna *10 ⁻³ Ns/m ²	Lepkość Kinematyczna m ² /s
273	0.9998	4.2219	7.564	0.6105	1.798	1.792
277	1.0000	4.2056	7.492	0.8134	1.567	1.567
288	0.9991	4.1855	7.349	1.7049	1.140	1.141
293	0.9982	4.1796	7.275	3.3378	1.005	1.007
298	0.9970	4.1754	7.197	3.1672	0.894	0.896
373	0.9584	4.2123	5.885	10.1325	0.284	----

Tabela3
Opór właściwy oraz współczynniki temperaturowe oporu w temperaturze 293 K

Materiał	Opór właściwy 10 ⁻⁶ Ωm	Współczynnik temperaturowy K ⁻¹
aluminium	0.0278	3.8*10 ⁻³
konstantan	0.50	5.0*10 ⁻⁶
manganin	0.43	4.0*10 ⁻⁶
miedź	0.0175	4.0*10 ⁻³
nikielina	0.43	2.3*10 ⁻⁴
platyna	0.107	3.9*10 ⁻³
srebro	0.016	3.8*10 ⁻³
stal chromoniklowa	1.0	2.5*10 ⁻⁴
wolfram	0.055	4.1*10 ⁻³

Tabela 4
Gęstości ciał stałych

Materiał	Gęstość *103 kg /m ³	Materiał	Gęstość *10 ³ kg /m ³
aluminium	2.71	mosiądz	8.4 – 8.8
bakelit	1.3	ołów	11.34
beton	1.4	platyna	21.37
cyna	7.2	porcelana	2.2 – 2.5
drewno (dąb)	0.6 – 0.9	srebro	10.51
drewno (sosna)	0.3 – 0.6	stal	7.6 – 7.9
grafit	2.3	szkło ołowiowe	2.9 – 5.9
korek	0.22 – 0.26	szkło potasowe	2.6 – 2.8
kwarc (kryształ)	2.65	styropian	0.04
lód (273 K)	0.92	wolfram	19.1
miedź	8.9	żelazo	7.86
złoto	13.9	nikiel	8.90

Tabela 5
Współczynniki k przewodnictwa cieplnego

Materiał	k J/msK	Materiał	k J/msK
miedź	384	guma	0.25
złoto	298	korek	0.04
aluminium	226	styropian	0.03
żelazo	88	woda	0.609
mosiądz	110	bakelit	2.2
szkło	0.9 – 1.0	bawełna	0.182
kwarc topiony	1.27	cegła	0.85
lód	0.6	powietrze 0 ⁰ C	0.024
drewno	0.1 – 0.3	hel	0.144

Tabela 6
Własności cieplne ciał stałych w temperaturze 20⁰ C oraz ciepła i temperatury topnienia

Materiał	Ciepło właściwe J / kg K	Ciepło topnienia J / kg *10 ³	Temperatura topnienia ⁰ C	Współczynnik rozszerzalności liniowej *10 ⁵ K ⁻¹
aluminium	895.8	394	660	2.55
cyna	224.4	58	231.8	2.69
lód (0 ⁰ C)	2093.0	334	0.00	5.04
miedź	385.5	172	1083	1.68
ołów	127	23	327.4	2.94
szkło	800	-	800 - 1400	0.8 – 0.9
żelazo	447.9	270	1535	1.14
bismut	123.4	52.3	544.5	1.36

Tabela 7
Bezwzględne współczynniki załamania światła n , w temperaturze 293 K dla fali O długości $\lambda = 589$ nm, n_0 – współczynnik załamania promienia zwyczajnego, n_e – współczynnik załamania promienia nadzwyczajnego

Materiał	n
powietrze	1.0003
szkło (crown lekki)	1.5153
balsam kanadyjski	1.515
szkło flint	1.6085
diament	2.417
woda	1.3337
alkohol etylowy	1.3624
szpat islandzki	n_0 1.6585 n_e 1.4864
kwarc	n_0 1.5343 n_e 1.5533

Tabela 8
Własności sprężyste ciał stałych w temperaturze 20⁰ C

Materiał	Gęstość kg/m ³ *10 ¹⁰	Moduł Younga N/m ² *10 ¹⁰	Moduł sztywności N/m ² *10 ¹⁰	Moduł ściśliwości N/m ² *10 ¹⁰	Współczynnik Poissona	Prędkość fali podłużnej m/s
bizmut	9.80	3.2	1.2	3.4	0.33	2200
cyna	7.30	4.7	1.8	1.8	0.33	2500
cynk	7.08	8.4	3.8	5.9	0.25	3700
Dural	2.79	7.3	2.7	8.3	0.34	6450
glin	2.70	6.8	2.5	7.4	0.34	5104
guma	0.9	0.01	0.00016	-	0.46	30-70
lód (0 ⁰ C)	0.9168	0.5	0.29	-	-	3260
miedź	8.89	10.5	4.4	14.3	0.35	3560
mosiądz	8.44	10.5	4.3	10.0	0.35	3500
ołów	11.34	1.6	0.65	-	0.45	1227
stal	7.83	21.9	8.3	17.0	0.29	4990
wolfram	18.9	36.2	13.5	33.0	0.17	-
Żelazo kute	7.85	21.7	8.3	17.0	0.28	5130

Tabela 9
Charakterystyka termopary miedź-konstantan

t ⁰ C	E mV	t ⁰ C	E mV	t ⁰ C	E mV
0.0	0.000	75	3.131	200	9.286
5	0.195	80	3.357	210	9.820
10	0.391	85	3.584	220	10.360
15	0.589	90	3.813	230	10.905
20	0.789	95	4.044	240	11.456
25	0.992	100	4.277	250	12.011
30	1.403	110	4.749	260	12.572
35	1.403	120	5.227	270	13.137
40	1.611	130	5.712	280	13.707
45	1.822	140	6.204	290	14.281
50	2.035	150	6.702	300	14.860
55	2.250	160	7.207	310	15.443
60	2.476	170	7.718	320	16.030
65	2.607	180	8.235	330	16.621
70	2.908	190	8.757	340	17.217

Tabela 10
Długości fal najczęściej używanych linii widmowych

Pierwiastek	Barwa linii	Intensywność	Długość fali λ [nm]
H ₂	czerwona	silna	656.3
	niebiesko-zielona	średnia	486.1
	fiolet	średnia	434.0
	fiolet	słaba	410.8
	fiolet	słaba	397.0
He	czerwona	średnia	706.5
	czerwona	średnia	667.8
	żółta	bardzo silna	587.6
	zielona	średnia	501.6
	niebiesko-zielona	średnia	492.2
	niebieska	silna	471.3
	fiolet	słaba	447.1
Hg	czerwona	słaba	690.7
	czerwona	słaba	623.4
	żółta	b. silna dublet	579.1
	żółta	b. silna dublet	576.9
	zielona	silna	546.1
	niebiesko-zielona	średnia	491.6
	niebiesko-fioletowa	średnia	435.8
	fioletowa	słaba	407.8
	ciemny fiolet	bardzo słaba	404.7
	bardzo ciemny fiolet	bardzo b. słaba	365.0
Cd	czerwona	bardzo silna	643.8
	zielono-niebieska	bardzo silna	508.6
	niebieska	bardzo silna	480.0
	niebieska	bardzo silna	467.8
Na	żółta	b. silna dublet	589.3
K	czerwona ciemna	średnia	768.2

Tabela 11

Zależność parametru K od U : pomiar napięcia powierzchniowego cieczy stalagmometrem

U	K	U	K	U	K
	0.15900	5.1	0.25273	1.50	0.26560
5000	0.17200	5.0	0.25306	1.45	0.26560
250	0.19900-	4.9	0.25340	1.40	0.26536
58.1	0.21500	4.8	0.25373	1.38	0.26528
24.6	0.22560	4.7	0.25407	1.36	0.26520
17.7	0.23050	4.6	0.25448	1.34	0.26510
13.0	0.23546	4.5	0.25472	1.32	0.26500
12.0	0.23702	4.4	0.25509	1.30	0.26490
11.5	0.23780	4.3	0.25545	1.28	0.26474
11.0	0.23875	4.2	0.25583	1.26	0.26460
10.5	0.23940	4.1	0.25620	1.24	0.26438
10.0	0.24035	4.0	0.25659	1.22	0.26418
9.5	0.24117	3.9	0.25697	1.20	0.26396
9.0	0.24195	3.8	0.25734	1.18	0.26372
8.5	0.24324	3.7	0.25772	1.16	0.26350
8.0	0.24440	3.6	0.25810	1.14	0.26324
7.8	0.24490	3.5	0.25848	1.12	0.26296
7.6	0.24538	3.4	0.25892	1.10	0.26264
7.4	0.24590	3.3	0.25937	1.08	0.26230
7.2	0.24640	3.2	0.25980	1.06	0.26190
7.0	0.25693	3.1	0.26024	1.04	0.26154
6.9	0.24720	3.0	0.26068	1.02	0.26115
6.8	0.24750	2.9	0.26110	1.00	0.26070
6.7	0.24777	2.8	0.26154	0.95	0.25960
6.6	0.24804	2.7	0.26198	0.90	0.25815
6.5	0.24836	2.6	0.26241	0.85	0.25645
6.4	0.24867	2.5	0.26286	0.80	0.25460
6.3	0.24897	2.4	0.26327	0.75	0.25255
6.2	0.24925	2.3	0.26370	0.70	0.25030
6.1	0.24952	2.2	0.26410	0.65	0.24770
6.0	0.24984	2.1	0.26450	0.626	0.24640
5.9	0.25015	2.0	0.26488	0.597	0.24450
5.8	0.25047	1.9	0.26518	0.570	0.24300
5.7	0.25078	1.8	0.26543	0.541	0.24300
5.6	0.25110	1.75	0.26553	0.512	0.24410

Aby wyznaczyć napięcie powierzchniowe cieczy na podstawie pomiarów wykonanych za pomocą stalagmometru, należy obliczyć wartość parametru U , następnie z tabeli odczytać wartość K . Wartość parametru U oraz napięcie powierzchniowe σ obliczamy ze wzorów: $U = m / (\rho R^3)$, $\sigma = mgK / R$, gdzie: m – masa kropli, R – promień kropli, ρ – gęstość cieczy.



ISBN 978-83-924736-5-7