PROBLEM STABILNYCH MAŁŻEŃSTW, CZYLI O POŻYTKACH Z TEORII GIER PŁYNĄCYCH

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

Katarzyna Ostasiewicz
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ISSN 1644-6739

1. Wstęp

Wielu studentom takich praktycznych kierunków studiów, jak ekonomia czy zarządzanie, w trakcie przedzierania się – w ramach kursu matematyki – przez lematy, twierdzenia i dowody, zaświta w głowie myśl: „a co to ma wspólnego z prawdziwym życiem?”.

Choć matematyka w dużej mierze wyrosła z praktycznych potrzeb – astronomów, mierniczych, fizyków czy hazardzistów – jej obecny stopień abstrakcyjności niejednego przyprawia o zawrót głowy. Teoria gier, jako dział matematyki, jest szczególnym przypadkiem. Mimo że zasadniczo opisuje sytuacje realnych konfliktów interesów i posługuje się nieraz słownictwem „z życia wziętym”, to cały sztafaż matematycznego formalizmu wydawać by się mógł niepotrzebnym balastem. Jednakże tegoroczna decyzja Komitetu Noblowskiego po raz kolejny uhonorowała fakt, że ezoteryczne teorie matematyczne wcale nie są nieużyteczne – nawet jeśli ich użyteczność mierzyć tylko korzyściami praktycznymi.

Alvin Roth, ekonomista, jeden z tegorocznych laureatów Nagrody Banku Szwecji imienia Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii, który tak umiejętnie wykorzystał teorię gier na rzeczywiście istniejących rynkach, że zasłużył na to wyróżnienie, powiedział w przemówieniu na bankiecie: „Wszyscy znamy spopularyzowany przez Izaaka Newtona wspaniały obraz nas samych, widzących tak daleko tylko dzięki temu, że stoimy na ramionach gigantów. Ten obraz dobrze opisuje to, jak moja praca zbudowana została na podwalinach położonych przez moich poprzedników, w szczególności Lloyda Shapleya, z którym dzielę tę nagrodę, oraz Davida Gale'a" [Internet 3].

Drugi z laureatów, Lloyd Shapley, ekonomistą nie jest. Choć docenia rolę matematyki w zastosowaniach praktycznych, to, jak sam utrzymuje, nigdy nawet nie uczęszczał na wykłady z ekonomii, co, jak widać, nie przeszkodziło wcale, by Komitet Noblowski uznał, że to jemu właśnie, a nie innym świetnym praktykom, należy się najwyższa nagroda z tej dziedziny. Większość zastosowań praktycznych poprzedzają bowiem lata intensywnego rozwijania teorii, na której zastosowania te mogą być oparte. A wkład Lloyda Shapleya w rozwój teorii gier jest nie do przecenienia.

2. Niekooperacyjne i kooperacyjne gry

„Teoria gier jest matematycznym studium konfliktów i kooperacji pomiędzy racjonalnymi jednostkami podejmującymi decyzje. Jako taka, jest bardzo użytecznym narzędziem dla ekonomistów, jako że duża część ich pracy dotyczy sytuacji, w których gracze dążą do wypracowania optymalnego rozwiązania" [Internet 1] – tak rozpoczął swój wykład noblowski Lloyd Shapley, jeden z tegorocznych laureatów Nagrody imienia Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii.

Rola teorii gier w ekonomii była już wielokrotnie doceniana w decyzjach Komitetu Noblowskiego, a najlepiej znanym nawet szerokiej publiczności laureatem jest John Nash (Nagroda Nobla w 1994 r.), którego postać spopularyzowała hollywoodzka produkcja „Piękny umysł". Poza nim teorię gier stosowali i rozwijali m.in. tacy ekonomiści, jak Herbert Simon (Nagroda Nobla w 1978 r.), Thomas Shelling (Nagroda Nobla w 2005 r.) czy Leonid Hurwicz (Nagroda Nobla w 2007 r.).

Gry, będące przedmiotem zainteresowania teorii gier, dzielić można na wiele różnych sposobów, biorąc pod uwagę różne ich charakterystyki. W tym miejscu interesujący dla nas będzie podział na gry niekooperacyjne, w których każdy gracz podejmuje niezależne decyzje i nie ma możliwości porozumienia między graczami, oraz gry kooperacyjne, czyli koalicyjne, w których gracze mogą się dogadywać i tworzyć koalicje, kierując się wspólną strategią. Dwoma podstawo-

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

wymi pojęciami związanymi z grami pierwszego i drugiego rodzaju są „równowaga Nasha" oraz „stabilna alokacja", będące swoimi logicznymi odpowiednikami. Równowaga Nasha odnosi się bowiem do takiego wyniku, przy którym żaden z graczy nie może zmienić swojej strategii tak, by wyjść na niej lepiej. Z kolei stabilna alokacja w kontekście dopuszczalności tworzenia się koalicji dotyczy takiej sytuacji, w której żadna koalicja nie może się związać w celu współdziałania i polepszenia swego wyniku.

W klasycznym dylemacie więźnia, w którym dwaj gracze mają do wyboru opcję współpracy lub zdrady, równowagą Nasha jest sytuacja, w której obaj więźniowie dopuszczają się zdrady, w efekcie czego obaj idą do więzienia na długie lata (w tab. 1 jako wypłaty przedstawione są liczby lat z najbliższej dekady spędzone przez poszczególnych więźniów na wolności). Z punktu widzenia racjonalności pojedynczego więźnia, jeśli ten drugi będzie współpracował, jemu samemu bardziej opłaca się zdrada (10 zamiast 8), natomiast w przypadku zdrady drugiego – również bardziej korzystna jest zdrada (2 zamiast 0). Ponieważ rozumowanie obu więźniów jest identyczne, w jego efekcie obaj dopuszczają się zdrady i obaj idą do więzienia na 8 lat (wynik (2,2)). Jeśli dopuścić natomiast porozumienie między więźniami, oczywistym stabilnym wynikiem jest współpraca, na której obaj więźniowie wychodzą lepiej niż bez możliwości utworzenia „koalicji" (po dwa lata więzienia, wynik (8,8)).

Tabela 1. Klasyczny dylemat więźnia*

Więzień 2 / więzień 1	współpraca	zdrada
współpraca	(8,8)	(0,10)
zdrada	(10,0)	(2,2)

*W przypadku braku współpracy równowagą Nasha jest wynik (2,2) w oczywisty sposób nieoptymalny dla żadnego z graczy w przypadku możliwości porozumienia i utworzenia koalicji, rozwiązaniem stabilnym jest wynik (8,8) najlepszy z punktu widzenia obu graczy.

Źródło: opracowanie własne.

Na tym polega – zarysowana niesłychanie grubą kreską – różnica pomiędzy działem teorii gier rozwijanym przez bohatera „Pięknego umysłu", a tym, którego personifikacją nieomal stał się właściciel innego pięknego i potężnego umysłu, tegoroczny laureat Lloyd Shapley.

W każdym podręczniku poruszającym zagadnienia gier koalicyjnych pojawiają się pojęcia rdzenia oraz wartości Shapleya. Są one stosowane w teorii gier koalicyjnych z tzw. wypłatami ubocznymi (*side payments, transferable utility*), czyli takimi, w których istnieje jakieś medium płatnicze – np. pieniądz – które może być wymieniane pomiędzy graczami. (Zwróćmy uwagę, że dylemat więźnia nie stosuje się do tych założeń: choć lata spędzone w więzieniu moglibyśmy przełożyć w jakiś sposób na pieniądze, to wygranej w tej grze gracze nie mogą podzielić między siebie w dowolny sposób. Jeden z nich nie może wziąć na siebie odsiadki drugiego). W grach tego typu pojawia się pytanie o podział wygranej między wszystkich graczy.

Podział taki spełniać musi m.in. dwa rozsądne warunki. Pamiętajmy przy tym, że cały czas mówimy o grach, w których gracze mogą tworzyć koalicję. W szczególności mogą pozostać przy „koalicji jednoosobowej" albo stworzyć „wielką koalicję" składającą się z wszystkich graczy. Zatem, po pierwsze, podział wygranej w grze musi być taki, by żaden z graczy nie otrzymał mniej niż uzyskałby w pojedynkę – i jest to warunek racjonalności indywidualnej. Po drugie, podział musi być taki, by nie istniała taka koalicja, która mogłaby się zawiązać i polepszyć swój wynik – w przeciwnym razie bowiem podział jest niestabilny. Zbiór wszystkich podziałów stabilnych stanowi właśnie rdzeń gry. Problem z tym pojęciem jest taki, iż rdzeń, poza przypadkami, gdy tworzy przyzwoity zbiór składający się z jednego elementu lub ich większej liczby, może być też zbiorem pustym lub nawet o mocy continuum. Zasługą Shapleya było określenie warunków, w których gra koalicyjna ma niepuste jądro [Shapley 1971]. Kolejną było określenie możliwości podziału wygranej w inny sposób niż poprzez znalezienie rdzenia. To rozwiązanie nosi właśnie nazwę wartości Shapleya [Shapley 1953] i istnieje zawsze w jednej, określonej postaci.

Nie we wszystkich sytuacjach możliwe jest posłużenie się idealnie wymienialnym medium, jakim w wielu sytuacjach rynkowych są pieniądze. Głównym przedmiotem zainteresowania Komitetu Noblowskiego przyznającego w tym roku nagrodę były takie obszary rynku, w których użycie pieniędzy jako jednostki wymiany byłoby albo nie-możliwe z praktycznego punktu widzenia, albo nielegalne czy nieetyczne.

Przyjrzyjmy się nieco dokładniej dwóm zagadnieniom, które znalazły zastosowanie w bardzo praktycznych problemach alokacji zasobów.

3. Rynek małżeński

Zagadnienie dwustronnego dopasowania ilustrowane bywa zazwyczaj problemem dobierania się w pary, choć w tym akurat przypadku oczywiste jest, że rzeczywisty mechanizm jest dość odmienny od matematycznego algorytmu. Mając na uwadze zastrzeżenie, że algorytm Gale'a-Shapleya nie jest ani efektywnym, ani chyba pożądanym rozwiązaniem dla parowania ludzi, przedstawmy ten algorytm w atrakcyjnej konwencji rynku małżeńskiego, jak zresztą uczynił to na swoim wykładzie noblowskim sam Lloyd Shapley [Internet 1].

Mamy oto pewną liczbę kawalerów i pewną liczbę panien, którzy chcieliby wstąpić w monogamiczne związki. Wobec założenia monogamii mamy tu do czynienia z koalicjami dwuosobowymi. Każdy kawaler i każda panna mają swoje preferencje: temu najbardziej podoba się jedna z panien, na drugim miejscu w jego preferencjach znajduje się inna, i tak dalej, ale wolałby już pozostać w stanie bezżennym niż miałby się związać z pewną panną. Podobnie i panny. Sparowanie będzie stabilne, jeśli nie będą istniały takie pary, mężczyzna i kobieta, którzy będą woleli siebie nawzajem niż swoich aktualnych partnerów. W przeciwnej sytuacji pary owe miałyby bowiem korzyść w zawarciu koalicji, opuszczeniu swoich partnerów i połączeniu się w nowy związek. Dodatkowym warunkiem nałożonym na „dobre" sparowanie jest tak zwana indywidualna racjonalność oznaczająca, że żadna z osób nie jest połączona w związku z kimś tak źle ocenianym, że osoba ta wolałaby pozostać w stanie wolnym.

W roku 1962 Gale i Shapley [Gale, Shapley 1962] opracowali algorytm zapewniający istnienie stabilnego i racjonalnego z punktu widzenia wszystkich jednostek rozwiązania. Zaprezentujmy ten algorytm odroczonej akceptacji na prostym przykładzie.

Weźmy cztery panny – Alicję, Basię, Celinę i Darię – oraz czterech kawalerów – Tadka, Ulryka, Włodka i Zenona. Każde z nich pragnie wstąpić w monogamiczny związek, każde woli choćby najmniej pożądanego partnera niż stan wolny, każde ma inne preferencje przedstawione w tab. 2 (kolejności wzięte za [Economic Sciences Prize…2012]).

Tabela 2. Przykładowe preferencje panien i kawalerów

Alicja	Basia	Celina	Daria
Tadek	Tadek	Tadek	Włodek
Ulryk	Włodek	Ulryk	Zenon
Włodek	Ulryk	Zenon	Ulryk
Zenon	Zenon	Włodek	Tadek

Tadek	Ulryk	Włodek	Zenon
Daria	Daria	Alicja	Basia
Celina	Alicja	Basia	Alicja
Basia	Celina	Daria	Daria
Alicja	Basia	Celina	Celina

Źródło: opracowanie własne.

Widać, niestety, że – jak to w życiu bywa – nie da się uszczęśliwić wszystkich w równym stopniu. Choć to Tadek jest obiektem marzeń Alicji, Basi i Celiny, on sam najchętniej związałby się z Darią, dla której z kolei jest najgorszą z opcji... Wiadomo jednakże, że ludzie są zazwyczaj realistami i pogodzą się z tym, co im los przyniesie – pod pewnym warunkiem. Nie możemy dopuścić do sytuacji, w której np. Tadek pozostaje w związku z Basią, a Celina z kolei − z Zenonem. Gdyby tak się stało, ta dwójka – Tadek i Celina – dogadaliby się, pozostawili swoich dotychczasowych partnerów i utworzyli nowy związek dla obojga korzystniejszy niż dotychczasowy mariaż. Jest to właśnie sytuacja niestabilna, w której dwuosobowa koalicja może odpowiednim działaniem polepszyć sytuację osób ją tworzących. Algorytm odroczonej akceptacji, gwarantujący niezaistnienie takich konfiguracji, polega na kolejnych rundach składania i przyjmowania lub odrzucania ofert. Przyjmijmy na początek, zgodnie ze staroświecką konwencją, że to kawalerowie oświadczają się pannom. Każda z panien przyjmuje najlepszą z ofert, ale nie jest to akceptacja ostateczna. W kolejnej rundzie odrzuceni kawalerowie składają kolejne oferty kolejnym pannom ze swoich list. Jeśli któraś z nich otrzyma propozycję korzystniejszą niż ta warunkowo przyjęta wcześniej, może wymienić zalotnika. Procedura kończy się dopiero wtedy, gdy wszyscy mają

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

swój „przydział". (W sytuacji, w której przynajmniej niektórzy wolą pozostać sami niż wiązać się z osobami znajdującymi się na dole list, procedura kończy się, gdy nie zostają już niesparowane osoby, których oferty byłyby wzajemnie do zaakceptowania). Zobaczmy, jak wyglądają kolejne rundy oświadczyn dla naszej ósemki. W pierwszej rundzie Tadek i Ulryk oświadczają sie Darii, Włodek oświadcza się Alicji, a Zenon − Basi. Daria woli Ulryka, więc odrzucony Tadek składa kolejną ofertę drugiej w (jego) kolejności pannie, czyli Celinie. W ten sposób po drugiej rundzie każdy kawaler ma przypisaną sobie pannę. W tab. 3 podsumowany jest przebieg tych zalotów, przy czym akceptacja chwilowa oznaczona jest kursywą, a ostateczna – pogrubioną czcionką.

Tabela 3. Przebieg i wynik rozgrywki zgodnie z algorytmem odroczonej akceptacji; stroną oferującą są kawalerowie

	1. runda	2. runda
Alicja	*Włodek*	**Włodek**
Basia	*Zenon*	**Zenon**
Celina		**Tadek**
Daria	Tadek, *Ulryk*	**Ulryk**

Źródło: opracowanie własne.

Zwróćmy uwagę, że wynik ostateczny zależy od tego, która ze stron jest „aktywna", czyli składa oferty, a która „pasywna", mogąca te oferty jedynie przyjmować bądź odrzucać. Spójrzmy na przebieg i wynik tworzenia się par, tym razem zakładając, iż to panny składają propozycje kawalerom. W pierwszej rundzie Alicja, Basia i Celina oświadczają się Tadkowi, zaś Daria oświadcza się Włodkowi. Mając taki wybór, Tadek decyduje się na Celinę, zatem Alicja i Basia ponownie uderzają w konkury. Tym razem Alicja do Ulryka, zaś Basia do Włodka. W tej rundzie to do Włodka należy dokonanie wyboru pomiędzy Darią a Basią. Wybiera Basię, stojącą wyżej na liście jego preferencji (czyli jego sytuacja się poprawia), zaś składa propozycję Zenonowi, który w końcu doczekał się swojej oferty. Ostateczna konfiguracja, jak i przebieg konkurów, podsumowane są w tab. 4.

Tabela 4. Przebieg i wynik rozgrywki zgodnie z algorytmem odroczonej akceptacji; stroną oferującą są panny

	1. runda	2. runda	3. runda
Tadek	Alicja, Basia, *Celina*	*Celina*	**Celina**
Ulryk		*Alicja*	**Alicja**
Włodek	*Daria*	Daria, *Basia*	**Basia**
Zenon			**Daria**

Źródło: opracowanie własne.

Jedną z wielu własności algorytmu odroczonej akceptacji, udowodnioną przez Gale'a i Shapleya, jest fakt, iż jeśli ostateczna konfiguracja zależy od tego, która strona składa oferty, wówczas zawsze będzie ona bardziej korzystna dla strony aktywnej, oferującej. Zwróćmy uwagę, że w naszym przykładzie sytuacja, w której to kawalerowie się oświadczają, jest dla panien mniej korzystna niż sytuacja odwrotna. Tylko Celinie jest obojętne, kto występuje z propozycjami, w obu sytuacjach bowiem i tak kończy w związku z Tadkiem, znajdującym się zresztą na pierwszym miejscu na jej liście. Z drugiej strony, jako strona aktywna, Alicja wstępuje w związek z Ulrykiem, znajdującym się na jej liście wyżej niż Włodek, z którym zostaje sparowana, będąc stroną pasywną. Podobnie Basia (woli Włodka niż Zenona) i Daria (woli Zenona niż Ulryka). Taka sama analiza pokazuje, że tylko Tadkowi jest obojętne, czy sam składa oferty, czy też na nie odpowiada. Ulryk woli Darię niż Alicję, Włodek − Alicję niż Basię, a Zenon − Basię niż Darię, zatem oni woleliby być stroną aktywną. Najwyraźniej mężczyźni, na całe tysiąclecia przed zaistnieniem matematycznego dowodu, intuicyjnie wiedzieli, co jest korzystniejsze...

Zwróćmy uwagę na różnice pomiędzy algorytmem odroczonej akceptacji a algorytmem natychmiastowej akceptacji, w którym najlepsza oferta z danej rundy przyjmowana jest bezwarunkowo. Porównajmy przebieg rozgrywki przy zastosowaniu tego drugiego algorytmu z przedstawionym w tab. 3. Jeśli raz zaakceptowanej oferty nie można już odrzucić, od pierwszej rundy Włodek jest skazany na Darię, jedyną, która mu się od początku oświadczała. Koniec końców, Włodek żeni się z Darią, a Basia pozostaje w związku z Zenonem, jak przedstawiono w tab. 4.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

Tabela 5. Przebieg i wynik rozgrywki zgodnie z algorytmem natychmiastowej akceptacji; stroną oferującą są panny

	1. runda	2. runda	3. runda
Tadek	Alicja, Basia, **Celina**	**Celina**	**Celina**
Ulryk		**Alicja**, Basia	**Alicja**
Włodek	**Daria**	**Daria**	**Daria**
Zenon			**Basia**

Źródło: opracowanie własne.

Łatwo zauważyć, że taka konfiguracja jest niestabilna. Choć Daria jest z Włodkiem bardzo szczęśliwa (znajdującym się na pierwszym miejscu jej listy), on nie odwzajemnia jej gorących uczuć i wolałby Alicję lub Basię. Tymczasem Basia jest ogromnie sfrustrowana w związku z Zenonem, ostatnim w jej rankingu. Włodek i Basia wolą siebie nawzajem niż swoich dotychczasowych partnerów. Zawiązują zatem koalicję w celu poprawy sytuacji obu jej członków. Innymi słowy, mamy gotowy romans i rozpad dwóch małżeństw.

Kolejną niezmiernie interesującą kwestią, którą można poruszyć w kontekście algorytmu odroczonej akceptacji, jest problem strategicznego oszustwa. Gale i Shapley pokazali [Gale, Shapley 1962], że o ile stronie oferującej nie opłaca się ukrywać rzeczywistych preferencji, stronie biernej podobne manipulacje mogą przynieść korzyść. Przykładowo, przeanalizujmy sytuację, w której to kawalerowie oświadczają się pannom, ale w pierwszej rundzie Daria oszukuje – udaje, że woli Tadka niż Ulryka. Wbrew pozorom nie kończy się to tak, że zamiast z Ulrykiem wstępuje w związek z mniej lubianym Tadkiem, strategia ta ma bowiem dalekosiężne konsekwencje. Odrzucony Ulryk uderza bowiem do Alicji, która wybiera jego zamiast Włodka. Ten oświadcza się zatem Basi, dzięki czemu ta „zwalnia” Zenona. Zenon oświadcza się Alicji, ale ta trwa przy Ulryku. Zenon próbuje zatem z trzecią na liście Darią, która „wymienia” na niego Tadka. Ten składa ofertę Celinie, drugiej na jego liście. Jako że nie miała do tej pory żadnych propozycji, ustala się ostateczna konfiguracja. Zatem w wyniku początkowego oszustwa – odrzuceniu Ulryka (trzeciego na liście) na rzecz Tadka (ostatniego) – Daria osiadła

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY Nr 10 (16)

w stadle z Zenonem, drugim w rankingu jej preferencji, czyli osiągnęła wynik lepszy od tego, który uzyskałaby bez oszukiwania.

Tabela 6. Przebieg i wynik rozgrywki zgodnie z algorytmem odroczonej akceptacji; stroną oferującą są kawalerowie; w pierwszej rundzie Daria dopuszcza się oszustwa

	1. runda	2. runda	3. runda	4. runda	5. runda	6. runda	7. runda
Alicja	*Włodek*	Włodek, *Ulryk*	*Ulryk*	*Ulryk*	*Ulryk*, Zenon	*Ulryk*	**Ulryk**
Basia	*Zenon*	*Zenon*	Zenon, *Włodek*	*Włodek*	*Włodek*	*Włodek*	**Włodek**
Celina							**Tadek**
Daria	*Tadek*, Ulryk	*Tadek*	*Tadek*	*Tadek*	*Tadek*	Tadek, *Zenon*	**Zenon**

Źródło: opracowanie własne.

Zwróćmy uwagę na ważną sprawę. Ten korzystniejszy dla siebie rezultat, który Daria otrzymała poprzez manipulację, jest również stabilny ze względu na prawdziwe preferencje! Alvin Roth [Roth 1984] zidentyfikował warunki, w których ta stabilność względem autentycznych preferencji jest utrzymana również w sytuacji manipulacji. A teraz wróćmy raz jeszcze do przebiegu parowania się z tab. 6. Na początku wcale nie jest oczywiste, że Daria zyska na odrzuceniu Ulryka i zaakceptowaniu oferty Tadka, którego wszak nie znosi. Całkiem zasadna byłaby jej obawa, że odtrącając Ulryka, nieodwracalnie pogarsza swoją sytuację. Rzecz jasna, znając dokładne preferencje wszystkich pozostałych osób, Daria może przeprowadzić analizę podobną do naszej i przewidzieć ostateczny wynik. W praktyce jednakże nikt nigdy nie zna dokładnych preferencji wszystkich pozostałych zainteresowanych ani ich decyzji odnośnie do prawdomówności bądź oszukiwania. Alvin Roth i Uriel Rothblum[1] [Roth, Rothblum 1999] wykazali, że w sytuacji niepełnej informacji nie jest opłacalne manipulowanie porządkiem swoich preferencji. Czyli ma-

[1] Jeśli zestawienie nazwisk współpracowników: Roth i Rothblum, wywołało na czyjejś twarzy uśmiech, warto wspomnieć, że (przedwcześnie zmarły w marcu bieżącego roku) Uriel Rothblum współpracował również z Yosefem Blumem. Co więcej, istnieje praca opublikowana w „Journal of Economic Theory", której autorami są Roth, Blum i Rothblum!

tematycznie udowodnione zostało, że oszukiwanie jest niekorzystne? Nie do końca. W tej samej pracy duet Roth-Rothblum wykazał, iż opłacalny może być inny rodzaj oszustwa. Otóż: można uzyskać korzyść, udając, że opcja, która jest nisko na naszej liście – ale wciąż jest akceptowalna – jest dla nas nie do przyjęcia.

Sytuację „małżeńską” można skomplikować, dodając kwestię posagu. W języku realiów rynkowych można to przetłumaczyć na miejsca pracy z negocjowanymi płacami. W ten sposób wprowadzamy do zagadnienia wypłaty uboczne, wcześniej wyeliminowane. Również i w tym przypadku możliwe było opracowanie algorytmu, czego dokonali Vincent P. Crawford i Elsie Marie Knoer [Crawford, Knoer 1981] w oparciu o wcześniejszą pracę Lloyda Shapleya i Martina Shubika [Shapley, Shubik 1971].

Rzecz jasna, rynek małżeński rządzi się o wiele bardziej skomplikowanymi regułami i nie jest możliwe odgórne nim zarządzanie. Za chwilę przekonamy się jednak, że są sytuacje w rzeczywistym świecie, w których z powodzeniem można korzystać z wyników otrzymanych przez teoretyków gier.

4. Lekarze i szpitale, uczniowie i szkoły

Miłośnicy popularnego również i w Polsce serialu „Chirurdzy” wiedzą co nieco na temat bezpardonowej walki – zarówno pomiędzy lekarzami, jak i szpitalami – o rezydentury w USA. Obecna sytuacja w Stanach Zjednoczonych jest jednakże wręcz komfortowa w porównaniu z tym, co działo się przed nastaniem lat 50., czy w porównaniu z innymi krajami. Niegdyś walka o odpowiednie miejsce w szpitalu zaczynała się na długo przed tym, nim student medycyny mógł wykazać się swoimi umiejętnościami w toku nauki (co ma istotne znaczenie dla szpitala oferującego rezydenturę), a z drugiej strony – nim student zorientował się, co mu najbardziej odpowiada (co ma znaczenie dla medyka *in spe*). Wprowadzony w latach 50. narodowy program dopasowywania rezydentur, NRMP (*National Resident Matching Program*), zagwarantował bezpieczeństwo tym, którzy nie chcieli przedwcześnie i pochopnie decydować się na opcję poniżej swoich możliwości ze strachu przed pozostaniem z pustymi rękoma.

Jak pokazała analiza [Roth, Peranson 1999], program ten przyjął zasady odpowiadające algorytmowi odroczonej akceptacji Gale'a--Shapleya. Z tego powodu odniósł ogromny sukces: choć udział w nim jest dobrowolny, niemal 100% lekarzy i szpitali z niego korzysta. Jak wspominaliśmy powyżej, wynik parowania wedle takiej procedury jest stabilny, zatem nie mają miejsca pozaprogramowe wymiany typu *afterparty*. Korzystne jest również to, iż medycy mogą bezpieczne ujawniać swoje rzeczywiste preferencje bez obawy, że sięgając zbyt wysoko, mogą skończyć zbyt nisko.

Dane dotyczące rynku medycznego w niektórych regionach Wielkiej Brytanii pokazały, że z powodu niedostatków procedury dopasowującej większość negocjacji odbywa się poza (obowiązkowym nawet) odgórnym mechanizmem [Kagel, Roth 2000]. Jednym z algorytmów, który spektakularnie nie zdał egzaminu, był algorytm dopasowywania według priorytetów. Zgodnie z jego zasadą każdy student i każdy szpital przypisywał swoim kolejnym wyborom rangi – zatem pierwszy krok jest taki sam jak w algorytmie stabilnym. Dopasowanie nie następuje jednakże w kolejnych krokach składania ofert i wyborów spośród nich, ale zgodnie z regułą priorytetów. Jeśli zarówno student, jak i szpital postawili się nawzajem na pierwszym miejscu, wówczas takie sparowanie otrzymywało najwyższy priorytet. Jeśli student lub szpital postawili to drugie na pierwszym miejscu, natomiast strona przeciwna – na drugim, takie sparowanie otrzymywało priorytet drugi. I tak dalej. Przypisywanie studentów do szpitali odbywało się następnie w kolejności priorytetów. Taki algorytm był jednakże bardzo niestabilny i zachęcał do manipulacji przedstawianymi preferencjami. W wyniku okazywało się, iż ponad 80% par student-szpital przypisywało sobie nawzajem pierwsze rangi! Jeśli nie żyjemy w doskonałym świecie oznacza to najprawdopodobniej, że znaczny procent podmiotów dogadywał się poza ramami procedury, by wyprodukowała ona pożądane przez nie wyniki.

Sam algorytm stosowany przez NRMP również nie był pozbawiony wad, a nowe okoliczności socjologiczne postawiły przed nim nowe wyzwania. Jak pokazywaliśmy wcześniej, algorytm odroczonej akceptacji faworyzuje tę ze stron, która składa oferty. Z kolei druga strona może, jeśli rozegra to umiejętnie, skorzystać na manipulacji przy przyjmowaniu/odrzucaniu ofert. Ponadto powszechne stały się lekar-

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

skie małżeństwa, a zatem pary osób, które chciałyby otrzymać angaż w nieodległych geograficznie miejscach. Aby udoskonalić algorytm, NRMP zatrudniła Alvina Rotha. Znakiem czasu jest, że do rozwiązania tego złożonego problemu posługiwał sie on nie tylko kartką papieru i czymś do pisania, ale również symulacjami komputerowymi i eksperymentami ekonomicznymi.

Im bardziej skomplikowana i wielowymiarowa sytuacja, czyli mówiąc wprost − im bardziej realistyczna, tym trudniejsze stają się obliczenia. Fizycy potrafią rozwiązać w sposób ścisły zagadnienie dwóch ciał. Gdy skomplikujemy układ, dodając ciało trzecie, pojawia się konieczność albo obliczeń przybliżonych, albo numerycznych. Biorąc pod uwagę to, z jak olbrzymiej liczby ciał składa się nasz rzeczywisty świat, staje się jase, że ścisłe analityczne wyniki wyczerpują się o wiele wcześniej nim choćby zatrącamy o realną naturę rzeczywistości. Niegdyś, aby poradzić sobie z opisem zagadnień realistycznych, posługiwano się głównie przybliżeniami. We współczesnej dobie ogromnych mocy obliczeniowych komputerów naukowcy coraz częściej sięgają po ich pomoc. Eksperyment komputerowy polega na zasymulowaniu w pamięci urządzenia tych cech rzeczywistego układu, które są istotne w interesującym nas zagadnieniu, a następnie obserwowaniu jego ewolucji. Na przykład Alvin Roth i Elliott Peranson [Roth, Peranson 1999] badali, czy w pewnym algorytmie dopasowywania odgrywa rolę kolejność składania i rozpatrywania propozycji. Zamiast wykonywania żmudnych niekończących się obliczeń, naukowcy puścili symulacje komputerowe zaprogramowane tak, by interesujące ich kolejności zmieniały się pomiędzy symulacjami, a następnie porównywali końcowe wyniki dopasowań. Okazało się, że tylko w czterech przypadkach na niemal cztery tysiące rezultaty zależały od kolejności wykonywania procedury. Nie jest to dowód w sensie ścisłym, ale wystarczający do zastosowań praktycznych. W takim sensie eksperyment komputerowy jest pewnym udoskonaleniem doświadczenia rzeczywistego. Byłoby niezmiernie kłopotliwe (i długotrwałe, nie mówiąc o potencjalnych szkodach dla ludzi) przeprowadzić podobny eksperyment w rzeczywistości: tysiące rozmaitych algorytmów zaimplementować w tysiącach rzeczywistych programów rządowych i obserwować ich rezultaty.

Eksperymenty komputerowe sprawdzają się, gdy chcemy przewidzieć, co wyniknie ze znanych danych wejściowych. Drugą sprawą jest jednakże to, że ludzie nie są cząstkami materialnymi i trudniej jest przewidzieć, co zrobią w określonej sytuacji. Odnośnie do kwestii dopasowywania może powstać pytanie, czy ludzie mają skłonność do manipulowania swoimi preferencjami? Czy będą postępować racjonalnie? Najlepszy algorytm nie zda egzaminu, jeśli aktorzy nie będą skłonni do współpracy.

W kwestii oceny zachowań ludzi i ich konsekwencji pomóc może ekonomia eksperymentalna, dziedzina, której Alvin Roth jest jednym z najwybitniejszych przedstawicieli.

Większość osób słyszała o najgłośniejszych przynajmniej z ekonomicznych eksperymentów, choć żaden z nich nie zyskał takiej sławy jak ich psychologiczne odpowiedniki: eksperyment Stanleya Milgrama, badający posłuszeństwo wobec autorytetu, czy stanfordzki eksperyment więzienny Philipa Zimbardo. Niemniej i gra w ultimatum ma już chyba swoje miejsce w zbiorowej świadomości. W grze tej, przypomnijmy, jedna osoba dostaje pewną kwotę do podziału wedle swego uznania pomiędzy siebie i partnera. Może zostawić dla siebie całość. Ale, i tu tkwi trudność, partner musi zaakceptować ten podział, by ktokolwiek cokolwiek otrzymał. Jeśli druga osoba nie zgodzi się na proponowany podział, cała kwota przepada bezpowrotnie. Eksperyment ten pokazał, iż ludzie wcale nie działają czysto racjonalnie, lecz kieruje nimi również poczucie sprawiedliwości i chęć odpłaty za doznaną krzywdę. Ostatnio coraz częściej wykorzystywane są gry konstruowane na podobieństwo popularnych gier komputerowych. W takich tzw. poważnych grach gracze wcielają się w postaci, np. farmerów korzystających ze wspólnego pastwiska, czy – jak u naszych bohaterów – w studentów medycyny mających aplikować o miejsca pracy w szpitalach. Zakłada się, że w ten sposób poznaje się motywacje kierujące ludźmi w rzeczywistych i analogicznych sytuacjach, co pomaga przewidzieć ich zachowania.

Posługując się narzędziami matematycznej teorii gier oraz posiłkując eksperymentami komputerowymi i eksperymentami ekonomicznymi, Alvin Roth wybitnie przyczynił się do wypracowania ulepszonych algorytmów, lepiej sprawdzających się w rzeczywistych skomplikowanych sytuacjach rynkowych niż dotychczasowe rozwią-

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

zania. Nie dotyczy to tylko rezydentur medycznych. Kolejnym dużym obszarem, w którym praca Alvina Rotha dała dobre rezultaty, okazała sie sprawa przypisywania uczniów do szkół [Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth 2005; Roth 2008] z uwzględnieniem regionalizacji, sytuacji rodzinnej, preferencji własnych i tak dalej.

Jak się przekonaliśmy, teoria gier potrafi znacznie ułatwić życie. Zobaczymy teraz, że nieraz potrafi dosłownie je uratować!

Na początek przyjrzyjmy się od nieco bardziej abstrakcyjnej strony kolejnemu z problemów rozpracowywanych przez Lloyda Shapleya, a mianowicie teorii dopasowania jednostronnego. Znów będziemy mieli możliwość podziwiania matematyki w działaniu.

5. Mikołajkowe paczki i transplantacje nerek

Jednostronne dopasowanie różni się od dwustronnego tym, że druga strona nie ma żadnych preferencji ani prawa głosu. Zagadnienie tego typu dopasowania może powstać w szkolnej klasie na Mikołajki, kiedy to dzieci dostają prezenty. Na początku każde dziecko dostaje jakiś prezent. Niestety, część – a może i większość z nich – jest nietrafiona. Kiedy każde dziecko obejrzy już swoje i cudze dary, może się okazać, że dwoje lub więcej dzieci skorzystałoby na wymianie. Łatwo mogłoby się okazać, iż bezpośrednie dwustronne wymiany nie wystarczą, a łańcuch wymian prowadzący do najkorzystniejszego dla wszystkich rozwiązania jest mocno skomplikowany.

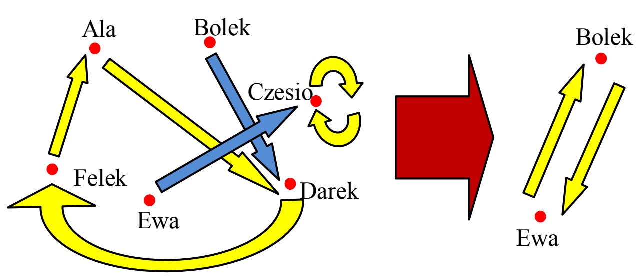
Posługując się przykładem domów i ich właścicieli, w publikacji z roku 1974 Lloyd Shapley i Herbert Scarf [Shapley, Scarf 1974] opisali algorytm efektywnej wymiany prowadzący do stabilnej alokacji dóbr. Schemat postępowania jest następujący. Pomijając osoby, które od początku mają to, co chcą mieć najbardziej, tworzymy graf skierowany, w którym wierzchołki reprezentują osoby, natomiast krawędzie skierowane są ku tej z osób, której przedmiotu posiadania dana osoba pożąda najbardziej. W grafie takim powstanie co najmniej jeden cykl. Wewnątrz każdego z istniejących cykli następuje wymiana, a osoby biorące w niej udział i ich przedmioty usuwane są z puli. W kolejnym kroku procedura powtarza się, przy czym krawędzie skierowane są ku tym osobom, które posiadają przedmiot najbardziej pożądany spośród tych, które pozostały.

Prześledźmy to na przykładzie dzieci i otrzymanych prezentów. Ala dostała autko, Bolek dostał lalkę, Czesio − misia, Darek − klocki, Ewa dostała kredki, a Felek dostał grę planszową. Tylko Czesio jest usatysfakcjonowany, natomiast pozostałe dzieci zazdroszczą co najmniej jednemu z pozostałych. W tabeli 7 przedstawione są dzieci i ich preferencje, przy czym kolorem ciemniejszym oznaczone są początkowe „przydziały”.

Tabela 7. Preferencje dzieci oraz początkowe ich rozdanie

Ala	Bolek	Czesio	Darek	Ewa	Felek
klocki	klocki	miś	gra	miś	autko
gra	miś	autko	klocki	lalka	klocki
lalka	autko	klocki	kredki	autko	miś
autko	kredki	kredki	autko	klocki	gra
miś	gra	gra	lalka	gra	kredki
kredki	lalka	lalka	miś	kredki	lalka

Źródło: opracowanie własne.



Ala	Bolek	Czesio	Darek	Ewa	Felek
klocki	kredki	miś	gra	lalka	autko

Rys. 1. Przebieg wymian i ostateczny rozdział przedmiotów na podstawie preferencji z tab. 7

Źródło: opracowanie własne.

Jak pokazano na rys. 1, w pierwszym kroku mamy dwa cykle: Czesio sam dla siebie stanowi zamknięty cykl, a Ala, Felek i Darek

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

mogą tak zamienić się zabawkami, że każde z nich dostanie to, co jest na czele jego listy. Darek daje klocki Ali, Ala przekazuje autko Felkowi, a ten − grę Darkowi. Czwórka dzieci i cztery zabawki są zatem usuwane z puli. Pozostaje Ewa i Bolek oraz kredki i lalka. Ewa woli lalkę niż będące w jej posiadaniu kredki, natomiast Bolek woli kredki. Zatem mamy kolejny zamknięty cykl i dzieci wymieniają się przedmiotami, dostając coś, co nie było na szczycie ich listy, niemniej plasuje się to wyżej niż przedmiot otrzymany na samym początku. Końcowa konfiguracja przedstawiona jest w tabelce pod grafem na rys. 1. Rzecz jasna, końcowe rozdanie zależy od punktu wyjściowego. Łatwo sprawdzić, że przy takich samych preferencjach, ale odmiennym punkcie wyjścia, przedstawionym w tab. 8, ostateczny rozdział przedmiotów będzie tym razem korzystniejszy dla Bolka, który choć tym razem również dostaje początkowo coś z dołu swojej listy, to na skutek cyklu wymian udaje mu się osiągnąć szczyt marzeń.

Tabela 8. Preferencje dzieci; początkowy rozdział i wynik wymiany

Ala	Bolek	Czesio	Darek	Ewa	Felek
klocki	klocki	miś	gra	miś	autko
gra	miś	autko	klocki	lalka	klocki
lalka	autko	klocki	kredki	autko	miś
autko	kredki	kredki	autko	klocki	gra
miś	gra	gra	lalka	gra	kredki
kredki	lalka	lalka	miś	kredki	lalka

lalka	klocki	kredki	gra	miś	autko

Źródło: opracowanie własne.

W piątym odcinku piątego sezonu wspominanego już serialu „Chirurdzy” doktor Amanda Bailey jest uszczęśliwiona. Udało jej się doprowadzić do przeszczepu „domino”, w którym wzięło udział sześcioro dawców i sześcioro biorców. Zgodnie z polskim prawodawstwem, jeśli ktoś potrzebuje nerki do przeszczepu, ma dwie opcje do wyboru: albo zapisać się na listę i czekać aż będzie dostępna nerka pobrana od osoby zmarłej i pasująca tkankowo, albo poprosić bliskich krewnych o podzielenie się tym podwójnym narządem, którego jedna kopia wystarcza do normalnego życia. W innych krajach przepisy są bardziej liberalne i zezwalają na oddawanie narządów osobom niespokrewnionym (choć wciąż nie jest dozwolone ich odsprzedawanie). Istnieją nawet ludzie, którzy, tak jak inni oddają krew, darowują jedną ze swoich nerek bliżej nieokreślonemu odbiorcy, temu, któremu akurat będzie ona zgodnie z oceną lekarzy najbardziej przydatna. Niewiele jednak osób decyduje się na aż taki altruizm i przeciętna osoba jest skłonna zrezygnować z nerki jedynie po to, by ocalić życie komuś bardzo bliskiemu. Ale co zrobić, jeśli antygeny zgodności tkankowej nie pasują?

Możliwym wyjściem jest właśnie przeczep takiego typu, jaki przeprowadzony został przez filmową doktor Bailey. Przykładowo, jeśli pacjent A ma siostrę, która chciałaby mu oddać nerkę, ale ta nie pasuje; za to pacjentka B ma męża, który jest gotów pozbyć się jednej z nerek, ale ta też nie pasuje, wówczas jeśli nerka siostry pacjenta A pasuje do pacjenta B, a organ męża pacjentki B pasuje do pacjenta A, można dokonać wymiany. Czasem łańcuszek wymian musi być dłuższy: w serialu kółko zamknęło się dopiero na sześciu nerkach i sześciu biorcach. Co więcej, taka konfiguracja jest bardzo wrażliwa, wystarczy jeden element, by posypała się cała konstrukcja. W filmie jedna z potencjalnych dawczyń dowiaduje się o zdradzie męża i postanawia się wycofać. Potrzeba było całego dyplomatycznego kunsztu serialowych lekarzy, by zdecydowała się pomimo wszystko wziąć udział w grze. Jej odstępstwo wyrządziłoby bowiem szkodę nie tylko „winowajcy", ale również pozostałym pięciu chorym.

By jak najlepiej wykorzystać dostępne organy do przeszczepu oraz uratować jak największą liczbę chorych, potrzebne są z pewnością dwie rzeczy. Po pierwsze, dane dotyczące potencjalnych biorców i dawców. Po drugie, efektywne algorytmy dopasowujące jednych do drugich. Znalezienie tych ostatnich jest sprawą skomplikowaną, jako że – dzięki lekom immunosupresyjnym – dopasowanie organu do biorcy nie musi być doskonałe. Choć zatem niektóre z nerek będą nie do przyjęcia dla konkretnego pacjenta, to może istnieć wiele innych, w przypadku których można by liczyć na udany przeszczep. Sprawą niezwykle ważną, jako że w grę wchodzi ludzkie życie, jest taka alo-

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 10 (16)

kacja dostępnych zasobów (nerek), by jak najwięcej chorych mogło cieszyć się w miarę normalną egzystencją. Przyznanie danemu biorcy pewnego organu może zablokować cały łańcuch kolejnych przeszczepów, które byłyby możliwe, gdyby pierwszy z nich otrzymał nerkę równie pasującą do niego, ale inną.

Na świecie powstają kolejne centralne programy na rzecz przeszczepów nerek. Jeden z nich, w Nowej Anglii, zainicjowany został przez Alvina Rotha oraz dwóch jego współpracowników, Tayfuna Sönmeza i M. Utku Ünwera. We trójkę byli oni również współautorami serii prac dotyczących udoskonalania metod aranżowania wymian tych organów [Roth, Sönmez, Ünver 2004; 2005; 2007].

6. Droga do Sztokholmu

Przedstawione zagadnienia, matematyczne rozważania na gruncie teorii gier i ich praktyczne zastosowania, są zaledwie wierzchołkiem góry lodowej dokonań naukowych obu tegorocznych laureatów: Lloyda S. Shapleya i Alvina E. Rotha. Zobaczyliśmy tu tylko kilka mile i gładko wyglądających kształtów ukrywających pod powierzchnią całą ogromną i zazębiającą się nawzajem maszynerię wnioskowań i dowodów umożliwiającą ich egzystencję, acz odrzucającą niespecjalistów. By tak naprawdę zrozumieć te rezultaty, ich rozszerzenia, różne warianty, warunki obowiązywania i powiązania, należałoby odbyć gruntowne studia z teorii gier i ekonomii i przebrnąć przez większość piśmiennictwa będącego dorobkiem tych dwóch naukowców oraz ich poprzedników i współpracowników. A bibliografia ich prac ma setki (dosłownie) pozycji, wśród których znajdują się też pozycje książkowe. Jeśli wydaje się to iście herkulesową pracą, cóż, nie codziennie i nie każdy dostaje Nagrodę imienia Nobla...