ULEPSZENIE APROKSYMACJI INDYWIDUALNEGO MODELU RYZYKA PRZEZ KOLEKTYWNY MODEL RYZYKA

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

Anna Nikodem-Słowikowska
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ISSN 1644-6739

Streszczenie: Rozkład zagregowanej wielkości szkód w indywidualnym modelu ryzyka można wyznaczyć przez zastosowanie aproksymacji złożonym rozkładem, czyli przez aproksymację modelu indywidualnego modelem kolektywnym. W artykule opisane zostaną dwie aproksymacje: aproksymacja złożonym rozkładem Poissona i złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym. Stosując tę metodę, popełnia się pewien błąd aproksymacji. Aby go zmniejszyć, można zastosować ulepszenie aproksymacji złożonym rozkładem, które zaproponowano w pracy [Pitts 2004]. W artykule przedstawiono także dwa przykłady numeryczne użycia ulepszonej aproksymacji złożonym rozkładem dla portfela jednorodnego i dla portfela niejednorodnego składającego się z dwóch klas.

Słowa kluczowe: indywidualny model ryzyka, kolektywny model ryzyka, aproksymacja złożonym rozkładem Poissona, aproksymacja złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym, aproksymacja pierwszego rzędu.

1. Indywidualny model ryzyka

W indywidualnym modelu ryzyka łączną wypłatę wszystkich roszczeń z pewnego okresu, np. roku, wynikających z portfela zawierającego *n* polis ubezpieczeniowych określa się zmienną losową o postaci:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n, \tag{1}$$

gdzie zmienna losowa X_i oznacza wartość świadczenia zgodnie z *i*-tą polisą. W klasycznym modelu zakłada się, że wielkości szkód są wzajemnie niezależne. Dla tak określonego modelu dystrybuanta zmiennej *S* jest splotem dystrybuant zmiennych $X_1, X_2, ..., X_n$, co zapisuje się następująco:

$$F_S = F_{X_1} * F_{X_2} * ... * F_{X_n}, \tag{2}$$

gdzie F_{X_i} oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X_i.

Polisa gwarantuje wypłatę co najwyżej jednego świadczenia. Jeżeli świadczenie jest z góry ustalone, zmienną X_i można zapisać jako $X_i = I_i b_i$. Ten sposób zapisu zmiennej określającej wypłatę zgodnie z *i*-tą polisą ma zastosowanie m.in. w ubezpieczeniach na życie, gdzie portfel składa się z np. jednorocznych polis na życie z sumą ubezpieczenia równą b_i dla *i*-tej polisy. Wtedy zmienna I_i, w przypadku śmierci ubezpieczonego, przyjmuje wartość 1 z prawdopodobieństwem równym prawdopodobieństwu śmierci w ciągu roku, zaś jeśli ubezpieczony przeżyje rok, to zmienna I_i przyjmuje wartość 0 z prawdopodobieństwem przeżycia roku. Natomiast w sytuacji, gdy nieznana jest wysokość wypłaty, zmienną opisującą wielkość tego roszczenia zapisuje się jako $X_i = I_i B_i$, gdzie B_i jest ściśle dodatnią zmienną losową oznaczającą wielkość roszczenia, gdy dojdzie do wypłaty. Zmienna I_i zaś ma rozkład dwupunktowy i przyjmuje wartość 1, gdy doszło do wypłaty, z prawdopodobieństwem, q_i oraz przyjmuje wartość 0, gdy do wypłaty nie doszło. Dystrybuantę zmiennej X_i przedstawia się wtedy następująco:

$$F_{X_i}(x) = (1 - q_i)\delta_0(x) + q_i F_{B_i}(x), \tag{3}$$

gdzie δ_0 jest dystrybuantą rozkładu z masą prawdopodobieństwa skupioną w zerze, tzn.:

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$$

a F_{B_i} jest dystrybuantą ściśle dodatniej zmiennej losowej B_i.

Rozkład zagregowanych szkód w indywidualnym modelu ryzyka określonym we wzorze (1) można w niektórych przypadkach wyznaczyć analitycznie (np. gdy szkody mają rozkład wykładniczy z takim samym parametrem). Można również skorzystać z metod rekurencyjnych (np. metoda de Prila (por. [Klugman, Panjer, Willmot 1998; Pitts 2004]). Rozkład zmiennej losowej *S* można także aproksymować zło-

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

żonym rozkładem, czyli zastosować aproksymację modelu indywidualnego modelem kolektywnym (por. [*Modele aktuarialne* 2000]). Ostatnia metoda pozwoli uniknąć np. estymacji rozkładów wypłat dla każdej polisy osobno. Ponadto istnieje wiele sposobów wyznaczania rozkładów zagregowanych szkód w kolektywnym modelu ryzyka, które można znaleźć w [Daykin, Pentikainen, Pesonen 1994; Kaas i in. 2001; Klugman, Panjer, Willmot 1998; *Modele aktuarialne* 2000; Otto 2004].

W dalszej części artykułu opisane zostaną dwie aproksymacje: aproksymacja złożonym rozkładem Poissona oraz złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym. Przedstawione będą także rozwinięcia tych aproksymacji, które zaczerpnięto z [Pitts 2004].

2. Aproksymacja modelu indywidualnego modelem kolektywnym

Dla rozkładu wielkości szkody jako mieszanki opisanej wzorem

$$F_{X_i}(x) = (1-q_i)\delta_0(x) + q_i F_{B_i}(x) \tag{4}$$

funkcja tworząca momenty zmiennej X_i jest postaci

$$M_{X_i}(t) = (1-q_i) + q_i M_{B_i}(t) = 1 + q_i(M_{B_i}(t) - 1). \tag{5}$$

Logarytmując wyrażenie (5), otrzymuje się

$$\log M_{X_i}(t) = \log\left(1 + q_i(M_{B_i}(t) - 1)\right). \tag{6}$$

Biorąc tylko pierwszy wyraz z rozwinięcia funkcji logarytmicznej w szereg Taylora, logarytm funkcji tworzącej momenty zmiennej X_i można przybliżyć

$$\log M_{X_i}(t) \approx q_i(M_{B_i}(t) - 1). \tag{7}$$

Ostatecznie otrzymuje się, że

$$M_{X_i}(t) \approx e^{q_i(M_{B_i}(t)-1)}. \tag{8}$$

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY Nr 10 (16)

Wyrażenie $\exp(q_i(M_{B_i}(t)-1))$ jest funkcją tworzącą momenty zmiennej o złożonym rozkładzie Poissona. Niech rozkład zmiennej X_i będzie aproksymowany złożonym rozkładem Poissona zmiennej $Y_i = N_i B_i$. Dla zmiennej $Y_i = N_i B_i$ funkcja tworząca momenty jest złożeniem funkcji tworzącej momenty zmiennej N_i i B_i, tzn.

$$M_{Y_i}(t) = E\left[e^{tY_i}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{tnB_i}\right] \cdot P(N_i = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{tB_i}\right]^n \cdot P(N_i = n) = M_{N_i}(\log M_{B_i}(t)). \tag{9}$$

Jeśli zmienna N_i ma rozkład Poissona z parametrem λ_i, to funkcja tworząca momenty zmiennej Y_i ma postać:

$$M_{Y_i}(t) = \exp\left(\lambda_i (M_{B_i}(t) - 1)\right). \tag{10}$$

Zatem funkcja tworząca momenty zmiennej X_i może być przybliżoną funkcją tworzącą momenty zmiennej Y_i z odpowiednim parametrem λ_i w zależności od założenia. Jeśli zakłada się, aby wartości oczekiwane obu zmiennych, tzn. X_i i Y_i, były takie same, to $\lambda_i = q_i$. Jeśli prawdopodobieństwo tego, że wypłata nie wystąpi, było identyczne dla obu zmiennych, to $1 - q_i = e^{-\lambda_i}$, stąd otrzymuje się, że $\lambda_i = -\log(1 - q_i)$.

W sytuacji, gdy rozkład zmiennej X_i określającej wysokość szkody można przybliżyć złożonym rozkładem Poissona z odpowiednim parametrem λ_i, rozkład $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ można przybliżyć rozkładem zmiennej $\widetilde{S} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$. Korzystając z twierdzenia (zob. [Kaas i in. 2001, tw. 3.4.1]), które stanowi, że jeśli Y_i ma złożony rozkład Poissona (λ_i, F_{B_i}), to suma $\widetilde{S} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ również ma złożony rozkład Poissona, ale z parametrem i rozkładem szkód o postaci

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad F_B(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_{B_i}(s). \tag{11}$$

Zatem w pierwszym przypadku, gdy $\lambda_i = q_i$, otrzymuje się, że rozkład zmiennej S w indywidualnym modelu ryzyka można przybliżyć złożonym rozkładem Poissona z parametrem i rozkładem szkód równym odpowiednio

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad F_B(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\lambda} F_{B_i}(s). \tag{12}$$

W drugim przypadku, gdy $\lambda_i = -\log(1-q_i)$, rozkład S przybliżany jest złożonym rozkładem Poissona następująco

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} -\log(1-q_i), \quad F_B(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\log(1-q_i)}{\lambda} F_{B_i}(s). \tag{13}$$

Aproksymacja złożonym rozkładem Poissona jest przeważnie stosowana, gdy wariancja liczby szkód jest bliska średniej, gdy zaś wariancja przewyższa średnią liczby szkód, korzystniejsze jest zastosowanie do rozkładu liczby szkód rozkładu ujemnie dwumianowego. Jest to inne podejście do rozkładu liczby szkód. Przy stosowaniu przybliżenia złożonym rozkładem Poissona zakłada się, że liczba szkód w modelu kolektywnym ma rozkład Poissona ze znanym parametrem λ. Jeśli liczba szkód ma rozkład Poissona z nieznanym parametrem λ i λ jest wartością zmiennej losowej Λ, a rozkład warunkowy liczby szkód *N*, pod warunkiem, że $\Lambda = \lambda$ jest rozkładem Poissona z parametrem λ oraz $U(\lambda) = P(\Lambda \le \lambda)$, to rozkład liczby szkód można zapisać

$$P(N=n) = \int_0^{\infty} P(N=n|\Lambda=\lambda) dU(\lambda) = \int e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} dU(\lambda). \tag{14}$$

(zob. [Kaas i in. 2001]). Gdy Λ ma rozkład gamma z parametrami *n* i *p*, to *N* ma rozkład ujemnie dwumianowy z parametrami *n* i 1/(1 + *p*). W tej sytuacji rozkład liczby szkód jest mieszanką rozkładów Poissona z parametrem strukturalnym Λ.

Stosując przybliżenie rozkładu liczby szkód rozkładem ujemnie dwumianowym, rozkład łącznej wypłaty w indywidualnym modelu ryzyka aproksymuje się złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym, z parametrami *n*, 1/(1 + *p*) i rozkładem szkód F_B, gdzie

$$p = \frac{\sum_{n=1}^{n} q_i}{n}, \; F_B(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\lambda} F_{B_i}(s). \tag{15}$$

W kolejnym punkcie przedstawione zostaną rozwinięcia aproksymacji złożonym rozkładem Poissona i rozkładem ujemnie dwumianowym.

3. Rozwinięcie aproksymacji indywidualnego modelu modelem kolektywnym

W indywidualnym modelu ryzyka dystrybuanta łącznej wypłaty jest splotem dystrybuant rozkładu wypłat X_i, tzn.

$$F_S = F_{X_1} * F_{X_2} * \ldots * F_{X_n}. \tag{16}$$

Wyrażenie (16) może być rozpatrzone jako odwzorowanie Φ przekształcające argumenty $\left(F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots, F_{X_n}\right)$ w F_S (por. [Pitts 2004]). Niech *A* będzie przestrzenią miar skończonych określonych na σ-algebrze podzbiorów borelowskich na ***R*** oraz niech $A^n = A \times \ldots \times A$. Jeśli F_{X_i} odpowiada $x_i \in A$, a F_S odpowiada $s \in A$, to dla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$ i dla Φ zdefiniowanego następująco $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ otrzymuje się, że

$$s = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{17}$$

Zatem aproksymacja modelem kolektywnym może być również zapisana jako odwzorowanie Φ, ale w $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$, gdzie $a_i \in A$ są odpowiednio dla danej aproksymacji wybrane. W przypadku, gdy $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie aproksymowane przez $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

taką aproksymację nazywamy aproksymacją zerowego stopnia (*zeroth order approximation*). Jeśli do $\Phi(a_1, a_2, ..., a_n)$ doda się pochodną Φ obliczoną w punkcie $(a_1, a_2, ..., a_n)$, to otrzyma się aproksymację pierwszego rzędu postaci:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) + \Phi'_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n) \qquad (18)$$

która jest rozwinięciem aproksymacji zerowego rzędu. W pracy [Pitts 2004] udowodniono, że pochodna $\Phi(\cdot)$ wynosi

$$\Phi'_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(x_1 - a_1, x_2 - a_2, ..., x_n - a_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i) * \prod_{j \neq i} a_j \text{ , (19)}$$

gdzie $\prod_{j \neq i} a_j$ oznacza splot wszystkich a_j dla $j \neq i$.

3.1. Rozwinięcie aproksymacji złożonym rozkładem Poissona

Wyrażenie (18) znacznie się upraszcza, jeśli wszystkie a_i są takie same, czyli w przypadku portfela jednorodnego. Wtedy aproksymację pierwszego rzędu wyznacza się ze wzoru

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i) * a^{*(n-1)} - (n-1)a^{*n}. \qquad (20)$$

Jeśli portfel jest niejednorodny, tzn. gdy q_i są różne oraz F_{B_i} mają ten sam rozkład, ale z różnymi parametrami, rozkład zmiennej X_i odpowiadający $a_i \in A$ zostanie przybliżony identycznym złożonym rozkładem Poissona z parametrem i rozkładem szkód dla wszystkich *i* równym odpowiednio

$$\lambda_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{n}, \quad F_B(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\lambda} F_{B_i}(s). \qquad (21)$$

Zatem splot $a_1 * a_2 * ... * a_n$ jest złożonym rozkładem Poissona z parametrem i rozkładem szkód

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY Nr 10 (16)

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad F_B(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\lambda} F_{B_i}(s).$$

Zakładając identyczność a_i oraz to, że F_B w A odpowiada y, ze wzoru (20) i (3) otrzymuje się postać aproksymacji pierwszego rzędu

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) &\approx \sum_{i=1}^{n} (x_i) * a^{*(n-1)} - (n-1)a^{*n} = \\ &= (n-\lambda)a^{*(n-1)} + \lambda y * a^{*(n-1)} - (n-1)a^{*n}.\end{aligned} \tag{22}$$

Wzór (22) jest bardziej skomplikowany, gdy portfel składa się z dwóch klas. Dla uproszczenia niech prawdopodobieństwo wystąpienia szkody oraz rozkłady szkód w klasach są takie same. Jeśli pierwsza klasa składa się z k polis, a druga z $n-k$ polis, to wzór aproksymacji pierwszego rzędu jest następujący:

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (x_i) * a_1^{*(k-1)} * a_2^{*(n-k)} + \sum_{i=1+1}^{n} (x_i) * a_1^{*k} * a_2^{*(n-k-1)} + \\ -(n-1) a_1^{*k} * a_2^{*(n-k)}.\end{aligned} \tag{23}$$

Niech dla pierwszej klasy prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi q_1, a rozkład szkody opisany jest dystrybuantą F_{B_1}. Dla drugiej klasy prawdopodobieństwo zaistnienia szkody równa się q_2, a F_{B_2} jest dystrybuantą rozkładu szkody, wtedy aproksymacja pierwszego rzędu ma postać:

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) \approx (k-\lambda_1) a_1^{*(k-1)} * a_2^{*(n-k)} + \lambda_1 y_1 * a_1^{*(k-1)} * a_2^{*(n-k)} + \\ +((n-k)-\lambda_2) a_1^{*k} * a_2^{*(n-k-1)} + \lambda_2 y_2 * a_1^{*k} * a_2^{*(n-k-1)} + \\ -(n-1) a_1^{*k} * a_2^{*(n-k)},\end{aligned} \tag{24}$$

gdzie $\lambda_1 = kq_1$, $\lambda_2 = (n-k)q_2$, elementom $y_1, y_2 \in A$ odpowiadają F_{B_1} i F_{B_2}, splot $a_1^{*(k-1)}$ ma złożony rozkład Poissona $\left((k-1)q_1, F_{B_1}\right)$,

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

splot $a_2^{*(n-k)}$ ma złożony rozkład Poissona $\left(\lambda_2, F_{B_2}\right)$, splot a_1^{*k} ma złożony rozkład Poissona $\left(\lambda_1, F_{B_1}\right)$, a splot $a_2^{*(n-k-1)}$ ma złożony rozkład Poissona $\left((n-k-1)q_2, F_{B_2}\right)$.

3.2. Ulepszenie aproksymacji złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym

W przypadku aproksymacji łącznej wypłaty w modelu indywidualnym złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym elementowi $a \in A$ we wzorze (20) odpowiada złożony rozkład geometryczny $(1/(1+p), F_B)$, gdzie

$$p = \frac{\sum_{n=1}^{n} q_i}{n}, \quad F_B(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\lambda} F_{B_i}(s).$$

Wtedy splot a^{*n} ma złożony rozkład ujemnie dwumianowy z parametrami *n*, *1*/(1 + *p*) i z rozkładem szkód F_B, gdzie p i F_B określone są wzorem (15). Korzystając z (20), otrzymuje się aproksymację złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym pierwszego rzędu:

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) \approx (n - \sum_{i=1}^{n} q_1) a^{*(n-1)} + \left(\sum_{i=1}^{n} q_1 \right) y * a^{*(n-1)} - (n-1) a^{*n}, \tag{25}$$

gdzie $a^{*(n-1)}$ jest złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym z parametrami $(n-1)$, 1/(1 + p) i z rozkładem szkód F_B.

4. Przykład

W punkcie tym przedstawione będą dwa przykłady numeryczne zastosowania aproksymacji zerowego i pierwszego stopnia złożonym rozkładem Poissona i rozkładem ujemnie dwumianowym dla portfela jednorodnego oraz portfela niejednorodnego.

4.1. Portfel jednorodny

Rozważany będzie jednorodny portfel, w którym prawdopodobieństwo wystąpienia wypłaty dla wszystkich 50 polis jest takie samo i wynosi 0,1, a także, że wielkość szkody ma rozkład wykładniczy z parametrem 0,5 dla każdej polisy. W tabeli 1 przedstawiono dokładne wartości rozkładu łącznej wypłaty $f(s)$ w indywidualnym modelu ryzyka (kolumna 2), zastosowanie aproksymacji złożonym rozkładem Poissona i złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym (kolumny 3 i 5) oraz po zastosowaniu ulepszonych aproksymacji według wzorów (23) i (25) (kolumny 4 i 6).

Tabela 1. Portfel jednorodny

s	Rozkład dokładny	Aproksymacja zerowego stopnia		Aproksymacja pierwszego stopnia	
		złożonym rozkładem Poissona	złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym	złożonym rozkładem Poissona	złożonym rozkładem ujemnie dwumianowym
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	0,0270565	0,0295689	0,0270679	0,0319355	0,0271410
2	0,0395766	0,0415767	0,0396670	0,0433887	0,0399402
3	0,0506387	0,0518568	0,0507613	0,0529131	0,0511061
4	0,0594572	0,0598191	0,0595750	0,0600848	0,0598962
5	0,0656566	0,0652313	0,0657466	0,0647875	0,0659875
6	0,0691910	0,0681352	0,0692432	0,0671310	0,0693814
7	0,0702525	0,0687617	0,0702670	0,0673742	0,0703049
8	0,0691831	0,0674553	0,0691663	0,0658594	0,0691215
9	0,0664005	0,0646116	0,0663618	0,0629615	0,0662590
10	0,0623409	0,0606313	0,0622900	0,0590500	0,0621547
11	0,0574181	0,0558886	0,0573636	0,0544646	0,0572182
12	0,0519987	0,0507113	0,0519473	0,0495004	0,0518089
13	0,0463886	0,0453722	0,0463447	0,0444015	0,0462250
14	0,0408294	0,0400864	0,0407953	0,0393600	0,0407008
15	0,0355008	0,0350143	0,0354772	0,0345197	0,0354099
16	0,0305268	0,0302675	0,0305132	0,0299808	0,0304721
17	0,0259842	0,0259161	0,0259793	0,0258070	0,0259613
18	0,0219117	0,0219964	0,0219137	0,0220322	0,0219145
19	0,0183184	0,0185186	0,0183254	0,0186667	0,0183404
20	0,0151920	0,0154736	0,0152023	0,0157038	0,0152270

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
21	0,0125054	0,0128388	0,0125175	0,0131244	0,0125479
22	0,0102223	0,0105829	0,0102349	0,0109011	0,0102677
23	0,0083014	0,0086699	0,0083137	0,0090023	0,0083464
24	0,0067002	0,0070616	0,0067115	0,0073939	0,0067422
25	0,0053766	0,0057204	0,0053865	0,0060417	0,0054141
26	0,0042908	0,0046100	0,0042992	0,0049130	0,0043230
27	0,0034067	0,0036971	0,0034134	0,0039768	0,0034331
28	0,0026914	0,0029513	0,0026966	0,0032051	0,0027123
29	0,0021165	0,0023456	0,0021203	0,0025724	0,0021323
30	0,0016569	0,0018564	0,0016595	0,0020565	0,0016682
31	0,0012917	0,0014633	0,0012933	0,0016379	0,0012991
32	0,0010029	0,0011491	0,0010037	0,0012998	0,0010072
33	0,0007757	0,0008991	0,0007758	0,0010280	0,0007774
34	0,0005977	0,0007010	0,0005974	0,0008103	0,0005976
35	0,0004589	0,0005447	0,0004583	0,0006367	0,0004574
36	0,0003512	0,0004219	0,0003504	0,0004988	0,0003487
37	0,0002679	0,0003258	0,0002669	0,0003897	0,0002648
38	0,0002037	0,0002508	0,0002027	0,0003035	0,0002003
39	0,0001544	0,0001925	0,0001534	0,0002358	0,0001509
40	0,0001167	0,0001474	0,0001157	0,0001827	0,0001132
41	0,0000879	0,0001125	0,0000871	0,0001412	0,0000847
42	0,0000661	0,0000857	0,0000653	0,0001089	0,0000631
43	0,0000496	0,0000651	0,0000488	0,0000837	0,0000468
44	0,0000371	0,0000493	0,0000364	0,0000643	0,0000346
45	0,0000276	0,0000373	0,0000271	0,0000492	0,0000255

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki uzyskane po zastosowaniu aproksymacji pierwszego rzędu złożonym rozkładem Poissona i złożonym ujemnie dwumianowym są bliższe wartościom dokładnego rozkładu.

4.2. Portfel niejednorodny

Rozważany będzie portfel, który składa się z 50 polis. Portfel podzielony jest na dwie klasy: pierwsza klasa zawiera 35 polis, druga – 15 polis. W pierwszej klasie prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi 0,1, a rozkład szkód jest rozkładem wykładniczym z parame-

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY Nr 10 (16)

trem równym 0,5. W drugiej klasie prawdopodobieństwo pojawienia się roszczenia wynosi 0,05, szkody zaś mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. W tabeli 2 umieszczono wartości dokładnego rozkładu $f(s)$ (kolumna 2) oraz wartości rozkładu po zastosowaniu aproksymacji złożonym rozkładem Poissona (kolumna 3) i aproksymacji pierwszego rzędu złożonym rozkładem Poissona (kolumna 4).

Tabela 2. Portfel niejednorodny

s	Rozkład dokładny	Aproksymacja złożonym rozkładem Poissona		s	Rozkład dokładny	Aproksymacja złożonym rozkładem Poissona	
		zerowego stopnia	pierwszego stopnia			zerowego stopnia	pierwszego stopnia
(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
1	0,0519652	0,0548724	0,0525437	22	0,0045225	0,0048525	0,0045858
2	0,0676204	0,0690992	0,0680947	23	0,0034951	0,0037915	0,0035522
3	0,0780078	0,0781212	0,0782681	24	0,0026869	0,0029479	0,0027372
4	0,0833248	0,0823653	0,0833559	25	0,0020553	0,0022813	0,0020987
5	0,0842678	0,0826063	0,0841088	26	0,0015648	0,0017576	0,0016017
6	0,0817588	0,0797506	0,0814714	27	0,0011861	0,0013485	0,0012169
7	0,0767580	0,0746943	0,0764058	28	0,0008953	0,0010306	0,0009207
8	0,0701486	0,0682388	0,0697852	29	0,0006731	0,0007846	0,0006938
9	0,0626766	0,0610503	0,0623414	30	0,0005041	0,0005952	0,0005209
10	0,0549298	0,0536491	0,0546470	31	0,0003762	0,0004500	0,0003896
11	0,0473407	0,0464166	0,0471217	32	0,0002798	0,0003391	0,0002904
12	0,0402037	0,0396124	0,0400501	33	0,0002074	0,0002548	0,0002157
13	0,0336990	0,0333961	0,0336060	34	0,0001532	0,0001908	0,0001597
14	0,0279177	0,0278492	0,0278763	35	0,0001129	0,0001425	0,0001179
15	0,0228849	0,0229953	0,0228846	36	0,0000829	0,0001062	0,0000868
16	0,0185798	0,0188174	0,0186100	37	0,0000607	0,0000789	0,0000637
17	0,0149525	0,0152725	0,0150037	38	0,0000444	0,0000584	0,0000466
18	0,0119366	0,0123020	0,0120003	39	0,0000323	0,0000432	0,0000340
19	0,0094582	0,0098403	0,0095279	40	0,0000235	0,0000319	0,0000248
20	0,0074427	0,0078203	0,0075134	41	0,0000170	0,0000234	0,0000180
21	0,0058192	0,0061776	0,0058873	42	0,0000123	0,0000172	0,0000130

Źródło: obliczenia własne.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

Podobnie jak w poprzednim przykładzie zastosowanie aproksymacji pierwszego stopnia złożonym rozkładem Poissona dała wyniki bliższe wartościom dla dokładnego rozkładu zagregowanej wielkości szkód.

Literatura

Daykin C.D., Pentikainen T., Pesonen M., *Practical risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.

Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1969.

Hipp C., *Improved approximations for the aggregate claims distribution in the individual model*, "ASTIN Bulletin" 1986, 16, s. 89-100.

Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston 2001.

Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E., *Loss Models. From Data to Decision,* John Wiley & Sons, New York 1998.

Michel R., *An improved error bound for the compound Poisson approximation of a nearly homogenous portfolio*, "ASTIN Bulletin" 1987, 17, no 2, s. 165-169.

Modele aktuarialne, red. W. Ostasiewicz. Wyd. AE, Wrocław 2000.

Otto W., *Ubezpieczenia majątkowe. Część I. Teoria ryzyka*, Wydawnictwo Naukowo--Techniczne, Warszawa 2004.

Pitts S.M., *A functional approach to approximations for the individual risk model*, "ASTIN Bulletin" 2004, 34, no 2, s. 379-397.

Rolski T., Schmidli H.P., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, Chichester 1999.

IMPROVING THE APPROXIMATION OF INDIVIDUAL RISK MODEL BY THE COMPOUND RISK MODEL

Summary: In the individual risk model the aggregate claims distribution can be calculated by using the compound distribution. In this article two approximations will be described: the compound Poisson approximation and the compound negative binomial approximation. Using this method of calculated aggregate claims distribution, errors of approximation are made. To reduce these errors the higher order approximations can be used, which are taken from [Pits]. In this article the numerical examples, including the refinement of the compound approximation, are considered for homogeneous portfolio and for *inhomogeneous portfolios with two classes.*

Keywords: individual risk model, collective risk model, compound Poisson approximation, compound negative binomial approximation, first order approximation.