ARS CONJECTANDI – 300. ROCZNICA PUBLIKACJI

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 11 (17)

Walenty Ostasiewicz
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ISSN 1644-6739

Streszczenie: Cały rok 2013 ogłoszono Międzynarodowym Rokiem Statystyki z okazji 300. rocznicy publikacji dzieła J. Bernoullego pt. *Ars conjectandi*. Celem niniejszego artykułu jest prosta prezentacja tego dzieła. Jest ona poprzedzona krótkim życiorysem J. Bernoullego. Historia powstania dzieła *Ars conjectandi* związana jest z pracą Hugensa, ta z kolei powstała w związku ze słynną wymianą listów z roku 1654 między Pascalem a Fermatem, którą zainicjował Kawaler de Méré. W artykule prześledzona jest cała historia, która doprowadziła do publikacji dzieła Bernoullego.

Słowa kluczowe: *Ars conjectandi*, J. Bernoulli, prawdopodobieństwo, historia prawdopodobieństwa.

1. Krótki życiorys Jakoba Bernoullego

Rodzina Bernoullich jest pochodzenia holenderskiego. Dziadek Jakoba, też Jakob (1518-1634), wyemigrował z katolickiej Holandii i osiadł w protestanckiej Szwajcarii. W 1663 roku urodził mu się syn Niclaus (1663-1708), który miał 11 dzieci.

Piąte dziecko to słynny Jakob, o którym jest niniejszy artykuł. Data jego urodzin może być podana dwojako. Wynika to z tego, że protestanckie kantony Szwajcarii nie uznawały, do 1701 roku, gregoriańskiej reformy kalendarza. Według kalendarza juliańskiego Jakob urodził się trzeciego dnia Bożego Narodzenia, czyli 27 grudnia 1654 roku. Według kalendarza gregoriańskiego jest to data 6 stycznia 1655 roku.

Zgodnie z wolą ojca Jakob miał zostać pastorem. W 1671 roku uzyskał na uniwersytecie w Bazylei tytuł magistra sztuk, zaś w 1676 roku − licencjat z teologii. Wbrew woli ojca Jakob studiował też matematykę i astronomię na tym samym uniwersytecie. Po uzyskaniu licencjatu z teologii rozpoczął swe podróże po Szwajcarii i Francji.

Utrzymywał się z nauczania dzieci zamożnych rodów. Jak wynika z jego notatek podróżnych, nie był on zachwycony ani sposobem zarabiania, ani też sposobem traktowania go przez Francuzów, o których miał dość złą opinię. Z jego notatek podróżnych dowiadujemy się, że nauczał po 3 godziny dziennie. Udzielał się społecznie, wygłosił na przykład 18 kazań w Genewie, trzy razy wychodził z czaszą komunii świętej. Bardzo krytycznie oceniał zwyczaje Francuzów: mieszkańcy Genewy wcale nie obchodzą Wielkiego Tygodnia, ani Bożego Narodzenia, ani Nowego Roku. Zmarłych grzebią bez chwały, bez krzyża i bez Boga (*sine Lux, sine Crux, et sine Deus*), po prostu rzucają ich do grobu. W całej Francji je się 4 razy dziennie, Francuzi nigdy nie wychodzą z domu bez śniadania i bez wypicia szklanki wina, dodaje: „tak jak nasi pijacy", a w nocy jest niebezpiecznie spacerować po mieście, bo można być „ochrzczonym" z któregoś okna z góry.

W 1681 roku udał się w kolejną podróż, ale tym razem w celu nawiązania kontaktów naukowych. W 1684 roku W. Leibniz opublikował swą pracę na temat rachunku różniczkowo-całkowego. J. Bernoulli od razu zrozumiał istotę i wagę tego odkrycia. W 1687 roku pisze do Leibniza list z prośbą o podanie więcej danych na temat tego rachunku. Leibniz odpowiedział mu dopiero w 1690 roku. Z kolei Bernoulli odpisał po upływie pięciu lat, w 1695 roku.

Niezależnie od tych przerw w korespondowaniu później wymienili ze sobą wiele listów. Do czasów obecnych zachowało się ich 21. Z korespondencji dowiadujemy się między innymi, od kiedy Bernoulli zajmował się problematyką prawdopodobieństwa, czyli problematyką gier losowych, i kiedy udowodnił twierdzenie nazywane obecnie jego imieniem.

Problematyką gier losowych J. Bernoulli zajmował się w latach 1684-1689. O postępach przygotowywanej rozprawy na ten temat informował Leibniza. Leibniz był bardzo zainteresowany wynikami, jakie uzyskiwał Bernoulli. Wyrażał jednak zdecydowaną wątpliwość w prawdziwość głównego twierdzenia. Sądził bowiem, że tego, co z natury jest nieskończone, nie można przybliżyć (aproksymować) czymś skończonym. Jak się później okazało, mylił się głównie z tego powodu, że nie znał dowodu, jaki zastosował Bernoulli do wykazania prawdziwości swego „złotego twierdzenia", nad którym pracował 20 lat. Istotną nowość podejścia Bernoullego stanowiło wykorzystanie asymptotycznego „przybliżania się” do nieznanej wielkości, zamiast jej aproksymowania.

Udowodnione przez siebie twierdzenie matematyczne Bernoulli zamierzał wykorzystać w różnych naukach społecznych. Potrzebował do tego nie tylko obserwacji empirycznych, jakie w tych naukach były już poczynione, ale chciał też i zgłębić samą istotę tych nauk.

W swym liście z listopada 1703 roku Bernoulli prosi Leibniza o jego prace dotyczące jurysprudencji, a także o wypożyczenie pracy holenderskiego uczonego Johanna de Witta na temat rent życiowych i ich wyceny. Prośbę o pracę de Witta Bernoulli powtarzał wielokrotnie, ostatni raz w liście z 28 lutego 1705 roku. Pracy tej jednak nie uzyskał. W sierpniu tego samego roku Bernoulli umiera, nie dokończywszy swego dzieła.

Wyniki Bernoullego znane były w ówczesnym świecie naukowym. Nic więc dziwnego, że oczekiwano ich upublicznienia w formie publikacji. Niestety praca ukazała się drukiem dopiero osiem lat po śmierci jej autora. Główną przyczynę takiego opóźnienia stanowił Johann Bernoulli, o 13 lat młodszy brat Jakoba. Jakob był jego mentorem i nauczycielem matematyki. Uczeń był niezwykle zdolny, ale też nadzwyczaj ambitny, zazdrosny i uparty, a nade wszystko − nieuczciwy, kłamliwy, grzeszący plagiatem pracy, nawet swego syna.

Ponieważ był studentem Jakoba, znał dobrze jego pracę i był najbardziej odpowiednią osobą do przeprowadzania redakcji rękopisu i zorganizowania jego publikacji. Wdowa po Jakobie oraz jego własny syn, obawiając się nieuczciwości Johanna, nie chcieli udostępnić mu posiadanych rękopisów. Do publikacji dzieła Jakoba przyczynił się jego syn Niclaus, a nie bratanek. W literaturze często podaje się mylnie, że to bratanek, a nie syn, przyczynił się do tej publikacji. O pomyłkę było bardzo łatwo, bo obaj urodzili się w tym samym dniu i tak samo zostali ochrzczeni.

Prześledźmy w wielkim skrócie całą dramatyczną historię ośmiu lat od śmierci Jakoba do opublikowania jego pracy.

1. Dnia 14 października 1705 roku Bernard le Bovier de Fontanelle wygłasza w Akademii w Paryżu mowę pogrzebową. Na podstawie materiałów dostarczonych przez J. Hermanna (studenta Jakoba) referuje pracę Bernoullego.

2. Joseph Saurin publikuje w 1706 roku mowę pochwalną o Jakobie Bernoullim w czasopiśmie „Journal des Scavans", w której podaje dużo więcej szczegółów o jego pracy.
3. W 1708 roku P. Montmort publikuje (anonimowo) pracę pt. *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, w której dość szczegółowo omawia pracę Jakoba, tytuł której tłumaczy na język francuski jako *l'art de deviner*.
4. W 1709 roku Nicolaus – bratanek Jakoba, ogłasza pracę pt. *De usu artis conjectandi in jure* jako rozprawę doktorską. W dysertacji tej wstawia dosłownie całe frgmenty z rękopisu swego wujka. Nicolaus miał bowiem dostęp do wszystkich prac Jakoba, gdyż był jego studentem, a zarazem sekretarzem. W dysertacji swej wykorzystywał nawet zapisy z dziennika, który nie był przeznaczony do druku. Mimo iż rozprawa *De Usu* zawiera wiele oryginalnych propozycji wykorzystania wyników Jakoba w sądownictwie, to jednak postępek jego bratanka został potraktowany jako plagiat.
5. W 1710 roku Montmort proponuje sfinansowanie publikacji. Oferta nie została przyjęta, ale posłużyła prawdopodobnie jako pretekst bratankowi do przekonania swego kuzyna oraz swojej ciotki (jego matki) do opublikowania dzieła Jakoba.
6. W 1710 roku Nicolaus (bratanek) pisze list do Leibniza, informując go, że chętnie uzupełni rękopis wujka i przygotuje go do druku, jeśli tylko będzie mu udostępniony rękopis. Praca była już jednak w druku i bratanek napisał do niej tylko przedmowę.
7. Praca Jakoba Bernoullego opublikowali na swój koszt bracia Thurneysen w swoim wydawnictwie.

Oprócz tej, chyba najbardziej znanej pracy, J. Bernoulli dokonał wielu odkryć matematycznych. W szczególności wspólnie ze swym młodszym bratem, z którym tak bardzo się publicznie kłócili, przyczynili się do rozwoju rachunku różniczkowo-całkowego i jego popularyzacji. Sam Leibniz w liście do Johanna pisał, że stworzenie takiego rachunku jest dziełem zarówno jego, jak i obu braci Bernoullich: *vestra enim non minus haec methodus, quam mea est* (por. [Sheynin 2009]).

Jednym z ważnych odkryć matematycznych J. Bernoullego jest spirala logarytmiczna. Spiralą tą był tak zafascynowany, że pragnął, aby wyrzeźbiono ją na jego nagrobku z napisem: *eadem mutata resurgo*, czyli „pozostaję znów ta sama, chociaż się zmieniłam" [Maligranda]. Nie wiadomo dlaczego, ale zamiast spirali logarytmicznej, wyryto spiralę Archimedesa. Na płycie nagrobnej jest napis, który w tłumaczeniu na język polski jest następujący:

Jacob Bernoulli, matematyk, niezrównany. Przez ponad 18 lat profesor Uniwersytetu w Bazylei; członek Królewskich Akademii w Paryżu i Berlinie; znany z tego, co napisał i z chronicznego chorowania, ale o znakomitym umyśle do końca życia; umarł w roku łaskawym 1705, 16 sierpnia, w wieku 50 lat i 7 miesięcy, oczekując wskrzeszenia. Judith Stupanus, jego żona od 20 lat, i jego dwoje dzieci wznieśli ten pomnik dla małżonka i ojca, którego wielki brak ciągle odczuwają.

2. Korespondencja listowna Pascala z Fermatem

Do korespondencji tych dwóch wielkich uczonych przyczynił się niejaki Kawaler de Méré.

Prawie każdy podręcznik, w którym występuje pojęcie prawdopodobieństwa, rozpoczyna się od historii jego rozwoju. Niemal standardowo powtarzana jest nieprawdziwa historia o tym, że oto hazardzista Kawaler de Méré zwraca się do Pascala z prośbą o rozwiązanie dwóch zadań związanych z grą w kości. Pascal w korespondencji listownej z Fermatem rozwiązuje zadania i tworzy w ten sposób fundament teorii prawdopodobieństwa.

Przez niektórych Kawaler de Méré zaliczany jest nawet do współtwórców tej teorii. Któż to był ów Kawaler?

Kawaler de Méré (*Chevalier de Méré*), czyli Antoine Gombaud (1607-1684), był człowiekiem dobrze wykształconym, filozofem nauczającym etyki. Był znaczącą osobistością na dworze króla Ludwika XIV, był jego doradcą, szczególnie w sprawach bardzo delikatnych. Dzięki elokwencji i nienagannym manierom był bywalcem wielu salonów. Prowadził też obszerną korespondencję ze znanymi osobistościami.

Nie wiadomo jednak dokładnie, kiedy i jak doszło do jego spotkania z Pascalem. Bardzo możliwe, że doszło do niego, jak podaje Ore, w 1653 roku podczas gry w kości, w okresie tzw. światowego życia Pascala. Ani Kawaler de Méré, ani tym bardziej Pascal hazardzistami nie byli. W jednym z zachowanych listów do swego przyjaciela, Miltona, de Méré ubolewa nad jego przywiązaniem do hazardu. Będąc miłośnikiem uroków natury, zachęca też swego przyjaciela, by bardziej się nimi zachwycał niż oddawał się niewoli hazardu. Gry w kości były modne we Francji. Znane też były problemy matematyczne z nimi związane. Francuzi zapoznali się z nimi w czasie swych najazdów do Włoch. Wiadomo, że matematycy włoscy problematyką gier losowych zajmowali się przynajmniej od XIV wieku. Ich prace znał z całą pewnością dobrze oczytany Kawaler de Méré. Próbował też sam rozwiązywać niektóre problemy. Prawdopodobnie niezbyt mu się to udawało i zwracał się wówczas do znanych matematyków. Między innymi do Robervala i Pascala. W jednym z listów do Fermata Pascal napisał, że de Méré jest bardzo zdolny, ale matematykiem to on nie jest, co jest poważnym defektem. On nawet nie wie, że prostą można dzielić w nieskończoność, i sądzi, że składa się ona ze skończonej liczby punktów. Sam Kawaler de Méré miał o sobie zupełnie inne mniemanie. W liście do Pascala napisanym po 1656 roku oznajmiał, że on odkrył w matematyce takie rzeczy, o których starożytni nawet nie myśleli, zaś Europejczycy byli nimi mocno zdziwieni. Potrafił nawet napisać, że oto właśnie o jego odkryciach pisał sam Pascal, a także Huygens, Fermat i inni (por. [Ore 1960]).

Korespondencja listowna Fermata z Pascalem dotycząca gier losowych Fermata trwała cztery miesiące: od lipca do października 1654 roku. Niestety nie zachowała się ona w całości. Przetrwało 6 listów:

1. F → P: lipiec, 1654
2. P → F: 29.VII.1654
3. P → F: 24.VIII.1654
4. F → P: 29.VIII.1654
5. F → P: 25.IX.1654
6. P → F: 27.X.1654

Niecały miesiąc po ostatnim liście, a dokładnie 23 listopada 1654 roku, Pascal, po doznanym objawieniu, zrywa z działalnością naukową i poświęca się wyłącznie sprawom religijnym.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 11 (17)

Listy te poświęcone są głównie dwóm zadaniom gier losowych. Zadania te mają już nawet swoje utrwalone nazwy. Przypomnijmy je. Zadanie pierwsze w języku francuskim nazywane jest jako *probleme des partie,* po angielsku jest to *division problem* lub *problem of points*. Jest to zadanie sprawiedliwego podziału stawki w grze losowej w przypadku, gdy gra ta z jakichś powodów musi być przerwana przed jej definitywnym zakończeniem. Nad rozwiązaniem takiego zadania Włosi trudzili się już w XIV wieku. Pierwsza znana publikacja pochodzi z roku 1494. Problem podziału stawki jest tam sformułowany następująco: do wygrania całej partii potrzeba 60 punktów. Każda wygrana runda daje 10 punktów. Stawka w grze wynosi 10 dukatów. Z jakichś powodów gra musi być przerwana w momencie, gdy jeden z graczy uzyskał 50 punktów, drugi zaś − 20 punktów. Zadanie polega na sprawiedliwym podziale 10 dukatów.

Zadanie, jakie rozwiązali Fermat i Pascal, było bardzo podobne. Dwóch graczy: A i B, gra w grę sprawiedliwą. Umawiają się, że kto pierwszy wygra sześć partii, ten zabiera całą stawkę (którą utworzyli po równo). Po rozegraniu pięciu rund gracz A wygrał dwie partie, zaś gracz B – trzy. Żaden nie jest uprawniony do zabrania całej stawki gry, ale muszą grę z jakichś powodów przerwać. Problem polega na tym, aby stawkę podzielić sprawiedliwie. Prześledźmy rozwiązanie, jakie podał Fermat.

Aby określić sprawiedliwy podział, trzeba wiedzieć, ile rund należy jeszcze rozegrać, aby gra była rozstrzygnięta. W danym przypadku, gdyby rozegrano jeszcze 4 rundy, to gra by była rozstrzygnięta. Zobaczmy wszystkie możliwe wyniki tych czterech rund.

r1=AAAA	r5=ABAA	r9=BAAA	r13=BBAA
r2=AAAB	r6=ABAB	r10=BAAB	r14=BBAB
r3=AABA	r7=ABBA	r11=BABA	r15=BBBA
r4=AABB	r8=ABBB	r12=BABB	r16=BBBB

Symbolem A oznaczona jest wygrana gracza A, litera B oznacza zaś wygraną gracza B.

W momencie przerwania gry graczowi A brakowało 3 punktów (trzech wygranych), graczowi B do zabrania całej stawki brakowało zaś 2 punktów.

Z listy przedstawionych wszystkich 16 możliwości odczytujemy, że gracz A wygrywa w przypadku pięciu rund: r1, r2, r3, r5, r9. Gracz

B wygrywa w pozostałych 11 rundach. Stawkę należy więc podzielić w stosunku 5 części graczowi A oraz 11 części graczowi B. Innymi słowy, udział gracza A wynosi $\frac{5}{16}$, zaś gracza B – $\frac{11}{16}$.

Pascal rozwiązał to zadanie, wykorzystując to, co obecnie nazywa się trójkątem Pascala.

Wypiszmy tyle wierszy tego trójkąta, aby w jego podstawie było tyle wyrazów (liczb), ile jest brakujących rund do definitywnego zakończenia gry. Trójkąt ten jest następujący:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\multicolumn{5}{c}{\underline{1\quad\quad 4\quad\quad 6}} & & \multicolumn{3}{c}{\underline{4\quad\quad 1}} \\
\multicolumn{5}{c}{A} & & \multicolumn{3}{c}{B}
\end{array}$$

W podstawie tego trójkąta mamy 5 wyrazów: trzy pierwsze odpowiadają trzem brakującym rundom gracza A, dwie następne – odpowiadają brakującej liczbie rund gracza B.

Suma wyrazów przypisanych graczowi A wynosi więc 1 + 4 + 6 = 11, zaś suma wyrazów przypisanych graczowi B wynosi o 4 + 1 = 5. Stawkę należy podzielić w stosunku 11:5. Zauważmy, że liczby 1, 4, 6 uzyskujemy odpowiednio jako C_4^4, C_4^3, C_4^2.

Podobnie kolejne wyrazy trójkąta Pascala, czyli liczby 4 i 1, są odpowiednio równe C_4^1 i C_4^0. Podziału stawki należy więc dokonać w stosunku : $C_4^4 + C_4^3 + C_4^2 : C_4^1 + C_4^0$. Równoważnie $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 : C_4^3 + C_4^4$.

Drugi problem, z jakim kawaler de Méré zwrócił się do Pascala, nazywa się problemem kości, w języku francuskim określony był jako *le parti des dés*, po angielsku – jako *dice problem*.

De Méré wiedział, że grając kostką do gry, warto stawiać na to, że w czterech rzutach szóstka pojawi się przynajmniej jeden raz przeciwko temu, że nie pojawi się ona ani razu. Wynika to z prostych obliczeń. Przy jednokrotnym rzucie mamy 6 wszystkich możliwości, w tym jest tylko jedna możliwość sprzyjająca i pięć możliwości niesprzyjających. Przy czterech rzutach mamy 6· 6 · 6 · 6 = 1296 możliwości, w tym 625 niesprzyjających oraz 671 sprzyjających. Łatwo to

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 11 (17)

sprawdzić, nawet wypisując wszystkie możliwości: 1111, 1112, …, 6666. Szanse, że szóstka nie pojawi się ani razu w czterech rzutach są więc jak 625 do 671. Są one więc mniejsze od szansy pojawienia się przynajmniej jednej szóstki, która wynosi jak 671 do 625.

Używając współczesnego języka probabilistycznego, obliczamy częstość zdarzenia, że przy czterokrotnym rzucie kostką do gry nie wypadnie ani jedna szóstka:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} = \frac{625}{625+671} < \frac{1}{2}.$$

Częstość pojawienia się przynajmniej jednej szóstki wynosi:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}.$$

Z tego wynika, że warto stawiać zakład na zdarzenie bardziej prawdopodobne, czyli na pojawienie się przynajmniej jednej szóstki.

Rozpatrzmy teraz grę polegającą na rzucie parą kostek; stawiamy podobne zadanie: przy jakiej liczbie rzutów trzeba przyjmować zakład, że wypadnie przynajmniej jedna para szóstek, przeciwko temu, że taka para nie pojawi się ani jeden raz.

Rozwiązując to zadanie, de Méré rozumował następująco: przy rzucie 1 kostką mamy 6 możliwości, przy rzucie zaś dwoma kostkami mamy 36 możliwości, czyli 6 razy więcej. Na zasadzie proporcjonalności: zamiast 4 rzutów powinno wystarczyć ich 6 razy więcej, czyli 24 rzuty powinny uzasadnić stawianie zakładu na wypadnięcie przynajmniej jednej pary szóstek przy 24 rzutach przeciwko temu, że taka para ani raz się nie pojawi. Ale podobno de Méré obliczył, że:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4913.$$

Przeczy to rozsądnemu rozumowaniu podanemu wyżej. Dlatego też de Méré określił to niedorzecznością (*grande scandal*), niektórzy nazywają zaś to paradoksem Kawalera de Méré. Sa też tacy, którzy uważają, że de Méré niezgodność tę odkrył empirycznie: grając wielokrotnie, zauważył, że korzystniej jest stawiać na to, że para szóstek nie wypadnie w ogóle, niż na to, że pojawi się ona przynajmniej jeden raz.

Ale przy rzucie dwiema kostkami mamy:

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,509$$

oraz

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,491 < \frac{1}{2}.$$

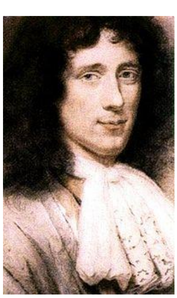
Oznacza to, że korzystniej jest stawiać na nie pojawienie się pary szóstek niż na pojawienie się jej w serii 24 rzutów. Dopiero przy 25 rzutach korzystniej jest stawiać na pojawienie się pary szóstek przynajmniej jeden raz:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} < \frac{1}{2}.$$

Zadaniu temu, jako zbyt prostemu, Pascal z Fermatem nie poświęcali zbyt dużo uwagi.

3. Christian Huygens: rachunek gier losowych

Ch. Huygens (1629-1695) pochodził z zamożnej i znanej rodziny holenderskiej. W wieku 16 lat rozpoczął studia prawnicze na Uniwersytecie w Leyden. Porzucił je jednak dla matematyki, którą przez dwa lata studiował w Bredzie, gdzie jego nauczycielem był Francis van Schooten.

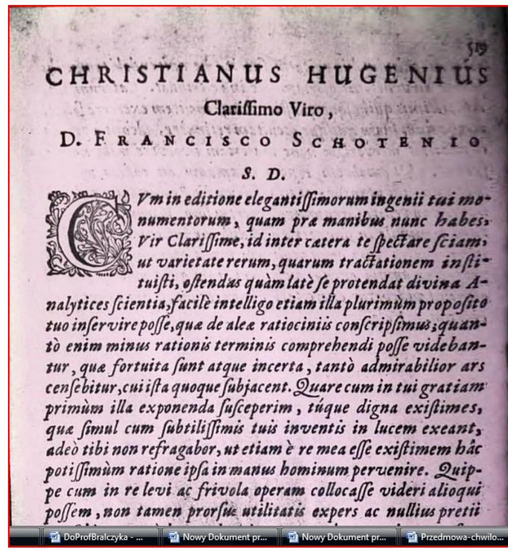


W 1655 roku Huygens udał się do Francji na doktoranckie studia prawnicze. Od lipca do listopada 1655 roku przebywał w Paryżu. Zainteresował się problematyką poruszoną w korespondencji listowej Fermata z Pascalem. Niestety, z Pascalem nie mógł się spotkać, gdyż już od roku przebywał on wśród samotników przy klasztorze Port-Royal. Spotkał się jedynie z Robervalem, któremu Kawaler de Méré przedstawił swoje „odkrycie” błędnych rachunków kombinatorycznych prowadzących niedorzeczności. Po powrocie do Holandii Ch. Huygens z entuzjazmem przystąpił do studiowania proble-

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 11 (17)

mów gier losowych. Już w marcu 1656 roku napisał do van Schootena, że ma gotowy rękopis o grach w kości.

W 1657 praca była już opublikowana w języku łacińskim pod tytułem *De Ratiociniis In Aleae Ludo* jako dodatek do książki van Schootena.



519

CHRISTIANUS HUGENIUS
Clarissimo Viro,
D. FRANCISCO SCHOTENIO
S. D.

Cum in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quàm latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito tuo inservire posse, quæ de aleæ ratiociniis conscripsimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, túque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeò tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hâc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii

Cała rozprawa liczy zaledwie 15 stron, na które składa się 14 rozwiązanych zadań oraz 5 zadań pozostawionych do rozwiązania czytelnikom. Pierwszą stronę tej rozprawy pokazano obok. W 1692 roku J. Arbuthnot przetłumaczył ją na język angielski. Nieco później pojawiły się dwa inne tłumaczenia, jak też i nowe wydania tłumaczenia Arbuthnota. To właśnie Huygens wpłynął na zainteresowanie Bernoullego problematyką gier losowych. Tak więc dzisiaj wiemy, że tej trójce: Fermatowi, Pascalowi i Huygensowi, zawdzięczamy położenie fundamentów pod budowlę nazywaną później teorią prawdopodobieństwa.

Zauważmy jednak, że żaden z tych trzech wielkich ludzi nie używał pojęcia „prawdopodobieństwo”. Wszyscy trzej zajmowali się grami losowymi, przeważnie grami w kości (ludo alea). Interesowały ich rozumowania ilościowe (kalkulacje) dotyczące sprawiedliwej ceny uczestnictwa w grze, sprawiedliwego podziału stawki, a także określanie szans wygrania.

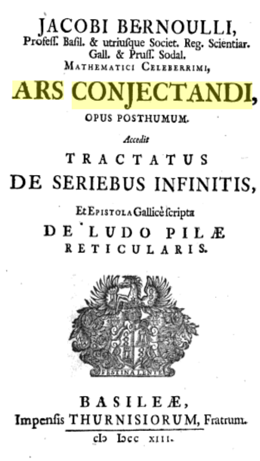
Pojęciem podstawowym rachunku gier losowych było pojęcie „sprawiedliwej ceny”, czyli sprawiedliwego podziału stawki w grze. Za pomocą tego pojęcia definiowane były szanse wygrania. Szanse definiowano jako stosunek części stawki. Na przykład, jeśli się mówi, że szanse wygrania są jak 2 do 3, co się zapisuje w postaci ilorazu 2:3, to oznacza to, że są szanse wygrać 2 części całej stawki, przeciwnik zaś ma nadzieję na uzyskanie 3 części stawki.

Właśnie pojęcie nadziei wygrania stanowi podstawowe pojęcia rachunku gier losowych.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY Nr 11 (17)

4. *Ars conjectandi*: krótka prezentacja

Strona tytułowa tego dzieła i jej polskie tłumaczenie pokazano poniżej.

Oryginalna strona tytułowa	Polskie tłumaczenie
 JACOBI BERNOULLI, Profeff. Bafil. & utriufque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruff. Sodal. MATHEMATICI CELEBERRIMI, ARS CONJECTANDI, OPUS POSTHUMUM. Accedit TRACTATUS DE SERIEBUS INFINITIS, Et EPISTOLA Gallicè fcripta DE LUDO PILÆ RETICULARIS. BASILEÆ, Impenfis THURNISIORUM, Fratrum. clↃ Iↄcc xiii.	JAKUB BERNOULLI Profesor Bazylei i członek Królewskich Towarzystw Naukowych znamienity matematyk **SZTUKA PRZYPUSZCZANIA** Dzieło pośmiertne do którego dodano Traktat **O szeregach nieskończonych,** oraz list do przyjaciela po francusku **O grze w tenisa** **Bazylea** Wyd. Braci Thurneysen 1713

To słynne dzieło Bernoullego poprzedzone jest krótką przedmową, którą napisał Nicolaus Bernoulli − bratanek Jakoba. Samo dzieło składa się z czterech części. Część pierwsza zatytułowana jest następująco:

 ARTIS CONJECTANDI PARS PRIMA, Complectens Tractatum Hugenii de Ratiociniis in Ludo Aleæ, Cum Annotationibus JACOBI BERNOULLJ. CHRIST. HUGENII ad FRANC. SCHOOTENIUM Præfatio. CUm in editione elegantiffimorum ingenii Tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clariffime, id inter cætera Te fpectare fciam, ut varietate rerum, quarum tractationem inftituifti, oftendas quàm latè fe protendat divina Analytices fcientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm propofito Tuo infervire poffe, quæ de Aleæ Ratiociniis A con-	Czyli: SZTUKA PRZYPUSZCZANIA Część pierwsza zawierająca Traktat Huygensa o Rachunkach w grze w kości

Przedstawiony jest więc w niej rachunek gier losowych opracowany przez Huygensa. Bernoulli znacznie go rozszerzył i rozwinął. Piętnastostronicowe dziełko Huygensa zostało prawie pięciokrotnie rozszerzone – do 71 stron.

Podstawę całego rachunku stanowi następująca zasada: los gracza, czyli jego nadzieja wygrania w sprawiedliwej grze losowej, jest wart tyle, ile można w tej grze uzyskać bez ponoszenia żadnej straty.

Zasadę tę Bernoulli nazywa nawet aksjomatem rachunku gier losowych. W języku polskim nazywano ją dawniej nadzieją matematyczną, obecnie zaś nazywa się ją wartością oczekiwaną. W języku łacińskim pojęcie losu określano słowem *sors*, zaś nadzieję gracza − jako *expectatio*, oba te pojęcia często traktowano zamiennie, pisząc nawet: *sors sive expectatio* (los, czyli nadzieja). Ta niezbyt klarowna definicja losu, czyli nadziei (*die Hoffnung eines Spielers*), jest bardzo jasno przedstawiona na przykładzie podanym przez Huygensa. Huygens podaje ten przykład zaraz na samym początku swego traktatu, tuż przed pierwszym zadaniem. Przykład ten jest następujący.

Załóżmy, że w jednej ręce mam 3 monety, w drugiej 7; pozwalam, komuś wybrać jedną z nich. Wówczas jego nadzieja, czyli wartość losu, wynosi 5 monet. W zadaniu trzecim wartość ta jest uogólniona. Jeśli danych jest p możliwości uzyskania wielkości a oraz q możliwości uzyskania wielkości b, to wartość nadziei wynosi $(pa+b)/(p+q)$.

Spośród wszystkich zadań rozpatrywanych w części pierwszej rozprawy zatrzymajmy się przy zadaniu czwartym oraz zadaniu 11. Zauważmy przy okazji, że wszystkie rozwiązane zadania określane są mianem *propositio*. W tłumaczeniu angielskim używa się więc określenia *proposition*, odpowiednikiem rosyjskim jest słowo *predłożenije,* polskim zaś − *twierdzenie,* nie zaś „propozycja”.

Problem rozpatrywany w zadaniu (twierdzeniu) czwartym jest prawie identyczny z problemem, jaki został rozwiązany przez Fermata i Pascala. Rozpatrywany przez nich problem polegał na sprawiedliwym podziale stawki w grze, gdy ta gra została przerwana w momencie, gdy jednemu z graczy brakowało trzech rund do wygranej, drugiemu zaś − dwóch rund. Huygens formułuje taki sam problem podziału stawki po przerwaniu gry, ale dla przypadku, gdy jednemu z graczy brakowało jednej rundy, drugiemu − dwóch rund. Podaje też prawidłowe rozwiązanie problemu: stawkę należy podzielić w stosunku 3:1. Przy okazji tego zadania podane jest inne, ciekawe wyjaśnienie pojęcia wartości nadziei (oczekiwania) w tej grze, jako *ceny* uczestnictwa w grze. Przedstawmy tę interpretację. Ponieważ stawkę należy podzielić w stosunku 3:1, oznacza to, że jeśli ktokolwiek zechce zająć miejsce pierwszego gracza i kontynuować grę, musi mu zapłacić ¾ stawki w grze, taka jest bowiem wartość oczekiwana pierwszego gracza, bo w momencie przerwania gry on ma nadzieję na uzyskanie ¾ stawki. W komentarzu do tego zadania Bernoulli uogólnia pojęcie stawki w grze na dowolną nagrodę, na przykład stawką w grze może być wieniec laurowy, miejsce pracy, życie itp., zamiast liczb wprowadza też oznaczenia symboliczne.

W zadaniu 11 rozpatrywana jest gra polegająca na rzucie dwiema kostkami. Zadaniem jest określenie liczby rzutów usprawiedliwiających postawienie zakładu na pojawienie się dwóch szóstek przeciwko niepojawieniu się dwóch szóstek. Huygens podaje prawidłowy wynik; wynosi on 25 rzutów.

Bernoulli w uwagach do tego zadania, powołując się na listy Fermata i Pascala opublikowane w Tuluzie w 1679 roku, zauważa, że zadanie takie przedłożył Pascalowi pewien człowiek dobrze myślący, ale pozbawiony wiedzy matematycznej, i dlatego sądził, że 24 rzuty są wystarczające. Był to oczywiście de Méré. Ciekawsza jest jednak uwaga dotycząca ogólnego sposobu rozwiązywania podobnych problemów. Przedstawmy ją w skrócie.

Bernoulli przyjmuje, że $a = b + c$ jest to liczba wszystkich możliwości w określonej grze, przy czym b to liczba sytuacji wyszczególnionych, wyróżnionych jako sukcesy, zaś c to liczba pozostałych przypadków. Jeśli ktokolwiek chce wygrać całą stawkę, wynoszącą jedną jednostkę, w pierwszej rundzie (np. jednorazowy rzut kostką), to jego szanse są równe b, zaś szanse przegrania są równe c. Stąd wynika, że wartość jego nadziei wynosi $(a-c)/a$. Używając współczesnego języka rachunku prawdopodobieństwa, tę wartość oczekiwaną uzyskujemy następująco:

$$\frac{b}{a}\cdot 1+\frac{c}{a}\cdot 0=\frac{b}{a}=\frac{a-c}{a}.$$

Jeśli ten sam gracz chce wygrać po dwóch rundach, to jego szanse wygrania całej stawki (równej 1) wynoszą a-c, zaś szanse wygrania

„swojej" nadziei z pierwszej rundy wynoszą c. Oznacza to, że wartość jego nadziei w takiej grze wynosi $(aa - cc)/aa$. Tę wartość oczekiwaną uzyskujemy następująco:

$$\frac{a-c}{a}\cdot 1+\frac{c}{a}\cdot\frac{a-c}{a}=\frac{a-c}{a}+\frac{ca-cc}{aa}=\frac{aa-cc}{aa}.$$

W uwagach do zadania 12 Bernoulli podaje ogólny wzór na wartość nadziei w grze polegającej na uzyskaniu m wyszczególnionych przypadków (sukcesów) spośród n możliwości.

Ostatnie zdanie uwag do zadania 12 jest następujące: „Czyli oczekiwanie (nadzieja) gracza będzie warte:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-m+1)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots m)}\cdot\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$$

lub

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-m)}\cdot\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}\text{''}.$$

Jeżeli zastosujemy symbol C_n^m, nieznany Bernoullemu, to oba powyższe wyrażenia zapiszemy następująco:

$$C_n^m\frac{b^m\cdot c^{n-m}}{a^n},\ C_n^{n-m}\frac{b^m\cdot c^{n-m}}{a^n}.$$

Dokonajmy prostego przekształcenia pierwszego wyrażenia:

$$C_n^m\frac{b^m\cdot c^{n-m}}{a^n}=C_n^m\frac{b^m\cdot c^{n-m}}{a^m\cdot a^{n-m}}=C_n^m\left(\frac{b}{a}\right)^m\left(\frac{c}{a}\right)^{n-m}.$$

Jest to więc wzór określający rozkład dwumianowy. Zupełnie niestosowana jest więc sarkastyczna uwaga zawarta w pracy [Laudański] i powtórzona w pracy [Laudański 2010] o tym, że Majstrov w swej pracy [Majstrov 1967] jakoby „zmyślił" ten wzór, gdyż ani takiej postaci wzoru, „ani jej równoważnej nie znajdziemy" w pracy Bernoullego. Szukać wcale nie trzeba, wystarczy bowiem znajomość elementarnych przekształceń algebraicznych, aby się przekonać, że Bernoulli

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY Nr 11 (17)

w ostatnim zdaniu do uwag problemu XII podaje dokładnie to, co jedni nazywają dzisiaj wzorem Bernoullego, inni zaś − rozkładem dwumianowym.

W części drugiej traktatu Bernoullego, o następującym tytule:

ARTIS CONJECTANDI
PARS SECUNDA,
continens
Doctrinam de Permutationibus
& Combinationibus.

przedstawiony jest rachunek kombinatoryczny. W części trzeciej omówiono zastosowanie tego rachunku do gier losowych. W części czwartej zaś Bernoulli zamierzał przedstawić wykorzystanie oraz zastosowanie metod rachunku gier losowych do rozwiązywania problemów w sprawach społecznych, moralnych i ekonomicznych.

Ze względu na oryginalność i bogactwo idei zawartych w tej części wymaga ona osobnego omówienia. Zwróćmy przynajmniej uwagę na to, że po raz pierwszy pojawia się w tej pracy pojęcie prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo zdefiniowane jest jako stopień pewności. Oto (słynna już) oryginalna definicja: *Probabilitas enim est gradus certitudinus, et ab hac differt ut pars a toto.* Jest to więc stopień pewności, i tak się od niej różni, jak część od całości.

Właśnie tak rozumiane prawdopodobieństwo stanowi podstawę sztuki przypuszczania, której Bernoulli nadaje też nazwę „stochastyka”. Sztukę tę Bernoulli definiuje jako sztukę pomiaru prawdopodobieństwa rzeczy tak dokładnie, jak to tylko możliwe. Moglibyśmy więc powiedzieć, że jest to sztuka obliczania prawdopodobieństw. Dokładnie taki tytuł ma niemieckie tłumaczenie: *Wahrnscheinlichkeitsrechnung*.

Sztukę taką Bernoulli planował wykorzystać do rozwiązywaniu problemów społecznych. Zamierzenia swego niestety nie dokończył. Zaraz po udowodnieniu słynnego „złotego twierdzenia” praca się urywa. W dalszej części tekstu pokazano początek części czwartej i jej ostatnią stronę.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 11 (17)

<table>
<tr><th>Pierwsza strona czwartej części</th><th>Ostatnia strona czwartej części</th></tr>
<tr><td>210 ARTIS CONJECTANDI

ARTIS CONJECTANDI
PARS QUARTA,
tradens
Uſum & applicationem præcedentis Doctrinæ in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis.

CAPUT I.
Præliminaria quædam de Certitudine, Probabilitate, Neceſſitate & Contingentia Rerum.

Certitudo rei cujusvis ſpectatur vel *objectivè* & in ſe; nec aliud ſignificat, quàm ipſam veritatem exiſtentiæ aut futuritionis illius rei: vel *ſubjective* & in ordine ad nos; & conſiſtit in menſura cognitionis noſtræ circa hanc veritatem.
Omnia, quæ ſub Sole ſunt vel fiunt, præterita, præſentia ſive futura, in ſe & objectivè ſummam ſemper certitudinem habent. De præſentibus & præteritis conſtat; quoniam eo ipſo, quo ſunt vel fuerunt, non poſſunt non eſſe vel fuiſſe: Nec de futuris ambigendum, quæ pariter etsi non fati alicujus inevitabili neceſſi-</td><td>PARS QUARTA. 239

millies, ſi capiantur 36966, &c. & ſic porrò in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis. Unde tandem hoc ſingulare ſequi videtur, quòd si eventuum omnium obſervationes per totam æternitatem continuarentur, (probabilitate ultimo in perfectam certitudinem abeunte) omnia in mundo certis rationibus & conſtanti viciſſitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut etiam in maximè caſualibus atque fortuitis quandam quaſi neceſſitatem, &, ut ſic dicam, fatalitatem agnoſcere teneamur; quam neſcio annon ipſe jam Plato intendere voluerit, ſuo de univerſali rerum apocataſtaſi dogmate, ſecundum quod omnia poſt innumerabilium ſeculorum decurſum in priſtinum reverſura ſtatum prædixit.

</td></tr>
</table>

Najważniejsze w całej pracy jest twierdzenie, zwane dzisiaj twierdzeniem Bernoullego, czyli słabym prawem wielkich liczb. Przytoczmy w całości oryginalne sformułowanie tego twierdzenia.

Propoſ. Princip. Sequitur tandem Propoſitio ipſa, cujus gratia hæc omnia dicta ſunt, ſed cujus nunc demonſtrationem ſola Lemmatum præmiſſorum applicatio ad præſens inſtitutum abſolvet. Ut circumlocutionis tædium vitem, vocabo caſus illos, quibus eventus quidam contingere poteſt, *fœcundos* ſeu *fertiles*; & *ſteriles* illos, quibus idem eventus poteſt non contingere: nec non experimenta *fœcunda* ſive *fertilia* illa, quibus aliquis caſuum fertilium evenire deprehenditur; & *infœcunda* ſive *ſterilia*, quibus ſterilium aliquis contingere obſervatur. Sit igitur numerus caſuum fertilium ad numerum ſterilium vel præcisè vel proximè in ratione $\frac{r}{s}$, adeoque ad numerum omnium in ratione $\frac{r}{r+s}$ ſeu $\frac{r}{t}$, quam rationem terminent limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$. Oſtendendum eſt, tot poſſe capi experimenta, ut datis quotlibet (puta c) vicibus veriſimilius evadat, numerum fertilium obſervationum intra hos limites quàm extra caſurum eſſe, h. e. numerum fertilium ad numerum omnium obſervationum rationem habiturum nec majorem quàm $\frac{r+1}{t}$, nec minorem quàm $\frac{r-1}{t}$.

Zamiast tłumaczenia tego tekstu rozpatrzmy jego streszczenie podobne do oryginału, czyli zachowujące te same symbole i sposób zapisu ułamków. Załóżmy więc, że stosunek korzystnych (wyróżnionych) przypadków do przypadków pozostałych wynosi dokładnie lub w przybliżeniu $\frac{r}{s}$, zaś stosunek wyróżnionych do wszystkich możliwych wynosi $\frac{r}{(r+s)}$, czyli $\frac{r}{t}$. Jest on zawarty w przedziale, którego górna granica jest równa $\frac{r+1}{t}$, dolna zaś wynosi $\frac{r-1}{t}$. Można wykonać tak dużo eksperymentów s, że prawdopodobieństwo (*verisimilius*) tego, że stosunek korzystnych do wszystkich przypadków będzie zawarty w tym przedziale, jest dowolną ilość razy (powiedzmy c razy) większe od prawdopodobieństwa, że znajdzie się poza tym przedziałem, czyli że będzie on większy od $\frac{r+1}{t}$ lub mniejszy od $\frac{r-1}{t}$.

Jeżeli liczbę korzystnych przypadków oznaczymy symbolem x, to prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloraz x/s będzie zawarty w przedziale $[(r-1)/t, (r+1)/t]$, zapiszemy następująco:

$$P\left(\frac{x}{s} \in \left[\frac{r-1}{t}, \frac{r+1}{t}\right]\right).$$

Twierdzenie Bernoullego orzeka, że dla dowolnej liczby $c>0$ istnieje taka liczba s, że:

$$P\left(\frac{x}{s} \in \left[\frac{r-1}{t}, \frac{r+1}{t}\right]\right) > P\left(\frac{x}{s} \notin \left[\frac{r-1}{t}, \frac{r+1}{t}\right]\right) \cdot c.$$

Przekształćmy lewą stronę nierówności:

$$P\left(\frac{x}{s} \in \left[\frac{r-1}{t}, \frac{r+1}{t}\right]\right) = P\left(\left|\frac{x}{s} - \frac{r}{t}\right|\right) \le \frac{1}{t} = P\left(\left|\frac{x}{s} - p\right| \le \varepsilon\right) = P\left(\left|x - s \cdot p\right| \le s \cdot \varepsilon\right).$$

Bernoulli przyjął, że $s \cdot p$ oraz $s \cdot \varepsilon$ są to liczby i wykazał, że [Bernoulli 1899]:

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 11 (17)

$$W = P\left(\left|x - sp\right| \le s \cdot \varepsilon\right) = \sum_{x=sp-s\varepsilon}^{sp+s\varepsilon} C_s^x p^x \left(1-p\right)^{s-x} .$$

Bernoulli podaje przykład zastosowania twierdzenia, przyjmując, że $r = 30$, $s = 20$, $t = 50$ oraz $c = 1000$. Nieco modyfikując sformułowanie tego przykładu, przyjmijmy, że dana jest urna, w której jest 30 kul białych oraz 20 kul czarnych, czyli proporcja białych kul wynosi 3/5. Trzeba ustalić liczbę losowań ze zwracaniem, aby oszacować proporcję kul białych w urnie, z taką dokładnością, aby oszacowanie mieściło się w przedziale $\left[\frac{29}{50}, \frac{31}{50}\right]$ z prawdopodobieństwem 1000 razy większym od prawdopodobieństwa, że będzie poza przedziałem. Z twierdzenia Bernoullego wynika, że trzeba dokonać 25 500 losowań, czyli $s = 25500$. Tę liczbę widzimy w drugim wierszu ostatniej strony traktatu.

5. Tłumaczenia

Niemieckie tłumaczenie pt. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, którego dokonał R. Haussner, ukazało się w Lipsku w 1899 roku. W 200. rocznicę ukazania się dzieła Bernoullego, w 1913 roku, tłumaczenia na język rosyjski, ale tylko 4 części, dokonał Ja. W. Uspienskij. Redaktorem tłumaczenia był A.A. Markow. Tytuł tłumaczenia jest następujący: *Iskustwo predpołożenij*. Tłumaczenia pierwszych trzech części dokonał Oskar Szeynin i bezpłatnie umieścił je w Internecie. Interesujące są też jego uwagi.

Obszernego streszczenia w 1966 roku dokonał Bih Sung z Uniwersytetu w Harwardzie.

Całość dzieła Bernoullego należycie przedstawił L.E. Majstrov w swej pracy wydanej po rosyjsku w 1967 roku, którą w roku 1974 na język angielski przetłumaczył S. Kotz.

Literatura

Arnould A., Nicole P., *La logique ou l'art de penser, contenant outr les regles communes plusieurs observations nouvelles, propres ® former le jugement*, Paris 1662 (polskie tłumaczenie wydane przez PWN w 1958 roku).

Bellhouse D., *The role of rougeury In the history of probability*, "Statistical Science" 1993, Vol. 4, No. 4, s. 410-420.

Bernoulli J., *Iskustwo predpołożenij*, części 1-3, tłumaczenie: O. Sheynin.

Bernoulli J., *The Art of Conjecturing,* translated by E.E. Sylla, Johns Hopkins University Press, Balitomore 2006.

Bernoulli J., *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Uebersetzt und herausgegeben von R. Haussner, Wihelm Engelmann, Leipzig 1899.

Bobrowski D., *"Ars Conjectandi" Jakuba Bernoulliego,* zapis odczytu wygłoszonego na XXXI Szkole Matematyki Poglądowej, Grzegorzewice 2003.

Bortkiewicz Wł., *Z zasad teoryji prawdopodobieństwa*, „Wiad. Mat." 1918, XXII, s. 217-256.

Crombie A.S., *Style myśli naukowej w początkach nowożytnej Europy,* Instytut Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa 1994.

David F.N., *Games, Gods and Gambling,* Dover Publications, 1998.

David F.N., *Studies in the History of Probability and Statistics I. Dicing and Gambling*, "Biometrika" 1955, s. 1-15.

Franklin J., *The Science of Conjecture. Evidence and Probability before Pascal,* J. Hopkins University, Baltimore 2001.

Hacking I., *The Emergence of Probability,* Cambridge University Press, London 1975.

Kendall M.G., *Studies in the History of Probability and Statistics II. The Beginning of a Probability Calculus*, „Biometrika" 1956, Vol. 43, No. ½, s. 1-14.

Laudański L., *Sztuka domniemań na rodowód rozkładu normalnego i dwumianowego*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Na ścieżkach historii statystyki*, Wydawnictwo UE we Wrocławiu, Wrocław.

Laudański L., *The art of conjecturing (Ars conjectandi). On the Historical origin of normal distribution [rodowód rozkładu normalnego]*, "Didactics of Mathematics" 2010, 7(11), Wrocław, s. 67.

Maistrov L.E., *Tieorija wierojatnostiej. Istoriczeskij oczerk*, Nauka, 1967.

Maligranda L., *Nierówność Bernoullego – ponad 300 lat historii*, [w:] W. Więsław (red.), *Wokół Bernoullich*, Lublin 2006, s. 31-62.

Mlodinow L., *Matematyka niepewności*, Prószyński, Warszawa 2008.

Ore O., *Pascal and the invention of Probability theory*, "Amer. Mathematical Monthly" 1960, 67, s. 409-419.

Pearson K., *The history of statistics in the 17th and 18th centuries,* ed. by E.S. Pearson, Griffin, London 1978.

Rempała J.A., *Liczby Bernoulliego*, [w:] W. Więsław (red.), *Wokół Bernoullich*, Lublin 2006, s. 93-100.

Sheynin O., *Theory of Probability. A Historical Essay*, Berlin 2009 (tekst dostępny pod adresem www.sheynin.de).

Stigler S.M., *The Dark Ages of Probability in England ISR*, 56, 1988, s. 75-88.

Stigler S.M., *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1990*, Harvard University Press, 1986.

Wolf R., *Jakob Bernoulli von Basel, 1654-1705, Biographie zur Kulturgeschichte der Schweiz*, 1. Cyclus Zürich 1858, s. 133-166 (tłumaczenie: O.B. Sheymin, *Siedmaja chrestometija po istorii tieorii wierojatnostiej i statistiki*, Berlin 2010 (tekst dostępny pod adresem www.sheynin.de)).

Zięba W., *Stare zadania z rachunku prawdopodobieństwa*, [w:] W. Więsław (red.), *Wokół Bernoullich*, Lublin 2006, s. 131-150.

Ars conjectandi – 300. anniversary of publications

Summary: Within the framework of worldwide celebration of the International Year of Statistics (Statistics 2013) there are organized a number of conferences and workshops. There are also prepared various publications, and one of them is this paper. It contains quite a popular presentation of J. Bernoulli's work *Ars conjectandi*, along with a short history of events leading to the publication of this work.

Keywords: *Ars conjectandi*, J. Bernoulli, probability, history of probability.