

PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

254

Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski



Redaktorzy naukowi

Krzysztof Jajuga

Wanda Ronka-Chmielowiec



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2012

Recenzenci: Diarmuid Bradley, Jan Czekaj, Marek Gruszczyński, Jacek Lisowski, Paweł Miłobędzki,
Włodzimierz Szkutnik, Mirosław Szreder, Adam Szyszka, Waldemar Tarczyński,
Stanisław Wieteska, Tomasz Wiśniewski

Redaktor Wydawnictwa: Aleksandra Śliwka

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,

The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa

www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2012

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-293-2

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	9
Barbara Będowska-Sójka: Zastosowanie zmienności zrealizowanej i modeli typu ARCH w wyznaczaniu wartości zagrożonej	11
Jacek Bialek: Zastosowanie statystycznych indeksów łańcuchowych do oceny przeciętnego zwrotu grupy OFE	23
Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz: Zastosowanie modelu logitowego i modelu regresji Coxa w analizie zmian cen akcji spółek giełdowych w wyniku kryzysu finansowego	33
Katarzyna Byrka-Kita: Premia z tytułu kontroli na polskim rynku kapitałowym – wyniki badań	42
Krzysztof Echaust: Analiza przekroczeń wysokości depozytów zabezpieczających na podstawie kontraktów futures notowanych na GPW w Warszawie.	52
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Rentowność inwestycji na rynku regulowanym i w alternatywnym systemie obrotu w Polsce	61
Daniel Iskra: Wartość zagrożona instrumentu finansowego szacowana przedziałowo	74
Bogna Janik: Analiza stóp zwrotu z inwestycji w indeksy akcji spółek społecznie odpowiedzialnych	83
Paweł Kliber: Niestacjonarność aktywności transakcyjnej na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie	93
Krzysztof Kowalke: Ocena przydatności rekomendacji giełdowych opartych na metodzie DCF na przykładzie spółek budowlanych	103
Mieczysław Kowerski: Modele selekcji próby stóp dywidend spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie	113
Dominik Krężolek: Granica efektywności portfeli inwestycyjnych a indeks ogona rozkładu stopy zwrotu – analiza empiryczna na przykładzie GPW w Warszawie	124
Monika Kubik-Kwiatkowska: Znaczenie raportów finansowych dla wyceny spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie SA	133
Agnieszka Majewska: Wycena opcji menedżerskich – wybrane problemy ...	142
Sebastian Majewski: Pomiar nastroju inwestycyjnego jako metoda wspomagająca strategię inwestycyjne	152
Piotr Manikowski: Cykle ubezpieczeniowe w Europie Środkowej	162

Artur Mikulec: Metody oceny wyników inwestycyjnych przy braku normalności rozkładu stóp zwrotu	171
Joanna Olbryś: Tarcie w procesach transakcyjnych i jego konsekwencje	181
Andrzej Paliński: Spłata zadłużenia kredytowego w ujęciu teoriogrowym ...	190
Monika Papież, Stanisław Wanat: Modele autoregresji i wektorowej autoregresji w prognozowaniu podstawowych zmiennych charakteryzujących rynek ubezpieczeń działu II	199
Daniel Papla: Przykład zastosowania metod analizy wielowymiarowej w analizie zarażania rynków finansowych	209
Tomasz Pisula: Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do prognozowania upadłości przedsiębiorstw	219
Agnieszka Przybylska-Mazur: Wybrane reguły nastawione na cel a prognozowanie wskaźnika inflacji	235
Paweł Siarka: Wykorzystanie modeli scoringowych w bankowości komercyjnej.....	246
Rafał Siedlecki: Struktura kapitału w cyklu życia przedsiębiorstwa	262
Anna Sroczyńska-Baron: Wybór portfela akcji z wykorzystaniem narzędzi teorii gier.....	271
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Zastosowania kopuli niesymetrycznych w modelowaniu ekonomicznym	281
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Zastosowanie estymatora k -to-rekordowego do szacowania wartości narażonej na ryzyko	289
Piotr Staszewicz: Multi entry framework for financial and risk reporting...	298
Anna Szymańska: Czynniki decydujące o wyborze ubezpieczyciela w przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych AC.....	310
Sławomir Śmiech, Wojciech Zysk: Oceny ratingowe jako element konkurencyjności wybranych systemów gospodarczych – weryfikacja na przykładzie agencji Fitch.....	323
Rafał Tuzimek: Wpływ wypłat dywidendy na wartość akcji spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie	333
Jacek Welc: Rewersja do średniej dynamiki przychodów oraz rentowności spółek a zmiany relatywnej dynamiki zysków	347
Ryszard Węgrzyn: Zastosowanie delty „wolnej od modelu” w hedgingu opcyjnym	356
Stanisław Wieteska: Wyładowania atmosferyczne jako element ryzyka w ubezpieczeniach majątkowo-osobowych w polskim obszarze klimatycznym.....	367
Alicja Wolny-Dominiak: Modelowanie liczby szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych w przypadku występowania dużej liczby zer.....	381

Summaries

Barbara Będowska-Sójka: Modeling value-at-risk when realized volatility and ARCH-type models are used.....	22
Jacek Bialek: The application of chain indices to evaluate the average rate of return of a group of Open Pension Funds.....	32
Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz: The application of the logit model and the Cox regression model in the analysis of financial crisis related price changes of listed companies' shares	41
Katarzyna Byrka-Kita: Control premium on Polish capital market – empirical evidence	51
Krzysztof Echaust: Analysis of margin exceedances on the basis of futures contracts quoted on the Warsaw Stock Exchange.....	60
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Return on investment on a regulated market and multilateral trading facility in Poland	73
Daniel Iskra: Confidence interval for Value at Risk.....	82
Bogna Janik: Analysis of rates of return on investments in equity SRI indices	92
Paweł Kliber: Non-stationarity in transaction activity on the Warsaw Stock Exchange.....	102
Krzysztof Kowalke: Assessment of the usefulness of Stock Exchange recommendations based on the DCF method on the example of construction companies.....	112
Mieczysław Kowerski: The sample selection models of dividend yield of companies quoted on the Warsaw Stock Exchange.....	123
Dominik Krężolek: The efficient frontier of investment portfolios and the tail index of distribution of returns – an empirical analysis on the WSE	132
Monika Kubik-Kwiatkowska: Value relevance of financial reporting on the Warsaw Stock Exchange.....	141
Agnieszka Majewska: The value of employee stock options – selected problems.....	151
Sebastian Majewski: Measuring of investment sentiment as a method of supporting investment strategies	161
Piotr Manikowski: Insurance cycles in Central Europe.....	170
Artur Mikulec: Investment performance evaluation methods in the absence of normality of the rates of return.....	180
Joanna Olbryś: Friction in trading processes and its implications	189
Andrzej Paliński: The game theoretic approach to bank credit repayment....	198
Monika Papież, Stanisław Wanat: The application of autoregressive models and vector autoregressive models in forecasting basic variables on the non-life insurance market	208

Daniel Papla: Example of using multidimensional methods in analyzing the contagion on the financial markets	218
Tomasz Pisula: Application of artificial neural networks for forecasting corporate bankruptcy	234
Agnieszka Przybylska-Mazur: Selected targeting rules and forecasting inflation rate	245
Paweł Siarka: The use of scoring models in commercial banking.....	261
Rafał Siedlecki: The structure of capital in the company life cycle	270
Anna Sroczyńska-Baron: The choice of shares portfolio based on the theory of games.....	280
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Asymmetric copulas applications in economic modelling.....	288
Michał Stachura, Barbara Wodecka: Value-at-Risk estimation using ‘ k -th record’ estimator	297
Piotr Staszewicz: Zapis poczwórny jako mechanizm pozwalający na integrację sprawozdawczości finansowej i ostrożnościowej	309
Anna Szymańska: Factors determining a choice of an insurer in case of motor hull insurance	322
Sławomir Śmiech, Wojciech Zysk: Assessments of rating as part of competitiveness of selected economies – verification on the example of Fitch agency	332
Rafał Tuzimek: Effect of dividend payments on the value of shares listed on the Warsaw Stock Exchange	346
Jacek Welc: Impact of mean-reversion of sales growth and profitability on the relative growth of corporate earnings	355
Ryszard Węgrzyn: Application of model free delta to option hedging	366
Stanisław Wieteska: Lightning as an element of risk in non-life insurance in the Polish area of climate.....	380
Alicja Wolny-Dominiak: Zero-inflated claim count modeling in automobile insurance. Case Study	390

Ryszard Węgrzyn

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

ZASTOSOWANIE DELTY „WOLNEJ OD MODELU” W HEDGINGU OPCYJNYM

Streszczenie: Artykuł przedstawia rezultaty analizy porównawczej skuteczności strategii hedgingowej opartej na delcie „wolnej od modelu” oraz skuteczności strategii opartej na delcie z modelu Blacka-Scholesa-Mertona. Uzyskane rezultaty empiryczne w odniesieniu do polskiego rynku akcji wskazały na brak istotnej przewagi któregośkolwiek z zaprezentowanych podejść. Hedging z zastosowaniem delty „wolnej od modelu” nie okazał się zatem skuteczniejszym rozwiązaniem od hedgingu z deltą BSM.

Słowa kluczowe: opcja, hedging, delta.

1. Wstęp

Istotą podjętego w opracowaniu problemu jest określenie i porównanie skuteczności strategii hedgingowej opartej na delcie „wolnej od modelu” ze strategią opartą na delcie z modelu Blacka-Scholesa-Mertona (BSM) na rynku polskim. Wskaźnik delta jest miarą wrażliwości wartości opcji na zmiany ceny instrumentu podstawowego i jest interpretowany jako zmiana wartości opcji przypadająca na jednostkową zmianę ceny instrumentu podstawowego. Wskaźnik ten jest często szacowany za pomocą najpopularniejszego modelu wyceny opcji BSM, ale może być także szacowany za pomocą innych bardziej zaawansowanych modeli. Model BSM, w przeciwieństwie do wielu innych modeli, nie zapewnia poprawnego dopasowania do danych rynkowych, zwłaszcza do tzw. uśmiechu zmienności (*volatility smile*)¹. W tym kontekście warto zwrócić uwagę na zaproponowaną przez D.B. Batesa [2005] i C. Alexander [2008, s. 296] koncepcję „wolnej od modelu” (*model free*) delty standardowej opcji europejskiej jako skorygowanej delty BSM.

¹ Określenie „uśmiech zmienności” pochodzi od wykresu zmienności implikowanej opcji względem ich cen wykonania, który układa się w kształt uśmiechu. Rynkowa zmienność implikowana jest zmiennością wyliczaną zwrótnie z modelu BSM po podstawieniu rynkowej ceny opcji. Modelowa zmienność implikowana jest natomiast wyliczana po podstawieniu ceny opcji oszacowanej za pomocą określonego modelu wyceny.

Celem opracowania jest zaprezentowanie procedury zastosowania alternatywnie określonej delty „wolnej od modelu” w hedgingu opcyjnym, a szczególnie określenie skuteczności opartego na tej delcie hedgingu na rynku polskim w kontekście skuteczności hedgingu z deltą BSM.

W badaniu postawiono podstawową hipotezę, że skuteczniejszym podejściem jest hedging oparty na delcie „wolnej od modelu”. Delta ta bowiem uwzględnia uśmiech rynkowej zmienności implikowanej w przeciwieństwie do delty BSM.

Szczegółowa analiza została oparta na danych z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie dotyczących opcji na WIG20. Aby określić nachylenia uśmiechu rynkowej zmienności implikowanej, za każdym razem do danych dopasowywano funkcję kwadratową za pomocą metody estymacji Levenberga-Marquardta (nieliniowej metody najmniejszych kwadratów) przy zastosowaniu modułu estymacji nieliniowej programu Statistica. Skuteczność hedgingu została w obydwu przypadkach określona na podstawie procentowych zmian wartości portfela zabezpieczonego skorygowanych o stopę wolną od ryzyka. Do oceny skuteczności posłużyły parametry rozkładu statystycznego, a do określenia istotności różnic zastosowano test zgodności rozkładu Kołmogorowa-Smirnowa przy wykorzystaniu programu Stata.

Uzyskane rezultaty empiryczne w odniesieniu do rynku polskiego wskazały na brak jednoznacznej przewagi któregośkolwiek z zaprezentowanych podejść. Hedging z zastosowaniem delty „wolnej od modelu” nie okazał się zatem skuteczniejszym rozwiązaniem od hedgingu z deltą BSM.

Praca składa się z dwóch zasadniczych części oraz wstępu i zakończenia. W pierwszej z nich zaprezentowano szczegółowo koncepcję delty „wolnej od modelu”, wskazując na ważną własność inwariantnych skalowo modeli wyceny opcji, tzn. własność wskaźnika zabezpieczenia wolnego od modelu (*model free hedge ratio property*). W części drugiej natomiast przedstawiono procedurę i wyniki szczegółowych obliczeń dotyczących skuteczności hedgingu oraz wnioski wynikające z porównania analizowanych podejść.

2. Koncepcja delty „wolnej od modelu”

Jednym z głównych zastosowań modeli wyceny opcji, obok prognozowania cen, jest zabezpieczanie. Dobry model wyceny może okazać się jednak złym modelem hedgingowym (zob. [Wilkens 2005]) albo odwrotnie. Z drugiej strony wybór modelu zależy często od jego zalet w odniesieniu zarówno do wyceny, jak i zabezpieczania. W tym kontekście bardzo ważnego znaczenia nabierają niedawne osiągnięcia w zakresie wskaźników zabezpieczenia otrzymywanych z modeli wyceny dla opcji na zbywalne aktywa (instrumenty), do których zalicza się waluty, udziały (akcje), indeksy udziałowe (akcyjne) oraz towary. Wykazano mianowicie, że wskaźniki zabezpieczenia ceny prawie wszystkich opcji, otrzymywane z większości modeli, które są obecnie wykorzystywane, są takie same. Na przykład wszystkie następujące modele mają takie same delty i takie same gammy [Alexander 2008, s. 290]: model

zmienności stochastycznej Hulla i White'a, model zmienności stochastycznej Hestona, praktycznie jakakolwiek inna dyfuzja wariancji albo odchylenia standardowego, dyfuzja mieszaniki logarytmiczno-normalnej (*lognormal mixture diffusion*), wiele innych parametrycznych deterministycznych modeli zmienności, modele oparte na procesach Lévy'ego, modele ze skokami ceny lub zmienności, standardowe modele LIBOR bez zmienności stochastycznej i skoków albo ze zmiennością stochastyczną lub skokami.

Jeśli dwa tego typu modele mają, jak się wydaje, różne delty i gammy, to wynika to jedynie z błędu kalibrowania. To znaczy, że dwa modele nie mają identycznych dopasowań do danych rynkowych. Własność taka została nazwana własnością wskaźnika zabezpieczenia wolnego od modelu (*model free hedge ratio property*).

Rozwijając zagadnienia podejmowane przez R. Mertona [1973], D.B. Bates [2005] wykazał, że jeśli proces ceny jest inwariantny skalowo (*scale invariant*)² i cena opcji (funkcja wypłaty) w każdym momencie, w terminie i przed terminem wygaśnięcia, jest jednorodna stopnia 1 względem ceny aktywa podstawowego i ceny wykonania, wtedy delta i gamma opcji są wolne od modelu i w przypadku opcji standardowych powiązane z nachyleniem i krzywizną uśmiechu zmienności implikowanej.

C. Aleksander i L. Nogueira [2007a] rozszerzyli ten wynik do jakiegokolwiek przypadkowego prawa (*contingent claim*) wycenianego przez proces inwariantny skalowo, pod warunkiem że jego funkcja wypłaty jest jednorodna jakiegoś stopnia względem ceny instrumentu podstawowego, ceny wykonania opcji i jakiegokolwiek innej charakterystyki opcji, np. bariery przy opcjach barierowych. Wtedy delta i gamma są wolne od modelu. Zwrócili przy tym uwagę, że praktycznie każde prawo ma funkcję wypłaty, która jest jednorodna jakiegoś stopnia.

C. Aleksander i L. Nogueira [2007b] uznali, że niemal wszystkie używane zwykle modele są inwariantne skalowo. Wykazali oni [2007a], że praktycznie każdy model zmienności stochastycznej (*Stochastic Volatility – SV*), w którym proces cenowy jest zapisany w formie geometrycznej, ma własność wolnego od modelu wskaźnika zabezpieczenia i że własność ta jest równoznaczna z własnością zmiennego (*floating*) uśmiechu zmienności. Wyniki te rozszerzyli na praktycznie każde amerykańskie lub europejskie przypadkowe prawo, wymagając tylko, aby funkcja wypłaty z opcji była jednorodna jakiegoś stopnia w wymiarze ceny.

Pewnym wyjątkiem wśród modeli wyceny opcji jest model BSM, który jest modelem inwariantnym skalowo, ale jego zmiennosc jest stała. Mimo że wszystkie inwariantne skalowo modele SV mają własność zmiennego uśmiechu zmienności (*floating smile property*).

²R. Merton [1973] określił, że proces cenowy jest inwariantny skalowo wtedy i tylko wtedy, gdy krańcowy rozkład zwrotów jest niezależny od poziomu ceny. C. Aleksander i L. Nogueira [2007a] przedstawili jednak sposób na sprawdzenie, czy model wyceny jest inwariantny skalowo bez znajomości rozkładu zwrotów. Stwierdzili oni, że rodzaj napędzającego procesu nie ma większego znaczenia, natomiast jedyną rzeczą, która jest decydująca o inwariancji skalowej, jest to, że proces musi zależeć tylko od względnej ceny i czasu.

Dało to podstawę do określenia alternatywnej formy dla delty „wolnej od modelu” odnoszącej się tylko do opcji standardowych w podany niżej sposób. Jedną z własności zmienności implikowanej standardowej opcji europejskiej ma postać:

$$\theta(K, T|S, t) = \theta(uK, T|uS, t),$$

gdzie: $\theta(K, T|S, t)$ – oznacza zmienność implikowaną standardowej opcji europejskiej z ceną wykonania K i okresem do wygaśnięcia T ,
 S – cenę instrumentu podstawowego,
 t – termin (punkt czasowy),
 u – jakąkolwiek dodatnią liczbą rzeczywistą.

Na jej podstawie można przy zastosowaniu twierdzenia Eulera o funkcjach jednorodnych i pewnych przekształceniach otrzymać następujące równanie na wrażliwość modelowej zmienności implikowanej względem zmian ceny instrumentu podstawowego:

$$\theta_S(K, T|S, t) = -\frac{K}{S} \theta_K(K, T|S, t),$$

gdzie: $\theta_K(K, T|S, t)$ oznacza wrażliwość modelowej zmienności implikowanej względem zmian ceny wykonania opcji. Relacja ta potwierdza, że modelowa zmienność implikowana jest „wolna od modelu” (zob. [Alexander 2008, s. 294]).

Rynkowa zmienność implikowana $\theta^m(K, T|S)$ jest wyliczana z formuły BSM przez podstawienie rynkowej ceny opcji. Jeżeli zamiast ceny rynkowej zostanie zastosowana cena standardowej opcji europejskiej, określona na przykład przez model zmienności stochastycznej (SV), otrzymana zmienność będzie modelową zmiennością implikowaną. Zmienność tę, przy zastosowaniu modelu SV oznaczoną jako $\theta(K, T|S, \lambda)$, można określić z relacji:

$$f(K, T|S, \sigma, \lambda) \equiv f^{BSM}(K, T|S, \theta(K, T|S, \lambda)),$$

gdzie zarówno S , jak i σ są procesami stochastycznymi, a wektor λ oznacza parametry modelu. Zatem modelowa zmienność implikowana jest pojedynczą liczbą, która przedstawia rodzaj średniej procesu zmienności w okresie ważności opcji, gdy aktualna cena instrumentu podstawowego wynosi S .

Stosując zasadę łańcuchową do podanej relacji, można, przy założeniu, że model jest dobrze skalibrowany, wyprowadzić modelową (SV) deltę standardowej opcji europejskiej jako skorygowaną deltę BSM o postaci:

$$\delta_{SV}(K, T|S) = \delta_{BSM}(K, T|S) + \nu_{BSM}(K, T|S) \theta_S(K, T|S, \lambda),$$

gdzie: $\delta_{BSM}(K, T|S)$ oznacza wskaźnik delta z modelu BSM, $\nu_{BSM}(K, T|S)$ – wskaźnik vega z modelu BSM interpretowany jako zmiana ceny opcji przypadająca na jednostkową zmianę zmienności instrumentu podstawowego,

$$\theta_s(K, T|S, \lambda) = \frac{\partial \theta(K, T|S, \lambda)}{\partial S}$$

oznacza z kolei wrażliwość modelowej zmienności implikowanej na zmiany w cenie instrumentu podstawowego.

Modele zmienności stochastycznej są kalibrowane do zmiennych cen rynkowych standardowych opcji europejskich. Stąd ceny standardowych opcji europejskich z modeli SV są „w przybliżeniu równe” ich cenom rynkowym, które są określane przez uczestników rynku odpowiednio do podaży i popytu. Podobnie modelowa zmienność implikowana powinna być bliska rynkowej zmienności implikowanej. Co więcej, celem kalibracji modelu jest często minimalizacja pierwiastka średniego ważonego błędu kwadratowego pomiędzy modelową a rynkową zmiennością implikowaną [Alexander 2008, s. 268]. Jeśli model ma wystarczającą liczbę parametrów, różnice pomiędzy uśmiechem rynkowym a uśmiechem modelowym będą bardzo małe w momencie kalibrowania.

Jeżeli model jest dobrze skalibrowany do rynkowej zmienności implikowanej, to można zapisać: $\theta(K, T|S, t) \approx \theta^m(K, T|S, t)$. Zatem zapisaną wcześniej wrażliwość modelowej zmienności implikowanej względem zmian ceny instrumentu podstawowego można przedstawić jako:

$$\theta_s(K, T|S, t) \approx -\frac{K}{S} \theta'_K(K, T|S, t),$$

gdzie $\theta'_K(K, t|S, t)$ jest nachyleniem uśmiechu rynkowej zmienności implikowanej. Jedyna różnica pomiędzy różnymi podejściami wynika zatem z błędów kalibrowania.

Wolną od modelu deltę standardowej opcji europejskiej można więc zapisać jako skorygowaną deltę BSM o postaci:

$$\delta(K, T|S, t) \approx \delta_{BSM}(K, T|S, t) - \nu_{BSM}(K, T|S, t) \frac{K}{S} \theta'_K(K, T|S, t),$$

gdzie $\delta(K, T|S, t) \equiv f_s(K, T|S, t)$ jest „wolną od modelu” deltą dla modelu inwariantnego skalowo, a oszacowanie jest wynikiem błędu kalibrowania [Alexander 2008, s. 296].

To pokazuje, że delta „wolna od modelu” jest większa niż delta BSM, gdy skośność rynkowej zmienności implikowanej ma ujemne nachylenie, tj. gdy $\theta'_K(K, T|S, t) < 0$, i mniejsza niż delta BSM, gdy skośność rynkowej zmienności implikowanej ma dodatnie nachylenie, tj. gdy $\theta'_K(K, T|S, t) > 0$.

W swoim opracowaniu D.B. Bates [2005] wykazał, że różnica pomiędzy deltą BS i deltą modelu zgodnego z uśmiechem zależy od nachylenia uśmiechu zmienności implikowanej. Na rynkach akcji, gdzie uśmiech zwykle ma wyraźny ujemny skos, delta BS jest mniejsza niż delta zgodna z uśmiechem, z wyjątkiem może dla opcji z wysoką ceną wykonania, gdzie uśmiech może mieć nachylenie dodatnie.

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę, że model BSM jest inwariantny skalowo, ale wskaźniki zabezpieczenia BSM są często bardzo różne od wskaźników zabezpieczenia otrzymywanych z innych modeli inwariantnych skalowo. Dzieje się tak dlatego, że nie można dopasować wszystkich cen opcji standardowych do jednego parametru zmienności. Innymi słowy, model BSM daje niepoprawne dopasowanie do danych rynkowych i dlatego jego wskaźniki zabezpieczenia różnią się od tych z innych modeli inwariantnych skalowo, które są zazwyczaj dobrze skalibrowane do uśmiechu zmienności.

3. Skuteczność hedgingu opcyjnego z zastosowaniem delty „wolnej od modelu”

Zaprezentowana koncepcja wolnej od modelu delty standardowej opcji europejskiej oparta na korekcie delty BSM ma bardzo ważną zaletę, polegającą na prostocie zastosowania. Sam model BSM jest bowiem modelem prostym w zastosowaniu, natomiast nachylenie uśmiechu rynkowej zmienności implikowanej można określać każdorazowo, dopasowując do danych odpowiednią funkcję matematyczną. Funkcją taką, jak się wydaje, może być funkcja kwadratowa, której wykres, w przypadku osiągnięcia minimum, przypomina właśnie uśmiech.

Aby określić skuteczność hedgingu delty z zastosowaniem delty „wolnej od modelu”, przeprowadzono analizę w odniesieniu do indeksu WIG20 i opcji na WIG20 będących w obrocie na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Terminy tworzenia portfeli zabezpieczonych z wykorzystaniem delty wolnej od modelu zostały dobrane zgodnie z okresami do wygaśnięcia (od $T = 35$ do $T = 44$) opcji marcowych, czerwcowych, wrześniowych i grudniowych w latach 2008-2009. W ten sposób terminy budowy portfeli zabezpieczonych przypadły m.in. na miesiące: styczeń i październik 2008 r. oraz styczeń 2009 r., w których to miesiącach dochodziło do znacznych zmian indeksu WIG20 oraz zmienności implikowanej (zob. [Węgrzyn 2010]). Łącznie budowa określonych portfeli zabezpieczonych miała miejsce w 80 różnych terminach, obejmujących: 18-31.01.2008 r., 15-28.04.2008 r., 17-31.07.2008r., 17-30.10.2008r., 19-30.01.2009r., 16-29.04.2009r., 20-31.07.2009r. oraz 16-29.10.2009 r.

Do analizy wykorzystano dane z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie dotyczące poziomów indeksu WIG20, cen opcji na WIG20, a także wyliczanych przez giełdę na podstawie modelu BSM wskaźników delta, vega oraz zmienności implikowanej. Do określania delty wolnej od modelu, zgodnie z podaną formułą, zastosowano wyliczane przez giełdę wskaźniki delta i vega, natomiast nachylenie

uśmiechu rynkowej zmienności implikowanej było określane każdorazowo przez dopasowanie do danych funkcji kwadratowej. O wyborze tej funkcji zdecydowała wstępna analiza kształtowania się uśmiechu zmienności implikowanej.

Dopasowanie funkcji kwadratowej do uśmiechu zmienności odbywało się za pomocą metody estymacji Levenberga-Marquardta (nieliniowej metody najmniejszych kwadratów) przez zastosowanie modułu estymacji nieliniowej programu Statistica. Za każdym razem po oszacowaniu parametrów funkcji kwadratowej obliczano pierwsze pochodne tej funkcji (nachylenia) w punktach odpowiadających poziomom cen wykonania analizowanych w danym terminie opcji.

Budowa portfeli zabezpieczonych z zastosowaniem delty wolnej od modelu polegała na zakupie jednego indeksu WIG20 (akcji wchodzących w skład indeksu) oraz sprzedaży $1/\delta$ opcji kupna na indeks WIG20 z najbliższym terminem wygaśnięcia. W każdym wybranym terminie budowy portfela zabezpieczonego analiza obejmowała opcję kupna z kursem wykonania najbliższym poziomowi indeksu (\sim ATM) oraz 5 opcji z kursami wykonania na niższym poziomie (ATM-100, ATM-200, ..., ATM-500) i 5 opcji z kursami na wyższym poziomie (ATM+100, ATM+200, ..., ATM+500).

Równoległe do budowy portfeli zabezpieczonych z zastosowaniem delty wolnej od modelu były budowane portfele zabezpieczone z zastosowaniem standardowej delty BSM. Umożliwiło to dalszą analizę porównawczą uzyskanych wyników.

Aby określić oraz porównać skuteczność hedgingu delta z zastosowaniem delty „wolnej od modelu” ze skutecznością hedgingu delta z zastosowaniem delty BSM, wyliczono dla każdego przypadku błędy hedgingu. Przyjmując, że portfel zabezpieczony powinien przynosić dochód na poziomie równym stopie procentowej wolnej od ryzyka, błędy hedgingu obliczono jako zmiany procentowe wartości portfela zabezpieczonego na następnej sesji skorygowane o tę stopę. Łącznie, uwzględniając braki danych, uzyskano 834 obserwacje określające skuteczność hedgingu przy zastosowaniu delty „wolnej od modelu” oraz 834 obserwacje określające skuteczność przy zastosowaniu delty BSM. W celu uogólnienia wyników badań na podstawie błędów hedgingu obliczono średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe dla przeanalizowanych grup opcji w odniesieniu do zastosowanej delty BSM oraz delty „wolnej od modelu”. Wyniki obliczeń zostały przedstawione w tab. 1.

Na podstawie tab. 1 trudno jest jednak zaobserwować jednoznaczne prawidłowości. Średnie błędy hedgingu w przypadku niektórych grup opcji wypadają na korzyść hedgingu z deltą „wolną od modelu”, ale w przypadku innych grup opcji na korzyść hedgingu z deltą BSM (zob. rys. 1). Podobnie jest z odchyleniem standardowym, chociaż tutaj zdecydowanie korzystniej wypada hedging z deltą BSM. W przypadku grupy opcji o największej płynności, czyli opcji \sim ATM, zarówno średnia, jak i odchylenie standardowe błędów hedgingu wskazują na hedging z deltą BSM jako skuteczniejsze rozwiązanie.

W celu określenia istotności statystycznej różnic błędów hedgingu w analizowanych podejściach zastosowano test zgodności rozkładu Kołmogorowa-Smirnowa

Tabela 1. Średnie oraz odchylenia standardowe błędów hedgingu dla przeanalizowanych grup opcji

Grupy opcji	Delta BSM		Delta wolna od modelu	
	średnia	odchylenie standardowe	średnia	odchylenie standardowe
ATM-500	0,0777%	0,4415%	-0,1387%	1,3040%
ATM-400	-0,0315%	5,8188%	0,2951%	5,0988%
ATM-300	0,0841%	3,0254%	0,3397%	3,4100%
ATM-200	-0,0990%	1,0081%	-0,0553%	1,0183%
ATM-100	-0,0455%	0,9919%	-0,0743%	1,0704%
~ ATM	-0,0690%	0,8267%	-0,1080%	1,0233%
ATM+100	-0,0630%	0,7771%	-0,0485%	0,8486%
ATM+200	0,1240%	1,1272%	0,1010%	1,1696%
ATM+300	-0,0069%	1,1220%	-0,0214%	1,1212%
ATM+400	0,1591%	1,4699%	0,1673%	1,5392%
ATM+500	0,1444%	1,5807%	0,2080%	1,7659%

gdzie: ~ATM – opcje z kursami wykonania najbliższymi danym poziomom indeksu, ATM-100, ATM-200, ... – opcje z kursami wykonania niższymi o odpowiednio 100, 200 itd. punktów indeksowych, ATM+100, ATM+200, ... – opcje z kursami wykonania wyższymi o odpowiednio 100, 200 itd. punktów indeksowych.

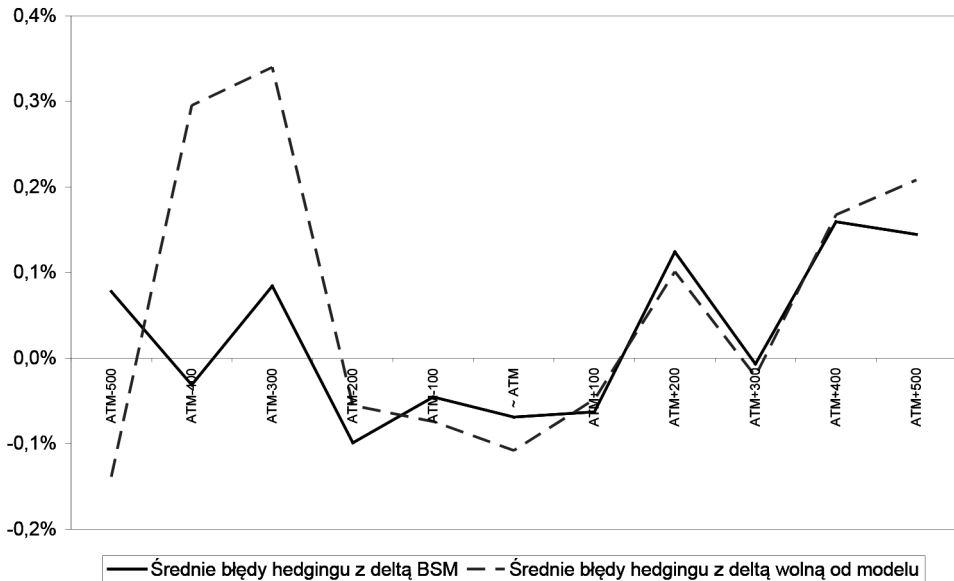
Źródło: opracowanie własne.

dla dwóch prób. Obliczona za pomocą programu Stata statystyka D wyniosła w tym wypadku 0,0264, natomiast wartość $p = 0,934$. Oznacza to, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Można zatem wyciągnąć wniosek, że błędy hedgingu w tych dwóch podejściach nie różnią się między sobą w sposób istotny statystycznie.

Uzyskane w odniesieniu do rynku polskiego wyniki korespondują z rozważaniami literaturowymi, dotyczącymi porównania delty BSM z deltą „wolną od modelu”. Modelową (SV) deltę standardowej opcji europejskiej określono wcześniej jako skorygowaną deltę BSM o postaci:

$$\delta_{SV}(K, T|S) = \delta_{BSM}(K, T|S) + \nu_{BSM}(K, T|S)\theta_S(K, T|S, \lambda).$$

Ponieważ vega BSM jest dodatnia, znak składnika skorygowania delty BSM w podanej formule zależy od znaku wrażliwości cenowej zmienności modelowej $\theta_S(K, T|S, \lambda)$. Jeśli ona ma taki sam znak jak wrażliwość cenowa zmienności rynkowej $\theta_S^m(K, T|S)$, tj. jeśli uśmiech rynkowy i uśmiech modelowy poruszają się w tym samym kierunku w odpowiedzi na zmiany w S , wtedy delta modelowa będzie podobna do delty rynkowej.



Rys. 1. Średnie błędy hedgingu dla przeanalizowanych grup opcji

Źródło: opracowanie własne.

Na rynkach akcji (i na wielu innych rynkach, poza walutowymi i niektórymi towarowymi) korelacja cena–zmienność jest ujemna, dlatego zwykle $\theta_s^m(K, T|S) < 0$. Stąd w tym wypadku powinno być: $\theta_s(K, T|S, \lambda) < 0$, bowiem inaczej model SV nie będzie właściwie odzwierciedlał empirycznie zaobserwowanych ruchów w rynkowych zmiennościach implikowanych. Jednak w modelach SV dla jakichkolwiek aktywów zbywalnych $\theta_s(K, T|S, \lambda) > 0$, kiedy uśmiech zmienności implikowanej ma ujemne nachylenie, i $\theta_s(K, T|S, \lambda) < 0$, kiedy uśmiech zmienności implikowanej ma dodatnie nachylenie. Na rynkach akcji, gdzie wyraźnie dominuje ujemna skośność, delta modelowa SV będzie większa niż delta BSM, podczas gdy delta rynkowa będzie mniejsza od delty BSM [Alexander 2008, s. 276].

Wyniki empiryczne podawane przez C. Alexander i L. Nogueira [2007a] wskazują, że delta BS i gamma BS wypadają lepiej w indeksowym hedgingu opcyjnym niż wolne od modelu wskaźniki zabezpieczenia z modeli zgodnych z uśmiechem. Co więcej, stwierdzili oni, że w przypadku hedgingu delta i hedgingu delta-gamma w zakresie opcji na indeks akcyjny każdy inwariantny skalowo model będzie działał gorzej niż model Blacka-Scholesa. Ponieważ wyniki badań wskazują, że delta BSM jest zbyt duża – nadzabezpiecza opcje indeksowe (zob. [Coleman i in. 2001]), w obliczu ujemnej skośności delta „wolna od modelu” (np. standardowego modelu SV), jako jeszcze większa, nadzabezpiecza jeszcze w większym stopniu niż delta BSM.

4. Zakończenie

Głównym celem badawczym opracowania była ocena porównawcza skuteczności hedgingu z zastosowaniem delty „wolnej od modelu” w ograniczaniu ryzyka cen akcji. Cel ten został zrealizowany, chociaż wyniki porównań nie dały jednoznacznej odpowiedzi. Na podstawie przedstawionych w pracy ocen można ogólnie stwierdzić, że żadne z przedstawionych dwóch podejść nie wykazało istotnie większej skuteczności.

Przyjęta na wstępie hipoteza badawcza nie została zatem potwierdzona. Na rynkach akcyjnych, jak wykazało badanie, nie należy spodziewać się, że hedging z zastosowaniem delty „wolnej od modelu” będzie generalnie skuteczniejszy od hedgingu z deltą BSM. W tym wypadku można wyciągnąć wniosek, że należałoby szukać rozwiązań pozwalających uzyskać deltę na poziomie niższym od delty BSM.

Należy także podkreślić, że przeprowadzone badanie dotyczyło rynku akcji w wybranym okresie. Uwzględnienie innego okresu może mieć oczywiście wpływ na wynik takiego porównania. Istotny wpływ ma tutaj generalnie skośność uśmiechu zmienności implikowanej. Dlatego też na innych rynkach (o innych skośnościach) skuteczność hedgingu z deltą „wolną od modelu” może kształtować się w odmienny sposób.

Literatura

- Alexander C., *Market Risk Analysis. Pricing, Hedging and Trading Financial Instruments*, J. Wiley, Chichester 2008.
- Alexander C., Nogueira L., *Model-free hedge ratios and scale invariant models*, „Journal of Banking and Finance” 2007a, vol. 31(6).
- Alexander C., Nogueira L., *Model-free price hedge ratios for homogeneous claims on tradable assets*, “Quantitative Finance” 2007b, vol. 7(5).
- Bates D.B., *Hedging the smirk*, “Financial Research Letters” 2005, vol. 2(4).
- Coleman T., Kim Y., Li Y., Verma A., *Dynamic hedging with a deterministic local volatility function model*, “Journal of Risk” 2001, vol. 4(1).
- Merton R.C., *Theory of rational option pricing*, „Bell Journal of Economics and Management Science” 1973, vol. 4.
- Węgrzyn R., *Analiza zmienności implikowanej opcji na WIG20 w latach 2008-2009*, [w:] *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, red. W. Tarczyński, Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2010.
- Wilkins S., *Option pricing based on mixtures of distributions: evidence from the eurex index and interest rate futures options market*, “Derivatives Use, Trading & Regulation” 2005, vol. 11(3).

APPLICATION OF MODEL FREE DELTA TO OPTION HEDGING

Summary: This article presents the results of a comparative analysis of the effectiveness of the hedging strategy based on the model free delta and the effectiveness of the strategy based on the Black-Scholes-Merton delta. Empirical results obtained for the Polish stock market showed no significant advantage to any of the presented approaches. The hedging with the model free delta was not, therefore, more efficient solution than hedging with the BSM delta.

Keywords: option, hedging, delta.