

POLITECHNIKA WROCLAWSKA
INSTYTUT GEOTECHNIKI I HYDROTECHNIKI
Raport serii PRE Nr 1/2012

**Losowa metoda elementów skończonych
w analizie nośności posadowienia
bezpośredniego.**

mgr inż. Joanna Pieczyńska

PRACA DOKTORSKA

Promotor: dr hab. inż. Wojciech Puła prof. nadzw. PWr

Słowa kluczowe:
losowa metoda elementów skończonych,
nośność posadowienia bezpośredniego,
pole losowe, skale fluktuacji,

Wrocław, 2012

SPIS TREŚCI

1. Wstęp.....	9
1.1. Wprowadzenie	9
1.2. Motywacja i cel pracy.....	11
1.3. Zakres pracy.....	13
2. Wybrane zagadnienia metod oceny nośności	17
2.1. Powierzchnie i obszary mechanizmu zniszczenia Prandtla	18
2.2. Analityczny opis zagadnienia nośności	20
2.2.1. Fundament powierzchniowy	20
2.2.2. Fundament zagłębiony	22
2.2.3. Fundament zagłębiony w grunt ważki.....	22
2.3. Metody normowe	27
2.3.1. Eurokod 7.....	27
2.3.2. Polska norma PN-81/B-03020	30
2.4. Analiza stanu niezawodności konstrukcji	32
2.5. Uwagi do rozdziału	35
3. Wybrane zagadnienia teorii pól losowych.....	37
3.1. Zastosowanie w geotechnice.....	37
3.2. Definicje.....	38
3.2.1. Pola losowe	38
3.2.2. Rozkłady skończenie wymiarowe	38
3.2.3. Wartość średnia i kowariancja	39
3.2.4. Stacjonarność, izotropia i anizotropia pola	40
3.3. Zagadnienia teorii pól losowych wykorzystywane w RFEM	43
3.3.1. Pole Gaussowskie.....	43
3.3.2. Uśrednienia lokalne.....	45
3.3.3. Promień korelacji – wartości oraz sposoby wyznaczania	47
3.3.4. Model pola losowego według Markova	50
3.4. Generowanie pola losowego przy użyciu metody uśrednień lokalnych.....	51
3.4.1. Jednowymiarowa metoda uśrednień lokalnych.....	52
3.4.2. Dwuwymiarowa metoda uśrednień lokalnych	55
3.5. Uwagi do rozdziału	57
4. Zastosowanie Metody Elementów Skończonych do analizy nośności fundamentu algorytmem RFEM	59
4.1. Wprowadzenie do algorytmu MES dla RFEM	60
4.1.1. Dobór wielkości siatki MES	64
4.1.2. Dobór wielkości elementu siatki MES	64
4.1.3. Doświadczalne określenie poziomów tolerancji i liczby kroków przemieszczenia	64
5. Sposób opisu zmienności losowej parametrów podłoża stosowany w ramach RFEM.....	69

5.1.	Typy rozkładów zastosowane w RFEM	71
5.1.1.	Rozkład lognormalny	71
5.1.2.	Rozkład o nośniku ograniczonym	73
5.2.	Konstrukcje pól losowych parametrów wytrzymałościowych podłoża	75
5.2.1.	Pole spójności	75
5.2.2.	Pole kąta tarcia wewnętrznego	76
5.2.3.	Struktura korelacyjna	76
5.3.	Dyskretyzacja pola losowego do siatki elementów skończonych	78
6.	Oszacowanie losowej nośności posadowienia bezpośredniego na podłożu o cechach izotropowych	81
6.1.	Podłoże idealnie spoiste	82
6.2.	Podłoże spoiste z tarciami wewnętrznymi	88
6.2.1.	Uwagi dotyczące modelu teoretycznego	88
6.2.2.	Analiza wpływu współczynnika zmienności spójności	90
6.2.3.	Analiza wpływu współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego na losową nośność	95
6.3.	Uwagi do rozdziału	102
7.	Oszacowanie losowej nośności posadowienia bezpośredniego na podłożu o cechach anizotropowych	105
7.1.	Podłoże idealnie spoiste	106
7.2.	Podłoże typu $c-\phi$	108
7.2.1.	Analiza wpływu współczynnika zmienności spójności i poziomej skali fluktuacji	109
7.2.2.	Analiza wpływu współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego $COV\phi$	112
7.2.3.	Efekt pionowej i poziomej skali fluktuacji	114
7.3.	Uwagi do rozdziału	121
8.	Efekt Najgorszego Przypadku	123
8.1.	Izotropowe pola losowe	123
8.1.1.	Podłoże idealnie spoiste	123
8.1.2.	Podłoże typu $c-\phi$	126
8.2.	Anizotropowe pola losowe	131
8.3.	Uwagi do rozdziału	135
9.	Nośność posadowienia bezpośredniego na podłożu „TARANTO BLUE CLAY”	137
9.1.	Opis podłoża	137
9.2.	Określenie parametrów zadania numerycznego	141
9.3.	Prezentacja wyników	148
9.3.1.	Izotropowy model podłoża	149
9.3.2.	Anizotropowy model podłoża	151
9.4.	Analiza rozkładu prawdopodobieństwa oporu podłoża	165
9.4.1.	Fundament powierzchniowy, grunt nieważki	166
9.4.2.	Fundament powierzchniowy, grunt ważki	169
9.4.3.	Fundament zagłębiony, grunt nieważki	172
9.4.4.	Fundament zagłębiony, grunt ważki	174
9.4.5.	Uwagi dotyczące rozkładu prawdopodobieństwa nośności	176

9.5. Przykład kalibracji wartości obliczeniowej oporu	177
10. Podsumowania i wnioski	181
10.1. Wnioski z pracy	181
10.2. Dalsze perspektywy rozwoju	185
11. Bibliografia.....	187

WYKAZ SYMBOLI:

c	spójność
c_u	wytrzymałością gruntu na ścinanie w warunkach bez odpływu
ϕ	kąt tarcia wewnętrznego
ν	współczynnik Poissona
E	moduł Younga
γ	ciężar objętościowy gruntu
ψ	kąt dylatacji / dylatacji
π	Liczba PI
τ_f	naprężenie ścinające
S_u	naprężenia ścinające w warunkach bez odpływu
σ_n	naprężenia normalne
δ_1, δ_2	kąt pochylenia płaszczyzn w mechanizmie zniszczenia
α	kąt obrotu spirali logarytmicznej
P_u	ciśnienie graniczne
B	szerokość fundamentu
\bar{B}	zredukowana szerokość fundamentu
L	długość fundamentu
\bar{L}	Zredukowana długość fundamentu
A	pole podstawy fundamentu
$V_d, N^{(r)}$	obliczeniowa wartość siły pionowej
D_f	zagłębienie fundamentu
$q = \gamma D_f$	zastępcze obciążenie równomiernie rozłożone obok fundamentu przyłożone na poziomie posadowienia
q_{ult}	analityczny opór graniczny podłoża
q_{MES}	opór wyznaczony metodą elementów skończonych
q_{RFEM}	Opór uzyskany w efekcie symulacji RFEM
Q_d	wartość obliczeniowa oporu
N_c	współczynnik nośności – spójności

N_γ	współczynnik nośności – ciężar własny
N_q	współczynnik nośności – obciążenie obok fundamentu
s	współczynnik kształtu
b	współczynnik pochylenia podstawy fundamentu
g	współczynnik pochylenia gruntu w otoczeniu fundamentu
i	współczynnik pochylenia wypadkowej siły oddziałującej
d	współczynnik wpływu zagłębienia fundamentu
P_f	prawdopodobieństwo awarii
$g(\mathbf{x})$	funkcja stanu granicznego
β	Wskaźnik niezawodności
Φ	dystrybuanta rozkładu normalnego
\mathcal{R}^n	n -wymiarowa przestrzeń euklidesowa
X, Y	zmienna losowa
x_i	pojedyncza realizacja zmiennej losowej x
\bar{X}	średnia arytmetyczna zmiennej losowej X
$f_x(\mathbf{x})$	funkcja gęstości prawdopodobieństwa
$E[.]$	wartość oczekiwana
$Var[.]$	wariancja
$C(.,.) = Cov\{.,.\}$	Operator kowariancji
$F(.)$	Funkcja rozkładu
$P\{.\}$	Miara probabilistyczna
$\rho(.)$	Współczynnik korelacji zmiennej losowej
τ	Wektor separacyjny (przesunięcia)
$\ \tau\ $	Długość wektora przesunięcia τ
$\gamma^{var}(n)$	funkcja redukcji wariancji n -tego stopnia
D	obszar analiz - domena
η	parametr odchylenia standardowego wielkości M_c
Z	wielkość uśrednienia wynikająca z teorii lokalnych uśrednień
T	przedział

T_0	Przedział uśrednienia sondowania CPT
q_f	opór graniczny uzyskany w drodze symulacji metodą RFEM
M_c	stochastyczny odpowiednik współczynnika N_c
$\ln M_c$	Logarytm naturalny parametru M_c
μ_x	wartość średnia dwuwymiarowego stacjonarnego pola losowego
μ_A	Uśredniona wartość średnia pola losowego
$\mu_{\ln x}$	wartość średnia pola losowego o rozkładzie normalnym, podstawowym względem rozkładu lognormalnego
μ_c	wartość średnia lognormalnego pola losowego spójności
μ_ϕ	wartość średnia pola losowego kąta tarcia wewnętrznego w rozkładzie o nośniku ograniczonym typu tangens hiperboliczny
μ_{N_c}	wartość średnia współczynnika nośności N_c
$\mu_{\ln M_c}$	Wartość średnia zlogarytmowanego parametru M_c
μ_{q_f}	Wartość średnia oporu granicznego podłoża
σ_x	odchylenie standardowe dwuwymiarowego stacjonarnego pola losowego
σ_A	Uśrednione odchylenie standardowe
$\sigma_{\ln x}$	odchylenie standardowe pola losowego o rozkładzie normalnym, podstawowym względem rozkładu lognormalnego
σ_c	odchylenie standardowe lognormalnego pola losowego spójności
σ_ϕ	odchylenie standardowe pola losowego kąta tarcia wewnętrznego w rozkładzie o nośniku ograniczonym typu tangens hiperboliczny
σ_{N_c}	odchylenie standardowe współczynnika nośności N_c
σ_{q_f}	odchylenie standardowe oporu granicznego q_f
COV X	współczynnik zmienności zmiennej losowej X
COV c	współczynnik zmienności spójności
COV ϕ	współczynnik zmienności kąta tarcia wewnętrznego
COV N_c	współczynnik zmienności współczynnika nośności N_c
COV q_f	współczynnik zmienności oporu granicznego q_f
θ	skala fluktuacji, promień korelacji
θ_c	skala fluktuacji lognormalnego pola losowego spójności
$\theta_{\ln c}$	skala fluktuacji pola losowego o rozkładzie normalnym, podstawowym względem rozkładu lognormalnego
θ_ϕ	skala fluktuacji pola losowego o rozkładzie normalnym, podstawowym względem rozkładu ograniczonego typu tangens hiperboliczny
θ_x	pozioma skala fluktuacji

θ_y	pionowa skala fluktuacji
θ/B	Skala fluktuacji znormalizowana na szerokości fundamentu
G	zmienna losowa o standardowym rozkładzie normalnym
G_{Inc}	zmienna losowa o standardowym rozkładzie normalnym, podstawowym względem lognormalnego pola losowego spójności
G_ϕ	zmienna losowa o standardowym rozkładzie normalnym, podstawowym względem ograniczonego pola losowego kąta tarcia wewnętrznego
m	parametr położenia wartości średniej w rozkładzie o nośniku ograniczonym typu tangens hiperboliczny
s	parametr skali w rozkładzie o nośniku ograniczonym typu tangens hiperboliczny

1. WSTĘP

1.1. WPROWADZENIE

Wśród wszystkich znanych materiałów wykorzystywanych w inżynierii budowlanej, grunt oraz skała, w swym naturalnym stanie, wykazują największe zróżnicowanie struktury. Powodują to procesy geologiczne oraz działalność człowieka. Rozpoznanie podłoża dla potrzeb posadowienia obiektu budowlanego prowadzi się z wykorzystaniem badań in-situ, analiz laboratoryjnych lub w oparciu o doświadczenia z wykonywanych obiektów, mieszczących się w sąsiedztwie realizowanej inwestycji. Żaden ze sposobów pozyskiwania informacji do projektowania nie jest jednak pozbawiony błędów i uproszczeń. Badania dają jedynie wrywkową informację o podłożu, spowodowaną punkowym rozpoznaniem oraz dużą zmiennością struktury podłoża. W efekcie konstrukcje współpracujące z gruntem są często znacznie przewymiarowane, co jest spowodowane przyjmowaniem w sposób konserwatywny parametrów gruntu oraz zakładaniem sporych współczynników bezpieczeństwa

W obecnej sytuacji, przy aktualnych możliwościach numerycznych, można pokusić się o próbę projektowania konstrukcji współpracujących z gruntem przyjmując w analizie nośności parametry inne niż najslabsze, lub kalibrując wartości obliczeniowe poszczególnych właściwości gruntu, np. na zadany poziom bezpieczeństwa. Mając informację statystyczną dotyczącą poszczególnych właściwości, podłoże gruntowe można przykładowo modelować jako ośrodek o losowo zmiennych cechach, np. jako pole losowe.

Zmienność parametrów podłoża, obciążeń, jak również zjawiska sejsmiczne oraz wysokie ryzyko inżynierskie zainicjowały wykorzystanie rachunku prawdopodobieństwa i teorii funkcji losowych, w projektowaniu geotechnicznym. W efekcie konstrukcje współpracujące z gruntem stają się przedmiotem szerszych rozważań. Jednym z przydatnych narzędzi, modelującym podłoże, jako dwu- lub trójwymiarową funkcję losową, jest losowa metoda elementów skończonych (ang. Random Finite Element

Method, RFEM). Pozwalająca określić wartość średnią oraz odchylenie standardowe, jak również aproksymować rozkład prawdopodobieństwa odpowiedzi, w zależności od zdefiniowanych losowych wielkości parametrów.

Literatura dotycząca zagadnienia niezawodności konstrukcji oraz statystycznych metod obliczeniowych dla ogółu budownictwa jest bardzo obszerna. Natomiast jest znacznie skromniejsza w przypadku zagadnień inżynierii geotechnicznej. Wartymi wymienienia są niewątpliwie pierwsze prace: Biernatowskiego (1966a, 1966b, 1968a, 1969) oraz Wu i Krafta (1967) dotyczące się analizy fundamentu bezpośredniego. Obszerniej o metodach statystycznych w geotechnice pisał Biernatowski w swojej monografii z 1982 roku.

Problemów stanów granicznych użytkowania i nośności fundamentów losowo obciążonych i posadowionych bezpośrednio na stochastycznym podłożu dotyczyły prace: Beachera i Ingry (1981), McAnally'ego (1983) czy Meyerhofa (1995). Natomiast publikacją dotyczącą czynników losowych oddziałujących na różne konstrukcje jest monografia Baechera i Christiana (2003). Temat losowego podłoża badał również Vanmarcke (1977a, 1977b, 1984), który zaproponował przestrzenne uśrednienie parametrów geotechnicznych, modelowanych jako pola losowe. W ten nurt wpisuje się również książka Fentona i Griffithsa (2008), dotycząca się, między innymi, nośności fundamentu bezpośredniego na gruncie o cechach losowo zmiennych. Książka ta stanowi kompendium wiedzy dotyczące metod generowania pól losowych, analizy ryzyka i niezawodności w geotechnice. Jest pierwszą i jak dotąd jedyną pozycją książkową, w której przedstawiono zagadnienia losowej metody elementów skończonych (RFEM).

Zastosowanie metod probabilistycznych oraz elementów teorii niezawodności, w odniesieniu do fundamentów, można szukać w publikacjach Meyerhofa (1970), Singha (1971), Matsuo i in. (1980), Tanga (1987), Lo i in. (1992), Li i in. (1993), Honjo i in. (2000, 2005), Orra (2000) oraz Cordoso i Fernandes (2001). Dotyczyły one głównie rozwiązań normowych (kalibracji parametrów charakterystycznych, współczynników cząstkowych). W latach dziewięćdziesiątych dwudziestego wieku nad tematem zastosowania teorii niezawodności do analizy stóp i ław pracowano, również w Polsce, m.in.: Brząkała i Puła (1992a, 1992b, 1996), Doliński i Puła (1989, 1990) oraz Puła (1993 i w swojej monografii, 2004). Problemom niezawodności, w kontekście stochastycznej mechaniki gruntów, poświęcona jest także monografia Przewłockiego (2006). Najnowszą

pozycją książkową dotyczącą problemów bezpieczeństwa konstrukcji współpracujących z gruntem jest praca Barotha, Breyse i Schoefsa (2011).

1.2. MOTYWACJA I CEL PRACY

Prezentowana praca zajmuje się rozwiązaniem pewnych problemów, dotyczących oceny losowej nośności podłoża, które jak dotąd pozostawały otwarte w ramach losowej metody elementów skończonych (ang. Random Finite Element Method, RFEM). Zdefiniowany przez Fentona i Griffithsa (1993) algorytm zakłada koniunkcję trzech modułów: teorii pól losowych (ang. Random Finite Theory, Vanmarcke, 1984), klasycznej metody elementów skończonych (ang. Finite Element Method) oraz metod symulacyjnych Monte Carlo.

Pierwsze wzmianki o RFEM, w literaturze, pojawiają się w roku 1993. W czasopiśmie *Géotechnique* opublikowano pracę dotyczącą zagadnienia przepływu w podłożu o cechach losowo zmiennych (Griffiths i Fenton 1993, 1995, 1997), w której przepływ modelowano za pomocą pola losowego. Zbliżonym zagadnieniem geotechnicznym, analizowanym przy użyciu losowej metody elementów skończonych, były zapory ziemne (m.in.: Fenton i Griffiths, 1996) czy osiadania fundamentów na podłożu losowym (m.in.: Paice, Griffiths i Fenton, 1996; Fenton i Griffiths, 2002 i 2005; Fenton, Griffiths i Cavers, 2005; Griffiths i Fenton, 2009). Innym tematem była stateczność skarp (m.in.: Griffiths & Fenton, 2004).

Ponieważ niniejsza praca koncentruje się na nośności posadowienia bezpośredniego, dlatego też prace łączące tę tematykę z metodą RFEM są dla poniższej rozprawy kluczowe. W roku 2001 pojawiła się pierwsza praca Griffithsa i Fentona dotycząca powyższego tematu, omawiająca zagadnienie bezpośredniego fundamentu pasmowego na gruncie w warunkach bez odpływu – grunt idealnie spoisty (Griffiths i Fenton, 2001). Kolejne prace (Fenton i Griffiths, 2003 oraz 2004) uwzględniły kąt tarcia wewnętrznego – grunt typu $c-\phi$. Praca (Griffiths, Fenton i Manoharan, 2006) poszerzyła wykorzystanie RFEM o posadowienie dwóch sąsiadujących fundamentów bezpośrednich na podłożu losowym. We wszystkich pracach pomijano jednak ciężar własny podłoża oraz zagłębienie fundamentu. Toteż jako pierwszy cel poniższej pracy założono uogólnienie istniejących rozwiązań poprzez uwzględnienie ciężaru własnego ośrodka oraz zagłębienia fundamentu. Zadanie sprecyzowano jako nośność posadowienia bezpośredniego na różnego typu podłożach jednorodnych, modelowanych jako sprężysto-idealnie-plastyczne. Studia prowadzono w płaskim stanie odkształcenia, przy założeniu, że grunt jest obciążony

pojedynczym fundamentem pasmowym, zagłębionym w podłoże o zadanej ciężarze objętościowym.

We wcześniejszych pracach, dotyczących oszacowania nośności posadowienia bezpośredniego, za pomocą metody RFEM, badany grunt z założenia posiadał własności izotropowe. Jednakże badania in-situ pokazują, że właściwości podłoża zmieniają się znacznie szybciej w kierunku pionowym aniżeli w kierunku poziomym. Ze statystycznego punktu widzenia wiąże się to ściśle z faktem, iż pozioma korelacja parametrów podłoża jest znacznie większa od pionowej (Cherubini, 1997 oraz 2000). W algorytmie RFEM korelacja parametrów w polu jest opisana poprzez funkcję korelacji i związany z nią promień korelacji (skalę fluktuacji), szacowany na podstawie badań podłoża. Autorka postawiła sobie jako drugi cel – rozbudowanie analizy nośności w metodzie RFEM o anizotropowy charakter podłoża. Dzięki czemu możliwe będzie określenie wpływu anizotropii pól losowych poszczególnych parametrów na losowy charakter oporu granicznego podłoża.

Niestety określenie skali fluktuacji parametrów podłoża nie mieści się w podstawowym zestawie wyników badań gruntowych. Wobec powyższego pojawia się pytanie, czy można estymować losową nośność opierając się na nie do końca pełnej informacji statystycznej. Podobny problem postawili sobie twórcy algorytmu RFEM, poszukując w swoich wynikach tzw. „efektu najgorszego przypadku” korelacji parametrów. Ogólnie rzecz biorąc chodziło o znalezienie takiej wartości promienia korelacyjnego (skali fluktuacji) pola, przy którym uzyskuje się możliwie bezpieczne (z punktu widzenia analizy ryzyka) oszacowanie nośności. Powtarzalny efekt dla różnych współczynników zmienności parametrów podłoża pozwoliłby stwierdzić jaką wartość skali fluktuacji należy przyjąć, w sytuacji niewystarczających wyników badań (tzn. braku dostatecznie precyzyjnego oszacowania tego parametru). Autorka poniższej pracy – jako cel trzeci – postawiła sobie analizę „efektu najgorszego przypadku” w rozbudowanym algorytmie RFEM, uwzględniającym anizotropowe własności podłoża. Jednocześnie poddając w wątpliwość wartość średnią jako wyznacznik efektu dla losowo zmiennego oporu i rozszerzając analizę na odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności oporu podłoża.

1.3. ZAKRES PRACY

ROZDZIAŁ 2

Zawiera opis szeregu metod obliczeniowych dotyczących nośności podłoża, stanowiących podstawę deterministycznych obliczeń nośności posadowienia bezpośredniego. Opisano mechanizmy zniszczenia (m.in. Prandtla, 1920; Hilla, 1950) oraz towarzyszące im inne rozwiązania (Terzagiego, 1948; Meyerhofa 1963; Vesica, 1973; Brinch Hansena, 1970). Ponadto zamieszczono opis rozwiązań, wraz ze wzorami, odpowiadający polskim normom, czyli obowiązującej normie europejskiej (Eurokod 7, PN-EN 1997-1) oraz jej poprzedniczce (PN-81/B-03020). Rozdział zamyka krótka wzmianka dotycząca obliczeń opartych na teorii niezawodności.

ROZDZIAŁ 3

Zawiera podstawowe wiadomości dotyczące teorii pól losowych, istotne z punktu widzenia metody RFEM. Pojawiają się w nim m.in. informacje: czym jest pole losowe, w jaki sposób jest ono generowane oraz jakie wielkości są konieczne aby zastosować teorię pól losowych w obliczeniach metodą RFEM.

ROZDZIAŁ 4

Algorytm RFEM zakłada określenie nośności gruntu przez analizę stanu granicznego za pomocą metody elementów skończonych (MES). Rozdział zawiera opis algorytmu jądra obliczeniowego opartego na MES wraz z wielkościami określającymi poziomy tolerancji zbieżności iteracji na różnych poziomach obliczeń. Przedstawiono również uwagi dotyczące optymalnej wielkości siatki elementów skończonych oraz optymalnej wielkości pojedynczego elementu dla analizowanych zadań.

ROZDZIAŁ 5

Pola losowe służące do modelowania podłoża gruntowego są generowane w oparciu o rozkłady prawdopodobieństwa. W rozdziale przedstawiono podstawowe typy rozkładów oraz opis konstrukcji pól losowych parametrów wytrzymałościowych podłoża, wykorzystywanych w analizie nośności posadowienia bezpośredniego metodą RFEM. Rozdział zamyka informacja dotycząca metody dyskretyzacji pól losowych w odniesieniu

do siatki elementów skończonych. Punkt ten stanowi zasadniczy element łączący teorię pól losowych (opisaną w rozdziale 3) z metodą elementów skończonych (rozdział 4).

ROZDZIAŁ 6

Stanowi punkt wyjścia dla prezentacji wyników badań i analiz numerycznych, w myśl prezentowanych we wstępie celów. Na podstawie prekursorskich prac, dotyczących zagadnienia nośności podłoża wyznaczanej przy użyciu RFEM (Griffiths i Fenton, 2001 oraz Fenton i Griffiths, 2003), dokonano kalibracji algorytmu obliczeniowego. Kod źródłowy `rbear2d` zaczerpnięto ze strony internetowej Fentona i Griffithsa (RFEM: Random Finite Element Method Software, <http://www.engmath.dal.ca/rfem>). Rozdział składa się z dwóch zasadniczych części, poświęconych analizie spoistego podłoża o cechach izotropowych. Pierwszej – w warunkach bez odpływu (zwanego dalej gruntem idealnie spoistym) oraz drugiej – uwzględniającej efekt kąta tarcia wewnętrznego (zwanego dalej gruntem typu $c-\phi$). W rozdziale opisano zastosowane modele teoretyczne oceny nośności przy użyciu RFEM, jak również określono wpływ poszczególnych losowych parametrów wytrzymałościowych podłoża na losową nośność. W obliczeniach zastosowano dwa rodzaje podłoża typu $c-\phi$: podłoże nr 1 – stosowane przez Fentona i Griffithsa w pracy z 2003 roku oraz podłoże nr 2 – zdaniem autorki bliższe naturalnym gruntom występującym na terenie Polski.

ROZDZIAŁ 7

W rozdziale skupiono się na prezentacji uzyskanych wyników przy założeniu, że podłoże modelowano jako pole o cechach anizotropowych, tzn. skala fluktuacji na kierunku poziomym była różna od skali na kierunku pionowym. Podobnie jak w rozdziale 6, analizowano grunt idealnie spoisty oraz typu $c-\phi$, wskazując różnice, w analizie losowej nośności, jakie wynikają z założenia anizotropowego modelu podłoża w stosunku do izotropowego odpowiednika (rozpatrywanego w rozdziale 6). Dodatkowo w odniesieniu do podłoża typu $c-\phi$, badano wpływ przestrzennego efektu anizotropii.

ROZDZIAŁ 8

W pionierskich pracach tyczących się zastosowania RFEM w analizie nośności posadowienia bezpośredniego uwypuklano fakt istnienia takich wartości skali fluktuacji, dla której wartość średnia nośności osiąga lokalne minima. Rozdział 8 weryfikuje istnienie

„efektu najgorszego przypadku” w odniesieniu do wyników zamieszczonych w rozdziałach 6 i 7, przy czym oprócz wartości średniej analizowane jest także odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności odpowiedzi.

ROZDZIAŁ 9

W założeniu algorytm rbear2d pomijał ciężar własny gruntu oraz zagłębienie fundamentu. Autorka z pomocą twórców metody RFEM dokonała rozbudowy dotychczasowego algorytmu, tak aby uwzględniał również powyższe wielkości. Do analiz numerycznych wykorzystano grunt rzeczywisty (niebieski ił tarencki, Taranto Blue Clay) o dobrze zbadanych statystycznie parametrach wytrzymałościowych. W drodze symulacji komputerowych autorka określiła wpływ ciężaru gruntu oraz zagłębienia fundamentu na losową zmienność oporu granicznego, jak również estymowała rozkłady prawdopodobieństwa nośności w różnych konfiguracjach, od fundamentu powierzchniowego posadowionego na podłożu nieważkim po fundament zagłębiony posadowiony na podłożu ważkim. Rozdział zamyka przykład kalibracji wartości obliczeniowej oporu w oparciu o zasady teorii niezawodności konstrukcji.

ROZDZIAŁ 10

Zawiera ogólne wnioski płynące z pracy odnoszące się do trzech założonych celów oraz dalsze perspektywy badań.

2. WYBRANE ZAGADNIENIA METOD OCENY NOŚNOŚCI

Ze względu na tematykę niniejszej rozprawy, związaną z losową nośnością podłoża, na wstępie zdecydowano się przedstawić wybrane metody służące deterministycznej ocenie nośności podłoża jednorodnego. Dodatkowo rozdział zamyka krótka wzmianka dotycząca niezawodności posadowienia. W rozdziale pominięto metodę elementów skończonych będącą podstawowym algorytmem obliczeniowym poniższej rozprawy, poświęcając jej odrębny rozdział nr 4.

Przez nośność gruntu rozumie się stan graniczny, po przekroczeniu którego następuje zniszczenie struktury gruntowej. Przyłożone obciążenie generuje naprężenia ścinające odpowiedzialne za utratę stateczności. Procesowi obciążania towarzyszą przemieszczenia w podłożu. Nadmierne przemieszczenia mogą też być uznane za utratę nośności.

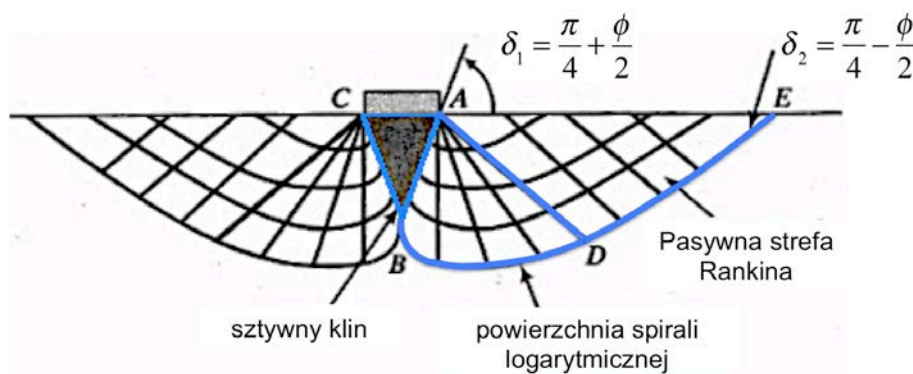
Pierwsze ściśle rozwiązanie zagadnienia nośności podał Prandtl (1920). Porównał kinematyczny mechanizm zniszczenia do zagadnienia płaskiego, sztywnego stempla wciskanego w półprzestrzeń opisaną w płaskim stanie odkształcenia. Zastosował w tym celu metodę równowagi granicznej. Jednocześnie grunt zdefiniował jako nieważki ośrodek kulombowski. Głównym założeniem było przyjęcie idealnie szorstkiej powierzchni uniemożliwiającej przesunięcia wzdłuż linii kontaktu stempla z gruntem. Późniejsza praca Reissnera (1924) uzupełniła zagadnienie o wewnętrzne relacje między poszczególnymi obszarami mechanizmu Prandtla. Inny kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia zaproponował Hill (1950), rozważając stan nośności dla ośrodka idealnie spoiściego, co wpływało na charakter kontaktu gruntu ze stemplem. Natomiast praca Sokołowskiego (1958) dodatkowo uwzględniła ciężar własny ośrodka gruntowego znajdującego się w stanie granicznym.

Pod względem wykorzystania metod obliczeniowych dla analizy problemu przełomowe były prace Shielda (1953a, b) wykorzystujące metodę charakterystyk. Przy czym opisu mechanizmu zniszczenia dokonano stosując pole prędkości ze stowarzyszonym prawem płynięcia.

Oprócz ścisłych teoretycznych rozwiązań nie można pominąć prac m.in. Felleniusa (1927) i Terzagiego (1948), podających rozwiązania przybliżone, oparte na empirycznych obserwacjach. Dodane do rozwiązań teoretycznych stanowią podstawę zaleceń do obliczeń inżynierskich, uwzględniając m.in.: oddziaływanie sił poziomych, wielkość powierzchni kontaktu (powierzchnia przyłożenia ciśnienia granicznego na ośrodek gruntowy), pochylenia powierzchni oddziaływania i inne czynniki, podane w dalszej części rozdziału.

2.1. POWIERZCHNIE I OBSZARY MECHANIZMU

ZNISZCZENIA PRANDTLA



Rysunek 2-1 Powierzchnie i obszary zniszczenia

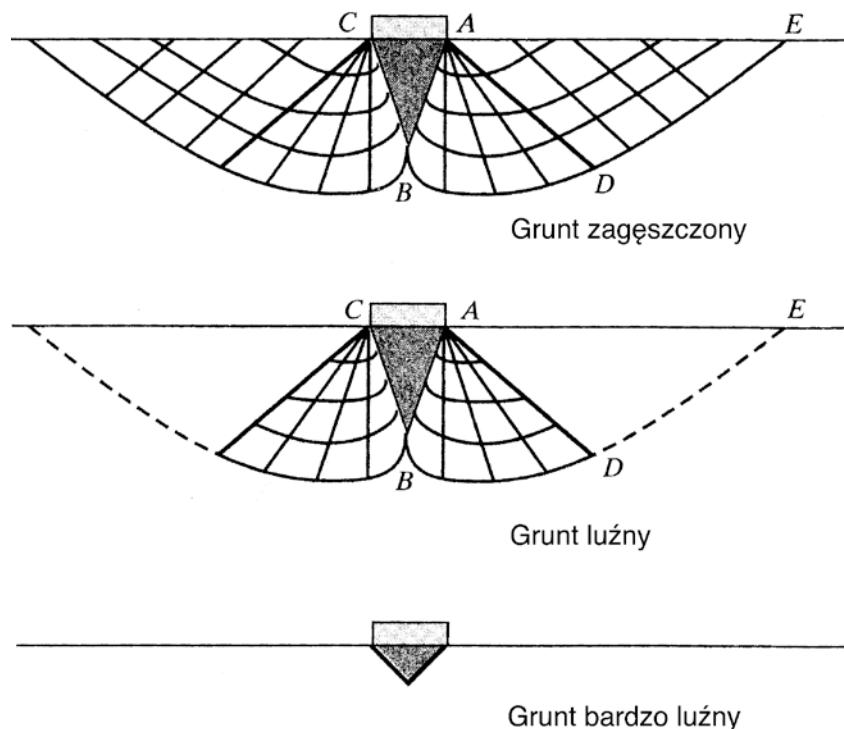
Prandtl (1920) określił w sposób teoretyczny co dzieje się z gruntem po przyłożeniu, za pośrednictwem idealnie sztywnej płyty, równomiernie rozłożonego obciążenia. Oparł się na kryterium zniszczenia zdefiniowanym przez Coulomba (1776) – Mohra (1900), które zakłada, że naprężenia ścinające (τ_f) w stanie granicznym wyrażają się jako:

$$(2-1) \quad \tau_f = c + \sigma_n \operatorname{tg} \phi,$$

gdzie c to kohezja, σ_n - naprężenia normalne, a ϕ to kąt tarcia wewnętrznego gruntu. Stanem awarii określił przemieszczenie, w głąb struktury, sztywnego klina gruntu (obszar ABC, Rysunek 2-1), znajdującego się pod obciążającą płytą (fundamentem). W efekcie formuje się, symetryczna względem osi obciążenia, powierzchnia poślizgu (AB)

usytuowana pod kątem $\delta_1=45^\circ+\phi/2$. Równomierne obciążenie przekazane na podłoże gruntowe za pomocą fundamentu wywołuje parcie sztywnego klina gruntu ABC na promieniste powierzchnie AB i AD. Obszar ABD ma formę wachlarza ograniczonego promieniami opisanymi przez dwie powierzchnie poślizgu AB oraz AD (pod kątem $\delta_2=45^\circ-\phi/2$), oraz powierzchnie tworzoną przez spiralę logarytmiczną BD (z biegunem w punkcie A i kątem obrotu α). Przemieszczający się grunt napiera na kolejną strefę (ADE) zawierającą się między powierzchniami AD oraz ED, pochylonymi do płaszczyzny wertykalnej również pod kątem $\delta_2=45^\circ-\phi/2$, co bezpośrednio wynika z kryterium Coulomba – Mohra. Obszar ten jest nazywany pasywną strefą Rankine’a (1857).

Rysunek 2-2 obrazuje zakres wykształcenia się powierzchni zniszczenia w zależności od stanu gruntu. W gruncie zagęszczonym powierzchnia poślizgu osiągnie płaszczyznę przyłożenia obciążenia (wytwarzają się wszystkie obszary). Natomiast im bardziej grunt jest rozluźniony, tym mniejszy zasięg bocznych stref ścinania. W gruncie bardzo luźnym rozwinie się jedynie sztywny klin pod fundamentem (Rysunek 2-2).



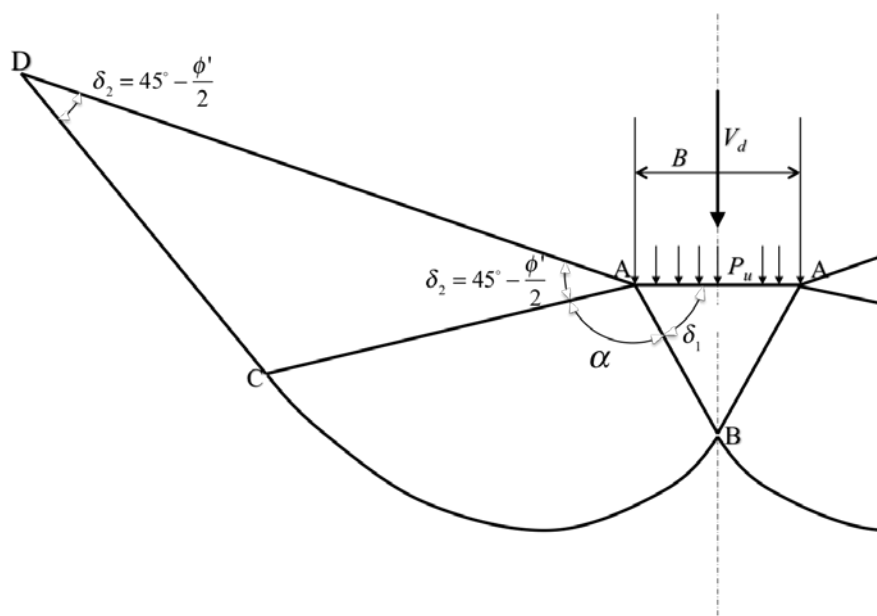
Rysunek 2-2 Mechanizm zniszczenia zależny od charakterystyki materiałowej gruntu

2.2. ANALITYCZNY OPIS ZAGADNIENIA NOŚNOŚCI

2.2.1. FUNDAMENT POWIERZCHNIOWY

2.2.1.1. GRUNT TYPU $c-\phi$

Szukając granicznego obciążenia P_u przy uwzględnieniu również kąta tarcia wewnętrznego ϕ , Prandtl zastosował metodę równowagi granicznej dla opisanego wyżej mechanizmu zniszczenia. Graniczną wartość ciśnienia, powodującą powstanie mechanizmu zniszczenia, oparł na stanie równowagi mocy dyssypacji obciążenia zewnętrznego oraz mocy dyssypacji wewnętrznej poszczególnych obszarów mechanizmu (Rysunek 2-3).



Rysunek 2-3 Mechanizm zniszczenia według Prandtla (za Izbicki i Mróz, 1976)

Po przekształceniach uzyskał równanie (2-2) opisujące obciążenie graniczne P_u .

$$(2-2) \quad P_u = c \operatorname{ctg} \phi \left[\operatorname{tg}^2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right] \exp(2\alpha \operatorname{tg} \phi) - 1 \right]$$

Zależne od spójności (c), kąta tarcia wewnętrznego (ϕ) oraz kąta α – znajdującego się między prostymi ograniczającymi spiralę logarytmiczną w mechanizmie.

Dla odmiany Hill (1950) założył idealnie gładką powierzchnię kontaktu między stemplem a ośrodkiem, czyli brak tarcia. Rezultatem jest nieskończona ilość rozkładów prędkości,

2.2.2. FUNDAMENT ZAGŁĘBIONY

Modele opisane w poprzednich punktach dotyczą fundamentu powierzchniowego. Zagadnienie nośności posadowienia fundamentu zagłębionego rozwinął Terzaghi (1943), wykorzystując teorię Prandtla. Terzaghi przyjął następujące założenia:

- a) Podłoże gruntowe jest nieważką, jednorodną, izotropową półprzestrzenią sprężystą.
- b) Zagłębienie fundamentu jest nie większe niż jego szerokość ($D_f < B$)
- c) W rozpatrywanej warstwie zachodzi cały mechanizm zniszczenia
- d) Naprężenia ścinające w gruncie powyżej poziomu posadowienia fundamentu są pomijalne.
- e) Grunt powyżej poziomu posadowienia zastępuje się poprzez obciążenie $q = \gamma D_f$, rozłożone równomiernie po obu stronach fundamentu
- f) Podstawa fundamentu jest idealnie szorstka.

2.2.3. FUNDAMENT ZAGŁĘBIONY W GRUNT WAŻKI

Dopiero rozwiązanie Sokołowskiego (1958) uwzględniło wpływ ciężaru własnego gruntu pod fundamentem, na nośność. Rozwiązanie zakładało posadowienie gładkiego stempla na ważkim ośrodku gruntowym o ciężarze objętościowym γ .

W zakresie wpływu zagłębienia fundamentu, Sokołowski (1958) opisał analitycznie to czego doświadczalnie dowiódł Terzaghi. Mianowicie, że dla dowolnego mechanizmu kinematycznego można do mocy dyssypacji sił zewnętrznych dodać składnik wynikający z nacisku q . Jednocześnie do części odpowiadającej mocy dyssypacji wewnętrznej obszarów należy dołożyć moce sił ciężkości. Po przekształceniach uzyskuje się wzór na opór graniczny podłoża postaci:

$$(2-5) \quad q_{ult} = cN_c + qN_q + \frac{1}{2} \gamma B' N_\gamma$$

Współczynniki N_c i N_q wynikają bezpośrednio z mechanizmu kinematycznego Prandtla i mają następującą postać:

$$(2-6) \quad N_q = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \exp(\pi \operatorname{tg} \phi)$$

$$(2-7) \quad N_c = (N_q - 1) \operatorname{ctg} \phi$$

Niestety współczynnik nośności, opisujący ciężar własny N_γ nie ma postaci zamkniętej (analitycznej). W związku z tym pojawiły się różne propozycje rozwiązań, np.

$$(2-8) \quad N_\gamma = 1.5(N_q - 1) \operatorname{tg} \phi \quad (\text{Brinch Hansen 1970})$$

$$(2-9) \quad N_\gamma = 2(N_q + 1) \operatorname{tg} \phi \quad (\text{Vesic 1973})$$

$$(2-10) \quad N_\gamma = (N_q - 1) \operatorname{tg}(1.4\phi) \quad (\text{Meyerhof 1976})$$

$$(2-11) \quad N_\gamma = (N_q - 1) \operatorname{tg}(1.32\phi) \quad (\text{Martin 2005})$$

Naprężenia powyżej poziomu posadowienia zostały uwzględnione po raz pierwszy w pracy (Meyerhof 1951). Mimo bogactwa równań stanu granicznego opartych na metodzie równowagi granicznej (m.in. Terzaghi 1943, Meyerhof 1963, Brinch Hansen 1970, Vesic 1973) najczęściej stosowanym w praktyce inżynierskiej jest właśnie równanie Terzagiego (1943) / Sokołowskiego (1958).

Chcąc uwzględnić możliwie wszystkie czynniki, współcześnie nośność podłoża dla warunków z odpływem szacuje się według następującego wzoru (będącego uogólnieniem równania (2-5)).

$$(2-12) \quad q_{ult} = \left(s_c d_c i_c b_c g_c \right) c N_c + \left(s_q d_q i_q b_q g_q \right) q N_q + \left(s_\gamma d_\gamma i_\gamma b_\gamma g_\gamma \right) \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma$$

gdzie:

- s są współczynnikami kształtu, określającymi wielkość powierzchni oddziaływania obciążenia na podłoże gruntowe (Tabela 2-1);
- b współczynnik wpływu pochylenia podstawy (Tabela 2-2);
- g współczynnik uwzględniający pochylenie gruntu w otoczeniu fundamentu (np. fundament na skarpie, Tabela 2-3)
- i współczynnik pochylenia wypadkowej siły oddziałującej (Tabela 2-4);
- d współczynnik wpływu zagłębienia fundamentu (Tabela 2-5)

Tabela 2-1 Współczynnik kształtu

	q	γ	c
Meyerhof 1963	$s_q = 1 + 0.1K_p \frac{B'}{L'}$	$s_\gamma = 1 + 0.1K_p \frac{B'}{L'}$	$s_c = 1 + 0.2K_p \frac{B'}{L'}$
	$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$		
Brinch Hansen 1970	$s_q = 1 + \frac{B'}{L'} \sin \phi$	$s_\gamma = 1 - 0.4 \frac{B'}{L'} \leq 0.6$	$s_c = \frac{S_q N_q - 1}{N_q - 1} = 1 + \cos \phi \frac{B' N_q}{L' N_c}$
Vesic 1973	$s_q = 1 + \frac{B}{L} \tan \phi$	$s_\gamma = 1 - 0.4 \frac{B}{L} \leq 0.6$	$s_c = 1 + \frac{N_q B}{N_c L}$
Lamin et al. 2006	$s_q = 1 + (0.0952\phi - 1.60) \left(\frac{D_f}{B'} \right)^{0.583 - 0.00790\phi} \left(\frac{B'}{L'} \right)^{1 - 0.15 \left(\frac{D_f}{B'} \right)}$ $s_\gamma = 1 + (0.0345\phi - 1.0611) \frac{B'}{L'}$		

Wielkość D_f w powyższych równaniach opisuje wysokość konstrukcji fundamentu. Dla obliczeń Vesica używamy wartości nominalnych dla B i L . Dla pozostałych obliczeń używamy wartości efektywnych (pomniejszonych o dwukrotny mimośród, B' i L').

Tabela 2-2 Współczynnik wpływu pochylenia podstawy

	q	γ	c
Brinch Hansen 1970	$b_q = \exp(-0.035\alpha_b \operatorname{tg} \phi)$	$b_\gamma = \exp(-0.047\alpha_b \operatorname{tg} \phi)$	$b_c = b_q - \frac{1 - b_q}{N_q - 1}$
Vesic 1973	$b_q = \left[1 - \frac{\alpha_b \operatorname{tg} \phi}{57^\circ} \right]^2$	$b_\gamma = \left[1 - \frac{\alpha_b \operatorname{tg} \phi}{57^\circ} \right]^2$	$b_c = 1 - \frac{2\alpha_b}{(2 + \pi) \operatorname{tg} \phi}$

α_b - kąt nachylenia podstawy fundamentu

Tabela 2-3 Współczynnik pochylenia podłoża w otoczeniu fundamentu

	q	γ	c
Brinch Hansen 1970	$g_q = (1 - 0.5 \operatorname{tg} \alpha_g)^5$	$g_\gamma = (1 - 0.5 \operatorname{tg} \alpha_g)^5$	$g_c = g_q - \frac{1 - g_q}{N_q - 1}$
Vesic 1973	$g_q = (1 - \operatorname{tg} \alpha_g)^2$	$g_\gamma = (1 - \operatorname{tg} \alpha_g)^2$	$g_c = i_q - \frac{1 - i_q}{(2 + \pi) \operatorname{tg} \phi}$

α_g - kąt pochylenia skarpy przy fundamencie

Tabela 2-4 Współczynnik wpływu pochylenia wypadkowej siły obciążającej

	q	γ	c
Meyerhof 1963	$i_q = \left[\frac{\arctg \left(\frac{H}{V} \right)}{90^\circ} \right]^2$	$i_\gamma = \left[\frac{\arctg \left(\frac{H}{V} \right)}{\phi} \right]^2$	$i_c = \left[\frac{\arctg \left(\frac{H}{V} \right)}{90^\circ} \right]^2$
Brinch Hansen 1970	$i_q = \max \left[\left[1 - \frac{0.5H}{V + A' c \operatorname{ctg} \phi} \right]^5, 0 \right]$	$i_\gamma = \max \left[\left[1 - \frac{0.7H}{V + A' c \operatorname{ctg} \phi} \right]^5, 0 \right]$	$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_q - 1}$
Vesic 1973	$i_q = \max \left[\left[1 - \frac{H}{V + A' c \operatorname{ctg} \phi} \right]^m, 0 \right]$	$i_\gamma = \max \left[\left[1 - \frac{H}{V + A' c \operatorname{ctg} \phi} \right]^{1+m}, 0 \right]$	$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_q - 1}$
$A' - \text{efektywne pole podstawy fundamentu}; m = \sqrt{m_b^2 + m_L^2}; m_b = \begin{cases} \frac{2 + B/L}{1 + B/L} \rightarrow H_B \leq 0 \\ 0 \end{cases}; m_L = \begin{cases} \frac{2 + L/B}{1 + L/B} \rightarrow H_L \leq 0 \\ 0 \end{cases}$			

Tabela 2-5 Współczynnik wpływu zagłębienia fundamentu

	q	γ	c
Meyerhof 1963	$d_q = 1 + 0.1 \sqrt{K_p} \frac{D_f}{B}$	$d_\gamma = 1 + 0.1 \sqrt{K_p} \frac{D_f}{B}$	$d_c = 1 + 0.2 \sqrt{K_p} \frac{D_f}{B}$
Brinch Hansen 1970	$\frac{D_f}{B} \leq 1 \quad d_q = 1 + 2 \operatorname{tg} \phi (1 - \sin \phi)^2 \frac{D_f}{B}$	$d_\gamma = 1$	$d_c^{BH} = 1 + 2 (1 - \sin \phi)^2 \frac{N_q}{N_c} \frac{D_f}{B}$
Vesic 1973	$\frac{D_f}{B} \leq 1 \quad d_q = 1 + 2 \operatorname{tg} \phi (1 - \sin \phi)^2 \frac{D_f}{B}$	$d_\gamma = 1$	$d_c^V = 1 + 0.4 \frac{D_f}{B}$
Brinch Hansen 1970	$\frac{D_f}{B} > 1 \quad d_q = 1 + 2 \operatorname{tg} \phi (1 - \sin \phi)^2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{D_f}{B}$	$d_\gamma = 1$	$d_c^{BH} = 1 + 2 (1 - \sin \phi)^2 \frac{N_q}{N_c} \operatorname{tg}^{-1} \frac{D_f}{B}$
Vesic 1973	$\frac{D_f}{B} > 1 \quad d_q = 1 + 2 \operatorname{tg} \phi (1 - \sin \phi)^2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{D_f}{B}$	$d_\gamma = 1$	$d_c^V = 1 + 0.4 \operatorname{tg}^{-1} \frac{D_f}{B}$
Lamin et al. 2006	$d_q = 1 + (0.00440 \phi + 0.356) \left(\frac{D_f}{B} \right)^{-0.28}$	$d_\gamma = 1$	

2.3. METODY NORMOWE

2.3.1. EUROKOD 7

W chwili obecnej obowiązującą normą dotyczącą projektowania konstrukcji współpracujących z gruntem jest Eurokod 7 (PN-EN 1997-1 2008). Normatyw wprowadza różne przypadki sytuacji obliczeniowych, opartych na metodzie stanów granicznych, związanych z powstaniem w podłożu gruntowym mechanizmów zniszczenia. Jeżeli analizowana jest utrata równowagi, a wytrzymałość gruntu nie wpływa na zapewnienie nośności, to taki stan graniczny określany jest skrótem EQU. Wewnętrzne zniszczenie lub odkształcenie, np.: fundamentów bezpośrednich, pali lub ścian podziemnych, w sytuacji gdy o nośności decyduje wytrzymałość materiału konstrukcji, rozpatruje się w ramach stanu granicznego STR. Zniszczenie albo nadmierne odkształcenie podłoża związane z wytrzymałością gruntu, jako czynnika decydującego o zapewnieniu nośności określa stan graniczny GEO. Kolejny stan graniczny – UPL związany jest z utratą stateczności konstrukcji lub podłoża spowodowanej ciśnieniem wody, np. wyporem lub oddziaływaniami pionowymi. Inaczej jest w przypadku stanu granicznego HYD, który zachodzi w sytuacji wewnętrznej erozji gruntu, hydraulicznego unoszenia jego cząstek lub hydraulicznego przebiccia w podłożu, spowodowanego spadkiem hydraulicznym.

Oszacowanie nośności fundamentu bezpośredniego wpisuje się w zakres stanu granicznego GEO, przy czym sugeruje się stosowanie równania Terzagiego (2-5) oraz jego uogólnionej wersji (2-12). Wprowadza się dwa pojęcia dotyczące parametrów stosowanych w obliczeniach: wartość charakterystyczna oraz wartość obliczeniowa.

Jako wartość charakterystyczną parametrów geotechnicznych Eurokod 7 rozumie ostrożne oszacowanie wartości decydującej o wystąpieniu stanu granicznego. Może nią być wartość średnia, bądź wartość najmniej korzystna (większa lub mniejsza) od najbardziej prawdopodobnej (odnosząc się do określonego rozkładu statystycznego). W przypadku stosowania metod statystycznych do ustalenia wartości charakterystycznych, w punkcie 2.4.5.2(11) norma PN-EN 1997-1 2008, zaleca wyznaczać wartość charakterystyczną opierając się na następującym założeniu: „...żeby obliczone prawdopodobieństwo wystąpienia mniej korzystnej wartości, decydującej o powstaniu rozpatrywanego stanu granicznego, nie było większe niż 5%.” W rozumieniu matematycznym wartością charakterystyczną jest taka wartość, dla której:

$$(2-13) \quad P\{w < w_k\} \leq 0.05,$$

gdzie w to wartość pomierzona a w_k to wartość charakterystyczna.

Wprowadzają pojęcie wartości obliczeniowej normatyw nakłada margines bezpieczeństwa na przyjętą wartość charakterystyczną. W normie europejskiej (PN-EN 1997-1 2008) współczynniki bezpieczeństwa podzielono na trzy grupy. Pierwszą są cząstkowe współczynniki obciążenia (A), które prezentuje Tabela 2-6. Drugą grupę stanowią cząstkowe współczynniki dla parametrów geotechnicznych (M) - Tabela 2-7. Trzecia grupa dotyczy cząstkowych współczynników dla stanu granicznego (R), które w przypadku oporu pod fundamentem bezpośrednim prezentuje Tabela 2-8.

Tabela 2-6 Cząstkowy współczynnik obciążenia (za tab. A.3 (PN-EN 1997-1))

Rodzaj obciążenia		Symbol	Typ współczynnika	
			A1	A2
Stałe	Niekorzystne	γ_G	1.35	1.0
	Korzystne		1.0	1.0
Zmienne	Niekorzystne	γ_Q	1.5	1.3
	Korzystne		1.0	1.0

Tabela 2-7 Cząstkowy współczynnik dla parametrów geotechnicznych (za tab. A.4 (PN-EN 1997-1))

Parametr gruntu	Symbol	Typ współczynnika	
		M1	M2
Kąt tarcia wewnętrznego	$\gamma_{\phi'}$	1.0	1.25
Spójność efektywna	$\gamma_{c'}$	1.0	1.25
Wytrzymałość na ścinanie bez odpływu	γ_{cu}	1.0	1.4
Wytrzymałość na ścinanie jednoosiowe	γ_{qu}	1.0	1.4
Ciężar objętościowy	γ_f	1.0	1.0

Tabela 2-8 Cząstkowy współczynnik dla oporu/nośności dotyczące fundamentów bezpośrednich (za tab. A.5 (PN-EN 1997-1))

Nośność	Symbol	Typ współczynnika		
		R1	R2	R3
Nośność podłoża	$\gamma_{R,v}$	1.0	1.4	1.0
Przesunięcie (poślizg)	$\gamma_{R,h}$	1.0	1.1	1.0

W metodzie GEO zestawiono współczynniki w różnych konfiguracjach (Tabela 2-9) pod pojęciem „podejścia projektowe” (ang. Design Approach, DA). Dobór poszczególnych współczynników powoduje przeniesienie marginesu bezpieczeństwa między oddziaływania, efekty oddziaływań oraz własności i wytrzymałości materiałów.

Tabela 2-9 Podejścia projektowe metody obliczeniowej GEO

DA1	C1	A1 „+” M1 „+” R1
	C2	A2 „+” M2 „+” R1
DA2	A1 „+” M1 „+” R2	
DA3	A1 lub A2 „+” M2 „+” R3	

W pierwszym podejściu DA1 wyodrębniono dwie kombinacje DA1.C1 oraz DA1.C2. Stosując kombinację pierwszą szczególny nacisk nakłada się na obciążenia, które są zwiększane, jednocześnie parametry gruntu oraz wytrzymałości pozostają niezmiennione. W drugiej kombinacji bezpieczeństwo zapewnia się stosując współczynniki cząstkowe do cech materiałowych. Jednocześnie dla wartości kąta, spójności i ciężaru objętościowego niezmiennie zostają współczynniki obciążenia oraz stanu granicznego.

Podejście projektowe drugie (DA2), zakłada zwiększenie wpływu obciążenia przy jednoczesnym zachowaniu wartości charakterystycznych parametrów podłoża. Od kombinacji pierwszej DA1 różni go przyjęty współczynnik bezpieczeństwa nałożony na stan graniczny (R). Nieco zmodyfikowana postać podejścia DA2 obowiązuje w Polsce. DA2* zakłada mianowicie, że obliczenia prowadzone są tylko na wielkościach charakterystycznych, natomiast częściowe współczynniki bezpieczeństwa są stosowane dopiero przy sprawdzeniu warunku stanu granicznego, np. oporu granicznego podłoża. Wprowadzona gwiazdka oznacza w praktyce, że wszystkie wielkości, nie będące parametrami podłoża (te i tak są przyjmowane jako charakterystyczne w podejściu DA2), należy uwzględniać jako wielkości charakterystyczne. Szczególnie dotyczy to mimośrodowych lub ukośnych oddziaływań i ich wpływu na wielkość powierzchni, na którą przekazywane jest obciążenie.

Mając dobrane cząstkowe współczynniki bezpieczeństwa należy przejść do zasadniczej części obliczeń, mianowicie określić opór graniczny podłoża. W tym celu można skorzystać z dwóch propozycji obliczeniowych jakie zawiera załącznik D Eurokodu 7. Pierwsza to wyznaczenie oporu granicznego bez uwzględnienia odpływu, co odpowiada zadaniu Prandtla, dla gruntu idealnie spoiściego (patrz. pkt 2.2.1.2). Drugie podejście to warunek z odpływem co odpowiada zagadnieniu opisanym przez Terzagiego / Sokołowskiego (pkt 2.2.3). Proponowany w Eurokodzie 7 wzór na wyznaczenie nośności obliczeniowej bez odpływu ma postać:

$$(2-14) \quad R_k = (\pi + 2) c_u b_s i_c + q$$

gdzie c_u jest wytrzymałością gruntu na ścinanie w warunkach bez odpływu, a q jest efektywnym naprężeniem obliczeniowym od nadkładu w poziomie podstawy fundamentu. Dodatkowo we wzorze występują bezwymiarowe współczynniki, uwzględniające:

$$(2-15) \quad b_c = 1 - 2\alpha / (\pi + 2) \quad \text{nachylenie podstawy fundamentu}$$

Kąt α określa nachylenie podstawy fundamentu względem poziomu

$$(2-16) \quad s_c = 1 + 0.2 \left(\frac{B'}{L'} \right) \quad \text{kształt fundamentu}$$

$$(2-17) \quad i_c = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{H}{A' c_u}} \right) \quad \text{nachylenie obciążenia, spowodowane siłą poziomą}$$

Ponadto A' czyli efektywne pole powierzchni fundamentu w PN-EN 1997-1 opisane jako $A' = B' \times L'$, gdzie $B' = \bar{B} = B - 2e_B$ i $L' = \bar{L} = L - 2e_L$ są efektywnymi wymiarami fundamentu, zredukowanymi ze względu na działanie mimośrodków obciążenia (e_L i e_B) zdefiniowanymi na kierunku równoległym do szerokości B i L

Chcąc korzystać z Eurokodu 7 przy obliczaniu warunku nośności, z uwzględnieniem odpływu, należy zastosować wzór (2-12) oraz współczynniki nośności N_q według wzoru (2-6) i N_c (2-7) wynikające z mechanizmu Prandtla. Natomiast współczynnik N_γ europejski normatyw definiuje jako (2-18).

$$(2-18) \quad N_\gamma = 2(N_q - 1) \operatorname{tg} \phi'$$

Pozostałe współczynniki przyjęte w PN-EN 1997-1 stanowią mieszaninę różnych wcześniejszych propozycji. Przykładowo współczynnik pochylenia podstawy (Tabela 2-2) b_c odpowiada równaniu zaproponowanemu przez Brinch Hansena, podczas gdy b_q bliższe jest rozwiązaniu Vesica jednak nie jest z nim tożsame. Współczynniki kształtu (Tabela 2-1) w większości odpowiadają rozwiązaniom zaproponowanym przez Brinch Hansena. Drobną różnicą jest widoczna w przypadku współczynnika s_γ , dla którego twórcy normy przyjęli parametr 0.3 w odróżnieniu od 0.4, opisanego w tabeli. Współczynniki nachylenia obciążenia (Tabela 2-4) zaczerpnięte są, w przypadku składnika związanego ze spójnością, z propozycji Brinch Hansena. Natomiast w przypadku pozostałych z wyników z równań Vesica.

2.3.2. POLSKA NORMA PN-81/B-03020

Ponieważ zgodnie z wytycznymi Eurokodu 7 dopuszczalne jest stosowanie innych sprawdzonych metod pozwolono sobie na drobną retrospekcję i przytoczenie, w kontekście wyznaczenia oporu granicznego, podstawowych zasad podanych w polskiej normie

PN-81/B-03020. Przez trzydzieści lat obowiązywania PN-81/B-03020 fundamenty projektowane według zamieszczonych tam wytycznych były bezpieczne. Obliczenia nośności prowadzono zgodnie z metodą stanów granicznych, przy założeniu, że opór podłoża jednorodnego Q_{fN} spełnia warunek:

$$(2-19) \quad N_r \leq mQ_{fN},$$

gdzie N_r jest składową obciążenia normalną do podstawy. Natomiast m to współczynnik korekcyjny, związany z niepewnością modelu i opisany w p.3.3.4 normy PN-81/B-03020. Wzór na opór graniczny Q_{fN} bazuje na wcześniej przytoczonym rozwiązaniu Terzagiego (2-12), jednak przyjmuje postać:

$$(2-20) \quad Q_{fN} = \bar{B} \cdot \bar{L} \left[\begin{array}{l} \left(1 + 0,3 \frac{\bar{B}}{\bar{L}}\right) N_C \cdot c_u^{(r)} \cdot i_c + \\ \left(1 + 1,5 \frac{\bar{B}}{\bar{L}}\right) N_D \cdot \gamma_D^{(r)} \cdot D_{\min} \cdot i_D + \\ \left(1 - 0,25 \frac{\bar{B}}{\bar{L}}\right) N_B \cdot \gamma_B^{(r)} \cdot \bar{B} \cdot i_B \end{array} \right]$$

\bar{B} i \bar{L} w powyższym wzorze są zredukowanymi wymiarami fundamentu opisanymi w akapicie pod wzorem (2-17). Indeks (r) znajdujący się przy spójności i ciężarze gruntu oznacza wartość obliczeniową parametru. Kolejne składniki sumy w nawiasie związane są z: efektem spójności ($c_u^{(r)}$), efektem zagłębienia fundamentem lub obciążenia gruntu obok fundamentu ($\gamma_D^{(r)} D_{\min}$) oraz efektem ciężaru własnego jednorodnego gruntu pod poziomem posadowienia ($\gamma_B^{(r)} \bar{B}$). Współczynniki nośności N_C i N_D wynikają bezpośrednio z mechanizmu Prandtla. Natomiast N_B polski normatyw definiował jako (2-21).

$$(2-21) \quad N_B = 0,75(N_D - 1) \tan \phi = 0,75 \left(e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 1 \right) \tan \phi$$

Wszystkie wartości parametrów (poza wymienionymi) wstawiane do wzoru na Q_{fN} są wartościami obliczeniowymi, uwzględniającymi cząstkowe współczynniki bezpieczeństwa wynikające z niejednorodności gruntu oraz niedokładności badań gruntowych. Wartość obliczeniową wyznacza się z zależności:

$$(2-22) \quad x^{(r)} = \gamma_m x^{(n)}$$

gdzie $x^{(n)}$ jest wartością charakterystyczną parametru, a γ_m współczynnikiem materiałowym (cząstkowym współczynnikiem bezpieczeństwa). W PN-81/B-03020 podano trzy metody ustalania parametrów geotechnicznych. W metodzie A – wartość charakterystyczna parametru jest określona jako średnia arytmetyczna wyników pomiaru parametru podłoża bezpośrednio z badań polowych lub laboratoryjnych (x_i):

$$(2-23) \quad x^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Drugą wielkość γ_m definiuje się wzorem:

$$(2-24) \quad \gamma_m = 1 \pm \frac{1}{x^{(n)}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x^{(n)})^2} = x^{(n)} \pm \sigma_x,$$

gdzie σ_x jest odchyleniem standardowym z próby. Norma nakazuje przyjmowanie do wzoru (2-22) wartości γ_m nie bliższe jedności niż 0.9 lub 1.1.

Metoda B polega na określeniu wartości charakterystycznej parametrów geotechnicznych za pomocą korelacji z wielkością stopnia plastyczności (I_L) lub stopnia zagęszczenia (I_D) gruntu. Natomiast wartość współczynnika materiałowego γ_m , w tej metodzie przyjmuje wartości 0.9 lub 1.1.

Metoda C zakłada przyjęcie parametrów na podstawie praktycznych doświadczeń budownictwa na innych, podobnych terenach oraz dla podobnych konstrukcji i obciążeń.

2.4. ANALIZA STANU NIEZAWODNOŚCI KONSTRUKCJI

Obecnie projektowanie geotechniczne polega na optymalizacji elementów konstrukcji współpracujących z gruntem. Zagadnienie wymaga często posiłkowania się metodami wykraczającymi poza opisywane w normach sposoby. Dla zapewnienia odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa stosuje się metody probabilistyczne oraz teorię niezawodności konstrukcji. W zbiorze Polskich Norm można znaleźć pozycję PN - ISO 2394 „*Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych*” będącą tłumaczeniem normy ISO 2394:1998. Zawierają one wytyczne do projektowania w oparciu o elementy teorii niezawodności. Podobnie jak norma PN-81/B-03020, odwołują się do podziału parametrów na charakterystyczne i obliczeniowe.

W szerszym rozumieniu zagadnienie niezawodności różnego typu konstrukcji związane jest z granicą między dwoma stanami: bezpiecznym i awarii. Leży to w gestii projektanta, który nakładając warunki pracy określa też czas życia konstrukcji. Jednocześnie stan awarii nie musi oznaczać zniszczenia elementu, lecz także całkowitą lub częściową niezdolność do pełnienia przez element przewidzianej funkcji (stan graniczny użyteczności).

Jeżeli przez cały okres eksploatacji konstrukcja pracuje w założony sposób mówimy o bezawaryjności. Inną cechą jest zdolność naprawcza, czyli przystosowanie do zapobiegania, wykrywania i usuwania ewentualnych uszkodzeń. Możliwa jest również długotrwała eksploatacja przy należytej obsłudze technicznej, włącznie z naprawami taka zdolność nosi miano trwałości.

Najważniejszym stanem jest bezawaryjność (R), której definicja matematyczna przedstawiana jest jako dopełnienie do jedności prawdopodobieństwa awarii P_f .

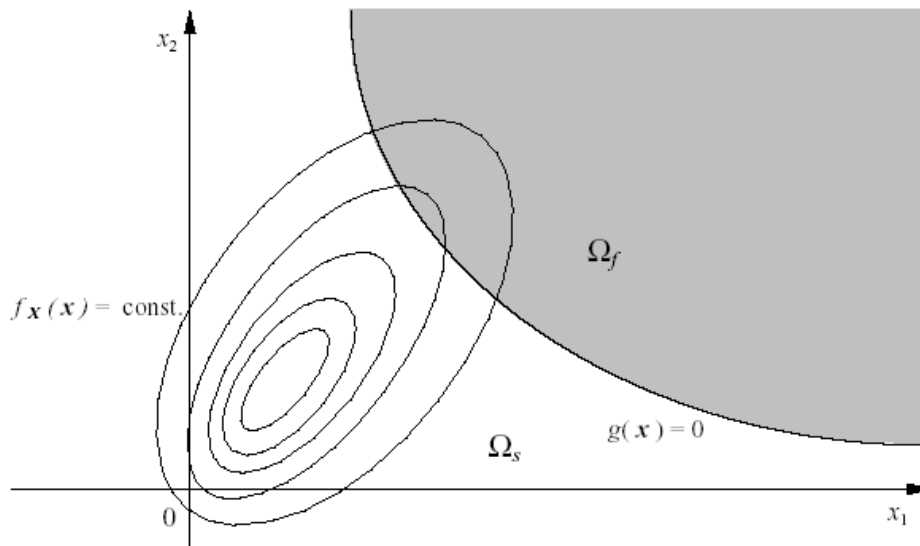
$$(2-25) \quad R = 1 - P_f$$

Parametrem losowym może być obciążenie, materiał oraz geometria. Stan konstrukcji może zależeć jednocześnie od wielu czynników, które grupowane są w wektorze $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ nazywanym wektorem zmiennych bazowych. Na przestrzeni realizacji wektora losowego X opisywana jest funkcja $g(X)$ zwana funkcją stanu granicznego i określona jako:

$$g(\mathbf{x}) < 0; \quad x \in \Omega_f \text{ (obszar awarii)}$$

$$g(\mathbf{x}) \geq 0; \quad x \in \Omega_s \text{ (obszar bezpieczny)}$$

Poszczególne obszary oraz przebieg funkcji $g(x)$ obrazuje Rysunek 2-5.



Rysunek 2-5 Interpretacja obszaru bezpieczeństwa i awarii dla układu o dwóch parametrach losowych

W sytuacji opisu stanu granicznego w wielu wymiarach $\{x \in \mathcal{R}^n; g(x)=0\}$ mowa jest o hiperpowierzchni stanu granicznego. Prawdopodobieństwo awarii można zdefiniować jako całkę z funkcji będącej gęstością łączną rozkładu prawdopodobieństwa wektora parametrów losowych $X=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

$$(2-26) \quad P_f = \int_{\{g(x)<0\}} f_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Zakładamy, że gęstość łączna istnieje, tj. wektor X ma rozkład absolutnie ciągły względem miary Lebesgue' a (Feller, 1981)

Do oceny bezpieczeństwa konstrukcji częściej używa się wskaźnika niezawodności (bezpieczeństwa) β , który w sposób wzajemnie jednoznaczny odpowiada prawdopodobieństwu awarii według zależności:

$$(2-27) \quad \beta = -\Phi^{-1}(P_f)$$

gdzie Φ^{-1} jest funkcją odwrotną do dystrybuanty jednowymiarowego standardowego rozkładu normalnego.

Norma ISO 2394(1998) – „Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych” definiuje wartości wskaźnika niezawodności dla konstrukcji w zależności od możliwych prognozowanych skutków zniszczenia. Tabela 2-10 została zaczerpnięta z normy ISO:2394 i prezentuje wartości docelowe wskaźnika β .

Tabela 2-10 Wskaźnik niezawodności β dla konstrukcji budowlanych (ISO:2394 1998)

Względne koszty zapewnienia bezpieczeństwa	skutki zniszczenia			
	małe	odczuwalne	umiarkowane	wielkie
Wysokie	$\beta=0$	$\beta=1.5$	$\beta=2.3$	$\beta=3.1$
Umiarkowane	$\beta=1.3$	$\beta=2.3$	$\beta=3.1$	$\beta=3.8$
Niskie	$\beta=2.3$	$\beta=3.1$	$\beta=3.8$	$\beta=4.3$

Im większa wartość wskaźnika tym mniejsze prawdopodobieństwo awarii. Uważa się, że konstrukcje geotechniczne, w tym również fundamenty bezpośrednie, powinny być projektowane na $\beta=3.8$, co odpowiada umiarkowanym skutkom zniszczenia przy niskich kosztach zapewnienia bezpieczeństwa.

Proste z pozoru wyrażenia opisujące prawdopodobieństwa awarii (2-26) wiąże się z szeregiem trudności obliczeniowych. Po pierwsze gęstość prawdopodobieństwa $f_X(x)$ wymaga kompletnych danych statystycznych. Po drugie możliwości numerycznego całkowania wyrażenia na P_f , dla dużej liczby zmiennych losowych, mogą stanowić problem. W tym celu, w latach osiemdziesiątych poprzedniego wieku, wypracowano szereg metod numerycznych prowadzących do stosunkowo przejrzystych oszacowań prawdopodobieństwa P_f , np. metody FORM, SORM oraz metody symulacyjne korzystające z algorytmów redukcji wariancji (Ditlevsen & Madsen, 1996).

Inną grupą trudności, pośrednio związaną ze zdefiniowaniem prawdopodobieństwa awarii jest określenie funkcji stanu granicznego $g(x)$, która wpływa na probabilistyczny model pracy konstrukcji. Problemem modelowania procesów geotechnicznych jest dobór modelu matematycznego tak, aby najlepiej odwzorowywała rzeczywiste zjawiska.

Zagadnienie teorii niezawodności zostanie poruszone również w poniższej pracy w kontekście kalibracji wartości obliczeniowej oporu granicznego podłoża wynikającego z analizy losową metodą elementów skończonych (patrz pkt 9.5).

2.5. UWAGI DO ROZDZIAŁU.

Podsumowując powyższy rozdział należy zaznaczyć, że przytoczone równania stanowią podstawę teoretyczną analizy nośności posadowienia bezpośredniego. Jednakże w odniesieniu do prezentowanej rozprawy nie mają one bezpośredniego przełożenia metodycznego. Wynika to ze specyfiki generowania wyników w metodzie elementów skończonych, która stanowi zasadniczy element poniższej pracy. W dalszych obliczeniach

wykorzystano niektóre z tych równań do celów koncepcyjnych oraz porównawczych. Dokładny opis uzyskiwania wyników za pomocą losowej metody elementów skończonych podano w następnych rozdziałach.

3. WYBRANE ZAGADNIENIA TEORII PÓŁ LOSOWYCH

Jednym z podstawowych elementów rozpatrywanych w poniższej pracy jest modelowanie podłoża gruntowego przy użyciu pól losowych. W poniższym rozdziale zawarto krótki opis traktujący o polach losowych oraz teorii jaka jest powiązana bezpośrednio z metodą RFEM.

3.1. ZASTOSOWANIE W GEOTECHNICE

Po raz pierwszy pola losowe zastosowano do opisu intensywności występowania złota na obszarze Południowej Afryki. Metodę szacowania położenia zasobów minerału na danym obszarze opracował Krige (1951, 1962). W Polsce pionierskim zastosowaniem pól losowych była praca Zubrzyckiego (1957) związana z eksploatacją rudy cynku na Górnym Śląsku. Zagadnienia geotechniczne wykorzystujące teorię pól losowych do opisu zmienności parametrów gruntu wraz z głębokością, przedstawiano po raz pierwszy w pracach Lumba (1974, 1975), Alonso i Krizka (1975), Alonso (1976). W następstwie prac Vanmarcke' a (1977a, 1977b) oraz Wildego (1977) pojawiły się nowe metody obliczeniowe związane z zastosowaniem teorii pól losowych. Technikom dyskretyzacji pól losowych jest też poświęcona monografia Wildego (1981), podczas gdy stochastyczny opis parametrów podłoża za pomocą funkcji korelacji prezentuje praca Brząkały (1981). Funkcjami korelacji, w kontekście kalibracji, zajmował się również Przewłócki (1998). Przegląd analiz modelowania parametrów podłoża za pomocą pól losowych przedstawił Rakwitz (2000). Ważną pozycją literaturową jest również rozprawa doktorska Fentona (1990) oraz publikacja Fentona i Vanmarcke' a (1990), dotycząca metod symulacji pól losowych ze szczególnym naciskiem na metodę lokalnych uśrednień (wykorzystywaną w algorytmie RFEM).

3.2. DEFINICJE

3.2.1. POLA LOSOWE

Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, gdzie F jest σ -ciałem podzbiorów Ω , zaś P miarą probabilistyczną na F . Niech $T = \mathcal{H}^n$ będzie n -wymiarową przestrzenią euklidesową. Polem losowym nazywamy zbiór postaci $\{X_t = X(t, \omega); t \in T, \omega \in \Omega\}$. Dla ustalonej wartości t_0 , $X_{t_0} = X(t_0, \omega)$ jest zmienną losową.

Pole losowe można zdefiniować w wielu wymiarach. Jednowymiarowa funkcja, tzn. $T = \mathcal{H}$ nazywana jest procesem stochastycznym. Podczas gdy mianem pola losowego określa się strukturę o więcej niż jednym wymiarze (tzn. $T = \mathcal{H}^n$, gdzie $n \geq 2$). W geotechnice, hydrotechnice czy geologii najczęściej wykorzystuje się pola dwu ($n=2$) lub trójwymiarowe ($n=3$).

Warto zaznaczyć jeszcze jedną prawidłowość. Mianowicie polem losowym jest również funkcja pól. Dla mierzalnej funkcji $f: \mathcal{H}^i \rightarrow \mathcal{H}^j$, oraz i -tym zbiorze pól losowych $\{X_t^1, \dots, X_t^i\}$, funkcja $f\{X_t^1, \dots, X_t^i\}$ jest polem losowym. Powyższe twierdzenie, udowodnione między innymi w książkach Loewa (1978) oraz Billingslea (1986), wynika z teorii prawdopodobieństwa. Wnioskiem z niego płynącym są dwa fakty, prawdziwe przy założeniu że pole losowe jest opisane na \mathcal{H}^n :

1. Jeżeli X_t i Y_t przy $t \in \mathcal{H}^n$ są polami losowymi oraz $a, b \in \mathcal{H}$, to $aX_t + bY_t$ jest też polem losowym.
2. Jeżeli X_t i Y_t są polami losowymi, to $X_t Y_t$ jest też polem losowym.

3.2.2. ROZKŁADY SKOŃCZENIE WYMIAROWE

Pole losowe jest opisane w sposób jednoznaczny przez tzw. rozkłady skończenie wymiarowe, czyli

$$(3-1) \quad F_{t_1, \dots, t_k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = P\left\{X_{t_1} \leq \mathbf{x}_1, \dots, X_{t_k} \leq \mathbf{x}_k\right\}$$

gdzie $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}$. W kwestii rozkładów pól losowych prawdziwe jest twierdzenie Kołmogorowa (Gichman i Skorokhod, 1968):

Jeżeli dana jest rodzina skończenie wymiarowych rozkładów F_{t_1, \dots, t_k} spełniająca następujące warunki zgodności i dla dowolnej permutacji π o indeksie $(1, \dots, k)$

$$(3-2) \quad F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{t_{\pi 1}, \dots, t_{\pi k}}(x_{\pi 1}, \dots, x_{\pi k})$$

(ten warunek nazywa się warunkiem symetrii), ponadto

$$(3-3) \quad F_{t_1, \dots, t_{k-1}}(x_1, \dots, x_{k-1}) = F_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, \square)$$

to istnieje w przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P) pole losowe $[X_t : t \in T]$ określone na tej przestrzeni, mające skończenie wymiarowe rozkłady równe F_{t_1, \dots, t_k} .

W praktyce twierdzenie Kołmogorowa oznacza, że jeżeli możliwe jest określenie rodziny skończenie wymiarowych rozkładu F_{t_1, \dots, t_k} spełniającego powyższe dwa warunki, to wówczas istnieje pole losowe mające zadane rozkłady skończenie wymiarowe.

3.2.3. WARTOŚĆ ŚREDNIA I KOWARIANCJA

Niech $X(t, \omega)$ będzie pewnym polem losowym. Wartością średnią (inaczej wartością oczekiwaną) nazywamy następującą funkcję:

$$(3-4) \quad \mu_X(t) = E\{X_t\} = \int_{\mathcal{R}^1} X_t(\omega) dP(\omega)$$

gdzie $t \in T$ zaś $E\{.\}$ oznacza operator wartości oczekiwanej. Powyższą całkę można wyrazić poprzez dystrybuantę $F_t(x)$ jednowymiarowego skończonego rozkładu zmiennej X_t , jako całkę Stiltjesa na \mathcal{R}^1 . (Billingsley 1986).

$$(3-5) \quad \mu_X(t) = \int_{\mathcal{R}^1} x dF_t(x)$$

Kolejną wielkością jest funkcja (auto-) kowariancji:

$$(3-6) \quad C_X(t, s) = \text{Cov}\{X_t, X_s\} = E\left\{\left(X_t - \mu_X(t)\right)\left(X_s - \mu_X(s)\right)\right\}$$

gdzie $t \in T$ zaś $\text{Cov}\{.,.\}$ jest operatorem kowariancji.

W szczególnym przypadku, gdy $s=t$ z równania (3-6) otrzymuje się funkcję wariancji:

$$(3-7) \quad \sigma_X^2(t) = C_X(t, t) = \text{Var}_X(t)$$

Pierwiastek kwadratowy wariancji jest odchyleniem standardowym $\sigma_x(t)$. Stosunek odchylenia standardowego do wartości średniej zmiennej losowej definiuje współczynnik zmienności COV X .

$$(3-8) \quad \text{COV } X = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$$

Alternatywnie rozpatruje się funkcję (auto-) korelacji pola losowego opisaną wzorem (3-9). Dla ustalonych wartości t i s , $\rho_x(t, s)$ jest współczynnikiem korelacji zmiennych losowych X_t oraz X_s .

$$(3-9) \quad \rho_x(t, s) = \frac{C_x(t, s)}{\sigma(t)\sigma(s)}$$

Przy założeniu rozkładu absolutnie ciągłego względem miary Lebesgue' a (Feller, 1981) funkcja łącznej gęstości prawdopodobieństwa jest opisana jako (3-10):

$$(3-10) \quad f_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1, \dots, x_k}$$

Korzystając z własności całki Stiltjеса funkcję wartości oczekiwanej oraz funkcję kowariancji dla rozkładu absolutnie ciągłego można przedstawić w oparciu o gęstość prawdopodobieństwa jako:

$$(3-11) \quad \mu_x(t) = \int_{\mathbb{R}^1} x f_t(x) dx$$

$$(3-12) \quad C_x(t, s) = \int \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{t,s}(x, y) dx dy - \mu_x(t)\mu_x(s)$$

3.2.4. STACJONARNOŚĆ, IZOTROPIA I ANIZOTROPIA POLA

Stacjonarnym polem losowym jest takie pole, dla którego rozkłady skończenie wymiarowe nie zmieniają się wraz z przesunięciem w czasie lub przestrzeni. W efekcie, parametry takie jak wartość średnia i wariancja także nie ulegają zmianie wraz z rozpatrywaną translacją. Jest to tzw. silna stacjonarność czyli stacjonarność w węższym sensie, którą definiuje się następująco:

Pole losowe $X(t)$ jest stacjonarne w sensie węższym gdy skończenie wymiarowe rozkłady są niezmiennie ze względu na translacje czyli:

$$(3-13) \quad \forall \mathbf{s} \in T \quad F_{t_1+s, \dots, t_k+s}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = F_{t_1, \dots, t_k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$$

O słabszej formie stacjonarności często mówi się jako o stacjonarności w szerszym sensie lub stacjonarność rzędu dwa. Pole losowe $X(t)$, jest stacjonarne w szerszym sensie gdy spełnia następujące warunki:

$$(3-14) \quad \forall t \in T \quad \forall \eta \in T \quad \mu_X(t) = \mu_X(t + \eta)$$

$$(3-15) \quad \forall t \in T \quad \forall \eta \in T \quad C_X(t, s) = C_X(t + \eta, s + \eta) = C_X(t - s, 0) = C_X(\tau)$$

Pierwsza własność implikuje, że funkcja wartości średniej jest funkcją stałą, tzn. $\mu_X(t) = \mu$. Druga własność implikuje zależność wartości funkcji kowariancji wyłącznie od różnicy pomiędzy t i s co oznacza, że funkcja kowariancji jest funkcją tylko zmiennej przesunięcia, gdzie $\tau = t - s$ jest wektorem separacyjnym (przesunięcia). Ze wzoru (3-15) wynika w szczególności, że wariancja pola jest jednakowa w każdym jego punkcie t . W związku z tym zależność pomiędzy funkcją kowariancji a funkcją korelacji pola można zapisać w postaci:

$$(3-16) \quad C_X(\tau) = \sigma^2 \rho_X(\tau),$$

gdzie $\rho_X(\tau)$ jest funkcją korelacji.

Nietrudno udowodnić, że stacjonarność w sensie węższym implikuje stacjonarność w sensie szerszym. Szczególnym przypadkiem pola stacjonarnego w szerszym sensie, przez niektórych autorów (Yaglom (1986a), Vanmarcke (1983)) nazywanego polem homogenicznym, jest pole izotropowe. W polu tym zakłada się, że funkcja kowariancji zależy jedynie od długości wektora przesunięcia τ , czyli:

$$(3-17) \quad \|\tau\| = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_n^2},$$

stąd:

$$(3-18) \quad C_X(\tau) = C_X(\|\tau\|) = \sigma^2 \rho(\|\tau\|)$$

Zatem zarówno funkcja kowariancji jak i funkcja korelacji są funkcjami jednej zmiennej rzeczywistej. Jeżeli w przestrzeni \mathcal{H}^n tradycyjną normę euklidesową (3-17) zastąpimy przez normę postaci (3-19):

$$(3-19) \quad \tau = \|\tau\|_K = \sqrt{\tau^t K \tau}$$

gdzie K jest pewną symetryczną dodatnio określoną macierzą, zaś górny indeks t oznacza transpozycję, to funkcja:

$$(3-20) \quad \rho(\tau) = \rho(\|\tau\|_K)$$

będzie funkcją autokorelacji niestacjonarnego pola losowego. To podejście pozwala przejść w prosty sposób z pola izotropowego do anizotropowego.

Na to aby funkcja jednej zmiennej była funkcją kowariancji pewnego procesu stochastycznego potrzeba i wystarczy, zgodnie z twierdzeniem Bochnera (Wentzel, 1980), aby funkcja ta była dodatnio określona. Istnieje nieskończenie wiele funkcji spełniających warunki (3-20). Najczęściej kryterium wyboru funkcji korelacji oparte jest na dogodnych własnościach danej funkcji. Przykładowo dla pól jednowymiarowych założone twierdzenie Bochnera spełniają funkcje postaci:

$$(3-21) \quad C_X(\tau) = \sigma^2 \exp(-a|\tau|)$$

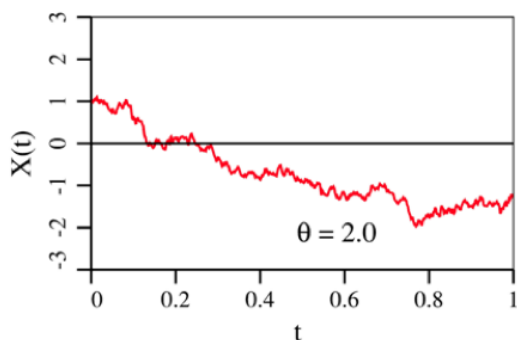
$$(3-22) \quad C_X(\tau) = \sigma^2 \exp(-a|\tau|) \cos(b\tau)$$

$$(3-23) \quad C_X(\tau) = \sigma^2 \exp(-a(\tau)^2)$$

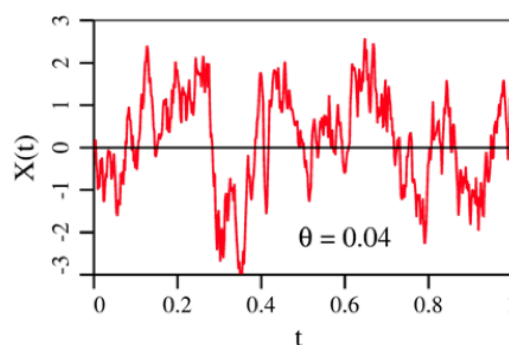
W wymienionych wzorach a i b są parametrami funkcji korelacji. Szeroki przegląd funkcji korelacji i ich własności można znaleźć w pracy Rakwiza (2000). Wielkością charakteryzującą zmienność stacjonarnego pola losowego jest promień korelacji θ , określane także mianem skali fluktuacji (Vanmarcke E., 1977a). Intuicyjnie określa on odległość w polu, poza którą korelacja pomiędzy zmiennością jest już słaba. W przypadku jednowymiarowym $\tau \in \mathcal{R}$ promień korelacji definiuje się jako:

$$(3-24) \quad \theta = \int_0^{\infty} C_X(\tau) d\tau = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} C_X(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau$$

Jeżeli skala fluktuacji ma dużą wartość to zmienne losowe wykazują małą zmienność (Rysunek 3-1). Długość fali, dla takiej zmiennej, ma trend płaski i łagodny w przebiegu. Jeżeli natomiast skala fluktuacji przyjmuje wartości małe (Rysunek 3-2), zmiany między badanymi zmiennymi są znaczące co prezentuje drugi wykres zamieszczony poniżej. Oba wykresy dotyczą pola stacjonarnego.



Rysunek 3-1 Przykładowe realizacja pola losowego o dużej skali fluktuacji (Fenton & Griffiths, 2008)



Rysunek 3-2 Przykładowa realizacja pola losowego o małej skali fluktuacji (Fenton & Griffiths, 2008)

Sytuacja, w której $\theta \rightarrow 0$ powoduje nieskorelowanie ze sobą wszystkich punktów pola. Zjawisko takie nazywa się białym szumem, jednak w przypadku własności gruntu jest to sytuacja nierealna. Odwrotnie kiedy $\theta \rightarrow \infty$ wszystkie punkty pola są ze sobą nieskończenie skorelowane, co powoduje w polu stacjonarnym uzyskanie jednorodnej wartości średniej w rozpatrywanym kierunku, a całe pole może być praktycznie scharakteryzowane poprzez pojedynczą zmienną losową.

W większości sytuacji dotyczących zastosowań rozkłady skończenie wymiarowe pola losowego nie są znane. Wyjątkiem są gaussowskie (normalne) pola losowe lub pola lognormalne. Nieznajomość typów rozkładów ogranicza badania jedynie do wartości średniej oraz funkcji kowariancji. Teoria pól losowych oparta jedynie na tych dwóch pierwszych momentach statystycznych nazywa się teorią korelacyjną.

3.3. ZAGADNIENIA TEORII PÓL LOSOWYCH WYKORZYSTYWANE W RFEM

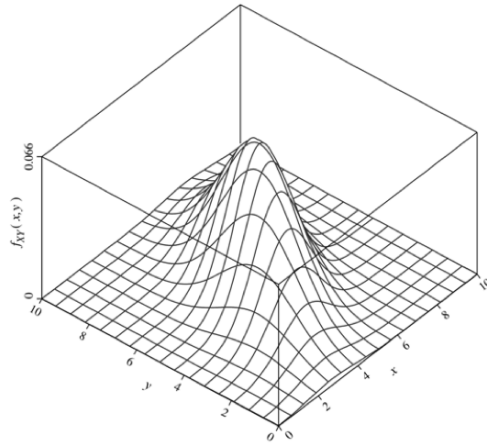
3.3.1. POLE GAUSSOWSKIE

Jest to najbardziej rozpowszechniony typ pola losowego. Również losowa metoda elementów skończonych korzysta z tego typu pola. Polem gaussowskim nazywa się pole losowe, którego wszystkie rozkłady skończenie wymiarowe F_{t_1, \dots, t_k} są wielowymiarowym rozkładem normalnym dla każdego k i $\{t_1, \dots, t_k\}$.

W polu gaussowskim łączna gęstość rozkładu skończenie wymiarowego wektora losowego przyjmuje postać (3-25).

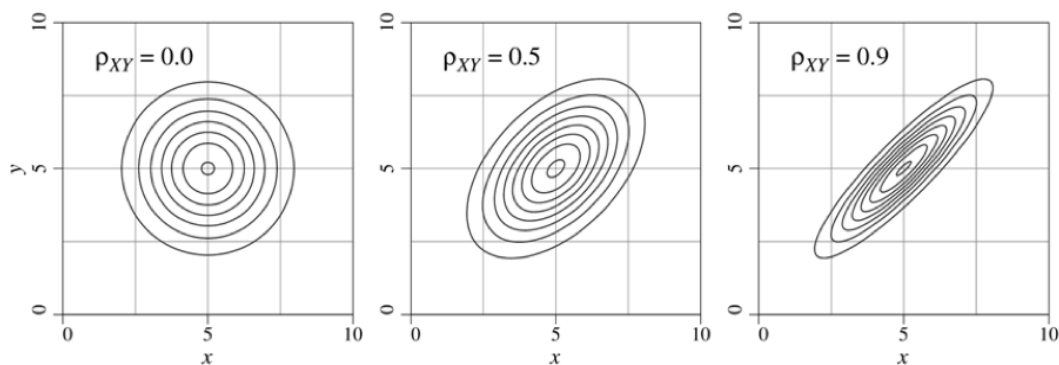
$$(3-25) \quad f_{X_1, \dots, X_n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|C|^{1/2} (2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T C^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

gdzie: $C=[C_{ij}]$ jest macierzą kowariancji wektora losowego (X_1, \dots, X_n) , czyli $C_{ij}=\text{Cov}(X_{ti}, X_{tj})$ zaś $|C|$ oznacza wyznacznik macierzy kowariancji. Ponadto $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}^T$ jest wektorem wartości średnich, $x \in \mathcal{H}^n$.



Rysunek 3-3 Dwuwymiarowa gęstość gaussowska (Griffiths i Fenton, 2008)

Dwuwymiarową gęstość rozkładu pola gaussowskiego pokazuje Rysunek 3-3, przy czym możliwa jest deformacja poziomic rozkładu (Rysunek 3-4), która zależna jest od współczynnika korelacji $\rho(X, Y)$.



Rysunek 3-4 Poziome odwzorowanie rozkładu dwóch zmiennych dla różnych współczynników korelacji (Griffiths i Fenton, 2008)

Współczynnik $\rho(X, Y)$ może przyjmować wartość dodatnią lub ujemną, przy czym $|\rho_{xy}| \leq 1$. Maksymalna dodatnia wartość $\rho=1$ oznacza liniową zależność między punktami pola. Wartość zerowa $\rho(X, Y)$ w przypadku rozkładu gaussowskiego jest równoważna stochastycznej niezależności zmiennych X i Y .

Przykładowo, jeżeli funkcja korelacji w polu gaussowskim ma postać (3-23) to wynikająca z zależności (3-24) skala fluktuacji jest dana wzorem (3-26).

$$(3-26) \quad \theta = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

3.3.2. UŚREDNIENIA LOKALNE

Założmy, że pole jest stacjonarne w szerszym sensie. Wówczas wartość oczekiwana w polu jest stała. Rozważmy skończony ciąg punktów pola (zmiennych losowych) oraz ich średnią arytmetyczną

$$(3-27) \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Jeżeli zmienne X_i są ze sobą nieskorelowane to dla wariancji zachodzi związek:

$$(3-28) \quad \text{Var} \left[\bar{X} \right] = \frac{\sigma_X^2}{n} = \gamma^{\text{var}}(n) \sigma_X^2,$$

gdzie $\gamma^{\text{var}}(n)$ jest funkcją wariancji, zwaną też funkcją redukcji wariancji. W równaniu (3-28) mamy:

$$(3-29) \quad \gamma^{\text{var}}(n) = \frac{1}{n}.$$

W przypadku zmiennych losowych o identycznym rozkładzie i idealnie skorelowanych (tzn. współczynnik korelacji pomiędzy nimi jest równy 1), $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, a średnia arytmetyczna (3-27) będzie miała postać (3-30).

$$(3-30) \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{nX}{n} = X,$$

Natomiast wariancja wyniesie:

$$(3-31) \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma_X^2 \square \gamma^{\text{var}}(n) = 1$$

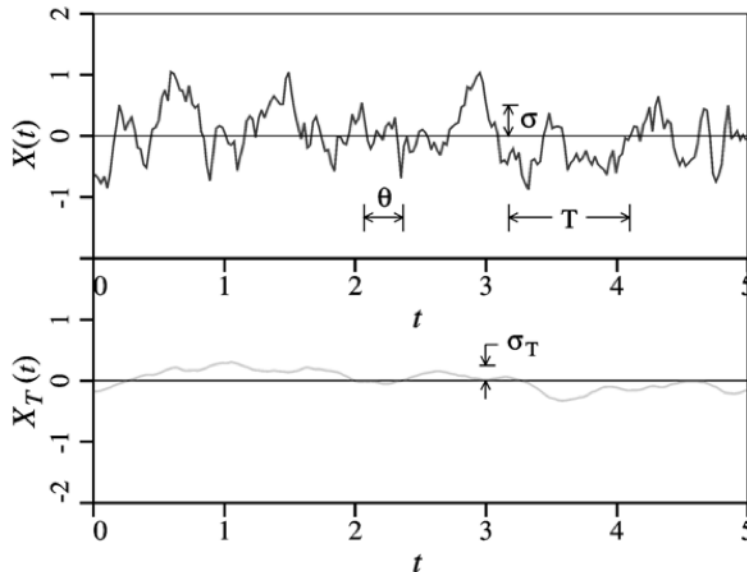
Opisany powyżej schemat pokazuje ideę uśrednienia pola w przypadku dyskretnym, oraz związaną z nią funkcję redukcji wariancji $\gamma^{\text{var}}(n)$. Analogicznie można dokonać uśrednienia pola w przypadku ciągłym.

Vanmarcke (1977a) zastosował lokalne uśrednienie poprzez wprowadzenie nowego pola $X_T(t)$ o tzw. ruchomej średniej (Box & Jenkins, 1983), dla którego wartość redukcji wzrasta wraz ze wzrostem miary uśrednienia T , co bezpośrednio koresponduje ze wzrostem niezależności zmiennych w polu. Tak jak w przypadku dyskretnym, uśrednieniu towarzyszy funkcja redukcji wariancji $\gamma^{\text{var}}(T)$, przyjmująca wartości z przedziału $[0; 1]$. Ideę uśrednienia w przypadku jednowymiarowym demonstruje Rysunek 3-5. W efekcie uśrednienia uzyskuje się nowe pole **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.**

3

którego wariancja $\text{Var}[X_T]$, przy założeniu stacjonarności $X(t)$ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X_T] &= E\left[\frac{1}{T} \int_0^T (X(r) - \mu_x) dr \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (X(s) - \mu_x) ds\right] = \\
 (3-32) \quad &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T (X(r) - \mu_x)(X(s) - \mu_x) dr ds = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T C_X(r-s) dr ds = \\
 &= \sigma_x^2 \int_0^T \int_0^T \rho_X(r-s) dr ds = \sigma_x^2 \gamma^{\text{var}}(T)
 \end{aligned}$$



Rysunek 3-5 Idea uśrednienia jednowymiarowego procesu losowego (Griffiths i Fenton, 2008)

Po przekształceniach $\text{Var}[X_T]$ jest iloczynem kwadratu odchylenia standardowego wyjściowego pola oraz funkcji redukcji wariancji $\gamma^{\text{var}}(T)$ przyjmującej postać:

$$(3-33) \quad \gamma^{\text{var}}(T) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \rho_X(r-s) dr ds = \frac{1}{T^2} \int_{-T}^T (T-|\tau|) \rho_X(\tau) d\tau = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T-\tau) \rho_X(\tau) d\tau$$

Funkcję redukcji wariancji można powiązać ze zdefiniowaną wzorem (2.23) skalą fluktuacji (promieniem korelacji), zauważając że

$$(3-34) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \gamma^{\text{var}}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) \rho_X(\tau) d\tau = 2 \int_0^\infty \rho_X(\tau) d\tau = \theta$$

W przypadku wielowymiarowej funkcji redukcji wariancji redukcja następuje względem każdego wymiaru. Dla przypadku trójwymiarowego przyjmuje postać (3-35).

$$(3-35) \quad \gamma^{\text{var}}(T_1, T_2, T_3) = \frac{2^3}{T_1 T_2 T_3} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_0^{T_3} (T_1 - \tau_1)(T_2 - \tau_2)(T_3 - \tau_3) \rho(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

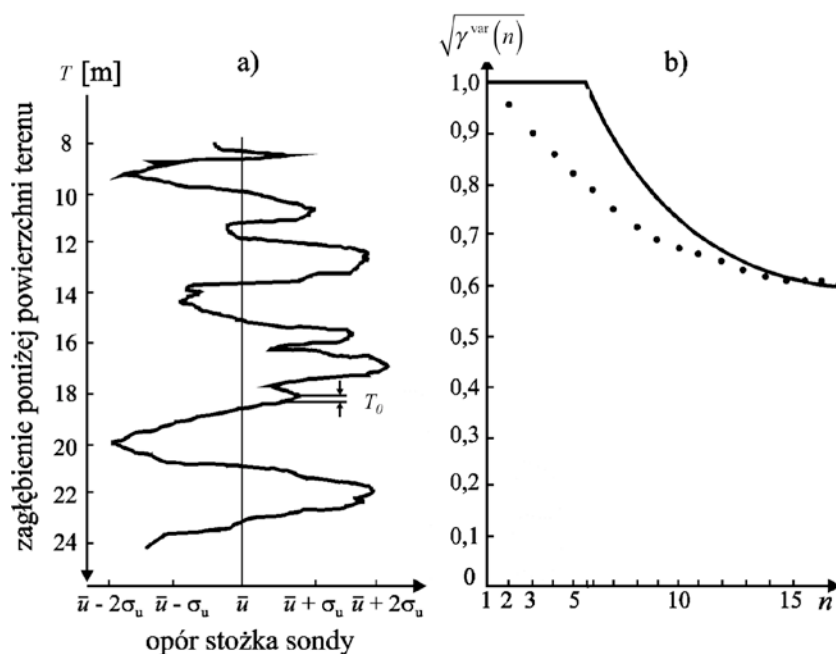
3.3.3. PROMIEN KORELACJI – WARTOŚCI ORAZ SPOSOBY WYZNACZANIA

Sposób pozyskiwania skali fluktuacji (promienia korelacji) z badania oporu stożka sondy CPT zaproponował Vanmarcke (1977a). Propozycja ta bazuje na zależności granicznej równania (3-34). W konsekwencji dla dużych wartości T mamy:

$$(3-36) \quad \gamma^{\text{var}}(T) \approx \frac{\theta}{T}$$

Wykres sondowania podzielono CPT na jednakowe odstępów T_0 , co prezentuje

Rysunek 3-6.



Rysunek 3-6. Zarys sposobu wyznaczania promienia korelacji na podstawie badań CPT (Vanmarcke 1977a).
(a) zmienność oporu stożka, (b) sposób estymacji skali fluktuacji

Dla całego sondowania estymowano odchylenie standardowe σ , oraz z każdego przedziału T_0 estymowano wartość średnią $\mu(T_0)$. Następnie parami uśredniano sąsiadujące wyniki, dla których wyznaczano nowe odchylenie standardowe ($\sigma_A(n)$), opisane wzorem (3-37).

$$(3-37) \quad \sigma_A(n) = \sigma \sqrt{\gamma^{\text{var}}(n)}$$

Czynności powtarzano dla kolejnych poziomów uśrednienia ($n=3, 4, \dots, n$). Wielkość $\sqrt{\gamma^{\text{var}}(n)}$ nie jest analitycznie określona. Jednak wiadomo, że im wyższy poziom uśrednienia tym $\sqrt{\gamma^{\text{var}}(n)}$ zbliża się do wartości granicznej, wynikającej z (3-36). W związku z tym zaproponowano równanie:

$$(3-38) \quad \sqrt{\gamma^{\text{var}}(n)} = \sqrt{\frac{\theta}{nT_0}}$$

Wartości teoretycznej odpowiada ciągła linia na Rysunku 3-6(b). Przy czym definiuje ją zależność:

$$(3-39) \quad \sqrt{\gamma^{\text{var}}(T_0)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } T_0 \leq \theta \\ \sqrt{\frac{\theta}{nT_0}} & \text{dla } T_0 > \theta \end{cases}$$

Zgodnie z propozycją Vanmarcke (1977a), należy przyjąć liczbę poziomów uśrednienia n . Znając wielkość przedziałów T_0 , wyznaczyć promień korelacji θ , dopasowując krzywą teoretyczną z krzywą wyznaczoną na podstawie sondowań. Dopasowania dokonuje się korzystając np. z metody najmniejszych kwadratów (Beacher i Christian 2003).

Innym sposobem, podanym również przez Vanmarcke' a (1977a) było zastosowanie znanego z teorii stochastycznej wzoru Rice' a (1944), na częstotliwość przekroczeń wartości średniej przez funkcję losową. Jednak zastosowanie tej metody uwarunkowane jest posiadaniem dużej liczby pomiarów sondowań. W literaturze pojawiają się też inne metody oznaczania wartości skali fluktuacji θ , np. Wickremesinghe i Campanella (1993).

Z badań Vanmarcke (1977a) jak i innych autorów (np.: Keaveny, Nadim, & Lacasse, 1989; Wickremesinghe & Campanella, 1993) wynika, że widoczne są dość szybkie zmiany pola na kierunku pionowym. W związku z tym wartości skali fluktuacji w kierunku pionowym

są niewielkie i wahają się od 25 centymetrów do kilku metrów. Przykładowe wartości zamieszczono w Tabeli 3-1.

Tabela 3-1 Przykładowe wartości pionowej skali fluktuacji (Cherubini, 1997)

Własność	Autorzy	θ_v [m]
Wilgotność (%)	Vanmarcke (1977a)	1.20
Wskaźnik porowatości (e)	Vanmarcke (1977a)	3.05
	Vanmarcke (1977a)	5.00
	Wu (1974)*	0.79
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez drenażu	Matsuo & Asaoka (1977)*	1.25
	Matsuo & Asaoka (1977)*	2.50
	Matsuo & Asaoka (1977)*	1.82
Opór stożka sondy (piasek)	Alonso & Krizek (1975)	2.20
Opór stożka sondy (glina)	Alonso & Krizek (1975)	1.00
Opór stożka sondy (glina pyłaasta – silty clay)	Gao & Li (1993)**	0.4 – 0.8
Opór stożka sondy (glina błotnista – muddy clay)	Gao & Li (1993)**	1.0 – 1.5
Opór stożka sondy (glina szarawa – greyish clay)	Gao & Li (1993)**	0.6 – 1.2
Opór stożka sondy (ciemnozielona glina – dark green clay)	Gao & Li (1993)**	0.5 – 0.8
Opór stożka sondy (piasek drobny)	Gao & Li (1993)**	0.25 – 0.6

* Z pracy Quek et al. (1992)

** Grunt z Szanghaju

Testowanie gruntów naturalnych wskazuje wyraźnie, że zmienność parametrów podłoża w kierunku poziomym jest dużo wolniejsza niż w kierunku pionowym. Otrzymywane w związku z tym poziome skale fluktuacji wahają się od kilku do kilkudziesięciu metrów. Przykładowe wartości na podstawie analizy przeprowadzonej przez Cherubiniego (1997) pokazano w Tabeli 3-2.

Tabela 3-2 Przykładowe wartości poziomej skali fluktuacji (Cherubini, 1997)

Własność	Autorzy	θ_x [m]
Opór stożka sondy (na głębokości 7m)	Keaveny i in. (1989)	24.62
Opór stożka sondy (na głębokości 9m)	Keaveny i in. (1989)	66.49
Wskaźnik skonsolidowania C_c	Vanmarcke (1977a)	54.86
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez drenażu	Vanmarcke (1977a)	46.00
Ciśnienie porowe	Wickremesinghe & Campanella (1993)	17.75

Ważnym stwierdzeniem, w kontekście niniejszej pracy jest fakt, że skala fluktuacji w kierunku poziomym jest dużo większa aniżeli w kierunku pionowym. Tak więc modelowanie własności podłoża za pomocą izotropowego pola losowego ma ograniczone zastosowanie. W związku z tym bardziej adekwatne wydaje się podejście anizotropowe, w którym pozioma skala fluktuacji θ_x będzie różna od pionowej skali fluktuacji θ_y .

3.3.4. MODEL POLA LOSOWEGO WEDŁUG MARKOVA

W teorii jednowymiarowych pól (funkcji) losowych, zwanych najczęściej procesami stochastycznymi, szczególną rolę odgrywają procesy Markowa (Feller, 1981). Parametr $t \in \mathcal{R}$ traktowany jest jako czas. W procesach Markowa zakłada się, że wszystkie zmienne X_t dla $t \geq t_0$ są niezależne od zmiennych X_t dla $t < t_0$. Może to oznaczać, że wszystkie stany procesu, późniejsze niż w chwili t_0 , zależą jedynie od stanu X_{t_0} , nie zależą natomiast od stanów z przeszłości, czyli od X_t dla $t < t_0$. Może to odpowiadać sytuacjom, w których nie zawsze dostępna jest informacja archiwalna dotycząca rozpatrywanego zjawiska.

W przypadku dyskretnym, gdy T jest zbiorem liczb całkowitych, mamy do czynienia z tzw. łańcuchami Markowa (Borowkow, 1971). Najczęściej stosowaną funkcją kowariancji w łańcuchach i procesach Markowa jest:

$$(3-40) \quad \text{Cov}[X_i, X_j] = \sigma_x^2 \rho(\tau_{ij}),$$

przy czym współczynnik korelacji jest funkcją wykładniczą postaci:

$$(3-41) \quad \rho(\tau_{ij}) = \exp\left\{-\frac{2|\tau_{ij}|}{\theta}\right\}$$

Funkcja eksponentalnie maleje wraz ze wzrostem odległości między punktami $\tau_{ij} = |x_i - x_j|$. Specyficzna postać wykładnika w powyższym wzorze wynika z faktu wykorzystywania tej funkcji w losowej metodzie elementów skończonych. W bieżącym akapicie pokrótce opisano czym charakteryzuje się ten typ procesu stochastycznego. Ze względu na zastosowania w procesach Markowa funkcji postaci (3-41), nazywa się ją często funkcją korelacji typu Markowa. Określenie to stosowane jest też dla funkcji korelacji w polach wielowymiarowych, tj. funkcji postaci:

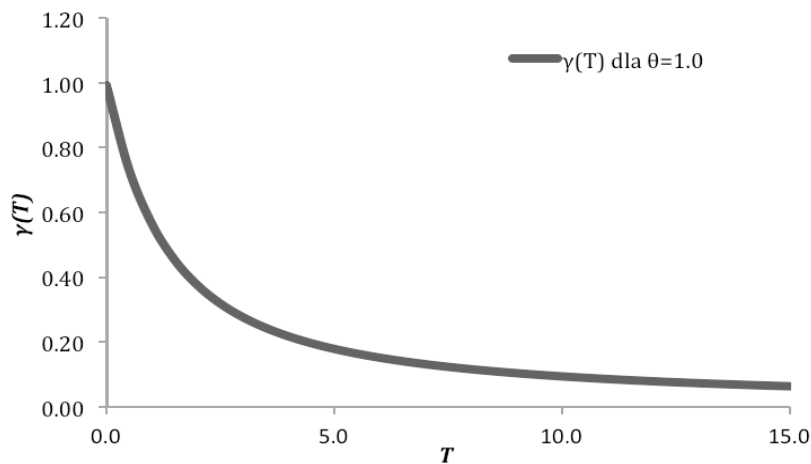
$$(3-42) \quad \rho(\tau) = \exp\left\{-\sqrt{\left(\frac{2\tau_1}{\theta_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2\tau_n}{\theta_n}\right)^2}\right\},$$

choć w tym przypadku klasyczna definicja „własności Markowa” (czyli zależność kolejnych stanów jedynie od stanu bieżącego) traci sens.

Z funkcją korelacji (3-41) związana jest odpowiednia funkcja redukcji wariancji postaci:

$$(3-43) \quad \gamma^{\text{var}}(T) = \frac{\theta^2}{2T^2} \left[\frac{2|T|}{\theta} + \exp\left\{ -\frac{2|T|}{\theta} - 1 \right\} \right]$$

Wykres funkcji $\gamma^{\text{var}}(T)$ od różnej wielkości przedziałów uśrednienia T prezentuje Rysunek 3-7.



Rysunek 3-7 Funkcja redukcji wariancji procesu losowego, odpowiadająca funkcji korelacji typu Markowa ze skalą fluktuacji $\theta = 1.0$

3.4. GENEROWANIE POLA LOSOWEGO PRZY UŻYCIU METODY UŚREDNIEŃ LOKALNYCH

Znajomość wartości średniej oraz struktury korelacyjnej pola losowego stanowi podstawę jego numerycznej symulacji. W praktyce oznacza to dyskretyzację pola losowego w pewnych punktach charakterystycznych i generowanie pewnego skończonego ciągu zmiennych losowych reprezentującego dane pole. Algorytm RFEM zakłada wykorzystanie w tym celu metody dzielenia lokalnych średnich (ang. Local Average Subdivision LAS) zaproponowanej przez Fentona i Vanmarcke' a (Fenton & Vanmarcke, 1990).

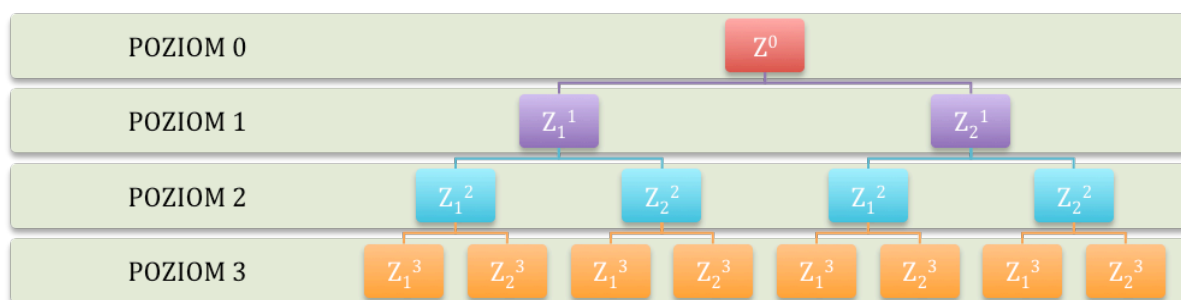
Charakterystyką metody LAS jest szybkość generowania dyskretnych, „lokalnie uśrednionych” procesów losowych. W zamyśle jest ona szczególnie dedykowana inżynierom, którzy w większości przypadków opierają swoją pracę projektową na parametrach uśrednionych. Przykładem może być uśrednienie własności gruntu na obszarze pomiarów. Grunt jest badany w skończonej liczbie punktów, następnie jego właściwości są uśredniane do obszaru inwestycji. Proces uśredniania dotyczy zarówno badań laboratoryjnych (np. aparacie trójosiowego ściskania) jak i terenowych (np.

sondowań CPT). Należy podkreślić, że wariancja uśrednienia jest ściśle związana z wielkością próby (np. obszarem uśrednienia).

Ponadto w zależności od rozkładu parametru, uśrednienie może wpływać również na wartość oczekiwaną. Mowa jest wówczas o efekcie skali. W metodzie lokalnych uśrednień łatwo jest określić wpływ efektu skali na model. Ponadto metoda idealnie współpracuje z metodą elementów skończonych. Każda dyskretna realizacja lokalnego uśrednienia staje się wartością oczekiwaną wewnątrz konkretnego dyskretnego elementu. Jeśli wielkość elementu siatki ulega zmianie, to własności probabilistyczne uśrednienia są odpowiednio odwzorowywane do nowego elementu. To daje możliwość modelowania siatki MES bez utraty „dokładności probabilistycznej”.

3.4.1. JEDNOWYMIAROWA METODA UŚREDNIEŃ LOKALNYCH

Konstrukcja metody opiera się na procesie rekurencyjnym zilustrowanym na Rysunku 3-8. Na poziomie zerowym generowana jest globalna wartość średnia dla całego procesu. Na poziomie pierwszym obszar dzielony jest na dwa podobszary, w których (w każdym z osobna) dokonuje się uśrednienia pola. Nowe uśrednienie musi być odwracalne, tak aby po „powrocie” do poziomu zero otrzymać poprzednią wartość. Procedura jest kontynuowana na kolejnych niższych poziomach. Globalna średnia na każdym z poziomów jest jednakowa i równa tej z poziomu zerowego.



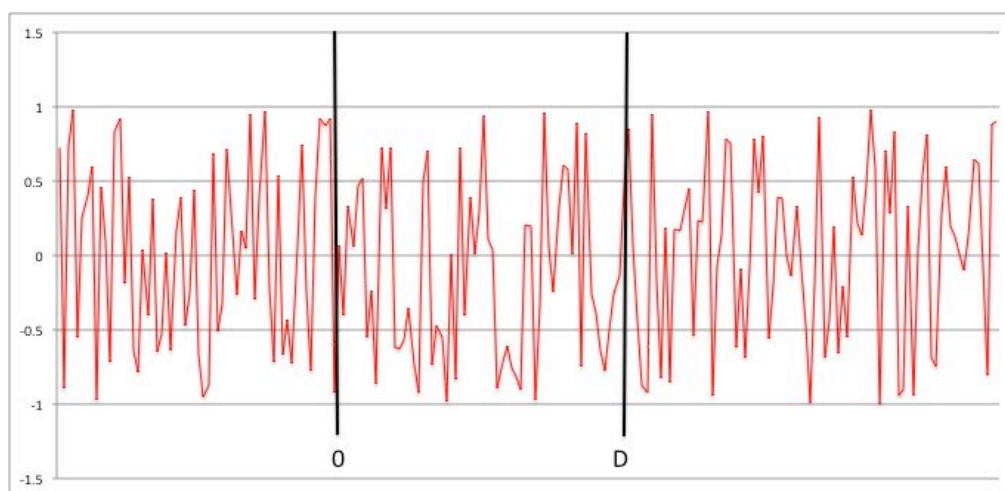
Rysunek 3-8 System rekurencyjny metody uśrednień lokalnych LAS
(System top-down za Fenton & Griffiths, 2008)

Poniżej przedstawiono w punktach algorytm metody LAS na podstawie publikacji Fentona i Griffithsa (2008). Punktem wyjścia algorytmu jest generowanie zmiennych o rozkładzie normalnym, które wtórnie są transformowane dożądanego rozkładu. Procedura generowania zmiennych o rozkładzie normalnym nie będzie opisywana w ramach

niniejszej pracy. Algorytmy temu służące stanowią element klasycznych metod Monte Carlo, szeroko opisanych w dostępnej literaturze (Rubinstein, 1981, Zieliński, 1970).

- 1) Generowanie globalnej średniej o rozkładzie normalnym Z^0 charakteryzującej się wartością średnią (zgodną z rozpatrywanym polem stacjonarnym) i wariancją wynikającą z teorii lokalnych uśrednień (podrozdział 3.3.2)
- 2) Podział obszaru na dwie jednakowe części.
- 3) Generowanie dwóch średnich o rozkładzie normalnym Z_1^1 oraz Z_2^1 , dla których wartości średnie oraz wariancje spełniają kryteria:
 - a) Wariancja zgodna z założeniami teorii uśrednień lokalnych.
 - b) Korelacja zgodna z korelacją w polu.
 - c) Wartość średnia spełniająca zależność: $\frac{1}{2}(Z_1^1 + Z_2^1) = Z_1^0$
- 4) Podział każdego z dwóch poprzednich obszarów na dwa jednakowe podobszary.
- 5) Generowanie kolejnych dwóch zmiennych o rozkładzie normalnym, Z_1^2 oraz Z_2^2 , których średnie i wariancje spełniają następujące kryteria:
 - a) Wariancja zgodna z założeniami teorii uśrednień lokalnych.
 - b) Korelacja zgodna z korelacją w polu oraz ze zmiennymi Z_3^2 oraz Z_4^2
 - c) Wartość średnia spełniająca zależność: $\frac{1}{2}(Z_1^2 + Z_2^2) = Z_1^1$

Podstawą uśrednienia funkcji jednowymiarowej jest określenie obszaru uśrednienia D (np. Rysunek 3-9.)



Rysunek 3-9 Wykres realizacji ciągłej funkcji losowej Z z zaznaczonym przedziałem $(0, D]$

Dla dowolnej funkcji $Z(t)$ na obszarze $(0, D]$ uśrednienie lokalne wyznacza się z równania:

$$(3-44) \quad Z^0 = \frac{1}{D} \int_0^D Z(\xi) d\xi$$

Wartość oczekiwana oraz wariancja powyższej funkcji wynoszą

$$(3-45) \quad E[Z^0] = E[Z]$$

$$(3-46) \quad E[(Z^0)^2] = \frac{1}{D^2} \int_0^D \int_0^D E[Z(\xi)Z(\xi')] d\xi d\xi' \\ = E[Z]^2 + \frac{2}{D^2} \int_0^D (D-\tau) C(\tau) d\tau$$

Powyższe równania są zgodne z prezentowanymi założeniami wynikającymi z procesu lokalnych uśrednień opisanych przez Vanmarcke 'a (1984). Bez utraty ogólności można założyć, że $E[Z]=0$. Jeżeli $Z(t)$ jest gaussowską funkcją losową, to równania (3.46) i (3.47) stanowią wystarczającą informację, aby wygenerować realizację Z_1^0 , co odpowiada pierwszemu punktowi algorytmu LAS.

Konstruując kolejny poziom piramidy lokalnych uśrednień dla funkcji Z_k^i mamy:

$$(3-47) \quad Z_k^i = \frac{1}{D^i} \int_{(k-1)D^i}^{kD^i} Z(\xi) d\xi$$

gdzie $D^i = D/2^i$, $i=1,2,\dots,L$ jest częścią obszaru uśrednienia D . Żądana liczba podprzedziałów w końcowej realizacji wynosi $N = 2^L$. Ponadto Z_k^i jest uśrednieniem funkcji $Z(t)$ na przedziale $(k-1)D^i < kD^i$ o wartości oczekiwanej zgodnej z założeniem: $E[Z_k^i] = E[Z] = 0$

Natomiast kowariancja będzie opisana równaniem:

$$(3-48) \quad E[Z_k^i Z_{k+m}^i] = E \left[\left(\frac{1}{D^i} \int_{(k-1)D^i}^{kD^i} Z(\xi) d\xi \right) \left(\frac{1}{D^i} \int_{(k+m-1)D^i}^{(k+m)D^i} Z(\xi') d\xi' \right) \right] \\ = \int_0^{D^i} \int_0^{D^i} C(\xi - \xi') d\xi d\xi' \\ = \int_0^{D^i} \int_{(m-1)D^i}^{mD^i} C(\xi - \xi') d\xi d\xi' \\ = \int_0^{D^i} \int_0^{(m-1)D^i} C(\xi) d\xi d\xi'$$

Powyższe wyrażenie może być w nietrudny sposób oszacowane za pomowca kwadratur Gaussa.

W obrębie jednego poziomu należy również uwzględnić różnice wartości między średnimi. W tym celu należy wyznaczyć wartość dla i -tego poziomu, a następnie przez dodanie

do wartości średniej generatora białego szumu o zerowej wartości średniej $c^{i+1} U_j^{i+1}$ oraz wariancji $(c^{i+1})^2$ (Mandelbrot i Ness, (1968); Mandelbrot, (1982)) uzyskać wartość na poziomie $i+1$.

$$(3-49) \quad Z_{2j}^{i+1} = M_{2j}^{i+1} + c^{i+1} U_j^{i+1}$$

gdzie M_{2j}^{i+1} jest liniową kombinacją w obrębie poziomu i wartości średnich wszystkich sąsiadów, tj. :

$$(3-50) \quad M_{2j}^{i+1} = \prod_{k=j-n}^{j+n} a_{k-j}^i Z_k^i$$

Wartość średnia wynosi zero natomiast odchylenie standardowe wynosić będzie:

$$(3-51) \quad E[Z_{2j}^{i+1} Z_m^i] = \prod_{k=j-n}^{j+n} a_{k-j}^i E[Z_k^i Z_m^i]$$

Można przyjąć w przybliżeniu $U_j^{i+1} \sim N(0,1)$. Natomiast wariancja $(c^{i+1})^2$ zostanie wyrażona przez:

$$(3-52) \quad (c^{i+1})^2 = E[(Z_{2j}^{i+1})^2] = \prod_{k=j-n}^{j+n} a_{k-j}^i E[Z_{2j}^{i+1} Z_k^i]$$

Na badanym poziomie $i+1$ przyległa do Z_{2j}^{i+1} komórka Z_{2j-1}^{i+1} jest opisana przez równanie:

$$(3-53) \quad Z_{2j-1}^{i+1} = 2Z_j^i - Z_{2j}^{i+1}$$

Schemat pokazano na Rysunku 3-10:

	i		i+1		
	2j-1	2j	2j+1	2j+2	

Rysunek 3-10 Podział wartości w komórkach dwóch kolejnych rzędów

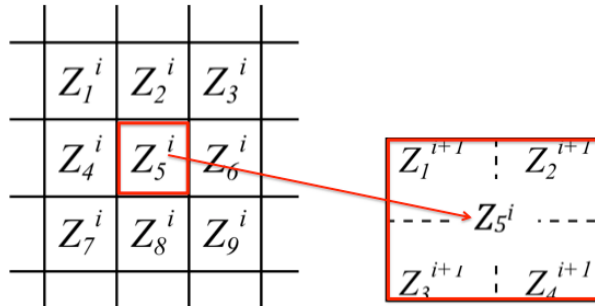
Metodę można zastosować do dowolnej wielkości siatki. Istotną cechą systemu jest grupowanie cech pola. Podział wewnętrzny jest tak opisany matematycznie aby możliwe było ich scalanie (Rysunek 3-10).

3.4.2. DWUWYMIAROWA METODA UŚREDNIEŃ LOKALNYCH

W przypadku dwuwymiarowym każda komórka Z_i^i na poziomie i jest dzielona na cztery komórki jednakowego rozmiaru. Schematycznie przedstawiono to na Rysunek 3-11, gdzie

komórka oznaczona jako Z_l^i , $l=1,2,\dots$, zostaje podzielona na cztery komórki oznaczonej Z_j^{i+1} , $j=1,2,\dots$. Analogicznie dzielone są pozostałe komórki poziomu.

W notacji wektorowej otrzymujemy wektor kolumnowy $Z^{i+1} = \{Z_1^{i+1}, Z_2^{i+1}, Z_3^{i+1}, Z_4^{i+1}\}^T$ o czterech składowych, powstały poprzez dodanie „składnika losowego” oraz „składnika średniego”. Ten drugi jest kombinacją liniową komórek otaczających Z_5^i (otoczenie o wymiarze 3×3 definiowane jest przez $Z^i = \{Z_1^i, \dots, Z_9^i\}^T$. (patrz. Rysunek 3-11).



Rysunek 3-11 Lokalne uśrednienie poprzez podział wewnętrzny w dwóch kierunkach

Procedurę, wyznaczenia wartości wektora Z^{i+1} , można zapisać następującym wzorem:

$$(3-54) \quad Z^{i+1} = A^T Z^i + LU$$

gdzie, U jest wektorem losowym z niezależnymi składnikami o rozkładzie $N(0,1)$. Macierz A wyznacza się z zależności:

$$(3-55) \quad A = R^{-1}S$$

gdzie R i S są następującymi macierzami kowariancji:

$$(3-56) \quad R = E[Z^i Z^{iT}]$$

$$(3-57) \quad S = E[Z^i Z^{i+1T}]$$

Zauważmy, że macierze R i S mają wymiary odpowiednio 9×9 oraz 9×4 . Stąd A ma wymiar 9×4 , zaś A^T wymiar 4×9 . W rezultacie iloczyn $A^T Z^i$ we wzorze (3-54) jest wektorem kolumnowym o czterech składowych. Natomiast L jest macierzą dolno – trójkątną wyznaczoną z równania:

$$(3-58) \quad LL^T = B - S^T A,$$

przy czym

$$(3-59) \quad B = E[Z^{i+1}Z^{i+1T}]$$

Macierze kowariancji R , S i B mogą być obliczone jako kowariancja lokalnych uśrednień, przy czym obszarami uśrednienia są obszary komórek poziomu i . Wydaje się jednak, że prościej jest je obliczyć stosując kwadratury Gaussa oraz funkcję korelacji w rozpatrywanym polu.

Po rozpisaniu równania (3-54) na poszczególne współrzędne otrzymujemy:

$$(3-60) \quad Z_1^{i+1} = \prod_{l=1}^9 A_{1l} Z_l^i + L_{11} U_1$$

$$(3-61) \quad Z_2^{i+1} = \prod_{l=1}^9 A_{2l} Z_l^i + L_{21} U_1 + L_{22} U_2$$

$$(3-62) \quad Z_3^{i+1} = \prod_{l=1}^9 A_{3l} Z_l^i + L_{31} U_1 + L_{32} U_2 + L_{33} U_3$$

$$(3-63) \quad Z_4^{i+1} = 4Z_5^i - Z_1^{i+1} - Z_2^{i+1} - Z_3^{i+1}$$

przy czym U_1 , U_2 i U_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym.

3.5. UWAGI DO ROZDZIAŁU

W rozdziale tym podano wybrane zagadnienia teorii pól losowych wykorzystywane w losowej metodzie pól losowych. Omawiane zagadnienia zostały podane w sposób wybiórczy, ukierunkowany na wyjaśnienie kwestii ściśle związanych z analizowaną metodą. Obszerniejszy opisy można znaleźć w literaturze, np. (Box & Jenkins, 1983); (Vanmarcke E., 1983); (Wilde P., 1977); (Fenton & Griffiths, 2008).

Jak wskazano, pole losowe jest scharakteryzowane przez rodziny rozkładów skończenie wymiarowych. W uproszczeniu posłużono się jedynie tzw. charakterystykami drugiego rzędu, tj. wartością średnią, odchyleniem standardowym oraz funkcją kowariancji lub korelacji. Dla losowej metody elementów skończonych szczególne znaczenie mają lokalne uśrednienia, które prowadzą do powstania nowego pola losowego, scharakteryzowanego przez funkcję wariancji (funkcję redukcji wariancji).

W efekcie uśrednione odchylenie standardowe na powierzchni elementu wyrażone jest iloczynem odchylenia nieuśrednionego (punktowego) oraz pierwiastka funkcji redukcji wariancji. Ma to szczególne znaczenie w sytuacji opisu zmiennych losowych w innym niż naturalny rozkładzie prawdopodobieństwa. Wówczas istnieje konieczność zastosowania

transformacji, która wpływa zarówno na wartość średnią jak i pozostałe charakterystyki pola. Przykład takiej transformacji podano w rozdziale 5, poświęconym probabilistycznym opisom parametrów podłoża.

4. ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO ANALIZY NOŚNOŚCI FUNDAMENTU ALGORYTMEM RFEM

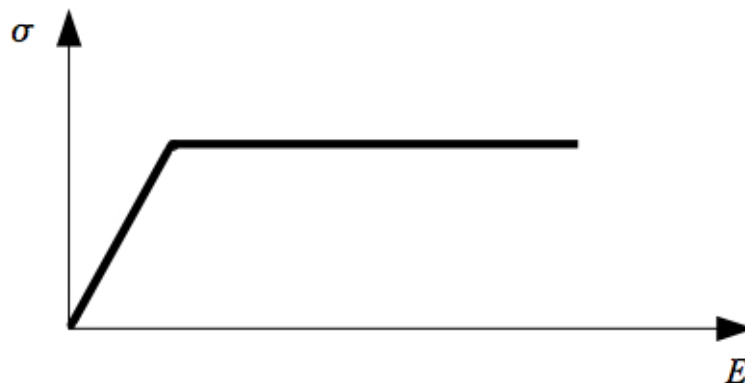
Metoda elementów skończonych jest dziś nieodłącznym elementem analizy różnego typu konstrukcji inżynierskich, takich jak samoloty, statki kosmiczne czy platformy wiertnicze, a także konstrukcje budowlane. Z matematycznego punktu widzenia, stanowi ona jeden z algorytmów rozwiązywania zagadnień brzegowych. Za pionierską, uważa się pracę Couranta (1942). Jednak aplikacyjny rozwój metody przypada na lata sześćdziesiąte dwudziestego wieku, kiedy zaczęto wykorzystywać MES do analiz inżynierskich (Zienkiewicz, 1972; Smith, 1982). Metodę stworzono z myślą o inżynierii mechanicznej. Ponieważ metoda bardzo dobrze się sprawdziła, szybko zaadoptowano ją do innych dziedzin inżynierskich. Wraz z rozwojem procesorów i komputerów osobistych rozwijał się rynek oprogramowania bazującego na MES. Wiązało się to z koniecznością zapewnienia odpowiedniej mocy obliczeniowej, która decyduje o efektywności obliczeń za pomocą tej metody. Metoda elementów skończonych jest od lat z powodzeniem stosowana w różnych zagadnieniach geotechniki, w szczególności w różnego typu konstrukcjach współpracujących z gruntem.

W losowej metodzie elementów skończonych w pierwszej kolejności generowane jest pole losowe reprezentujące określoną cechę analizowanego podłoża grunt. Następnie pole jest dyskretyzowane do siatki elementów skończonych, do czego stosuje się metodę lokalnych uśrednień (Vanmarcke, 1983), opisaną w rozdziale 3. Kolejnym krokiem jest zasadnicza faza obliczeniowa, w której stosowana jest właśnie metoda elementów skończonych (Smith & Griffiths, 2004), w celu obliczenia odpowiedzi układu. Wielokrotne powtórzenie dla kolejnych realizacji pola prowadzi do uzyskania zbioru wyników, które poddaje się

obróbce statystycznej, uzyskując rezultaty w postaci wartości średniej, wariancji, wyższych momentów statystycznych. W przypadku dużej liczby realizacji możliwa jest estymacja rozkładu prawdopodobieństwa.

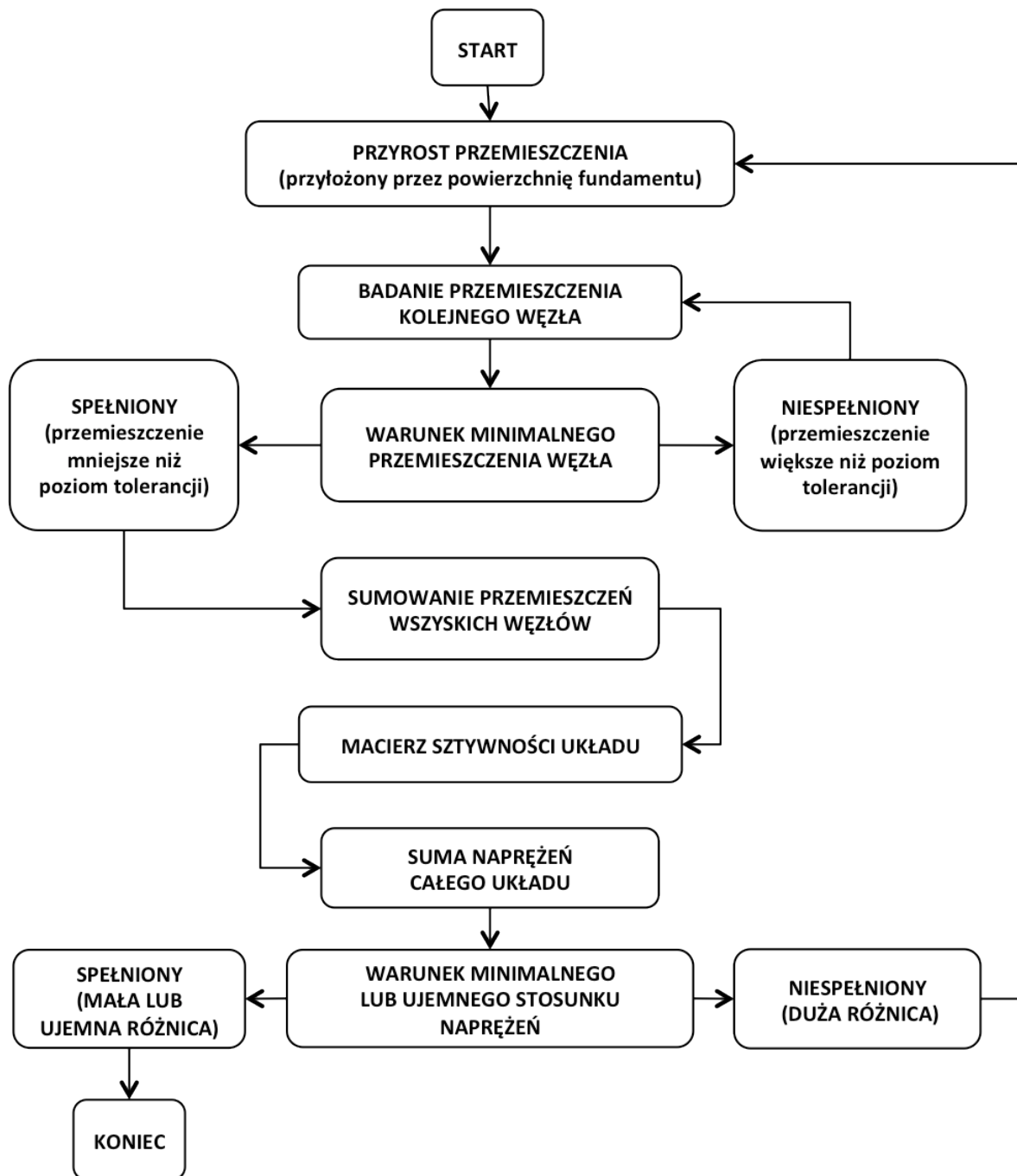
4.1. WPROWADZENIE DO ALGORYTMU MES DLA RFEM

Standardowo algorytm obliczeń metodą elementów skończonych rozpoczyna się od sformułowania globalnej macierzy sztywności zależnej od przyjętego modelu konstytutywnego. Przedmiotem niniejszej pracy jest nośność graniczna podłoża, obciążonego sztywnym fundamentem. W tym celu przyjęto model podłoża sprężysto-idealnie plastyczny z kryterium Coulomba – Mohra (Izbicki & Mróz, 1976; Pietruszczak, 2010), którego charakterystykę schematycznie pokazuje Rysunek 4-1. Bieżące zadanie realizowano w płaskim stanie odkształcenia.



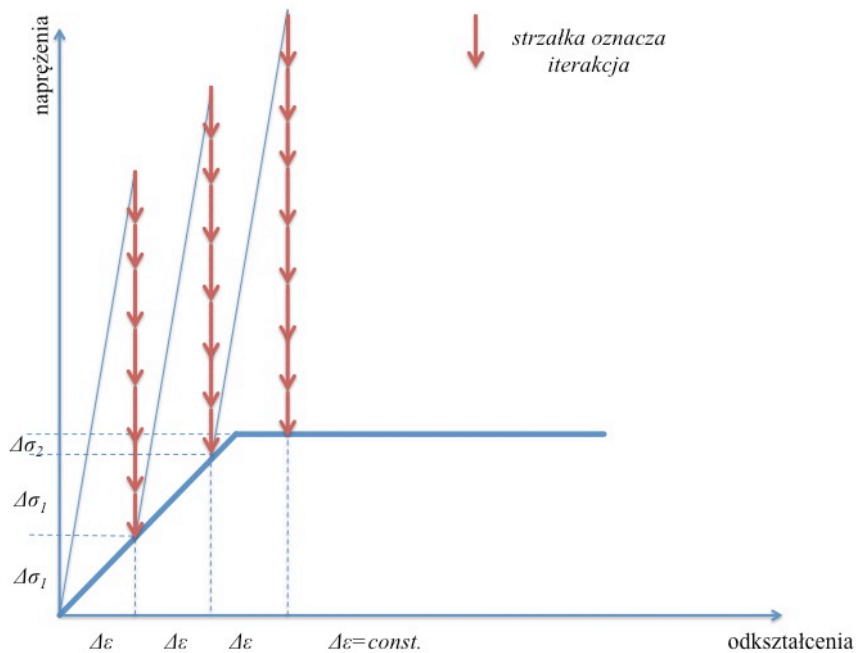
Rysunek 4-1 Model ciała sprężysto – idealnie plastycznego

Podstawowy kod źródłowy MES do analizy nośności granicznej podłoża (z pominięciem ciężaru własnego oraz zagłębienia fundamentu) można znaleźć na przykład w pracy Smitha i Griffithsa (2004) oraz na stronie Griffithsa i Fentona dotyczącej RFEM. Algorytm opisujący przebieg pojedynczej realizacji, czyli sytuacji osiągnięcia przez układ stanu granicznego, przedstawiono schematycznie na Rysunku 4-2.



Rysunek 4-2 Schemat blokowy algorytmu MES dla analizy stanu granicznego nośności

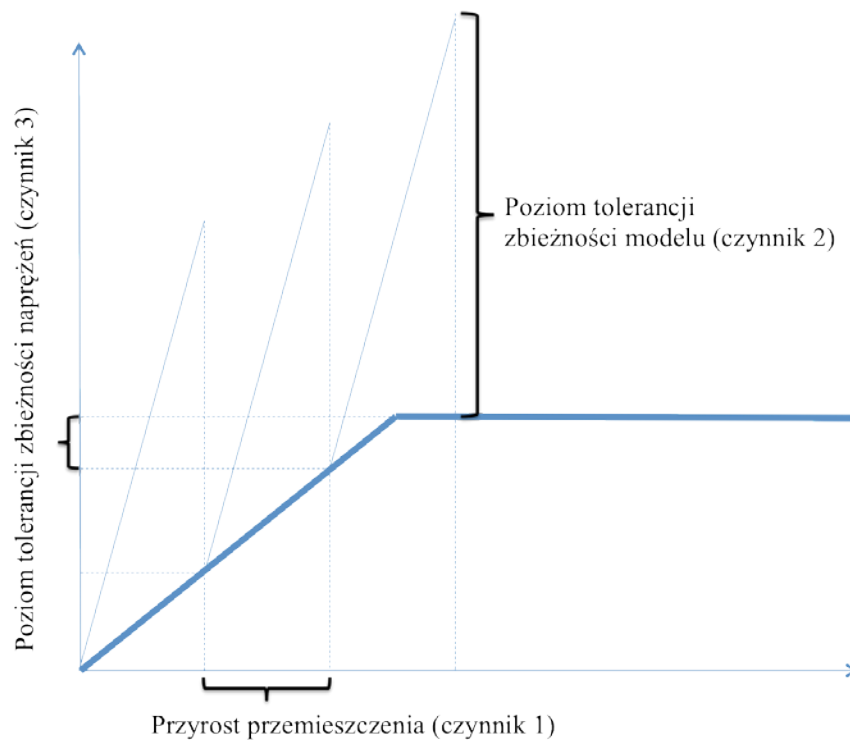
Powyższy schemat blokowy obrazuje Rysunek 4-3, na którym na osi poziomej widać kolejne kroki przemieszczenia przykładane, przez powierzchnię fundamentu, do modelowanego podłoża. Osiągnięcie krzywej modelu następuje w drodze iteracji, polegającej na badaniu przemieszczeń kolejnych węzłów w układzie. W efekcie szacowana jest wartość naprężeń sumy iteracji, a w końcu wartość graniczna opór dla całego układu.



Rysunek 4-3 Obciążanie modelu sprężysto – idealnie plastycznego stałym przemieszczeniem

Przykładane kroki przemieszczenia dotyczą całego układu (całej siatki elementów skończonych). Na poziomie pojedynczego elementu i węzła analizuje się przyrosty odkształceń. Sprawdzany warunek dotyczący przemieszczenia węzła może doprowadzić do zatrzymania iteracji i sumowania wszystkich przemieszczeń w układzie. Dalej na podstawie macierzy sztywności z przemieszczeń wyznacza się naprężenia, które są dodawane do wartości uzyskanych w poprzedniej iteracji. Tu sprawdzane jest kolejny warunek – minimalnej różnicy naprężeń. Niespełnienie warunku powoduje przeliczenie uzyskanych naprężeń na odkształcenia i dodanie kolejnego kroku przemieszczenia. Przyrosty są przykładane do momentu osiągnięcia stabilizacji na poziomie zadanego modelu konstytutywnego, czyli spełnienia warunku minimalnej różnicy naprężeń. Wówczas zatrzymywany jest proces obserwacji zwany realizacją.

W pliku wejściowym definiowane są następujące wielkości: przyrost przemieszczenia pionowego, poziom tolerancji zbieżności algorytmu obliczeniowego MES z założonym teoretycznym modelem konstytutywnym oraz poziom tolerancji zbieżności dla szacowanej nośności. Są to wielkości odpowiedzialne za przebieg obliczeń oraz liczby iteracji w obrębie pojedynczej realizacji. Ich wpływ na prowadzone obliczenia w odniesieniu do konstytutywnego modelu ilustruje Rysunek 4-4.



Rysunek 4-4 Zadane parametry MES w odniesieniu do modelu sprężysto – idealnie – plastycznego

Przyrost przemieszczenia to wielkość, o jaką fundament przemieszcza się w modelowany grunt. Powinien być na tyle mały, aby nie przeoczyć poszukiwanej wartości nośności, jednak nie za mały, aby liczba kroków iteracyjnych nie była nadmierna. Wielkość tę dobiera się empirycznie, przez prowadzenie analizy deterministycznej, tak aby osiągnąć stan graniczny możliwie w 10 krokach. Powyższa wielkość powinna odpowiadać dziesięciu przedziałom na osi poziomej odkształcenia, w której osiągnana jest granica plastyczności modelu.

Druga wielkość, czyli poziom tolerancji zbieżności do granicy plastyczności to wartość przemieszczenia o jakie minimalnie musi przemieścić się węzeł. Jeżeli w trakcie kolejnej iteracji węzeł ulega względnej zmianie mniejszej niż zadany poziom tolerancji, przyjmuje się, że osiągnął równowagę i zatrzymuje się iteracje.

Ostatnia wielkość, czyli tolerancja zbieżności dla szacowanej nośności, określa minimalną względną różnicę między sumą sił w kolejnych krokach przemieszczenia. Jeżeli wartość graniczna nośności, poniżej poziomu posadowienia, zmienia się względnie z jednej iteracji na drugą mniej niż zakładana poziom tolerancji lub zaczyna spadać uznaje się że nośność jest osiągnięta i kroki przemieszczenia są wstrzymywane.

4.1.1. DOBÓR WIELKOŚCI SIATKI MES

Jednym z problemów obliczeniowych, przy użyciu metody elementów skończonych jest zastosowanie poprawnego podziału. Wyniki uzyskane tą metodą są uzależnione od wielkości: siatki jak i pojedynczego elementu. W analizie geotechnicznej należy wykazać się pewnym doświadczeniem przy doborze wielkości siatki oraz elementu.

Na wstępie poniższej pracy przyjęto siatkę zaproponowaną w pracy (Griffiths i Fenton, 2001). Dzięki temu możliwe było odniesienie wyników uzyskanych przez autorkę do tych publikowanych w powyższej pracy. Tym samym w rozdziałach 6, 7 i 8 zastosowano siatkę złożoną z kwadratowych elementów ośmiowęzłowych. Siatka składała się z 50 elementów w kierunku poziomym i 20 elementów w kierunku pionowym, jak pokazano to na Rysunku 4-5. Kryterium doboru siatki stanowiło najlepsze dopasowanie wartości uzyskanej z MES do wartości analitycznej (2-5).

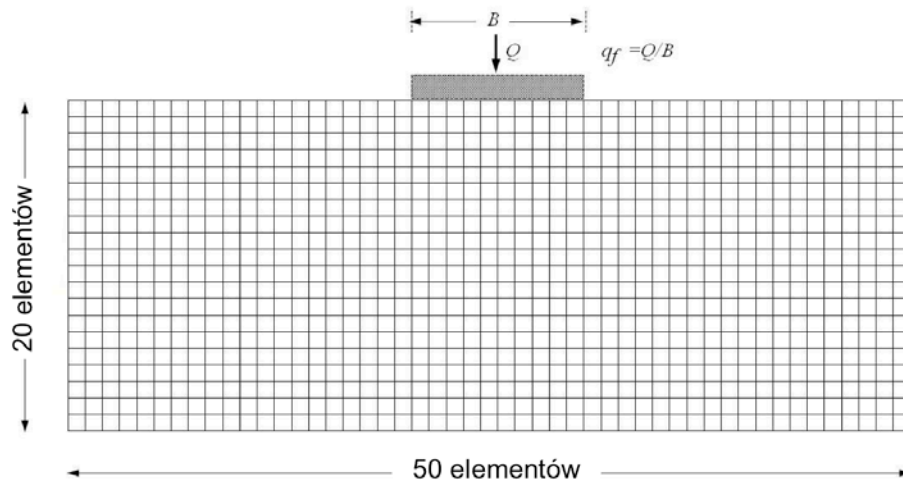
Dla rozbudowanego algorytmu obliczeniowego autorka ponownie dokonała sprawdzenia wielkości siatki, co dokładniej zostało opisane w punkcie 9.2 poniższej rozprawy.

4.1.2. DOBÓR WIELKOŚCI ELEMENTU SIATKI MES

Z punktu widzenia analiz MES kolejnym ważnym czynnikiem jest wielkość pojedynczego elementu w siatce. Jest to szczególnie ważne ze względu na algorytm metody RFEM o czym będzie mowa w rozdziale 5. Dla potrzeb rozdziałów 6, 7 i 8 przyjęto element o wymiarze 0.1 x 0.1m. W podrozdziale 9.2. autorka dokonała sprawdzenia zagadnienia dla rozbudowanego algorytmu.

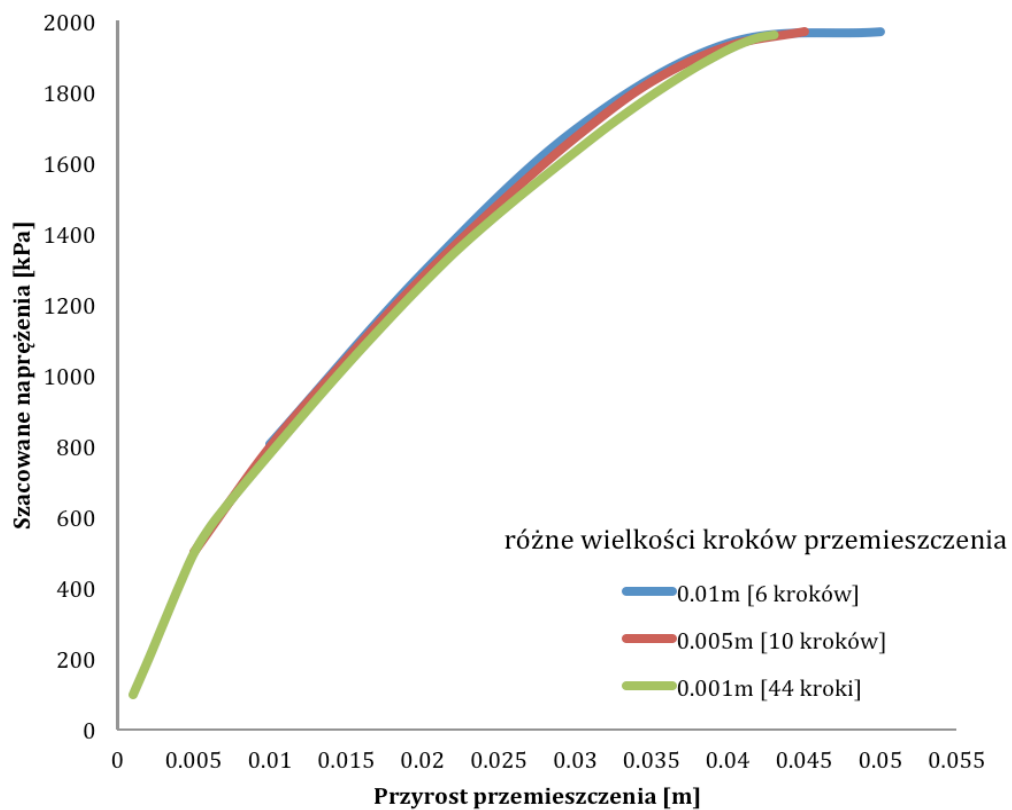
4.1.3. DOŚWIADCZALNE OKREŚLENIE POZIOMÓW TOLERACJI I LICZBY KROKÓW PRZEMIESZCZENIA

W poniższym podpunkcie przedstawiono na przykładzie numerycznym jak założony krok przyrostu przemieszczenia oraz zadane poziomy tolerancji mogą wpływać na wartość oporu, wyznaczoną metodą elementów skończonych. W zadaniu przyjęto siatkę (Rysunek 4-5) oraz parametry podłoża proponowane przez Fentona i Griffithsa w pracy z 2003 roku.



Rysunek 4-5 Przyjęta siatka MES

Rozpoczęto od doboru wielkości kroku przemieszczenia (czynnik 1 na Rysunku 4-4). W tym celu wykonano serię obliczeń, w których zmienianym parametrem był właśnie przyrost przemieszczenia. Na Rysunku 4-6 przedstawiono wykres szacowanej nośności w zależności od wielkości kroku. Widać na nim jak poszczególne krzywe – odpowiadające różnym wielkością zadanego przemieszczenia, dopasowują się do założonego modelu konstytutywnego.



Rysunek 4-6 Szacowane naprężenie w funkcji przemieszczenia dla różnych wielkości kroków przemieszczenia

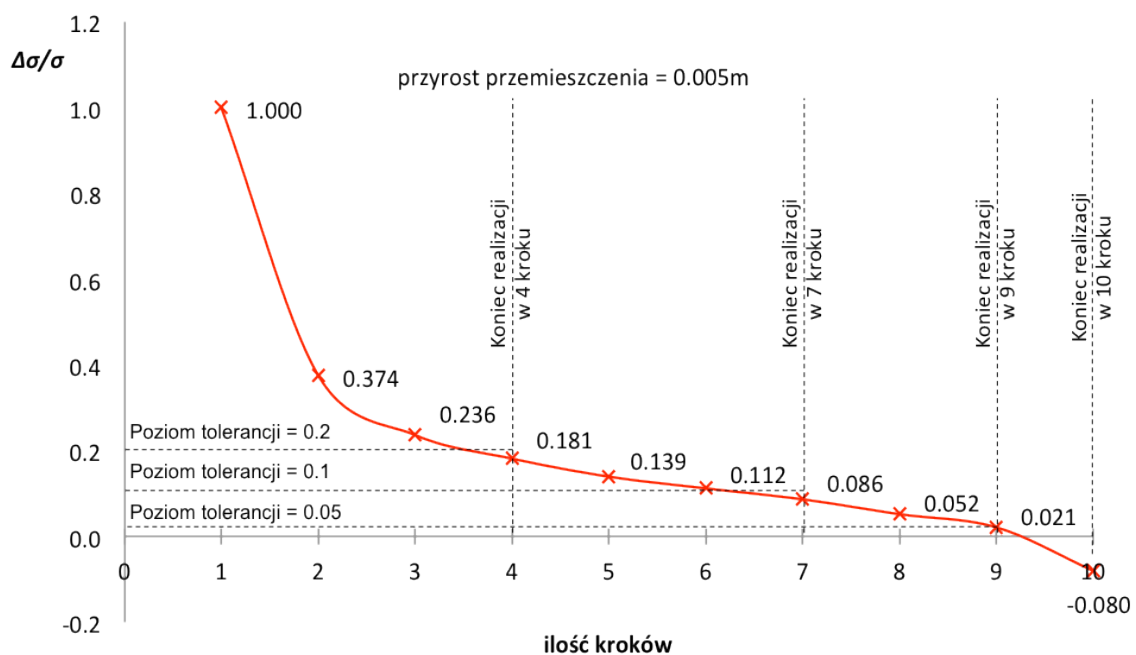
Niezależnie od przyjętego przyrostu w części sprężystej krzywe są do siebie bardzo zbliżone i stabilizują się w przybliżeniu na jednakowej wartości, odpowiadającej uplastycznieniu, co pokazano w Tabeli 4-1.

Tabela 4-1 Wartość maksymalnych naprężeń w zależności od przyjętego kroku przemieszczenia

Zadany krok przemieszczenia [m]	0.001	0.005	0.01
ilość kroków	44	10	6
wartość maksymalna naprężeń [kPa]	1959.5	1969.4	1968.4
przemieszczenie odpowiadające uplastycznieniu gruntu [m]	0.043	0.045	0.05

Wielkość kroku zasadniczo odpowiada za czas obliczeń potrzebny na doprowadzenie gruntu do stanu plastycznego. Tym samym przyjmowanie zbyt małych przyrostów przemieszczenia (0.001m) nie jest uzasadnione. Zdaniem twórców algorytmu, optymalną liczbą przyrostów jest 10, które dla siatki z Rysunku 4-6 zostało osiągnięte dla kroku równego 0,005m.

Przykładanie kolejnych przemieszczeń jest przerywane gdy stosunek przyrostu naprężenia (w stosunku do kroku poprzedniego) do naprężenia uzyskanego w danym kroku jest mniejszy niż zadany poziom tolerancji lub osiągnie wartość ujemną. Obserwując krzywą modelu, na Rysunku 4-4, zadawanym poziomem tolerancji zbieżności naprężeń jest czynnik 2. Poniżej, na Rysunku 4-7, przedstawiono wartość wspomnianego stosunku naprężenia w kolejnych krokach przemieszczenia, każdy równy 0.005m.



Rysunek 4-7 Zbieżność naprężenia zależna od kroków przemieszczenia

Jak widać na Rysunku 4-7, założenie określonego poziomu tolerancji powoduje zatrzymanie realizacji w różnych krokach. Przyjęcie tolerancji zbieżności równej 0.2 zatrzyma realizację po czwartym kroku, a tolerancja na poziomie 0.05 w dziewiątym. Poziom tolerancji wpływa na dokładność oszacowania wartości naprężenia odpowiadającej uplastycznieniu. Im mniejszy poziom tolerancji tym dokładniejszy wynik. Jednocześnie należy zauważyć, że przyjęcie kroku mniejszego niż 0.05 nie jest rejestrowane przez układ, gdyż w kroku dziesiątym stosunek naprężeń daje wynik ujemny. Tym samym radykalne zmniejszenie poziomu dokładności nie prowadzi do istotnego wzrostu dokładności oszacowania oporu.

Trzecia definiowana wielkość związana jest z liczbą iteracji w obrębie pojedynczego kroku przemieszczenia (warunek najmniejszego przemieszczenia węzła na schemacie blokowym, Rysunek 4-2). Odpowiada ona za dopasowanie szacowanej wartości oporu z krzywą teoretyczną modelu (czynnik 3 na Rysunku 4-4). Poniżej zestawiono w Tabeli 4-2, wyniki dla czterech różnych poziomów tolerancji zbieżności modelu. Wynika z niej, że przyjmując duży poziom tolerancji, program wykona mniej powtórzeń w pętli elementu (Rysunek 4-2), w celu ustabilizowania układu. Tym samym oszacowana wartość oporu może być znacznie większa od modelowej, co ilustruje Tabela 4-2.

Tabela 4-2 Wartość nośności przy zmiennym poziomie tolerancji zbieżności do modelu

Zadany poziom tolerancji zbieżności do modelu	0.001		0.005		0.01		0.05	
Przemieszczenia	Naprężenie	iteracje	Naprężenie	iteracje	Naprężenie	iteracje	Naprężenie	iteracje
0.005	499.7	15	501	7	500.8	5	496.7	2
0.01	798.8	32	809.2	17	818.1	12	862.9	4
0.015	1045.7	37	1056.9	20	1068.6	14	1131	5
0.02	1277.1	41	1290.1	21	1301.3	15	1366	6
0.025	1483.6	47	1499.2	22	1511.6	16	1587.5	6
0.03	1670.6	52	1689.5	25	1707.7	17	1782.6	7
0.035	1828.4	58	1851.2	27	1873.8	18	1982	6
0.04	1928.2	59	1953.3	27	1984.2	17	2101.5	7
0.045	1969.4	47	2000.1	24	2030.1	17	2215.5	6
0.05	1823.1	169	1997.8	25	2033.7	18	2240.6	7
0.055					2028.4	18	2260	7
0.06							2271.2	7
0.065							2240	8

Na podstawie wyników zawartych w Tabeli 4-2, dla bezpiecznego oszacowania nośności posadowienia bezpośredniego należałoby przyjmować możliwie mały poziom tolerancji.

Jak widać, dobór parametrów MES jest istotny ponieważ wpływa na dokładności uzyskanych wyników. Do dalszych obliczeń autorka przyjęła krok przemieszczenia 0.005m (co daje 10 kroków obliczeniowych dla siatki 50 x 20 elementów) oraz oba poziomy tolerancji zbieżności równe 0.001.

5. SPOSÓB OPISU ZMIENNOŚCI LOSOWEJ PARAMETRÓW PODŁOŻA STOSOWANY W RAMACH RFEM

W analizie oporu granicznego, prowadzonej w ramach niniejszego studium, wielkościami przyjętymi jako losowo zmienne są wytrzymałościowe parametry podłoża: spójność oraz kąt tarcia wewnętrznego. Każda z tych wielkości charakteryzowana jest przez dwuwymiarowe stacjonarne pole losowe o wartości średniej μ_x , odchyleniu standardowym σ_x oraz strukturze korelacyjnej typu Markowa (patrz. rozdział 3). Ważnym elementem są rozkłady prawdopodobieństwa poszczególnych właściwości. W przypadku stosowania rozkładów absolutnie ciągłych pełną charakteryzację uzyskuje się przez podanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Najczęściej wykres gęstości rozkładu ma kształt dzwonowaty (jednomodelowy), co oznacza, że przedziały zmienności koncentrują się wokół pewnej wartości centralnej. Przykładowo w rozkładzie normalnym wartością centralną jest wartość średnia (oczekiwana), podczas gdy w rozkładzie lognormalnym jest to dominanta (moda), czyli wartość „najbardziej prawdopodobna”. Niewątpliwie największą popularnością cieszy się rozkład normalny, co podyktowane jest głównie łatwością prowadzenia obliczeń. Ponadto istnieją efektywne generatory liczb pseudolosowych dla tego rozkładu, co sprzyja symulacjom metodą Monte Carlo. Rozkład lognormalny, skoncentrowany na półprostej dodatniej, bywa w niektórych przypadkach lepszy ze względu na brak wartości ujemnych. W metodzie Monte Carlo jest generowany za pomocą generatorów rozkładu normalnego, poprzez zastosowanie transformacji $X=e^Y$, (gdzie zmienna Y jest opisana rozkładem normalnym) otrzymuje się zmienną X (z definicji) mającą rozkład lognormalny. Rodzaj rozkładu powinien być adekwatny do własności opisywanego parametru. W przypadku kąta tarcia wewnętrznego, analizowanego dla gruntu naturalnego, istotna jest jego minimalna i maksymalna wartość. W związku z tym niektórzy badacze proponują zastosowanie rozkładu beta (Lumb, 1970), który jest rozkładem o ograniczonym nośniku, co pozwala na dobór odpowiednich granic

zmienności. Stosowanie tego rozkładu umożliwi dobór różnorodnych kształtów funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Innym rozkładem o nośniku ograniczonym jest rozkład zaproponowany przez Fentona i Griffithsa dla kąta tarcia wewnętrznego (m.in. Griffiths i Fenton, 2001; Fenton i Griffiths, 2003; Fenton i Griffiths, 2008). Można go uzyskać z rozkładu normalnego poprzez zastosowanie transformacji typu tangens hiperboliczny. Szczegółowa charakterystyka tego rozkładu będzie podana w dalszej części poniższego rozdziału.

Kwintesencją wieloletnich badań różnych badaczy, w dziedzinie probabilistycznego opisu parametrów podłoża, może być tabelaryczne zestawienie wybranych cech gruntu (Puła, 2004), istotnych z punktu widzenia rozpatrywanego zadania, wraz z informacją o rozkładach prawdopodobieństwa oraz współczynnikach zmienności (Tabela 5-1 i Tabela 5-2). W strefie zainteresowań badaczy znalazła się wąska grupa rozkładów, co wyniknęło z konieczności badań na dużej próbie statystycznej oraz braku możliwości określenia rozkładu prawdopodobieństwa na podstawie przyjętego modelu podłoża.

Tabela 5-1 Rozkłady prawdopodobieństwa dla kąta tarcia wewnętrznego lub tangensa kąta tarcia wewnętrznego(za Puła, 2004)

Parametr podłoża	Współczynnik zmienności	Źródło literaturowe	Rozkład prawdopodobieństwa	Źródło literaturowe
Kąt tarcia wewnętrznego w gruntach niespoistych	0.05-0.15	Singh (1972), Holtz i Krizek (1972), Schultze (1972,1975), Ingles (1980), Biernatowski (1981), Kulhawy (1992), Cherubini et al. (1993), Meyerhof (1993,1995), Becker (1996).	Normalny	Lumb (1966)
			Lognormalny	Wu i Kraft (1967) Schultze(1972,1975) Biernatowski(1966a) McAnally (1983)
Tangens kąta tarcia wewnętrznego o w gruntach niespoistych	0.07-0.15	Lumb (1966)	Normalny	Lumb (1966)
		Schultze (1972, 1975) Alonso (1976) McAnally (1983) Kulhawy et al. (1991)	Lognormalny	Schultze(1972,1975)
Kąt tarcia wewnętrznego o w gruntach spoistych	0.1-0.56	Schultze (1972, 1975)	Normalny	Lumb (1966, 1970)
		Singh (1972), Biernatowski (1981), Kulhawy (1992), Cherubini et al. (1993), Meyerhof (1993,1995), Becker (1996).	Beta	Lumb (1970)
Tangens kąta tarcia wewnętrznego o w gruntach spoistych	0.15	Lumb (1966)	Normalny	Lumb (1966,1970)
			Beta	Lumb (1970)
			Lognormalny	Oboni i Bourdeau (1983) Biernatowski (1966a)
			Jednostajny	Forster i Weber (1982)

Tabela 5-2 Rozkłady prawdopodobieństwa innych parametrów istotnych dla analizy nośności granicznej podłoża (za Puła, 2004)

Parametr podłoża	Współczynnik zmienności	Źródło literaturowe	Rozkład prawdopodobieństwa	Źródło literaturowe
Spójność	0.05-0.85	Lumb (1966)	Normalny	Lumb (1966)
		Biernatowski (1966) Fredlund i Dahlan (1972) Grolmund i Recordon (1972)	Lognormalny	Biernatowski (1966a, 1972) Wu i Kraft (1967)
		Schultze (1975) Alonso (1976) Bagheri i Magnan (1983)	Beta	Lumb (1970) Oboni i Bourdeau (1983)
Ciężar objętościowy	0.01-0.16	Ingles (1980), Biernatowski (1981), Kulhawy et al. (1992) Cherubini et al. (1993) Meyerhof (1993, 1995) Becker (1996)	Jednostajny	Forster i Weber (1982)
		Corotis et al. (1975) Evangelista et al. (1975) Ingles (1980) Biernatowski (1981)	Normalny	Evangelista et al. (1975) McAnally (1983) Schultze (1972) Bagheri i Magman (1983)
		Bagheri i Magnan (1983) Freund i Krahn (1983) Kulhawy (1992) Cherubini et al. (1993) Przewłocki (1998)	Beta Lognormalny	Evangelista et al. (1975) Bagheri i Magman (1983) Biernatowski (1966b) Evangelista et al. (1975)

5.1. TYPY ROZKŁADÓW ZASTOSOWANE W RFEM

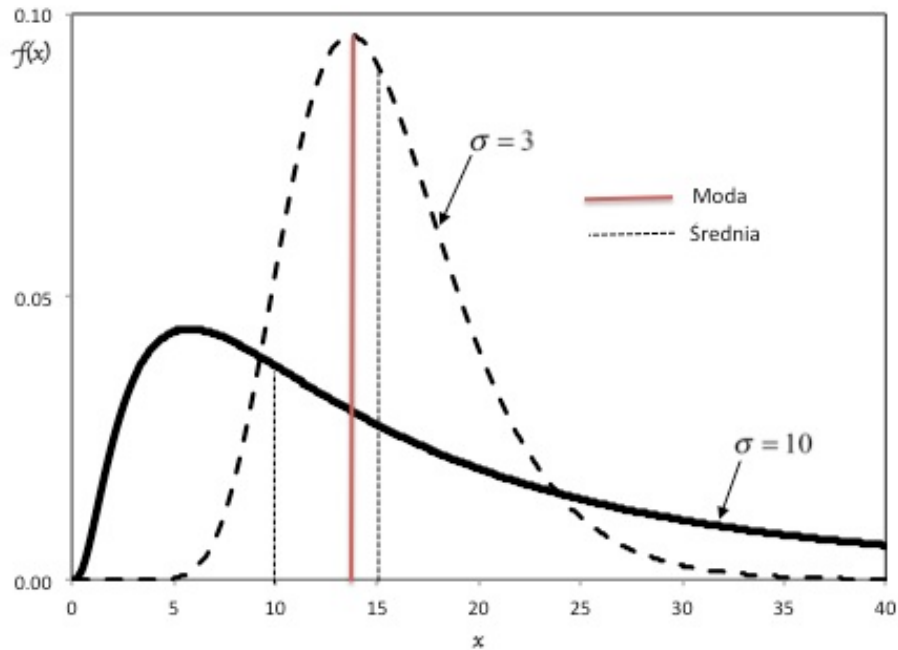
5.1.1. ROZKŁAD LOGNORMALNY

W dalszej części pracy przyjmuje się, że pole losowe spójności jest lognormalne. Oznacza to, że jednowymiarowe rozkłady dla tego pola będą rozkładami lognormalnymi. Takie rozkłady zaproponowali twórcy RFEM (Fenton i Griffiths, 2008). Jest to również zgodne z wnioskami z prac, np. Biernatowskiego (1966a, 1972) oraz Wu i Karfta, (1967). Funkcja gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu ma postać:

$$(5-1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma_{\ln x}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x - \mu_{\ln x}}{\sigma_{\ln x}}\right]^2\right\} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Jak już wcześniej nadmieniono rozkład lognormalny otrzymuje się z rozkładu normalnego poprzez zastosowanie transformacji typu eksponent. Jeśli przyjmiemy, że X jest zmienną losową o rozkładzie lognormalnym, to $Y = \ln X$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Rozkład normalny Y jest często nazywany podstawowym względem rozkładu

lognormalnego X albo rozkładem normalnym odpowiadającym rozkładowi lognormalnemu X . Przykładowe wykresy funkcji gęstości rozkładu lognormalnego prezentuje Rysunek 5-1.



Rysunek 5-1 Wykres gęstości prawdopodobieństwa rozkładu lognormalnego

Parametrami rozkładu lognormalnego X o gęstości danej wzorem (5-1) są $\mu_{\ln X}$ oraz $\sigma_{\ln X}$, będące odpowiednio wartością oczekiwaną oraz wariancją rozkładu normalnego $Y=\ln X$ podstawowego względem rozkładu X , czyli:

$$(5-2) \quad \mu_{\ln X} = E[\ln X]$$

$$(5-3) \quad \sigma_{\ln X}^2 = \text{VAR}[\ln X],$$

Natomiast wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu lognormalnego można obliczyć poprzez całkowanie funkcji X oraz X^2 względem gęstości (5-1). W wyniku tego całkowania otrzymuje się:

$$(5-4) \quad \mu_X = E[X] = \exp\left(\mu_{\ln X} + \frac{1}{2}\sigma_{\ln X}^2\right)$$

$$(5-5) \quad \sigma_X^2 = \text{Var}[X] = \mu_X^2 \left(\exp(\sigma_{\ln X}^2) - 1 \right)$$

Odwrotnie parametry rozkładu normalnego ($Y=\ln X$) mogą być określone na podstawie związków:

$$(5-6) \quad \sigma_{\ln X}^2 = \ln \left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} \right)$$

$$(5-7) \quad \mu_{\ln X} = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2} \sigma_{\ln X}^2,$$

które powstają z rozwiązania równań (5-4) i (5-5) względem niewiadomych $\sigma_{\ln X}$ i $\mu_{\ln X}$. Warto też odnotować następujące wyrażenia pozwalające obliczyć modę, medianę oraz moment statystyczny rzędu k .

$$(5-8) \quad \text{Moda} = \exp(\mu_{\ln X} - \sigma_{\ln X}^2)$$

$$(5-9) \quad \text{Mediana} = \exp(\mu_{\ln X})$$

$$(5-10) \quad E[X^k] = \exp\left(k\mu_{\ln X} + \frac{1}{2}k^2\sigma_{\ln X}^2\right)$$

5.1.2. ROZKŁAD O NOŚNIKU OGRANICZONYM

Drugim rozpatrywanym w ramach niniejszego studium polem losowym jest pole kąta tarcia wewnętrznego. Przyjęto (za Griffithsem i Fentonem, 2008), że jednowymiarowe rozkłady tego pola są rozkładami ograniczonymi typu tangens hiperboliczny. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$(5-11) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}(b-a)}{\sqrt{2s(x-a)(b-x)}} \exp\left\{-\frac{1}{2s^2}\left[\pi \ln \frac{x-a}{b-x} - m\right]^2\right\} & \text{dla } x \in (a, b) \\ 0 & \text{dla } x \notin (a, b) \end{cases}$$

Taka postać funkcji gęstości wynika z faktu, że rozkład ten powstaje poprzez następującą transformację rozkładu normalnego:

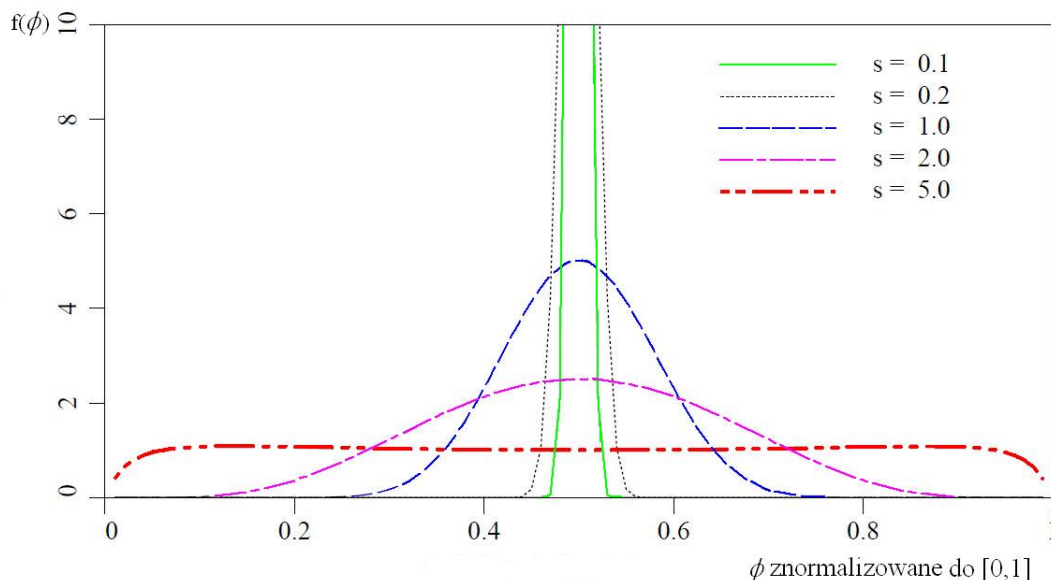
$$(5-12) \quad X = a + \frac{1}{2}(b-a) \left\{ 1 + \tanh \left[\frac{m + sG}{2\pi} \right] \right\},$$

gdzie G oznacza zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym. Z postaci transformacji wynika, że zmienna losowa X przyjmuje wartości w ograniczonym przedziale (a, b) , więc jej rozkład jest adekwatny do modelowania zmienności losowej cech podłoża jakim jest kąt tarcia wewnętrznego. Parametr m jest parametrem położenia. W przypadku $m=0$ rozkład jest symetryczny względem środka przedziału (a, b) . Natomiast parametr s jest parametrem skali. Większym wartością s odpowiada większa zmienność X .

Przykładowe wykresy funkcji gęstości zmiennej losowej X w zależności od parametru s przedstawia Rysunek 5-2. Przy założeniu $m=0$ (takie przyjęto w realizowanej pracy) wariancja rozkładu nie zależy od m . Przybliżona zależność pomiędzy odchyleniem standardowym a parametrem s może być określona poprzez zastosowanie rozwinięcia Taylora. Jak łatwo sprawdzić rozwinięcie pierwszego rzędu prowadzi do wzoru:

$$(5-13) \quad \sigma_x \approx \frac{1}{2}(b-a) \frac{2s}{\pi(e^{2\mu_x} - e^{-2\mu_x} + 2)}$$

Dla dowolnego przedziału ograniczonego przez wartość maksymalną (b) oraz minimalną (a), odchylenie standardowe może przyjmować różne wartości. Wielkość wynikająca z pomiarów jest matematycznie uzależniona od parametru s . Zmieniając powyższy parametr uzyskuje się różne wartości odchylenia i w efekcie różne kształty funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Dobór parametru s jest podyktowany dopasowaniem funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu „ograniczonego” do przewidywanego kształtu dzwonowatego. Dla kąta tarcia wewnętrznego znormalizowanego do przedziału $[0,1]$ funkcję gęstości prawdopodobieństwa dla różnych wartości parametru s przedstawia Rysunek 5-2.



Rysunek 5-2 Rozkład ograniczony kąta tarcia wewnętrznego znormalizowany do przedziału $[0,1]$ (Fenton & Griffiths, 2003), dla $m=0$

Powyższą zmienną losową X można transformować do rozkładu normalnego stosując inwersję równania (5-12) postaci:

$$(5-14) \quad m + sG = \pi \ln \left| \frac{X - a}{b - X} \right|,$$

w której parametry m i s są kolejno wartością średnią i odchyleniem standardowym zmiennej gaussowskiej ($m+sG$). Oba parametry można estymować na podstawie obserwacji zmiennej $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, każdej za pomocą równań:

$$(5-15) \quad m = \frac{1}{n} \sum y_i$$

$$(5-16) \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (y_i - m)^2},$$

gdzie y_i jest pojedynczą realizacją zmiennej X .

$$(5-17) \quad y_i = \pi \ln \left| \frac{x_i - a}{b - x_i} \right|.$$

5.2. KONSTRUKCJE PÓL LOSOWYCH PARAMETRÓW WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH PODŁOŻA

Przejdźmy obecnie do „konstrukcji” pól losowych spójności $c(\mathbf{z})$ oraz kąta tarcia wewnętrznego $\phi(\mathbf{z})$. Rozpatrywane będzie zadanie w płaskim stanie odkształcenia. W związku z tym każdy parametr będzie opisany przez dwie współrzędne $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^2$.

5.2.1. POLE SPÓJNOŚCI

Założono, że oba pola są stacjonarne, a więc wartości oczekiwane oraz wariancje są stałe (nie zależą od \mathbf{z}). Przyjmijmy, że spójność charakteryzuje lognormalne pole o wartości oczekiwanej (μ_c) oraz odchyleniu standardowym (σ_c). Rozważono najpierw przypadek izotropowy, gdzie skala fluktuacji (promień korelacyjny), jest jednakowy we wszystkich kierunkach pola. Oznaczono tę skalę przez θ_{inc} . Indeks inc jest wprowadzony celowo, aby zaznaczyć, że skala jest związana ze strukturą korelacyjną pola normalnego $G_{inc}(\mathbf{z})$, podstawowego względem lognormalnego pola spójności. W procesie symulacyjnym najpierw generowane będzie pole normalne $G_{inc}(\mathbf{z})$ o wartości oczekiwanej zero, jednostkowej wariancji i skali fluktuacji θ_{inc} , zaś lognormalne pole spójności otrzymane zostanie przez zastosowanie transformacji:

$$(5-18) \quad \mathbf{c}(\mathbf{z}) = \exp\{\mu_{\text{inc}} + \sigma_{\text{inc}} \mathbf{G}_{\text{inc}}(\mathbf{z})\}$$

Parametry μ_{inc} oraz σ_{inc} otrzymane są ze średniej μ_c oraz odchylenia standardowego σ_c pola $c(\mathbf{z})$ na podstawie relacji (5-6) i (5-7).

5.2.2. POLE KĄTA TARCIA WEWNĘTRZNEGO

W przypadku pola kąta tarcia wewnętrznego, pole losowe $\phi(\mathbf{z})$ otrzymuje się z pola normalnego $G_\phi(\mathbf{z})$ o zerowej średniej i jednostkowej wariancji poprzez zastosowanie transformacji:

$$(5-19) \quad \phi(\mathbf{z}) = \phi_{\min} + \frac{1}{2}(\phi_{\max} - \phi_{\min}) \left\{ 1 + \tanh \left| \frac{\mathbf{s} \mathbf{G}_\phi(\mathbf{z})}{2\pi} \right| \right\}$$

Zgodnie z podanymi wcześniej wzorami (5-11) i (5-12) taka „konstrukcja” spowoduje, że jednowymiarowe rozkłady w polu $\phi(\mathbf{z})$ będą rozkładami ograniczonymi typu tangens hiperboliczny o gęstości prawdopodobieństwa (5-11).

Adekwatnie do równania (5-13), odchylenie standardowe w rozkładzie ograniczonym szacowano poprzez rozwinięcie Taylora. W tym przypadku ma ono postać:

$$(5-20) \quad \sigma_\phi \approx \frac{1}{2}(\phi_{\max} - \phi_{\min}) \frac{2s}{\pi(e^{2\mu_\phi} - e^{-2\mu_\phi} + 2)}$$

5.2.3. STRUKTURA KORELACYJNA

Zakłada się, że funkcja korelacji $\rho(\tau)$ w polu $G_{\text{inc}}(\mathbf{z})$ (podstawowym polu normalnym względem pola spójności) jest funkcją typu Markowa (3-41).

$$(5-21) \quad \rho_{\text{inc}}(\tau) = \exp\left\{-\frac{2\|\tau\|}{\theta_{\text{inc}}}\right\};$$

gdzie $\tau = \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) = (\tau_x, \tau_y)$, a $\|\tau\| = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 + (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^2} = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$.

Natomiast θ_{inc} jest skalą fluktuacji w polu gaussowskim $G_{\text{inc}}(\mathbf{z})$. Przyjmuje się, że pole gaussowskie $G_\phi(\mathbf{z})$ ma również strukturę korelacyjną typu Markowa (5-21), przy czym

skalę fluktuacji oznacza się jako θ_ϕ . Teoretycznie skale fluktuacji θ_{inc} i θ_ϕ mogą być różne. Jednak można mniemać, że struktura korelacyjna pola jest konsekwencją zmian własności gruntu jako pewnego ciała stałego. To z kolei sugeruje, iż można przyjąć założenie, że skale te mają zbliżone wartości. W ramach tego studium przyjęto, że $\theta_{inc}=\theta_\phi$ i dalej oznaczano jako θ . Należy przypomnieć, że skala fluktuacji θ charakteryzuje normalne pola $G_{inc}(\mathbf{z})$ oraz $G_\phi(\mathbf{z})$ podstawowe względem pól $c(\mathbf{z})$ oraz $\phi(\mathbf{z})$. Z drugiej strony informacje na temat promieni fluktuacji czerpane są ze statystycznej obróbki zbiorów danych z badań podłoża (por. 3.3.3). Oznacza to, że aby uzyskać oszacowanie skali fluktuacji θ należy do wyników badań zastosować transformacje odwrotne do (5-18) oraz (5-19). Ponieważ transformacje te są różne prowadzi to do różnych wartości θ . Zdaniem Griffithsa i Fentona (2008) różnice te jednak w wielu przypadkach mogą być pominięte.

W ramach niniejszej pracy rozpatrywany będzie najprostszy przypadek anizotropowy, tj. taki w którym skala fluktuacji w kierunku pionowym (oznaczana dalej jako θ_y) różni się istotnie od skali fluktuacji w kierunku poziomym (oznaczanej dalej jako θ_x). Dla takiego przypadku funkcja korelacji w podstawowych (względem pola spójności oraz pola kata tarcia wewnętrznego) polach normalnych będzie zakładana w postaci:

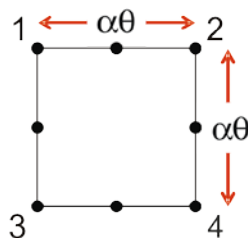
$$(5-22) \quad \rho(\tau) = \exp\left\{-\sqrt{\left|\frac{2|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}{\theta_x}\right|^2 + \left|\frac{2|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|}{\theta_y}\right|^2}\right\} = \exp\left\{-\sqrt{\left|\frac{2|\tau_x|}{\theta_x}\right|^2 + \left|\frac{2|\tau_y|}{\theta_y}\right|^2}\right\},$$

gdzie $\tau = \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) = (\tau_x, \tau_y)$. Tę funkcję korelacji można także określać jako korelację typu Markowa, gdyż jest ona naturalnym uogólnieniem funkcji (5-21). Łatwo bowiem zauważyć, że przyjmując $\theta_x = \theta_y = \theta$ równanie (5-22) redukuje się do równania (5-21). Oczywiście przy zróżnicowanych wartościach θ_y oraz θ_x otrzymana struktura korelacyjna w podstawowych polach normalnych (w konsekwencji również w polach $c(\mathbf{z})$ oraz $\phi(\mathbf{z})$) będzie inna niż w przypadku pól izotropowych.

Dla potrzeb losowej metody elementów skończonych numeryczne generowanie podstawowych pól normalnych o zadanej strukturze korelacyjnej odbywa się według algorytmu LAS opisanego w rozdziale 3 (pkt. 3.4).

5.3. DYSKRETYZACJA POŁA LOSOWEGO DO SIATKI ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Należy jeszcze wyjaśnić w jaki sposób odbywa się lokalne uśrednienie pól na poszczególne elementy siatki. Proces rozpoczyna się od transformacji wielkości wejściowych do rozkładu normalnego stosując równania (5-4) i (5-5) dla rozkładu lognormalnego oraz (5-15) do (5-17) w przypadku rozkładu „ograniczonego”. W modelu izotropowym opierając się na strukturze korelacyjnej (skali fluktuacji θ) oraz parametrach elementu (długość boku pojedynczego elementu α - patrz Rysunek 5-3)

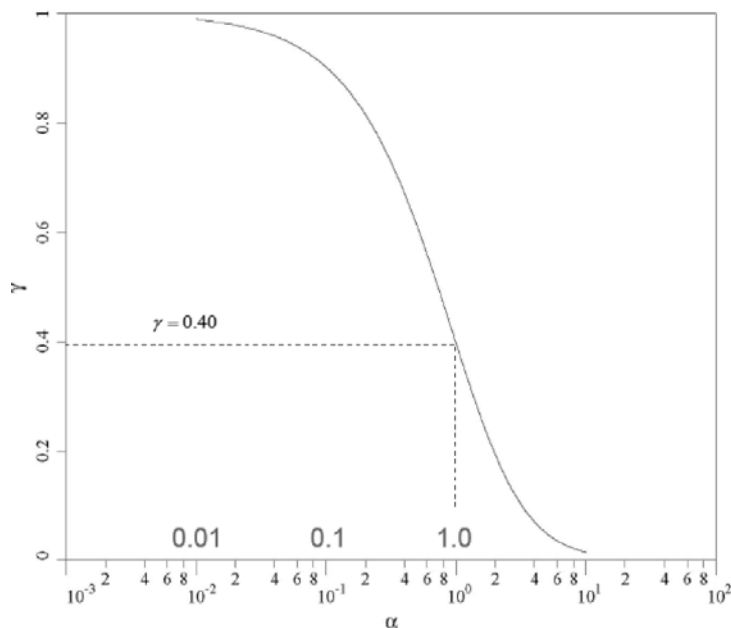


Rysunek 5-3 Synchronizacja promienia korelacyjnego θ z elementem siatki MES

wyznacza się funkcję redukcji wariancji γ^{var} , która w przypadku izotropowym dana jest wzorem (5-23):

$$(5-23) \quad \gamma^{\text{var}} = \frac{4}{(\alpha\theta)^4} \int_0^{\alpha\theta} \int_0^{\alpha\theta} (\alpha\theta - \tau_x)(\alpha\theta - \tau_y) \exp\left[-2 \frac{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}}{\theta}\right] d\tau_x d\tau_y$$

Przykładowy przebieg funkcji redukcji wariancji pokazuje Rysunek 5-4.



Rysunek 5-4 Funkcja redukcji wariancji w polu izotropowym

Celem powyższej operacji jest określenie poziomu redukcji odchylenia standardowego wynikającego z uśrednienia pola losowego. Odchylenie standardowe po uśrednieniu, σ_{AY} (indeks A oznacza wielkość po uśrednieniu od słowa *Average*), wyznaczone jest jako iloczyn odchylenia standardowego σ_Y , podstawowego rozkładu normalnego oraz pierwiastka funkcji redukcji wariancji γ^{var} . Jednocześnie wartość średnia (μ_{AY}) pozostaje niezmienną.

$$(5-24) \quad \sigma_{AY} = \sigma_Y \sqrt{\gamma^{\text{var}}}$$

$$(5-25) \quad \mu_{AY} = \mu_Y$$

W przypadku pola spójności odbywa się to według wzorów:

$$(5-26) \quad \sigma_{\text{Alnc}} = \sigma_{\text{lnc}} \sqrt{\gamma^{\text{var}}}$$

$$(5-27) \quad \mu_{\text{Alnc}} = \mu_{\text{lnc}}$$

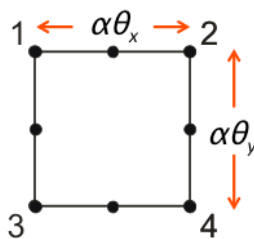
Chcąc określić wartość oczekiwaną spójności (μ_{Ac}) oraz wariancję (σ_{Ac}) po dokonaniu uśrednienia, wtórnie dla rozkładu lognormalnego należy zastosować transformację odwrotną do danej równaniami (5-26) oraz (5-27). Wówczas otrzymuje się:

$$(5-28) \quad \mu_{Ac} = \exp \left[\mu_{\text{Alnc}} + \frac{1}{2} \sigma_{\text{Alnc}}^2 \right]$$

$$(5-29) \quad \sigma_{Ac}^2 = \mu_{Ac}^2 \left(\exp(\sigma_{\text{Alnc}}^2) - 1 \right).$$

Analogicznie dla kąta tarcia wewnętrznego, chcąc dokonać uśrednienia na powierzchni elementu należy transformować zmienną rzeczywistą do rozkładu normalnego, stosując wzór (5-14).

W przypadku anizotropowym wielkość elementu oraz wzory transformacyjne nie ulegają zmianie. Jedynie funkcja redukcji wariancji zmienia się ze względu na osobne uśrednienia w kierunku poziomym i pionowym (Rysunek 5-5).



Rysunek 5-5 Synchronizacja promienia korelacyjnego θ z elementem siatki MES w przypadku anizotropowym

Stąd dla pojedynczego elementu mamy:

$$(5-30) \gamma^{\text{var}} = \frac{4}{(\alpha\theta_x)^2 (\alpha\theta_y)^2} \int_0^{\alpha\theta_x} \int_0^{\alpha\theta_y} (\alpha\theta_x - \tau_x)(\alpha\theta_y - \tau_y) \exp\left[-\sqrt{\left(\frac{2\tau_x}{\theta_x}\right)^2 + \left(\frac{2\tau_y}{\theta_y}\right)^2}\right] d\tau_x d\tau_y$$

Mając określoną korelację w polach losowych poszczególnych parametrów wytrzymałościowych pozostaje pytanie jaką korelację przyjąć między samymi wielkościami c i ϕ .

Niestety nie ma jednoznacznej odpowiedzi na to pytanie w literaturze. Często spotyka się opinię, że korelacja ta jest ujemna. Na przykład według Cherubiniego (2000) mieści się ona w przedziale -0.24 do -0.7. Można to traktować jako analogię do fizycznej zależności spójności i kąta tarcia wewnętrznego. Zagadnienie korelacji pozostaje jednak ciągle nierozstrzygnięte. Pewne uwagi na ten temat znajdują w podrozdziale 9.2.

6. OSZACOWANIE LOSOWEJ NOŚNOŚCI POSADOWIENIA BEZPOŚREDNIEGO NA PODŁOŻU O CECHACH IZOTROPOWYCH

Poniższy rozdział zawiera zestawienie dotychczasowych wyników, jakie uzyskali twórcy losowej metody elementów skończonych rozwiązując zadanie nośności fundamentu bezpośredniego. W rozdziale powtórzono obliczenia dla opublikowanych rezultatów (Griffiths i Fenton, 2001; Fenton i Griffiths, 2003 oraz Fenton i Griffiths, 2008) celem kalibracji programu obliczeniowego rbear2d, udostępnionego na stronie Fentona i Griffithsa (RFEM: Random Finite Element Method Software). Kalibracja miała na celu uzyskanie modelu numerycznego możliwie dokładnie odpowiadającego modelowi Fentona i Griffithsa. W ten sposób nowe wyniki autorki można by traktować jako bezpośrednie uogólnienie wcześniejszych rezultatów z prac (Griffiths i Fenton, 2001; Fenton i Griffiths, 2003). Staraniem autorki było najlepsze możliwe odwzorowanie wyników z zachowaniem modelowania podłoża jako pola losowego o cechach izotropowych. Na tym etapie pominięto w obliczeniach ciężar własny i zagłębienie fundamentu, jak to również miało miejsce w pracach Fentona i Griffithsa.

Ponieważ twórcy metody RFEM koncentrowali się jedynie na zbadaniu efektu zmienności spójności, autorka rozszerzyła analizy, badając ponadto wpływ zmienności pola losowego kąta tarcia wewnętrznego na wartości średnie oporu.

Ze względów redakcyjnych wyniki autorki zamieszczone w tym oraz następnych rozdziałach podano jednocześnie w tabelach oraz w formie rysunkowej. Rysunki pozwalają wyostrzyć punkty szczególne. Jednakże ze względu na przyjęte skalowanie niektóre informacje mogą być podane zbyt tendencyjnie. Dlatego w celu klarownego przedstawienia wyników załączono również tabele.

6.1. PODŁOŻE IDEALNIE SPOISTE

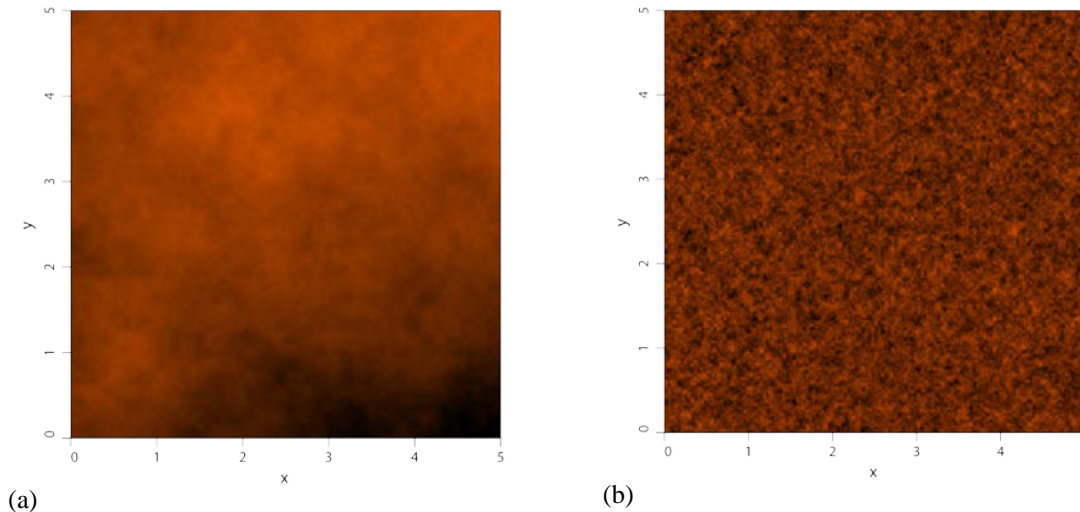
W pionierskim artykule dotyczącym analizy nośności podłoża, przy użyciu losowej metody elementów skończonych, Griffiths i Fenton (2001) jako wielkość losowo zmienną przyjęli tylko spójność (c) zakładając, że kąt tarcia wewnętrznego $\phi=0$. W tym przypadku analityczny wzór na nośność ma postać (6-1).

$$(6-1) \quad q_{ult} = cN_c$$

przy czym współczynnik nośności N_c wynika z rozwiązania Prandtla, wzór (2-7) i wynosi:

$$(6-2) \quad N_c = \frac{q_{ult}}{c_u} = 2 + \pi \approx 5.14$$

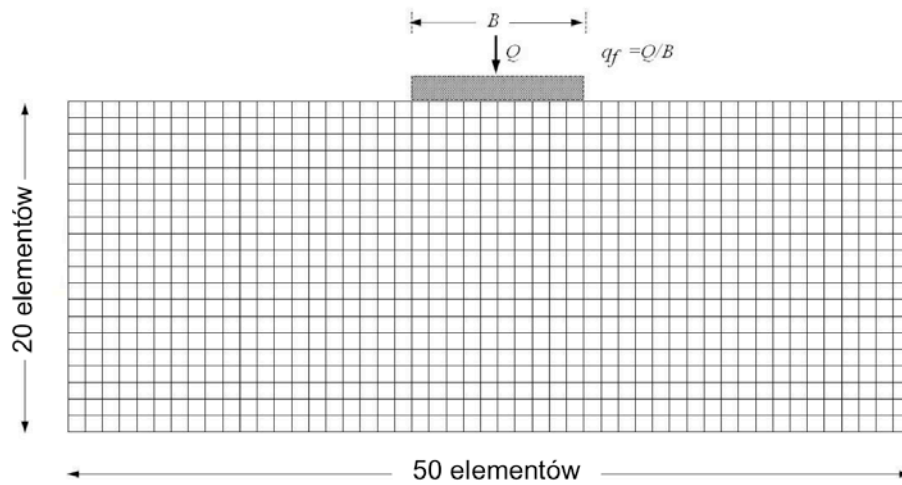
Twórcy metody RFEM przyjęli izotropowy charakter losowego pola spójności, tzn. założyli, że skale fluktuacji w polu spójności θ_c są jednakowe zarówno w kierunku pionowym jak i poziomym ($\theta_{c,x}=\theta_{c,y}$). Przykładowe realizacje pola spójności prezentuje Rysunek 6-1.



Rysunek 6-1 Realizacje izotropowego pola losowego spójności
(a) duża skala fluktuacji $\theta=200\text{m}$, (b) mała skala fluktuacji $\theta=0.5\text{m}$

W niniejszym podrozdziale podjęto próbę odtworzenia przeprowadzonych przez Griffithsa i Fentona obliczeń. W tym celu zastosowano identyczny schemat obliczeniowy zadania, oparty na siatce elementów skończonych o wymiarach 5×2 m, kolejno w kierunku poziomym oraz pionowym (patrz Rysunek 6-2). Podłoże modelowane jako sprężysto – idealnie plastyczne, obciążono pojedynczym fundamentem pasmowym o szerokości $B=1$ metra. Całe zadanie analizowano jako płaski stan odkształcenia, liczony na jeden metr

bieżący fundamentu pasmowego. Dodatkowo przyjęto sugerowaną wielkość pojedynczego elementu równą 0.1x0.1 m.



Rysunek 6-2 Schemat statyczny zadania

Pierwszym krokiem analiz numerycznych było określenie właściwości gruntu, na którym posadowiono fundament. W pierwszej kolejności wygenerowano pole losowe spójności o zadanych parametrach. (Sposób opisu matematycznego poszczególnych parametrów zawarty został w rozdziale 5). Spójność opisano izotropowym polem lognormalnym o wartości średniej $\mu_c=100$ kPa. Odchylenie standardowe w polu oraz wielkość skali fluktuacji były przedmiotem analizy parametrycznej i zmieniano je w granicach, odpowiednio $\sigma_c=10 - 400$ kPa oraz $\theta_c=0.2 - 50$ m. Pozostałe parametry przyjęto jako nielosowe, co podaje Tabela 6-1.

Tabela 6-1 Parametry zadania z losowym polem spójności		
	wartość średnia,	rozkład,
Kohezja (c)	100 kPa	lognormalny
Moduł Younga (E)	100 MPa	parametr nielosowy
Współczynnik Poissona (ν)	0.3	parametr nielosowy

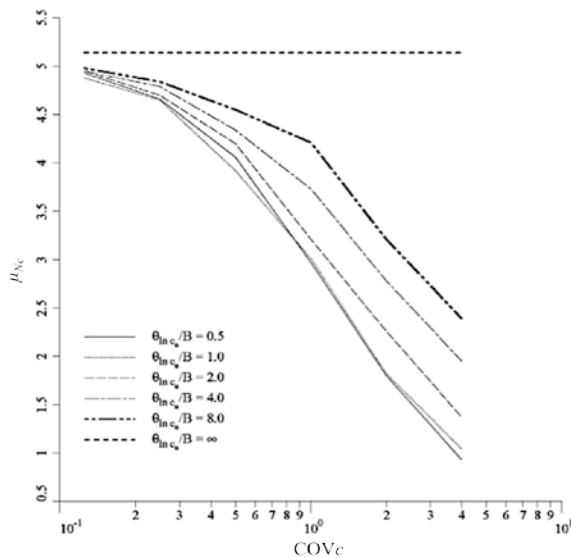
W pracy Griffithsa i Fentona (2001) analizowano losową nośność zmieniając

współczynniki zmienności spójności $\left[\text{COV } c = \frac{\sigma_c}{\mu_c} \right]$ oraz wielkości skali fluktuacji θ_c

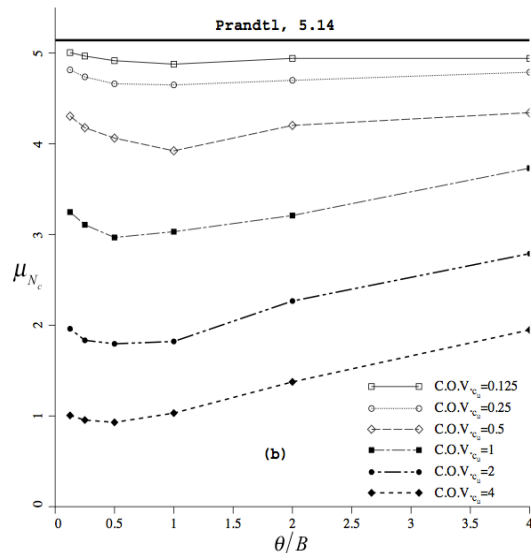
(Tabela 6-2). Zmiany odchyłeń standardowych pola kohezji pozwalają ustalić różnicę między oporem deterministycznym (q_{ult}) (6-1), obliczonym dla wartości średniej spójności (μ_c), a wartościami uzyskanymi dla gruntu o spójności zmiennej losowo. Zmiany skali fluktuacji (θ_c) pozwoliły zbadać efekt zmiennej struktury korelacyjnej na wartość oporu podłoża.

Tabela 6-2 Parametry zmieniane w zadaniu z losowym polem spójności						
Współczynnik zmienności dla spójności (COV _c)	0.1	0.25	0.5	1.0	4.0	
Skala fluktuacji (θ_c [m])	0.2	0.5	1.0	2.0	4.0	8.0 50

Punktem odniesienia do opisanych w tym podrozdziale obliczeń były wyniki podane przez Griffithsa i Fentona. Rezultaty tych autorów podano na Rysunku 6-3 i Rysunku 6-4, zaczerpniętych z pracy (Griffiths i Fenton, 2001). Rysunek 6-3 przedstawia wartość oczekiwaną (średnią) μ_{N_c} współczynnika N_c jako funkcję współczynnika zmienności spójności COV_c. Natomiast Rysunek 6-4 obrazuje tę samą wielkość μ_{N_c} w funkcji promienia korelacji, odniesionego do szerokości fundamentu (θ/B), przy różnych współczynnikach zmienności spójności. Dodatkowo na obu rysunkach zaznaczona jest wartość deterministyczna wyznaczona ze wzoru (6-2). Równanie Prandtla daje stałą wartość N_c na poziomie 5.14.

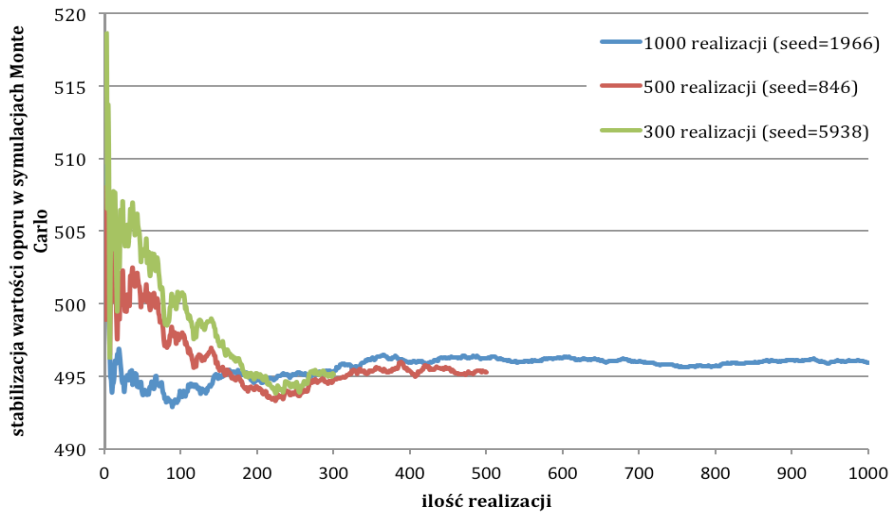


Rysunek 6-3 Zależności wartości średniej współczynnika nośności od współczynnika zmienności spójności, dla różnych skali fluktuacji (Griffiths & Fenton, 2001)



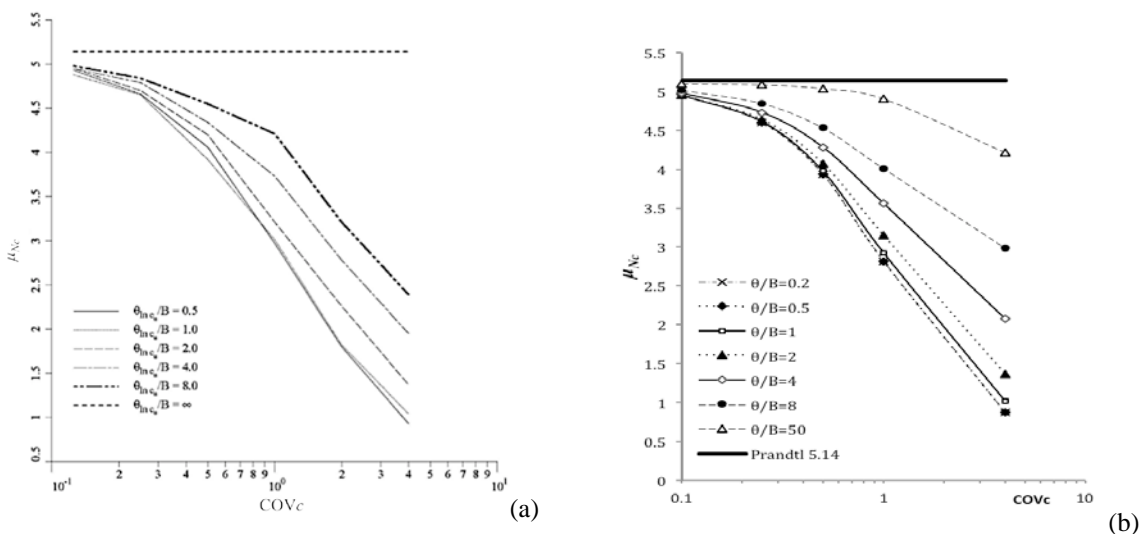
Rysunek 6-4 Zależności wartości średniej współczynnika nośności od skali fluktuacji, dla różnych współczynników zmienności spójności (Griffiths & Fenton, 2001)

Analizy numeryczne autorki zainicjowano określeniem niezbędnej liczby realizacji w procesie symulacji Monte Carlo. Rozpoczęto od N=1000 realizacji i sukcesywnie zmniejszano, co miało na celu skrócenie czasu potrzebnego do uzyskania wiarygodnych wyników, czyli stabilizacji pierwszych dwóch momentów statystycznych. Satysfakcjonujące rezultaty uzyskano dla 300 realizacji, co widać na Rysunku 6-5. Obliczenia wykonano dla trzech różnych wartości startowych generatora liczb pseudolosowych (seed₁=1966, seed₂=846, seed₃=5938), w efekcie obserwuje się duże różnice wartości średniej oporu, przy ilości realizacji mniejszej od N=300. Powyższego oszacowania nie można zastosować do estymacji rozkładu prawdopodobieństwa, dla którego niezbędne są próby o znacznie większej liczebności (przynajmniej kilka tysięcy).



Rysunek 6-5 Liczba realizacji potrzebna do ustabilizowania wartości średniej oporu w symulacjach Monte Carlo

Dla tak skalibrowanego modelu dokonano obliczeń numerycznych a uzyskane rezultaty prezentuje Tabela 6-3 oraz Rysunek 6-6 i Rysunek 6-7. I tak, Rysunek 6-6 przedstawia porównanie średnich wartości współczynnika nośności μ_{Nc} w zależności od współczynnika zmienności spójności COV_c . Rysunek 6-6(a) jest powtórzeniem Rysunku 6-3 i posłużył do porównania wyników Fentona i Griffithsa z osiągniętymi przez autorkę (Rysunek 6-6(b)). Jak widać odpowiadające sobie krzywe dla skali fluktuacji od 0.5 do 8.0m różnią się niewiele. Jednak wraz ze wzrostem współczynnika zmienności rosną różnice między wynikami. Istniejące różnice można przypisać różnym wartościom startowym generatora liczb pseudolosowych. Krzywa znacząco odbiegająca od rezultatów prezentowanych na Rysunku 6-6(a) odpowiada skali fluktuacji $\theta_c=50m$, oznaczona na Rysunku 6-6(b) białymi trójkątami, nie została ujęta w obliczeniach Fentona i Griffithsa.

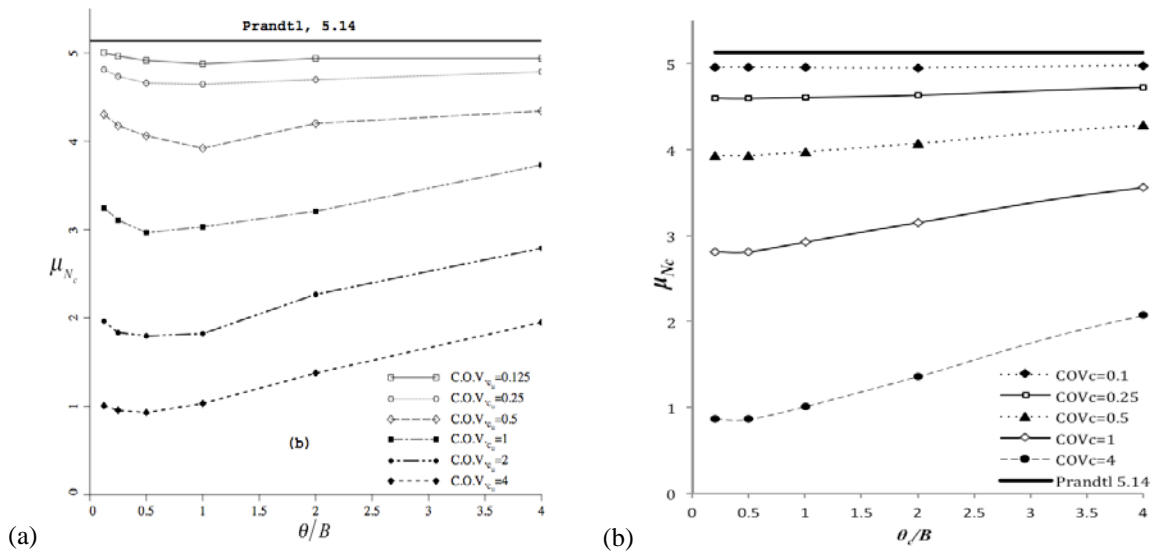


Rysunek 6-6 Zależności wartości średniej współczynnika nośności od współczynnika zmienności spójności dla różnych skal fluktuacji (a) rysunek z pracy Griffiths i Fenton (2001) (b) wykres na podstawie wyników autorki

Tabela 6-3 Wyniki analiz przy zmiennym COV_c w zadaniu z losowym polem spójności

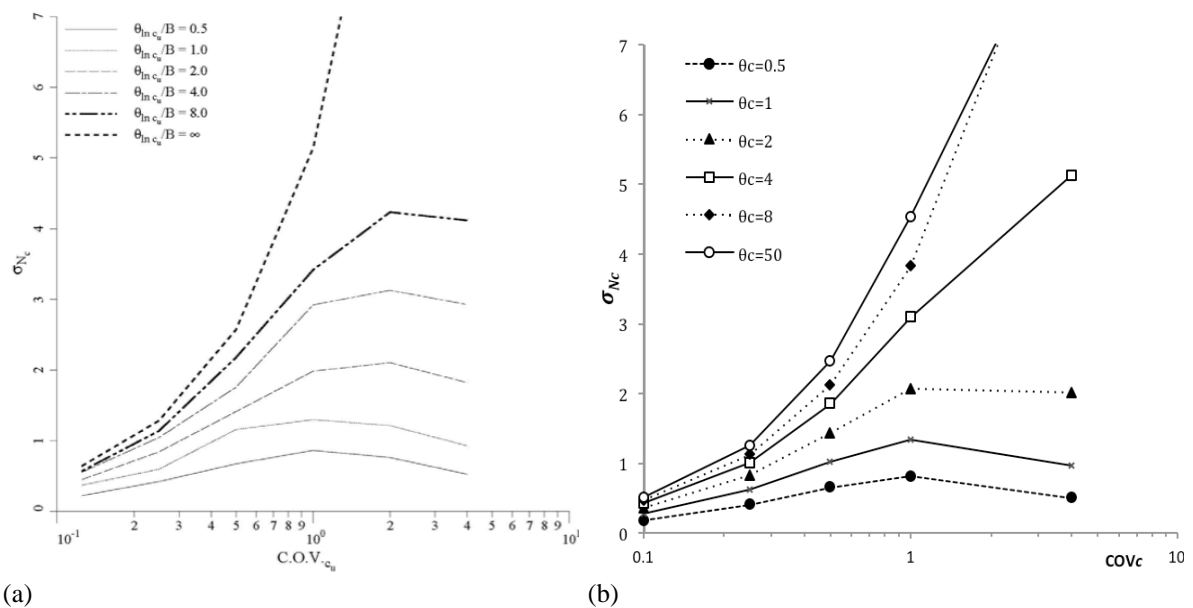
Skala fluktuacji	Współczynnik zmienności	Wartość Średnia oporu	Odchylenie standardowe oporu	Średnia wartość współczynnika nośności
θ_c [m]	COV_c [-]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	μ_{Nc} [-]
0.2	0.1	495.95	17.98	4.96
	0.25	459.94	40.83	4.60
	0.5	393.24	65.75	3.93
	1.0	281.29	81.89	2.81
	4.0	86.75	50.73	0.87
0.5	0.1	495.95	17.98	4.96
	0.25	459.94	40.83	4.60
	0.5	393.24	65.75	3.93
	1.0	281.29	81.89	2.81
	4.0	86.75	50.73	0.87
1	0.1	495.29	27.49	4.95
	0.25	461.12	62.27	4.61
	0.5	397.62	102.19	3.98
	1.0	292.57	133.46	2.93
	4.0	101.62	96.76	1.02
2	0.1	495.16	35.74	4.95
	0.25	463.79	83.19	4.64
	0.5	407.31	143.72	4.07
	1.0	315.19	206.54	3.15
	4.0	136.44	200.94	1.36
4	0.1	497.79	42.18	4.98
	0.25	472.85	100.87	4.73
	0.5	428.23	185.31	4.28
	1.0	355.79	309.54	3.56
	4.0	207.43	512.88	2.07
8	0.1	501.69	46.31	5.02
	0.25	484.55	112.46	4.85
	0.5	452.92	212.53	4.53
	1.0	400.68	382.38	4.01
	4.0	298.39	968.47	2.98
50	0.1	509.85	50.63	5.10
	0.25	508.67	125.86	5.09
	0.5	503.74	246.55	5.04
	1.0	490.47	453.13	4.90
	4.0	421.36	921.48	4.21

Rysunek 6-7 przedstawia średnie wartości współczynnika nośności (μ_{Nc}) w funkcji skali fluktuacji znormalizowanej na szerokości fundamentu (θ/B). Tym razem Rysunek 6-7(a) jest powtórzeniem Rysunku 6-4 a Rysunek 6-7(b) jest wykresem wyników autorki. Tak jak poprzednio krzywe są do siebie bardzo zbliżone. Jednakże wartości średnie współczynnika nośności są nieco niższe w przypadku obliczeń autorki pracy.

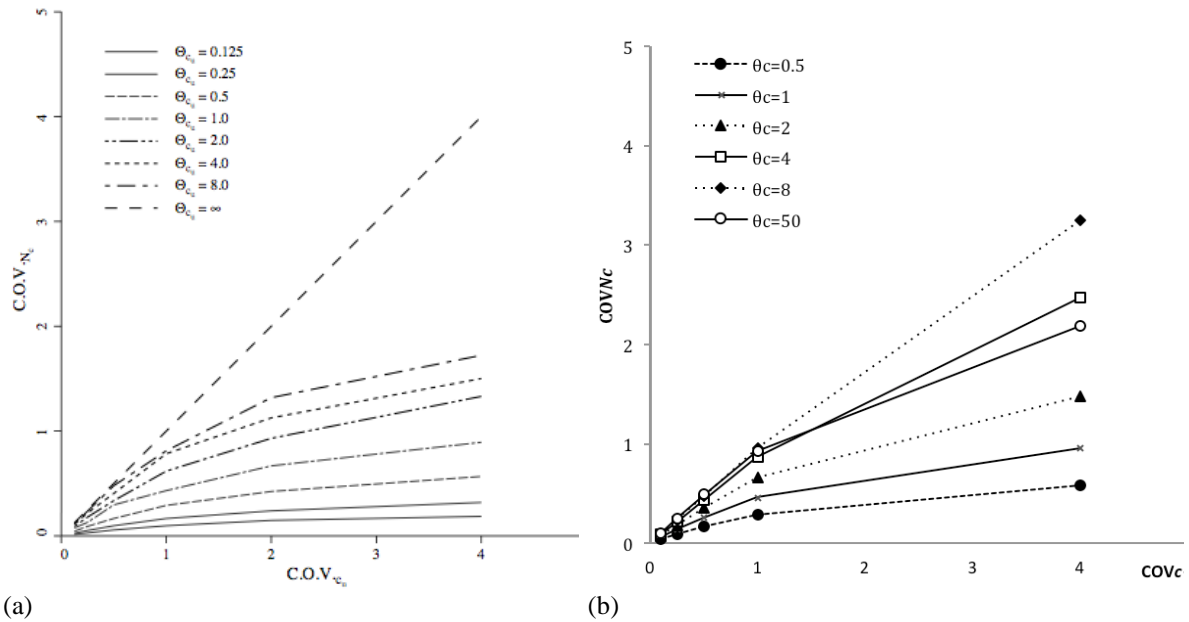


Rysunek 6-7 Zależności wartości średniej współczynnika nośności od skali fluktuacji, dla różnych współczynników zmienności spójności (a) rysunek z pracy Griffiths i Fenton (2001) (b) wykres na podstawie wyników autorki

W pracy Griffithsa i Fentona (2001) zamieszczono wykresy odchylenia standardowego (σ_{N_c}) (Rysunek 6-8(a)) oraz współczynnika zmienności COV_{N_c} (Rysunek 6-9(a)) w odniesieniu do współczynnika zmienności spójności (COV_c). Na wykresie odchylenia (Rysunek 6-8(a)) widoczne są lokalne maksima niemal dla każdej krzywej, odpowiadającej zadanej skali fluktuacji pola spójności (θ/B). Ekstrema pojawiają się na przedziale $COV_c \in [0.5, 2.0]$. Rezultaty autorki (Rysunek 6-8(b)) wykazują podobny charakter. Jednak obserwowane lokalne maksima pojawiają się tylko dla wartości skali fluktuacji $\theta/B \leq 2$. W przypadku większego promienia korelacji pola spójności nie obserwuje się tego zjawiska.



Rysunek 6-8 Odchylenie standardowe współczynnika N_c w zależności od współczynnika zmienności spójności (a) za pracą Griffiths & Fenton (2001); (b) wyniki autorki



Rysunek 6-9 Współczynnik zmienności COV_{N_c} w zależności od współczynnika zmienności spójności (a) za pracą Griffiths & Fenton (2001); (b) wyniki autorki

Jednocześnie na Rysunku 6-9(a) współczynnik zmienności COV_{N_c} zachowuje ciągły wzrost niezależnie od przyjętego współczynnika zmienności spójności (COV_c) oraz skali fluktuacji (θ/B). Współczynnik zmienności przedstawiony na Rysunku 6-9(b) przebiega podobnie jak na odpowiednik zaczerpnięty z pracy Griffithsa i Fentona (2001).

Ponieważ powyższe zadanie miało charakter odtwórczy trudno doszukiwać się nowych rezultatów. Można jedynie potwierdzić wnioski płynące ze studium literaturowego. Podłoże idealnie spoiste wraz ze wzrostem wariancji spójności charakteryzuje się dużą redukcją wartości średniej oporu. Jednocześnie wartość średnia nośności ulega redukcji w silnie skorelowanym polu losowym, czyli przy małych wartościach skali fluktuacji.

6.2. PODŁOŻE SPOISTE Z TARCIEM WEWNĘTRZNYM

6.2.1. UWAGI DOTYCZĄCE MODELU TEORETYCZNEGO

W roku 2003 twórcy metody RFEM po raz kolejny podjęli temat nośności granicznej podłoża pod fundamentem bezpośrednim (Fenton i Griffiths, 2003). Tym razem dodatkowo uwzględnili w obliczeniach losowy charakter kąta tarcia wewnętrznego, jednocześnie nadal pomijając w algorytmie ciężar własny gruntu oraz zagłębienie fundamentu. Analityczna funkcja stanu granicznego odpowiadała równaniu (6-1) ze współczynnikiem nośności N_c zdefiniowanym na podstawie mechanizmu zniszczenia

Prandtla (2-7). Autorzy wprowadzili stochastyczny odpowiednik współczynnika N_c określony wzorem:

$$(6-3) \quad M_c = \frac{q_f}{\mu_c},$$

gdzie q_f jest losowym oporem podłoża (wyznaczonym w metodzie RFEM), μ_c to wartość średnia losowego pola spójności. Porównując wzór (6-3) z rozwiązaniem analitycznym (6-1) można zauważyć, że M_c spełnia analogiczną rolę do współczynnika N_c , w przypadku rozwiązania analitycznego. W pracy (Fenton i Griffiths, 2003) zaproponowano model teoretyczny, który doprowadził do przybliżonego oszacowania rozkładu prawdopodobieństwa M_c oraz oszacowania dwóch pierwszych momentów statystycznych tej zmiennej. Proponowany model polega na założeniu, że o losowej nośności decydować będą średnie geometryczne parametrów ϕ i c określone dla pewnego obszaru D znajdującego się pod fundamentem. Średnie geometryczne są bowiem w większym stopniu zdominowane przez większe wytrzymałości aniżeli odpowiednie średnie arytmetyczne (ogólnie średnia geometryczna jest nie większa od średniej arytmetycznej). Koresponduje to z sytuacją, w której powierzchnia poślizgu mechanizmu zniszczenia, przechodzi przez regiony o mniejszej wytrzymałości. Drugim powodem, dla którego przyjęto model średnich geometrycznych są własności rozkładu lognormalnego (przy założeniu, że pole losowe spójności ma rozkład lognormalny), który ma tę własność, że iloczyn skończonej liczby zmiennych niezależnych o rozkładzie lognormalnym jest zmienną losową mającą także rozkład lognormalny (tzw. zamkniętość na iloczyn). Te założenia doprowadziły autorów pracy (Fenton i Griffiths, 2003) do konkluzji, że rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $Z = \ln M_c$ jest w przybliżeniu rozkładem normalnym. Wyprowadzono też przybliżone wzory określające wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej Z , odpowiednio:

$$(6-4) \quad \mu_{\ln M_c} \cong \ln N_c(\mu_\phi) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\mu_c^2} \right)$$

$$(6-5) \quad \sigma_{\ln M_c}^2 \cong \gamma^{\text{var}}(D) \left\{ \ln \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\mu_c^2} \right) + \left[\frac{s}{4\pi} \right] (\phi_{\max} - \phi_{\min}) \eta(\mu_\phi) \right\}$$

W powyższych wzorach μ_c , σ_c oznaczają odpowiednio wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe lognormalnego pola spójności, μ_ϕ jest natomiast wartością

oczekiwaną pola kąta tarcia wewnętrznego (rozkład ograniczony, pkt 5.2.2). Wielkość pod logarytmem $N_c(\mu_\phi)$ oznacza wartość współczynnika N_c (2-7) przyjętą w punkcie wartości oczekiwanej kąta tarcia wewnętrznego. W równaniu (6-5) $\gamma^{ar}(D)$ jest funkcją redukcji wariancji związaną z obszarem uśrednienia D podczas gdy parametr η jest opisany wzorem:

$$(6-6) \quad \eta(\phi) = \frac{d \ln \bar{N}_c}{d\phi} = \frac{d \ln N_c}{d\phi} = \frac{bd}{bd^2 - 1} \left[\pi(1+a^2)d + a + d^2 \right] - \frac{1+a^2}{a}$$

gdzie $a = \text{tg}(\phi)$, $b = \exp(\pi a)$ natomiast $d = \text{tg}(\pi/4 + \pi/2)$.

Tak określony model pozwala na przybliżone obliczanie prawdopodobieństw przekraczania wartości progowych przez nośność fundamentu powierzchniowego bez uwzględnienia ciężaru gruntu pod fundamentem.

Podane w pracy (Fenton i Griffiths, 2003) obliczenia metodą RFEM wskazały na dobrą zgodność wyników uzyskiwanych z metodą Monte Carlo z wynikami otrzymanymi według powyższego modelu, opartego na średnich geometrycznych.

W dalszej części pracy oszacowania będą prowadzone według obliczeń RFEM, a nie modelu teoretycznego.

6.2.2. ANALIZA WPŁYWU WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI SPÓJNOŚCI

W pracy Fentona i Griffithsa (2003) wykonano obliczenia dla fundamentu powierzchniowego bez uwzględnienia ciężaru własnego. Parametry podłoża przedstawia Tabela 6-4. Większość parametrów wejściowych nie uległa zmianie w stosunku do danych z podrozdziału 6.1., ani pod względem wartości, ani rozkładów (por. Tabela 6-1). Pojawia się natomiast pole losowe kąta tarcia wewnętrznego o rozkładach jednowymiarowych z nośnikiem ograniczonym typu tangens hiperboliczny (patrz. punkt 5.2.2). Dodatkowym parametrem był nielosowy kąt dylatacji (Roscoe, 1970; Vermeer i de Borst, 1984).

Tabela 6-4 Parametry gruntu dla zadania uwzględniającego losową spójność i kąt tarcia wewnętrznego

	wartość średnia,	rozkład,	ϕ_{min}	ϕ_{max}	s
Kohezja (c)	100 kPa	lognormalny			
Kąt tarcia wewnętrznego (ϕ)	25°	ograniczony	5	45	2
Kąt dylatacji (ψ)	0°	parametr nielosowy			
Moduł Younga (E)	100 MPa	parametr nielosowy			
Współczynnik Poissona (ν)	0.3	parametr nielosowy			

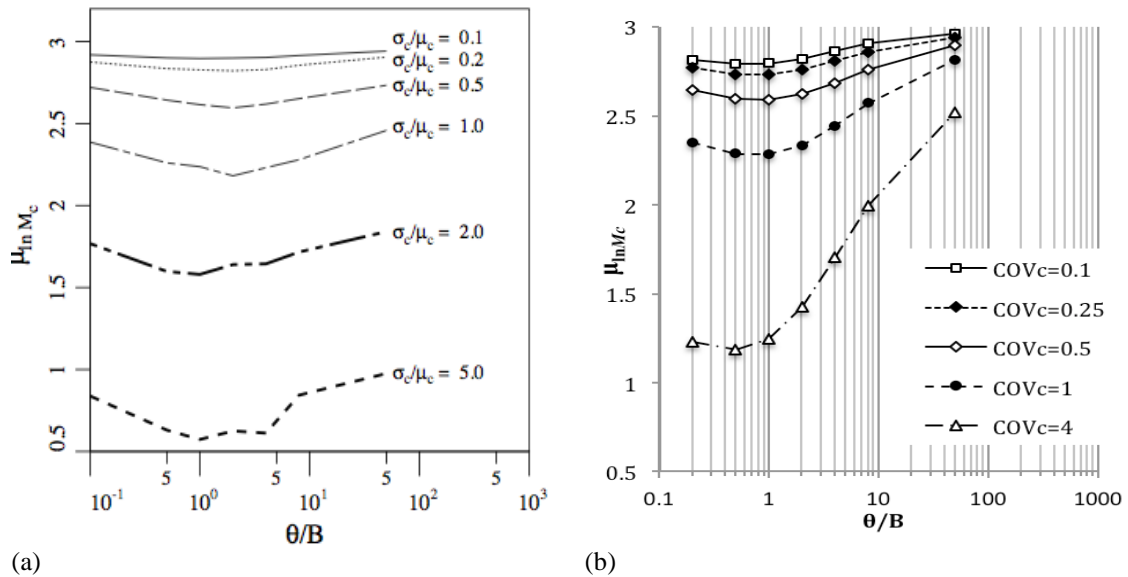
Praca Fentona i Griffithsa (2003) skupia się na analizie zmienności spójności (COV_c) oraz wpływie promienia korelacji ($\theta_\phi = \theta_c = \theta$) na opór graniczny podłoża. Badaną wielkością jest wartość średnia zlogarytmowanego parametru M_c (6-3), określana dalej jako μ_{lnM_c} . Jednocześnie rezultaty symulacji pokazane w pracy Griffithsa i Fentona (2003) (Rysunek 6-10(a)) są jakościowo zbliżone do wyników uzyskanych dla podłoża idealnie spoiściego zamieszczonych w pracy (Griffiths i Fenton, 2001) oraz w punkcie 6.1. Z porównania obu prac wynika, że dla niewielkich współczynników zmienności spójności (COV_c) średnia wartość oporu zmienia się w niewielkim stopniu wraz ze zmianami skali fluktuacji. Jednak w przypadku dużych współczynników zmienności ($COV_c > 1$) wahania średniego oporu sięgają prawie 20%.

Wzorem poprzedniego przykładu (pkt. 6.1), autorka poniższej pracy podjęła próbę odtworzenia wyników celem kalibracji programu rbear2d, dla podłoża, w którym spójność i kąt tarcia wewnętrznego scharakteryzowane były jako pola losowe. Założono współczynniki zmienności spójności oraz promienie korelacji zgodnie z Tabelą 6-2. Grunt modelowano jako ośrodek izotropowy (tzn. o skalach fluktuacji jednakowych w kierunku poziomym jak i pionowym), a uzyskane wyniki symulacji komputerowych prezentuje Tabela 6-5 oraz Rysunek 6-10(b).

Tabela 6-5 Wyniki analiz przy zmiennym COV_c
dla podłoża o losowej spójności i losowym kącie tarcia wewnętrznego

Skala fluktuacji	Współczynnik zmienności	Wartość średnia oporu	Odchylenie standardowe oporu	Parametr oporu	
θ_c [m]	COV_c [-]	μ_{af} [kPa]	σ_{af} [kPa]	μ_{Mc}	μ_{InMc}
0.2	0.1	1667.05	87.86	16.67	2.81
	0.25	1589.40	93.41	15.89	2.77
	0.5	1404.12	102.85	14.04	2.64
	1.0	1045.79	116.85	10.46	2.35
	4.0	341.62	66.68	3.42	1.23
0.5	0.1	1626.12	164.03	16.26	2.79
	0.25	1536.89	170.98	15.37	2.73
	0.5	1336.62	195.46	13.37	2.59
	1.0	983.41	216.37	9.83	2.29
	4.0	327.58	133.35	3.28	1.19
1	0.1	1634.90	247.00	16.35	2.79
	0.25	1537.84	273.64	15.38	2.73
	0.5	1330.27	316.42	13.30	2.59
	1.0	977.90	355.85	9.78	2.28
	4.0	347.50	242.45	3.47	1.25
2	0.1	1677.54	360.14	16.78	2.82
	0.25	1579.57	403.78	15.80	2.76
	0.5	1373.47	482.52	13.73	2.62
	1.0	1032.33	565.48	10.32	2.33
	4.0	416.76	485.95	4.17	1.43
4	0.1	1751.10	482.15	17.51	2.86
	0.25	1653.65	535.03	16.54	2.81
	0.5	1459.10	649.25	14.59	2.68
	1.0	1146.98	812.72	11.47	2.44
	4.0	548.65	842.18	5.49	1.70
8	0.1	1824.36	590.53	18.24	2.90
	0.25	1738.69	650.02	17.39	2.86
	0.5	1572.85	814.15	15.73	2.76
	1.0	1306.77	1081.31	13.07	2.57
	4.0	734.07	1274.07	7.34	1.99
50	0.1	1931.44	694.74	19.31	2.96
	0.25	1887.58	794.33	18.88	2.94
	0.5	1804.82	1062.30	18.05	2.89
	1.0	1667.13	1565.53	16.67	2.81
	4.0	1241.70	2409.19	12.42	2.52

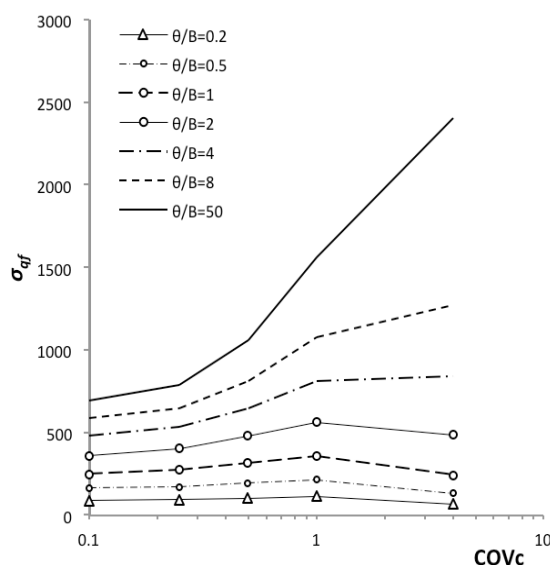
Z porównania poniższych Rysunków (6-10(a) i 6-10(b)) wynika, że przy współczynniku zmienności spójności $COV_c \leq 1$ ($\leq 100\%$), czyli istotnym z inżynierskiego punktu widzenia, zmienności oporu podłoża, uzyskane przez Fentona i Griffithsa (2003) oraz przez autorkę poniższej pracy, można uznać za zbliżone. Wszystkie krzywe na Rysunku 6-10(b), odpowiadające współczynnikom zmienności COV_c , posiadają lokalne minima na przedziale $\theta/B \in [0.5:1]$, analogicznie jak krzywe na Rysunku 6-10(a).



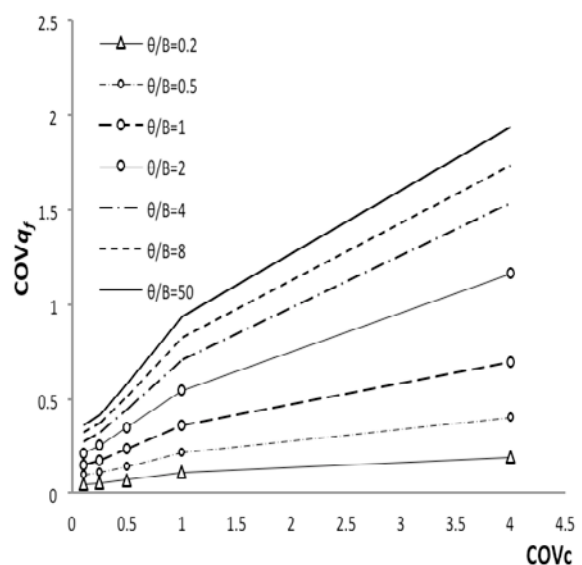
Rysunek 6-10 Zależności wartości średniej parametru $\ln M_c$ od skali fluktuacji dla różnych współczynników zmienności spójności (a) za pracę (Fenton & Griffiths, 2003); (b) wyniki autorki

Również wzorem podrozdziału 6.1 autorka zestawiała na Rysunku 6-11 wykres odchylenia standardowego (σ_{qf}) oraz na Rysunku 6-12 wykres współczynnika zmienności oporu (COV_{qf}) w funkcji współczynnika zmienności spójności (COV_c). Analizy σ_{qf} oraz COV_{qf} nie były przeprowadzone w ramach pracy (Fenton & Griffiths, 2003).

Na Rysunku 6-11 zaobserwowano lokalne maksima wartości odchylenia standardowego na krzywych odpowiadających skalom $\theta/B \leq 2$. Efekt ten obserwuje się dla współczynnika zmienności $COV_c = 1$. Jest to analogiczna sytuacja do prezentowanej na Rysunku 6-8(b), dla gruntu idealnie spoiściego.



Rysunek 6-11 Odchylenie standardowe w zależności od współczynnika zmienności spójności



Rysunek 6-12 Współczynnik zmienności oporu w zależności do współczynnika zmienności spójności

Tabela 6-6 Współczynniki zmienności oporu granicznego podłoża ($COV\phi=0.2$)

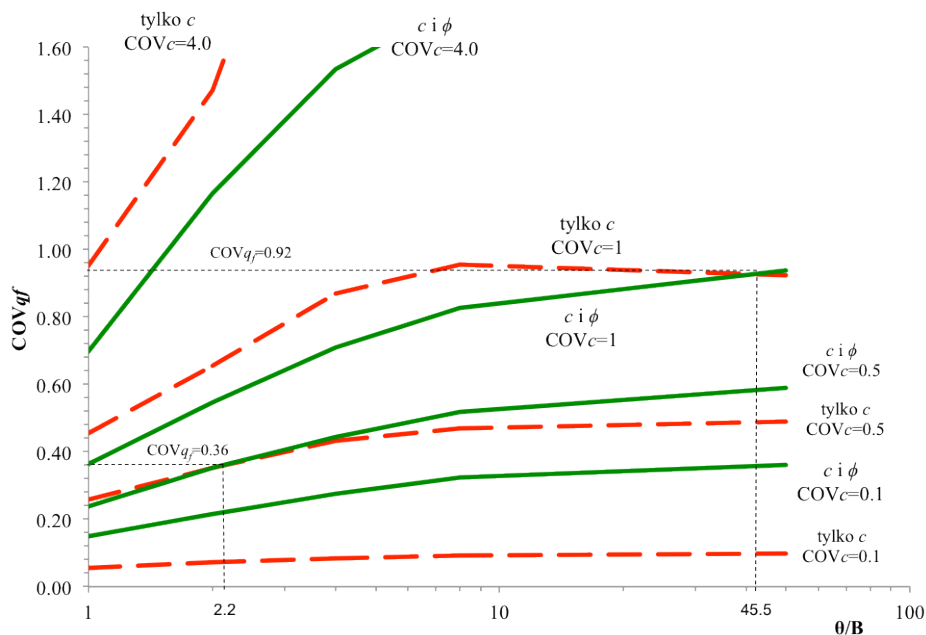
θ [m]	COV_c [-]	COV_{q_f} tylko c	COV_{q_f} c i ϕ
0.5	0.1	0.04	0.10
	0.25	0.09	0.11
	0.5	0.17	0.15
	1	0.29	0.22
	4.0	0.58	0.41
1	0.1	0.06	0.15
	0.25	0.14	0.18
	0.5	0.26	0.24
	1	0.46	0.36
	4.0	0.95	0.70
2	0.1	0.07	0.21
	0.25	0.18	0.26
	0.5	0.35	0.35
	1	0.66	0.55
	4.0	1.47	1.17
4	0.1	0.08	0.28
	0.25	0.21	0.32
	0.5	0.43	0.44
	1	0.87	0.71
	4.0	2.47	1.54
8	0.1	0.09	0.32
	0.25	0.23	0.37
	0.5	0.47	0.52
	1	0.95	0.83
	4.0	3.25	1.74
50	0.1	0.10	0.36
	0.25	0.25	0.42
	0.5	0.49	0.59
	1	0.92	0.94
	4.0	2.19	1.94

Rysunek 6-12 odpowiada wykresowi dla gruntu idealnie spoistego w zakresie rosnącego charakteru wszystkich krzywych, odpowiadających skalom fluktuacji. Jakkolwiek nośności uzyskane w przykładzie dla gruntu idealnie spoistego (pkt. 6.1) oraz dla gruntu typu $c-\phi$ (pkt. 6.2.1.) są nieporównywalne, to jednak można pokusić się o porównanie współczynników zmienności oporu granicznego dla obu tych przypadków. Porównanie to wykonano przy stałej wartości współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego ($COV\phi=0.2$). Wyniki prezentuje Tabela 6-6.

Jak można zauważyć na Rysunku 6-13, dla małych współczynników zmienności spójności ($COV_c < 0.5$) przyjęcie losowego kąta tarcia wewnętrznego powoduje wzrost zmienności oporu. W przypadku zmienności spójności na poziomie 0.5 obserwuje się zjawisko zrównania się współczynnika zmienności oporu, oszacowanego dla gruntu idealnie spoistego, ze współczynnikiem zmienności oporu uwzględniającym losowy charakter kąta tarcia wewnętrznego. Dla $COV_c > 0.5$ maleje wpływ kąta tarcia wewnętrznego na rzecz

współczynnika zmienności spójności. Jednocześnie zmienność samego oporu znacznie rośnie wraz ze wzrostem współczynnika zmienności spójności.

Oprócz różnicy między współczynnikami zmienności oporu, o czym była mowa w akapicie wyżej, na Rysunku 6-13 zmienia się również relacja między poszczególnymi krzywymi, wraz ze wzrostem skali fluktuacji. W przypadku $COV_c=0.5$ krzywa odpowiadająca gruntowi idealnie spoistemu oraz krzywa odpowiadająca gruntowi typu $c-\phi$ przecinają się w punkcie $\theta/B=2.2$, czemu odpowiada $COV_{qf}=0.36$. Podobną sytuację obserwuje się dla $COV_c=1$. Linie przecinają się przy skali $\theta/B=45.5$, czemu odpowiada $COV_{qf}=0.92$.



Rysunek 6-13 Współczynnik zmienności oporu w zależności od skali fluktuacji (linie czerwone dotyczą gruntu idealnie spoistego, linie zielone gruntu uwzględniającego kąt)

6.2.3. ANALIZA WPŁYWU WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI KĄTA TARCIA WEWNĘTRZNEGO NA LOSOWĄ NOŚNOŚĆ

Bazując nadal na pierwotnym algorytmie obliczeniowym postanowiono zbadać zachowanie oporu granicznego podłoża pod wpływem różnych współczynników zmienności kąta tarcia wewnętrznego (COV_ϕ), zachowując jednocześnie spójność modelowaną przez lognormalne pole losowe. W punkcie 6.2.2 przyjęto stałą zmienność kąta na poziomie $COV_\phi=0.2$, natomiast przedmiotem analiz była zmienna wariancja spójności. W poniższym punkcie współczynnik zmienności spójności ustalono na stałym poziomie $COV_c=0.5$, badano natomiast zachowanie zmienności oporu jako funkcji

różnych wartości wariancji kąta tarcia wewnętrznego. Parametry podłoża zestawiono w Tabeli 6-7, natomiast wartości rozpatrywanych współczynników kąta tarcia wewnętrznego w Tabeli 6-8. Wartości skali fluktuacji pozostała niezmienną, w stosunku do zadań poprzednich, dzięki temu możliwe było odniesienie wyników i analiza porównawcza. Poniższy grunt w dalszej części pracy określany będzie mianem Podłoża nr 1, co pozwoli na łatwiejszą identyfikację w dalszych analizach.

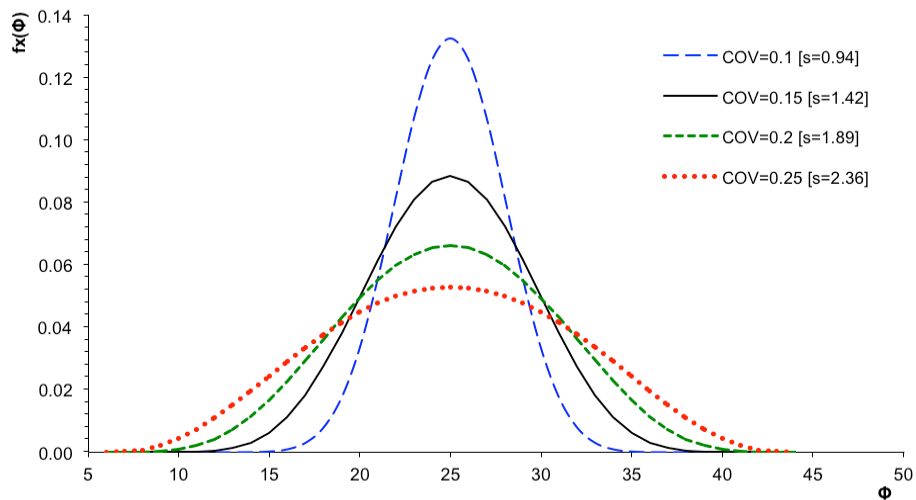
Tabela 6-7 Parametry gruntu dla zadania uwzględniającego zmienność kąta tarcia wewnętrznego (Podłoża nr 1)

	wartość średnia,	rozkład,	ϕ_{min}	ϕ_{max}	odchylenie standardowe
Kohezja (c)	100 kPa	lognormalny			50
Kąt tarcia wewnętrznego (ϕ)	25°	ograniczony	5	45	
Kąt dylatacji (ψ)	0°	parametr nielosowy			
Moduł Younga (E)	100 MPa	parametr nielosowy			
Współczynnik Poissona (ν)	0.3	parametr nielosowy			
Szerokość fundamentu (B)	1 m	parametr nielosowy			

Tabela 6-8 Wielkości zmieniane w zadaniu uwzględniającym zmienność kąta tarcia wewnętrznego

	0.1	0.15	0.20	0.25		
Współczynnik zmienności dla kąta tarcia wewnętrznego (COV ϕ)	(s=0.94)	(s=1.42)	(s=1.89)	(s=2.36)		
Skala fluktuacji (θ [m])	0.2	0.5	1.0	2.0	8.0	50

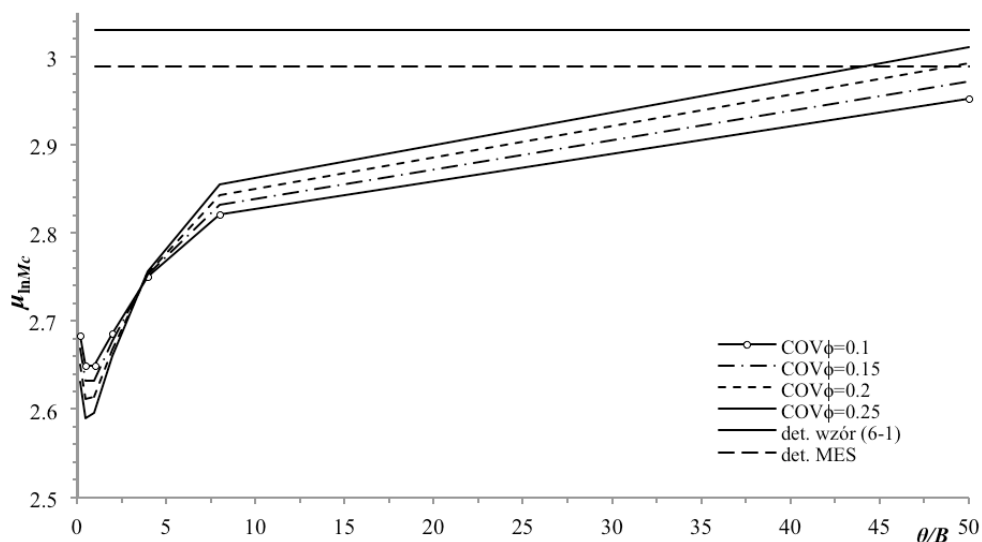
Doboru współczynników zmienności kąta dokonano poprzez analizę przebiegu funkcji gęstości rozkładu z ograniczonym nośnikiem typu tangensa hiperbolicznego. Jak pokazuje Rysunek 6-14 każdy z przyjętych współczynników zmienności kąta ϕ nadaje funkcji gęstości rozkładu „dzwonowaty” kształt, nie powodując zaburzeń na krawędziach przedziału (możliwych w przypadku dużych wartości czynnika zmienności – wykres przyjmuje kształt litery U). Jednocześnie stosunek wariancji do wartości średniej koresponduje z wnioskami płynącymi z Tabeli 5-1 (dla kąta tarcia wewnętrznego w gruntach spoistych określono zmienność w przedziale 0.1-0.56). Zgodnie z opisem teoretycznym (patrz. rozdział 5), zmiana wariancji kąta odbywa się poprzez zmianę parametru s .



Rysunek 6-14 Funkcja gęstości rozkładu z nośnikiem ograniczonym typu tangens hiperboliczny w zależności od kąta tarcia wewnętrznego

Wynik analitycznych obliczeń dla wartości średnich podstawionych do wzoru (6-1) to $q_{ult}=2072.05\text{kPa}$. Natomiast przy tych samych wartościach średnich wynik uzyskany metodą elementów skończonych jest równy $q_{MES}=1986.13\text{kPa}$ (wartość deterministyczna).

Rysunek 6-15 jest wykresem wartości średniej $\mu_{\ln M_c}$ w zależności od skali fluktuacji (θ/B). Wynika z niego, że wartość średnia nośności jest od pewnego punktu funkcją rosnącą w stosunku θ/B . Dla dużych wartości skali fluktuacji (ok. $\theta/B=45$) średnia wartość przekracza wartość deterministyczną uzyskaną metodą elementów skończonych. Takie wartości pionowej skali fluktuacji są jednak prawie nie obserwowalne w rzeczywistych badaniach podłoża gruntowego (patrz. Tabela 3-1).



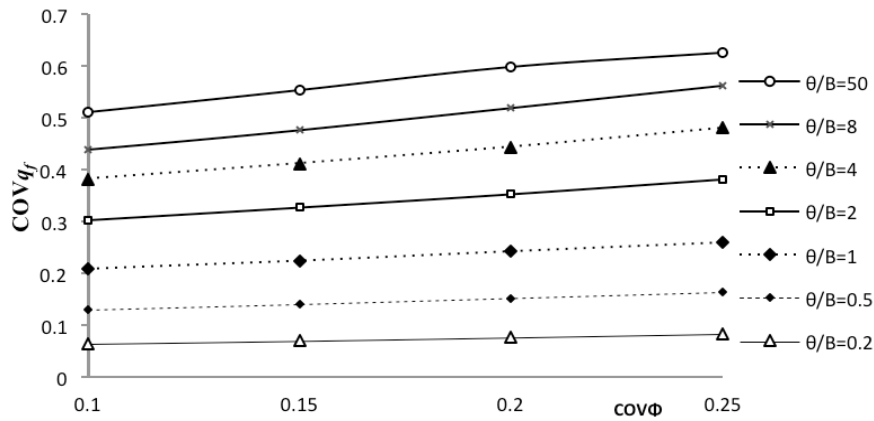
Rysunek 6-15 Zależności wartości średniej zlogarytmowanego parametru M_c od skali fluktuacji, dla różnych współczynników zmienności dla kąta tarcia wewnętrznego (Podłoże nr 1)

Tabela 6-9 zawiera wyniki symulacji komputerowych przeprowadzonych każdorazowo dla 300 realizacji. W efekcie wykonanych obliczeń uzyskano wartości średnie oraz odchylenia standardowe oporu granicznego podłoża. Ponadto dla każdej kombinacji θ oraz $\text{COV}\phi$ określono μ_{M_c} , czyli wartość średnią parametru M_c (6-3), gdzie jako q_f podstawiono kolejne wartości średnie μ_{q_f} oraz logarytm $\mu_{\ln M_c}$.

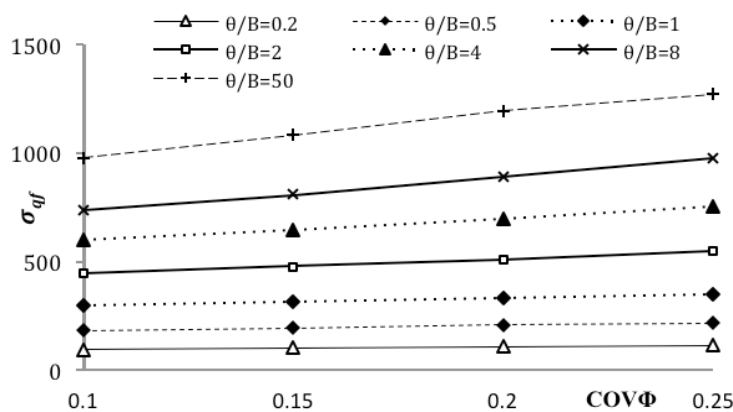
Tabela 6-9 Wyniki analiz przy zmiennym $\text{COV}\phi$ dla Podłoża nr 1

Skala fluktuacji	Współczynnik zmienności	Wartość średnia oporu	Odchylenie standardowe oporu	Parametr oporu	
θ [m]	$\text{COV}\phi$ [-]	μ_{q_f} [kPa]	σ_{q_f} [kPa]	μ_{M_c}	$\mu_{\ln M_c}$
0.2	0.1	1464.39	93.90	14.64	2.68
	0.15	1441.98	100.86	14.42	2.67
	0.2	1416.19	108.41	14.16	2.65
	0.25	1388.70	115.92	13.89	2.63
0.5	0.1	1415.01	182.29	14.15	2.65
	0.15	1390.77	194.21	13.91	2.63
	0.2	1362.14	206.06	13.62	2.61
	0.25	1332.44	217.10	13.32	2.59
1	0.1	1415.58	295.53	14.16	2.65
	0.15	1390.20	311.01	13.90	2.63
	0.2	1366.76	330.57	13.67	2.62
	0.25	1340.27	347.02	13.40	2.60
2	0.1	1467.80	443.50	14.68	2.69
	0.15	1455.18	475.40	14.55	2.68
	0.2	1440.84	507.69	14.41	2.67
	0.25	1430.89	545.15	14.31	2.66
4	0.1	1564.79	596.65	15.65	2.75
	0.15	1568.17	645.13	15.68	2.75
	0.2	1570.46	695.97	15.70	2.75
	0.25	1573.88	754.71	15.74	2.76
8	0.1	1679.28	734.56	16.79	2.82
	0.15	1697.15	808.11	16.97	2.83
	0.2	1717.32	890.99	17.17	2.84
	0.25	1738.42	976.97	17.38	2.86
50	0.1	1916.04	976.74	19.16	2.95
	0.15	1952.88	1079.84	19.53	2.97
	0.2	1994.59	1192.00	19.95	2.99
	0.25	2030.96	1269.74	20.31	3.01

Pewnym zaskoczeniem może być punkt przecięcia wszystkich krzywych na Rysunku 6-15. Dla $\theta/B=4$ zaobserwowano, że wszystkie wartości średnie $\mu_{\ln M_c}$, odpowiadające poszczególnym współczynnikom zmienności kąta, są w przybliżeniu równe. Ponadto dla $\theta/B>4$, większym wartością $\text{COV}\phi$ odpowiada większa wartość średnia $\mu_{\ln M_c}$, podczas gdy dla $\theta/B<4$ większym $\text{COV}\phi$ odpowiada mniejsza wartość średnia $\mu_{\ln M_c}$. Fakt ten można by uznać za pozornie paradoksalny, jednak obserwacja zależności współczynnika zmienności nośności $\text{COV}q_f$ od $\text{COV}\phi$ (Rysunek 6-16) pokazuje zgodną z intuicją prawidłowość. Mianowicie losowość nośności (charakteryzowana przez $\text{COV}q_f$) wzrasta wraz ze wzrostem współczynnika zmienności kąta $\text{COV}\phi$ dla każdej skali fluktuacji.



Rysunek 6-16 Współczynnik zmienności oporu w zależności od skali fluktuacji; dla różnych współczynników zmienności kąta tarcia wewnętrznego (Podłoże nr 1)



Rysunek 6-17 Odchylenie standardowe oporu w zależności od współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego; dla różnych skal fluktuacji (Podłoże nr 1)

Rysunek 6-17 przedstawia zależność odchylenia standardowego nośności σ_{qf} od współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego $COV\phi$. Na pozór może dziwić fakt, że wzrost współczynnika zmienności $COV\phi$ bardzo nieznacznie wpływa na zmienność wariancji σ_{qf} . Powoduje to niewielki wpływ losowości kąta ϕ na losowy opór. Należy pamiętać, że w rozpatrywanym przykładzie dominujący charakter ma spójność, dla której współczynnik zmienności spójności wynosi $COVc=0.5$.

Wniosku tego nie można bezkrytycznie ekstrapolować na sytuacje kiedy proporcje ϕ i c będą inne. Aby uwolnić się od dominującej losowości spójności zanalizowano kolejny przykład, w którym proporcje ϕ i c były bardziej zbliżone do rzeczywistych (w warunkach polskich). W tym zadaniu przyjęto wartość średnią spójności na poziomie $\mu_c=45kPa$ ze stałym współczynnikiem zmienności $COVc=0.2$. Parametry tego zadania prezentują Tabela 6-10 i Tabela 6-11. Poniższy grunt w dalszej części pracy określane będzie mianem Podłoża nr 2. Wartość oporu wyznaczona metodą elementów skończonych wyniosła $q_{MES}=785.31kPa$. Natomiast wartość deterministyczna wyznaczona na podstawie wzoru

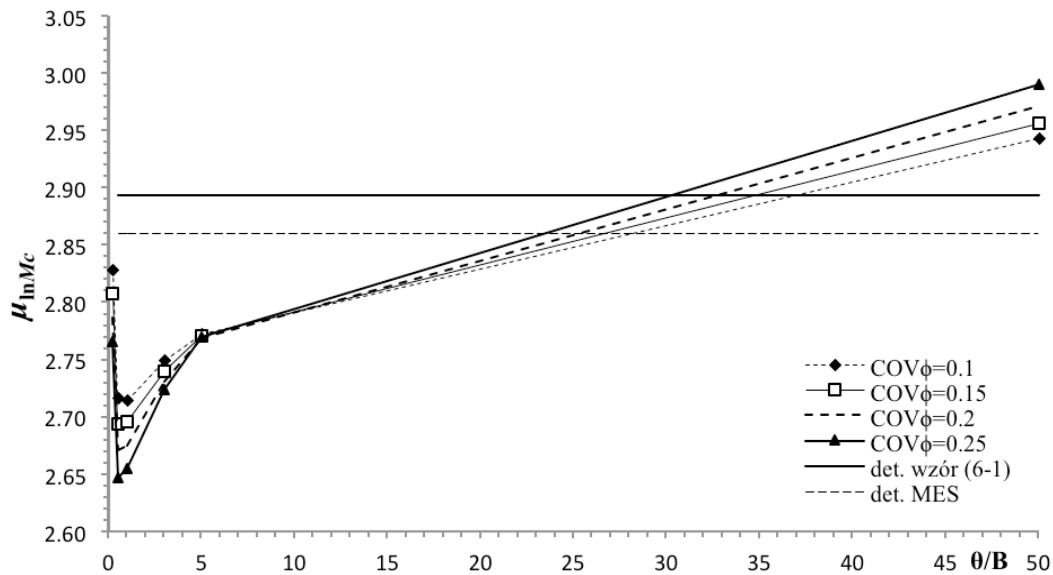
(6-1) $q_{ult}=812.19\text{kPa}$. Wyniki symulacji Monte Carlo przedstawiono na Rysunku 6-18 oraz pokazano w Tabeli 6-12.

Tabela 6-10 Parametry gruntu dla zadania uwzględniającego zmienność kąta tarcia wewnętrznego (Podłoże nr 2)

	wartość średnia,	rozkład,	ϕ_{min}	ϕ_{max}	odchylenie standardowe
Kohezja (c)	45 kPa	lognormalny			9
Kąt tarcia wewnętrznego (ϕ)	23°	ograniczony	5	41	
Kąt dylatacji (ψ)	0°	parametr nielosowy			
Moduł Younga (E)	100 MPa	parametr nielosowy			
Współczynnik Poissona (ν)	0.3	parametr nielosowy			
Szerokość fundamentu (B)	1 m	parametr nielosowy			

Tabela 6-11 Wielkości zmieniane w zadaniu uwzględniającym zmienność kąta tarcia wewnętrznego

Współczynnik zmienności	0.1	0.15	0.20	0.25		
dla kąta tarcia wewnętrznego ($COV\phi$)	($s=0.94$)	($s=1.41$)	($s=1.88$)	($s=2.35$)		
Skala fluktuacji (θ [m])	0.2	0.5	1.0	3.0	5.0	50

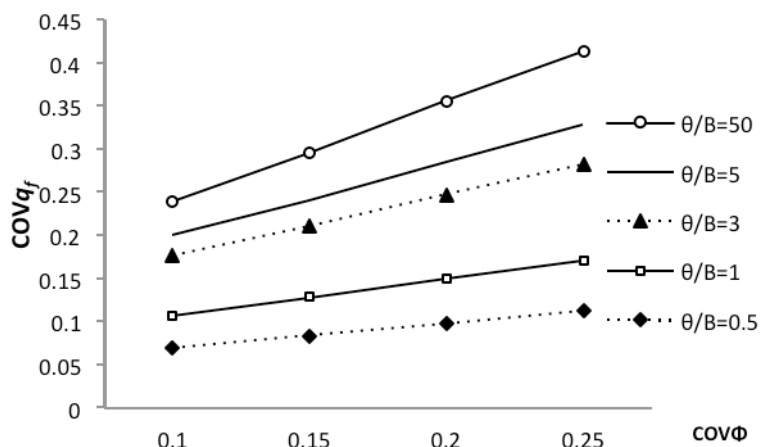


Rysunek 6-18 Zależności wartość średniej zlogarytmowanej parametru M_c od skali fluktuacji, dla różnych współczynników zmienności kąta tarcia wewnętrznego (Podłoże nr 2)

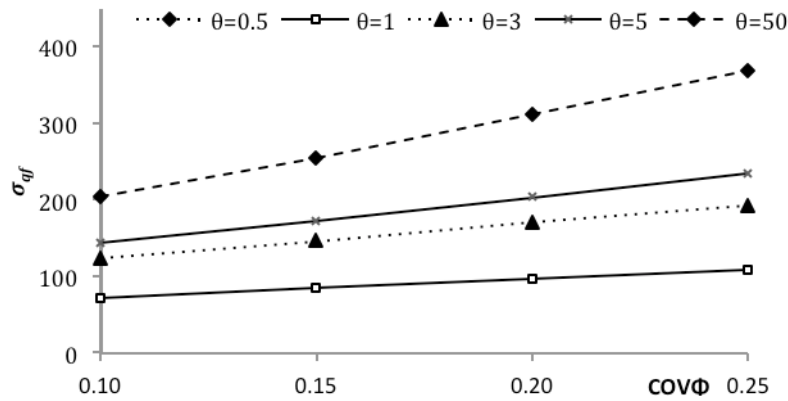
Tabela 6-12 Wyniki analiz przy zmiennym $COV\phi$ dla Podłoża nr 2

Skala fluktuacji	Współczynnik zmienności	Wartość średnia oporu	Odchylenie standardowe		
			oporu	Parametr oporu	
θ [m]	$COV\phi$ [-]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	μ_{Mc}	μ_{lnMc}
0.2	0.1	761.21	28.57	16.92	2.83
	0.15	745.83	33.36	16.57	2.81
	0.2	730.62	37.45	16.24	2.79
	0.25	715.21	41.92	15.89	2.77
0.5	0.1	680.45	46.76	15.12	2.72
	0.15	665.49	55.22	14.79	2.69
	0.2	649.97	63.37	14.44	2.67
	0.25	635.11	70.92	14.11	2.65
1	0.1	679.66	72.52	15.10	2.71
	0.15	666.67	85.52	14.81	2.70
	0.2	653.01	97.89	14.51	2.67
	0.25	639.88	109.52	14.22	2.65
3	0.1	703.32	123.83	15.63	2.75
	0.15	696.71	147.02	15.48	2.74
	0.2	690.84	170.58	15.35	2.73
	0.25	685.54	193.21	15.23	2.72
5	0.1	719.81	143.64	16.00	2.77
	0.15	718.27	172.78	15.96	2.77
	0.2	717.71	204.31	15.95	2.77
	0.25	718.04	235.44	15.96	2.77
50	0.1	854.29	204.24	18.98	2.94
	0.15	864.71	255.30	19.22	2.96
	0.2	878.48	312.16	19.52	2.97
	0.25	895.01	369.31	19.89	2.99

Obserwowany przebieg krzywych, wartości średniej μ_{Mc} prezentowany na Rysunku 6-18 odpowiada analogicznemu rysunkowi w poprzednim przykładzie (Rysunek 6-15). Charakter zależności współczynnika zmienności $COVq_f$ od $COV\phi$, prezentowany na Rysunku 6-19, jest także analogiczny do uzyskanego w poprzednim przykładzie.



Rysunek 6-19 Współczynnik zmienności oporu w zależności od współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego, dla różnych skal fluktuacji (Podłoża nr 2)



Rysunek 6-20 Odchylenie standardowe w zależności od współczynnika kąta tarcia wewnętrznego, dla różnych skal fluktuacji (Podłoże nr 2)

Również odchylenie standardowe w przypadku Podłoża nr 2 zachowuje się podobnie jak w przypadku Podłoża nr 1 (przykład poprzedni). Generalnym wnioskiem płynącym z obu analiz jest większy aniżeli poprzednio wpływ losowej zmienności kąta na losowy opór podłoża.

6.3. UWAGI DO ROZDZIAŁU

W powyższym rozdziale dokonano kalibracji algorytmu obliczeniowego rbear2d (Fenton i Griffiths, RFEM Software) poprzez powtórzenie wyników opublikowanych w pracach (Griffiths i Fenton, 2001) oraz (Fenton i Griffiths, 2003). Na początku poddano analizie nośność na losowym podłożu idealnie spoistym. Wyniki uzyskane przez autorkę w zakresie wartości średniej oporu, jego wariancji i współczynnika zmienności w zasadzie pokryły się z wynikami Griffithsa i Fentona. Następnie przeprowadzono obliczenia dla podłoża typu $c-\phi$, dla którego w zakresie wartości średnich wyniki autorki potwierdziły rezultaty Griffithsa i Fentona. Dodatkowo autorka zanalizowała odchylenia standardowe i współczynniki zmienności oporu podłoża. Zaobserwowano, że zarówno odchylenie standardowe jak i współczynnik zmienności rosną wraz ze wzrostem skali fluktuacji. Kolejnym rozszerzeniem opublikowanych rezultatów było porównanie współczynnika zmienności oporu dla gruntu idealnie spoistego oraz gruntu typu $c-\phi$ (dla tych samych parametrów wytrzymałościowych), przy różnych współczynnikach zmienności spójności. W ten sposób autorka wyselekcjonowała wpływ pola losowego kąta tarcia wewnętrznego na losowy opór.

Nowym elementem opracowanym przez autorkę jest punkt 5.2.2., w którym losowe charakterystyki nośności badano pod kątem różnych współczynników zmienności kąta

tarcia wewnętrznego. Obliczenia prowadzono dla dwóch różnych typów podłoża: Podłoże nr 1 (stosowany przez Fentona i Griffithsa, 2003) oraz Podłoże nr 2. To drugie zdaniem autorki jest bliższe naturalnym gruntem występującym na terenie Polski. Oba typy podłoża zachowywały się analogicznie, co pozwala mieć nadzieję na ogólny charakter wniosków wynikających z prezentowanych tu obliczeń.

Niestety w ogólnym przypadku nie da się stwierdzić, który z parametrów wytrzymałościowych: spójność czy kąta tarcia wewnętrznego, ma większy wpływ na losową zmienność oporu podłoża. Wynika to z faktu, że w zależności od podłoża w warunkach naturalnych zmienność tych pól może wahać się bardzo różnym stopniu.

Z punktu widzenia niezawodności oraz badania bezpieczeństwa współpracy fundamentu z podłożem najistotniejsze jest poznanie zakresu współczynnika zmienności oporu, gdyż to on decyduje bezpośrednio o prawdopodobieństwie awarii.

7. OSZACOWANIE LOSOWEJ NOŚNOŚCI POSADOWIENIA BEZPOŚREDNIEGO NA PODŁOŻU O CECHACH ANIZOTROPOWYCH

Wykazywanie odmiennych właściwości, w zależności od kierunku rozpatrywania jest naturalną cechą podłoża gruntowego. Zachodzą w nim zmiany powierzchniowe, związane z naturalną ewolucją, od masywu skalnego przez degradację erozyjną, ośrodki rozdrobnione, po wysoko żyzne gleby uprawne. Wynika z tego, że modele uwzględniające inną zmienność na kierunku poziomym i pionowym (modele anizotropowe) są bardziej adekwatne do opisu podłoża, aniżeli modele przyjmujące, że podłoże zmienia się jednakowo w każdym kierunku (modele izotropowe). Problem ten był już sygnalizowany w punkcie 3.3.3.

W tym rozdziale uwzględnienie anizotropowego charakteru właściwości wytrzymałościowych podłoża będzie modelowane w możliwie najprostszym sposobie, tj. poprzez założenie że pionowa skala fluktuacji (θ_y) jest różna od skali poziomej (θ_x). Należy podkreślić, że we wcześniejszych pracach (Griffiths & Fenton, 2001 oraz Fenton & Griffiths, 2003) dotyczących analizy nośności metodą RFEM takie podejście nie było jeszcze stosowane.

Układ treści, aż do punktu 7.2.3, odpowiada prezentowanemu w rozdziale 6. W punkcie 7.2.3 analizuje się efekt pionowej i poziomej skali fluktuacji na losowy opór podłoża. Autorka założyła sobie trzy następujące cele:

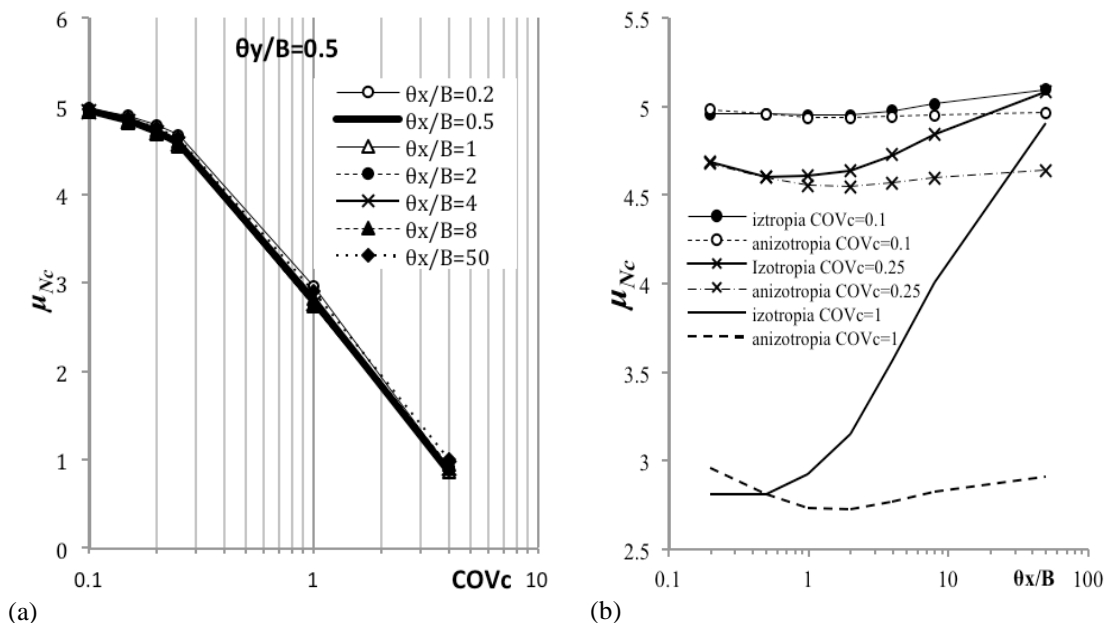
1. Prezentacja wyników uzyskanych przy założeniu, że skala fluktuacji w kierunku poziomym jest różna od skali w kierunku pionowym ($\theta_x \neq \theta_y$).
2. Wskazanie różnic jakie wynikają z założenia $\theta_x \neq \theta_y$, w stosunku do przypadku izotropowego ($\theta_x = \theta_y$)

3. Pokazanie, że uwzględnienie założenia $\theta_x \neq \theta_y$ może być istotne dla oceny bezpieczeństwa posadowienia bezpośredniego.

7.1. PODŁOŻE IDEALNIE SPOISTE

Na początku poddano analizie ponownie podłożę „idealnie spoiste” ($\phi=0$). Parametry wejściowe przyjęto jak dla Podłoża nr 1 (Tabela 6-1 i Tabela 6-2; pkt. 6.1). Założono jedną, stałą skalę pionową $\theta_y=0.5m$, podczas gdy przedmiotem analizy parametrycznej była zmienność oporu dla różnych skali poziomych (θ_x) oraz różnych współczynników zmienności spójności (COV_c). Podsumowanie rezultatów symulacji Monte Carlo zawiera Tabela 7-1.

Wykres zależności wartości średniej współczynnika nośności (μ_{Nc}) od COV_c prezentuje Rysunek 7-1(a). Charakter zmienności jest podobny do przypadku izotropowego, który na poniższym wykresie reprezentuje krzywa $\theta_x=\theta_y=0.5$. Wykresy kolejnych poziomych skal fluktuacji niemal pokrywają się ze sobą, co mogłoby być tłumaczone nieznacznym wpływem poziomej skali fluktuacji na losowy opór. Jednakże obserwując Rysunek 7-1(b), pokazujący zależność wartości średniej współczynnika nośności od poziomej skali fluktuacji, wyraźnie zarysowuje się wpływ θ_x . Liniami ciągłymi zaznaczono krzywe odpowiadające przypadkowi izotropowemu pola losowego spójności, natomiast liniami przerywanymi przypadki pola anizotropowego.



Rysunek 7-1 Wartość średnia współczynnika nośności
 (a) w zależności od współczynnika zmienności spójności, dla różnych skal poziomych;
 (b) w funkcji poziomych skali fluktuacji dla $COV_c=0.1$, $COV_c=0.25$, $COV_c=1$

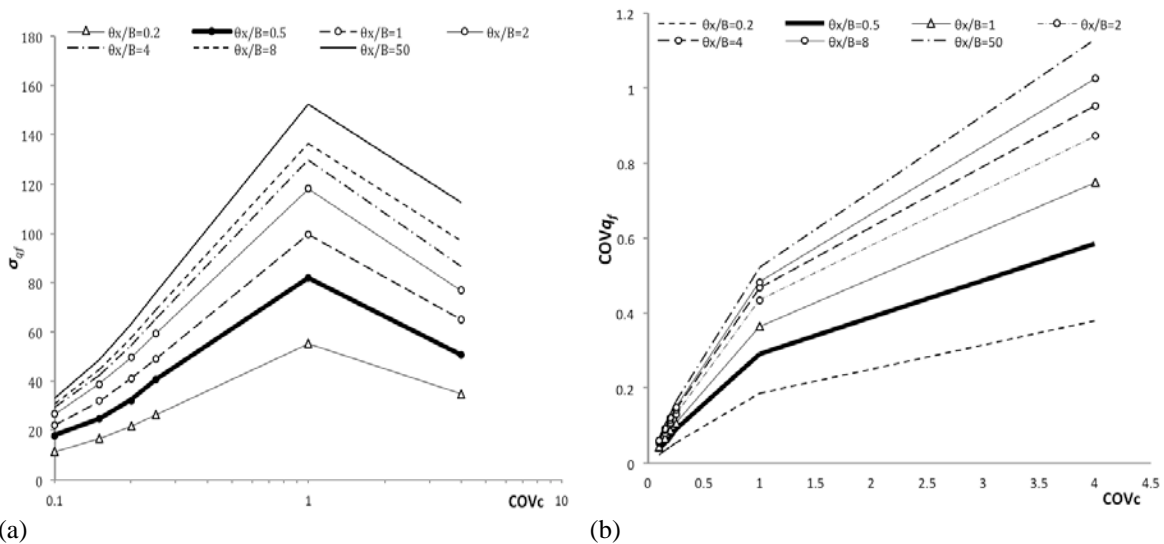
Tabela 7-1 Wyniki analiz przy zmiennym COV_c dla modelu anizotropowego podłoża idealnie spoiściego

Pozioma skala fluktuacji	Współczynnik zmienności spójności	Wartość średnia oporu	Wartość średnia odchylenia standardowego	Współczynnik zmienności oporu	Wartość średnia współczynnika nośności N_c
θ_x [m]	COV_c [-]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	COV_{qf}	μ_{N_c}
0.2	0.1	498.25	11.53	0.02	4.98
	0.15	489.28	16.86	0.03	4.89
	0.2	479.05	21.80	0.05	4.79
	0.25	467.91	26.36	0.06	4.68
	1	296.10	55.45	0.19	2.96
	4	91.55	34.86	0.38	0.92
0.5	0.1	495.95	17.98	0.04	4.96
	0.15	484.47	24.72	0.05	4.84
	0.2	471.97	32.24	0.07	4.72
	0.25	459.94	40.83	0.09	4.60
	1	281.29	81.89	0.29	2.81
	4	86.75	50.73	0.58	0.87
1	0.1	493.67	22.00	0.04	4.94
	0.15	481.92	31.98	0.07	4.82
	0.2	468.94	41.02	0.09	4.69
	0.25	455.26	49.17	0.11	4.55
	1	273.41	99.65	0.36	2.73
	4	86.87	65.11	0.75	0.87
2	0.1	493.54	26.81	0.05	4.94
	0.15	481.63	38.89	0.08	4.82
	0.2	468.45	49.69	0.11	4.68
	0.25	454.54	59.34	0.13	4.55
	1	272.61	118.25	0.43	2.73
	4	88.27	76.99	0.87	0.88
4	0.1	494.31	29.29	0.06	4.94
	0.15	482.90	42.47	0.09	4.83
	0.2	470.24	54.40	0.12	4.70
	0.25	456.83	65.22	0.14	4.57
	1	277.13	129.76	0.47	2.77
	4	90.92	86.56	0.95	0.91
8	0.1	495.23	30.65	0.06	4.95
	0.15	484.49	44.61	0.09	4.84
	0.2	472.52	57.39	0.12	4.73
	0.25	459.73	68.99	0.15	4.60
	1	282.52	136.42	0.48	2.83
	4	94.46	96.89	1.03	0.94
50	0.1	496.54	33.24	0.07	4.97
	0.15	486.88	48.81	0.10	4.87
	0.2	475.90	63.12	0.13	4.76
	0.25	463.96	76.11	0.16	4.64
	1	291.24	152.51	0.52	2.91
	4	99.69	112.60	1.13	1.00

Zaobserwowano, że przyjęcie izotropowej struktury korelacyjnej w polu spójności może prowadzić do zawyżania wartości średniej współczynnika nośności (N_c). Zatem założenie izotropowej struktury pola spójności może być niekorzystne z punktu oszacowania bezpieczeństwa posadowień bezpośrednich.

Rysunek 7-2(a) przedstawia wykres odchylenia standardowego oporu podłoża (σ_{qf}) w zależności od poziomej skali fluktuacji (θ_x/B) dla różnych wartości współczynnika zmienności spójności (COV_c). Zasadniczo przebieg krzywych jest analogiczny jak dla pola izotropowego (skala $\theta_x/B=0.5$, Rysunek 6-8(b)). Jednakże wyraźnie widać efekt anizotropii – w przypadku pola anizotropowego ze wzrostem skali poziomej spójności wyraźnie wzrasta odchylenie standardowe (wzrost o 100% dla skali $\theta_x/B=50$).

Podobna sytuacja dotyczy wykresu współczynnika zmienności oporu (Rysunek 7-2(b)). Wszystkie krzywe przebiegają analogicznie do przypadku izotropowego (skala $\theta_x/B=0.5$, Rysunek 6-9(b)). Aczkolwiek przyjmując większą skalę poziomą pola spójności obserwujemy istotny wzrost zmienności oporu. Dla małych współczynników zmienności spójności ($COV_c < 0.5$) wahania współczynnika zmienności oporu (COV_{qf}) wynikające z różnych wartości poziomej skali fluktuacji są nieduże, rosną natomiast istotnie w przypadku $COV_c \geq 0.5$.



Rysunek 7-2 Zależności (a) odchylenia standardowego oporu podłoża; (b) współczynnika zmienności oporu podłoża od współczynnika zmienności spójności dla poziomej skali fluktuacji (pogrubiona linia ciągła oznacza przypadek izotropowy $\theta_x = \theta_y = 0.5m$)

7.2. PODŁOŻE TYPU $c-\phi$

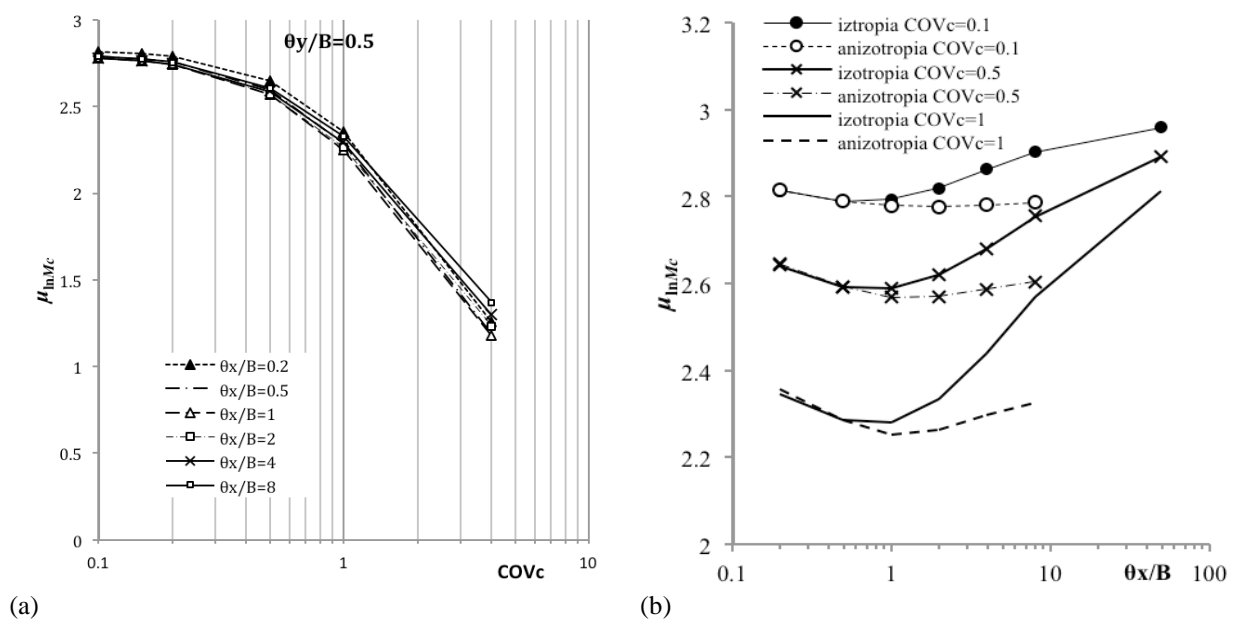
W podrozdziale przedstawiono rezultaty symulacji Monte Carlo oraz wnioski przeprowadzone dla gruntu typu $c-\phi$, o anizotropowych polach spójności i kąta tarcia wewnętrznego. Dla obu pól losowych przyjmowano jednakową strukturę korelacyjną ($\theta_c = \theta_\phi = \theta$), co wynika ze struktury gruntu jako ośrodka o nierozłącznych cechach spójności i tarcia (patrz pkt 5.2.3).

Podrozdział składa się z trzech części. W pierwszej skupiono się na wpływie jedynie poziomej skali fluktuacji (θ_x) oraz współczynnika zmienności spójności (COV_c) na losowy opór. W drugiej części przedstawiono rezultaty dla różnych współczynników zmienności kąta (COV_ϕ). W części trzeciej – analizowano wpływ zmian obu skali fluktuacji ($\theta_x \neq \theta_y$) na losowy opór, przy stałych współczynnikach zmienności spójności i kąta.

7.2.1. ANALIZA WPLYWU WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI SPÓJNOŚCI I POZIOMEJ SKALI FLUKTUACJI

Poniżej opisane zadanie jest odpowiednikiem przykładu z punktu 7.1, w zakresie rozpatrywanych COV_c oraz przyjętych poziomych (θ_x) i pionowych (θ_y) skal fluktuacji. Parametry gruntu przyjęto jak dla Podłoża nr 1 (Tabela 6-4, za pracą Fenton i Griffiths, 2003). Przyjęto współczynnik zmienności kąta tarcia wewnętrznego $COV_\phi=0.2$ oraz pionową skalę fluktuacji $\theta_c=\theta_\phi=\theta_y=0.5m$. Współczynnik zmienności spójności COV_c i skala pozioma θ_x były przedmiotem analizy parametrycznej. Rezultaty przedstawia Tabela 7-2.

Rysunek 7-3(a) prezentuje zależność wartości średniej parametru μ_{lnM_c} od COV_c . Wraz ze wzrostem współczynnika COV_c obserwuje się redukcję wartości średniej oporu, zdefiniowanego jako μ_{lnM_c} , analogiczną do punktu 7.1 oraz do izotropowych odpowiedników (pkt 6.1 i 6.2.2).



Rysunek 7-3 Wartość średnia parametru lnM_c w zależności od (a) współczynnika zmienności spójności, (b) poziomej skali fluktuacji

Charakter zmian wartości średniej μ_{nMc} jest analogiczny jak w przypadku gruntu idealnie spoiściego (Rysunek 7-1(a)), gdzie wartości średnie istotnie maleją wraz ze wzrostem COV_c .

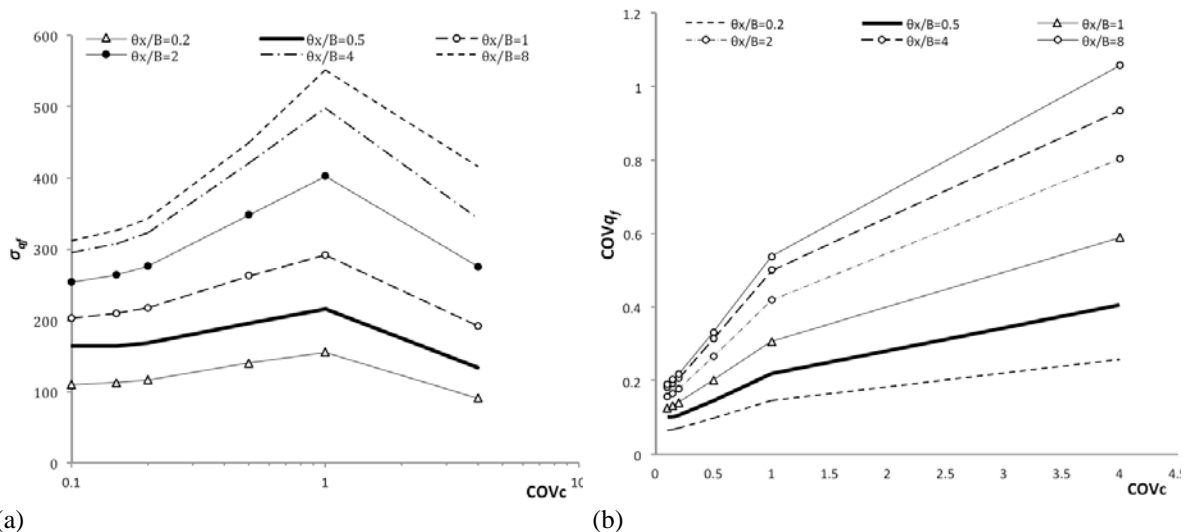
Tabela 7-2 Wyniki analizy przy zmiennym COV_c dla Podłoża nr 1

θ_x [m]	COV_c [-]	μ_{af} [kPa]	σ_{af} [kPa]	COV_{qf}	μ_{Nc}
0.2	0.1	1669.95	109.56	0.07	16.70
	0.15	1649.68	112.04	0.07	16.50
	0.2	1622.77	116.18	0.07	16.23
	0.5	1408.62	139.72	0.10	14.09
	1	1054.63	155.05	0.15	10.55
	4	351.15	90.66	0.26	3.51
0.5	0.1	1626.12	164.03	0.10	16.26
	0.15	1604.39	163.62	0.10	16.04
	0.2	1573.06	168.10	0.11	15.73
	0.5	1336.62	195.46	0.15	13.37
	1	983.41	216.37	0.22	9.83
	4	327.58	133.35	0.41	3.28
1	0.1	1609.86	203.10	0.13	16.10
	0.15	1583.87	210.14	0.13	15.84
	0.2	1552.09	217.34	0.14	15.52
	0.5	1304.86	262.34	0.20	13.05
	1	949.58	291.78	0.31	9.50
	4	325.59	191.74	0.59	3.26
2	0.1	1607.00	254.07	0.16	16.07
	0.15	1583.00	263.60	0.17	15.83
	0.2	1551.44	275.80	0.18	15.51
	0.5	1306.92	348.06	0.27	13.07
	1	960.13	402.76	0.42	9.60
	4	342.76	275.49	0.80	3.43
4	0.1	1613.05	294.53	0.18	16.13
	0.15	1587.76	306.98	0.19	15.88
	0.2	1558.15	322.18	0.21	15.58
	0.5	1329.50	419.34	0.32	13.30
	1	992.67	497.40	0.50	9.93
	4	366.27	342.35	0.93	3.66
8	0.1	1622.21	310.91	0.19	16.22
	0.15	1599.41	325.21	0.20	15.99
	0.2	1570.34	342.28	0.22	15.70
	0.5	1350.25	448.70	0.33	13.50
	1	1023.52	550.46	0.54	10.24
	4	392.93	415.77	1.06	3.93

Rysunek 7-3(b) prezentuje zależność wartości średniej μ_{nMc} od poziomej skali fluktuacji θ_x/B , przy różnych wartościach współczynnika zmienności spójności COV_c . Dla małych wartości θ_x krzywe izotropowe (linie ciągłe) i anizotropowe (linie przerywane) pokrywają się. Wraz ze wzrostem θ_x wartość średnia μ_{nMc} w przypadku izotropowym znacznie rośnie, podczas gdy w przypadku anizotropowym prawie nie ulega zmianie. Pozostaje w mocy wniosek sformułowany w podrozdziale 7.1, że przyjęcie izotropowej struktury korelacyjnej dla pól losowych spójności i kąta tarcia wewnętrznego może prowadzić do zawyżenia wartości średniej nośności. Wynika to z faktu, że w gruntach

naturalnych skala θ_x jest znacznie większa od θ_y (patrz Tabela 3-1 i Tabela 3-2). Tym samym oszacowanie bezpieczeństwa posadowień bezpośrednich będzie bardziej realistyczne przy założeniu anizotropowej struktury pól.

Odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności oporu (Rysunek 7-4) zachowują się analogicznie jak w opisanym powyżej przykładzie izotropowym (Rysunek 6-11 i Rysunek 6-12) oraz w przypadku gruntu idealnie spójnego o cechach anizotropowych (Rysunek 7-2). Odchylenie standardowe (Rysunek 7-4(a)) ma maksimum dla $COV_c=1$ oraz podobnie jak współczynnik zmienności oporu (Rysunek 7-4(b)) znacznie rośnie razem z rosnącą skalą poziomą (θ_x/B). W przypadku gdy wartość poziomej skali fluktuacji przekracza wartość skali pionowej (pogrubiona linia ciągła) obserwujemy znaczny wzrost odchylenia standardowego i współczynnika zmienności.



Rysunek 7-4 Zależność (a) odchylenia standardowego oporu (b) współczynnika zmienności oporu od współczynnika zmienności spójności dla różnych poziomych skal fluktuacji (pogrubiona linia ciągła oznacza przypadek izotropowy $\theta_x = \theta_y = 0.5m$)

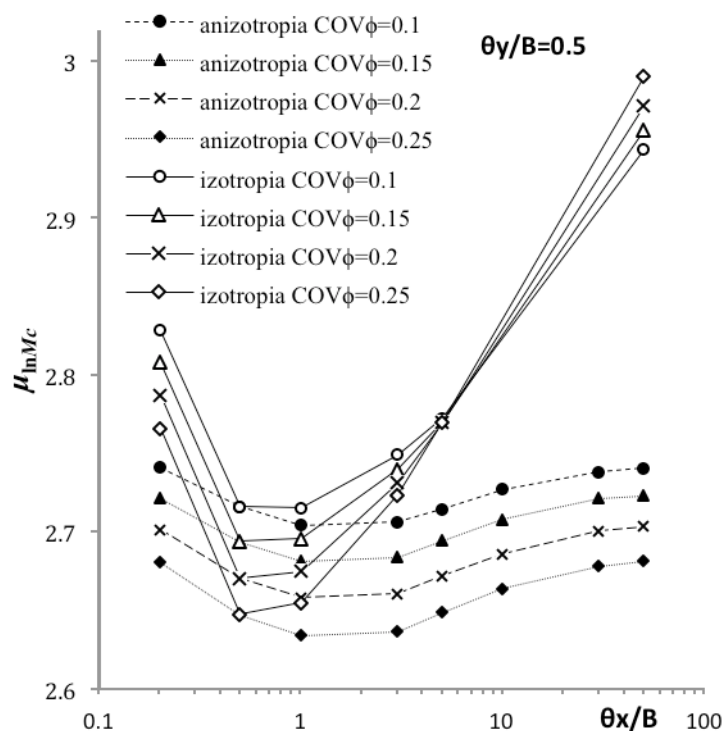
Podsumowując, niezależnie od przyjętego współczynnika zmienności spójności (COV_c), bądź też typu podłoża (czy analizowane jest podłoże modelowane jedynie polem losowym spójności czy też polami losowymi spójności i kąta tarcia wewnętrznego) wartość średnia (μ_{qf}), odchylenie standardowe (σ_{qf}) i współczynnik zmienności oporu (COV_{qf}) zmieniają się w podobny sposób wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji (θ_x). Przyjęcie różnych poziomych skal fluktuacji wpływa znacząco na zmienność oporu COV_{qf} , który znacznie wzrasta wraz z rosnącą skalą. Podobnie jak w przypadku wartości średniej, tak i tutaj pominięcie struktury anizotropowej może prowadzić do niedoszacowania losowej zmienności.

7.2.2. ANALIZA WPŁYWU WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI KĄTA TARCIA WEWNĘTRZNEGO $COV\phi$

W tym punkcie zajmowano się przypadkiem, w którym pole spójności posiadało stały współczynnik zmienności $COV_c=0.2$, zaś przedmiotem analizy parametrycznej był współczynnik zmienności kąta tarcia wewnętrznego ($COV\phi$) razem z poziomą skalą fluktuacji (θ_x/B). Pionowa skala została przyjęta również jako wielkość stała $\theta_y/B=0.5$.

Przyjęto do obliczeń parametry dla Podłoża nr 2 zamieszczone w Tabeli 6-10, zachowując współczynniki zmienności kąta identyczne jak w zadaniu izotropowym (Tabela 6-11). Podsumowanie rezultatów symulacji pokazano w Tabeli 7-3.

Na Rysunku 7-5 zestawiono krzywe anizotropowe razem z liniami izotropowymi dla kolejnych współczynników zmienności kąta (za Tabelą 6-3). Rysunek 7-5 prezentuje zależność wartości średniej μ_{lnMc} od poziomej skali fluktuacji.



Rysunek 7-5 Wartość średnia oporu w zależności od poziomej skali fluktuacji dla zmiennych wariancji kąta tarcia wewnętrznego

Analizując relację między krzywymi anizotropowymi a izotropowymi widoczne jest wahanie wartości średniej w zdecydowanie większym zakresie dla przypadku izotropowego (linie ciągłe) aniżeli anizotropowego (linie przerywane). Dla skali poziomej

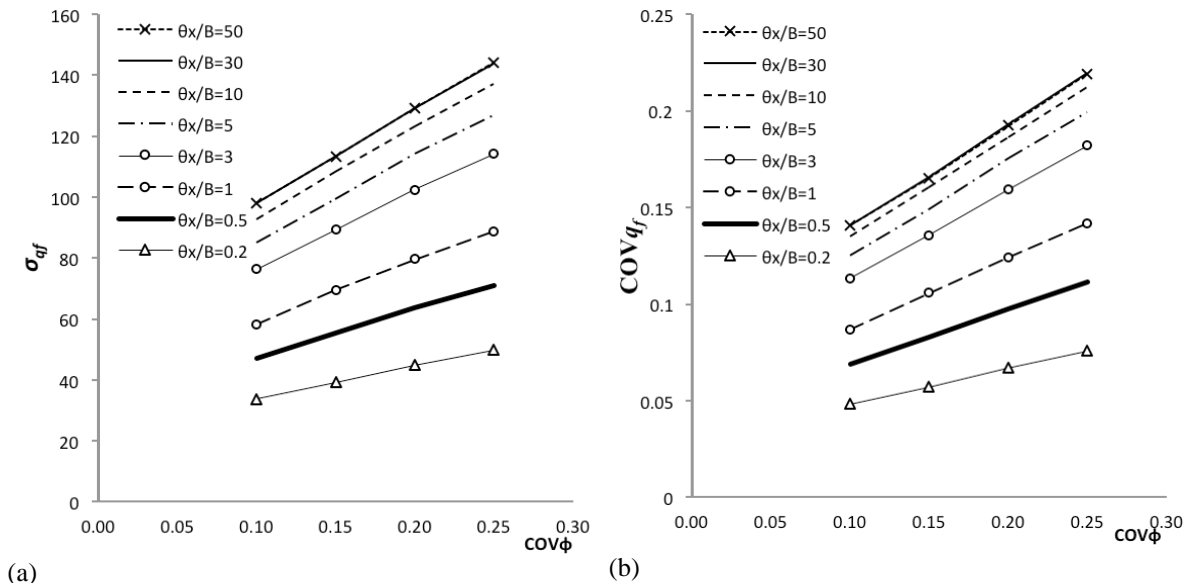
z przedziału $\theta_x/B \in [0.5, 1]$ wartości średnie przypadków izotropowych są zbliżone do przypadków anizotropowych. Wraz ze wzrostem skali poziomej wartość średnia izotropowego pola rośnie znacznie, natomiast anizotropowego niewiele.

Faktem wartym podkreślenia jest zachowanie wartości średniej dla kolejnych współczynników zmienności kąta ($COV\phi$). Otóż wzrost $COV\phi$ wpływa na wartość średnią oporu analogicznie jak wzrost współczynnika zmienności spójności ($COVc$). Wraz z ich wzrostem maleje wartość średnia oporu, definiowana za pomocą μ_{lnMc} .

Tabela 7-3 Wyniki analiz przy różnych $COV\phi$ dla Podłoża nr 2

θ_x [m]	$COV\phi$ [-]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	$COVq_f$	μ_{Mc} [-]	μ_{lnMc} [-]
0.20	0.10	697.56	33.66	0.05	15.50	2.74
	0.15	684.18	39.05	0.06	15.20	2.72
	0.20	670.32	44.75	0.07	14.90	2.70
	0.25	656.57	49.87	0.08	14.59	2.68
0.50	0.10	680.45	46.76	0.07	15.12	2.72
	0.15	665.49	55.22	0.08	14.79	2.69
	0.20	649.97	63.37	0.10	14.44	2.67
	0.25	635.11	70.92	0.11	14.11	2.65
1	0.10	672.28	58.27	0.09	14.94	2.70
	0.15	657.25	69.38	0.11	14.61	2.68
	0.20	642.02	79.56	0.12	14.27	2.66
	0.25	626.63	88.74	0.14	13.93	2.63
3	0.10	673.87	76.36	0.11	14.97	2.71
	0.15	659.01	89.30	0.14	14.64	2.68
	0.20	643.60	102.30	0.16	14.30	2.66
	0.25	628.19	114.22	0.18	13.96	2.64
5	0.10	679.30	84.86	0.12	15.10	2.71
	0.15	665.94	99.34	0.15	14.80	2.69
	0.20	651.09	114.20	0.18	14.47	2.67
	0.25	635.99	126.74	0.20	14.13	2.65
10	0.10	687.80	92.55	0.13	15.28	2.73
	0.15	674.96	108.17	0.16	15.00	2.71
	0.20	659.90	122.87	0.19	14.66	2.69
	0.25	645.83	136.88	0.21	14.35	2.66
30	0.10	695.57	97.80	0.14	15.46	2.74
	0.15	684.02	113.13	0.17	15.20	2.72
	0.20	669.99	129.24	0.19	14.89	2.70
	0.25	655.26	143.68	0.22	14.56	2.68
50	0.10	697.04	97.79	0.14	15.49	2.74
	0.15	685.51	113.02	0.16	15.23	2.72
	0.20	671.82	129.16	0.19	14.93	2.70
	0.25	657.46	143.99	0.22	14.61	2.68

Autorka dokonała również analizy odchylenia standardowego (σ_{qf}) oraz współczynnika zmienności oporu (COV_{qf}) w zależności od zmiennej wariancji kąta (Rysunek 7-6). Poszczególne krzywe przedstawiają poziome skale fluktuacji (θ_x/B). Wyraźną linią ciągłą zaznaczono przypadek izotropowy dla $\theta_x/B=\theta_y/B=0.5$.



Rysunek 7-6 Zależność (a) odchylenia standardowego oporu; (b) współczynnika zmienności oporu od współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego, dla różnych skal fluktuacji (pogrubiona linia ciągła oznacza przypadek izotropowy)

Rysunek 7-6 wykazuje niemal jednakowy, prawie liniowy przebieg i dla odchylenia standardowego (a) jak i współczynnika zmienności (b). W przedstawionym zakresie ($COV\phi \in [0.1, 0.25]$), zachowanie odchylenia oraz współczynnika zmienności oporu jest podobne do zachowania współczynnika zmienności spójności (por. Rysunek 7-4). Wielkość zakresu $COV\phi \in [0.1, 0.25]$ rozpatrywanego w tym zadaniu wynika z postaci funkcji gęstości o nośniku ograniczonym typu tangens hiperboliczny stosowanej do opisu kąta tarcia wewnętrznego. Jak pokazano na Rysunku 7-6(a) oraz Rysunku 7-6(b) zarówno odchylenie standardowe, jak i współczynnik zmienności oporu wyraźnie rosną wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji. Wzrost ten jest wyraźny w stosunku do przypadku izotropowego ($\theta_x/B=\theta_y/B=0.5$, gruba linia ciągła), co potwierdza wniosek, że przyjęcie anizotropowej struktury pola może być niekorzystne z punktu oszacowania bezpieczeństwa posadowień bezpośrednich.

7.2.3. EFEKT PIONOWEJ I POZIOMEJ SKALI FLUKTUACJI

Poniższy podpunkt stanowi próbę określenia relacji między poziomą a pionową skalą fluktuacji w odniesieniu do bezpiecznego oszacowania oporu granicznego. Autorka

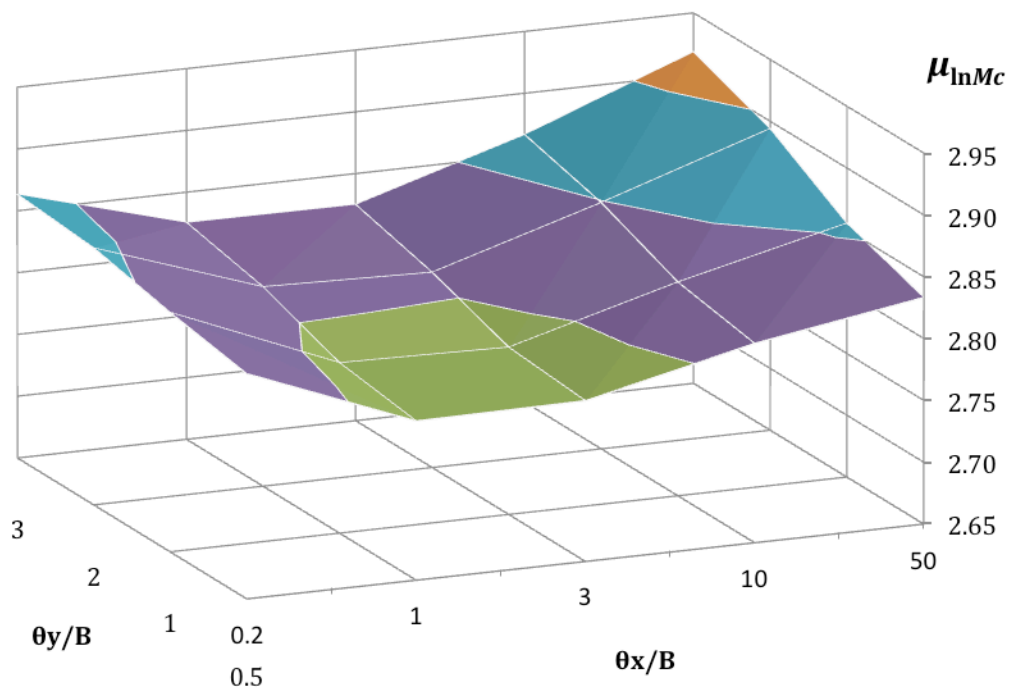
wykonała analizy dla dwóch typów podłoża (Podłoża nr 1 oraz Podłoża nr 2) jednak ze względu na podobne zachowanie w odniesieniu do badanej własności, poniższy podpunkt zawiera zestawienia wyników tylko dla Podłoża nr 1. Tym samym przykład jest uogólnieniem zadania z punktu 7.2.1., jak również odpowiednikiem zadania izotropowego (pkt. 6.2.2). Uwzględniono w nim pole losowe kąta tarcia wewnętrznego przyjmując parametry zgodnie z Tabelą 6-4 (rozdział 6). Współczynnik zmienności pola spójności oraz pola kąta tarcia wewnętrznego ustalono odpowiednio na stałym poziomie $COV_c=0.5$ i $COV_\phi=0.1$. Przedmiotem analiz parametrycznych były skale fluktuacji zmieniane zarówno na kierunku poziomym (θ_x) jak i pionowym (θ_y), zgodnie z Tabelą 7-4.

Tabela 7-4 Skale fluktuacji dla anizotropowych pól losowych spójności oraz kąta tarcia wewnętrznego

Pozioma skala fluktuacji (θ_x)	0.2m	1.0m	3.0m	10.0m	50.0m
Pionowa skala fluktuacji (θ_y)	0.5m	1.0m	2.0m	3.0m	

Podsumowanie wyników symulacji Monte Carlo zamieszczono w Tabeli 7-5 oraz na Rysunku 7-7 prezentującym powierzchnię odpowiadającą średniej wartości zmiennej losowej $\ln M_c$ w zależności od poziomej i pionowej skali fluktuacji.

Przestrzenna interpretacja zadania wykazuje skomplikowaną zależność między obiema skalami fluktuacji a wartością średnią oporu podłoża $\mu_{\ln M_c}$. Dla uzyskania precyzyjniejszego obrazu zależności wykreślono przekroje poniższej powierzchni kolejno równoległe do osi skali poziomej (Rysunek 7-8(a)) i osi skali pionowej (Rysunek 7-8(b)).



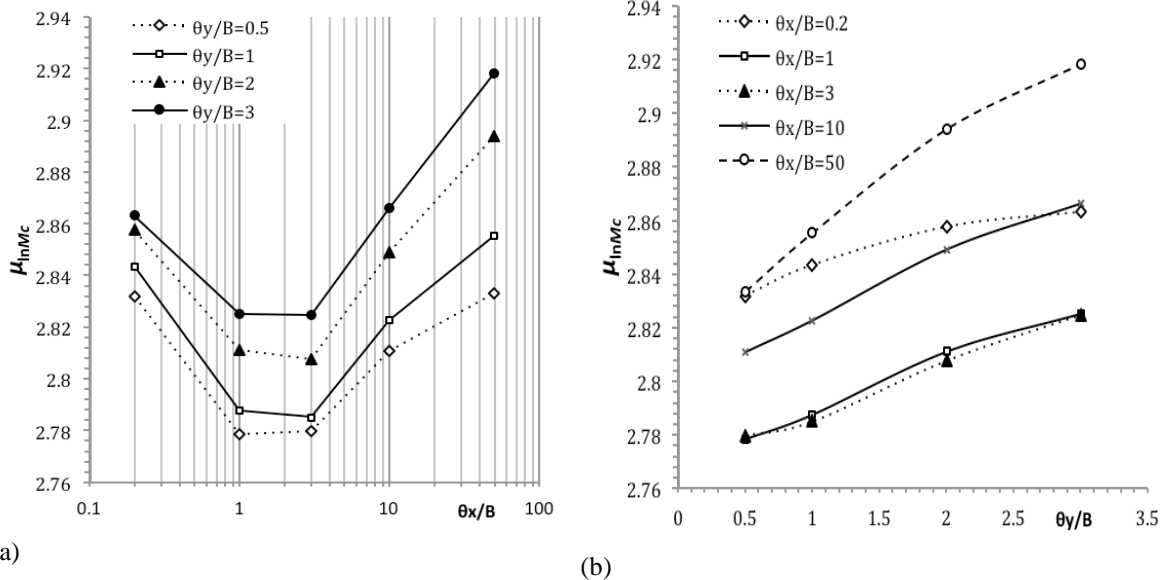
Rysunek 7-7 Powierzchnia $\mu_{\ln M_c}$ w zależności od pionowej i poziomej skali fluktuacji

Tabela 7-5 Wyniki analiz przy zmianie obu skal fluktuacji dla Podłoża nr 1

θ_x [m]	θ_y [m]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	COV_{qf} [-]	μ_{Mc} [-]	μ_{lnMc} [-]
0.2	0.5	1697.75	131.78	0.08	16.98	2.83
	1	1717.46	156.75	0.09	17.17	2.84
	2	1742.08	179.02	0.10	17.42	2.86
	3	1751.83	187.76	0.11	17.52	2.86
1	0.5	1609.58	241.55	0.15	16.10	2.78
	1	1624.33	298.72	0.18	16.24	2.79
	2	1662.98	352.61	0.21	16.63	2.81
	3	1686.67	377.82	0.22	16.87	2.83
3	0.5	1611.68	329.09	0.20	16.12	2.78
	1	1620.21	412.74	0.25	16.20	2.79
	2	1657.41	500.36	0.30	16.57	2.81
	3	1685.95	544.90	0.32	16.86	2.82
10	0.5	1662.79	402.61	0.24	16.63	2.81
	1	1682.35	511.79	0.30	16.82	2.82
	2	1727.40	614.07	0.36	17.27	2.85
	3	1757.34	667.59	0.38	17.57	2.87
50	0.5	1700.07	430.91	0.25	17.00	2.83
	1	1738.00	560.18	0.32	17.38	2.86
	2	1806.63	694.52	0.38	18.07	2.89
	3	1851.13	765.22	0.41	18.51	2.92

Analizując przekroje powierzchni pokazanej na Rysunku 7-7 obserwujemy, iż przy stałych wartościach pionowej skali fluktuacji θ_y krzywe zależności μ_{lnMc} od θ_x/B (Rysunek 7-8(a)) mają charakter malejąco – rosnący, z wartościami minimalnymi znajdującymi się w przedziale $\theta_x/B \in [1,3]$. Natomiast przekroje odpowiadające stałym wartościom θ_x/B wykazują we wszystkich przypadkach zależność rosnącą μ_{lnMc} od θ_y/B . (Rysunek 7-8(b)).

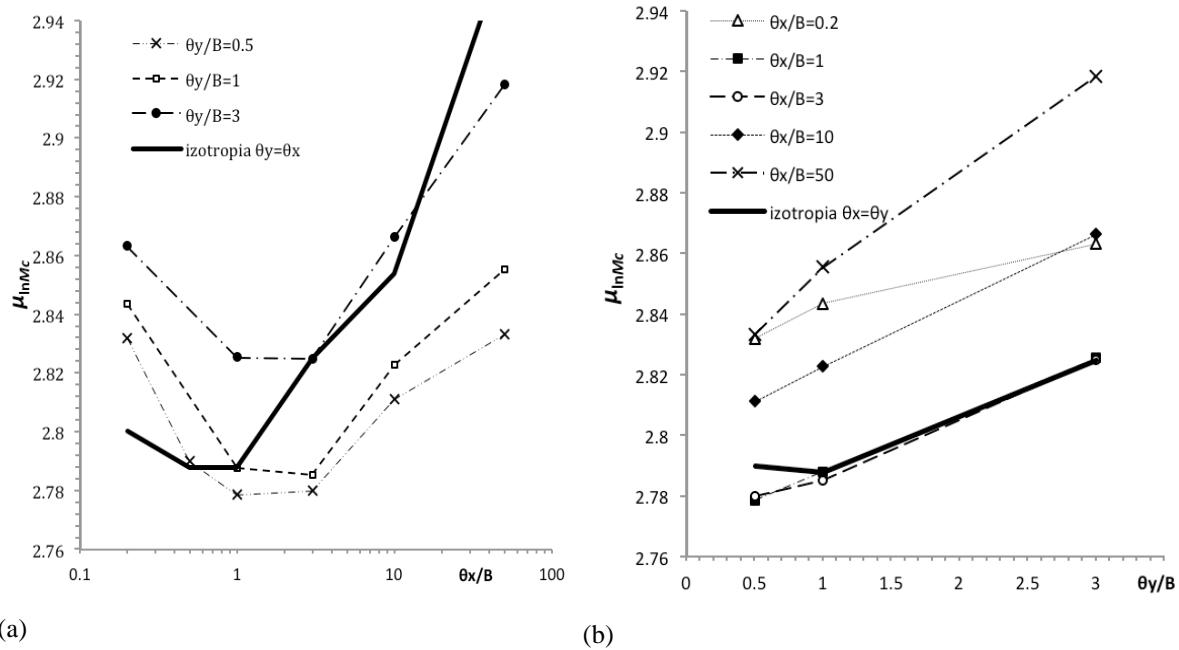
Przekroje równoległe do osi skali pionowej (Rysunek 7-8(b)) wykazują dla małych skali ($\theta_x/B=3$ oraz $\theta_x/B=1$) niewielką różnicę w wartościach średnich μ_{lnMc} . Natomiast w przypadku dziesięciokrotnego ($\theta_x/B=10$) oraz pięćdziesięciokrotnego ($\theta_x/B=50$) stosunku skali fluktuacji do szerokości fundamentu ($B=1m$) wartość średnia μ_{lnMc} wzrasta.



Rysunek 7-8 Zależność wartości średniej parametru μ_{fmMc} od
 (a) poziomej skali fluktuacji θ_x/B (b) pionowej skali fluktuacji θ_y/B

Przebieg krzywej odpowiadającej poziomej skali $\theta_x/B=0.2$ na Rysunku 7-8(b) może wzbudzać niepokój jednak jej przebieg jest poprawny i wynika z ograniczenia obszaru minimum widocznego na Rysunku 7-8(a), jak i na powierzchni (Rysunek 7-7).

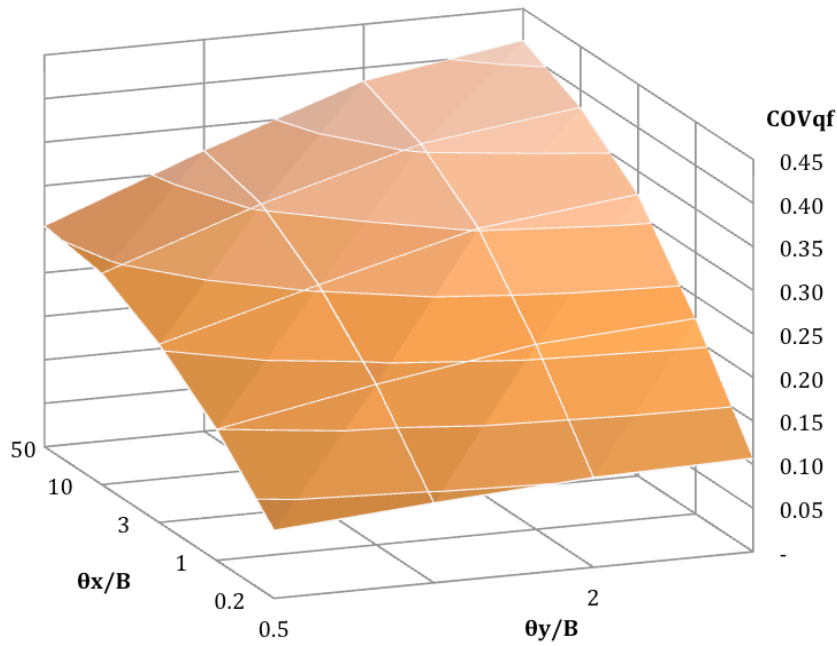
Rysunek 7-9 uzyskano nakładając na Rysunek 7-8 linie odpowiadające przypadkowi izotropowemu $\theta_x=\theta_y$ (w zakresie analizowanej skali pionowej). Rysunek 7-9(a) przedstawia zależność μ_{fmMc} od poziomej skali fluktuacji. Należy zauważyć, że krzywa interpretująca przypadek izotropowy na poniższych wykresach jest przekrojem analizowanej powierzchni uzyskanym wzdłuż przekątnej $\theta_x=\theta_y$ z Rysunku 7-7 (w zakresie rozpatrywanej skali pionowej).



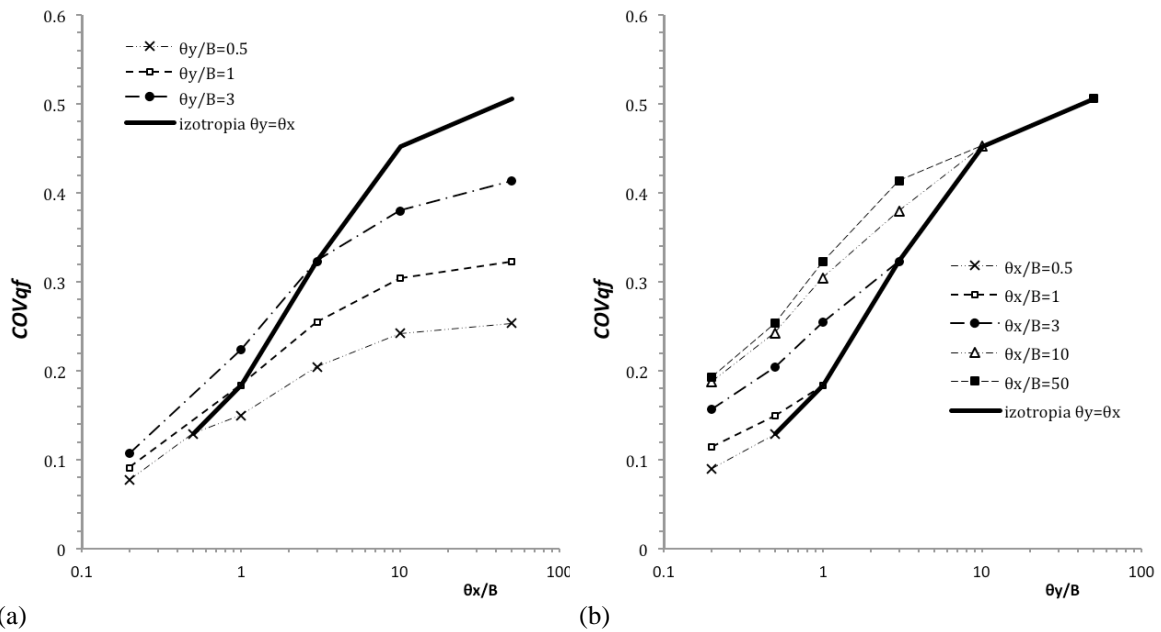
(a) (b)
Rysunek 7-9 Zależność Wartości średniej parametru μ_{InMc} w zależności od (a) poziomej; (b) pionowej skali fluktuacji (linia ciągła przypadek izotropowy $\theta_x=\theta_y$)

Na Rysunku 7-9(a) można zauważyć tendencję zgodną ze wcześniejszymi zadaniami, prezentowanymi w tym rozdziale, polegającą na dużej różnicy wartości średniej między krzywymi izotropowymi i anizotropowymi. Jak widać krzywa odpowiadająca przypadkowi równych skal ($\theta_y=\theta_x$) rośnie znacznie szybciej, wraz ze wzrostem θ_x/B , aniżeli krzywe odpowiadające określonej skali pionowej (θ_y/B). Przekroje pokazane na Rysunku 7-9(b) pokazują inny charakter zmian. Mianowicie krzywa izotropowa niemal pokrywa się z krzywymi dla skal $\theta_x/B=1$ i $\theta_x/B=3$ oraz przebiega prawie równoległe do krzywych odpowiadających skalom $\theta_x/B=10$ i $\theta_x/B=50$. Zatem przekroje równoległe do osi skali pionowej oraz poziomej przedstawiają różne tendencje zmian, co potwierdza złożony charakter zmienności powierzchni pokazany na Rysunku 7-7.

Jako następny wykres pokazano powierzchnię współczynnika zmienności oporu (COV_{q_f}) w zależności od skal pionowej i poziomej (Rysunek 7-10). Jak można zauważyć współczynnik zmienności oporu wykazuje stały wzrost względem obu analizowanych skal fluktuacji, tym samym trudno spekulować jakie wartości skali dadzą bezpieczne oznaczenie losowej nośności. Ze względu na niedoskonałość rysunku przestrzennego, dodatkowo przedstawiono przekroje powierzchni współczynnika zmienności oporu kolejno równoległe do osi skali poziomej (Rysunek 7-11(a)) i osi skali pionowej (Rysunek 7-11(b)).



Rysunek 7-10 Powierzchnia współczynnika zmienności oporu od poziomej i pionowej skali fluktuacji

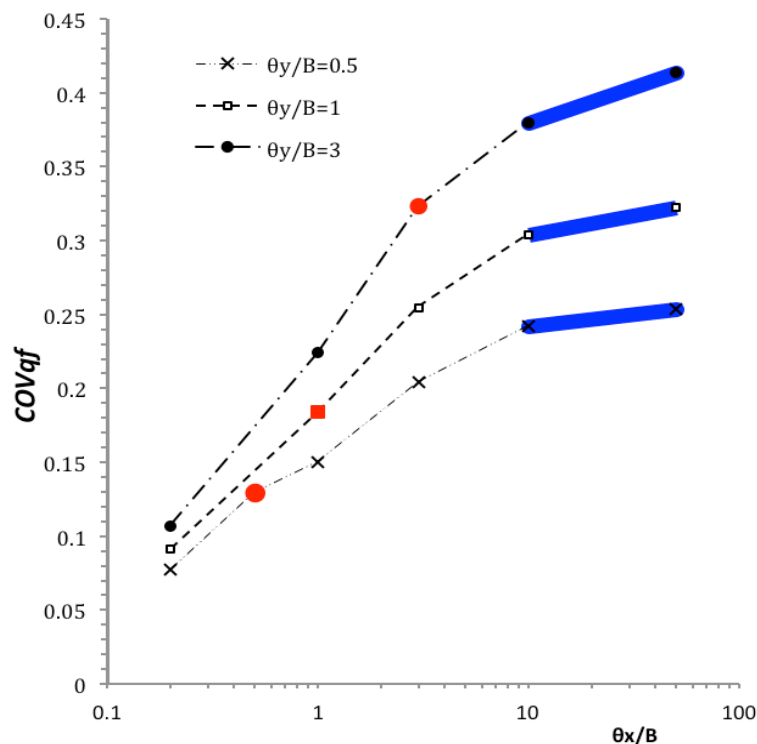


Rysunek 7-11 Przekroje powierzchni współczynnika zmienności oporu względem
(a) osi skali poziomej; (b) osi skali pionowej
(linią ciągłą przypadek izotropowy czyli przekątną powierzchni)

Na Rysunkach 7-11 zaznaczono również przekrój powierzchni współczynnika zmienności oporu poprowadzony wzdłuż przekątnej $\theta_y = \theta_x$. Przekrój ten odpowiada przypadkowi izotropowemu. Na Rysunku 7-11(a) wykreślono krzywe opisujące kolejne wartości pionowej skali fluktuacji. Jak widać wraz ze wzrostem skali poziomej (θ_x) rośnie współczynnik zmienności oporu podłoża (COV_{qf}). Szybszy wzrost współczynnika oporu obserwuje się również w przypadku osi pionowej skali fluktuacji (θ_y) (Rysunek 7-11(b)). Krzywe ciągłe, które odpowiadają przypadkowi izotropowemu $\theta_y = \theta_x$ mogą sugerować,

że najgorszą sytuacją obliczeniową, przy szacowaniu bezpieczeństwa posadowienia, jest przyjęcie jednakowych skali w obu kierunkach. Jednak taki wniosek ma dwie zasadnicze wady. Po pierwsze, krzywa $\theta_y = \theta_x$ cały czas rośnie, co oznacza że nie da się na niej wyodrębnić najniebezpieczniejszego przypadku. Po drugie taka interpretacja jest sprzeczna z wynikami badań nad zmiennością ośrodka gruntowego (patrz rozdział 3, Tabela 3-1 i Tabela 3-2). Wynika z nich bowiem, że pozioma skala fluktuacji pola (θ_x) jest nawet o rząd wielkości większa od skali pionowej (θ_y).

Rozważmy teraz sytuację najczęściej występującą w gruntach naturalnych, tj. taką że pionowa skala fluktuacji przyjmuje wartość od 0.2 – 3.0m (por. Tabela 3-1) a pozioma 10-50m (por. Tabela 3-2). Tę sytuację, dla porównania modelu izotropowego z anizotropowym, pokazano na Rysunku 7-12. Stosując model anizotropowy taki jak praca Griffithsa i Fentona (2008) należałoby przyjąć jednakowe, niewielkie wartości skali θ . Odpowiadające im współczynniki zmienności oporu COV_{qf} zaznaczono na wykresach czerwonymi punktami. Natomiast realne wartości występujące w modelu anizotropowym zaznaczono kolorem niebieskim na kolejnych krzywych skali pionowej. Łatwo zauważyć, że w tej drugiej sytuacji otrzymuje się dużo większe wartości współczynnika zmienności oporu (COV_{qf}), co powinno być uwzględnione w analizie bezpieczeństwa posadowienia bezpośredniego.



Rysunek 7-12 Współczynnik zmienności oporu w zależności od poziomej skali fluktuacji; czerwony punkt - $\theta_y = \theta_x$; niebieska linia – zakres dużych skali poziomych dla danej krzywej θ_y

Powyższa analiza wykazuje, że istotna jest odpowiednia proporcja w doborze wartości skal fluktuacji w przypadku anizotropowego pola (zgodna z wynikami badań polowych). Tylko takie podejście może dać bezpieczne oszacowanie nośności posadowienia bezpośredniego.

Rezultaty i wnioski przedstawione w ramach tego punktu dotyczą Podłoża nr 1. Autorka przeprowadziła identyczne obliczenia także dla Podłoża nr 2. Okazało się jednak, że wartości średnie oraz współczynniki zmienności oporu podłoża wykazały bardzo zbliżone tendencje. W związku z tym wnioski co do ich zachowania są identyczne. Dlatego też wyniki dla Podłoża nr 2 nie zostały zamieszczone.

7.3. UWAGI DO ROZDZIAŁU

W powyższym rozdziale zamieszczono wyniki i ich interpretację dla anizotropowej struktury pól losowych spójności i kąta tarcia wewnętrznego (dla podłoży zdefiniowanych w rozdziale 6). Uzyskane rezultaty wskazują, że zarówno wartości średnie oporu, jak też ich odchylenia standardowe i współczynniki zmienności są istotnie różne dla modeli izotropowych i anizotropowych. Ponieważ badania naturalnych podłoży stwierdzają, że poziome skale fluktuacji są niejednokrotnie o rząd większe aniżeli pionowe, zatem zastosowanie modelu pola anizotropowego, choć bardziej kłopotliwe rachunkowo, daje niewątpliwie bardziej adekwatny opis zmienności losowej oporu podłoża. Co więcej, wyniki obliczeń współczynnika zmienności oporu pokazują, że przy założeniu realnych wartości skal fluktuacji (θ_x dużo większe niż θ_y) wartości tego współczynnika są znacznie większe aniżeli w przypadku wcześniej analizowanych modeli izotropowych (rozdział 6). Z tego też względu przy analizie posadowień bezpośrednich powinno się stosować anizotropowe pola losowe parametrów wytrzymałości podłoża w miejsce pól izotropowych.

8. EFEKT NAJGORSZEGO PRZYPADKU

Zamysłem twórców metody RFEM było takie modelowanie losowych właściwości podłoża tak, aby jak najdokładniej opisywały rzeczywisty ośrodek gruntowy. W celu ułatwienia praktycznego wykorzystania metody, np. do oceny bezpieczeństwa posadowienia bezpośredniego, pomysłodawcy w swoich pracach poszukiwali tak zwanego „najgorszego przypadku” (ang. the worst case). Chodziło o znalezienie takiej wartości skali fluktuacji θ , dla której oszacowanie oporu granicznego podłoża byłoby najniekorzystniejsze. W perspektywie pozwoliłoby to na prowadzenie rozważań z uwzględnieniem losowości nawet przy braku dostatecznej statystycznej informacji dotyczącej podłoża.

Poniższy rozdział zawiera zestawienie wyników pod kątem obserwacji „najgorszej” wartości skali fluktuacji, rozumianej zgodnie z powyższym opisem. W pierwszej kolejności przytoczono argumentację twórców metody RFEM, dotyczącą efektu najgorszego przypadku wraz z odpowiednimi wykresami. Następnie przedstawiono w podobny sposób inne przykłady, oparte na zadaniach zamieszczonych w rozdziale 5 i 6, zawierające izotropową oraz anizotropową strukturę korelacyjną pól losowych.

8.1. IZOTROPOWE POLA LOSOWE

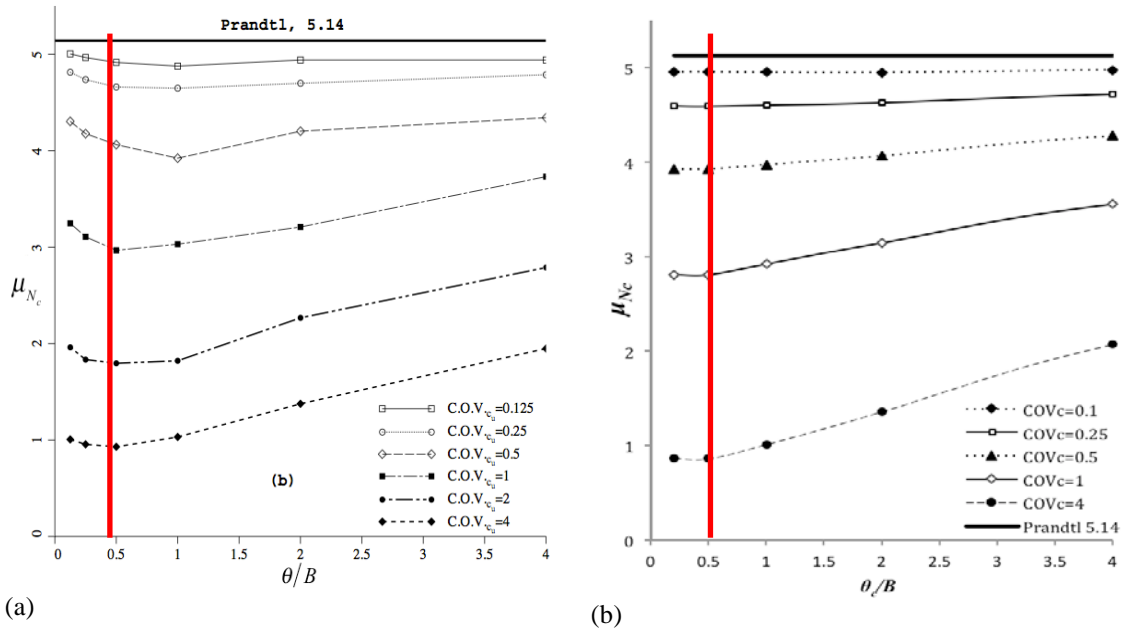
8.1.1. PODŁOŻE IDEALNIE SPOISTE

Pierwsze zadanie dotyczy gruntu idealnie spoistego, który wraz z odtworzonymi obliczeniami wykonanymi przez autorkę pracy, został szczegółowo opisany w rozdziale 6. Parametry podłoża zawiera Tabela 6-1.

Griffiths i Fenton w pracy z 2001 roku określili mianem najgorszego przypadku taką wartość skali fluktuacji θ (przypadek izotropowy), dla której wartość średnia współczynnika nośności (μ_{Nc}) osiągała minimum. Rysunek 8-1(a) (zaczepnięty z pracy

Griffithsa i Fentona, 2001) przedstawia zależność wartości średniej współczynnika nośności μ_{Nc} od skali fluktuacji θ , odniesionej do szerokości fundamentu B . Jak widać, minimum takie istnieje dla każdej z przedstawionych krzywych i występuje dla wartości

$$\frac{\theta}{B} \in [0.5:1].$$



Rysunek 8-1 Efekt najgorszego przypadku zaznaczony czerwoną linią na wykresie zależności średniej wartości współczynnika Nc w funkcji skali fluktuacji.

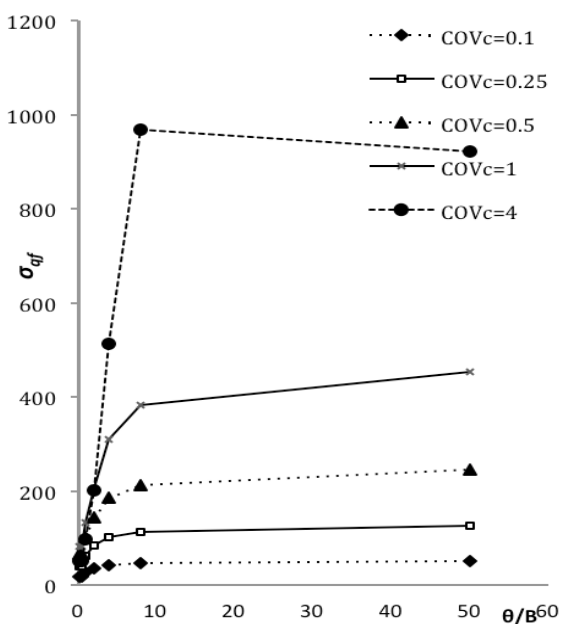
(a) za pracę (Griffiths & Fenton, 2001); (b) wyniki autorki

Rysunek 8-1 pokazuje, że dla małych wartości współczynnika zmienności spójności (COV_c) efekt minimum jest prawie niedostrzegalny. Wraz ze wzrostem COV_c minimum staje się coraz bardziej wyraźne. Obliczenia przeprowadzone przez autorkę potwierdziły wzmiankowany efekt, co pokazuje Rysunek 8-1(b).

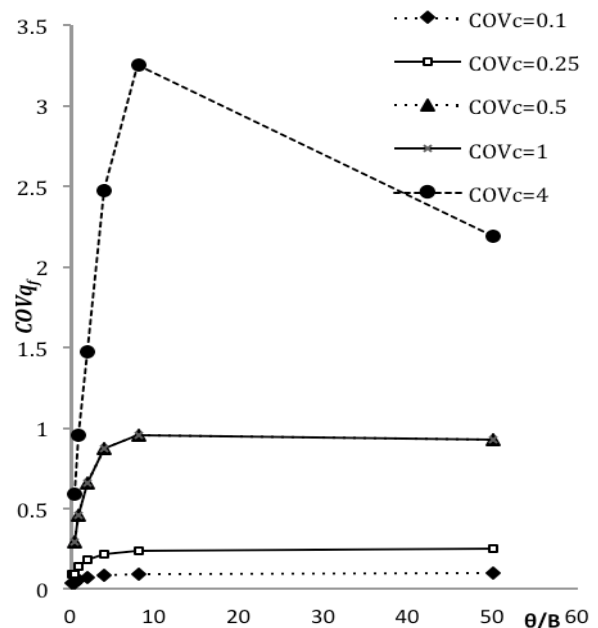
Poszukiwanie najgorszego przypadku miało na celu uproszczenie sposobu zdobycia niezbędnych, realnych danych o podłożu, koniecznych do zastosowania teorii pól losowych. Mianowicie, zgodnie z opisem podanym w rozdziale 3, (pkt. 3.3.3) uzyskanie wartości skali fluktuacji θ wymaga pozyskania dużej ilości danych z badań terenowych. Jak wiadomo wartość skali fluktuacji zależy od rodzaju podłoża. Jeśli więc ilość danych nie jest wystarczająca wartość θ należałoby przyjąć arbitralnie, co stawiałoby pod znakiem zapytania jakość opisu za pomocą pola losowego. Jeśli jednak udałoby się uchwycić tak zwany „najgorszy przypadek”, to w sytuacji niedostatecznej ilości danych można by taką wartość przyjąć jako parametr pola, antycypując fakt, że da on w konsekwencji bezpieczne oszacowanie miar niezawodności fundamentu.

Podstawową kwestią dyskusyjną jest jednak poszukiwanie efektu najgorszego przypadku dla wartości średnich współczynnika nośności (μ_{Nc}). Wartość średnia jest wielkością mało miarodajną w przypadku analizy probabilistycznej. Nie powinno się pomijać drugiego momentu statystycznego mianowicie wariancji. W związku z tym autorka zanalizowała zachowanie się odchyłeń standardowych (σ_{qf}) i współczynników zmienności nośności (COV_{qf}) w zależności od skali fluktuacji θ/B . Wyniki prezentują: Rysunek 8-2 i Rysunek 8-3.

Warto zwrócić uwagę, że na Rysunku 8-3 krzywa odpowiadająca współczynnikowi zmienności $COV_c=4$ ma wyraźne maksimum dla $\theta=8m$. Przypadek ten wydaje się jednak mało realistyczny w odniesieniu do warunków naturalnych. Pozostałe krzywe stabilizują się powyżej wartości $\theta/B=8$. Tak więc wartość $\theta=8m$ można by uznać za najgorszą z punktu widzenia obliczeń nośności dla opisanego pola losowego, gdyż przy tej wartości zmienność nośności jest największa.



Rysunek 8-2 Odchylenie standardowe w zależności od skali fluktuacji, dla różnych COV_c (Wyniki autorki)



Rysunek 8-3 Współczynnik zmienności oporu w zależności od skali fluktuacji, dla różnych COV_c (Wyniki autorki)

Wydaje się zatem rozsądne, przyjąć za najgorszą skalę fluktuacji wartość większą ($\theta \geq 8m$), aniżeli tą którą proponowali Fenton i Griffiths na podstawie wartości średnich ($\theta=0.5m$). Trzeba mieć jednak na uwadze, że wartość $\theta=8m$ (przy fundamencie szerokości $B=1m$) jest być może zbyt dużą wartością opisującą pionową zmienność (w stosunku do podawanych w literaturze, patrz. rozdział 3, gdzie zgodnie z Tabelą 3-1, skala fluktuacji dla wytrzymałości na ścinanie bez odpływu waha się w granicach $\theta_y=1.0-2.2m$).

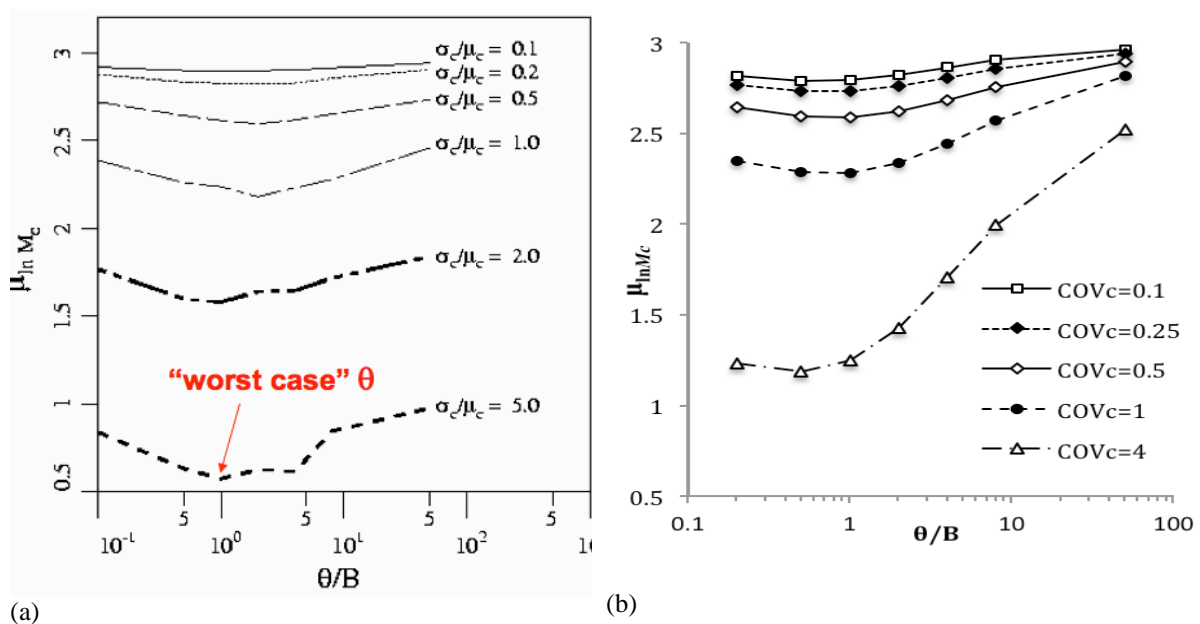
8.1.2. PODŁOŻE TYPU $c-\phi$

Poniższy punkt nawiązuje do idei poszukiwań efektu najgorszego przypadku w odniesieniu do pracy Fentona i Griffithsa (2003). Autorzy opisując podłoże izotropowe typu $c-\phi$, zlokalizowali efekt najgorszego przypadku dla przedziału $\theta/B \in [0.5, 5.0]$, rozumianego jako minimum wartości średniej zlogarytmowanej zmiennej losowej M_c ($\mu_{\ln M_c}$) (Rysunek 8-4(a)).

Autorka poniższej pracy w części pierwszej zestawiała wyniki prezentowane wcześniej w rozdziale 6 (pkt. 6.2.2), w kontekście oceny wpływu współczynnika zmienności spójności (COV_c) na poszukiwany najgorszy efekt. W części drugiej analizowała wpływ współczynnika zmienności kąta (COV_ϕ) na występowanie efektu najgorszego przypadku.

8.1.2.1. WPŁYW WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI SPÓJNOŚCI

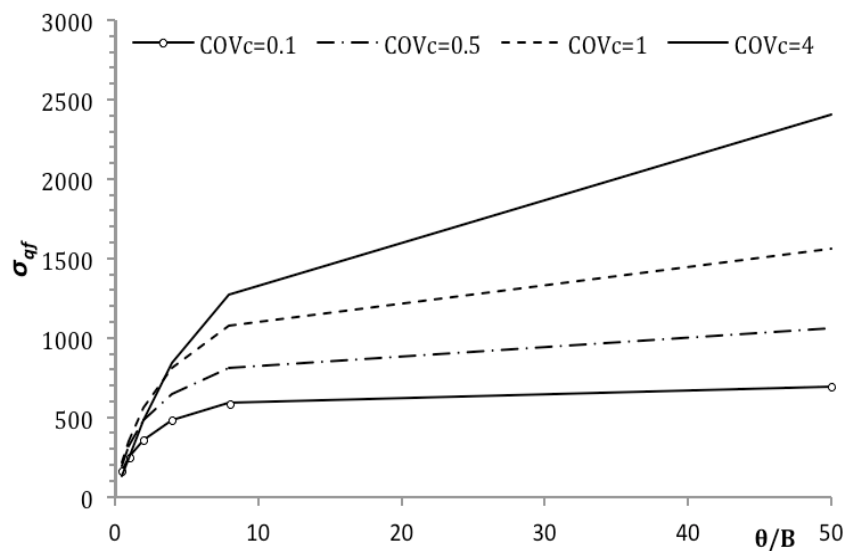
Parametry podłoża dla tego zadania podano w Tabeli 6-4, przyjmując stały współczynnik zmienności kąta tarcia wewnętrznego $COV_\phi = 0.2$. Na Rysunku 8-4 przedstawiono wykresy $\mu_{\ln M_c}$ w zależności od skali fluktuacji θ/B (Rysunek 8-4(a) jest powtórzeniem Rysunku 6-10). Dla dużych współczynników zmienności $COV_c > 1$ lokalne minimum wartości średniej $\ln M_c$ jest wyraźne, bliższe $\theta/B = 1.0$. Dla $COV_c \leq 1$ poszukiwane minimum przesunęło się w stronę $\theta/B = 5.0$, ale jednocześnie staje się płytsze.



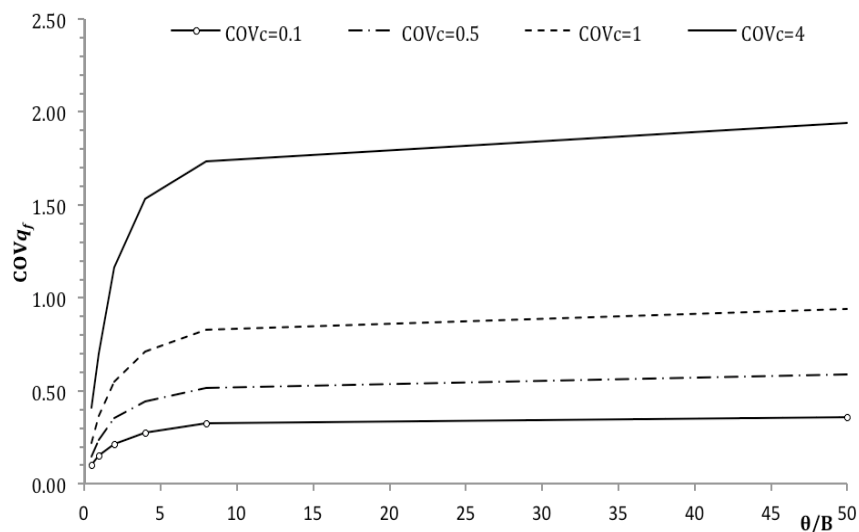
Rysunek 8-4 Wykres wartości średniej $\ln M_c$ w funkcji skali fluktuacji
(a) z pracy Fenton & Griffiths, 2003; (b) wyniki autorki

W przypadku wyników autorki (Rysunek 8-4(b)) omawiane minimum dla $COV_c \leq 1$ bliższe jest wartości $\theta/B=1.0$, natomiast dla $COV_c > 1$ koncentruje się bliżej wartości $\theta/B=0.5$.

Analogicznie do przypadku gruntu idealnie spoiestego zbadano zachowanie odchylenia standardowego (σ_{qf}) oraz współczynnika zmienności oporu (COV_{qf}) jako funkcji skali (θ/B). Rysunek 8-5 prezentuje zmienność odchylenia standardowego. Jak widać wszystkie zależności mają charakter rosnący w zależności θ/B . Współczynniki COV_{qf} w zależności od skali fluktuacji pokazano na Rysunku 8-6, gdzie można zaobserwować stabilizację krzywych dla wartości $\theta/B > 8$. Należy zaznaczyć, że wartości COV_{qf} dla $\theta/B=50$ są minimalnie większe niż dla $\theta/B=8$ (patrz. Tabela 6-6).



Rysunek 8-5 Odchylenie standardowe w zależności od skali fluktuacji dla różnych współczynników zmienności spójności

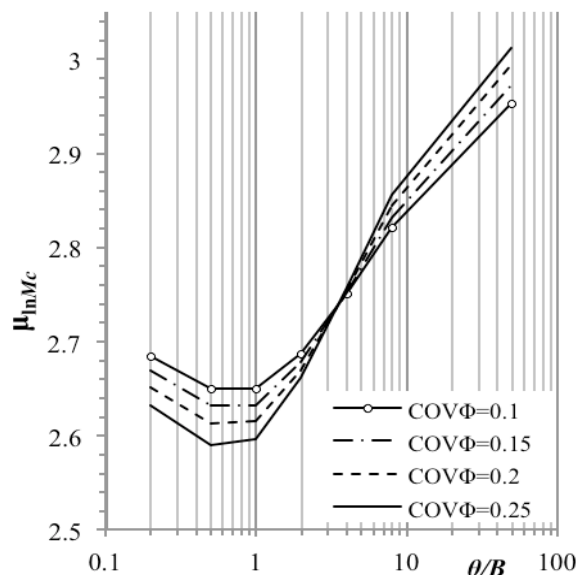


Rysunek 8-6 Współczynnik zmienności nośności w zależności od skali fluktuacji dla różnych współczynników zmienności spójności

Zatem w przeciwieństwie do przypadku gruntu idealnie spoiściego nie zaobserwowano tu lokalnych maksimów. Obecność najgorszego przypadku jest więc tutaj bardziej problematyczna, choć można by uznać, że przyjęcie skali fluktuacji dla $\theta/B \geq 8$ daje w przybliżeniu maksymalną zmienność oporu. Zatem tak jak poprzednio jest to wartość większa w stosunku do wynikającej wartości średniej.

8.1.2.2. WPŁYW WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI KĄTA TARCIA WEWNĘTRZNEGO

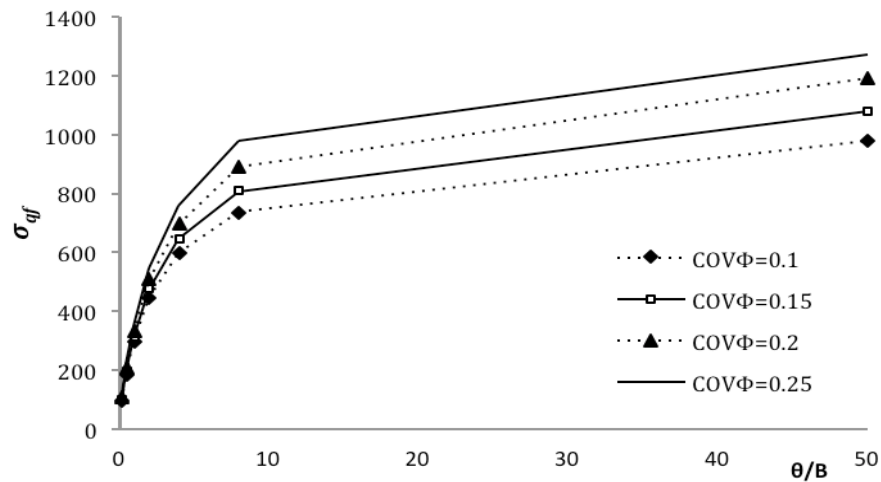
W poniższym punkcie sprawdzono czy można zaobserwować efekt najgorszego przypadku dla Podłoża nr 1, czyli dla parametrów przyjętych na podstawie Tabeli 6-7 (współczynnik zmienności spójności $COV_c=0.5$; wariancje kąta tarcia wewnętrznego zmieniane zgodnie z Tabelą 6-8). Tego typu zależności nie badano w pracy (Fenton & Griffiths, 2003) pod kątem efektu najgorszego przypadku. Analogicznie do poprzednich przykładów analizowano zależność wartości średniej zmiennej losowej $\ln M_c$ od skali fluktuacji θ/B (Rysunek 8-7). Minima lokalne pojawiają się dla wartości $\theta/B \in [0.5, 1.0]$ a powyżej tych wartości krzywe mają charakter rosnący.



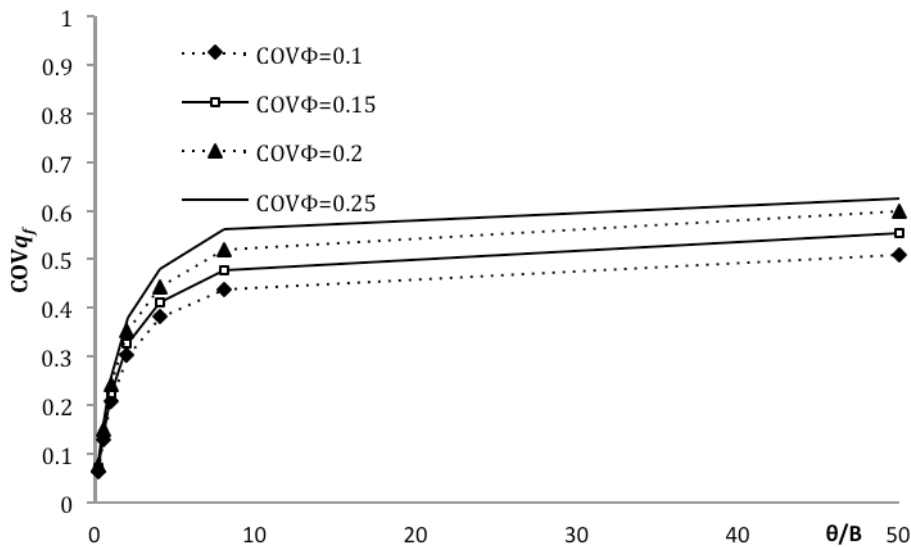
Rysunek 8-7 Zależność wartości średniej $\mu_{\ln M_c}$ od skali fluktuacji dla różnych współczynników zmienności kąta

Rysunek 8-8 i Rysunek 8-9 prezentują wyniki kolejno dla odchylenia standardowego (σ_{q_f}) i współczynnika zmienności (COV_{q_f}) w zależności od poziomej skali fluktuacji (θ/B). W bieżącym zadaniu zarówno σ_{q_f} jak i COV_{q_f} są funkcjami rosnącymi θ/B . Jednocześnie trzeba zaznaczyć, że różnice w wartościach COV_{q_f} uzyskane dla $\theta/B=8$ i $\theta/B=50$ są we

wszystkich przypadkach współczynnika zmienności kąta niewielkie (patrz. Tabela 6-9). Zatem wskazanie najniekorzystniejszego przypadku skali fluktuacji jest w tym przykładzie również problematyczne.

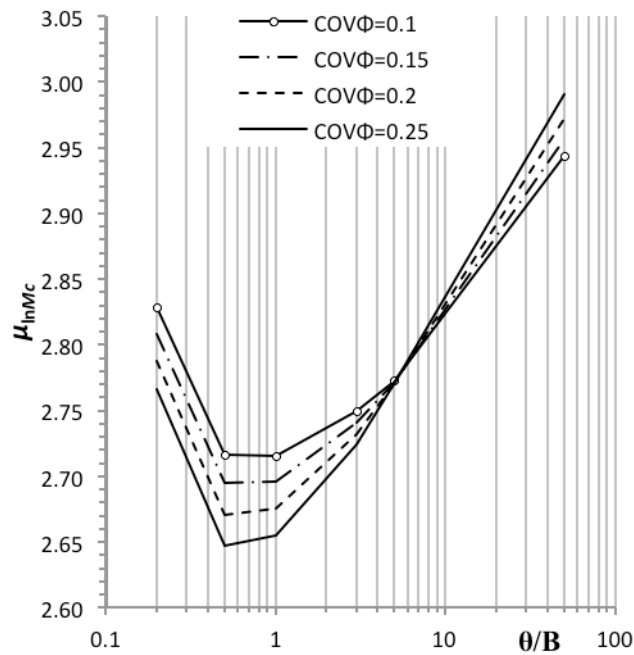


Rysunek 8-8 Odchylenie standardowe w zależności od skali fluktuacji dla różnych współczynników zmienności kąta tarcia wewnętrznego



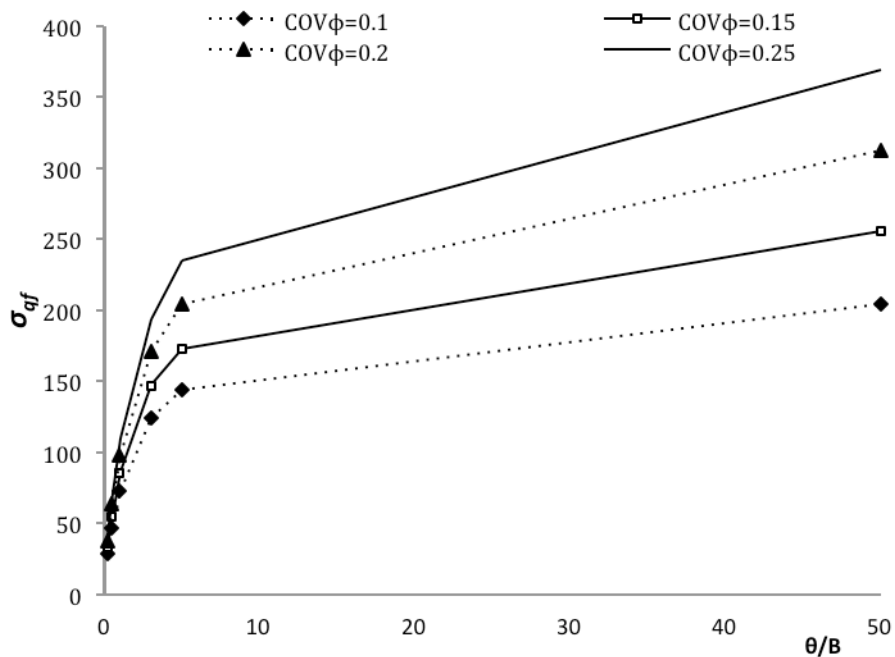
Rysunek 8-9 Współczynnik zmienności oporu w zależności od skali fluktuacji dla różnych współczynników zmienności kąta tarcia wewnętrznego

Aby upewnić się co do wyżej prezentowanych wniosków przyjęto następnie nieco zmodyfikowane parametry, jak dla Podłoża nr 2 (zgodne z Tabelą 6-10). Jak pokazuje Rysunek 8-10, charakter zależności wartości średniej μ_{lnMc} od skali fluktuacji (θ/B) jest bardzo zbliżony do poprzedniego przypadku (Rysunek 8-7). Na osi θ/B wyraźnie widoczne jest minimum dla wszystkich współczynników zmienności kąta (COV ϕ).

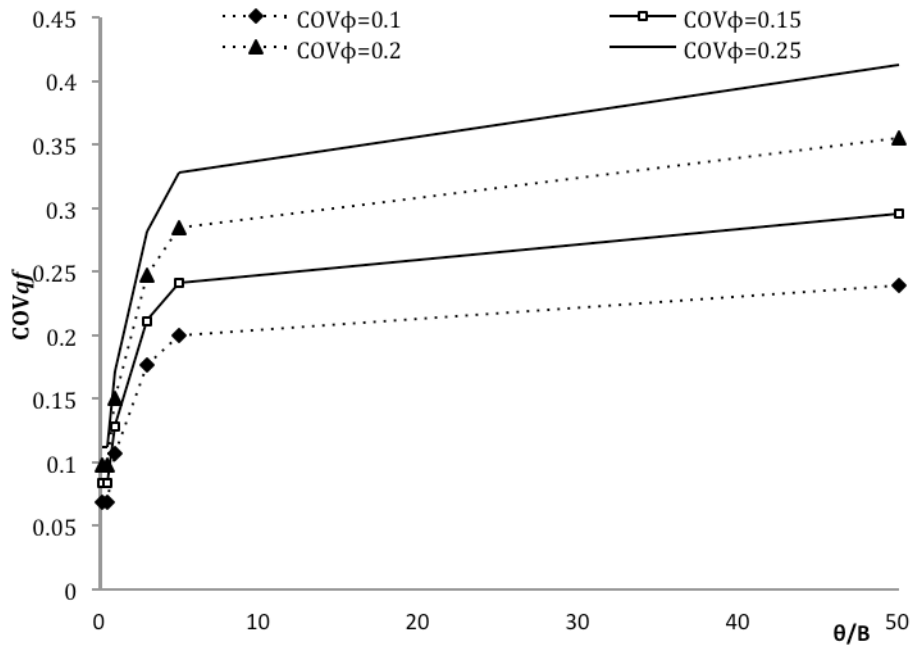


Rysunek 8-10 Zależność wartości średniej parametru od skali fluktuacji dla współczynnika zmienności kąta

Odchylenia standardowe (σ_{qf}) i współczynniki zmienności (COV_{qf}) nośności tu również są funkcjami rosnącymi w skali fluktuacji (θ/B), choć zmiany współczynnika zmienności COV_{qf} w przedziale $\theta/B \in [10, 50]$ są już niewielkie.



Rysunek 8-11 Odchylenie standardowe oporu w zależności od skali fluktuacji dla różnych współczynników zmienności kąta

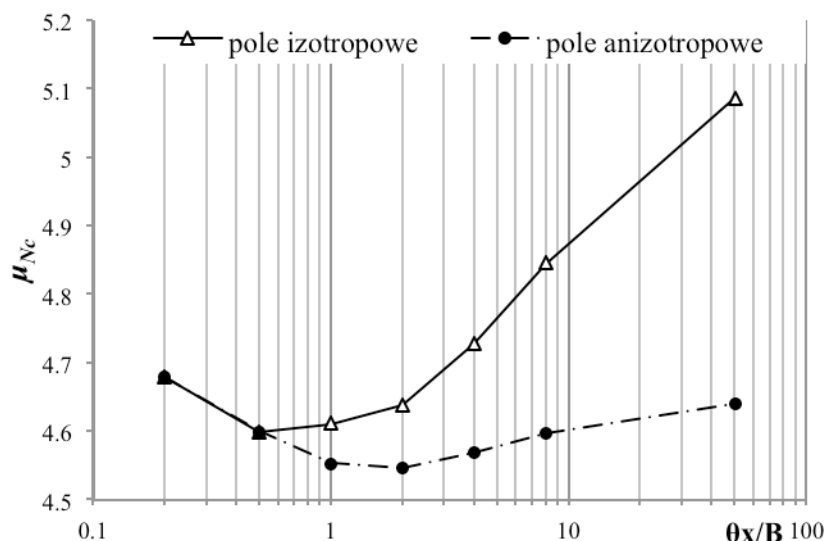


Rysunek 8-12 Współczynnik zmienności oporu w zależności od skali fluktuacji dla różnych współczynników zmienności kąta tarcia wewnętrznego

8.2. ANIZOTROPOWE POLA LOSOWE

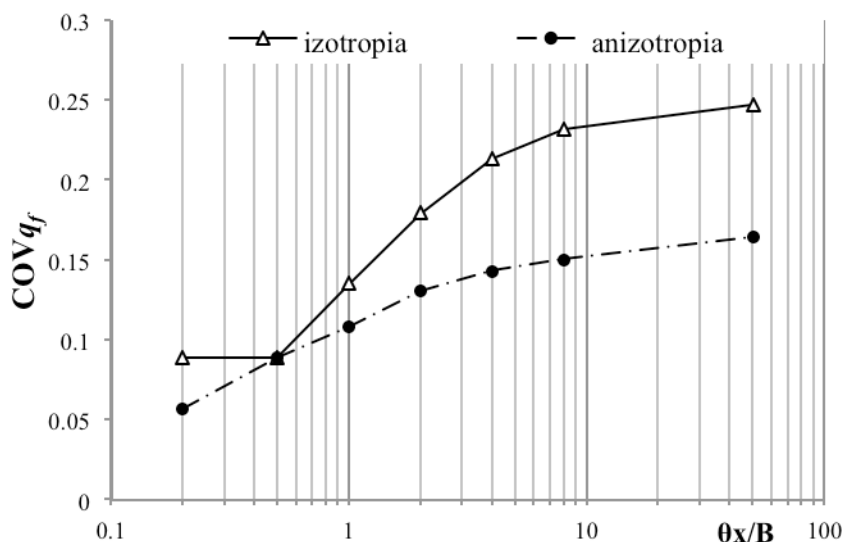
Celem podrozdziału jest zweryfikowanie rezultatów dotyczących najgorszego przypadku wartości skali fluktuacji w sytuacji, gdy stosowane pola losowe mają anizotropową strukturę korelacyjną. W zamyśle autorki poszukiwania efektu najgorszego przypadku podzielono na dwie grupy. W pierwszej przedstawiono jak model anizotropowy pola losowego wpływa na podłoże idealnie spoiste, w drugiej na podłoże typu $c-\phi$.

W przypadku podłoża idealnie spoistego analizie poddano relację między przypadkiem izotropowym i anizotropowym, przyjmując określony współczynnik zmienności spójności $COV_c=0.25$. Porównania dokonano nakładając na siebie dwa wykresy. Jeden opisujący izotropową zmienność badanej wielkości, drugi anizotropową korelację pól losowych. Skale były zmieniane zgodnie z Tabelą 6-2. Wyniki na podstawie, których wykreślono poniższe rysunki zawiera Tabela 7-1. Rysunek 8-13 obrazuje przebieg krzywej izotropowej ($\theta_y=\theta_x$) oraz krzywej anizotropowej ze stałą skalą pionową $\theta_y=0.5m$. Widać wyraźnie, że dla przypadku izotropowego obserwuje się lokalne minimum w przytaczanym już przez Fentona i Griffithsa przedziale $\theta/B \in [0.2, 5.0]$. Jednakże analizując wartość średnią pola anizotropowego, obserwujemy, że lokalne minimum przesuwa się w stronę większych wartości θ/B . Widoczna jest duża różnica w przebiegu krzywych dla dużych wartości poziomej skali fluktuacji.



Rysunek 8-13 Porównanie wartości średniej współczynnika nośności podłoża idealnie spoiście dla pola izotropowego i anizotropowego na osi skali poziomej

Rysunek 8-14 przedstawia współczynnik zmienności oporu (COV_{q_f}) w zależności od poziomej skali fluktuacji (θ_x/B). Obie krzywe mają charakter rosnący dla poziomej skali $\theta_x/B > 0.5$. Jednocześnie widać większą zmienności oporu przy podłożu modelowanym izotropowym polem spójności aniżeli anizotropowym.



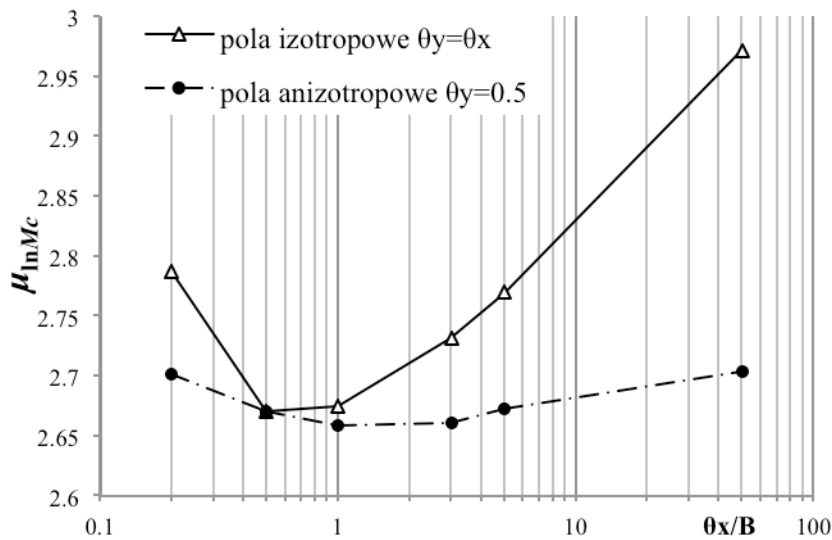
Rysunek 8-14 Porównanie współczynnika zmienności oporu dla pola izotropowego i anizotropowego na osi skali poziomej; podłożo idealnie spoiście

Rozpatrując podłożo typu $c-\phi$ (modelowane przez pole losowe spójności i kąta tarcia wewnętrznego), przyjęto do analizy współczynnik zmienności spójności $COV_c=0.2$ oraz współczynnik zmienności kąta $COV_\phi=0.1$. Parametry jak dla Podłoża nr 2, dla którego wyniki symulacji Monte Carlo prezentuje Tabela 8-1. Zakres skal fluktuacji przyjętych na poniższych rysunkach podaje Tabela 6-11.

Tabela 8-1 Wyniki analiz dla anizotropowego modelu Podłoża nr 2 ($COV_c=0.2$; $COV_\phi=0.1$)

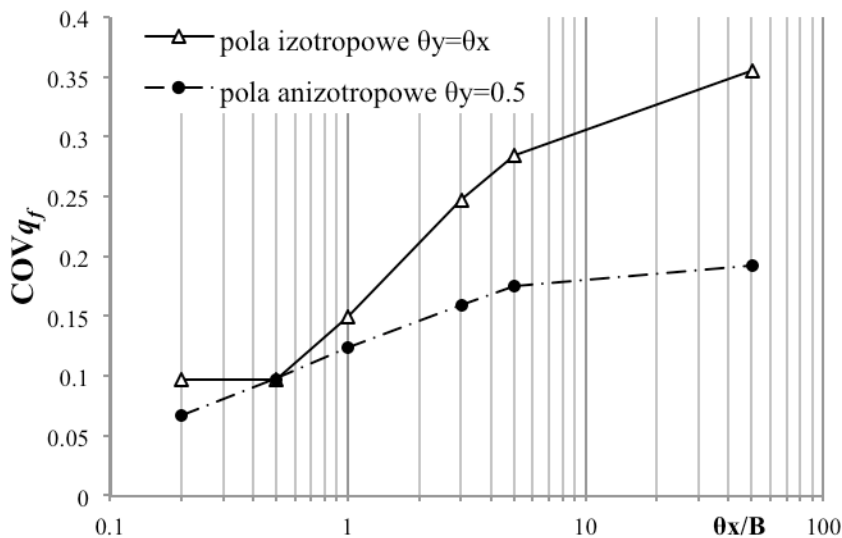
θ_x [m]	θ_y [m]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	COV_{qf} [-]	μ_{Mc} [-]	μ_{lnMc} [-]
0.2	0.5	697.56	33.66	0.05	15.50	2.74
0.5	0.5	680.45	46.76	0.07	15.12	2.72
1	0.5	672.28	58.27	0.09	14.94	2.70
	1	679.66	72.52	0.11	15.10	2.71
	2	693.92	84.04	0.12	15.42	2.74
	3	701.21	88.96	0.13	15.58	2.75
3	0.5	673.87	76.36	0.11	14.97	2.71
	1	680.95	96.49	0.14	15.13	2.72
	2	694.16	115.81	0.17	15.43	2.74
	3	703.32	123.83	0.18	15.63	2.75
5	0.5	679.30	84.86	0.12	15.10	2.71
	1	686.56	106.46	0.16	15.26	2.73
	2	701.24	127.95	0.182	15.58	2.75
	3	709.75	136.93	0.19	15.77	2.76
10	0.5	687.80	92.55	0.13	15.28	2.73
	1	696.92	117.51	0.17	15.49	2.74
	2	713.23	140.39	0.197	15.85	2.76
	3	722.83	151.71	0.21	16.06	2.78
30	0.5	695.57	97.80	0.14	15.46	2.74
	1	707.48	124.50	0.18	15.72	2.76
	2	727.04	149.54	0.206	16.16	2.78
	3	737.33	160.85	0.22	16.39	2.80
50	0.5	697.04	97.79	0.14	15.49	2.74
	1	710.10	124.90	0.18	15.78	2.76
	2	730.79	150.60	0.206	16.24	2.79
	3	741.71	162.89	0.22	16.48	2.80

Rysunek 8-15 Przedstawia porównanie wartości średnich współczynnika zmienności oporu dla podłoża modelowanego polami izotropowymi (spójności i kąta tarcia wewnętrznego) oraz polami anizotropowymi. Krzywe przebiegają podobnie jak na Rysunku 8-13. Lokalne minimum wartości średniej występuje na obu krzywych, przy czym dla pól izotropowych jest ono wyraźne i mieści się w przedziale $\theta/B \in [0.2, 5.0]$, natomiast dla krzywej modelu podłoża anizotropowego obniżenie wartości jest niewielkie i przesunięte w kierunku większej skali poziomej.



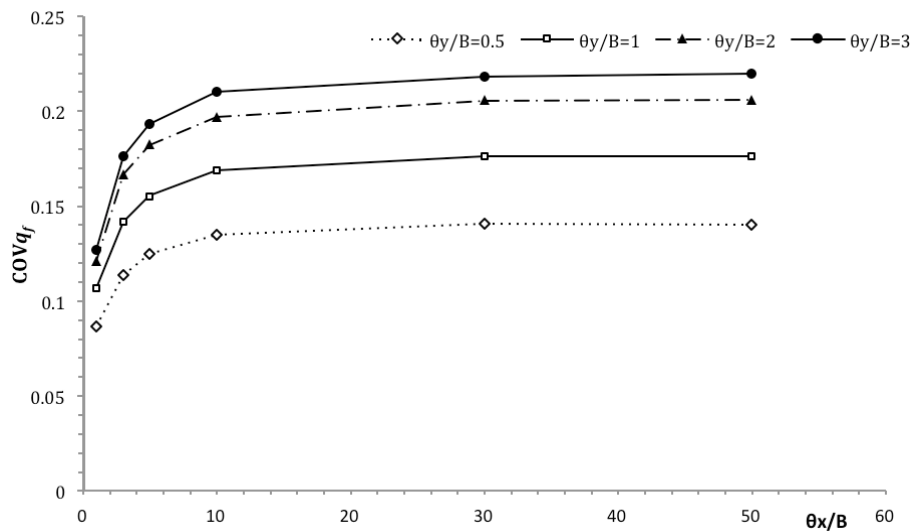
Rysunek 8-15 Porównanie wartości średniego współczynnika nośności podłoża typu $c-\phi$ dla pola izotropowego i anizotropowego na osi skali poziomej

Analiza współczynnika zmienności oporu dla podłoża typu $c-\phi$ (Rysunek 8-16) wykazała, że podobnie jak w przypadku gruntu idealnie spoiściego (Rysunek 8-14) podłoże anizotropowe wykazuje mniejszą zmienność. Jednocześnie krzywa podłoża anizotropowego ma stale rosnący charakter, lecz powyższej $\theta_x/B=8$ zmiany są już niewielkie. Współczynnik zmienności oporu (COV_{q_f}) w przypadku podłoża typu $c-\phi$ (Rysunek 8-16) wykazuje większy zakres zmienności aniżeli podłoże idealnie spoiście (Rysunek 8-14).



Rysunek 8-16 Porównanie współczynnika zmienności oporu dla pola izotropowego i anizotropowego na osi skali poziomej; podłoże typu $c-\phi$

Na podstawie wyników z Tabeli 8-1 można też sporządzić wykresy odpowiadające COV_{q_f} w zależności od poziomej skali fluktuacji (θ_x/B) dla kolejnych pionowych skal fluktuacji $\theta_y/B=1, 2$ i 3 . Rysunek 8-17 przedstawia taką zależność.



Rysunek 8-17 Współczynnik zmienności oporu w zależności od poziomej skali fluktuacji dla różnych pionowych skal fluktuacji

Dla każdego przypadku θ_y/B otrzymujemy rosnącą zależność $COVq_f$ od θ_x/B . Ponadto wartości $COVq_f$ rosną również ze wzrostem skali θ_y . Ta sytuacja bardzo utrudnia lokalizację obszarów, w których pozioma i pionowa skala fluktuacji daje najniekorzystniejszy efekt ze względu na losową zmienność nośności. Porównanie każdej z nich z krzywą $\theta_y=\theta_x$ prowadzi do analogicznych (w stosunku do powyższych) wniosków. Dla tego też rysunki te zostały pominięte.

8.3. UWAGI DO ROZDZIAŁU

Podsumowując zadanie izotropowe jak i anizotropowe, w odniesieniu do poszukiwanego efektu najgorszego przypadku skali fluktuacji należy zauważyć, że:

1. Na wykresach wartości średniej w zależności od poziomej skali fluktuacji widoczne są każdorazowo lokalne minima. W przypadku izotropowym minima są głębsze i zawarte w przedziale $\theta_x/B \in [0.2, 2.0]$, co było już sugerowane w pracach (Griffiths & Fenton, 2001) oraz (Fenton & Griffiths, 2003). W przypadku anizotropowym wykazano, że lokalne minima są płytsze i przesunięte w stronę większych wartości skali fluktuacji, zawierając się w przedziale $\theta_x/B \in [0.2, 8.0]$.
2. Analiza dwóch pierwszych momentów statystycznych wykazała, że wartość średnia nie jest dobrym kryterium przy rozpatrywaniu najgorszego efektu z punktu widzenia efektów losowych na analizę bezpieczeństwa posadowienia. Wynika to

z faktu, że o najgorszej sytuacji obliczeniowej nie decyduje minimalna wartość nośności a jej największa zmienność. Z tego powodu istotne są zależności współczynnika zmienności oporu od wartości skali fluktuacji, pod kątem występowania lokalnych maksimów.

3. W przypadku izotropowym lokalne maksima na wykresie współczynnika zmienności zaobserwowano jedynie dla przypadku gruntu idealnie spoiściego. W przypadku gruntu typu $c-\phi$ nie zaobserwowano lokalnych maksimów na wykresach zależności współczynnika zmienności oporu od wartości skali fluktuacji. Zależności te są stale rosnące. Wynika stąd, że nie można mówić o wyraźnie określonym najgorszym przypadku skali fluktuacji.
4. Jak już wcześniej wskazano wartości współczynnika zmienności oporu zmieniają się nieznacznie dla skal fluktuacji przekraczających wartość $\theta/B > 10$. Gdyby te zmiany przyjąć jako nieistotne, można by za najgorszą uznać wartość skali fluktuacji, dla których $\theta/B > 10$.
5. W przypadku modelowania parametrów podłoża polami anizotropowymi uzyskuje się wnioski analogiczne do powyższych. Poszukując najgorszego przypadku na osi skali poziomej należałoby przyjąć dużą wartość, np. $\theta_x/B = 50$. Jednak określenie najniekorzystniejszej pionowej skali fluktuacji wydaje się być nadal problematyczne.

9. NOŚNOŚĆ POSADOWIENIA BEZPOŚREDNIEGO NA PODŁOŻU „TARANTO BLUE CLAY”

Jednym z celów poniższej pracy było rozszerzenie algorytmu obliczeniowego RFEM o efekt ciężaru własnego gruntu oraz zagłębienia fundamentu, w związku z czym rozbudowano program rbear2d o segmenty realizujące te obliczenia. Część związana z symulacją pól losowych nie wymagała modyfikacji, natomiast część programu realizująca obliczenia metodą elementów skończonych należało zmodyfikować tak, aby obejmowała dodatkowo segmenty uwzględniające ciężar własny i zagłębienie fundamentu. Poniższy rozdział zawiera obliczenia nośności według tak rozbudowanego algorytmu. Obliczenia przeprowadzono dla rzeczywistych parametrów gruntowych, opracowanych statystycznie i udostępnionych przez Politechnikę w Bari (Politecnico di Bari) we Włoszech.

Dodatkowo posiadając pełną informację statystyczną dotyczącą parametrów podłoża, autorka estymowała rozkłady prawdopodobieństwa oporu granicznego analizowanego podłoża, w różnych kombinacjach rozbudowanego algorytmu. Umożliwiło to, dla uzyskanych wyników, kalibrację wartości obliczeniowej oporu na poziomie wskaźnika niezawodności, proponowanego w normie (ISO:2394, 1998), co zamieszczono w końcowej części tego rozdziału.

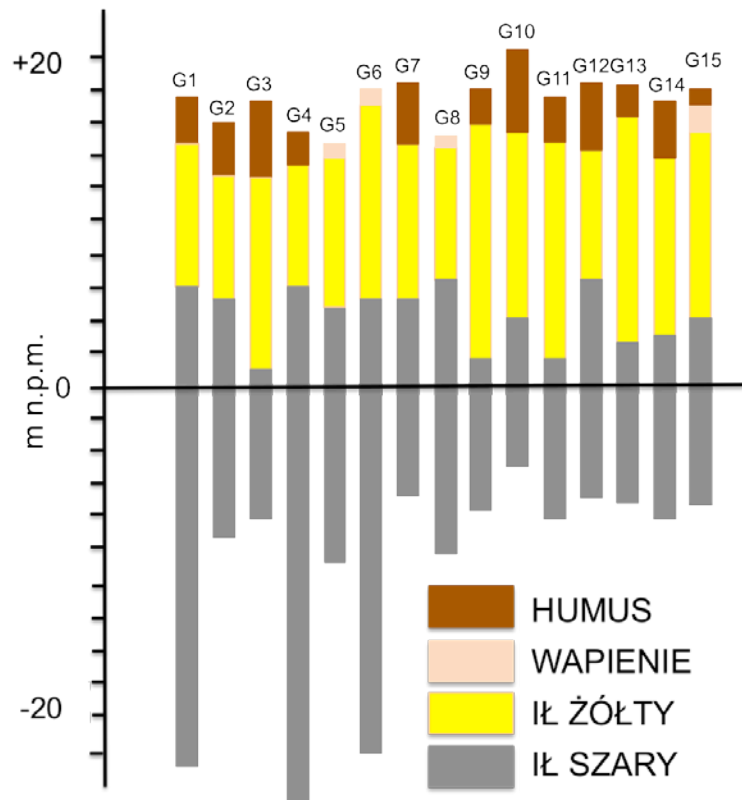
9.1. OPIS PODŁOŻA

Rozpatrywanym gruntem był niebieski ił z okolic Tarentu, w południowo-wschodniej części Włoch (Rysunek 9-1).



Rysunek 9-1 Położenie geologiczne niebieskiego łu z okolic Tarentu (Taranto)

Omawiany łu należy do grupy osadowych utworów ilastych zawierających kaolinity i wyróżniają się wysokim poziomem skonsolidowania. Rysunek 9-2 ukazuje dwa poziomy łu, określone na podstawie 15 odwiertów badawczych (G1 – G15). Opis badań powyższego gruntu zawiera praca Cafaro i Cherubiniego (2002). Pierwszy – wyżej położony poziom zdefiniowano jako wyblakły łu żółty, drugi – niżej, jako łu szaro - niebieski. Układ warstw jaki prezentuje Rysunek 9-2 jest cechą charakterystyczną dla całego regionu Tarentu. Brązowawo – żółta górna warstwa i szara warstwa dolna korespondują z utworem określonym mianem niebieskiego łu tarenckiego (Taranto Blue Clay). Oba utwory zmieniają się wewnątrz swej struktury od łuw gliniastych po gliny pylaste.



Rysunek 9-2 Układ warstw wynikający z badań sondą CPT (Cafaro i Cherubini, 2002)

Celem badań opisanych w pracy (Cafaro & Cherubini, 2002) było określenie wytrzymałości niebieskiego iłu tarenckiego. Składała się na nią wartość średnia, wynikająca ze statystycznej obróbki danych oraz szybkość zmienności, w formie skal fluktuacji (Cafaro, Cherubini, & Cotecchia, 2000). Wyniki dla pięciu wybranych otworów, ilustrujących charakter zarówno górnej jak i dolnej warstwy ilów, przedstawia Tabela 9-1. Prezentowane rezultaty pochodzą z badań podłoża wykonanych sondą CPT ze stożkiem mechanicznym.

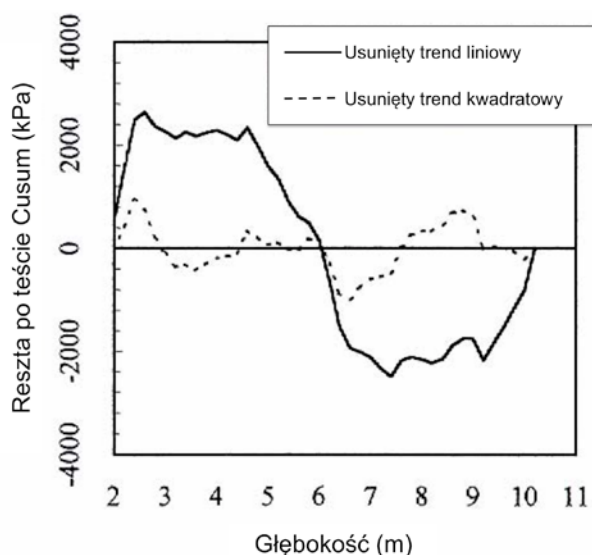
Opór stożka jako zmienny losowo można opisać w formie jednowymiarowego pola losowego. Zmiany ujawniają się wraz z głębokością x , dlatego w przypadku pola jednowymiarowego można opisać je wzorem:

$$(9-1) \quad k(x) = t(x) + w(x)$$

Wielkość $k(x)$, będąca oporem stożka, składa się z dwóch składników: $t(x)$ – deterministycznego trendu (wartość średnia zmienna z głębokością) oraz $w(x)$ – funkcji losowej charakteryzującą fluktuacje oporu wokół trendu (resztkowa wartość oporu). Możliwych trendów przestrzennych wartości średniej wraz z głębokością może być wiele. Nie mniej jego określenie sprowadza się do zastosowania, na wynikach sondowań, procedury regresyjnej opartej na dopasowaniu metodą najmniejszych kwadratów.

Uzyskane trendy dla wybranych otworów analizowanego podłoża zamieszczono w Tabeli 9-1.

Określenie przestrzennej zmienności gruntu $k(x)$ skupia się zasadniczo na wyznaczeniu $w(x)$. Teoria pól losowych zakłada, że szukane wahania można modelować jako stacjonarne pole losowe o zerowej wartości średniej. Aby takie pole uzyskać konieczne jest usunięcie trendu $t(x)$ z obrazu danych pozostawiając resztkową wartość $w(x)$ (Rysunek 9-3). Jednakże stacjonarność w szerszym sensie musi być zweryfikowana przez odpowiednie testy statystyczne. W przypadku badań nad niebieskim iłem tarenckim zastosowano zmodyfikowany test Bartletta (Phoon, Quek, & An, 2003) oraz test Cusuma (Caulcutt, 1983). Rysunek 9-3 przedstawia przykładową realizację funkcji losowej $w(x)$ (resztkowa wartość oporu) po odjęciu trendów, odpowiednio liniowego i kwadratowego.



Rysunek 9-3 Test Cusuma na wyniku sondowania CPT dla górnej warstwy, otworu G1; wykres części resztkowych pozostałych po usunięciu liniowego oraz kwadratowego trendu

Aby z funkcji losowej $w(x)$ zmiennej fluktuacji wokół trendu uzyskać skalę fluktuacji, potrzebną do analiz RFEM, konieczne jest zastosowanie funkcji korelacji. Procedurę tę prowadzi się zgodnie z metodą Vanmarcke'a, w oparciu o dopasowanie wyników do modelowej funkcji korelacji. Tok postępowania opisano w rozdziale 2 poniższej pracy. W efekcie dla każdego otworu uzyskano trendy oraz skale fluktuacji, które zamieszczono w Tabeli 9-1.

Tabela 9-1 Trend i pionowe skale fluktuacji z badań CPT dla górnych i dolnych warstw badanego iłu (Cafaro, Cherubini, & Cotecchia, 2000)

Opór stożka	Trend	Pionowa skala fluktuacji θ_v (m)
Górna warstwa iłu		
G1	$y = 54.671x^2 - 21.21x + 5301$	0.195
G3	$y = 12.44x^2 + 113.06x + 2950$	0.401
G6	$y = 40.713x^2 - 439.7x + 5601$	0.207
G7	$y = 73.690x^2 - 172.2x + 9753$	0.401
G15	$y = 11.027x^2 - 212.3x + 2541$	0.436
Dolna warstwa iłu		
G1	$y = 149.11x + 4732$	0.536
G3	$y = 319.58x + 1722$	0.287
G6	$y = 201.29x + 3700$	0.720
G7	$y = 201.14x + 4036$	0.269
G15	$y = 203.34x + 3699$	0.185

Dokładny opis procedur, jakie posłużyły do uzyskania probabilistycznych charakterystyk pól losowych, zamieszczono w pracy Cherubiniego, Vessii i Puły, (2007). Na podstawie tej i poprzednio cytowanych prac przyjęto charakterystyki pól losowych zastosowanych do obliczeń w tym rozdziale. Wartości te zestawiono w Tabeli 9-2.

Tabela 9-2 Charakterystyka zmiennych własności mechanicznych dla niebieskiego iłu tarenckiego

	Wartość średnia,	Odchylenie standardowe,	rozkład,	ϕ_{min}	ϕ_{max}	θ
Kohezja (c)	36 kPa	20 kPa	lognormalny			0.2; 0.3; 0.5; 0.7m
Kąt tarcia wewnętrznego (ϕ)	20°	4.8°	ograniczony	5°	35°	0.2; 0.3; 0.5; 0.7m
Ciężar własny (γ)	19 kN/m ³		deterministyczny			
Moduł Younga (E)	36 MPa		deterministyczny			
Współczynnik Poissona (ν)	0.29		deterministyczny			

Niestety badania prowadzone na Politechnice w Bari nie przewidywały określenia zmienności poziomej skali fluktuacji, dlatego w oparciu wyniki podane w Rozdziale 3 oraz analizy opisane w Rozdziale 7 i 8 autorka, rozważając anizotropową strukturę podłoża, przyjęła skale poziome o rząd wielkości większe od prezentowanych w Tabeli 9-2. Ponadto założono do dalszych obliczeń, że pola losowe spójności i kąta tarcia wewnętrznego są stochastycznie niezależne. Takie podejście uzasadniają uwagi podane w podrozdziale 7.3.

9.2. OKREŚLENIE PARAMETRÓW ZADANIA NUMERYCZNEGO

Zadanie rozpoczęto od wyznaczenia w sposób analityczny wartości oporu (q_{det}), według wzoru (2-5) oraz odpowiednich współczynników nośności (N_i)

(2-7, 2-8, 2-19). Wyniki zawiera Tabela 9-3. Do tych obliczeń przyjęto wartości średnie parametrów podłoża zamieszczone w Tabeli 9-2 oraz następujące parametry konstrukcji fundamentu: szerokość fundamentu $B=1\text{m}$, zagłębienie fundamentu, w stosunku do powierzchni terenu $D=1\text{m}$.

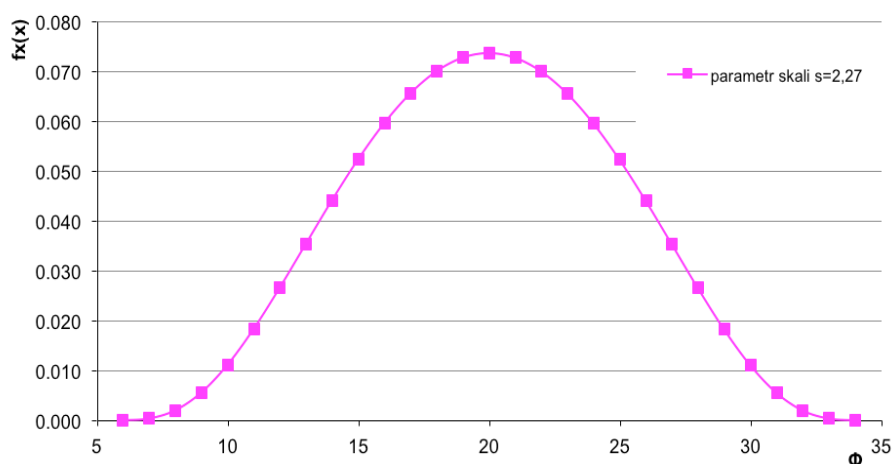
Tabela 9-3 Składowe wartości deterministycznego oporu ze wzoru Terzagiego

	współczynnik	
	nośności N_i	opór q_{det} [kPa]
Spójność (c)	14.83	538.50
Ciężar własny gruntu (γ)	3.93	37.34
Zagłębienie fundamentu ($q=\gamma D$)	6.40	121.59
	RAZEM:	697.43

Procedura przygotowawcza do prowadzenia analiz metodą RFEM wymagała określenia wszystkich parametrów rozkładów dla poszczególnych właściwości podłoża. W przypadku spójności i skojarzonego z nią rozkładu lognormalnego, dane zamieszczone w Tabeli 9-2 dają pełną informację. Jednakże opis kąta tarcia wewnętrznego wymagał wyznaczenia dodatkowo parametru s , zdefiniowanego w oparciu o funkcję gęstości rozkładu ograniczonego (zależnego od odchylenia standardowego tego rozkładu), o czym pisano już w rozdziale 5 poniższej pracy. Z badań statystycznych (Tabela 9-2) odchylenie standardowe oszacowano na poziomie $\sigma_\phi=4.8^\circ$. Przekształcając wzór (5-21) do postaci:

$$(9-2) \quad s = \frac{\sigma_\phi \left[\pi \left(\exp(2\mu_\phi) + \exp(-2\mu_\phi) + 2 \right) \right]}{(\phi_{\max} - \phi_{\min})}$$

wyznaczono $s=2.27$. Funkcja gęstości rozkładu ograniczonego miała dla tej wartości s , „dzwonowaty” kształt, co pokazuje Rysunek 9-4.



Rysunek 9-4 Funkcja gęstości rozkładu ograniczonego dla parametru $s=2.27$ (parametry gruntu definiuje Tabela 9-2)

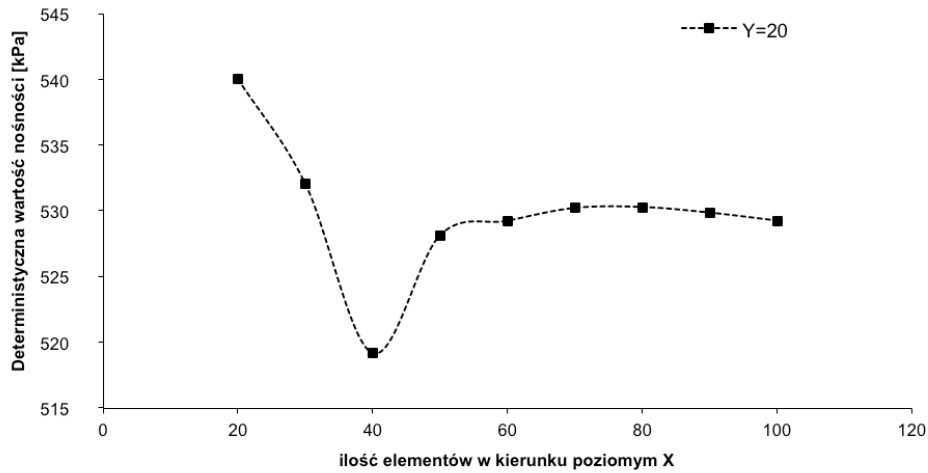
Następnie przystąpiono do wyznaczenia parametrów odpowiadających za analizę MES, czyli ustalenia parametrów siatki, granic zbieżności oraz parametry macierzy sztywności (czyt. rozdział 3).

Dobór wielkości siatki powinien być taki aby w możliwie małym stopniu ingerował w uzyskane wyniki. Siatka powinna być na tyle duża aby zakładany mechanizm zniszczenia mógł się całkowicie rozwinąć w jej obrębie i aby brzeg siatki nie ingerował w ten mechanizm. Modelowanie w MES rozpatrywanego procesu powinno odzwierciedlać mechanizm Prandtla (Rysunek 2-3).

Z drugiej strony ważne jest aby siatka zawierała możliwie mało elementów ze względu na długi czas obliczeń. Obliczenia probabilistyczne realizowane są poprzez symulację Monte Carlo, co powoduje długi czas pracy komputera. Przykładowo obliczenia przy liczbie realizacji równej 1000 wymagały około dziesięciu godzin pracy komputera z procesorem 2.66GHz Intel Core 2 Duo i pamięcią operacyjną 4 GB. Kryterium doboru wielkości siatki była stabilna deterministyczna wartość oporu. Analizę przeprowadzono bez uwzględnienia ciężaru własnego gruntu pod fundamentem oraz bez zagłębienia. Zatem uzyskane wartości nośności należy odnosić jedynie do pierwszego wiersza w Tabeli 9-3. Zagadnienie rozpatrywano w dwóch etapach. Pierwszy obejmujący ustalenie ilości elementów na kierunku poziomym (Rysunek 9-5), drugi - na kierunku pionowym (Rysunek 9-6). W pierwszym cyklu obliczeniowym przyjęto 20 elementów na kierunku pionowym. Każdy z elementów miał wymiar 0.1x0.1m. Porównano zachowanie się wartości deterministycznej oporu (wyznaczonej metodą elementów skończonych) pod wpływem zmiany liczby elementów na kierunku poziomym. Wyniki zawiera Tabela 9-4 oraz ilustruje Rysunek 9-5.

Tabela 9-4 Zmienna liczba elementów w kierunku poziomym;

Liczba elementów na kierunku		Deterministyczna wartość oporu
X	Y	[kPa]
20	20	540.01
30		532.03
40		519.12
50		528.11
60		529.21
70		530.19
80		530.26
90		529.83
100		529.22



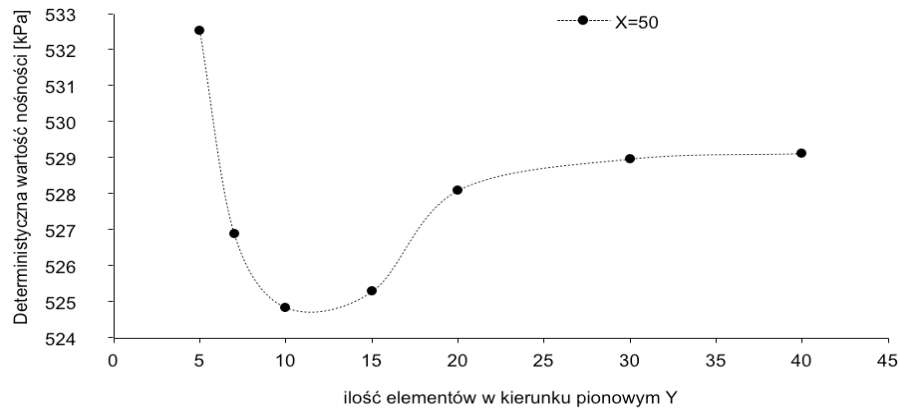
Rysunek 9-5 Analiza wielkości siatki MES. Liczba elementów na kierunku poziomym

Jednocześnie stała pozostawała szerokość fundamentu, $B=1\text{m}$. Tabela 9-4 oraz Rysunek 9-5 wykazują dla założonej „wysokości” siatki (ilości elementów na kierunku pionowym) stabilizację wartości oporu przy „szerokości” $X=50$ elementów. Większe rozmiary siatki nie wpływają na zmianę wartości oporu w stopniu większym niż 0.1%. Warto zauważyć niezłą zgodność uzyskanej wartości oporu $q_{MES}=528.11\text{kPa}$ z wartością obliczoną analitycznie $q_{det}=538.50\text{kPa}$.

Stosując tę sam sposób do określenia potrzebnej pionowej liczby elementów przyjęto stałą szerokość siatki ($X=50$ elementów) i zmieniano wysokość (Rysunek 9-6).

Tabela 9-5 Zmienna ilość elementów na kierunku pionowym

Ilość elementów na kierunku		Wartość deterministyczna [kPa]
X	Y	
50	5	532.55
	7	526.91
	10	524.86
	15	525.30
	20	528.11
	30	528.98
	40	529.13

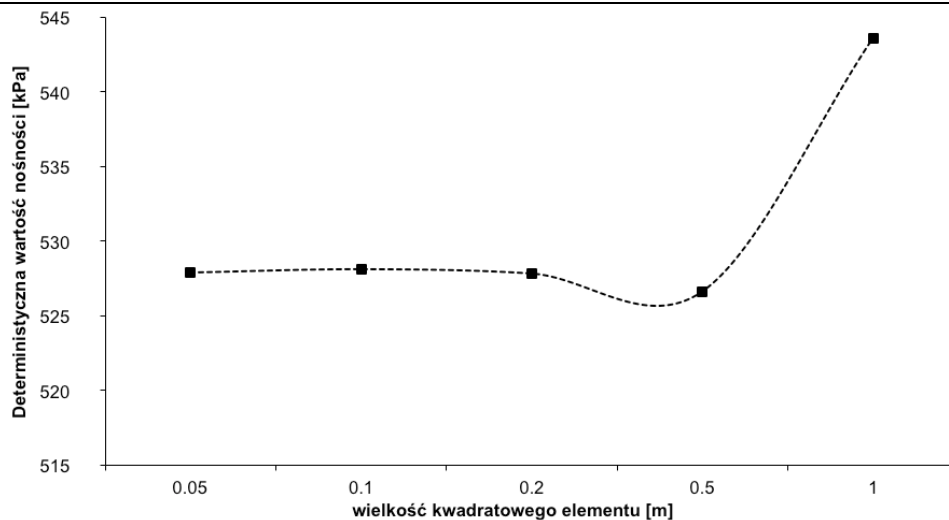


Rysunek 9-6 Analiza wielkości siatki RFEM. Ilość elementów na kierunku pionowym

Stwierdzono stabilizację wyników na poziomie 20 elementów i taką ilość przyjęto do dalszych obliczeń. Postanowiono zanalizować również wielkość pojedynczego elementu przy założeniu stałej szerokości fundamentu $B=1\text{m}$ oraz proporcjonalnej do tego fundamentu szerokości (5m) i wysokości (2m) siatki. Kryterium doboru wielkości elementu była wartość zbliżona do analitycznego oznaczenia (pierwszy wiersz w Tabeli 9-3), jednocześnie nie przekraczające tej wartości. Wyniki zamieszczono w Tabeli 9-6 oraz na Rysunku 9-7.

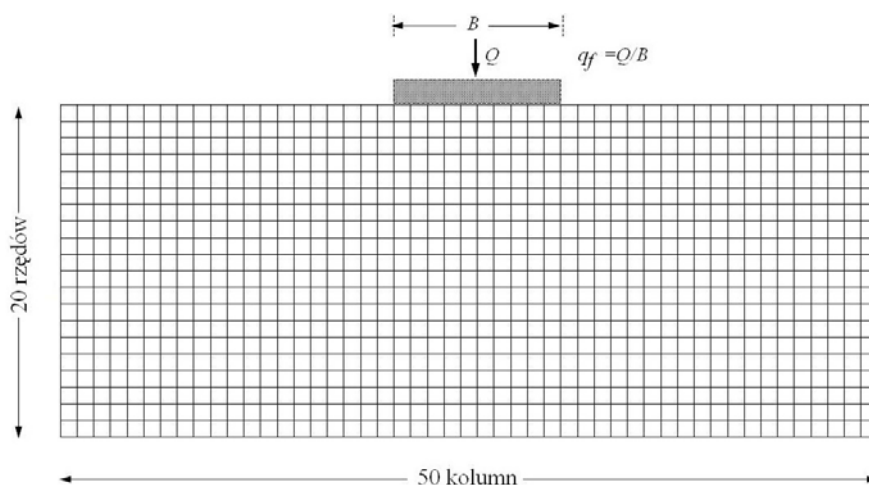
Tabela 9-6 Zmienna wielkość elementu w siatce

Wielkość elementu X	Wielkość elementu Y	Szerokość fundamentu B=1m [elem]	Wymiar poziomy siatki X=5m [elem]	Wymiar pionowy siatki Y=2m [elem]	Wartość deterministyczna [kPa]
0.05	0.05	20	100	40	527.88
0.1	0.1	10	50	20	528.11
0.2	0.2	5	25	10	527.821
0.5	0.5	2	10	4	526.61
1	1	1	5	2	543.572



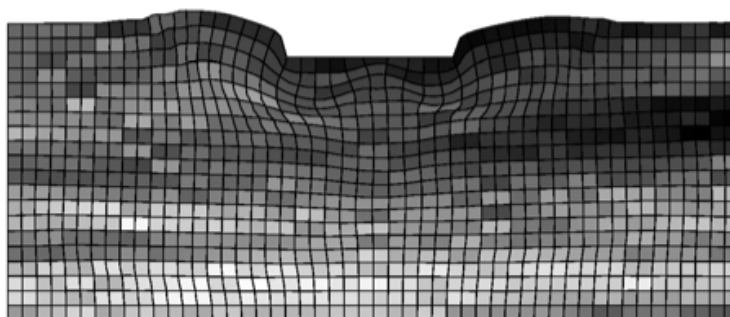
Rysunek 9-7 Analiza wielkości kwadratowego elementu w siatce MES

Ze względu na małe różnice w wartości deterministycznej, ostatecznie jako optymalną przyjęto siatkę 50x20 obciążoną fundamentem $B=1\text{m}$, któremu odpowiadało 10 elementów o wymiarze $0.1\times 0.1\text{m}$ (Rysunek 9-8).



Rysunek 9-8 Optymalna siatka do analiz statystycznych MES

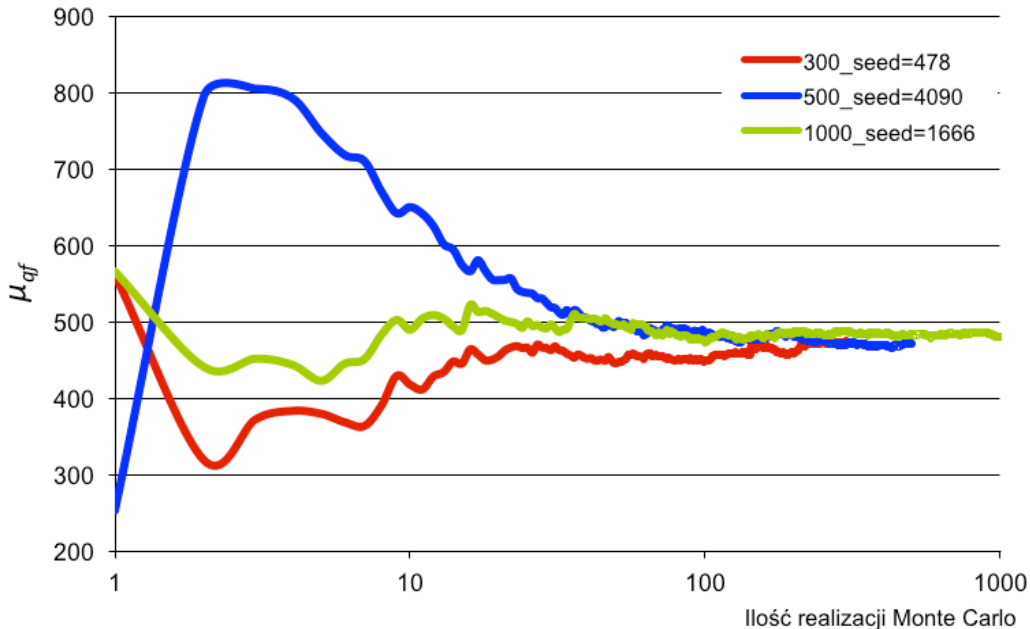
Zgodnie z założeniem nie ograniczała ona powstającego mechanizmu zniszczenia. Rysunek 9-9 przedstawia mechanizm deformacji gruntu pod wpływem obciążenia przyłożonego przez fundament o założonej szerokości dla zaakceptowanych parametrów siatki.



Rysunek 9-9 Przykładowy obraz deformacji gruntu z widocznym mechanizmem zniszczenia (ciemne pola oznaczają grunt o słabszych własnościach)

Mając określone parametry gruntu oraz parametry siatki przystąpiono do określenia niezbędnej liczby realizacji w procesie symulacji Monte Carlo. Kryterium doboru liczby realizacji było analogiczne jak przy doborze wielkości siatki. Do oszacowania wartości średniej oporu oraz odchylenia standardowego należy przyjąć najmniejszą możliwą liczbę realizacji, przy której następuje stabilizacja wyników na poziomie uzyskanym z dużej próby. Pozwala to uzyskać wiarygodne wyniki przy minimalnym nakładzie czasowym na obliczenia. Jako „dużą” próbę przyjęto tu liczbę realizacji $n=1000$. Efekt obliczeń dla wartości oczekiwanej (średniej) prezentuje Rysunek 9-10, na którym widać, że wyniki

zaczynają stabilizować się przy liczbie $n_I=300$ realizacji. W związku z powyższym do dalszych obliczeń dwóch pierwszych momentów statystycznych przyjęto taką liczbę realizacji $N_I=300$.



Rysunek 9-10 Określenie liczby realizacji Monte Carlo dla wyznaczenia stabilnej wartości średniej oporu

Należy podkreślić, że w obliczeniach prowadzonych w ramach tego rozdziału zakładano, że pola losowe spójności oraz kąta tarcia wewnętrznego są stochastycznie niezależne. Kwestię korelacji pomiędzy nimi sygnalizowano w podrozdziale 5.3, wskazując na brak przekonujących argumentów dotyczących tego zagadnienia. Obliczenia z uwzględnieniem korelacji pomiędzy powyższymi polami były przedmiotem analizy autorki. Wyniki analiz przedstawiono we wspólnej pracy (Vessia, Cherubini, Pieczyńska, i Puła, 2009 – Appendix 2). Przedstawione rezultaty można streścić następująco. Jeśli przyjmie się najczęściej sugerowaną hipotezę, że parametry c i ϕ są ujemnie skorelowane to wartość oczekiwana oporu granicznego wzrasta w stosunku do tej otrzymanej, przy założeniu braku korelacji. Natomiast odchylenie standardowe w przypadku braku korelacji jest największe. W związku z tym uznano, że obliczenia przy założeniu stochastycznej niezależności pól dają wyniki „po stronie bezpiecznej” z punktu widzenia niezawodności posadowienia bezpośredniego.

9.3. PREZENTACJA WYNIKÓW

Poniższy podrozdział stanowi zwięzły opis wyników analiz numerycznych dla niebieskiego iłu tarenckiego o parametrach opisanych w Tabeli 9-2. W pierwszej kolejności postawiono pytanie jak zmienia się nośność gruntu nieważkiego obciążonego powierzchniowym fundamentem. W sensie analitycznym jest to sytuacja jednakowa z zadaniem opublikowaną w pracy (Fenton & Griffiths, 2003). Następnie sukcesywnie rozszerzano algorytm obliczeniowy, aby opisywał on efekt ciężaru własnego gruntu oraz zagłębienie fundamentu na nośność. W efekcie uzyskano cztery komplety wyników, wyczerpująco opisujące nośność fundamentu na podłożu jednorodnym o losowej wytrzymałości.

Wartości deterministyczne uzyskane z obliczeń analitycznych (q_{det}) oraz obliczeń metodą MES (q_{MES}), dla średnich parametrów podłoża (Tabela 9-2) prezentuje Tabela 9-7.

Tabela 9-7 Wartości deterministyczne dla parametrów średnich

		q_{det} [kPa]	q_{MES} [kPa]
(1)	Nieważki grunt spoisty, fundament powierzchniowy	538.50	528.49
(2)	Ważki grunt spoisty, fundament powierzchniowy	575.84	527.78
(3)	Nieważki grunt spoisty, fundament zagłębiony	647.99	660.09
(4)	Ważki grunt spoisty, fundament zagłębiony	697.43	694.88

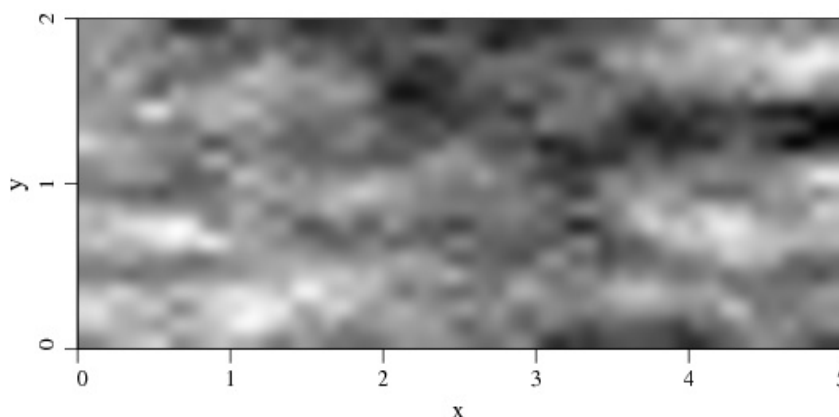
Wynika z niej, że wartości uzyskane w drodze symulacji MES są nieznacznie mniejsze od wielkości analitycznych w przypadku gruntu nieważkiego z powierzchniowym fundamentem (1) oraz w przypadku gruntu ważkiego z fundamentem zagłębionym (4). W sytuacjach pośrednich – ciężar własny gruntu przy powierzchniowym fundamencie (2) daje istotnie większą wartość przy obliczeniach analitycznych w stosunku do wartości q_{MES} , natomiast zagłębienie fundamentu przy pominięciu ciężaru własnego (3) skutkuje większym oporem wyznaczonym metodą elementów skończonych.

Obliczenia według RFEM prowadzono dla 300 symulacji Monte Carlo oraz ustalonej w pkt. 8.2, siatki 50 x 20 o oczku 0.1 x 0.1m. . Najpierw zanalizowano przypadek, w którym pola kąta tarcia wewnętrznego i spójności były polami izotropowymi. Następnie zastosowano pola anizotropowe, w których skala fluktuacji pionowej zmieniała się w granicach 0.2 – 1.0m a skala pozioma od 1.0m do nieskończoności

9.3.1. IZOTROPOWY MODEL PODŁOŻA

W pierwszej kolejności wykonano obliczenia nośności w zakresie odpowiadającym rozwiązaniu publikowanemu w pracy (Fenton & Griffiths, 2003), tj. bez uwzględnienia zagłębienia fundamentu oraz ciężaru własnego gruntu.

Wyniki symulacji komputerowych przeprowadzonych w ramach poniższego zadania, dla parametrów ładu tarenckiego zestawiono w Tabeli 9-8. Zmiennym parametrem była skala fluktuacji, jednakowa w kierunku pionowym i poziomym, która zmieniała się w zakresie 0.2 – 2.0m, co wynika z Tabeli 9-2. Przykładową realizację izotropowego pola spójności prezentuje Rysunek 9-11.



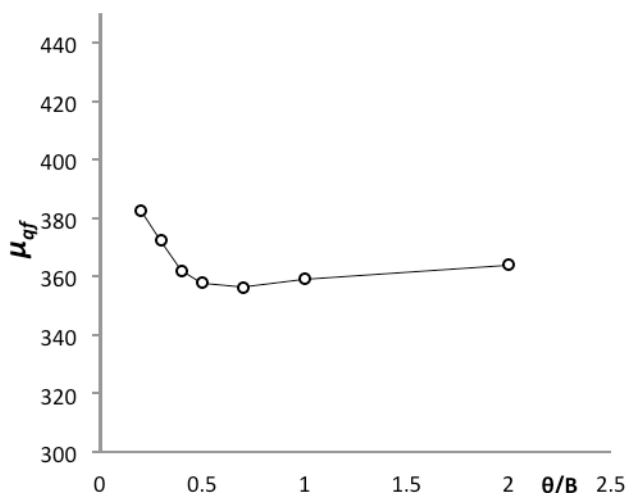
Rysunek 9-11 Przykładowa realizacja izotropowego pola spójności $\theta_x=\theta_y=1\text{m}$ (ciemne pola to mniejsze wartości spójności)

Tabela 9-8 Probabilistyczne charakterystyki nośności w zależności od skali fluktuacji; model izotropowy, fundament powierzchniowy, grunt nieważki

θ [m]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	COV_{qf}
0.2	382.63	31.67	0.08
0.3	372.37	41.97	0.11
0.4	362.09	58.72	0.16
0.5	357.99	72.51	0.20
0.7	356.40	89.80	0.25
1	359.10	112.67	0.31
2	364.07	129.69	0.36

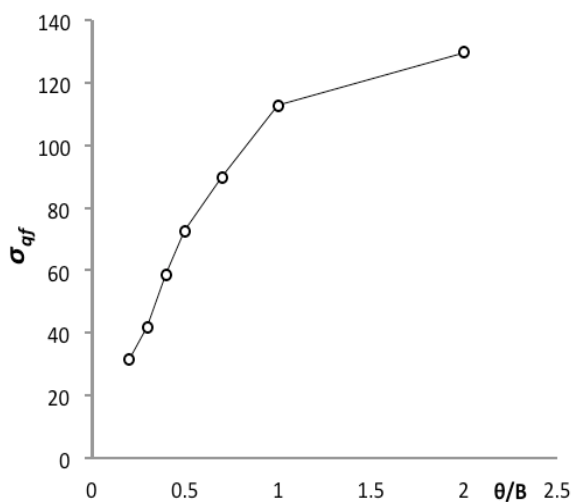
Wykresy obrazujące zmienność wartości średniej (μ_{qf}), odchylenia standardowego (σ_{qf}) oraz współczynnika zmienności (COV_{qf}) w zależności od stosunku skali fluktuacji (θ) do szerokości fundamentu (dalej w skrócie określana skalą fluktuacji θ/B) przedstawiono na kolejnych rysunkach. Wykres wartości średniej (Rysunek 9-12) pokazuje dużą wartość oporu dla skali fluktuacji $\theta/B=0.2$ a następnie obniżenie wartości z lokalnym minimum

dla $\theta/B \in [0.3, 1]$. Dla skali większej od jedności wartość wydaje się zmieniać nieznacznie, co jest zgodne z wynikami zamieszczonymi w rozdziale 6.

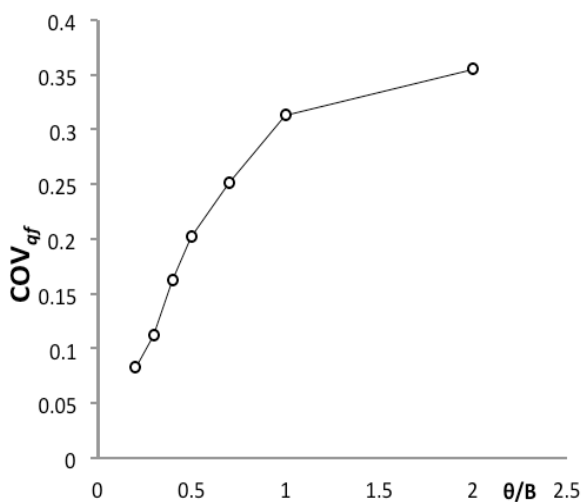


Rysunek 9-12 Wartość średnia oporu dla modelu izotropowego nieważkiego podłoża, fundament powierzchniowy

Wykresy odchylenia standardowego (Rysunek 9-13) oraz współczynnika zmienności (Rysunek 9-14) pokazują stale rosnący charakter wahań oporu podłoża. Interpretacja ta jest zgodna również z zadaniami izotropowymi opisanymi w rozdziale 6 poniższej pracy.



Rysunek 9-13 Odchylenie standardowe oporu dla modelu izotropowego podłoża nieważkiego, fundament powierzchniowy



Rysunek 9-14 Współczynnik zmienności oporu dla modelu izotropowego podłoża nieważkiego, fundament powierzchniowy

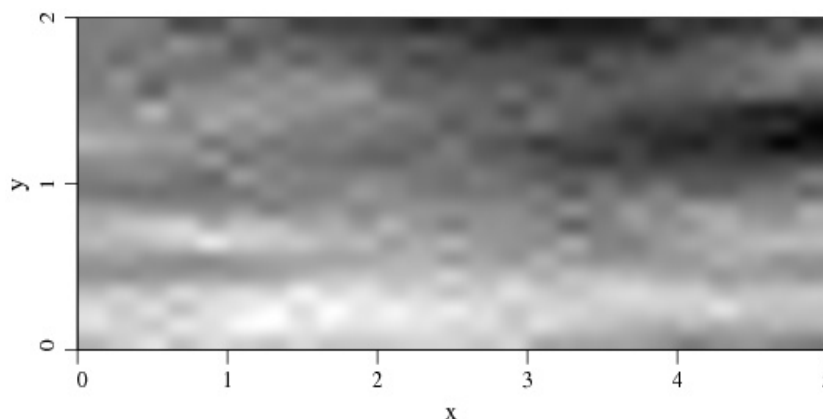
9.3.2. ANIZOTROPOWY MODEL PODŁOŻA

W poniższym punkcie przedstawiono wyniki uzyskane dla następujących zadań:

1. grunt nieważki fundament powierzchniowy (pkt. 9.3.2.1),
2. grunt ważki, fundament powierzchniowy (pkt. 9.3.2.2)
3. grunt nieważki, fundament zagłębiony (pkt. 9.3.2.3)
4. grunt ważki, fundament zagłębiony (pkt. 9.3.2.4)

W punktach 9.3.2.1 do 9.3.2.4 zamieszczono wyniki oraz komentarze dotyczące wartości oczekiwanej nośności podłoża, zaś w punkcie 9.3.2.5 uwagi dotyczące wszystkich przypadków z punktów 9.3.2.1 do 9.3.2.4 Natomiast analizie obliczonych odchyłeń standardowych i współczynników zmienności nośności poświęcono punkt 9.3.2.6, gdzie powyższe wielkości przedstawiono na zbiorczych wykresach porównawczych.

W zadaniach przedstawionych w pkt. 9.3.2.1 do 9.3.2.6 przyjęto anizotropowe pola spójności i kąta tarcia wewnętrznego o parametrach zgodnych z niebieskim łem tarenckim (Tabela 9-2). Jak już wspomniano w podrozdziale 9.1 poziome skale fluktuacji (θ_x), które nie były oznaczane w badaniach, przyjęto o rząd wielkości większe od badanych skal pionowych (θ_y). W każdym liczonym przykładzie pionowa skala fluktuacji θ_y i pozioma skala fluktuacji θ_x w polu spójności są jednakowe jak odpowiednie skale w polu kąta tarcia wewnętrznego. Rysunek 9-15 pokazuje przykładową realizację anizotropowego pola spójności przy skali fluktuacji $\theta_x=10\text{m}$ i $\theta_y=0.7\text{m}$.



Rysunek 9-15 Przykładowa realizacja anizotropowego pola spójności $\theta_x=10\text{m}$ i $\theta_y=0.7\text{m}$
(ciemne pola to mniejsze wartości spójności)

9.3.2.1. FUNDAMENT POWIERZCHNIOWY, GRUNT NIEWAŻKI

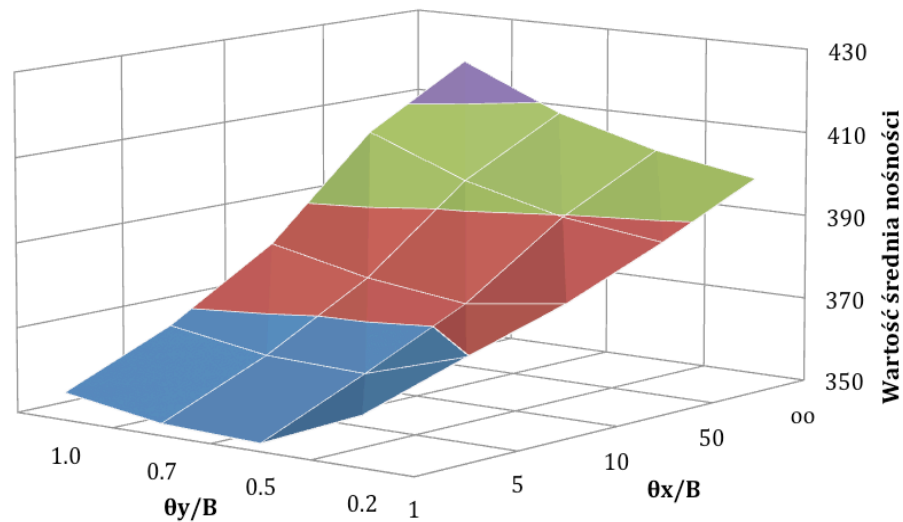
W pierwszej kolejności dokonano opisu nośności gruntu nieważkiego, obciążonego fundamentem powierzchniowym. Wyniki symulacji Monte Carlo dla nieważkiego podłoża anizotropowego, obciążonego powierzchniowym fundamentem prezentuje Tabela 9-9. Maksymalna wartość średnia uzyskana w drodze symulacji odpowiada $q_f=418.27\text{kPa}$, dla nieskończonej skali poziomej i maksymalnej przyjętej skali pionowej ($\theta_y=1\text{m}$).

Tabela 9-9 Wartość średnia, odchylenie standardowe i współczynnik zmienności w zależności od przyjętych skal fluktuacji; model anizotropowy, fundament powierzchniowy, grunt nieważki

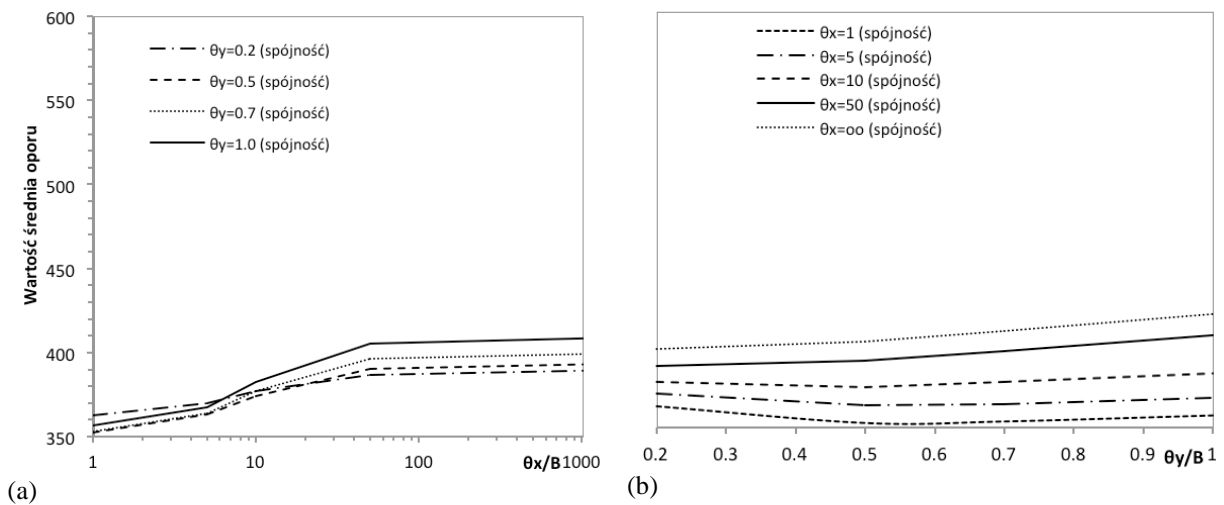
θ_x [m]	θ_y [m]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	COV_{qf}
1	0.2	361.97	52.70	0.146
	0.5	351.86	72.33	0.206
	0.7	352.73	80.77	0.229
	1.0	356.40	89.80	0.252
5	0.2	369.76	77.01	0.208
	0.5	362.44	109.25	0.301
	0.7	363.28	123.31	0.339
	1.0	366.99	138.28	0.377
10	0.2	376.99	83.04	0.220
	0.5	373.69	118.21	0.316
	0.7	376.67	134.69	0.358
	1.0	381.80	153.96	0.403
50	0.2	386.59	88.08	0.228
	0.5	389.63	125.31	0.322
	0.7	395.59	142.25	0.360
	1.0	404.68	162.29	0.401
∞	0.2	397.35	91.59	0.231
	0.5	401.42	131.07	0.327
	0.7	407.94	147.93	0.363
	1.0	418.27	168.26	0.402

Z powyższych wyników rysuje się powierzchnia wartości średniej w zależności od przyjętych skali fluktuacji (Rysunek 9-16). Przekroje tej powierzchni pokazano na Rysunku 9-16. Zmiany na kierunku skali poziomej obrazuje Rysunek 9-17(a), na którym zastosowano skalę logarytmiczną w celu lepszego zobrazowania przebiegu krzywej wartości średniej. Wszystkie krzywe (odpowiadające różnym skalom pionowym) mają charakter rosnący. Widoczna jest natomiast stabilizacja wartości średniej dla skali poziomej $\theta_x/B > 50$. Rysunek 9-17(b) prezentuje wartość średnią oporu w zależności od pionowej skali fluktuacji. Na przebiegu krzywych odpowiadających poziomym skalom fluktuacji $\theta_x/B \leq 10$ obserwuje się lokalne minimum wartości. Dla większych skal poziomych efekt ten zanika. Należy pamiętać, że przyjęty zakres skali pionowej

odpowiada rzeczywistej fluktuacji ilitarenckiego, stąd nie analizowano większych θ_y/B niż 1.



Rysunek 9-16 Powierzchnia wartości średniej oporu w zależności od poziomej i pionowej skali fluktuacji; model anizotropowy, grunt nieważki, fundament powierzchniowy



Rysunek 9-17 Przekroje powierzchni wartości średniej oporu (a) względem skali poziomej (b) względem skali pionowej (model anizotropowy grunt nieważki, fundament powierzchniowy)

9.3.2.2. FUNDAMENT POWIERZCHNIOWY, GRUNT WAŻKI

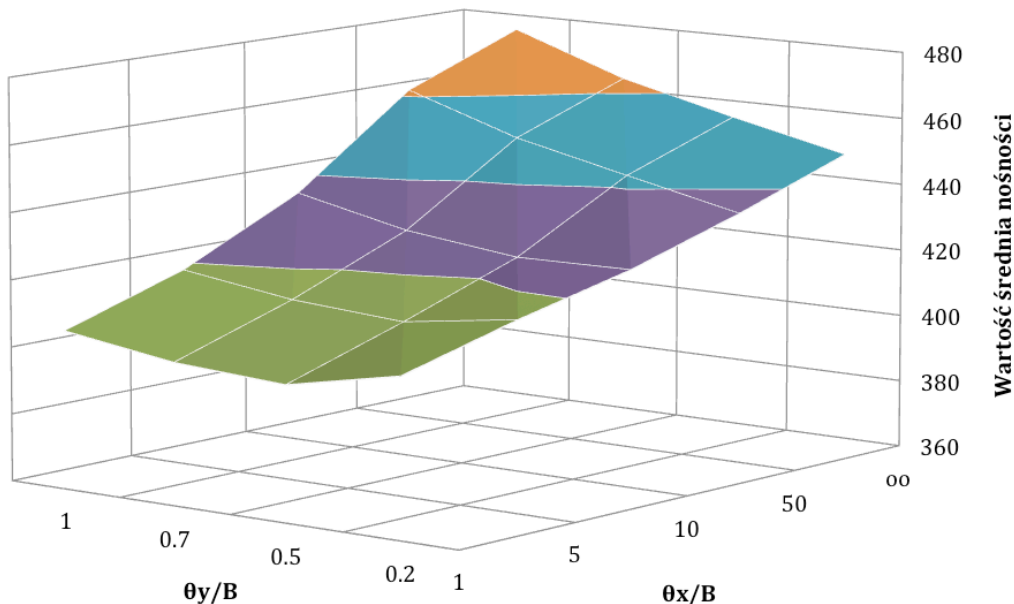
W drugim kroku dokonano rozbudowy algorytmu obliczeniowego rbear2d tak aby uwzględniał dodatkowo ciężar własny podłoża. Serię wyników uzyskanych w drodze symulacji zestawiono w Tabeli 9-9.

Rysunek 9-18 pokazuje powierzchnię wartości średniej oporu, która ma przebieg zbliżony do powierzchni na Rysunku 9-15. Oczywiście dla zadanych wartości skal fluktuacji,

wartość oporu po uwzględnieniu ciężaru własnego jest większa aniżeli dla gruntu nieważkiego.

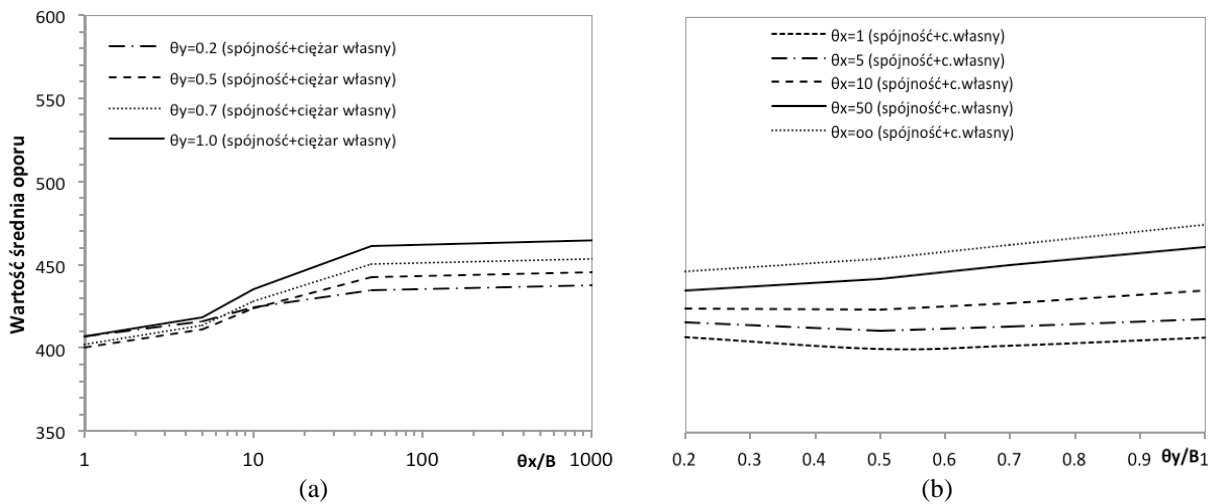
Tabela 9-10 Wartość średnia, odchylenie standardowe i współczynnik zmienności w zależności od przyjętych skal fluktuacji; model anizotropowy, grunt wazki, fundament powierzchniowy

θ_x [m]	θ_y [m]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	COV_{qf}
1	0.2	407.27	61.88	0.15
	0.5	400.17	83.62	0.21
	0.7	402.12	92.44	0.23
	1.0	406.98	102.23	0.25
5	0.2	416.60	89.56	0.21
	0.5	411.60	123.38	0.30
	0.7	413.84	137.88	0.33
	1.0	418.55	152.51	0.36
10	0.2	424.67	96.82	0.23
	0.5	424.22	133.25	0.31
	0.7	428.24	149.97	0.35
	1.0	435.65	170.87	0.39
50	0.2	435.21	102.07	0.23
	0.5	442.75	143.31	0.32
	0.7	450.49	160.68	0.36
	1.0	461.61	181.36	0.39
∞	0.2	447.10	107.10	0.24
	0.5	454.88	149.06	0.33
	0.7	463.32	166.80	0.36
	1.0	475.28	186.96	0.39



Rysunek 9-18 Powierzchnia wartości średniej oporu w zależności od poziomej i pionowej skali fluktuacji; model anizotropowy, grunt wazki, fundament powierzchniowy

Przekroje powyższej powierzchni prostopadle do osi skali pionowej pokazuje Rysunek 9-19(a). Widać na nim rosnący charakter krzywych w zależności od poziomej skali fluktuacji. Przekrój powierzchni prostopadły do skali osi poziomej pokazuje Rysunek 9-19(b), na którym podobnie jak w przypadku gruntu nieważkiego wskazuje na obecność lokalnego minimum, dla skali $\theta_y/B=0.5$. Przy czym obniżenie wartości jest widoczne jedynie dla małych skali poziomych ($\theta_x/B \leq 10$).



Rysunek 9-19 Przekroje powierzchni wartości średniej oporu
(a) względem skali poziomej (b) względem skali pionowej
(model anizotropowy grunt ważki, fundament powierzchniowy)

9.3.2.3. FUNDAMENT ZAGŁĘBIONY, GRUNT NIEWAŻKI

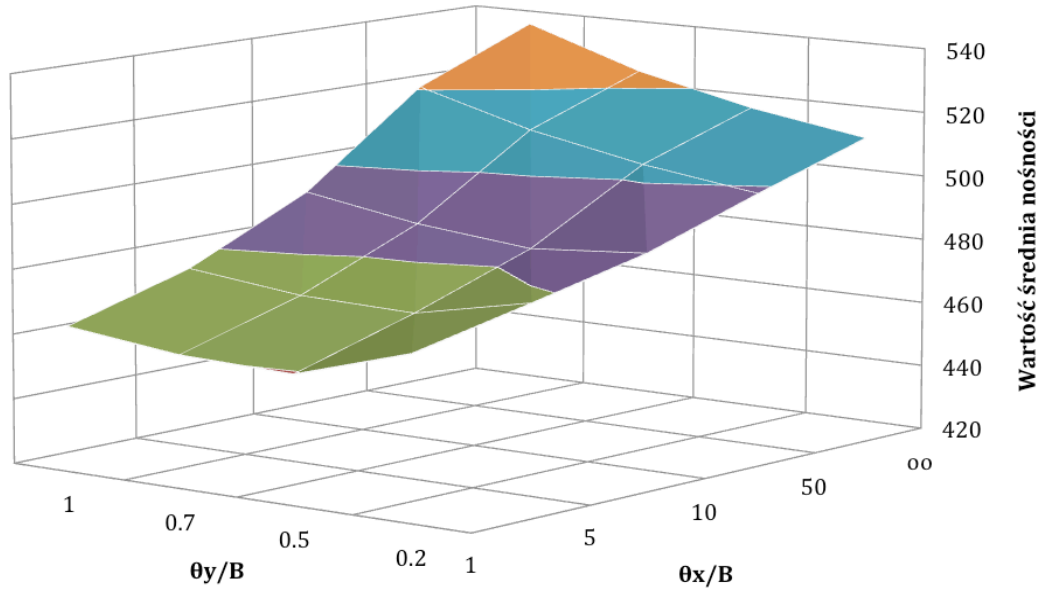
Kolejny podpunkt związany jest z następną modyfikacją algorytmu obliczeniowego rbear2d. W celu opisu zagłębienia fundamentu modelowano miąższość gruntu zalegającego obok fundamentu ekwiwalentnym obciążeniem zastępczym (q). W efekcie możliwe jest przyjmowanie dowolnych wysokości zagłębienia oraz różnego typu materiałów stanowiącego przeciwwagę dla mechanizmu zniszczenia. W bieżącym zadaniu autorka przyjęła jako obciążenie (q) iloczyn ciężaru objętościowego (γ) gruntu zalegającego poniżej poziomu fundamentu oraz wysokości $D=1\text{m}$. Wyniki symulacji Monte Carlo zestawiono w Tabeli 9-11, na podstawie której wykreślono powierzchnię wartości średniej w zależności od skali pionowej i poziomej (Rysunek 9-20). Różnice średnich wartości nośności, między nieważkim podłożem obciążonym fundamentem powierzchniowym a fundamentem zagłębionym lepiej jest obserwować na przekrojach powierzchni (Rysunek 9-21).

Pierwszy przekrój odpowiada zależności wartości średniej oporu od poziomej skali fluktuacji (Rysunek 9-21(a)), drugi – zależności wartości średniej oporu od pionowej skali

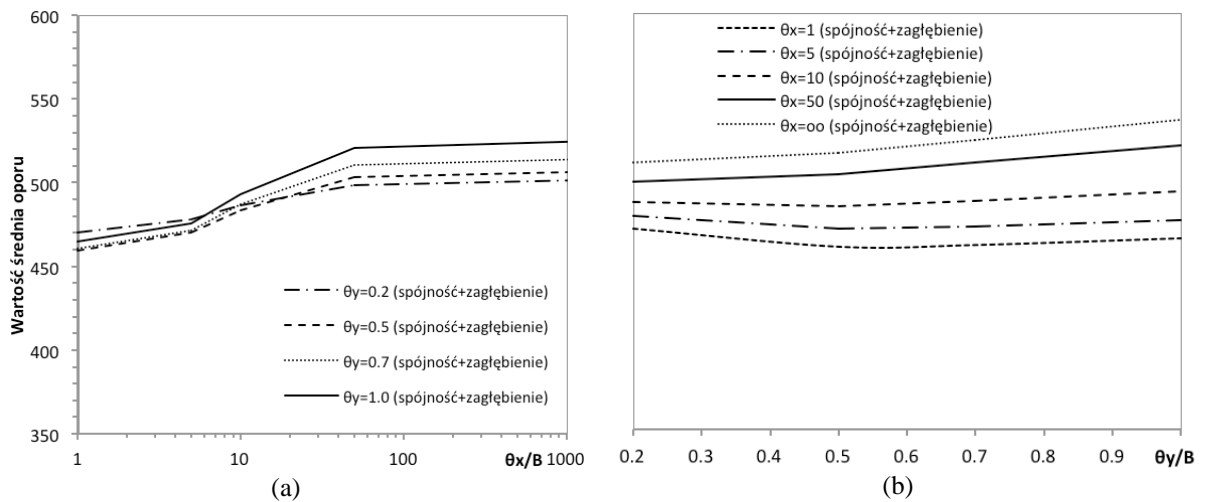
fluktuacji (Rysunek 9-21(b)). Krzywe mają przebieg analogiczny do prezentowanych w punkcie Fundament powierzchniowy, grunt nieważki. (Rysunek 9-17). Oczywiście w przypadku fundamentu zagłębionego obserwujemy wzrost średniej wartości nośności dla każdego punktu określonego przez wartości skali pionowej. Wzrost ten jest niemal skały i wynosi około 110kPa. Co ciekawe wspomniany wzrost nie jest zależny od zmiennej skali fluktuacji.

Tabela 9-11 Wartość średnia, odchylenie standardowe i współczynnik zmienności w zależności od przyjętych skal fluktuacji; model anizotropowy, grunt nieważki, fundament zagłębiony na D=1m

θ_x [m]	θ_y [m]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	COV_{qf}
1	0.2	470.42	59.62	0.13
	0.5	459.58	81.17	0.18
	0.7	460.61	90.59	0.20
	1.0	464.63	100.37	0.22
5	0.2	478.34	85.22	0.18
	0.5	470.75	121.24	0.26
	0.7	471.66	136.01	0.29
	1.0	475.60	151.87	0.32
10	0.2	486.63	92.68	0.19
	0.5	483.75	131.92	0.27
	0.7	487.27	150.03	0.31
	1.0	493.13	170.59	0.35
50	0.2	498.62	99.57	0.20
	0.5	503.69	141.19	0.28
	0.7	510.73	160.40	0.31
	1.0	520.76	181.02	0.35
∞	0.2	509.92	103.62	0.20
	0.5	515.71	147.44	0.29
	0.7	523.84	166.91	0.32
	1.0	535.70	189.19	0.35



Rysunek 9-20 Powierzchnia wartości średniej oporu w zależności od poziomej i pionowej skali fluktuacji; model anizotropowy, grunt nieważki, fundament zagłębiony na $D=1\text{m}$

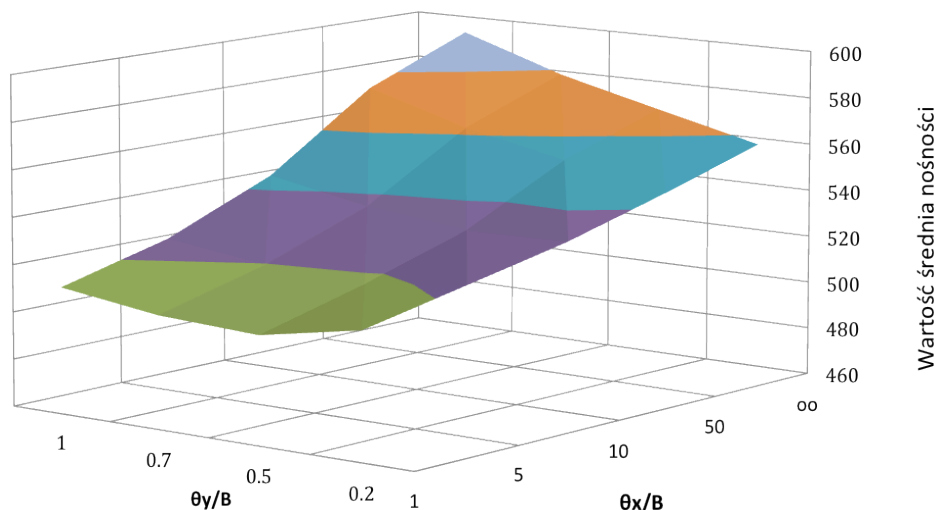


Rysunek 9-21 Przekroje powierzchni wartości średniej oporu (a) względem skali poziomej (b) względem skali pionowej (model anizotropowy grunt nieważki, fundament zagłębiony na $D=1\text{m}$)

9.3.2.4. FUNDAMENT ZAGŁĘBIONY, GRUNT WAŻKI

Ostatnia grupa wyników dotyczy niebiesko – szarej iltarenki z uwzględnieniem ciężaru własnego gruntu przy obciążeniu fundamentem zagłębionym na $D=1\text{m}$. Dla tak postawionego zadania analityczny odpowiednik problemu składa się ze wszystkich trzech członów wzoru Terzagiego. Wyniki symulacji metodą RFEM zawiera Tabela 9-12. Analizując przebieg powierzchni wartości średniej (Rysunek 9-22) lub poszczególnych jej przekroi zauważa się, że grunt ważki, obciążony fundamentem zagłębionym zachowuje trendy pojawiające się we wcześniejszych przypadkach (Rysunek 9-23). Oczywiście

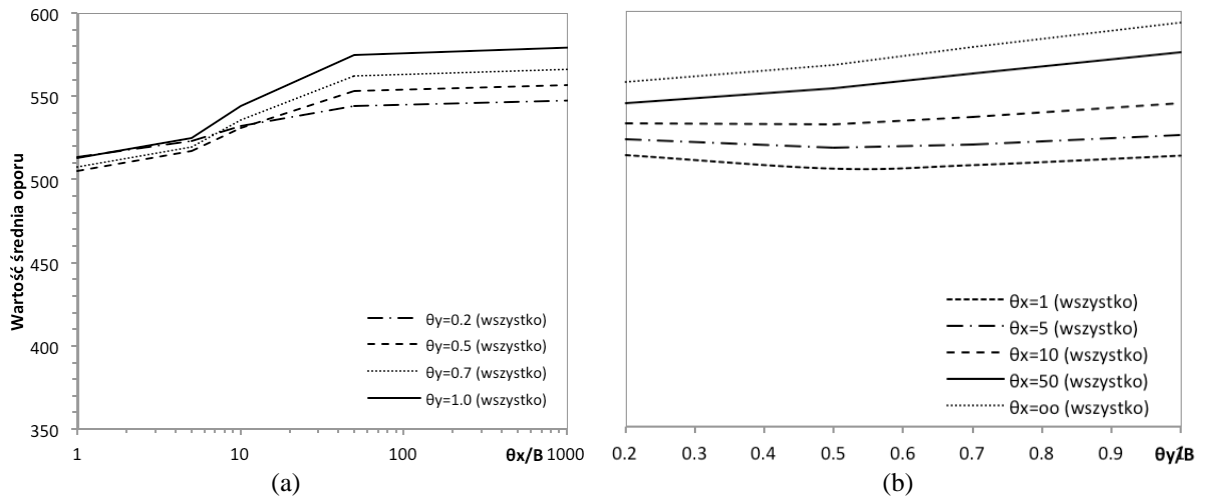
wartość średnia nośności jest większa aniżeli w poprzednio opisywanych przypadkach, uwzględniających wybrane parametry. Nadal można zaobserwować strefę minimalnych wartości średnich na osi wertykalnej skali (Rysunek 9-23(a)). Cechą wspólną wszystkich wykresów jest istotny wzrost wartości przy wzroście poziomej skali fluktuacji.



Rysunek 9-22 Powierzchnia wartości średniej oporu w zależności od poziomej i pionowej skali fluktuacji; model anizotropowy, grunt wazki, fundament zagłębiony

Tabela 9-12 Probabilistyczne charakterystyki nośności w zależności od skali fluktuacji; model anizotropowy, grunt wazki, fundament zagłębiony

θ_x [m]	θ_y [m]	μ_{af} [kPa]	σ_{af} [kPa]	COV q_f
1	0.2	513.64	69.33	0.13
	0.5	505.50	93.45	0.18
	0.7	507.62	103.24	0.20
	1.0	513.32	113.96	0.22
5	0.2	522.80	98.24	0.19
	0.5	517.42	136.41	0.26
	0.7	519.64	152.30	0.29
	1.0	525.22	168.22	0.32
10	0.2	532.09	106.92	0.20
	0.5	531.32	147.23	0.28
	0.7	536.09	166.09	0.31
	1.0	544.28	189.16	0.35
50	0.2	544.19	113.92	0.21
	0.5	553.14	159.95	0.29
	0.7	562.20	179.83	0.32
	1.0	575.02	202.50	0.35
∞	0.2	557.28	117.73	0.21
	0.5	567.78	164.73	0.29
	0.7	578.61	185.45	0.32
	1.0	593.00	208.21	0.35



Rysunek 9-23 Przekroje powierzchni wartości średniej oporu
(a) względem skali poziomej (b) względem skali pionowej
(model anizotropowy grunt ważki, fundament zagłębiony na $D=1m$)

9.3.2.5. PORÓWNANIE WARTOŚCI ŚREDNICH OPORU GRANICZNEGO PODŁOŻA

Wszystkie obserwowane powyżej wartości oczekiwane (średnie) nośności przedstawione w punktach 9.3.2.1 do 9.3.2.4 znacząco odbiegają od deterministycznego oznaczenia, co pokazano w Tabeli 9-13.

Tabela 9-13 Wartości deterministyczne dla parametrów średnich

	q_{ult} [kPa]	q_{MES} [kPa]	Wartości średnie q_{RFEM} [kPa]	
			minimalna	maksymalna
(1) Nieważki grunt spoisty, fundament powierzchniowy	538.50	528.49	351.86	418.27
(2) Wążki grunt spoisty, fundament powierzchniowy	575.84	527.78	400.17	475.28
(3) Nieważki grunt spoisty, fundament zagłębiony	647.99	660.09	459.58	535.70
(4) Wążki grunt spoisty, fundament zagłębiony	697.43	694.88	505.50	593.00

Jak widać nawet maksymalne wartości średnie nośności dla poszczególnych przypadków analizy uzyskane metodą RFEM są mniejsze zarówno od analitycznej wartości deterministycznej jak i uzyskanej metodą elementów skończonych. Zatem średnie losowe nośności są istotnie mniejsze od deterministycznych. Wydaje się, efekt ten należy wiązać z nieliniowym charakterem rozpatrywanego zadania. Wniosek ten można uznać za ważny z aplikacyjnego punktu widzenia.

We wszystkich czterech przypadkach wartość średnia uzyskanej nośności zależy istotnie od poziomej skali fluktuacji, choć wartość średnia stabilizuje się przy dużych θ_x ($>10m$). Oznacza to, że prawidłowe określenie tego parametru jest ważne z punktu widzenia oszacowania bezpieczeństwa posadowienia. Dodatkowo w przebiegu każdej analizowanej

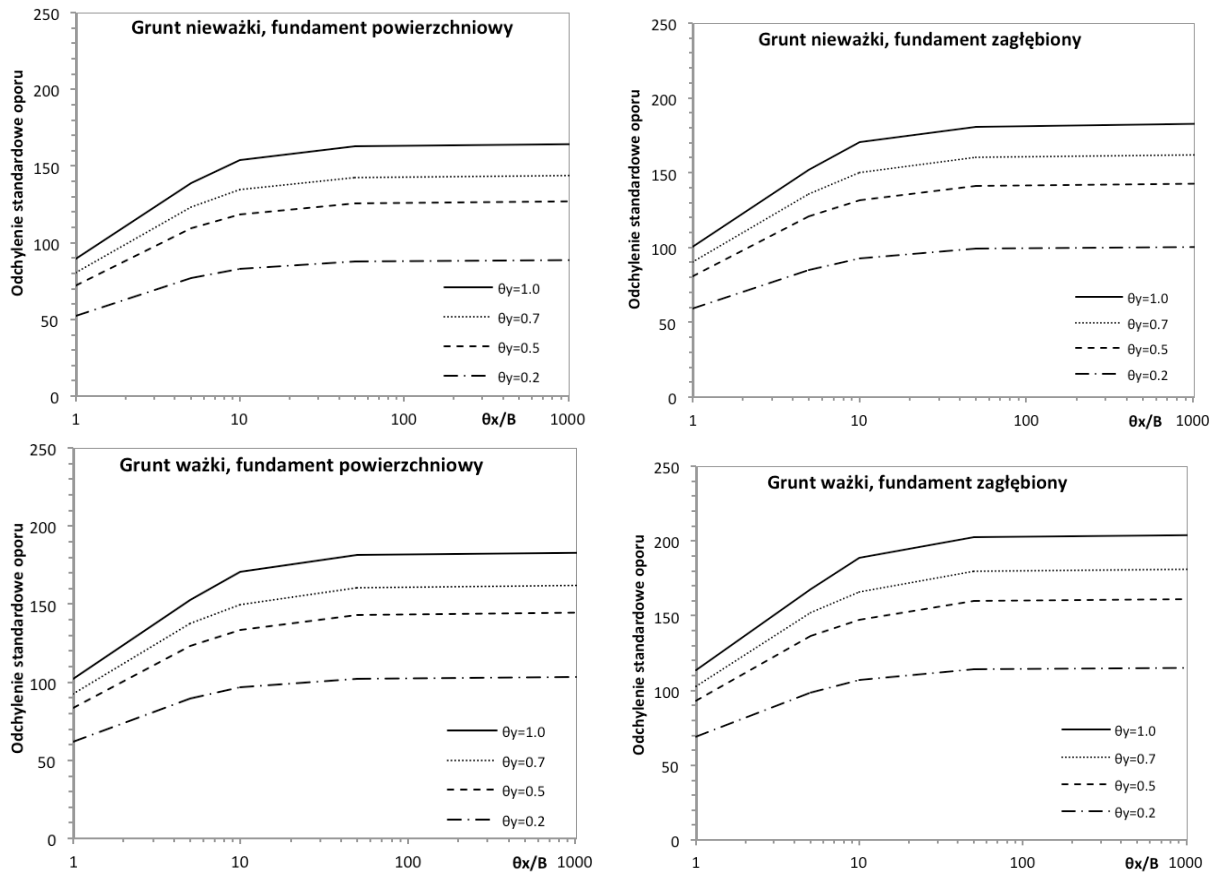
powierzchni wartości średniej obserwuje się lokalne minima dla pionowej skali $\theta_y=0.5m$ i skali poziomych $\theta_x \leq 10m$. Dodatkową wspólną cechą wszystkich przypadków jest fakt, że w przypadku małej poziomej skali fluktuacji krzywe wartości średniej odpowiadające różnym wartościom skali pionowej są do siebie zbliżone. Natomiast przy wzroście skali poziomej różnice między tymi krzywymi wzrastają.

Jak można było oczekiwać, kolejne uwzględnienie ciężaru własnego oraz zagłębienia fundamentu powoduje wzrost wartości średniej nośności w stosunku do fundamentu powierzchniowego posadowionego na nieważkim gruncie.

9.3.2.6. ZACHOWANIE SIĘ ODCHYLEŃ STANDARDOWYCH I WSPÓŁCZYNNIKÓW ZMIENNOŚCI NOŚNOŚCI

Aby prześledzić charakter zmienności oporu podłoża dokonano zestawienia zmian odchylenia standardowych oraz współczynników zmienności nośności dla czterech opisanych wyżej kombinacji (9.3.2.1 do 9.3.2.4). Wyniki pokazano w formie przekrojów kolejno wzdłuż osi skali poziomej i wzdłuż osi skali pionowej. Jednak jak można oczekiwać uwzględnienie trzech elementów, tj. zagłębienia i ważkości podłoża (każdy generujący pewną losowość) skutkuje wzrostem odchylenia standardowego nośności w porównaniu do fundamentu powierzchniowego, posadowionego na nieważkim gruncie spoistym. W efekcie wartości dodane skutkują kilkunastoprocentowym wzrostem odchylenia standardowego oporu.

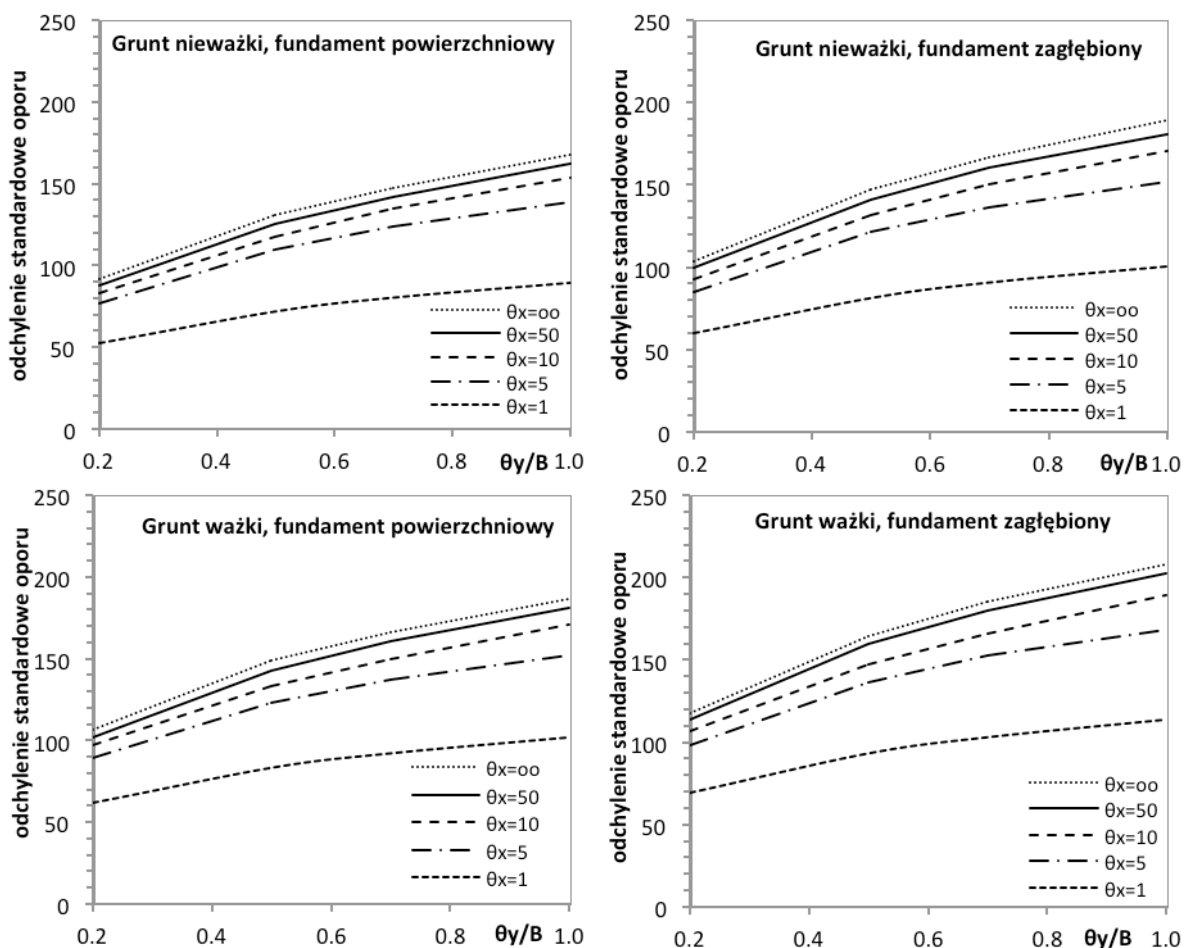
Analizując wykresy odchylenia standardowego można zauważyć niewielkie różnice wartości odchylenia między rozpatrywanymi przypadkami co demonstrowują: Rysunek 9-24 i Rysunek 9-25, pokazujące, że odchylenie standardowe jest funkcją rosnącą zarówno pionowej jak i poziomej skali fluktuacji.



Rysunek 9-24 Odchylenie standardowe w funkcji poziomej skali fluktuacji

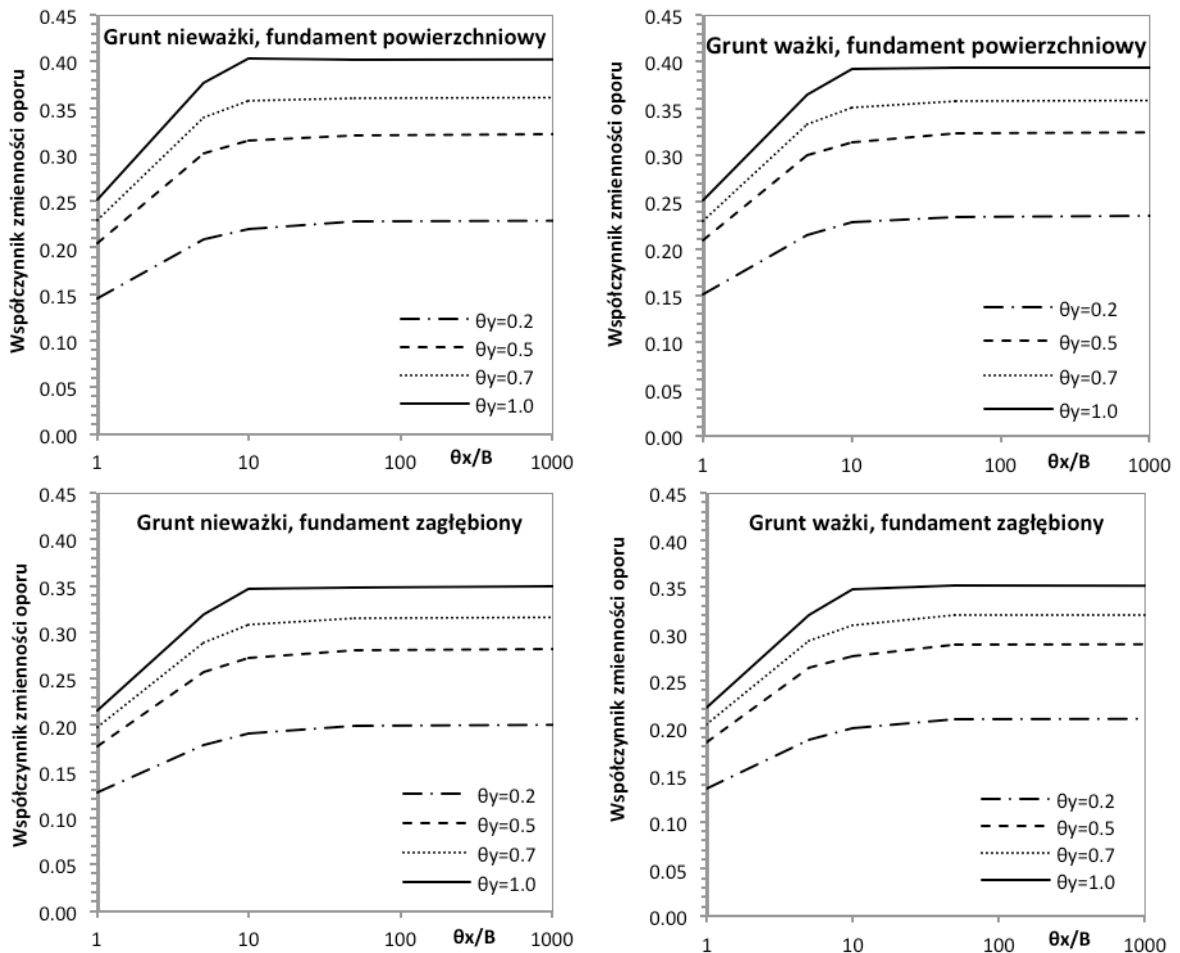
Dla dużych wartości skali poziomej wartości odchylenia standardowego stabilizują się (analogicznie do zachowania opisanego w rozdziale 7). Stałe rosnący charakter wykazuje również odchylenie standardowe w zależności od pionowej skali fluktuacji.

Zestawienie współczynników zmienności wskazuje na zaskakujące małe różnice pomiędzy analizowanymi czterema przypadkami, co prezentuje Rysunek 9-26 i Rysunek 9-27. Ciekawym zjawiskiem, zarówno w zakresie analizy przebiegu współczynnika na osi poziomej (Rysunek 9-26) jak i na osi pionowej (Rysunek 9-27), jest największa względna zmienność fundamentu powierzchniowego na podłożu nieważkim i najmniejsza w przypadku uwzględnienia wszystkich elementów oporu, tj. ważkości gruntu i zagłębienia fundamentu.



Rysunek 9-25 Odchylenie standardowe w funkcji pionowej skali fluktuacji

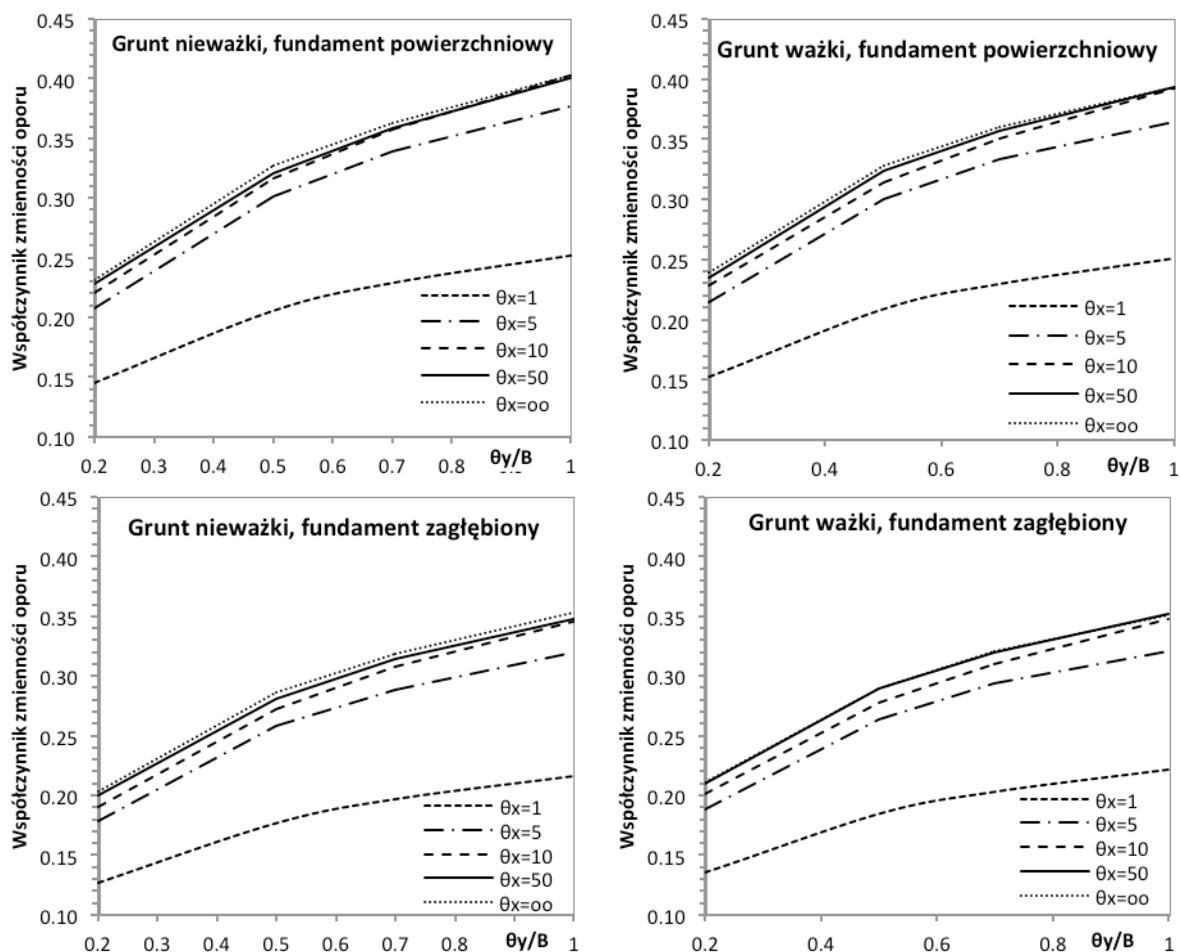
Efekt stabilizacji wartości współczynnika jest bardzo wyraźny na osi poziomej skali fluktuacji (Rysunek 9-26). We wszystkich analizowanych przypadkach przyjęcie skali $\theta_x/B \geq 50$ wydaje się być uzasadnione nawet w sytuacji nie wystarczającej informacji statystycznej. Dla skali poziomej, z tego przedziału, możemy mówić o największej zmienności oporu, czyli zdaniem autorki najgorszym przypadku korelacji pól losowych, w kontekście analizowanego najgorszego przypadku omawianego w rozdziale 8.



Rysunek 9-26 Współczynnik zmienności względem poziomej skali fluktuacji

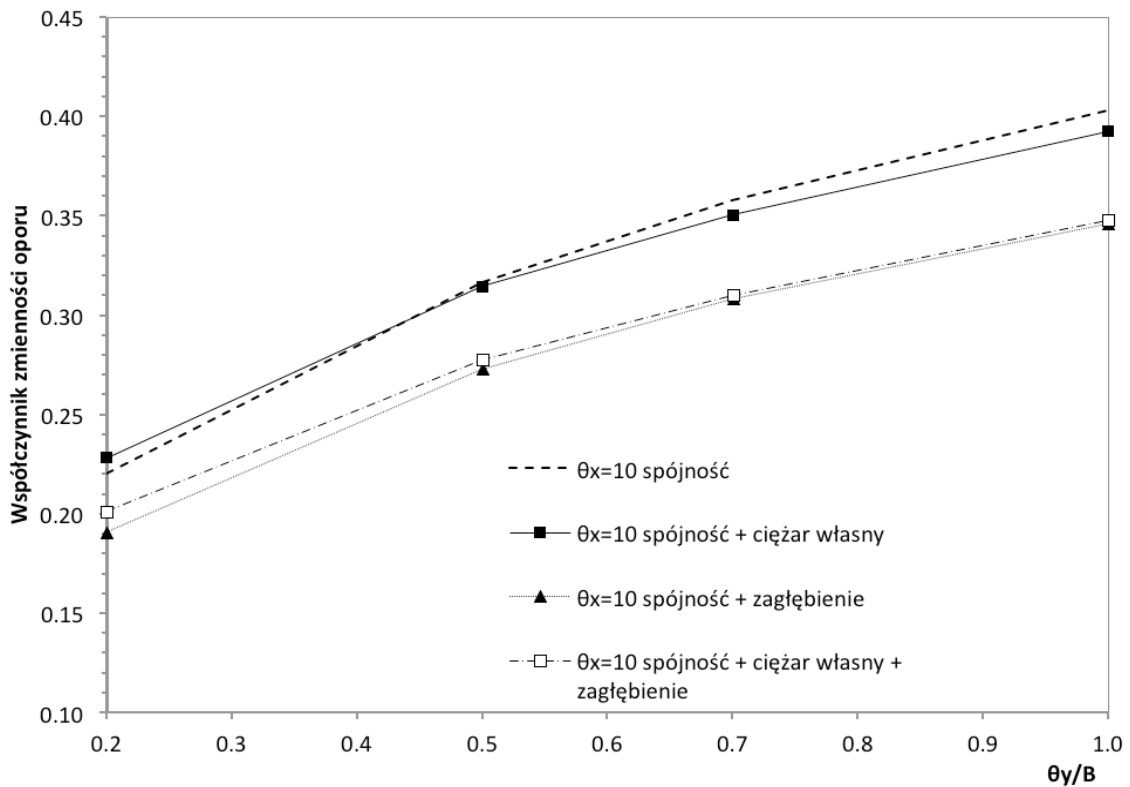
Analizując efekt współczynnika na osi pionowej wyraźna wydaje się koncentracja krzywych dla skali $\theta_x/B \geq 5$. Może na tej podstawie wnioskować, że w odniesieniu do rzeczywistych parametrów gruntowych pozioma skala fluktuacji powinna być nie mniejsza niż 5m. Natomiast mniejsze skale mogą budzić wątpliwości co do poprawności oznaczenia oporu granicznego podłoża.

W zakresie zmienności pionowej skali fluktuacji największe współczynniki uzyskano dla wartości $\theta_x/B=1$. Jak już zaznaczono na początku obecnego rozdziału, wyniki badań podłoża wskazują, że pionowa skala fluktuacji nie powinna przekroczyć jednego metra w całym analizowanym obszarze. Wynika stąd, że chcąc podać bezpieczne oszacowanie oporu podłoża można w tym przypadku przyjąć skalę fluktuacji $\theta_y=1$ m.



Rysunek 9-27 Współczynnik zmienności względem pionowej skali fluktuacji

Rysunek 9-28 prezentuje zestawienie zależności współczynnika zmienności oporu dla wszystkich czterech przypadków, przy czym wartość poziomej skali fluktuacji była stała i wynosiła $\theta_x=10m$. Krzywe odpowiadające fundamentowi powierzchniowemu są niemal identyczne. Podobnie krzywe dotyczące fundamentu zagłębionego. Można by z tego wnioskować, że uwzględnienie ciężaru własnego podłoża ma bardzo niewielki wpływ na wartość współczynnika zmienności oporu. Natomiast uwzględnienie zagłębienia fundamentu wpływa tłumiąco na wartość współczynnika zmienności. Efekt jest wyraźniejszy wraz ze wzrostem pionowej skali fluktuacji. Przykładowo dla skali $\theta_y/B=1$ wynosi blisko 20%.

Rysunek 9-28 Współczynnik zmienności dla skały poziomej $\theta_x=10m$

W świetle powyższych rezultatów można by wnioskować, że istnieje tu najgorszy przypadek wartości skal fluktuacji pól spójności (c) i kąta tarcia wewnętrznego (ϕ). Zdaniem autorki poniższej pracy, w sytuacji braku informacji statystycznej należałoby przyjąć poziomą skalę $\theta_x \geq 10m$. W analizowanym przykładzie rząd wielkości skali pionowej jest znany i wynika z testowanych badań terenowych.

9.4. ANALIZA ROZKŁADU PRAWDOPODOBIENSTWA OPORU PODŁOŻA.

Za pomocą symulacji metodą RFEM otrzymujemy wartości nośności podłoża, która jest pewną zmienną losową. W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się jedynie dwoma pierwszymi momentami statystycznymi tej zmiennej, estymując jej wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe i współczynnik zmienności. Jednak jak wiadomo, pełna informacja o zmiennej losowej dostępna jest wtedy gdy znany jest jej rozkład prawdopodobieństwa. W pracach (Griffiths & Fenton, 2001) oraz (Fenton & Griffiths, 2003) wskazano, że nośność nieważkiego podłoża w przypadku fundamentu powierzchniowego miała rozkład zbliżony do rozkładu lognormalnego. W tym podrozdziale autorka postanowiła sprawdzić tę hipotezę w odniesieniu do niebieskiego iltu

tarenckiego dla różnych przypadków rozpatrywanej nośności (jak w 9.3.2). Oczywiście w przypadku estymacji rozkładu metodą Monte Carlo liczba realizacji w procesie symulacyjnym musi być znacznie większa aniżeli w przypadku określania dwóch pierwszych momentów statystycznych. W obliczeniach opisanych w podrozdziale 9.4 stosowano liczbę realizacji $N=2000$. Estymację prowadzono przy użyciu programu Statrel 311.

Znajomość rozkładu prawdopodobieństwa nośności pozwala wykonać analizy bezpieczeństwa w oparciu o założenia teorii niezawodności konstrukcji (patrz. pkt 2.4). Innym sposobem wykorzystania estymowanych rozkładów jest możliwość określenia wartości obliczeniowej oporu czego autorka dokonała w kolejnym podpunkcie.

9.4.1. FUNDAMENT POWIERZCHNIOWY, GRUNT NIEWAŻKI

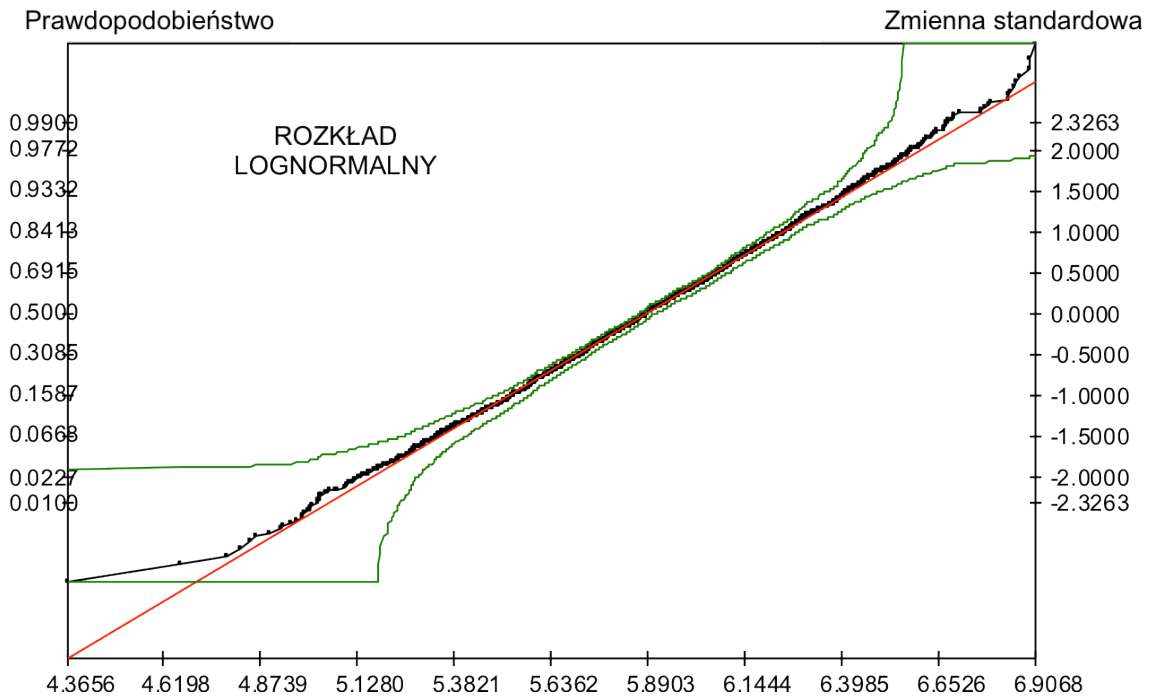
Tabela 9-14 zawiera wielkości statystyczne uzyskane dla próby $N=2000$ realizacji, o poziomej skali fluktuacji $\theta_x=30m$ oraz pionowej $\theta_y=0.7m$. Zadanie analizowało posadowienie fundamentu powierzchniowego o szerokości $B=1m$ na niebieskim ile tarenckim z pominięciem ciężaru własnego podłoża.

Tabela 9-14 Wielkości statystyczne oporu granicznego (model anizotropowy, fundament powierzchniowy, grunt nieważki)

Wartość minimalna	78.35
Wartość maksymalna	995.6
Zasięg	917.25
Mediana	361.1
Średnia arytmetyczna	385.32
Średnia geometryczna	361.67
Kwadrat średniej	19356
Wariancja	19366
Odchylenie standardowe	139.16
Współczynnik zmienności	0.36116
Trzeci moment	2.48E+06
Skośność	0.92249
Czwarty moment	1.57E+09
Kurtoza	4.201
Wariancja średniej	9.6782
Wariancja odchylenia	1.24E+15
Wariancja trzeciego momentu	8.03E+10
Wariancja czwartego momentu	3.08E+16

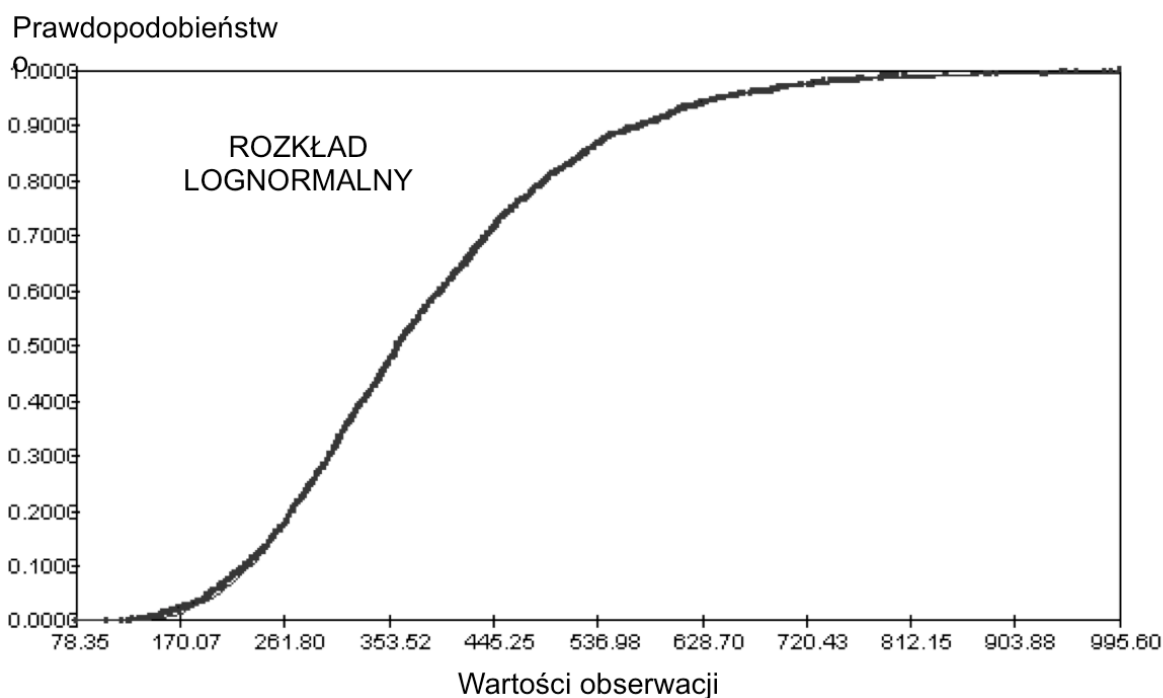
Z kolei, Rysunek 9-29 prezentuje dopasowanie wyników próby do lognormalnego rozkładu prawdopodobieństwa za pomocą tzw. arkusza probabilistycznego (zwanego też papierem probabilistycznym) (Murzewski, 1970). W arkuszu tym skale są tak dobrane aby

dystrybuanta hipotetycznego rozkładu lognormalnego była linią prostą. Obserwujemy zatem jak układają się wyniki symulacji względem tej prostej. Na Rysunku 9-29 zaznaczono także 5% przedziały ufności. Jak można zauważyć dopasowanie jest dobre, także w części tak zwanych „ogonów” rozkładu. Pozwala to postawić hipotezę, że rozkład prawdopodobieństwa oporu w analizowanym przypadku odpowiada rozkładowi logarytmowemu.



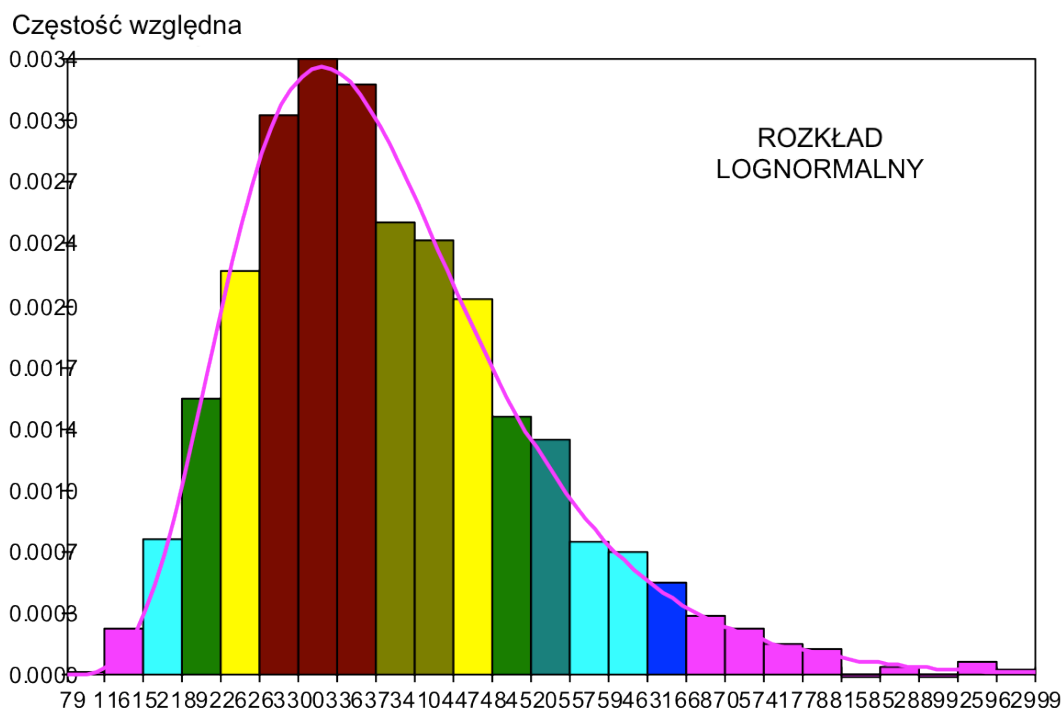
Rysunek 9-29 Dopasowanie rozkładu lognormalnego do wyników uzyskanych z próby

Dobre dopasowanie potwierdza również Rysunek 9-30 przedstawiający dystrybuantę empiryczną danych testowych uzyskanych w drodze symulacji RFEM porównaną z dystrybuantą teoretyczną rozkładu lognormalnego.



Rysunek 9-30 Dopasowanie danych do dystrybuanty rozkładu lognormalnego

Natomiast Rysunek 9-31 przedstawia histogram wyników z wrysowaną funkcją gęstości rozkładu lognormalnego. Warto zaznaczyć jak dobrze wartość maksymalna funkcji wpisuje się w histogram rezultatów.



Rysunek 9-31 Lognormalny rozkład prawdopodobieństwa dopasowany do histogramu danych testowych

Następnie hipoteza dotycząc rozkładu lognormalnego została sprawdzona statystycznymi testami zgodności: Kołmogorowa – Smirnowa, chi – kwadrat i testem Andersona -

Darlinga. Wyniki testów zawiera Tabela 9-15. W każdym z przypadków parametry rozkładu lognormalnego były estymowane dwoma metodami: metodą momentów oraz metodą najmniejszych kwadratów.

Tabela 9-15 Wyniki estymacji parametrów uzyskanych w statystycznych testach zgodności (model anizotropowy, fundament powierzchniowy, grunt nieważki)

	Parametry estymacji	
Przyjęta metoda estymacji	Metoda momentów	Metoda najmniejszych kwadratów
Rozkład prawdopodobieństwa	lognormalny	
Parametr 1 – μ_{lnX}	5.8928	5.8907
Parametr 2 – σ_{lnX}	0.35014	0.36026
Testowanie		
Przyjęta metoda testowania	Test Kołmogorowa-Smirnowa	
Poziom istotności	0.62055	0.79883
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
	Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy	
Przyjęta metoda testowania	Test chi-kwadrat	
Ilość przedziałów użyta w teście	44	44
Poziom istotności	0.29427	0.07958
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
	Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy	
Przyjęta metoda testowania	Test Andersona-Darlinga	
Poziom istotności	>0.15	>0.15
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
	Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy	

Należy zwrócić uwagę, że parametry rozkładu lognormalnego przedstawione w powyższej tabeli są identyczne z tymi, których używano w rozdziale 5, czyli μ_{lnX} oznacza wartość średnią podstawowego rozkładu normalnego (a nie wartość średnią estymowanego rozkładu lognormalnego), zaś σ_{lnX} – odchylenie standardowego podstawowego rozkładu normalnego. Warto zauważyć, że parametry estymowanego rozkładu lognormalnego uzyskane metodą momentów oraz metodą najmniejszych kwadratów różnią się od siebie. Nie mniej jednak różnice te nie są duże (ok. 1%)

We wszystkich trzech przypadkach okazało się, że nie ma podstaw do odrzucenia testowanej hipotezy. Opór można opisać rozkładem lognormalnym zarówno z parametrami z metody momentów jak i najmniejszych kwadratów.

9.4.2. FUNDAMENT POWIERZCHNIOWY, GRUNT WAŻKI

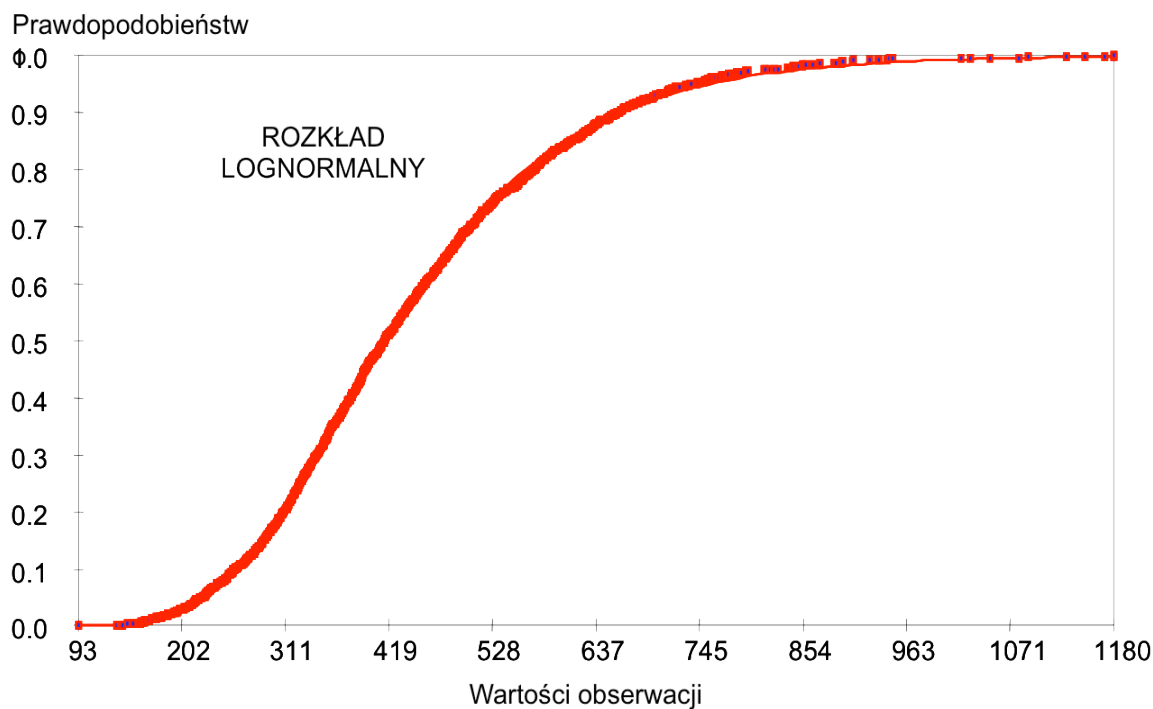
Podobnie jak poprzednio obliczenia wykonano dla skali fluktuacji $\theta_y=0.7m$ oraz $\theta_x=30m$, a badana próba miała liczebność $N=2000$ realizacji. Podstawowe parametry statystyczne,

dla oporu, wyznaczonego z uwzględnieniem spójności i ciężaru własnego, zawiera Tabela 9-16.

Tabela 9-16 Wielkości statystyczne oporu granicznego
(model anizotropowy, fundament powierzchniowy, grunt wazki)

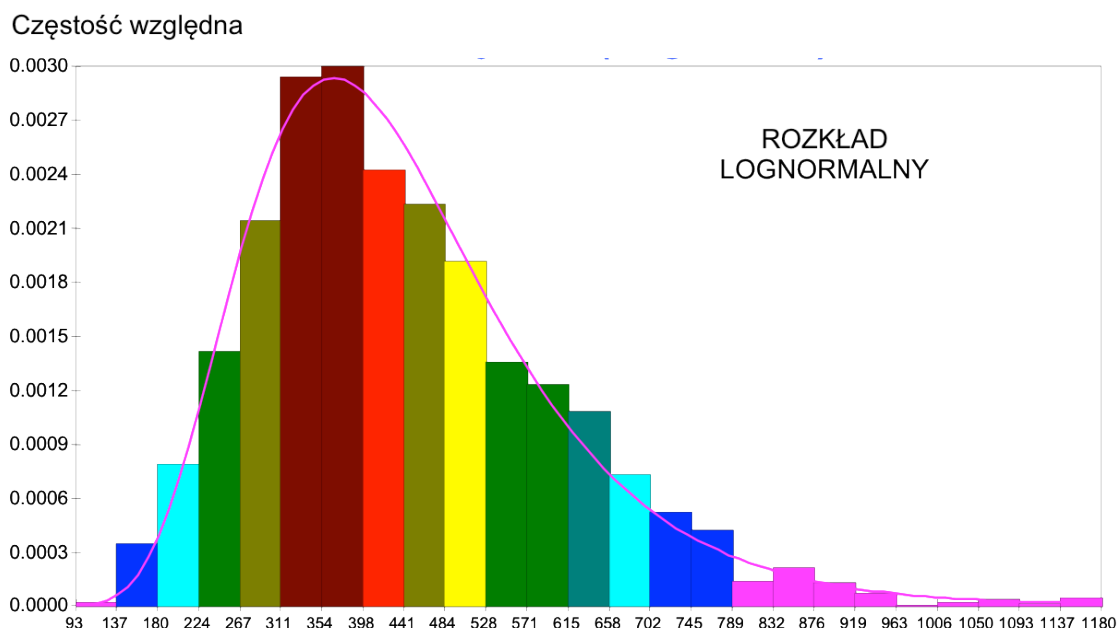
Wartość minimalna	93.20
Wartość maksymalna	1180
Zasięg	1086.8
Mediana	414.00
Średnia arytmetyczna	441.64
Średnia geometryczna	414.05
Kwadrat średniej	25661.0
Wariancja	25673.0
Odchylenie standardowe	160.23
Współczynnik zmienności	0.36281
Trzeci moment	3624300
Skośność	0.8817
Czwarty moment	2.72E+09
Kurtoza	4.1376
Wariancja średniej	12.83
Wariacja odchylenia	3.71E+15
Wariacja trzeciego momentu	2.10E+11
Wariancja czwartego momentu	1.19E+17

W pierwszej kolejności przedstawiono dopasowanie dystrybuanty empirycznej do dystrybuanty rozkładu lognormalnego (Rysunek 9-33). Wynika z niej, że dopasowanie dość dobrze wpisuje się w kształt dystrybuanty rozkładu lognormalnego.



Rysunek 9-32 Dopasowanie danych do dystrybuanty rozkładu lognormalnego

Dopasowanie funkcji gęstości rozkładu lognormalnego do histogramu oporu przedstawia Rysunek 9-33. Widać wyraźnie, że moda rozkładu prawdopodobieństwa pokrywa się ze słupkiem maksymalnych wartości.



Rysunek 9-33 Funkcja gęstości rozkładu lognormalnego dopasowana do histogramu oporu (zbioru realizacji)

Podobnie jak w poprzednim punkcie Badaną próbę poddano trzem statystycznym testom zgodności, których wyniki prezentuje Tabela 9-17. Dla każdej z postawionych hipotez uzyskano wnioski, iż nie ma podstaw do jej odrzucenia.

Tabela 9-17 Wyniki estymacji parametrów uzyskanych w statystycznych testach zgodności (model anizotropowy, fundament powierzchniowy, grunt wazki)

Przyjęta metoda estymacji	Parametry estymacji	
	Metoda momentów	Metoda najmniejszych kwadratów
Rozkład prawdopodobieństwa	lognormalny	
Parametr 1 – $\mu_{\ln X}$	6.0287	6.0260
Parametr 2 – $\sigma_{\ln X}$	0.3517	0.3645
Testowanie		
Przyjęta metoda testowania	Test Kolmogorowa-Smirnowa	
Poziom istotności	0.34012	0.77108
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy		
Przyjęta metoda testowania	Test chi-kwadrat	
Ilość przedziałów użyta w teście	44	44
Poziom istotności	0.16868	0.18426
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy		
Przyjęta metoda testowania	Test Andersona-Darlinga	
Poziom istotności	>0.15	>0.15
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy		

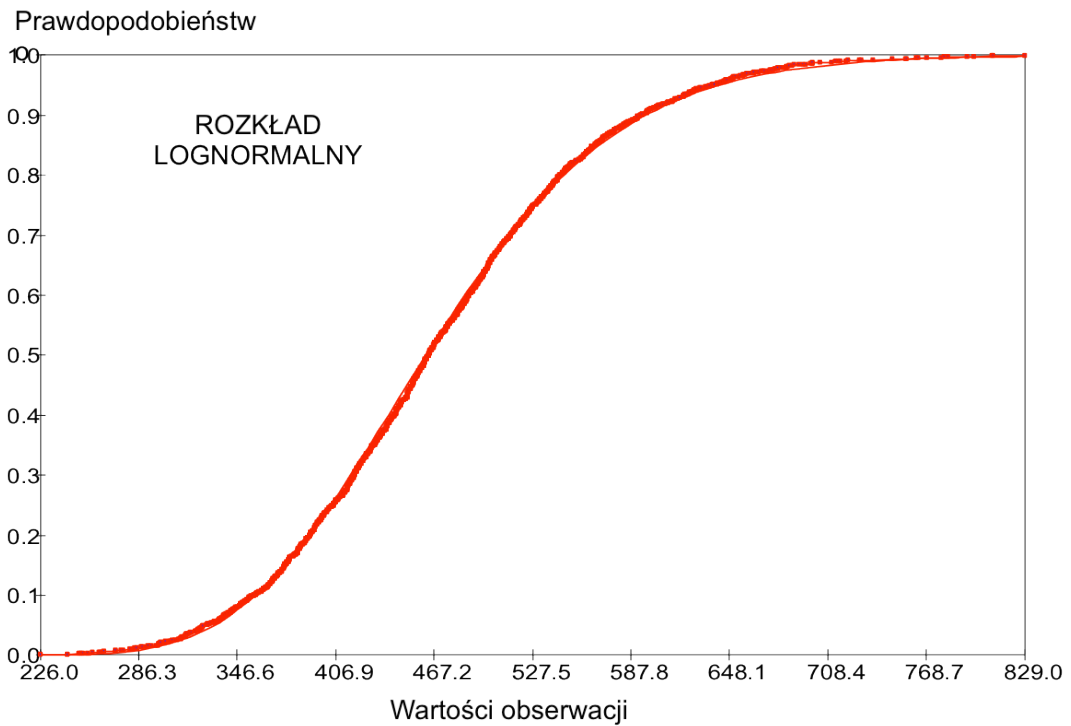
9.4.3. FUNDAMENT ZAGŁĘBIONY, GRUNT NIEWAŻKI

Kolejny przypadek to fundament zagłębiony na $D=1\text{m}$ posadowiony na nieważkim niebieskim i le tarenckim. Założenia początkowe tak jak poprzednio, tj. $\theta_y=0.7\text{m}$ oraz $\theta_x=1\text{m}$, $N=2000$. Parametry statystyczne, dla wyznaczonego oporu zawiera Tabela 9-18.

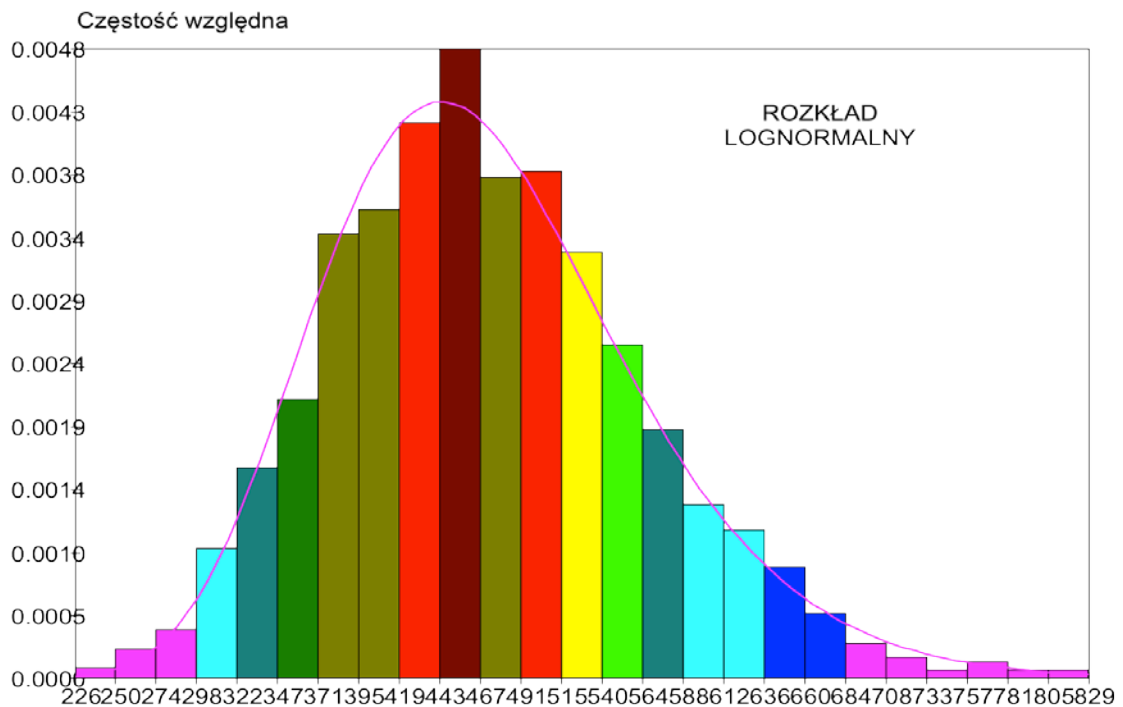
Analiza dopasowania dystrybuanty empirycznej do teoretycznej (Rysunek 9-34), pozwala stwierdzić, że i w tym przypadku dopasowanie jest dobre. Potwierdza to również funkcja gęstości nałożona na histogram wyników symulacji (Rysunek 9-35).

Tabela 9-18 Wielkości statystyczne oporu granicznego
(model anizotropowy, fundament zagłębiony, grunt nieważki)

Wartość minimalna	226
Wartość maksymalna	829
Zasięg	603
Mediana	464
Średnia arytmetyczna	471.11
Średnia geometryczna	461.98
Kwadrat średniej	8665.6
Wariancja	8670
Odchylenie standardowe	93.113
Współczynnik zmienności	0.19765
Trzeci moment	3.43E+05
Skośność	0.42545
Czwarty moment	2.46E+08
Kurtoza	3.2702
Wariancja średniej	4.3328
Wariacja odchylenia	3.02E+13
Wariacja trzeciego momentu	2.85E+09
Wariancja czwartego momentu	4.11E+14



Rysunek 9-34 Dopasowanie danych do dystrybucji rozkładu lognormalnego



Rysunek 9-35 Funkcja gęstości rozkładu lognormalnego dopasowana do histogramu oporu (zbioru realizacji)

Tabela 9-19 zawiera wyniki testów statystycznych. W przypadku tego zadania przeprowadzone testy również nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy dotyczącej opisu oporu rozkładem lognormalnym.

Tabela 9-19 Wyniki estymacji parametrów uzyskanych w statystycznych testach zgodności (model anizotropowy, fundament zagłębiony, grunt nieważki)

Przyjęta metoda estymacji	Parametry estymacji	
	Metoda momentów	Metoda najmniejszych kwadratów
Rozkład prawdopodobieństwa	lognormalny	
Parametr 1 – $\mu_{\ln X}$	6.1359	6.1355
Parametr 2 – $\sigma_{\ln X}$	0.1958	0.1998
Testowanie		
Przyjęta metoda testowania	Test Kołmogorowa-Smirnowa	
Poziom istotności	0.35415	0.25914
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
	Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy	
Przyjęta metoda testowania	Test chi-kwadrat	
Ilość przedziałów użyta w teście	44	44
Poziom istotności	0.23032	0.23984
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
	Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy	

9.4.4. FUNDAMENT ZAGŁĘBIONY, GRUNT WAŻKI

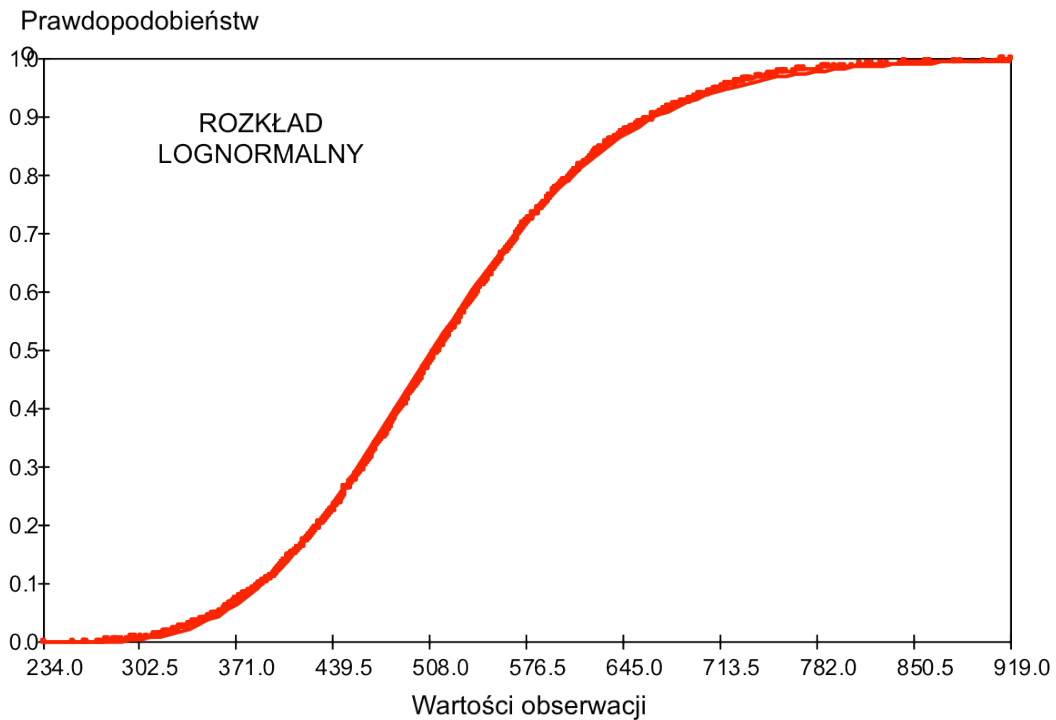
Ostatnim testowanym zadaniem był przykład fundamentu zagłębionego posadowionego na ważkim niebieskim i le tarenckim. Zadanie wyznaczono dla pionowej skali fluktuacji równej $\theta_y=0.7m$ oraz poziomej $\theta_x=1m$. Parametry statystyczne dla badanej próby zestawiono w kolejnej tabeli.

Tabela 9-20 Wielkości statystyczne oporu granicznego (model anizotropowy, fundament zagłębiony, grunt nieważki)

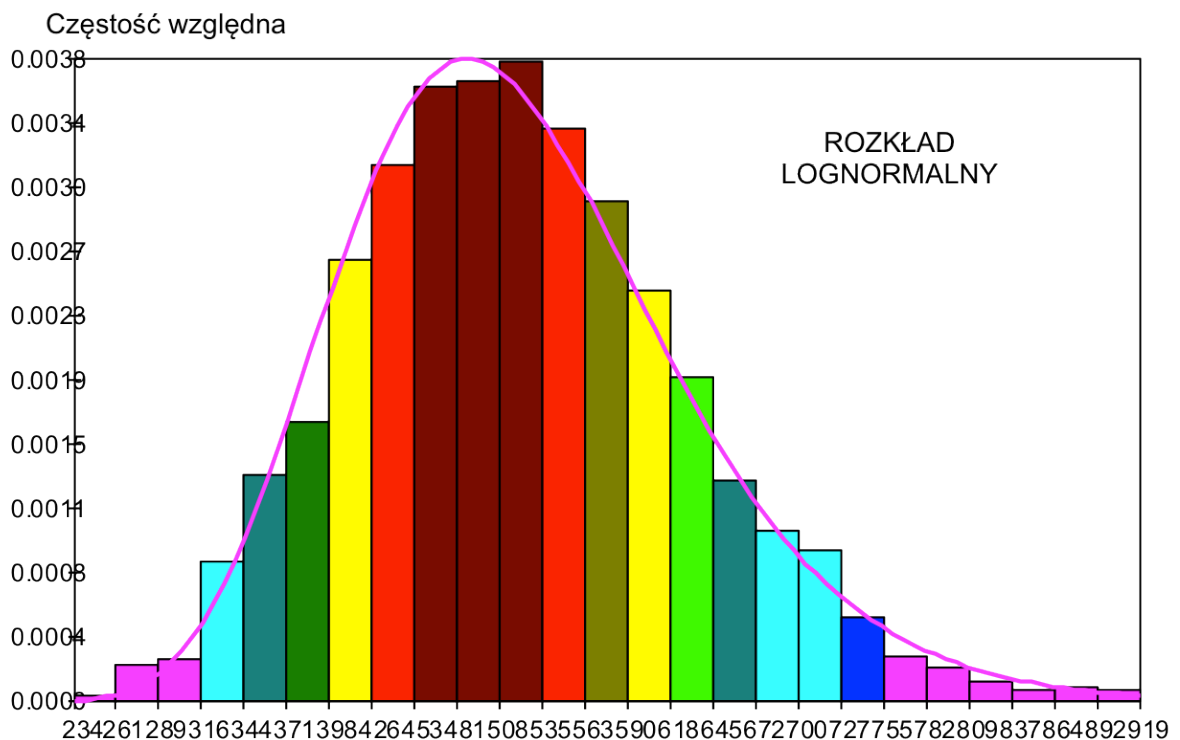
Wartość minimalna	234
Wartość maksymalna	919
Zasięg	685
Mediana	513
Średnia arytmetyczna	520.69
Średnia geometryczna	509.52
Kwadrat średniej	11684
Wariancja	11689
Odchylenie standardowe	108.12
Współczynnik zmienności	0.20764
Trzeci moment	5.31E+05
Skośność	0.42041
Czwarty moment	4.43E+08
Kurtoza	3.2438
Wariancja średniej	5.8418
Wariancja odchylenia	9.80E+13
Wariancja trzeciego momentu	6.71E+09
Wariancja czwartego momentu	1.28E+15

Poszczególne rysunki opisujące dopasowanie badanej próby do rozkładu lognormalnego wypadają i w tym przypadku bardzo pomyślnie. Dotyczy to zarówno dopasowania

wyników symulacji do dystrybuanty teoretycznej rozkładu lognormalnego (Rysunek 9-36) jak i do funkcji gęstości prawdopodobieństwa (Rysunek 9-37).



Rysunek 9-36 Dopasowanie danych do dystrybuanty rozkładu lognormalnego



Rysunek 9-37 Dopasowanie funkcji gęstości do histogramu rozkładu danych

Przedstawione poniżej testy statystyczne nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy o rozkładzie lognormalnym. Wyniki prezentuje Tabela 9-21.

Tabela 9-21 Wyniki estymacji parametrów uzyskanych w statystycznych testach zgodności (model anizotropowy, fundament zagłębiony, grunt ważki)

Przyjęta metoda estymacji	Parametry estymacji	
	Metoda momentów	Metoda najmniejszych kwadratów
Rozkład prawdopodobieństwa	lognormalny	
Parametr 1 – $\mu_{\ln X}$	6.2341	6.2335
Parametr 2 – $\sigma_{\ln X}$	0.2055	0.2107
Testowanie		
Przyjęta metoda testowania	Test Kołmogorowa-Smirnowa	
Poziom istotności	0.47678	0.48418
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
	Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy	
Przyjęta metoda testowania	Test chi-kwadrat	
Ilość przedziałów użyta w teście	44	44
Poziom istotności	0.33819	0.37279
Krytyczny poziom istotności	0.05	0.05
	Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy	

9.4.5. UWAGI DOTYCZĄCE ROZKŁADU PRAWDOPODOBIEŃSTWA NOŚNOŚCI

We wszystkich czterech analizowanych przypadkach stwierdzono dobrą zgodność empirycznego rozkładu zmiennego losowo oporu podłoża dla iltu tarenckiego z lognormalnym rozkładem prawdopodobieństwa. Podobieństwo obu rozkładów może wynikać z faktu, że przyjęto założenie lognormalnego pola losowego spójności. Jakkolwiek nie ma precyzyjnego dowodu matematycznego tego faktu. Zaletą rozkładu lognormalnego jest fakt, że nie dopuszcza on wartości ujemnych, co koresponduje z rzeczywistymi wartościami oporu podłoża.

Estymacji parametrów rozkładu lognormalnego dokonano tu dwoma metodami, tj. metodą momentów oraz metodą najmniejszych kwadratów. Różnice wynikające z zastosowania obu tych metod są nie istotne.

Oczywiście można domniemać, że istnieje wiele innych rozkładów, które nie zostałyby odrzucone przez testy statystyczne. Za wyborem rozkładu lognormalnego przemawia jednakże, oprócz wcześniej ujawnionego postulatu nieujemności, fakt możliwości dokonywania obliczeń prawdopodobieństwa w prosty sposób, tj. przy wykorzystaniu dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Wydaje się, że taki rozkład prawdopodobieństwa nośności nie jest związany z konkretnym rodzajem gruntu o czym może świadczyć fakt, że Fenton i Griffiths uzyskali ten sam

rozkład dla innego typu podłoża, przy założeniu fundamentu powierzchniowego na podłożu nieważkim.

9.5. PRZYKŁAD KALIBRACJI WARTOŚCI OBLICZENIOWEJ OPORU

Zastosowanie metody RFEM w obliczeniach nośności fundamentu bezpośredniego daje możliwość wykorzystania metod rachunku prawdopodobieństwa do analizy niezawodności fundamentu. Oszacowany i wytestowany rozkład prawdopodobieństwa można użyć do określenia prawdopodobieństwa awarii (p_f) lub wskaźnika niezawodności (β).

$$(9-3) \quad p_f = P\{q_f \leq Q_d\} = \Phi(-\beta)$$

gdzie q_f jest losowym oporem podłoża, otrzymanym z analizy metodą RFEM, a Q_d jest wartość obliczeniową tego oporu (przyjmowaną w projektowaniu). Natomiast Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Stanem awarii jest sytuacja, w której nośność jest mniejsza od wartości obliczeniowej (funkcja stanu granicznego).

Zgodnie z analizami przeprowadzonymi w podrozdziale 9.4, opór graniczny oszacowany przy użyciu metody RFEM wpasowuje się w rozkład lognormalny. Zatem można przyjąć, że postać obliczeniowa również reprezentuje taki rozkład prawdopodobieństwa. Logarytmując obustronnie nierówność w nawiasie równania (9-3) otrzymano:

$$(9-4) \quad p_f = P\{\ln q_f \leq \ln Q_d\} = P\left\{\frac{\ln q_f - \mu_{\ln q_f}}{\sigma_{\ln q_f}} \leq \frac{\ln Q_d - \mu_{\ln q_f}}{\sigma_{\ln q_f}}\right\} = \Phi\left(\frac{\ln Q_d - \mu_{\ln q_f}}{\sigma_{\ln q_f}}\right)$$

$$(9-5) \quad \frac{\ln(Q_d) - \mu_{\ln q_f}}{\sigma_{\ln q_f}} = -\beta$$

gdzie $\mu_{\ln q_f}$ jest wartością średnią rozkładu normalnego podstawowego względem rozkładu lognormalnego oporu q_f (5-7), a $\sigma_{\ln q_f}$ jest odchyleniem standardowym rozkładem podstawowego (5-6). Wówczas:

$$(9-6) \quad \begin{aligned} \ln(Q_d) &= \mu_{\ln q_f} - \beta \sigma_{\ln q_f} \\ Q_d &= \exp\left\{\mu_{\ln q_f} - \beta \sigma_{\ln q_f}\right\} \end{aligned}$$

Ostatnia równość pozwala wyznaczyć wartość obliczeniową nośności. Można też zdefiniować współczynnik bezpieczeństwa jako:

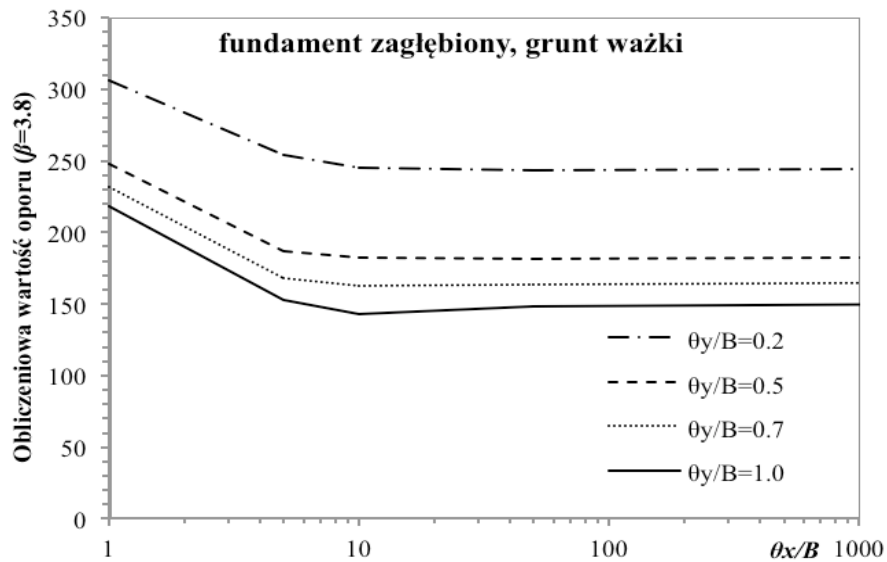
$$(9-7) \quad \gamma = \frac{Q_d}{\mu_{qf}}$$

przy czym μ_{qf} jest wartością oczekiwaną nośności (o rozkładzie lognormalnym). W konsekwencji opisu, zamieszczonego w podrozdziale 2.4 poniższej rozprawy, wskazano, że fundament bezpośredni powinien być projektowany na wskaźnik niezawodności $\beta=3.8$. Przy tym założeniu, w ramach poniższej pracy wyznaczono wartości obliczeniowe oporu podłoża w zależności od losowej wartości oporu wyznaczonej metodą RFEM.

Dla zadania dotyczącego fundamentu zagłębionego w wałki niebieski ił tarencki (pkt 9.3.2.4), wartość obliczeniowa oporu (Q_d) oraz współczynnik bezpieczeństwa (γ), zmienia się wraz ze zmianą struktury korelacyjnej pól losowych, co dla $\beta=3.8$ przedstawia Tabela 9-22 oraz Rysunek 9-38.

Tabela 9-22 Wartość obliczeniowa jednostkowej nośności w zależności od zmiennej struktury korelacyjnej pola

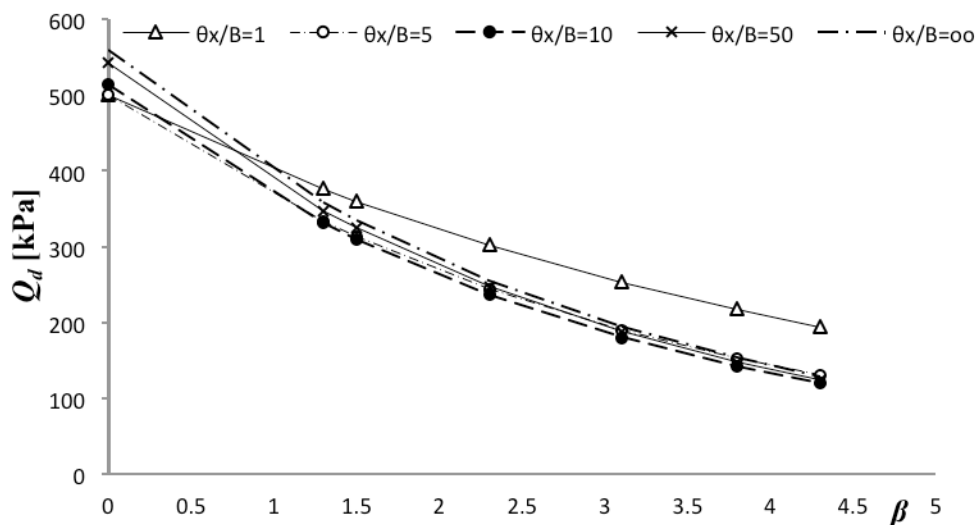
θ_y [m]	θ_x [m]	μ_{qf} [kPa]	σ_{qf} [kPa]	COV_{qf}	Q_d [kPa]	γ
0.2	1	513.64	69.33	0.135	305.476	0.595
	5	522.80	98.24	0.188	253.156	0.484
	10	532.09	106.92	0.201	244.932	0.460
	50	544.19	113.92	0.209	242.474	0.446
	∞	557.28	117.73	0.211	246.462	0.442
0.5	1	505.50	93.45	0.185	247.682	0.490
	5	517.42	136.41	0.264	186.838	0.361
	10	531.32	147.23	0.277	182.149	0.343
	50	553.14	159.95	0.289	181.018	0.327
	∞	567.78	164.73	0.290	185.121	0.326
0.7	1	507.62	103.24	0.203	231.467	0.456
	5	519.64	152.30	0.293	167.515	0.322
	10	536.09	166.09	0.310	162.074	0.302
	50	562.20	179.83	0.320	163.548	0.291
	∞	578.61	185.45	0.321	167.917	0.290
1	1	513.32	113.96	0.222	217.756	0.424
	5	525.22	168.22	0.320	152.548	0.290
	10	544.28	189.16	0.348	142.492	0.262
	50	575.02	202.50	0.352	147.914	0.257
	∞	593.00	208.21	0.351	153.152	0.258



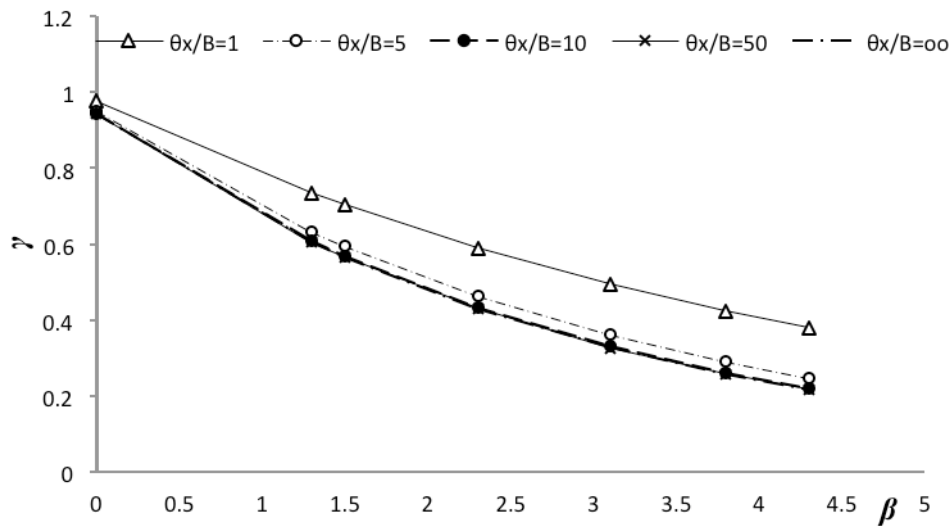
Rysunek 9-38 Wykres obliczeniowej nośności w zależności od poziomej skali fluktuacji dla różnych skal pionowych

Na Rysunku 9-38 można zaobserwować jak wartość obliczeniowa oporu stabilizuje się przy wartościach przekraczających $\theta_x/B=10$. Jednocześnie obliczeniowa wartość oporu maleje wraz ze wzrostem pionowej skali fluktuacji. Wynika z tego, że dla efektywnego projektowania konieczne jest dobre rozpoznanie zmienności w kierunku pionowym.

Rysunek 9-39 oraz Rysunek 9-40 prezentują kolejno zależność wartości obliczeniowej oporu i współczynnika bezpieczeństwa (rozumianego jako stosunek wartości obliczeniowej do wartości średniej oporu wyznaczonego metodą RFEM) od innych wskaźników niezawodności β , proponowanych przez (ISO:2394, 1998). Na rysunkach przyjęto pionową skalę fluktuacji $\theta_y/B=1$ m oraz zmienną skalę poziomą θ_x/B .



Rysunek 9-39 Wartość obliczeniowa nośności w zależności od wskaźnika β dla $\theta_y/B=1$ m oraz różnych θ_x/B



Rysunek 9-40 Współczynnik bezpieczeństwa dla oporu w zależności od wskaźnika β dla $\theta_y/B=1m$ oraz różnych θ_x/B

Na obu rysunkach widać, że wraz ze wzrostem wskaźnika β maleje wartość obliczeniowa oraz cząstkowy współczynnik bezpieczeństwa. Jednocześnie można zaobserwować, że poszczególne wartości stabilizują się wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji (θ_x/B). Efekt jest widoczny w przypadku skali fluktuacji większej od 5m.

Przedstawiona wartość obliczeniowa może być punktem wyjścia do kalibracji współczynników bezpieczeństwa dowolną metodą, np. globalnego współczynnika albo promowaną przez normy europejskie metodą współczynników cząstkowych dla całego oporu. Rysunek 9-40 stanowi przykład kalibracji cząstkowego współczynnika bezpieczeństwa oporu.

10. PODSUMOWANIA I WNIOSKI

10.1. WNIOSKI Z PRACY

Istotą powyższej pracy doktorskiej jest rozwiązanie zagadnienia nośności fundamentu bezpośredniego posadowionego na podłożu o cechach zmiennych losowo. Zaprezentowane podejście opiera się na modelowaniu parametrów wytrzymałościowych podłoża za pomocą pól losowych. Pola te są generowane zgodnie z matematycznymi twierdzeniami dotyczącymi symulacji cyfrowej, w oparciu o założone rozkłady skończenie wymiarowe. Wykorzystanie pól losowych do modelowania cech podłoża gruntowego, pozwala lepiej odwzorować rzeczywiste mechanizmy zachodzące w gruncie oraz jego współpracę z fundamentem. Zadanie rozwiązano stosując losową metodę elementów skończonych, łączącą zagadnienia teorii pól losowych z klasyczną metodą elementów skończonych oraz symulacjami Monte Carlo. Wykorzystanie metody elementów skończonych wymusza dyskretyzację pola losowego do założonej siatki elementów. W zastosowanym podejściu stosuje się uśrednienia parametrów pola wg procedur określonych w rozdziale 5.

Pierwszym z postawionych celów pracy było uogólnienie istniejących rozwiązań o przypadki uwzględniające ciężar własny gruntu pod fundamentem oraz zagłębienia fundamentu. W rezultacie możliwe było określenie wpływu powyższych założeń na losowo zmienny opór graniczny podłoża. Zadanie rozwiązano poprzez rozbudowę istniejącego algorytmu RFEM, wykonanie serii obliczeń, a następnie oszacowanie wpływu „nowych” składników na opór losowy podłoża.

Efektom pracy jest rozbudowany algorytm obliczeniowy (rbear2d wersja 2.3) uwzględniający charakterystykę parametrów wytrzymałościowych za pomocą pól losowych dla trzech „klasycznych” elementów oszacowania nośności, tj. efektu spójności, efektu zagłębienia fundamentu oraz ciężaru gruntu pod fundamentem. Przeprowadzone obliczenia pozwoliły określić wpływ poszczególnych elementów na wartość średnią, odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności losowego oporu.

Wartości średnie, czyli wartości oczekiwane uzyskane metodą RFEM są istotnie mniejsze od wartości deterministycznych, co zdaniem autorki należy wiązać z nieliniowym charakterem rozpatrywanego zadania. Pokazuje to, że losowe oszacowanie nośności jest istotne z punktu widzenia oceny bezpieczeństwa fundamentu.

Ponadto zgodnie z oczekiwaniami obliczenia pokazały, że uwzględnienie kolejno ciężaru własnego lub zagłębienia fundamentu powoduje wzrost wartości oczekiwanej nośności, w stosunku do wartości oczekiwanej nośności fundamentu powierzchniowego, posadowionego na gruncie nieważkim.

W stosunku do przypadku fundamentu powierzchniowego posadowionego na gruncie nieważkim wzrosło również odchylenie standardowe oporu, po uwzględnieniu zagłębienia fundamentu lub ciężaru gruntu pod fundamentem. Jednakże przypadki fundamentu powierzchniowego na gruncie ważkim i fundamentu zagłębionego na gruncie nieważkim, w zakresie odchyłeń standardowych, różnią się między sobą minimalnie, prawie wcale. Jednocześnie sprzężenie obu przypadków (fundament zagłębiony na gruncie ważkim) daje większe odchylenie standardowe od pozostałych przypadków.

Inaczej zachowują się wartości uzyskanych współczynników zmienności oporu granicznego podłoża. Uwzględnienie ciężaru własnego ma bardzo niewielki wpływ na wartość współczynnika zmienności oporu, zarówno przyjmowane dla fundamentu powierzchniowego jak i zagłębionego. Wynika to z faktu, że wzrost odchylenia standardowego jest rekompensowany przez wzrost wartości średniej oporu. Natomiast uwzględnienie zagłębienia fundamentu wpływa tłumiąco na wartość współczynnika zmienności (rzędu 20%). Efekt obserwowano zarówno przy uwzględnieniu ciężaru własnego jak i przy jego pominięciu.

Wyniki uzyskane w pracy potwierdzają niesymetryczne mechanizmy deformacji zachodzące w podłożu o cechach losowych. Fenton i Griffiths (2003 i 2008) opisali to zjawisko jako cechę charakterystyczną zadania nośności dla takiego podłoża. Deformacja gruntu wykazuje przebieg całkowicie losowy, związany jedynie ze słabymi cechami podłoża pojawiającymi się w różnych miejscach pod fundamentem. Taką sytuację zaobserwowano we wszystkich realizowanych w pracy przykładach.

Kolejnym celem pracy była rozbudowa zadania o efekt anizotropii pola losowego. Prekursorskie prace (Griffiths i Fenton, 2001 oraz Fenton i Griffiths, 2003) skupiały się

jedynie na izotropowej zmienności pola, którą definiowano w oparciu o promień korelacji jednakowy na wszystkich kierunkach. Dopuszczając w ramach gruntu jednorodnego pewną zmienność parametrów, należy założyć wolniejszą zmienność cech podłoża w układzie horyzontalnym w porównaniu ze zróżnicowaniem pionowym. Potwierdzają to również wnioski płynące z pracy Cherubiniego (1977), w których poziomy promień korelacji jest rząd wielkości większy od pionowego. W związku z powyższym, ważnym elementem niniejszej rozprawy było rozbudowanie algorytmu obliczeniowego oraz określenie wpływu anizotropowego charakteru podłoża na losowy opór graniczny podłoża. Rozważając różne wartości promienia korelacji w kierunku poziomym i pionowym stwierdzono, że wszystkie wielkości opisujące losowy opór graniczny, tj. wartość średnia, odchylenie standardowe, jak również współczynnik zmienności uzyskane w przypadku anizotropowym różnią się w istotny sposób od przypadku izotropowego.

W efekcie przeprowadzonych obliczeń, dla podłoży różnego typu i o różnych właściwościach, zaobserwowano, że wartość średnia nośności jest większa w przypadku pól izotropowych aniżeli w przypadku pól anizotropowych. Tym samym oszacowanie bezpieczeństwa fundamentu w modelu anizotropowym jest bardziej konserwatywne. Ponadto, z przeprowadzonych w rozdziale 7 analiz współczynnika zmienności nośności wynika, że przyjęcie anizotropowego modelu podłoża daje nie tylko bardziej rzeczywiste odwzorowanie jego własności, ale i bardziej adekwatne oszacowanie bezpieczeństwa fundamentu.

Wszystkie parametry losowego oporu zależą istotnie od poziomej skali fluktuacji, choć stabilizują się przy dużych θ_x ($>10\text{m}$). Prawidłowość tę autorka zaobserwowała zarówno analizując fundamenty powierzchniowe na różnych typach gruntów nieważkich, jak i po uwzględnieniu ciężaru własnego gruntu lub zagłębienia fundamentu. Dodatkowo stwierdzono, wspólnie dla wszystkich przypadków, że krzywe wartości średniej, odpowiadające różnym wartościom skali pionowej są do siebie zbliżone, dla małej poziomej skali fluktuacji. Natomiast różnica między tymi krzywymi wzrasta wraz ze wzrostem poziomej skali.

W przypadku izotropowym, wartość średnia oporu granicznego podłoża jako funkcja skali fluktuacji θ posiada lokalne minima, co było już sugerowane w pracach (Griffiths i Fenton, 2001) oraz (Fenton i Griffiths, 2003). W przypadku anizotropowym, opór podłoża, jako

funkcja dwóch zmiennych θ_x i θ_y , nie wykazuje lokalnego minimum. Natomiast obserwuje się je w przekrojach, przy stałej wartości θ_y . Jednakże w odróżnieniu od przypadku izotropowego minima wartości średniej są płytsze i przesunięte w stronę większych wartości skali fluktuacji θ_x . Odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności mają charakter rosnący, wraz ze wzrostem skali. W przypadku gruntu typu $c-\phi$ oraz anizotropowych pól losowych modelujących właściwości podłoża nie zaobserwowano punktów szczególnych tych wielkości, jako funkcji poziomej i pionowej skali fluktuacji. Po za przypadkiem izotropowym, dla gruntu idealnie spoistego, gdzie odnotowano lokalne maksimum współczynnika zmienności.

Trzeci cel postawiony powyższej rozprawie dotyczył poszukiwania efektu najgorszego przypadku. Poświęcony temu zagadnieniu jest rozdział 8, w którym wskazano, że poszukiwanie najgorszego przypadku nie powinno być utożsamiane z poszukiwaniem minimum wartości średniej, lecz raczej z poszukiwaniem maksimum współczynnika zmienności. W przypadku izotropowym lokalne maksima na wykresie współczynnika zmienności zaobserwowano jedynie dla przypadku gruntu idealnie spoistego. W przypadku gruntu typu $c-\phi$ nie zaobserwowano lokalnych maksimów na wykresach zależności współczynnika zmienności oporu od wartości skali fluktuacji. Pokazano jednak, że wartości współczynnika zmienności oporu zmieniają się nieznacznie dla skal fluktuacji przekraczających wartość $\theta/B > 10$. Gdyby te zmiany przyjąć jako nieistotne, można by za najgorszą uznać wartość skali fluktuacji, dla których $\theta/B > 10$. W przypadku modelowania parametrów podłoża polami anizotropowymi wnioski są analogiczne. Poszukując najgorszego przypadku na osi skali poziomej należałoby przyjąć sporą wartość, np. $\theta_x/B = 50$. Jednak określenie najniekorzystniejszej pionowej skali fluktuacji wydaje się być nadal problematyczne.

Duża próba realizacji w symulacji Monte Carlo, analizowana w rozdziale 9, pozwoliła oszacować rozkłady prawdopodobieństwa oporu przy uwzględnieniu poszczególnych kombinacji klasycznych efektów. Rezultaty dla niebieskiego iły tarenckiego wykazywały dobre dopasowanie dystrybuant empirycznych do dystrybuanty rozkładu lognormalnego. Również statystyczne testy zgodności wskazały, że nie ma podstaw odrzucenia hipotezy, iż jest to rozkład lognormalny. Można jednak domniemać, że rozkład lognormalny oporu jest konsekwencją założenia w zadaniu lognormalnego pola losowego spójności.

Możliwość generowania rozkładu prawdopodobieństwa oporu granicznego podłoża ma dużą zaletę w kontekście zastosowania losowej metody elementów skończonych w praktyce inżynierskiej. Znając rozkład możliwe jest określenie wartości obliczeniowej nośności w oparciu o założony wskaźnik niezawodności lub założone prawdopodobieństwo awarii. Pokazano to w podrozdziale 9.5. W ten sposób można wykalibrować cząstkowy współczynnik dla całej nośności, jaki przewiduje krajowy załącznik do Eurokodu 7, dotyczący podejścia projektowego DA2* (PN-EN 1997-1, 2008).

10.2. DALSZE PERSPEKTYWY ROZWOJU

Podstawowym celem autorki jest dalsze propagowanie losowej metody elementów skończonych do wykorzystania w praktyce inżynierskiej. Algorytm do oceny nośności fundamentu bezpośredniego, może być przydatnym narzędziem w procesie projektowym. Jednakże należałoby go wzbogacić poprzez uwzględnienie: mimośrodowego lub nachylonego obciążenia, proporcji pomiędzy wymiarami fundamentu oraz nachylenia jego podstawy.

Wnioski i spostrzeżenia wynikające z analiz przypadku jednorodnego należałoby poszerzyć o posadowienie fundamentu na podłożu uwarstwionym. Szczególnie ciekawym zagadnieniem może być problem położenia warstwy słabszej i wpływ na uzyskane rezultaty.

Rzeczywiste odwzorowanie ośrodka gruntowego również wymaga głębszego zastanowienia. Ze względu na fakt, że aby efektywnie korzystać z metody RFEM konieczne jest dobre rozpoznanie podłoża, pozwalające wykonać wiarygodne analizy statystyczne parametrów podłoża.

W rezultacie wniosków płynących z powyższej rozprawy, jak i dalszych perspektyw, konieczne jest zwiększanie bazy informacji statystycznej, dotyczącej zmienności określonych typów gruntu. Istotna jest zwłaszcza znajomość promieni korelacyjnych, przede wszystkim w kierunku pionowym i poziomym. Obszerniejsza znajomość tych parametrów ułatwiłaby rzetelną analizę losowej nośności z zastosowaniem pól losowych. Perspektywa tworzenia takiej bazy staje się coraz bardziej realna wraz z rozpowszechnieniem w kraju badań sondami statystycznymi CPT i CPTU.

Innym zadaniem otwartym pozostaje analiza fundamentów posadowionych bezpośrednio na gruncie niespoistych. W rozprawie przedstawiono obliczenia dotyczące jedynie gruntów spoistych. Wyniki przeprowadzonych przez autorkę symulacji dotyczące gruntów niespoistych ($c = 0$) budziły pewne wątpliwości, zwłaszcza związane z problemami stabilności numerycznej uzyskiwanych rozwiązań. Wyniki te zostały opublikowane w pracy (Pieczyńska, Puła, Griffiths, & Fenton, 2011).

Ostatnim zagadnieniem nie związanym bezpośrednio z tematyką powyższej pracy, natomiast stanowiącą kierunek rozwoju, jest zwiększanie zakresu problemów geotechnicznych, w których metoda RFEM znajdowałaby zastosowanie.

11. BIBLIOGRAFIA

1. Alonso, E. (1976). Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays. *Geotechnique* , 26 (3), strony s. 453-472.
2. Alonso, E., & Krizek, R. (1975). Stochastic formulation of soil properties. *Proc. 2nd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. II*, strony 9-32. Aachen: ICASP.
3. Asaoka, A., & Athanasiou-Grivas, D. (1982). Spatial variability of the Undrained Strength of Clay. *Journal of the Geotechnical Engineering Division* , 108 (5), strony 743-756.
4. Baghery, S., & Magnan, J. (1983). *Analyse probabiliste de la stabilite et des tassements des remblais du site experimental de Cubzac-les-Ponts*. LPC, Ministere de l'Urbanisme et du Logement Ministere des Transports, Laoratore Central des Ponts et Chausses.
5. Baroth, J., Breysse, D., & Schoefs, F. (2011). *Construction reliability safety, variability, sustainability*. Wiley & Sons.
6. Beacher, G., & Christian, J. (2003). *Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering*. Chichester: J. Wiley & Sons.
7. Beacher, G., & Ingra, T. (1981). Stochastic FEM in settlement prediction. *Journal of Geotechnical Engineering Division* , 107 (GT4), strony 449-463.
8. Becker, D. (1996). Eighteen Canadian Geotechnical Colloquium: Limit States Design for Foundations Part II. Development for the National Building Code of Canada. *Canadian Geotechnical Journal* , 33, strony 984-1007.
9. Biernatowski, K. (1982). *Metody stochastyczne w geotechnice* (Tom 34). Wrocław: Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej.
10. Biernatowski, K. (1981). Parametry geotechniczne w metodzie stanów granicznych. *VI Krajowa Konferencja Mechaniki Gruntów i Fundamentowania*, (strony 17-25).
11. Biernatowski, K. (1972). Stability of rigid structures in probabilistic formulation. *5th European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, (strony 111-116). Madrit.
12. Biernatowski, K. (1966b). Stateczność fundamentów cz. II - Stateczność na obrót i przesunięcie w ujęciu probabilistycznym. *Archiwum Hydrotechniki* , t. 13 (2), 283-302.
13. Biernatowski, K. (1968a). Stateczność fundamentów cz. III - Stateczność na wypieranie gruntu w ujęciu probabilistycznym. *Archiwum Hydrotechniki* , t. 15, 261-280.
14. Biernatowski, K. (1969). Stateczność fundamentów cz. IV - Kryteria stateczności fundamentów. *Archiwum Hydrotechniki* , t. 16, 209-217.
15. Biernatowski, K. (1966a). Stateczność fundmanetów cz. I - Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa dla oceny współczynników bezpieczeństwa przy sprawdzeniu fundamentów. *Archiwum Hydrotechniki* , t. 13 (2), 239-262.
16. Billigsey, P. (1986). *Probability and Measure 2nd edn*. New York: J.Wiley & Sons.
17. Borowkow, A. (1971). *Stochastic Processes Queuning Theory*. J. Wiley & Sons.

18. Box, G., & Jenkins, G. (1983). *Analiza szeregów czasowych*. Warszawa: PWN.
19. Brinch Hansen, J. (1970). *A Revised and Extended Formula for Bearing Capacity*. Danish Geotechnical Institute, Kopenhaga.
20. Brząkała, W. (1981). Losowość parametrów podłoża gruntowego. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 28 (4), strony 599-606.
21. Brząkała, W., & Puła, W. (1996). A probabilistic analysis of foundation settlements. *Computers and Geotechnics*, 18 (4), strony 291-309.
22. Brząkała, W., & Puła, W. (1992b). Neumann Expansion in the Stochastic Finite Element Method. W M. Doležalova (Red.), *Proc. of the Second Czechoslovak Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, 2, strony 17-22. Prague.
23. Brząkała, W., & Puła, W. (1992a). Stochastic finite element method in a settlement analysis. W G. Pande, & S. Pietruszczak (Red.), *Proc. of the Fourth Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics*. 2, strony 879-886. Rotterdam: Balkema.
24. Budhi, M. (2007). *Soil Mechanics and Foundations*. J. Wiley & Sons.
25. Cafaro, F., & Cherubini, C. (2002). Large sample spacing in evaluation of vertical strength variability of clayey soil. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, strony 558-568.
26. Cafaro, F., Cherubini, C., & Cotecchia, F. (2000). Use of the scale of fluctuation to describe the geotechnical variability of an Italian clay. *Proceeding of the 8th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP)* (strony 481-486). Rotterdam: Melchers & Stewart.
27. Caullcutt, R. (1983). *Statistics in Research and Development*. Chapman and Hall.
28. Cherubini, C. (1997). Data and considerations on the variability of geotechnical properties of soils. *Proc. of the ESREL's Lisbon vol. 2*, (strony 1583-1591). Lisbon.
29. Cherubini, C. (2000). Probabilistic approach to the design of anchored sheet pile walls. *Computers and Geotechnics*, 26 (3-4), strony 309-330.
30. Cherubini, C., Giasi, C., & Rethati, L. (1993). The coefficients of variations of some geotechnical parameters. W K. Li, & S.-C. Lo (Red.), *Probabilistic methods in geotechnical engineering* (strony 179-184). Rotterdam: Balkema.
31. Cherubini, C., Vessia, G., & Puła, W. (2007). Statistical soil characterization of Italian sites for reliability analysis. W Tan, Phoon, Hight, & Lerouell, *Characterization and Engineering properties of natural soil* (strony 2681-2706). Singapore, Taiwan.
32. Chiasson, P., Lafleur, J., Soulie, M., & Law, K. (1995). Characterizing spatial variability of a clay by geostatistics. *Canadian Geotechnical Journal*, 32, strony 1-10.
33. Cordoso, A., & Fernandes, M. (2001). Characteristic values of ground parameters and probability of failure in design according to Eurocode 7. *Geotechnique*, 51 (6), strony 519-531.
34. Cornell, C. (1969). A probability-based structural code. *Journal of American Concrete Institute* (66), strony 974-985.
35. Corotis, R., Azzouz, A., & Krizek, R. (1975). Statistical Evaluation of Soil Index Properties and Constrained Modulus. *2nd ICASP, II*, strony 273-293. Aachen.
36. Coulomb, C. A. (1776). Essai sur une application des regles de maximia et minimis a quelques problemes de statique relatifs a l'architecture. *L'Imprimerie Royale*, 7, strony 3-8. Paris.
37. Courant, R. (1942). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*

38. Ditlevsen, O., & Madsen, H. (1996). *Structural Reliability Methods*. Chichester: J. Wiley & Sons.
39. Doliński, K., & Puła, W. (1990). Posadowienie bezpośrednie na podłożu o cechach losowych. *Inżynieria i Budownictwo*, 4-5/90, strony 161-163.
40. Doliński, K., & Puła, W. (1989). Zastosowanie metod niezawodności konstrukcji do obliczeń fundamentów posadowionych bezpośrednio. *XXXV Konf. Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, t. 1*, strony 37-42. Wrocław - Krynica.
41. Evangelista, A., Pellegrino, A., & Vigogoni, C. (1975). The influence of the variability of coarse grained material properties on the stability of earth dams. *2nd ICASP*, 2, strony 71-87. Aachen.
42. Feller, W. (1981). *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. Tom 2, wyd. 3*. Warszawa: PWN.
43. Fenton, G. A., & Griffiths, D. V. (2003). Bearing capacity prediction of spatially random $c - \phi$ soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 40 (1), strony 54-65.
44. Fenton, G. (1990). *Simulation and analysis of random fields*. PhD thesis, Princeton University.
45. Fenton, G., & Griffiths, D. (2002). Probabilistic foundation settlement on spatially random soil. *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 128 (5), strony 381-390.
46. Fenton, G., & Griffiths, D., RFEM: Random Finite Element Method Software. *algorytm rbear2d wersja 2.1*. Pobrano z lokalizacji www.engmath.dal.ca/rfem/
47. Fenton, G., & Griffiths, D. (1993). Statistics of block conductivity through a simple bounded stochastic medium. *Water Resources Research*, 29 (6), strony 1825-1830.
48. Fenton, G., & Griffiths, D. (1996). Statistics of free surface flow through stochastic earth dam. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, 122 (6), strony 427-436.
49. Fenton, G., & Griffiths, D. (2005). Three-dimensional probabilistic foundation settlement. *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 131 (2), strony 232-239.
50. Fenton, G., & Griffiths, D. V. (2008). *Risk Assessment in Geotechnical Engineering*. New Jersey, USA: J. Wiley & Sons, Inc.
51. Fenton, G., & Griffiths, G. (2004). Closure to discussion on bearing capacity prediction of spatially random soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 41 (2), strony 368-369.
52. Fenton, G., & Vanmarcke, E. (1990). Simulation of random fields via local average subdivision. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, 116 (8), strony 1733-1749.
53. Fenton, G., Griffiths, D., & Cavers, W. (2005). Resistance factors for settlement design. *Canadian Geotechnical Journal*, 42 (5), strony 1422-1436.
54. Forster, W., & Weber, E. (1982). Influences on the probability of failure of slopes. *Proc. of the 10th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 3, strony 127-130. Stockholm.
55. Fredlung, D., & Dahlman, A. (1972). Statistical geotechnical properties of glacial Lake Edmonton sediments. *1st ICASP* (strony 203-228). Hong Kong: Hong Kong University Press.
56. Gao, A., & Li, J. (1993). Reliability analysis on pile bearing capacity. *Proc. of the Conf. on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*, (strony 295-301). Canberra.
57. Gikhman, I., & Skorokhod, A. *Vvedenie v teoriu sluchajnych processov*. Moskwa: Nauka.
58. Griffiths, D. V., & Fenton, G. A. (2001). Bearing capacity of spatially random soil: The undrained clay Prandtl problem revisited. *Géotechnique*, 54 (4), strony 351-359.
59. Griffiths, D., & Fenton, G. (2009). Probabilistic settlement analysis by stochastic and random finite element method. *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 135 (11), strony 1629-1637.

-
60. Griffiths, D., & Fenton, G. (2004b). Probabilistic slope stability by finite elements. *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* , 130 (5), strony 507-518.
 61. Griffiths, D., & Fenton, G. (1993). Seepage beneath water retaining structures founded on spatially random soil. *Geotechnique* , 43 (6), strony 577-587.
 62. Grolimund, J., & Recordon, E. (1972). *Etude statistique sur les resultants d'essais de laboratoire effectues sur un sol considere comme homogene*. Laboratoire de Geotechnique de l'Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.
 63. Gryczmański, M. (1975). Metoda elementów skończonych w analizie podłoża budowli. *Zeszyty Naukowe WSI w Opolu nr 21* .
 64. Hill, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press .
 65. Holtz, R., & Krizek, R. (1972). Statistical evaluation of soil data. W P. Lumb (Red.), *Ist ICASP* (strony 230-279). Hong Kong: Hong Kong University Press.
 66. Honjo, Y., & Amatya, S. (2005). Partial factors calibration based on reliability analyses for square footing on granular soil. *Geotechnique* , 55 (6), strony 478-491.
 67. Honjo, Y., Suzuki, M., & Matsuo, M. (2000). Reliability analysis of shallow foundations in reference to design codes development. *Computers and Geotechnics* , 25 (3-4), strony 331-346.
 68. Ingles, O. (1980). Soil variability, construction quality control and performance reliability. *Proceedings of the University of New South Wales* . Sydney.
 69. ISO:2394. (1998). *Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych* .
 70. Izbicki, R., & Mróz, Z. (1976). *Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał*. Warszawa: PWN.
 71. Keaveny, J., Nadim, F., & Lacasse, G. (1989). Autocorrelation function for offshore geotechnical data. *Proc. of 5th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability* (strony 263-270). ICOSSAR.
 72. Krige, D. (1951). A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *J. Chem. Metall and Min. Soc. South Africa* , 52 (6), strony 119-139.
 73. Krige, D. (1962). Statistical applications in mine valuation. *Journal Inst, Mine Survey S. Afr.* , 12 (2-3), strony 45-84, 95-136.
 74. Kulhawy, F. (1992). On evaluation of static soil properties. *Stability and performance of slopes and embankments*. 2, strony 95-115. New York: ASCE specially symposium.
 75. Kulhawy, F., Roth, N., & Grigoriu, M. (1991). Some statistical evaluations of geotechnical properties. *6th ICASP*, (strony 705-712). Mexico City.
 76. Li, K., Lee, I., & Lo, S.-C. (1993). Limit state design in geotechnics. W K. Li, & S.-C. Lo (Red.), *Proc. of the Conf. on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Canberra* (strony 29-42). Rotterdam: Balkama.
 77. Lo, S.-C., Li, K., & Lee, I. (1992). Limit state design of pile foundations: a probabilistic appraisal. *Proc. of 6th Australian-New Zeland Conf. on Geomechanics*. Christchurch.
 78. Loeve, M. (1978). *Probability Theory I 4th ed*. New York: Springer-Verlag Inc.
 79. Lumb, P. (1974). Application of Statistics in Soil Mechanics. (I.K.Lee, Red.) *Soil Mechanics - New Horizons* , strony 44-111.
 80. Lumb, P. (1970). Safety factors and the probability distributions of soil strength. *Canadian Geotechnical Journal* , 7 (3), strony 225-242.
 81. Lumb, P. (1975). Spatial variability of soil properties. *Proc. 2nd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. II*, strony 397-422. Aachen: ICASP.
-

82. Lumb, P. (1966). The variability of natural soils. *Canadian Geotechnical Journal* , 3 (2), strony 74-97.
83. Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Co.
84. Mandelbrot, B., & Ness, J. (1968, 10(4)). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review* , strony 422-437.
85. Martin, C. M. (2005). Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics. *Proc. 11th Int. Conf. IACMAG* , 4.
86. Matsuo, M., & Asaoka, A. (1977). Probability models of undrained strength of marine clay. *Soil and Foundations* , 17 (3), strony 53-68.
87. Matsuo, M., Asaoka, A., & Kawamura, K. (1980). Reliability-based design of geotechnical engineering problems. *Memories of the Faculty of Engineering* , 32.
88. McAnally, P. (1983). Reliability of the bearing capacity design of shallow footing in sands. *Proc. 4th Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng (ICASP)*, (strony 1545-1556). Florence.
89. Meyerhof, G. (1993). Development of geotechnical limit state design. *Proc. of the international symposium on limit state design in geotechnical engineering, 1*, strony 1-12. Copenhagen.
90. Meyerhof, G. (1995). Development of geotechnical limit state design. *Canadian Geotechnical Journal* , 32, strony 128-136.
91. Meyerhof, G. G. (1976). Bearing capacity and settlement of pile foundation. *J. Geotech. Eng. Div. ASCE* , 102 (GT3), 195-228.
92. Meyerhof, G. G. (1963). Some recent research on the bearing capacity of foundations. *Canadian Geotechnical Journal* , 1 (1), strony 16-26.
93. Meyerhof, G. G. (1951). The ultimate bearing capacity of foundations. *Geotechnique* , 2 (4), strony 301-331.
94. Meyerhof, G. (1970). Safety factors in soil mechanics. *Canadian Geotechnical Journal* , strony 349-355.
95. Mohr, O. (1900). Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials? *Zeit. des Ver. Deuts. Ing* , 44, strony 1524-1530.
96. Murzewski, J. (1970). *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*. Warszawa: Arkady.
97. Oboni, F., & Bourdeau, P. (1983). Determination of the critical slip surface in stability problems. *4th ICASP* , strony 1413-1424.
98. Orr, T. (2000). Selection of characteristic values and partial factors in geotechnical design to Eurocode 7. *Computers and Geotechnics* , 25 (3-4), strony 263-279.
99. Paice, G., Griffiths, D., & Fenton, G. (1996). Finite element modeling of settlements on spatially random soil. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering* , 122 (9), strony 777-779.
100. Phoon, K., Quek, S., & An, P. (2003). Identification of statistically homogeneous soil layers using modified Bartlett statistics. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* , 129 (7), strony 649- 659.
101. Pieczyńska, J., Puła, W., Griffiths, D., & Fenton, G. (2011). Probabilistic characteristics of strip footing bearing capacity evaluated by random finite element method. *Proc. of ICASP 2011, Paper No. 10321 (CD-ROM)*. Zurich.
102. Pieczyńska, J., & Puła, W. (2009). Zastosowanie losowej metody elementów skończonych do analizy losowej zmienności nośności granicznej fundamentu bezpośredniego. *Górnictwo i Geoinżynieria* , R.33 (z.1), strony 485-495.

-
103. Pietruszczak, S. (2010). *Fundamentals of plasticity in geomechanics*. CRC Press.
 104. PN-81/B-03020. (1981). *Grunty budowlane, posadowienie bezpośrednie budowli, obliczenia statyczne i projektowanie*.
 105. PN-EN 1997-1. (2008). *Eurokod 7 Projektowanie geotechniczne. Część 1: Zasady ogólne*.
 106. Prandtl, L. (1921). Über die Eindringungsfestigkeit (Harte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden. *Zeitschr. and Math. Mechan.*, 1 (1), strony 15-20.
 107. Prandtl, L. (1920). Über die Harte plastischer Körper. *Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1920*, strony 74-85.
 108. Przewłócki, J. (1998). *Losowość w wybranych zagadnieniach mechaniki gruntów*. PAN, Instytut Budownictwa Wodnego, Gdańsk.
 109. Przewłócki, J. (2006). *Problemy stochastycznej mechaniki gruntów. Ocena niezawodności*. Wrocław: Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne.
 110. Puła, W. (1993). *Zastosowanie stochastycznej metody elementów skończonych w geotechnice*. SPR, Politechnika Wrocławska, Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Wrocław.
 111. Puła, W. (2004). *Zastosowanie teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów*. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.
 112. Rakwitz, R. (2000). Reviewing probabilistic soil modeling. *Computers & Geotechnics*, 25 (3-4), strony 199-233.
 113. Rankine, W. M. (1857). On the stability of loose earth. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 1, strony 9-27.
 114. Reissner, H. (1924). Zum Erddruckproblem. *Proceed. First Int. Conf. Appl. Mech.*, (strony 295-311). Delft.
 115. Rice, S. (1944). Mathematical Analysis of Random Noise. *Bell System Technical Journal*, 25 (3-4).
 116. Roscoe, K. (1970). The influence of strains in soil mechanics. *Geotechnique*, strony 129-170.
 117. Rubinstein, R. (1981). *Simulation and the Monte Carlo Method*. New York: J. Wiley & Sons INC.
 118. Schultze, E. Frequency distributions and correlations of soil properties. W P. Lumb (Red.), *1st ICASP* (strony 372-387). Hong Kong: Hong Kong University Press.
 119. Shield, R. T. (1953a). Mixed boundary value problems in soil mechanics. *Q. Appl. Math.*, 11, strony 61-75.
 120. Shield, R. T. (1953b). Plastic potential theory and Prandtl bearing capacity solution. *J. Appl. Mech.*, 21, strony 193-194.
 121. Shultze, E. (1975). Some aspects concerning the application of statistics and probability to foundation structures. *2nd ICASP*, (strony 457-494). Aachen.
 122. Singh, A. (1972). How reliable is the safety factor in foundation engineering? *Proc. 1st ICASP*, (strony 389-424). Hong Kong.
 123. Smith, I. (1982). *Programming the finite element method with application to geomechanics*. Wiley.
 124. Smith, I., & Griffiths, D. (2004). *Programming the Finite Element Method* (wyd. 4th ed.). New York: J. Wiley & Sons.
 125. Sokołowski, W. W. (1958). *Statyka ośrodków sypkich*. Warszawa: PWN.
 126. Tang, W. (1987). Updating Anomaly Statistics - Single Anomaly Case. *Structural Safety*, 4 (2), strony 151-163.
-

127. Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. New York: J. Wiley & Sons.
128. Vanmarcke, E. (1977a). Probabilistic Modelling of Soil Profiles. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 103 (GT11), strony 1227-1246.
129. Vanmarcke, E. (1983). *Random Fields: Analysis and Synthesis*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
130. Vanmarcke, E. (1977b). Reliability of earth slopes. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 103 (GT11), strony 1247-1265.
131. Vermeer, P., & de Borst, R. (1984). Non associated plasticity for soils, concrete and rock. *Heron*, 29, strony 1-64.
132. Vesic, A. S. (1973). Analysis of ultimate loads of shallow foundations. *J. Soil Mech. Found. Div. ASCE*, 99 (SM1), strony 45-73.
133. Vessia, G., Cherubini, C., Pieczyńska, J., & Puła, W. (2009). Application of random finite element method to bearing capacity design of strip footing. *Journal od GeoEngineering*, 4 (3), strony 103-112.
134. Wentzel, A. (1980). *Procesy stochastyczne*. Warszawa: PWN.
135. Wickremesinghe, D., & Campanella, R. (1993). Scale of fluctuation as a description of soil variability. *Proc. of the Conf. on Probabilistic Methods on Geotechnical Engineering*, (strony 233-239). Canaberra.
136. Wilde, P. (1981). *Dyskretyzacja pól losowych w obliczeniach inżynierskich*. Warszawa: PWN.
137. Wilde, P. (1977). Modele dyskretne pól losowych podłoża. *Prace Naukowe Instytutu Geotechniki PWR*, 24 (9), 5-16.
138. Wu, T. (1974). Uncertainty, safety and decision in soil engineering. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 100 (3), strony 329-348.
139. Wu, T., & Kraft, L. (1967). The Probability of Foundation Safety. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 93 (SM3), strony 213-231.
140. Yaglom, A. (1986). *Correlation Theory of Stationary and Related Random Function*. New York: Springer-Verlag Inc.
141. Zieliński, R. (1970). *Metody Monte Carlo*. Warszawa: PWN.
142. Zienkiewicz, O. (1972). *Metoda Elementów Skończonych*. Warszawa: Arkady.
143. Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (2000). *The Finite Element Method 5th ed.* Oxford: Butterworth-Heinemann Elsevier.
144. Zubrzycki, S. (1957). O szacowaniu parametrów złóż geologicznych. *Zastosowanie Matematyki*, 3, strony 105-153.