

Piotr Peternek

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

PRZEDZIAŁY UFNOŚCI DLA MEDIANY W NIEZNANYM ROZKŁADZIE

Streszczenie: W praktycznych zastosowaniach metod statystyki matematycznej często pomija się założenia, bez których spełnienia korzystanie z poszczególnych narzędzi jest dyskusyjne. Ważnym aspektem jest poszukiwanie metod, które będą odporne na zmiany założeń dotyczących rozkładów cech. W pracy rozpatruje się problem estymacji przedziałowej mediany w kontekście zastosowań do konstrukcji kart kontrolnych dla indywidualnych pomiarów. Proponuje się wykorzystanie uogólnionego rozkładu lambda do odtworzenia danych i konstrukcji przedziału na podstawie tak otrzymanego modelu.

Słowa kluczowe: przedziały ufności, metoda najmniejszych kwadratów, kwantyle, karty kontrolne, optymalizacja.

1. Wstęp

Problem konstrukcji przedziałów ufności w klasycznym przypadku znanego (zwykle normalnego) rozkładu zmiennej losowej jest zagadnieniem powszechnie znanym i opisanym w podręcznikach statystyki. Problem ten może się jednak znacznie skomplikować w sytuacji, kiedy założenie o znanym rozkładzie nie może być utrzymane, co więcej – z racji możliwego do wystąpienia rozkładu nie powinno się konstruować przedziałów ufności wykorzystujących klasyczne statystyki, takie jak średnia czy odchylenie standardowe. W takiej sytuacji brak podstawy do przyjęcia określonego rozkładu F zmusza badaczy do wykorzystania statystyk pozycyjnych, które zwykle nie mają już tak dobrych (w kontekście wymagań dotyczących estymatorów) własności. Należy tu nadmienić, że obserwuje się coraz większe zainteresowanie wykorzystaniem statystyk pozycyjnych w zastosowaniach praktycznych. Znane jest wykorzystanie mediany do określania poziomu ubóstwa w UE czy prezentowanie rankingów wynagrodzeń z wykorzystaniem kwantyli. Ważnym i tradycyjnym zastosowaniem miar pozycyjnych jest wykorzystanie ich w konstrukcji kart kontrolnych.

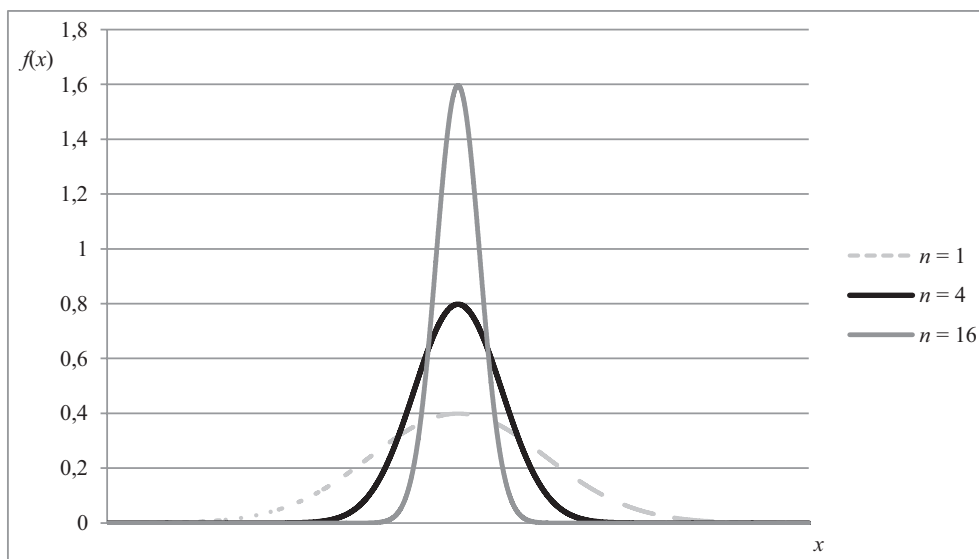
W artykule przedstawiona zostanie metoda umożliwiająca konstrukcję kart kontrolnych i przedziałów ufności dla mediany wykorzystująca uogólniony rozkład lambda. Praktyczną część pracy poprzedzi teoretyczny wywód uzasadniający potrzebę podjęcia tematu.

2. Wykorzystanie mediany zamiast średniej

Zieliński [2010] w swej pracy przedstawia problem pomiaru $X_i = \mu + \varepsilon_i$, który staje się pretekstem do uzasadnienia podjęcia tematu wykorzystania mediany zamiast klasycznego parametru, jakim jest średnia. Rozpatruje on dwie sytuacje, w których znany lub nieznan jest rozkład błędu ε_i popełnianego przy pomiarze. Autor przywoływanej pracy różnicuje też rozkłady, które bada. Pierwszy przypadek dotyczy sytuacji, w której rozkład błędu jest rozkładem normalnym o znanym parametrze σ i wartości oczekiwanej wynoszącej 0, a zatem:

$$X_i = \mu + \varepsilon_i, E\varepsilon = 0, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma). \quad (1)$$

Jest to przykład klasyczny opisywany w podręcznikach statystyki, polegający na tym, że powtarza się i uśrednia pomiary, dzięki czemu redukuje się popełniany przy pomiarze błąd. Im więcej pomiarów, tym błąd staje się coraz mniejszy (rys. 1).



Rys. 1. Rozkład średniej z n -elementowej próby o rozkładzie normalnym

Źródło: opracowanie własne.

Nieco inaczej wyglądać będzie sytuacja, jeżeli założy się, że rozkład błędu będzie pochodził z rodziny rozkładów α -stabilnych, przy czym rozważania ograniczone zostaną w zasadzie wyłącznie do rozkładu Cauchy'ego. Okazuje się bowiem, że w takich rozkładach zwiększanie wielkości próby i uśrednianie pomiarów prowadzi może do rozkładów o większym rozrzucie niż pierwotny rozkład. Dla rozkładu Cauchy'ego średnia z próby ma dokładnie taki sam rozkład jak pierwotna zmienna.

Zauważyć to można, wykorzystując funkcję charakterystyczną zmiennej losowej w rozkładach α -stabilnych, która przyjmuje postać: $\phi_X(t) = \exp(i\mu t - |\lambda t|^\alpha)$. Porównując ją z funkcją charakterystyczną dla średniej z tego samego rozkładu, otrzymujemy:

$$\phi_{\bar{X}_n}(t) = \exp\left(i\mu \frac{t}{n} - \left|\lambda \frac{t}{n}\right|^\alpha\right)^n = \exp\left(i\mu t - \left|n^{\frac{1}{\alpha}-1} \lambda t\right|^\alpha\right).$$

Przypomnijmy, że parametr α jest parametrem skali, μ odpowiada za położenie, a rozproszenie reprezentowane jest przez parametr λ .

Ograniczenie zmienności pomiarów takich rozkładów za pomocą średniej wydaje się zatem bezzasadne. Zieliński wskazuje w takim przypadku możliwość wykorzystania mediany z próby, przy czym ogranicza się do mediany z prób nieparzystych (por. [Zieliński 2010]). Mediana z próby ma rozkład dany wzorem:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left(F_\mu(x)[1-F_\mu(x)]\right)^{\frac{n-1}{2}} f_\mu(x), \quad (2)$$

gdzie F_μ jest rozkładem obserwacji o medianie μ . Zatem dystrybuanta mediany jest dana wzorem:

$$P(Me_n \leq x) = B\left(F(x-\mu); \frac{n+1}{2}; \frac{n+1}{2}\right), \quad (3)$$

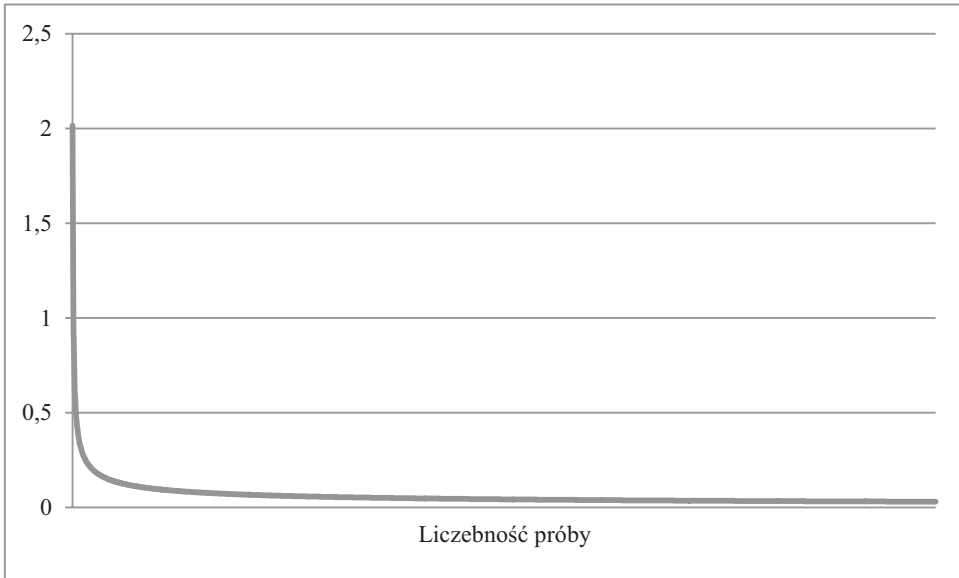
gdzie B jest rozkładem Beta, natomiast F jest rozkładem błędu o medianie 0.

Znając zatem rozkład mediany z próby, można przedstawić przedział ufności dla mediany:

$$\left(Me_n - F^{-1}\left(B^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}; \frac{n+1}{2}; \frac{n+1}{2}\right)\right); Me_n - F^{-1}\left(B^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{n+1}{2}; \frac{n+1}{2}\right)\right) \right). \quad (4)$$

Przedstawiony przedział ufności jest wzorem ogólnym i może być wykorzystany dla każdego rozkładu F zmiennej $\varepsilon_i \sim F$ będącej błędem pomiaru. Wykorzystanie przedziału ufności dla mediany jest ogólniejsze i możliwe do wykorzystania również w sytuacji, gdy rozkład F jest na przykład rozkładem normalnym. Pozostaje natomiast pytanie, na ile „lepszy” jest przedział ufności wykorzystujący średnią, przy założeniu, że F jest rozkładem normalnym. Przeprowadzone symulacje wskazują jednoznacznie (co jest wynikiem oczekiwanym), że przedziały ufności wykorzystujące medianę są przedziałami szerszymi. Przykładowo dla 21 obserwacji wygenerowanych z rozkładu $N(0, 1)$ dla poziomu ufności 0,95 obliczony przedział ufności dla mediany wyniósł $(-0,59; 0,47)$, natomiast przedział ufności dla wartości oczekiwanej wynosi $(-0,69; 0,16)$. Na rysunku 2 przedstawiono różnicę pomiędzy szerokością przedziału ufności dla mediany a szerokością przedziału ufności dla

wartości oczekiwanej, w sytuacji danych generowanych z rozkładu $N(0, 1)$ w zależności od wielkości próby. Można zauważyć, że potwierdzają się wyniki o mniejszej dokładności przedziałów ufności dla mediany, jednakże różnice te maleją wraz ze wzrostem liczebności próby.



Rys. 2. Różnice pomiędzy szerokością przedziałów dla mediany i dla średniej dla rozkładu normalnego w zależności od wielkości próby

Źródło: opracowanie własne.

Zagadnienie wyznaczenia przedziału ufności dla mediany znacznie bardziej komplikuje się w sytuacji, gdy nie jest znany rozkład F błędu pomiaru. Wykorzystanie wzoru (4) jest niestety niemożliwe, a jedynym rozwiązaniem jest uogólnienie problemu i wykorzystanie praw rachunku prawdopodobieństwa. Jeżeli bowiem zmienna X ma rozkład o dystrybuancie F , to zmienna $Y = F(X)$ ma rozkład jednostajny $U(0, 1)$, a zmienna losowa $F(X_{k:n})$ ma taki sam rozkład jak k -ta statystyka pozycyjna z n -elementowej próby z rozkładu $U(0, 1)$. Wobec tego można wyznaczyć

przedział ufności, korzystając z zależności: $2^{-n} \sum_{s=k}^{n-k} \binom{n}{s} \geq 1 - \alpha$, a dokładniej poszu-

kując takiej największej wartości k , dla której prezentowana zależność będzie spełniona. Zauważmy przy tym, że wykorzystanie tej zależności i odnajdowanie granic przedziału ufności jest niezależne od wartości zmiennych i od asymetrii rozkładów, ponieważ zależy jedynie od odpowiednich statystyk pozycyjnych. W tabeli 1 przedstawiono obliczenie niezbędne do wyznaczenia statystyk pozycyjnych dla próby 19-elementowej. I tak, aby uzyskać przedział ufności o poziomie ufności 0,95, nale-

ży jako dolną granicę tego przedziału wziąć 5 statystykę pozycyjną. Natomiast górną granicę wyznacza 15 statystyka pozycyjna. Taki wybór gwarantuje 98-procentowy przedział ufności.

Tabela 1. Obliczenia niezbędne do konstrukcji przedziału ufności dla mediany z wykorzystaniem statystyk pozycyjnych dla $n = 19$

Numer statystyki pozycyjnej	$\binom{n}{s}$	$\sum_{s=k}^{n-k} \binom{n}{s}$	Poziom ufności
1	19	524 286	0,999996
2	171	524 248	0,999924
3	969	523 906	0,999271
4	3 876	521 968	0,995575
5	11 628	514 216	0,980789
6	27 132	490 960	0,936432
7	50 388	436 696	0,832932
8	75 582	335 920	0,640717
9	92 378	184 756	0,352394
10	92 378		
11	75 582		
12	50 388		
13	27 132		
14	11 628		
15	3 876		
16	969		
17	171		
18	19		
19	1		

Źródło: opracowanie własne.

Analogiczny sposób postępowania (zob. tab. 2) przy próbie 5-elementowej nie pozwala uzyskać przedziału ufności o założonym prawdopodobieństwie 0,95. Zauważmy także (już bez szczegółowych obliczeń), że dla próby 65-elementowej przy poziomie ufności 0,95 należy wziąć 25 i 40 statystykę pozycyjną jako odpowiednio dolną i górną granicę przedziału ufności.

Mimo pewnych niedoskonałości wynikających z ograniczenia się wyłącznie do liczebności próby przedstawiony sposób umożliwia postępowanie w przypadkach, gdy klasyczne metody statystyki matematycznej wydają się niewystarczające.

Tabela 2. Obliczenia niezbędne do konstrukcji przedziału ufności dla mediany z wykorzystaniem statystyk pozycyjnych dla $n = 5$

Numer statystyki pozycyjnej	$\binom{n}{s}$	$\sum_{s=k}^{n-k} \binom{n}{s}$	Poziom ufności
1	5	30	0,9375
2	10	20	0,625
3	10		
4	5		
5	1		

Źródło: opracowanie własne.

3. Uogólniony rozkład lambda – podstawy teoretyczne

Przedstawione niedoskonałości w konstrukcji przedziału ufności dla mediany dla nieznanego rozkładu stały się przyczyną poszukiwania metod, które zniwelowałyby powyższe niedogodności. Z tego względu spośród kilku propozycji, m.in. Johnsona [1949] czy Burra [1973], warto przyjrzeć się zaproponowanemu przez Ramberga i Schmeisera [1974] tzw. uogólnionemu rozkładowi lambda (*General Lambda Distribution*). W podejściu Burra ograniczono się w zasadzie tylko do rozkładów asymetrycznych, co jest istotnym ograniczeniem. Podstawową zaletą zaproponowanego przez Ramberga i Schmeisera podejścia, w porównaniu z propozycjami Johnsona i Pearsona, jest wykorzystanie tylko jednej funkcji. Szeroki zakres krzywych odpowiadający kształtom różnych funkcji gęstości może być zatem aproksymowany za pomocą jednej funkcji. Przez uogólniony rozkład lambda rozumie się funkcję postaci:

$$Q(p) = x_p = \lambda_1 + \frac{p^{\lambda_3} - (1-p)^{\lambda_4}}{\lambda_2}, \quad (5)$$

gdzie x_p oznacza kwantyl rozkładu rzędu p , λ_1 to parametr położenia, λ_2 to parametr skali, natomiast λ_3 i λ_4 to parametry kształtu.

Rozkład ten został zaproponowany jako uogólnienie przekształcenia proponowanego przez Tukeya w 1960 r. W roku 2000 Kanji i Arif przedstawili w swej pracy tzw. kwantylowy rozkład logistyczny (*Quantile Logistic Distribution*), który połączył założenie o rozkładzie logistycznym z przekształceniem Ramberga i Schmeisera. Umożliwiło to konstrukcję kart kontrolnych dla pojedynczych pomiarów. Zasadniczą wadą pracy Kanjiego i Arifa jest założenie o rozkładzie logistycznym badanej zmiennej przyjęte ze względu na łatwość estymacji parametrów tak prze-

kształconego rozkładu lambda. Po uwzględnieniu rozkładu logistycznego uogólniony rozkład lambda przyjmuje bowiem postać:

$$Q(p) = \lambda + \frac{\eta}{2}((1 - \delta) \ln p - (1 + \delta) \ln(1 - p)), \quad (6)$$

gdzie λ , η , δ to parametry rozkładu reprezentujące odpowiednio parametr położenia, skali i skośności.

Wykorzystanie uogólnionego rozkładu lambda w oryginalnej zaproponowanej przez Ramberga i Schmeistera formie wymaga odpowiednich metod estymacji parametrów. W literaturze wymienia się zasadniczo trzy metody estymacji. Pierwsza to metoda momentów zaproponowana przez Ramberga i Schmeistera (1974), druga to metoda najmniejszych kwadratów zaproponowana i udowodniona przez Ozturka i Dale'a w 1985 r. Natomiast trzecia z wyróżnianych metod to metoda gwiazdna (*Starshipmethod*) przedstawiona przez Kinga i MacGillivray w 1999 r. Wady i zalety tych metod przedstawiono np. w pracy [Lakhany, Mausser 2000].

W niniejszej pracy, podobnie jak zrobiono to w pracy Kanjiego i Arifa [2000], wykorzystano klasyczną metodę najmniejszych kwadratów. Takie postępowanie nie jest jednak pozbawione wad, ponieważ nie gwarantuje uzyskania rozwiązania optymalnego. Przyjęty został sposób optymalizacji nieliniowej pozwalający znaleźć rozwiązanie w ekstremum lokalnym. Niezbędna zatem będzie analiza uzyskanych rozwiązań z uwzględnieniem dobroci dopasowania danych do wartości teoretycznych. Optymalizacji dokonano numerycznie z wykorzystaniem modułu Solver zawartego w pakiecie Excel. Posłużono się klasycznym rozumieniem metody najmniejszych kwadratów, tzn. minimalizowano sumę kwadratów różnic pomiędzy wartościami empirycznymi a wartościami teoretycznymi:

$$FC = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum \left(x_i - \hat{Q} \left(\frac{r}{n+1}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \right) \right)^2 \longrightarrow \min. \quad (7)$$

Należy zauważyć, że w miejscu prawdopodobieństw w rozkładzie lambda pojawiły się częstości, a także, co oczywiste i niezmiernie ważne, wartości empiryczne były uporządkowane od najmniejszych do największych. Umożliwiło to porównania dla poszczególnych kwantyli. „Dobroć” dopasowania danych sprawdzano wzrokowo na wykresie oraz analizowano wartość funkcji celu.

W przeprowadzonych symulacjach próbowano zweryfikować możliwość wykorzystania pakietu Excel z modułem optymalizacyjnym Solver do konstrukcji kart kontrolnych i przedziałów ufności dla mediany z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu lambda. W tym celu generowano 65-elementowe próby z różnych rozkładów, a następnie do tych prób (rozkładów) dopasowywano uogólniony rozkład lambda. Ze względu na niejednoznaczność uzyskiwanego rozwiązania każda optymalizacja dokonywana była kilkukrotnie, a za punkty startowe przyjmowano zarówno mo-

menty z próby, jak i punkty losowe. Uzyskanie zadowalającego wyniku estymacji umożliwiło adekwatną konstrukcję kart kontrolnych czy też przedziałów ufności.

4. Wyniki przeprowadzonych symulacji

Symulacyjną weryfikację możliwości zastosowania opisanego wyżej sposobu poszukiwania przedziału ufności dla mediany w dowolnym rozkładzie rozpoczęto od sprawdzenia możliwości estymacji parametrów rozkładu przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów w module *Solver*. W tym celu 4-krotnie wygenerowano 65 obserwacji pochodzących z rozkładu $N(10, 2)$, a następnie z rozkładu Cauchy'ego $(10, 2)$. Na podstawie danych dokonano estymacji uogólnionego rozkładu lambda z wykorzystaniem MNK i modułu Solvera dla różnych punktów startowych – wyniki zaprezentowano w tab. 3 i 4. W tabelach dla każdej z 4 prób przedstawiono rezultaty dwóch estymacji MNK (dwóch różnych punktów startowych) – najbardziej zróżnicowanych pod względem wyników. Natomiast na rysunkach 3, 4, 5 i 6 przedstawiono najlepiej i najgorzej dopasowane wyniki zaobserwowane w tab. 3 i 4. Łatwo zauważyć, że w przypadku gdy estymowano parametry uogólnionego rozkładu lambda dla danych pochodzących z rozkładu normalnego, wartości funkcji celu przyjmowały rezultaty zadowalające, a różnice pomiędzy wynikami osiągniętymi dla różnych punktów startowych były niewielkie. Potwierdzają to rys. 3 i 4, na których widać wyraźnie dobre dopasowanie danych empirycznych do teoretycznych. Niestety zupełnie inaczej wygląda sytuacja w przypadku, gdy estymowany był rozkład Cauchy'ego. Uzyskane wyniki dotyczące zarówno wartości funkcji celu, jak i dopasowania dla różnych punktów startowych są niesatysfakcjonujące (por. tab. 4 oraz rys. 5 i 6).

Tabela 3. Wyniki symulacji GLD (*General Lambda Distribution*) dla danych z rozkładu normalnego

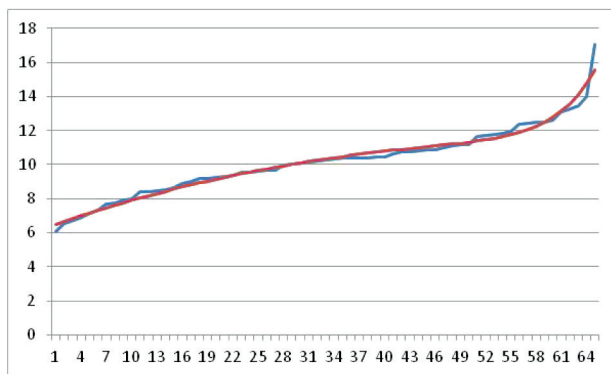
$N(10,2)$	FC	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1 próba	5,66	11,41	0,20	13,50	2,23
	4,77	9,73	0,00	0,00	0,00
2 próba	2,79	10,19	0,00	0,00	0,00
	2,79	10,20	0,00	0,00	0,00
3 próba	2,60	9,97	-0,11	-0,12	-0,11
	2,60	9,97	-0,11	-0,12	-0,11
4 próba	1,10	1,18	0,11	0,16	0,12
	1,10	10,18	0,11	0,16	0,12

Źródło: opracowanie własne.

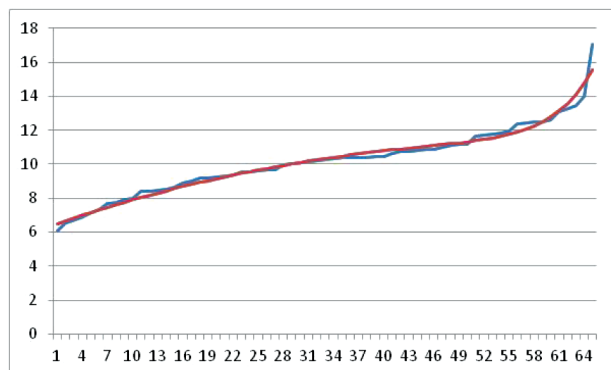
Tabela 4. Wyniki symulacji GLD dla danych z rozkładu Cauchy'ego

Cauchy (10, 2)	FC	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1 próba	4770,47	-1985,51	0,00	0,00	97,42
	3590,19	-2234,83	0,00	0,00	105,60
2 próba	1388,50	-2084,88	0,00	0,00	108,39
	1816,98	-1925,56	0,00	0,00	102,92
3 próba	962,15	9,59	0,00	54,12	43,48
	11556,89	-224,49	0,00	0,04	59,47
4 próba	620,52	-1701,65	0,00	0,00	130,65
	757,45	-1527,73	0,00	0,00	123,19

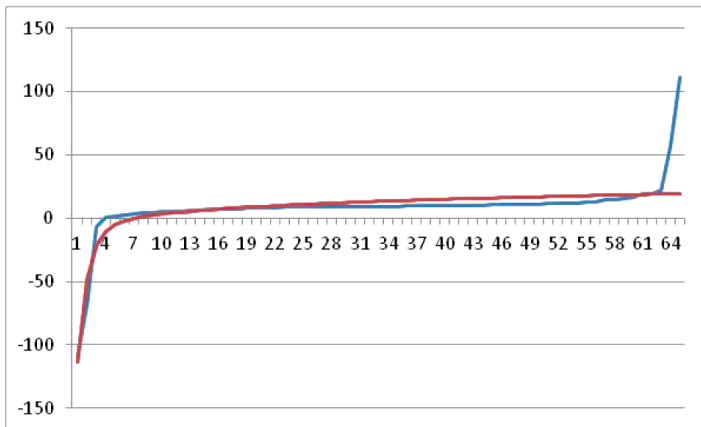
Źródło: opracowanie własne.

**Rys. 3.** Dopasowanie danych empirycznych do GLD – rozkład normalny

Źródło: opracowanie własne.

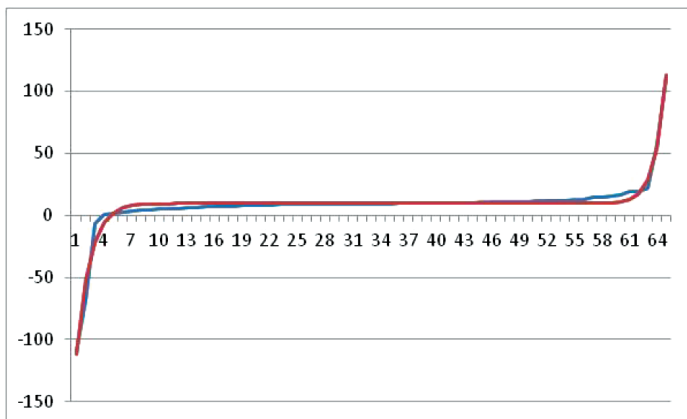
**Rys. 4.** Dopasowanie danych empirycznych do GLD – rozkład normalny

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Dopasowanie danych empirycznych do GLD rozkład Cauchy’ego

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Dopasowanie danych empirycznych do GLD – rozkład Cauchy’ego

Źródło: opracowanie własne.

Jeżeli zatem uznamy, że estymacja parametrów uogólnionego rozkładu lambda z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów dla danych pochodzących z rozkładu normalnego jest wystarczająco dobra, to możliwe jest skonstruowanie odpowiedniej karty kontrolnej dla mediany. Jeżeli bowiem dane przedstawione w postaci graficznej na rys. 3 zapisano za pomocą odpowiadającej funkcji kwantylowej: $Q(p) = x_p = 10,18 + \frac{p^{0,16} - (1-p)^{0,12}}{0,11}$, to możliwe jest odtworzenia wartości zmiennej dla zadanego prawdopodobieństwa. Przypomnijmy, że dane generowane

były z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej równej 10, zatem dla prawdopodobieństwa $p = 0,5$ wartość odpowiadającego temu prawdopodobieństwu kwantyla wynosi 10, a z uogólnionego rozkładu lambda uzyskuje się:

$$Q(0,5) = 10,18 + \frac{0,5^{0,16} - (1 - 0,5)^{0,12}}{0,11} = 9,99.$$

Bez problemu można zatem skonstruować, podobnie jak robili to Kanji i Arif, granice kart kontrolnych, przyjmując np. tzw. przedziały 3-sigmowe, zawierające 99,73% obserwacji, czy też prezentowane w tab. 5 przedziały 95-procentowe.

Tabela 5. Granice 95-procentowych kart kontrolnych dla mediany

$N(10,2)$	DLK	GLK
1 próba	6,62	15,02
	6,30	14,86
2 próba	5,39	14,67
	5,39	14,66
3 próba	5,07	14,76
	5,07	14,76
4 próba	6,16	13,51
	6,16	13,51

Źródło: opracowanie własne.

W tym celu do uogólnionego rozkładu lambda w miejscu prawdopodobieństwa wstawia się odpowiednio wartości $p = 0,025$ dla wyliczenia dolnej linii kontrolnej (DLK) oraz $p = 0,975$ dla górnej linii kontrolnej (GLK).

Przy wykorzystaniu uogólnionego rozkładu lambda możliwa jest także inna konstrukcja przedziału ufności dla mediany. Jeżeli bowiem, jak to opisano wcześniej, dla $n = 65$ obserwacji 95-procentowy przedział ufności realizowany jest odpowiednio przez 25 i 40 statystykę pozycyjną, to dla 65 obserwacji stanowią one kwantyle odpowiednio: $25/65 = 0,38416$ oraz $40/65 = 0,6154$. Korzystając teraz z uogólnionego rozkładu lambda, można wyznaczyć granice przedziału ufności dla poszczególnych wartości parametrów lambda. Wyniki te przedstawione w tab. 6 wskazują, że różne wyniki estymacji parametrów pozwalają na uzyskanie stosunkowo bliskich wartości dolnej (DGP) i górnej (GGP) granicy przedziałów ufności.

Tabela 6. Granice 95-procentowego przedziału ufności dla danych generowanych z rozkładu normalnego

$N(10,2)$	FC	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	DGP	GGP
1 próba	5,66	11,41	0,20	13,50	2,23	9,69	10,82
	4,77	9,73	0,00	0,00	0,00	9,51	10,61
2 próba	2,79	10,19	0,00	0,00	0,00	9,53	10,72
	2,79	10,20	0,00	0,00	0,00	9,53	10,73
3 próba	2,60	9,97	-0,11	-0,12	-0,11	9,41	10,49
	2,60	9,97	-0,11	-0,12	-0,11	9,41	10,49
4 próba	1,10	10,18	0,11	0,16	0,12	9,43	10,53
	1,10	10,18	0,11	0,16	0,12	9,43	10,53

Źródło: opracowanie własne.

Tak dobre wyniki uzyskane dla rozkładu normalnego skonfrontowano z wynikami, które uzyskano dla rozkładu Cauchy'ego (przypomnijmy, że wyniki estymacji uznano za niesatisfakcjonujące). Niestety, potwierdzone zostały wcześniejsze wnioski o braku dopasowania uogólnionego rozkładu lambda do danych pochodzących z rozkładu Cauchy'ego (zob. tab. 7).

Tabela 7. Granice 95-procentowego przedziału ufności dla danych generowanych z rozkładu normalnego

Cauchy (10, 2)	<i>FC</i>	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	DGP	GGP
1 próba	4 770,47	-1985,51	0,00	0,00	97,42	11,19	11,68
	3 590,19	-2234,83	0,00	0,00	105,60	10,85	12,35
2 próba	1 388,50	-2084,88	0,00	0,00	108,39	10,70	12,56
	1 816,98	-1925,56	0,00	0,00	102,92	10,88	12,62
3 próba	962,15	9,59	0,00	54,12	43,48	9,59	9,59
	11 556,89	-224,49	0,00	0,04	59,47	11,08	15,12
4 próba	620,52	-1701,65	0,00	0,00	130,65	10,66	13,13
	757,45	-1527,73	0,00	0,00	123,19	10,77	13,08

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8. Granice 95-procentowego przedziału ufności dla danych generowanych z rozkładu chi-kwadrat

Chi ² (10)	<i>FC</i>	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	DGP	GGP
1 próba	20,23	19,47	0,07	31,00	0,49	8,06	10,41
	34,38	6,59	0,00	0,00	0,00	8,05	10,32
2 próba	14,54	7,74	-0,14	-0,16	-0,34	7,84	10,00
	14,54	7,74	-0,14	-0,16	-0,34	7,84	10,00
3 próba	54,31	-14,61	-0,05	24,50	-0,24	6,98	9,57
	7,98	6,64	0,00	0,00	0,00	7,57	10,19
4 próba	10,27	13,19	0,10	7,62	1,47	8,38	11,02
	7,40	5,84	0,04	0,03	0,27	8,19	11,07

Źródło: opracowanie własne.

Powstało zatem pytanie, czy tak zły wynik dla rozkładu Cauchy'ego to przypadek czy też „grube ogony” tego rozkładu uniemożliwiają dokładniejszą estymację parametrów uogólnionego rozkładu lambda, co skutkuje brakiem możliwości wykorzystania uogólnionego rozkładu lambda do konstrukcji przedziałów ufności. Zdecydowano się zatem na powtórzenie tego typu symulacji dla rozkładu chi-kwadrat o 10 stopniach swobody, a następnie dla rozkładów typu dyskretnego, tzn. dla rozkładu dwumianowego oraz rozkładu Poissona. Wyniki prezentują tab. 8, 9 i 10.

Tabela 9. Granice 95-procentowego przedziału ufności dla danych generowanych z rozkładu Poissona

Poisson (10)	FC	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	DGP	GGP
1 próba	10,16	8,04	0,03	0,03	0,10	8,44	10,23
	9,14	11,79	0,14	10,50	1,65	8,57	10,36
2 próba	12,47	8,53	-0,05	-0,06	-0,10	8,30	9,97
	17,30	11,75	0,13	12,35	1,72	8,34	10,25
Poisson (2)							
1 próba	5,30	5,04	0,19	90,90	0,64	1,16	2,17
	6,63	3,13	0,30	1,29	0,21	1,11	2,19
2 próba	8,30	3,38	0,26	0,96	0,21	1,45	2,64
	7,08	3,31	0,25	12,39	1,74	1,62	2,58

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 10. Granice 95-procentowego przedziału ufności dla danych generowanych z rozkładu dwumianowego

Dwumianowy (200; 0,05)	FC	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	DGP	GGP
1 próba	5,68	8,95	0,17	0,44	0,53	8,27	10,19
	5,87	9,16	0,19	2,86	3,02	8,30	10,16
2 próba	15,96	6,63	0,09	0,09	0,44	7,92	10,11
	15,57	9,92	0,15	4,37	2,42	8,00	10,05
Dwumianowy (100; 0,1)							
1 próba	5,30	5,04	0,19	90,90	0,64	8,73	10,29
	6,63	3,13	0,30	1,29	0,21	8,84	10,38
2 próba	19,17	10,34	-0,27	-0,27	-0,30	9,84	11,05
	15,74	9,62	0,12	4,75	13,75	9,70	10,47

Źródło: opracowanie własne.

Należy zauważyć, że z wyjątkiem jednego przypadku wszystkie pozostałe przedziały ufności zawierały znaną teoretyczną wartość mediany. Zatem wyniki uzyskane dla rozkładu Cauchy'ego muszą być związane z charakterystycznymi własnościami tego rozkładu.

5. Podsumowanie

Wykorzystanie uogólnionego rozkładu lambda jest interesującą propozycją umożliwiającą konstrukcję przedziałów ufności dla dowolnych rozkładów. Znaczące ograniczenie jego zastosowania wynika z możliwości i dokładności estymacji parametrów modelu. Dla klasycznych rozkładów optymalizacje uzyskiwane z wykorzy-

staniem modułu Solver zawartego w pakiecie MS Excel wydawały się wystarczająco dobre. Niestety, w przypadku analizowanych rozkładów o „grubych ogonach” wyniki estymacji parametrów rozkładu lambda były dalekie od oczekiwań i tym samym bezzasadne było ich stosowanie. Niezwykle ważne w tej sytuacji wydaje się poszukiwanie takiej metody estymacji parametrów uogólnionego rozkładu lambda, która zapewniałaby najdokładniejsze dopasowanie modelu do danych, ponieważ tylko taki wynik gwarantuje poprawność konstrukcji przedziałów ufności i kart kontrolnych. Warto by porównać wyniki estymacji parametrów uzyskiwane za pomocą opisywanych w literaturze metod z wynikami uzyskanymi za pomocą prezentowanej klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Ważne wydaje się także przeprowadzenie większej liczby symulacji tak, by można było ocenić odporność uzyskiwanego estymatora przedziałowego.

Mimo opisanych niedogodności wydaje się, że opisana metoda konstrukcji przedziałów ufności i kart kontrolnych w przypadku nieznajomości rozkładu może okazać się skuteczna. Potwierdzeniem tego są przeprowadzone w pracy symulacje. Zauważmy jednak, że aby skutecznie korzystać z opisanego podejścia, uogólniony rozkład lambda musi być wystarczająco dobrze dopasowany do danych empirycznych.

Literatura

- Alloway J.A., Raghavachari M., *Control chart based on the Hodges-Lehmann estimator*, “Journal of Quality Technology” 1991.
- Burr I.W., *Parameters for a general system of distributions to match a grid of α_3 and α_6* , “Communications in Statistics” 1973, vol. 2.
- Janacek G.J., Meikle S.E., *Control charts based on medians*, “Journal of Royal Statistical Society” series D, 1997.
- Johnson N.L., *Systems of frequency curves generated by methods of translation*, “Biometrika” 1949, v. 36.
- Kanji G.K., Arif O.K., *Median rankit control chart by the quantile approach*, “Journal of Applied Statistics” 2000.
- King R.A., MacGillivray H.L., *A starship estimation method for the generalized Lambda distribution*, “Australian and New Zealand Journal of Statistic” 1999, no 41(3).
- Lakhany A., Mausser H., *Estimating the parameters of the generalized lambda distribution*, “Algo Research Quarterly” vol. 3, no 3, December 2000.
- Montgomery D.C., *Introduction to Statistical Quality Control*, 2000.
- Ramberg J.S., Tadikamalla P.R., Dudewicz E.J., Mykytka E.F., *A probability distribution and its uses in fitting data*, “Technometrics” 1979, vol. 21.
- Ramberg J.S., Schmeiser B.W., *An approximate method for generating asymmetric random variable*, “Communications of the ACM”, 1974.
- Tukey J.W., *The future of data analysis*, Ann. Math. Statist. 1962, V. 33.
- Zieliński R., *O średniej arytmetycznej i medianie*, „Matematyka Stosowana” tom 11/52, 2010.

CONFIDENCE INTERVALS FOR THE MEDIAN IN THE UNKNOWN DISTRIBUTION

Summary: In practical applications of methods of mathematical statistics the assumptions without which the use of each tool is debatable are often passed over. An important aspect is the search for methods that will be resistant to the change of the assumptions about the distributions. It is proposed to use generalized Lambda distribution to fit distribution and to construct control charts for median.

Keywords: confidence intervals, method of the smallest squares, quantiles, control charts, optimization.