RACJONALNOŚĆ, KONFLIKTY I TEORIA GIER W ŻYCIU I PRACY ROBERTA J. AUMANNA (NAGRODA IMIENIA NOBLA W DZIEDZINIE EKONOMII, 2005)

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 12(18)

Katarzyna Ostasiewicz

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ISSN 1644-6739

Streszczenie: Robert J. Aumann wyróżniony został w 2005 r. Nagrodą imienia Nobla w dziedzinie ekonomii „za postępy w zrozumieniu konfliktów i współpracy dzięki teoriogrowej analizie". Najbardziej znanym z jego osiągnięć jest pojęcie równowagi skorelowanej. Zasłynął również, nie tylko w środowisku naukowym, z prób stosowania wyników matematycznych do rzeczywistych konfliktów politycznych. Niniejsza praca przedstawia zarys głównych osiągnięć R.J. Aumanna, w tym koncepcje wspólnej wiedzy i racjonalności, twierdzenie o równowagach Nasha w grach iterowanych, pojęcie równowagi skorelowanej i twierdzenie o braku zgody na niezgodę, a także mniej doniosły z naukowego punktu widzenia aczkolwiek niezmiernie zajmujący problem talmudycznego podziału majątku. Ponadto zarysowana jest sylwetka naukowca jako człowieka i osoby zabierającej głos w sprawach politycznych.

Słowa kluczowe: Robert J. Aumann, równowaga skorelowana, gry iterowane, Folk Theorem.

DOI: 10.15611/sps.2014.12.16

1. Wstęp

Decyzja Komitetu Noblowskiego z 2005 r. wzbudziła wiele kontrowersji wśród szerokiej publiczności. Nie z powodu podawania w wątpliwość naukowych dokonań laureatów, których pozycja w świecie akademickim od lat pozostawała niekwestionowana. To raczej polityczne poglądy jednego z nich zbulwersowały wielu europejskich obserwatorów.

W odróżnieniu od przeciwnej strony Atlantyku, większość europejskich intelektualistów nie popiera agresywnej polityki Izraela na terenach spornych z Palestyną. Tymczasem Robert Aumann publicznie przekonuje, iż strategia Izraela jest zbyt *uległa* i nawołuje do bardziej zdecydowanej postawy w konfrontacji ze światem arabsko-palestyńskim. „Ustępując, pokazujemy Palestyńczykom, ze ich metody są efektywne", powiedział w jednym z wywiadów, jednocześnie porównując politykę Izraela do strategii ustępstw Anglii i Francji wobec Hitlera oraz oskarżając współczesnych Izraelczyków o brak motywacji i gotowości ponoszenia ofiar dla państwa żydowskiego.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 12 (18)

Robert J. Aumann

Źródło: *Robert J. Aumann – Facts*, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2005/aumann-facts.html.

Jakkolwiek szokująco brzmiałyby słowa Aumanna, wydaje się, że jest on w nich szczery. Niewątpliwie poniósł największą ofiarę na rzecz państwa żydowskiego – jego syn, Szlomo, poniósł śmierć w 1982 r., podczas izraelskiej operacji wojskowej w Libanie. Sam Aumann jest gorliwym wyznawcą judaizmu. Jeśli komuś wydawałoby się, iż pomiędzy wizerunkiem brodatego żyda (a Aumann faktycznie nosi długą niemal do pasa siwą brodę) a postacią nagradzanego naukowca istnieje jakiś rozdźwięk, zapewnić należy, że sam Aumann znakomicie nie tylko godzi te dwa aspekty swojego życia, ale nawet zaprzągł je do owocnej współpracy. Teoria gier, której jest jednym ze współtwórców i koryfeuszy, służy mu jako narzędzie zarówno w formułowaniu zaleceń dla współczesnej polityki Izraela, jak i w rozwiązywaniu wiekowych zagadnień talmudycznych.

2. Jesziwa czy uniwersytet?

Robert John Aumann urodził się w 1930 r. we Frankfurcie nad Menem. Po dojściu Hitlera do władzy niemal w ostatniej chwili, dwa tygodnie przed Nocą Kryształową, rodzinie udało się uciec do Stanów Zjednoczonych, gdzie osiadła w Nowym Jorku. Przyszły noblista uczęszczał tam do zarówno do tradycyjnych religijnych szkół wyznaniowych, jak i do szkół publicznych. Gdy nadeszła pora podjęcia decyzji, długo nie mógł zdecydować się pomiędzy matematyką a szkołą talmudyczną. Przez pierwszy semestr nauki próbował łączyć te dwie sprawy, przemieszczając się pomiędzy szkołami. Szybko jednak okazało się to praktycznie niewykonalne i Aumann porzucił jesziwę.

Pierwszy etap kariery naukowej zakończył się obroną pracy doktorskiej na MIT (Massachusetts Institute of Technology) z dziedziny topologii algebraicznej, dotyczącej węzłów. W wywiadzie Aumann przytacza inspirującą anegdotę na temat nauki czystej i stosowanej [Hart 2009]. W czasach, w których przyszło mu decydować się na temat pracy doktorskiej, teoria węzłów przyciągnęła go swoją intuicyjnością, elegancją oraz całkowitą bezużytecznością z praktycznego punktu widzenia. Tymczasem niemal równo 50 lat później ze zdumieniem odebrał telefon od swojego wnuka, studiującego medycynę. Młody człowiek potrzebował małej pomocy w zrozumieniu pewnych aspektów teorii węzłów. Okazało się, że dziedzina ta – ze względu na to, iż nić DNA w komórce może zapętlać się na różne pożądane lub niepożądane sposoby – stała się obowiązkowa w edukacji przyszłych medyków.

Na MIT Aumann poznał nieco starszego od siebie Johna Nasha, pierwszego naukowca uhonorowanego Nagrodą imienia Nobla za osiągnięcia w dziedzinie teorii gier. To od niego po raz pierwszy usłyszał o teoriogrowym podejściu do podejmowania decyzji i rozwiązywania konfliktów. Te zalążki wiedzy wykorzystał wkrótce potem. Po obronie doktoratu przyjął posadę na Uniwersytecie Hebrajskim w Jerozolimie, ale jednocześnie stał się członkiem grupy badań operacyjnych Uniwersytetu Princeton. W sposób naturalny teoria gier nasunęła mu się na myśl jako potencjalne rozwiązanie niektórych z pojawiających się tam zagadnień. Tak oto rozpoczęła się owocna fascynacja Roberta Aumanna młodą wówczas jeszcze teorią gier.

Uniwersytet Princeton okazał się bardzo płodnym intelektualnie miejscem dla Aumanna. Tam właśnie poznał Oskara Morgensterna, słynącego z talentu do promowania innych talentów, oraz spotkał Franka Anscombe'a i Lloyda Shapleya – z którymi napisał później swoje najbardziej znaczące prace. Jednakże również niespokojna atmosfera Izraela, wciąż – wydawałoby się – na krawędzi wojny, stanowiła prawdopodobnie czynnik inspirujący. Część prac Aumanna dotyczyła bowiem zastosowania teorii gier do rozwiązywania konfliktów – zarówno zimnowojennego, jak i tego pomiędzy światem arabskim a Izraelem.

Zanim przejdziemy do tych niezmiernie zajmujących, a z politycznego punktu widzenia również kontrowersyjnych zagadnień, przyjrzyjmy się bliżej konceptom leżącym u logicznego podłoża bardziej zaawansowanych osiągnięć Aumanna. Te koncepcje to *wspólna wiedza* i *racjonalność*, a w dyskusjach nad nimi Aumann aktywnie zabierał głos i wniósł swój znaczący wkład.

3. Wspólna wiedza i racjonalność

Obiektywny obserwator współczesnego świata miałby zapewne problemy z obroną tezy, iż jednostki zachowują się w sposób racjonalny. Oprócz tego, że czasem (lub często) nie dostaje nam po prostu zdolności do wyciągania poprawnych wniosków, jesteśmy też obarczeni obciążeniami poznawczymi (*cognitive biases*), które systematycznie wypaczają nasz ogląd świata. Kryterium selekcji ewolucyjnej mózgu ludzkiego nie było wszak rozwiązywanie zawiłych zagadnień matematycznych, ale raczej efektywne orientowanie się we świecie. Częstokroć mimowolnie poświęcamy ścisłość na rzecz szybkości rozumowania, stosując rozmaite heurystyki. Dźwigamy również bagaż obciążeń afektywnych, które – choć z pewnością pomogłyby nam w obliczu spotkania z tygrysem szablastozębnym – niekoniecznie dobrze służą maksymalizacji spodziewanej użyteczności, do czego usiłują nas nakłonić różni ekonomiści. Wielu autorów książek popularnonaukowych wytyka nam uporczywie ślepotę na prawdę matematyczną („błąd hazardzisty", „błąd Concorde'a" i temu podobne), a systematyczne badania nad obciążeniami poznawczymi jako jedni z pierwszych rozpoczęli Tversky i Kahneman (np. [Tversky, Kahneman 1974; Kahneman 2012]).

Drugim z głównych założeń przewijających się przez teorię gier jest wspólna wiedza, opierająca się na nieskończonym poziomie intencjonalności. Intencjonalność pierwszego rzędu oznacza samoświadomość, zdawanie sobie sprawy z zawartości własnych umysłów. Intencjonalność drugiego rzędu, czyli teoria umysłu, którą dzieci nabywają w wieku około czterech lat, oznacza, iż posiadamy wyobrażenie o zawartości umysłów innych osób – zawartości potencjalnie odmiennych od naszej własnej wiedzy. Intencjonalność trzeciego rzędu oznacza wiedzę o tym, że ktoś inny ma wiedzę o naszym stanie umysłu. W tym momencie rzecz staje się już nieco zawiła. Wspinając się na kolejne poziomy intencjonalności, dość szybko zaczynamy się gubić – przypuszcza się, że najwyższy stopień, z którym mogą poradzić sobie dorośli ludzie, wynosi 5 lub 6 [Dunbar 2004]. Przykładowym ciągiem zawierającym sześć poziomów intencjonalności mogłoby być następujące stwierdzenie (w nawiasach kwadratowych zaznaczone zostały kolejne poziomy intencjonalności):

Sądzę [1], że uważasz [2], iż ja chcę [3] byś wierzył [4], że ja planuję [5] przekonać cię [6] do pójścia na bal.

Napisać łatwo, jednakże mało kto potrafi bez trudu poradzić sobie z taką umysłową ekwilibrystyką.

Posuwanie się zbyt daleko w głąb poziomów intencjonalności grozi zapętleniem i paradoksami. Powiedzmy, że gramy w „kamień – nożyczki – papier". Na wstępie oznajmiam przeciwnikowi, że mam zamiar pokazać nożyczki. Gdybym tak istotnie postąpiła, mój przeciwnik wygrałby, pokazując kamień. Może on jednak rozumować następująco: powiedziała, że pokaże nożyczki, żebym ja pokazał kamień, a tak naprawdę pokaże papier, który wygra z kamieniem. Ale zaraz, może się zmitygować. Być może powiedziała, że pokaże nożyczki, bym podejrzewał, że kłamie, i tak naprawdę ma pokazać papier – ale to wszystko wielkie oszustwo i naprawdę pokaże nożyczki. Takie rozumowanie można powtarzać *ad infinitum* i *ad nauseam*, i większość osób poddaje się, działając przypadkowo.

Można jednakże podać prosty przykład, w którym zrozumiałe wydaje się osiąganie nieskończonego poziomu intencjonalności. Powiedzmy, że Stefan i Franek znajdują się w tym samym pokoju, obaj mają oczy szeroko otwarte, żaden z nich nie ma żadnych problemów ze wzrokiem i mogą obserwować siebie nawzajem. Nagle do pokoju wpada pies i pije wodę z miski, co obaj panowie rejestrują, a może nawet o tym rozmawiają. Stefan wie [1] zatem, że pies wypił wodę. Franek wie [1], że Stefan o tym wie [2]. Stefan wie [1], że Franek wie [2], że on wie [3] o wypiciu wody. I tak dalej można ciągnąć w nieskończoność, nie powodując przy tym żadnych komplikacji tego typu, jak w powyższym przykładzie dotyczącym gry „kamień – nożyczki – papier" czy w szekspirowskim dramacie („Jago chce, by Otello myślał, że Desdemona chce..."). Wszystko dzieje się tu jawnie. Wygląda na to, że wspólna wiedza jest prostsza do uzyskania niż racjonalność. Z drugiej strony, wspólna wiedza *plus* racjonalność, jakkolwiek niewinnie by wyglądały, razem są w stanie stworzyć iście wybuchową mieszankę. Często przytaczanym w tym kontekście przykładem jest gra wymyślona przez R. Rosenthala, a nazywana „stonogą" (np. [Malawski i in. 2004]).

Pewien ekscentryczny bogacz gotów jest ofiarować miliard złotych na cele edukacyjne. W tym celu urządza specyficzny przetarg, do którego stają rektorzy dwóch uczelni. W pierwszym kroku bogacz oferuje złotówkę rektorowi A. Jeśli ten ją przyjmie, gra się kończy, a pozostała kwota (miliard bez złotówki) wraca do bogacza. Jeśli rektor A odrzuci ofertę, propozycja wzrasta do 10 złotych, ale jest skierowana do rektora B. Jeśli ten ją przyjmie, gra się kończy. Jeśli odrzuci, kolejna propozycja skierowana jest z powrotem do rektora A i znowu wzrasta dziesięciokrotnie, do 100 złotych. I tak dalej, aż któryś z rektorów zaakceptuje złożoną mu ofertę (zakładamy, że oferta miliarda nie zostanie odrzucona – wszak rektorzy są racjonalni, przynajmniej w tym przykładzie). Na pierwszy rzut oka wydaje się, że początkowe oferty powinny być odrzucane, napięcie wzrastać, aż któryś z graczy nie wytrzyma presji i zaakceptuje niepełną sumą ze strachu, by nie zostać z niczym. I tak być może przebiegałaby *realna* gra. Tymczasem jednak, gdyby gracze byli racjonalni i dzielili wspólną wiedzę, prosta analiza wskazuje zaskakujący rezultat. Zastosowane tutaj rozumowanie nazywa się indukcją wsteczną i wygląda następująco. Jeśli ciąg ofert pozostanie niezakłócony, to – ponieważ zaczynamy od rektora A z ofertą $10^0 = 1$ – najwyższą ofertę, 10^9 złotych, otrzyma rektor B i ją zaakceptuje. Wiedząc o tym, rektor A musi zaakceptować ofertę o rząd wielkości niższą, 10^8. Ale rektor B też potrafi tak samo rozumować i wie, że musi w takim razie zaakceptować 10^7, bo inaczej A weźmie 10^8, a on sam zostanie z niczym. Kontynuując to rozumowanie, dochodzimy do konkluzji, że racjonalny rektor przyjmie początkową ofertę złotówki... Ta interesująca łamigłówka przypomina logiczny paradoks problemu więźnia, który miał być stracony w ciągu najbliższego tygodnia, ale którego konkretnie dnia – miał się dowiedzieć dopiero rankiem przed egzekucją. Nie może to być zatem ostatni dzień tygodnia, gdyż – gdyby poprzedniego dnia nie został stracony – więzień wiedziałby już poprzedzającym wieczorem, że następnego dnia straci życie, co kłóci się z wymogiem „niespodzianki". Zatem ostatni dzień zostaje wykreślony, ale przez to przedostatni staje się ostatnim dostępnym... I tak dalej.

Podobne do powyższego problemy wciąż nie zostały w pełni przezwyciężone. Prace Aumanna, choć zbyt techniczne, by przytaczać tutaj ich wyniki, rzuciły pewne światło na możliwość poprawnego sformalizowania tych kwestii.

Skoro jednak założenia o racjonalności i wspólnej wiedzy prowadzą do paradoksów, można by uznać, że teorie na nich oparte nie są teoriami deskryptywnymi (jak ludzie zachowują się w rzeczywistości), ale raczej normatywnymi (jak powinni się zachowywać – oczywiście, traktując powinność z bardzo specyficznego punktu widzenia). Teoria gier i ludzkich zachowań upstrzona jest przykładami wskazującymi na to, że ludzie nie maksymalizują użyteczności (np. gra ultimatum), nie szukają stanu równowagi (np. dylemat więźnia) i w ogóle są czasem trudni do ogarnięcia. Częściowo wynika to zapewne z braku (jednak) pełnej racjonalności przedstawicieli gatunku *Homo sapiens*. Czasami jednakże pozorna nieracjonalność wynikać może z głębiej ukrytych racjonalnych (choć niekoniecznie świadomych) pobudek. Znaczące wyniki Aumanna dotyczą pewnej klasy zachowań, którymi rządzi ukryta ewolucyjna dalekowzroczna racjonalność. Nim przejdziemy do bardziej technicznej strony zagadnienia, powiedzmy kilka słów na jej temat.

4. Altruizm wzajemny i racjonalność

Miliardy lat powolnej, posuwającej się malutkimi kroczkami ewolucji wyposażyły nas w mózgi, które, jak wspominaliśmy, miały nas przystosować do przetrwania i pozostawienia potomstwa w nie zawsze przyjaznym środowisku, które – od kiedy staliśmy się do tego zdolni – staraliśmy się przekształcać na naszą korzyść. Jak wskazują przedstawiciele prężnie rozwijającej się ostatnio dziedziny, psychologii ewolucyjnej, współczesność w niczym nie przypomina tego jeszcze nie tak dawnego świata naszych przodków, łowców-zbieraczy. Ewolucja otoczenia znacznie wyprzedziła ewolucję mózgu, i w ten sposób zostaliśmy wrzuceni w świat wysokiej technologii z naszymi ułomnymi umysłami, produkującymi uprzedzenia, atawistyczne zachowania i nieadekwatne reakcje.

Główną w rozważanym kontekście różnicą jest struktura społeczna grup, w których ludzie żyli jeszcze parę tysięcy lat temu i obecnie.

Łowcy-zbieracze żyli w grupach liczących ok. 150 osób [Dunbar 2004]. Gdy grupa rozrastała się nadmiernie, następował jej podział na dwie, jak to się wciąż dzieje w obserwowanych społecznościach szympansów. Przy takiej organizacji społecznej nie było miejsca na anomię i wyalienowanie, a ludzie znali swoich sąsiadów (choć nie mieli tysięcy „znajomych" na Facebooku). Człowiek nie zmieniał raz po raz otoczenia i własnej tożsamości. Nie było możliwości przeniesienia się do innego miasta i „zaczęcia od nowa". Samo przeżycie też zależało od bycia częścią społeczności. Nie można było z domowego zamknięcia dokonywać wirtualnych transakcji i internetowych zakupów, praktycznie bez kontaktu z innymi ludźmi.

W takim świecie ogromną wagę miała reputacja.

Jeśli nie podzielę się pożywieniem w dniu, gdy mi się poszczęści i upoluję królika, inni mi to zapamiętają i nie wesprą mnie w moje chude dni. A ponieważ podzielenie się dostatkiem pożywienia oznacza dla mnie mniejszą stratę niż brak wsparcia w razie głodu – najzupełniej racjonalne jest dla mnie maksymalizowanie użyteczności nie tej chwilowej, z danego dnia, ale użyteczności całkowitej, powstającej ze zsumowania użyteczności wielu dni. A w tym celu rozsądniej będzie iść na współpracę ze współplemieńcami i liczyć na ich wzajemność. Żebyśmy nie musieli każdorazowo kalkulować korzyści i strat – co zajmuje cenny czas i może być obarczone błędami – ewolucja wyposażyła nas w mózgi produkujące odpowiednie emocje: poczucie wdzięczności i zobowiązania, solidarność i współczucie; ale z drugiej strony – mściwość oraz potrzebę sprawiedliwości i rewanżu. Te ewolucyjnie korzystne predyspozycje uważane są przez wielu naukowców za korzenie ludzkiego altruizmu, przeciwko czemu protestują ci, którzy nie chcą, by tak istotna ludzka właściwość wyrastała z partykularnych korzyści. Jak widać, trudno zadowolić naukowców. Jedni chcą, byśmy byli bardziej, a inni – mniej racjonalni; raz mamy maksymalizować użyteczność, innym razem wręcz przeciwnie...

Jakkolwiek byśmy oceniali tę teorię wywodzącą altruizm z (korzystnej) wzajemności, okazuje się, że jeśli przyjmiemy, iż dana gra rozgrywana jest między graczami nie jeden raz, ale wielokrotnie – teoria gier „sankcjonuje" w końcu pozornie nieracjonalne, bo kooperatywne, zachowania graczy. To właśnie stanowi sedno dokonania Aumanna i istotę udowodnionego przez niego twierdzenia.

5. Równowaga Nasha w grach iterowanych

Najwybitniejsze być może z licznych osiągnięć Aumanna – twierdzenie dotyczące stanów równowagi w grach iterowanych, zilustrujemy na przykładzie najbardziej chyba znanego problemu z teorii gier, czyli dylematu więźnia.

Wspólnicy w przestępstwie zostali złapani przez policję i są przesłuchiwani w oddzielnych pomieszczeniach. Żaden z nich nie wie nic o postępowaniu drugiego, a podstępni śledczy mogą próbować wprowadzić ich w błąd, nakłaniając do przyznania się i zarazem wsypania wspólnika. Jeśli żaden się nie przyzna i będą iść w zaparte, obaj skazani zostaną za pomniejsze wykroczenie, na rok więzienia. Jeśli jeden z nich pójdzie na współpracę z policją, jako informator zostanie objęty programem ochrony świadków i w ogóle nie pójdzie siedzieć, za to jego wspólnik, obarczony całością winy, skazany zostanie na dożywocie. Ale uwaga, jeśli przyznają się obaj – policja nie będzie potrzebowała w sądzie zeznań jednego przeciwko drugiemu, i obaj skazani zostaną na czterdzieści lat pozbawienia wolności. Rzecz w tym, że więźniowie nie mogą się komunikować i żaden z nich nie wie, czy ten drugi poszedł na współpracę z policja, czy też postanowił milczeć.

Macierz wypłat w tej grze można przedstawić w postaci tabelki, gdzie latom spędzonym na wolności przypisaliśmy dość arbitralne wartości (rys. 1). Nie ma to wielkiego znaczenia, gdyż zasadniczą rolę odgrywają *względne* wielkości wypłat związanych z różnymi rezultatami gry. Na pierwszym miejscu przedstawione są wielkości wypłat dla gracza numer 1, którego możliwe strategie są zaznaczone w kolumnach, natomiast na drugim miejscu – wypłaty dla gracza numer 2 (wiersze).

gracz 1 → / gracz 2 ↓	donosi	milczy
donosi	(2; 2)	(0; 7)
milczy	(7; 0)	(5; 5)

Rys. 1. Macierz wypłat przy dylemacie więźnia
(zacieniowano kratkę ze stanem równowagi Nasha)

Każdy podręcznik do teorii gier tłumaczy, że w grze tej strategią dominującą jest donoszenie, a stanem równowagi Nasha – sytuacja, gdy obaj więźniowie donoszą. Innymi słowy, więzień numer 1 rozumuje (o ile jest racjonalny) następująco: nie wiem, co uczyni mój wspólnik. Ale jeśli on zdecyduje się donieść, dla mnie lepiej będzie też donieść (porównujemy liczby na pierwszym miejscu w pierwszym wierszu tabeli). Z drugiej strony, jeśli on zdecyduje się milczeć, dla mnie lepiej będzie... donieść! (porównujemy pierwsze liczby w drugim wierszu tabeli). To oznacza, że donoszenie jest strategią *dominującą*, gdyż przy każdym *ustalonym* wyborze drugiego gracza graczowi numer jeden bardziej opłaca się donosić. Oczywiście, drugi gracz rozumuje tak samo, i lądujemy w najgorszej możliwej (z łącznego punktu widzenia) sytuacji.

Ten rezultat (2; 2), jest równocześnie stanem *równowagi Nasha*, ponieważ żaden z graczy nie odniesie korzyści z *jednostronnej* zmiany swojej strategii. Jest to zarazem jedyna równowaga Nasha w tej grze, jeśli chodzi o strategie czyste.

Zauważmy, że wyjaśniając, dlaczego donoszenie jest strategią dominującą i dlaczego obustronne donoszenie jest stanem równowagi, podkreślaliśmy, że rozważamy wybory jednego z graczy przy *ustalonym* wyborze drugiego. Oznacza to, że gracze nie mogą się porozumiewać w celu zawarcia jakiegoś przymierza, a tak rozważane gry nazywane są grami *niekooperacyjnymi*.

Niemniej jednak, nawet jeśli autentyczni więźniowie nie mogliby się ze sobą kontaktować i w jawny sposób umówić się co do lepszej strategii, w życiu częstokroć okazuje się, że ludzie mają niejako wbudowane zasady porozumienia, sprawiedliwej współpracy i *fair play*.

Tak naprawdę to teoretycy gier od długiego czasu podejrzewali, że na dłuższą metę racjonalni gracze będą w stanie dojść do jakiejś kooperacji (np. [Luce, Raiffa 1957]). Albo raczej – bo obserwacje od zawsze pokazywały, że ludzie *faktycznie* współpracują – iż można taki rezultat uzyskać w jakiś sposób na matematycznym gruncie teorii gier. Dopiero jednak Aumann dowiódł rygorystycznie matematycznego twierdzenia, z którego wynika tzw. *Folk Theorem*.

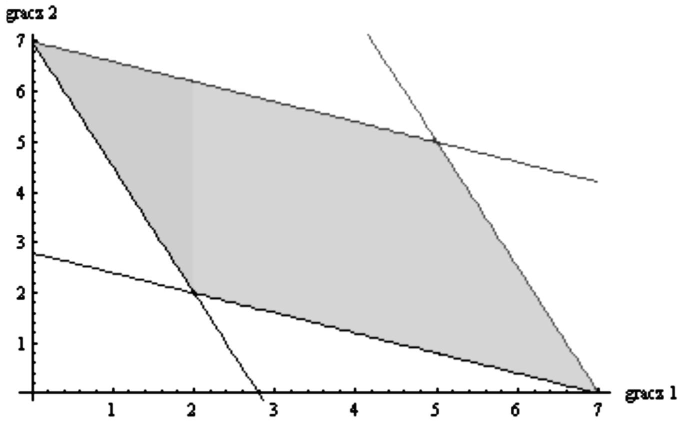
Zanim przejdziemy do samego twierdzenia, wyjaśnijmy pokrótce genezę tej nazwy. Po spolszczeniu nie jest to bowiem „twierdzenie Folka", co można czasem zobaczyć w niezbyt udanych tłumaczeniach. „Folk" nie jest nazwiskiem pojedynczego człowieka, ale nawiązuje do „folkloru" – w odniesieniu do faktu, że wiedza zawarta w tym twierdzeniu od dawna stanowiła „folklor" teorii gier, wspólną wiedzę. Choć jednakże świadomość tego, że gracze potrafią jakoś ze sobą współpracować, może i stanowiła część folkloru – to przeprowadzenie dowodu nie stanowiło takiej prostej sprawy. Poniżej wspomnimy o szczególnej postaci tego twierdzenia.

Twierdzenie udowodnione przez Aumanna jest znacznie silniejsze niż to, co tutaj omówimy. Ograniczymy się jednakże, bo „silniejsze" oznacza także „trudniejsze" i „bardziej techniczne". Przytoczmy zatem rezultat, który mówi, iż jeśli gra G^* składa się z powtarzanych nieskończenie wiele razy identycznych gier G, to stanami równowagi Nasha w grze G^* są wszystkie wypukłe kombinacje wyników gry G, takie że żaden z graczy nie otrzymuje przy nich mniej, niż mógłby, zostając zmuszonym przez innych graczy.

Zilustrujmy to ponownie na przykładzie dylematu więźnia.

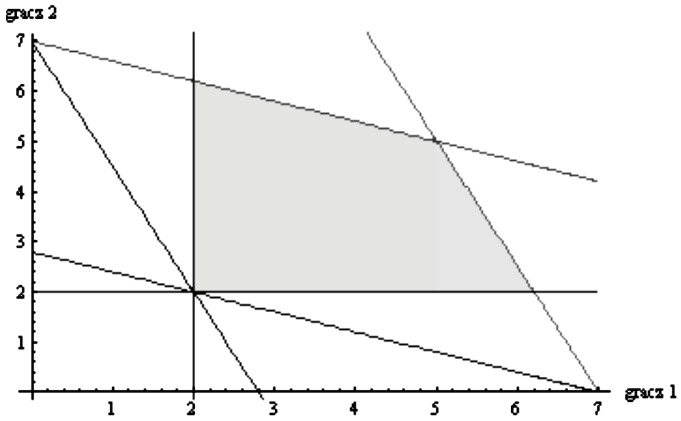
Zbiór możliwych wypłat w tej grze, {(2, 2), (0, 7), (7, 0), (5, 5)} określa nam wierzchołki czworokąta, wewnątrz którego mieszczą się wszystkie osiągalne w powtarzanej grze (uśrednione) wypłaty (rys. 2).

Mamy jednakże dodatkowy warunek: że żaden z graczy nie dostanie mniej niż minimum tego, co może dostać, jeśli się uprze (będzie racjonalny: warunek ten nazywa się *indywidualną racjonalnością*). Spójrzmy na macierz wypłat w pojedynczej grze. Nie ma siły, która mogłaby zmusić gracza do zaakceptowania mniej niż 2 – w razie czego zacznie donosić i zagwarantuje sobie minimalną wypłatę równą 2. Zatem, zgodnie z twierdzeniem, obszar stanów równowagi w powtarzanej grze G^* kurczy się (rys. 3).



Rys. 2. Zbiór wypukłych kombinacji wypłat w dylemacie więźnia

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Zbiór wypukłych kombinacji wypłat w dylemacie więźnia ograniczony warunkiem indywidualnej racjonalności

Źródło: opracowanie własne.

Jak widać, w zaznaczonym obszarze znajdzie się zarówno „tradycyjne" rozwiązanie (2, 2), jak i to optymalne – dla wielu znacznie rozsądniejsze i bliższe prawdziwemu życiu – rozwiązanie (5, 5).

Narzędziem osiągania tych „lepszych" z ogólnego punktu widzenia stanów równowagi są groźby i sankcje, jakie gracze mogą stosować wobec naruszających zasady współpracy. Najlepszą tego ilustracją jest zwycięzca konkursu ogłoszonego przez Roberta Axelroda w 1984 r. [Axelrod 1984]. Postawił on przed programistami wyzwanie napisania programu, stawiającego czoła innym programom w iterowanej rozgrywce dylematu więźnia. Zwycięzcą okazał się czterolinijkowy program A. Rapoporta *„tit-for-tat”* („wet za wet”), zasadzający się na prostej regule: w pierwszej rundzie współpracuj; w każdej kolejnej odpłacaj partnerowi tak samo, jak tamten zachował się w poprzedniej rundzie. Nieco później okazało się, że jeszcze bardziej skuteczny był nieco zmodyfikowany program: w pierwszej rundzie współpracuj; w każdej kolejnej odpłacaj partnerowi, ale czasami odpuść zdradę i spróbuj ponownie nawiązać współpracę. Należy podkreślić, że kryterium zwycięstwa nie był *wspólnie* uzyskany przez partnerów wynik, ale wynik *pojedynczego* gracza. Zatem – *opłaca się* być sprawiedliwym, a czasem nawet wielkodusznym.

W praktyce często obserwujemy współpracę graczy nawet wówczas, gdy gra jest jednorazowa. Z jednej strony można uznać to za brak racjonalności graczy, którzy kiepsko kalkulują: po co być uczciwym, gdy sprzedawca w obcym mieście pomyli się znacznie na naszą korzyść? Trzeba brać, co się trafia, bo przecież i tak nigdy go już nie spotkamy; on nie zna naszego nazwiska, więc nie popsuje nam reputacji. Z drugiej strony można uznać to za przejaw ewolucyjnej racjonalności, która wyposażyła nas we wbudowane mechanizmy, sprawnie działające w środowisku łowcy-zbieraczy, lecz grzeszące „nadmierną” uczciwością we współczesnym świecie – rzecz do skorygowania dla racjonalnego naukowca? Niektórzy prawdopodobnie woleliby widzieć w tym przejaw najlepszych cech ludzkich raczej niż braki w rozumowaniu. Sam Aumann przytacza w wywiadzie historię, jak to dzwonił do rabina, radząc się w sprawie nielegalnego ściągania plików z Internetu. Można się domyślić, jaka była konkluzja tej historii, zastanawia natomiast to, po co uczony radził się rabina, zamiast po prostu zmaksymalizować swoją użyteczność...

6. Równowaga skorelowana

Sceptycyzm w kwestii „racjonalności” stanu równowagi Nasha sformułować można w inny sposób. Powyżej wspominaliśmy, iż ludzie ukształtowani zostali przez ewolucję tak, by każdą grę traktować w taki sposób, jakby miała być rozgrywana wielokrotnie. Niekoniecznie odwołując się do mechanizmów biologicznych, *explicite* można stwierdzić, iż ludzie mają pewne oczekiwania co do tego, jak zachowają się inni. Koncepcja równowagi Nasha opiera się na założeniu, że każdy gracz będzie się spodziewał po innych – i miał w tym rację – grania wedle określonych reguł i odpowiadał na te przewidywane strategie własną strategią, też opierającą się na tych samych regułach racjonalności. Aumann kwestionuje jednak to założenie i pokazuje jego nierealistyczność [Aumann 1987]. Zresztą, każdy chyba może zaświadczyć, jak bardzo nieprzewidywalne są zachowania ludzkie.

W zamian Aumann proponuje podejście znacznie ogólniejsze. Punktem wyjścia jest zmiana założeń. Zamiast *wiedzieć*, jakie strategie przyjmą inni gracze, każdy z graczy przypisuje możliwym akcjom przeciwników *prawdopodobieństwa subiektywne*. Oczywiście, pewność co do konkretnej obranej przez innych strategii jest przypadkiem szczególnym takiego rozkładu prawdopodobieństw subiektywnych.

W tym miejscu należałoby wtrącić krótką dygresję na temat bynajmniej nie krótki – a mianowicie prawdopodobieństw subiektywnych. Nie tylko dlatego, że jest to koncepcja kluczowa dla pojęcia równowagi skorelowanej, jednego z flagowych osiągnięć Aumanna, lecz również dlatego, że i na tym polu uczony ten wniósł swój ogromny wkład. W odróżnieniu jednakże od racjonalności i wspólnej wiedzy – które łatwo intuicyjnie pojąć (choć trudniej osiągnąć, zwłaszcza racjonalność) – temat prawdopodobieństw subiektywnych najeżony jest ogromnymi trudnościami technicznymi i w gruncie rzeczy nie istnieje konsens co do samej definicji. Na tym gruncie Aumann starł się ze współczesnym papieżem prawdopodobieństw subiektywnych, którego nazwisko pojawia się praktycznie przy każdej poważnej wzmiance na ten temat – czyli Leonardem Savagem.

Jak wiadomo, istnieją różne definicje prawdopodobieństwa. Wśród nich najpowszechniej stosowanym – przynajmniej na poziomie szkolnym – jest interpretacja częstościowa. W rzucie monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe jest procentowi rzutów, w których orzeł wypadnie, jeśli rzucać będziemy nieskończenie długo (lub dostatecznie długo). Można jednak argumentować, i czynił tak m.in. Bruno de Finetti, że nigdy nie dysponujemy tak określonymi *obiektywnymi* prawdopodobieństwami, a opieramy się zawsze tylko na *osobistych przekonaniach* (*personal beliefs*). Jaka była ilość rzutów monetą, jaką wykonaliście, by przekonać się o prawdopodobieństwie wyrzucenia orła, nim zdecydowaliście się zagrać nią o zmywanie naczyń? Przypuszczalnie *wierzyliście*, że moneta jest uczciwa, a prawdopodobieństwo wynosi ½. A w jaki sposób obliczono prawdopodobieństwo tego, że pierwsze lądowanie człowieka na Księżycu przebiegnie pomyślnie (podobno było bliskie ½), na podstawie częstości jakich wydarzeń?

Leonard Savage sformalizował teorię prawdopodobieństwa subiektywnego, łącząc tę koncepcję z teorią subiektywnej oczekiwanej użyteczności, na wzór aksjomatycznej teorii von Neumanna-Morgensterna [Savage 1954].

Nie wnikając w trudne i techniczne szczegóły tej teorii, można pokrótce wspomnieć o wywodzącej się z niej idei szacowania wielkości prawdopodobieństw subiektywnych. Na bardzo prostym przykładzie: jeśli istnieją dwie loterie, A i B, i w każdej z nich jest tylko jedna wygrana wielkości tysiąca złotych, los na każdą z nich kosztuje złotówkę, a dana osoba zdecydowanie preferuje zagranie na loterii A – oznacza to, że wedle niej prawdopodobieństwo wygrania na loterii A jest większe niż na loterii B. I jest to właśnie prawdopodobieństwo subiektywne. Rzecz jasna, rzadko mamy do czynienia z porównywaniem prawdopodobieństw „równocennych" wydarzeń. Zwykle mierzyć się musimy z alternatywami typu: większa wygrana z ustalonym prawdopodobieństwem czy mniejsza wygrana z prawdopodobieństwem innym. Zakładając racjonalność jednostek, szukamy takiego punktu, w którym wzrost prawdopodobieństwa (subiektywnego) kompensuje malejącą wygraną, w ten sposób określając jego (prawdopodobieństwa) wartość.

Choć podejście Savage'a dominuje obecnie w literaturze przedmiotu, Aumann znalazł słabe punkty tej teorii. Zakwestionował przede wszystkim podział na „stany świata", „działania" i „konsekwencje", których definicje wydają się płynne w pewnych sytuacjach, gdy nie jest jasne, co jest czym [Aumann 1997]. Aby obejść te trudności, Aumann zaproponował w zamian bardziej skomplikowaną procedurę ustalania prawdopodobieństw subiektywnych, w której delikwent musi wybierać pomiędzy loteriami, w których wygranymi są inne loterie... [Anscombe, Aumann 1963].

Załóżmy, że wiemy już – choć daleko nam do tego – czym są prawdopodobieństwa subiektywne, i że dany gracz każdej możliwej akcji przeciwników przypisuje jakąś wartość takiego prawdopodobieństwa. Jak się można domyślać, ponieważ subiektywne prawdopodobieństwa są uogólnieniem pewności co do strategii przeciwnika (jak w ujęciu Nasha), również stany równowagi osiągane przy takich założeniach są uogólnieniem stanów równowagi Nasha [Aumann 1987]. Inaczej mówiąc, każdy stan równowagi Nasha jest stanem równowagi skorelowanej, natomiast zbiór równowag skorelowanych, które możemy otrzymać jako wypukłe kombinacje równowag Nasha, obejmuje i takie przypadki, które są nieosiągalne przy zastosowaniu rozumowania Nasha. Widzimy zatem, że znów mamy do czynienia z wypukłymi kombinacjami – tylko innych stanów i z innymi ograniczeniami.

Aumann pokazał, że podejście takie równoważne jest innemu, lepiej tłumaczącemu nazwę „równowaga *skorelowana*". Zaczęliśmy od tamtego ujęcia, gdyż intuicyjnie łatwej chyba jest pojąć, że człowiek może mieć różne oczekiwania wobec poczynań swoich bliźnich niż to, że słucha wskazówek zewnętrznego koordynatora, czyli opiera się na *skorelowanej* informacji statystycznej, a tak właśnie wygląda podejście chronologicznie pierwsze, z pracy Aumanna z 1974 r. [Aumann 1974].

Pojęcie równowagi skorelowanej zilustrujmy innym znanym przykładem z teorii gier, nazywanym „grą w tchórza" („grą w cykora", *chicken game*), gdyż tutaj właśnie najlepiej widać przydatność korelacji. Była to zabawa autentycznie praktykowana jakiś czas temu przez amerykańską młodzież, co można czasem jeszcze zobaczyć na starszych filmach.

Dwaj młodzi ludzie siadają za kierownicami aut i kierują się prosto na siebie, na zderzenie czołowe. Jeśli żaden z nich nie „stchórzy" – zabiją się lub doznają poważnych obrażeń. Jeśli obaj stchórzą i w ostatniej chwili skręcą kierownice, obaj wyjdą z tego bez szwanku. Jeśli jednakże jeden stchórzy, a drugi nie, znowu żaden nie poniesie uszczerbku na zdrowiu, ale ten „odważny" będzie chodził w glorii zwycięzcy, natomiast drugi będzie czuł się jak pokonany. Macierz wypłat w tej grze pokazana jest poniżej, przy czym znowu wartości bezwzględne liczb nie są specjalnie istotne, gdyż najważniejsze są ich względne relacje.

gracz 1 → / gracz 2 ↓	tchórzy	nie tchórzy
tchórzy	(5; 5)	(3; 6)
nie tchórzy	(6; 3)	(0; 0)

Rys. 4. Macierz wypłat w grze „tchórz" (zacieniowano kratki ze stanem równowagi Nasha)

Jak widać, równowagi Nasha w tym przypadku odpowiadają „pożądanym" rezultatom (jeden bardziej pożądany dla jednej, a drugi – dla drugiej ze stron), ale jaki miałby być mechanizm zapewniający osiągniecie któregoś z tych stanów? Trzeci stan równowagi Nasha, stan mieszany, jest takim stanem, w którym sytuacja – gracz 1 tchórzy, gracz 2 nie tchórzy – występuje w połowie przypadków (lub z prawdopodobieństwem ½), a sytuacja dokładnie odwrotna – w drugiej połowie przypadków (też z prawdopodobieństwem ½). Ale ponownie powstaje pytanie, w jaki sposób można osiągnąć taki efekt? Załóżmy, że mamy zewnętrznego koordynatora, który wykonuje jakiś eksperyment z losowym rezultatem – na przykład losuje jedną z trzech kart oznaczonych

(T,N), (N,T), (T,T), wyciągając każdą z kart z jednakowym prawdopodobieństwem, równym ⅓. Po wylosowaniu karty mówi każdemu z graczy, jaka strategia została mu „przydzielona”, ale nie o strategii zaproponowanej przeciwnikowi. W sytuacji, gdy gracz wie, że jemu samemu wypadło *nie* tchórzyć, może być pewien, że przeciwnikowi zasugerowano stchórzenie (nie ma karty (N,N) wśród losowanych kart). Ale jeśli proponuje się mu stchórzenie – nie może być pewien, co zasugerowano przeciwnikowi. Niemniej jednak, w żadnym przypadku nie ma on motywacji, by odstąpić od sugerowanej strategii. Przyjrzyjmy się temu. Jeśli sugeruje się mu nie tchórzyć – spodziewa się uzyskania wypłaty równej 6, gdy przeciwnik stchórzy. Ale może przeciwnik wyłamie się i nie zagra tak, jak mu podpowiedziano? Również on nie ma po temu motywacji. Skoro jemu zaproponowano stchórzenie, oznacza to, że przeciwnikowi – albo również stchórzenie (karta (T,T)), albo przeciwnie (karta (N,T)), z takim samym prawdopodobieństwem. Oczekiwana wypłata gracza 2 przy trzymaniu się proponowanej strategii (tchórzenia) wynosi: $(½) \cdot 5 + (½) \cdot 3 = 4$ (pierwszy składnik odpowiada karcie (T,T), drugi karcie (N,T)). W przypadku zmiany strategii z tchórzenia na nietchórzenie, wyniki zmieniają się tak, że w przypadku karty (T,T) gracz 2 zyskuje glorię zwycięzcy, ale w przypadku karty (N,T) – ginie na miejscu (po jednostronnej zmianie strategii przez gracza 2 żaden z graczy nie tchórzy). Zatem oczekiwana wypłata wynosi: $(½) \cdot 6 + (½) \cdot 0 = 3$ i jest mniejsza niż oczekiwana wypłata w sytuacji, gdy będzie trzymał się rekomendacji. Żaden z graczy nie ma zatem powodu, by jednostronnie odstępować od sugerowanego zachowania. Zauważmy, że oczekiwana wypłata w tym stanie równowagi skorelowanej wynosi:

$$(⅓) \cdot 6 + (⅓) \cdot 3 + (⅓) \cdot 5 = 4⅔,$$

i jest *wyższa* niż w stanie mieszanej równowagi Nasha:

$$(½) \cdot 6 + (½) \cdot 3 = 4{,}5.$$

Różnica ta jest nieznaczna i – uczciwie mówiąc – zależy od wyboru konkretnych wartości wypłat. Jakkolwiek jednak sztuczne byłyby powyższe wielkości, zasadniczą sprawą jest to, że poprzez mechanizm równowagi skorelowanej osiągalne są stany *inne* niż tylko równowagi Nasha.

Ponadto wspomnieć warto o jeszcze jednym fakcie. Równowagi skorelowane obejmują całe spektrum różnych stanów. W powyższym przykładzie prawdopodobieństwa, z jakimi wyciągane były karty, były identyczne i w ten sposób otrzymaliśmy *egalitarny* stan równowagi

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 12 (18)

skorelowanej, czyli taki, który maksymalizuje użyteczność *łączną*. Zmieniając wartości prawdopodobieństw przypisane poszczególnym kartom, możemy osiągać inne stany równowagi skorelowanej – na przykład stan *libertariański*, czyli taki, który faworyzuje jednego z zawodników. Albo znaleźć się gdzieś pomiędzy.

Rozważania na temat stanów równowagi skorelowanej można by ciągnąć jeszcze długo, zahaczając o tak interesujące aspekty tego zagadnienia, jak korzyści z ograniczonej wiedzy jednego z graczy [Aumann i in. 1968]. Ograniczmy się tu jednakże do wzmianki na temat pewnej konkluzji płynącej z teoriogrowych rozważań, mającej doniosłe konsekwencje dla osiągania celów politycznych. Sam Aumann, rzecz jasna, ujmował rzecz znacznie bardziej formalnie i zapewne można by tu przytoczyć kilka dobrych teorematów, ale wskażmy tylko analogię. W opisanej powyżej grze w cykora korzystnym i racjonalnym wyborem dla każdego z graczy będzie postępowanie w określony sposób pod warunkiem, iż wierzy on, że drugi gracz również zachowuje się racjonalnie. Jeśli gracz, któremu sugeruje się stchórzenie, myśli, iż ten drugi jest takim cykorem, że stchórzy nawet wówczas, gdy rekomendowana jest mu odwaga, wówczas może pokusić się o złamanie reguły i spróbować szczęścia większej wygranej. Podobna zasada obowiązuje również w grach iterowanych: przeciwnik nie może liczyć, że jego wyłamanie się ze współpracy pozostanie nieukarane. W polityce, argumentuje Aumann, istotne jest, by groźby były zasadne i podbudowane tak, by przeciwnik nie wątpił w ich szczerość. W tym kontekście uczony oskarża rząd Izraela o zbytnią uległość wobec Palestyńczyków i świata arabskiego, częstokroć przytaczając stare przysłowie: „Chcesz pokoju, szykuj się na wojnę". To między innymi tego typu stwierdzenia nie przysporzyły Aumannowi sympatii w liberalnych kręgach europejskiej inteligencji.

Interesujące, że zasada wiarygodnych ostrzeżeń również, podobnie jak inne wątki rozwijane przez teorię gier, wspominane powyżej, ma przełożenie ewolucyjne. Wielu teoretyków ewolucji podejrzewa, iż takie barokowe i zbędne, wydawałoby się, konstrukcje, jak ogon pawia czy poroże jelenia, są „uczciwą" (bo kosztowną) manifestacją dobrego stanu zdrowia i dobrych genów. Osobnik chorobliwy nie wydoliłby, pod względem energetycznych, wyhodować zbytnio imponujących ozdób. Podobnie, socjobiolodzy częstokroć traktują pierścionek zaręczynowy jako tego typu wiarygodne (bo kosztowne) ogłoszenie zamiarów. Ponadto, zasada wiarygodności miałaby również wyjaśniać pewną zdumiewającą zdolność ludzką. Jaki kłamca jest najbardziej przekonujący? Oczywiście taki, który jest święcie przekonany o prawdziwości swoich nieprawdziwych stwierdzeń, co naukowo wykazywał R. Trivers w ewolucyjnym wyjaśnieniu zdolności do samooszukiwania się [Trivers 2011]. Jakkolwiek wydawałoby się to paradoksalne z logicznego punktu widzenia, wiemy już przecież, że człowiek pełen jest paradoksów. W tym miejscu odwołać się można do często wzmiankowanego przez Aumanna tak zwanego *paradoksu szantażysty*. Dwaj mężczyźni zamknięci zostali w pokoju z walizką pełną pieniędzy, którymi mogą podzielić się tak jak chcą – pod warunkiem że obaj przystaną na podział. Pierwszy proponuje podział po połowie. Drugi stwierdza, że zgadza się tylko i wyłącznie na 90%, mniejsze oferty odrzuca (wówczas obaj mężczyźni wracają do domów z niczym). Problem w tym, czy „szantażysta" zdoła przekonać swego towarzysza, że autentycznie gotów jest zostać z pustymi rękoma. Jeśli uda mu się to, druga strona postąpi racjonalnie, akceptując 10% (lepsze to niż 0). Oczywiście, najbardziej przekonujący byłby ktoś, kto *faktycznie* przygotowany jest na niezyskanie niczego. Nie od dziś wiadomo, że szef, który może zastąpić proszącego o podwyżkę pracownika, ma silniejszą pozycję przetargową niż taki petent w czasach wysokiego bezrobocia. Odnosząc tę sytuację do konfliktu pomiędzy Izraelem a Syrią o Wzgórza Golan, Aumann stwierdził: „Syryjczycy uważają [tę] ziemię za świętą i nie ustąpią ani o milimetr. [...] użyli określenia „święta" jako formy deklaracji. Musieli przekonać *samych siebie*, że jest święta, i zrobili to".

Choć noblista nawołuje do rozbudowanych zbrojeń w celu uwiarygodnienia sygnałów ostrzeżenia (Izraela czy krajów po zachodniej stronie Żelaznej Kurtyny w niegdysiejszych czasach), to miejmy nadzieję, iż teoria wiarygodnych sygnałów częściej jednak będzie wyrażała się w kosztownej biżuterii niż arsenałach nuklearnych...

7. Twierdzenie Aumanna o braku zgody na niezgodę

Koncept wspólnej wiedzy doprowadził Aumanna do niezwykle interesującego twierdzenia. Twierdzenie to, „o zgodzie", zyskało niejaką popularność z jednej strony dzięki swojej zaskakującej nieoczywistości (wielki naukowiec, Kenneth Arrow, nie mógł uwierzyć w wynik Aumanna, gdy ten mu o nim opowiedział), z drugiej strony – dzięki chwytliwemu tytułowi, jaki z wyczuciem niemalże marketingowym nadał Aumann swej pracy: „Zgoda na niezgodę" (*Agreeing to Disagree*) [Aumann 1976]. Właściwie to bardziej adekwatny byłby chyba tytuł „Niezgoda na niezgodę", gdyż Aumann udowadnia w tekście, iż dwie osoby dzielące te same prawdopodobieństwa *a priori*, nawet jeśli mają dostęp

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Nr 12 (18)

do różnych informacji, nie mogą zgodzić się na niezgodzenie się ze sobą – co do wartości finalnych prawdopodobieństw *a posteriori*. Pod warunkiem, że dzielą się ze sobą swoimi oszacowaniami prawdopodobieństwa i pod wpływem oszacowań drugiej osoby mogą modyfikować swoje własne szacunki. Innymi słowy, jeśli szacunki prawdopodobieństwa *a posteriori* każdej z osób są wspólną wiedzą.

Jak to działa? Powiedzmy, że znajomym rodzi się dziecko i nie mamy żadnej informacji na temat jego płci. Wiedząc, że dziewczynek rodzi się z grubsza tyle samo, co chłopców, prawdopodobieństwo *a priori* tego, że dziecko jest dziewczynką, przyjmujemy równe ½. Takie samo prawdopodobieństwo *a priori* przyjmuje nasz kolega Stefan. W czasie obiadu, kiedy my zajadamy się zupą z brokułów, Stefan postanawia odmówić sobie posiłku i idzie odwiedzić szczęśliwych rodziców. Po powrocie oznajmia nam, że wedle niego prawdopodobieństwo, iż dziecko jest dziewczyną, wynosi 1. Nie musimy wiedzieć, na jakiej konkretnie informacji opierał się Stefan (komunikat rodziców, metryka urodzin z wpisanym imieniem Julia, naoczna obserwacja...), by zmodyfikować własne szacunki. O ile oczywiście wierzymy, że Stefan jest człowiekiem racjonalnym i nie zdiagnozował płci dziecka, trzymając nad kołyską wahadełko.

Mniej trywialny przykład podaje Aumann w swojej oryginalnej pracy. Powiedzmy, że mamy monetę, co do której nie ma pewności, czy jest rzetelna. Franek i Stefan chcą ocenić prawdopodobieństwo otrzymania orła w wyniku rzutu tą monetą. Przy braku jakichkolwiek informacji obaj przyjmują prawdopodobieństwo *a priori* wyrzucenia orła równe ½. Następnie każdy z nich może wykonać jeden rzut i aktualizować swoje oszacowanie prawdopodobieństwa. Franek wyrzuca orła, zatem podwyższa swoje oszacowanie prawdopodobieństwa do ⅔. Stefan otrzymuje reszkę, zatem zmniejsza swoje oszacowanie do ⅓. Następnie wymieniają się swoimi oszacowaniami. Choć nie ujawniają sobie nawzajem informacji, na podstawie których aktualizowali swoje oszacowania (czyli wyników rzutów monetą), każdy z nich zakłada, że drugi rozumował tak samo, jak on sam. Czyli Stefan jest w stanie wydedukować, że Franek wyrzucił orła, natomiast Franek domyśla się, że Stefan otrzymał reszkę. Obaj wiedzą teraz zatem, że w dwóch rzutach tą samą monetą raz otrzymano orła, a drugi raz – reszkę. Obaj dochodzą do nowego – i zgodnego – oszacowania prawdopodobieństwa wyrzucenia orla równego ½.

Interesującym przykładem z zakresu matematyki rekreacyjnej, ilustrującym wyciąganie wniosków na podstawie cudzych wniosków –

acz bez dostępu do ich informacji – jest następująca zagadka. Uczestniczymy w przyjęciu, w którym bierze udział *n* osób. Na drugie danie podano szpinak. Po uprzątnięciu talerzy i zaserwowaniu deseru mistrz ceremonii z zażenowaniem informuje, iż co najmniej jeden z uczestników obiadu ma na nosie kawałki szpinaku. Ambarasująca sytuacja, jednakże żaden z gości nie chce niepotrzebnie opuszczać przyjęcia (deser!), by udać się do łazienki. Jako że nie dysponują lusterkami, a mistrz ceremonii jest dobrze wychowany i nie pokazuje nikogo palcem, nikt nie jest w stanie stwierdzić, czy kompromitujące ślady obiadu dotyczą właśnie jego. Mistrz ceremonii proponuje zatem następujące rozwiązanie. Uderzy w gong. Osoby, które mają pewność, że problem dotyczy ich własnych twarzy, mogą wówczas wyjść do łazienki. Jeśli nikt nie opuści sali, mistrz po chwili ponownie uderzy w gong. I tak dalej, dopóki problem nie zostanie rozwiązany. Dlaczego takie postępowanie ma rozwiązać sytuację? Zauważmy, że gdyby mistrz poinformował, ile dokładnie osób ma na twarzy szpinak, wówczas każdy mógłby spojrzeć na twarze współbiesiadników i porachować, czy do pełnej liczby brakuje jednej osoby – jeśli tak, miałby pewność, że brakującą osobą jest on sam, czyli jedyny, którego twarzy nie jest w stanie zobaczyć. Jednakże nawet bez informacji o liczbie ubrudzonych gości problem da się rozwiązać, aczkolwiek procedura i jej wyjaśnienie są w tym przypadku bardziej skomplikowane.

Rozważmy po kolei przypadki jednego ubrudzonego, dwóch, trzech i tak dalej. Jeśli ubrudzony jest tylko jeden z gości, wówczas osoba ta widzi, że twarze wszystkich innych są czyste. Zyskuje dzięki temu pewność, że umyć powinien się on sam. Zauważmy, że mistrz ceremonii nie musi podawać w tym celu, ile dokładnie osób dotknęła szpinakowa przypadłość: wystarczy informacja, iż jest co najmniej jedna taka osoba. W przypadku jednego ubrudzonego problem rozwiązuje się zatem przy pierwszym uderzeniu gongu. Jeśli brudne są dwie osoby, wówczas przy pierwszym uderzeniu gongu problem pozostaje nierozwiązany. Każda z dwóch osób udekorowanych szpinakiem widzi tę drugą. Ponieważ istnieje możliwość, iż brudna jest tylko jedna osoba – ta, którą delikwent widzi – on sam nie może wyciągnąć żadnych wniosków odnośnie do swojego stanu. Jednakże następuje pierwsze uderzenie gongu i – nikt nie wychodzi do łazienki (drugi ubrudzony rozumował przecież tak samo). Ten brak akcji ze strony współbiesiadnika, który ewidentnie ma na twarzy resztki obiadu, daje drugiemu ubrudzonemu informację: tamten nie miał pewności co do swojego ubrudzenia, zatem musiał widzieć szpinak na twarzy kogoś innego. Ponieważ ja sam widzę tylko jedną brudną twarz, druga taka facjata musi należeć do mnie

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 12 (18)

samego. I przy drugim uderzeniu gongu podejmuje już akcję łazienkową, podobnie jak rozumujący analogicznie drugi z brudasów. Ten sposób rozumowania, acz staje się coraz bardziej skomplikowany, można rozciągać na coraz więcej brudnych osób. Ogólnie, jeśli naznaczonych jest k osób, dzięki tej procedurze przy k-tym uderzeniu gongu każda z nich zyska pewność, iż należy do tego grona. A dzieje się tak dlatego, że uczestnicy w trakcie całego procesu aktualizują swoje prawdopodobieństwa tego, że sami mają na twarzy szpinak, i ujawniają wszystkim pozostałym, czy osiągnęli pewność, czy też nie. Oczywiście, musimy założyć, że każdy z uczestników posiada wysokie zdolności rozumowania i żaden z nich nie podniósł się z miejsca po prostu dlatego, że znudziła mu się przydługa zabawa...

Jeśli można udowodnić takie piękne twierdzenie, dlaczego w takim razie ludzie tak często się ze sobą nie zgadzają, nawet wówczas, gdy usilnie starają się jeden drugiego przekonać? Niejeden świadek ślubu ze sceptycyzmem wysłuchiwał żarliwych przysiąg nowożeńców, najwyraźniej nie dzieląc z nimi ani prawdopodobieństw *a priori* ani *a posteriori* dotyczących szans na przetrwanie tego związku, mimo dzielenia się informacjami („Twoja narzeczona jest *wredna*". „Oczywiście, statystycznie rzecz biorąc, rozpada się 40% małżeństw, ale my się *kochamy*!"). Rzecz w tym, że materiał ludzki jest niezwykle oporny, jeśli chodzi o spełnianie wyśrubowanych założeń, wykorzystywanych w przeprowadzaniu matematycznego dowodu. Wspólne prawdopodobieństwa *a priori* (nazywane „doktryną Harsanyi'ego") i precyzyjne wyciąganie wniosków wymagają stopnia racjonalności, jakiego większość z nas nie potrafi (ani prawdopodobnie nie chce) osiągnąć. W ostatnich czasach wielu wybitnych badaczy zwraca uwagę na tę ludzką właściwość. Pionierami badań nad obciążeniami poznawczymi i skłonnościami do wyciągania błędnych wniosków byli m.im. Tversky i Kahneman [1974]. Nie mówiąc już o zwykłych błędach (jaki procent ludzi rozwiązałby poprawnie zagadkę z biesiadnikami i szpinakiem?).

Twierdzenie o zgodzie uzasadnia równoważność, wspominaną przy omawianiu równowagi skorelowanej, mechanizmu korelującego i subiektywnych prawdopodobieństw prowadzących do tego samego rezultatu.

8. Talmudyczny problem podziału majątku

Rzecz jasna, rozwiązanie (jakiegokolwiek) talmudycznego problemu samo w sobie jest słabą podstawą do przyznania Nagrody imienia Nobla i zapewne nie to gremium byłoby powołane do jej przyznawania.

Co więcej, dziwnie kontrastuje z wizerunkiem współczesnego naukowca. Jak już jednak wspominaliśmy, Robert Aumann wykazuje się zadziwiającą umiejętnością łączenia dwóch epok, starożytnej i współczesnej, i dwóch światów, religijnej ortodoksji i postępu naukowego. W tym przypadku również rozwiązał stary problem nie poprzez odwoływanie się do jeszcze starszych autorytetów religijnych, ale poprzez zaprzęgnięcie do rozwiązania najnowocześniejszej maszynerii teorii gier.

Omawiając pracę Aumanna dotyczącą podziału spadku, znajdziemy się zresztą w większości. Jak napisał S. Schecter, „Kiedy Aumann został nagrodzony Nagrodą Nobla [...] czytałem to, co o nim pisano. Większość jego prac jest raczej techniczna. Prawdopodobnie z tego powodu dziennikarze piszący o Aumannie mieli tendencję szybko przechodzić do faktu, iż rozwiązał on stary talmudyczny problem, najwyraźniej sądząc, że spotka się to z powszechnym zainteresowaniem" [Schecter 2012]. Jako komentarz do tego komentarza dodajmy, że nawet jeśli sam w sobie Talmud nie byłby specjalnie interesujący (choć sądzić można, iż daje pewien powiew tajemniczości), to chyba przyjemnie jest poznać problem takiego typu, że – nawet jeśli nie zrozumiemy dowodu poprawności rozwiązania, a nawet, jeśli nie zrozumiemy samego rozwiązania – to przynajmniej jesteśmy w stanie pojąć jego sformułowanie.

A sformułowanie talmudycznego problemu, z którym zmierzył się Aumann (wespół z Maschlerem) jest zwodniczo proste: Jak podzielić spadek po zmarłym, mającym długi u różnych wierzycieli, jeśli majątku nie wystarczy na pokrycie wszystkich zobowiązań?

Mogłoby się wydawać, iż problem jest trywialny. Większość ludzi instynktownie opowiada się za podziałem *proporcjonalnym*: jeśli mamy n dłużników, a ich wierzytelności wynoszą $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$, podczas gdy całkowity majątek zmarłego wynosi e i nie wystarcza go na pokrycie długów: $e < d$, wówczas każdy z dłużników powinien otrzymać sumę proporcjonalną do udziału wielkości swoich roszczeń: $x_i = \frac{d_i}{d} e$. Problem w tym, że nie jest to jedyne możliwe do pomyślenia rozwiązanie. Innym rozsądnym pomysłem mogłoby być *równe rozłożenie strat* na wszystkich dłużników: $x_i = d_i - \frac{d-e}{n}$.. Co więcej, Aumann w swoim rozwiązaniu związany był starodawną mądrością Mishny, która wskazywała kilka przykładów podziałów: mamy trzech dłużników, a ich należności wynoszą odpowiednio: $d_1 = 100$, $d_2 = 200$, $d_3 = 300$, więc

– jeśli spadek wynosi $e = 100$, każdy z dłużników otrzymuje $33\frac{1}{3}$;
– jeśli spadek wynosi $e = 200$, pierwszy dłużnik dostaje 50, a pozostali dwaj po 75;

– jeśli spadek wynosi $e = 300$, pierwszy dłużnik dostaje 50, drugi 100, a trzeci 150.

Na pierwszy rzut oka trudno odkryć, jakim algorytmem (jeśli jakimkolwiek) rządzi się ta sekwencja podziałów.

Zadaniem było zatem nie tyle wymyślenie podziału, który wydawałby się sprawiedliwy, ile odkrycie ogólnej reguły, której szczególnymi przypadkami były przykłady podane w Mishnie (z założenia, uznane za sprawiedliwe).

Rozwiązaniem okazała się reguła spornych części [Aumann, Maschler 1985].

Załóżmy, że mamy dwóch dłużników, których łączne roszczenia przekraczają majątek pozostawiony do podziału. Jeśli wierzytelność pierwszego wierzyciela nie przekracza całkowitego majątku, $e - d_1 > 0$, to nie rości on sobie praw do tego, co pozostałoby po spłaceniu jego długu i może to odstąpić drugiemu wierzycielowi. Podobnie drugi z wierzycieli: nie rości sobie praw do tego, co pozostaje z majątku po odjęciu jego wierzytelności, $e - d_2$, więc odstępuje tę sumę pierwszemu (oczywiście, o ile jest co odstępować, czyli o ile jego roszczenia nie przekraczają całości do podziału). Zauważmy, że suma tych odstąpionych części (o ile żaden z długów nie przekroczył całości majątku – w przeciwnym razie wierzyciel nie odstępuje niczego) jest mniejsza niż majątek do podziału: $e - d_1 + e - d_2 = 2e - d_1 - d_2 > 0$, jeśli $d_1 < e$, $d_2 < e$. Wedle reguły spornych części pozostała (po „odstąpieniach") część majątku jest dzielona po równo.

Zgodnie z definicją Aumanna i Maschlera podział pomiędzy więcej niż dwie osoby jest zgodny z regułą spornych części pod warunkiem, że – biorąc pod uwagę ich roszczenia – łączna suma przyznana każdej możliwej parze wierzycieli podzielona jest zgodnie z tą regułą.

Sprawdźmy poprawność rozwiązania dla $e = 300$ oraz dłużników drugiego i trzeciego. Łącznie przyznano im 100 + 150 = 250, a ich wierzytelności wynosiły odpowiednio 200 i 300. Ile każdy z nich powinien otrzymać zgodnie z powyższym algorytmem? Dłużnik drugi odstępuje trzeciemu 250 – 200 = 50, natomiast trzeci drugiemu nic, jego roszczenia przewyższają całkowitą sumę do podziału. Po odjęciu „odstąpionych" pięćdziesięciu jednostek od całkowitej sumy 250, pozostaje 200 do równego podziału,. Zatem dłużnik drugi otrzymuje 100, a trzeci – 100 plus „odstąpione" 50, czyli 150.

Jak widać, znajdowanie właściwych podziałów dla więcej niż dwóch osób może być całkiem skomplikowane. Tym bardziej zaskakujące, iż Aumann i Maschler dowiedli, że w każdym przypadku istnieje tylko *jeden* sposób podziału, który jest zgodny z opisaną regułą spornych części (w sensie zgodności z nią dla każdej możliwej pary osób)!

Sentymentalnego posmaku dodaje całej sprawie to, iż o problemie dotyczącym podziału Aumann dowiedział się od swojego syna Shlomo, studiującego w Akademii Talmudycznej w Jerozolimie. Pracę zawierającą dowód jednoznaczności reguły podziału autor zadedykował właśnie Shlomo, który zginął w 1982 r. w trakcie służby w izraelskiej armii.

9. Nauka, religia i syjonizm

Jedną z cech charakterystycznych Aumanna – rzadko spotykaną u naukowca – jest jego głęboka i ortodoksyjna religijność. Jak wspominano, u początku swojej drogi życiowej stanął przed poważnie rozważaną alternatywą: nauka czy prawo talmudyczne. Długo nie było pewności, na którą stronę przechyli się szala. Do tej pory Aumann nie wie, w jaki sposób podjął tę decyzję – podjęła się jakby przypadkiem. Praktykowania religii judaistycznej nie zaniechał przez całe życie. Jego tożsamość silnie opiera się zarówno na wyznawanej religii, judaistycznej tradycji, jak i na syjonistycznych przekonaniach. Komitet Noblowski przyznał nagrodę Robertowi Johnowi Aumannowi, ale ta sama osoba posługuje się również – na równi – imieniem nadanym przy obrzezaniu: Yisrael. Sam opowiadał w wywiadzie zabawną historię nieporozumień, gdy urzędnik podejrzewał, iż jego dzieci mają różnych ojców (niektóre jako imię ojca miały wpisane Robert, inne – Yisrael) [Hart 2009].

Zapytany w wywiadzie, jak godzi te dwa aspekty swego życia, Aumann odparł, iż religia i nauka nie są sprzeczne, a raczej ortogonalne (w matematycznym znaczeniu innego wymiaru). Przystaje to do dość powszechnie głoszonego obecnie poglądu o „odmiennych magisteriach" (S.J. Gould). „Religia jest zupełnie odmienna od nauki. Nasze modelowanie świata nie jest zasadniczą treścią religii. [...] Religia jest doświadczeniem – głównie emocjonalnym i estetycznym. [...] Kiedy grasz na pianinie, kiedy wspinasz się w górach, czy to jest przeciwne osiągnięciom naukowym? Oczywiście, nie. Te dwie sprawy są niemal – choć nie całkowicie – ortogonalne. [...] Istnieją obok siebie bez konfliktu", powiedział Aumann w wywiadzie. Podaje potem przykłady religii, jak można by to ująć, jako stylu życia, nadającemu mu znaczenie. Przestrzeganie szabatu i innych reguł judaizmu, według Aumanna wzbogacające jego życie, faktycznie może stanowić podbudowę jego tezy. Co jednakże sądzi o, przykładowo, kamienowaniu cudzołożników i innych sprawach, które nie ograniczają się do sfery ściśle prywatnej?

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 12 (18)

Jak wspomniano, jest Aumann również zaciętym syjonistą, a jeśli nastawionym pokojowo, to w bardzo przewrotny sposób – w myśl maksymy: „Chcesz pokoju, szykuj się do wojny". „Współistnienie z Arabami jest możliwe, o ile uświadomią sobie, że wojna, terror i gwałt mogą mieć dla nich gorsze konsekwencje niż dla nas", mówi Aumann, i aż ciarki mogą przejść słuchacza. Ostro krytykuje zbyt uległą, według niego, politykę Izraela. „Ewakuacja osiedli z Gazy była bezpośrednią konsekwencją akcji terrorystycznych z wykorzystaniem skazanych na śmierć. Ustępując, pokazaliśmy Palestyńczykom, że ich metody są efektywne" – tymczasem większość europejskich komentatorów uważa okupację Gazy przez Izrael za wysoce niesprawiedliwą i nie każdy zgodziłby się, która ze stron jest tu stroną terrorystyczną. Kontrowersje budzi również porównywanie przez Aumanna ustępstw na rzecz Palestyny (według wielu, dalece niewystarczających) do taktyki tchórzliwego niesprzeciwiania się agresywnej polityce Hitlera w latach poprzedzających wybuch II wojny światowej. „Ani Napoleon, ani Hitler nie byli zainteresowani utrzymaniem pokoju ze swoimi sąsiadami. I dlatego próby uspokojenia ich za wszelką cenę odnosiły odwrotne skutki [...] Kiedy agresor widzi, że jego metody działają, zaczyna dalej postępować zgodnie z tymi metodami, jednocześnie wysuwając kolejne żądania. W przypadku, kiedy agresor spotka się ze zdecydowanym oporem, zaczyna swoje metody analizować. Pacyfizm może doprowadzić do wojny, ponieważ kraj, w którym pacyfizm staje się ideologią zaczyna grać zgodnie z zasadami agresora. To właśnie ma miejsce w Izraelu", powiedział na konferencji w Herclii [Monko-Ejgenberg 2007].

W 1988 r. Aumann został członkiem skrajnie prawicowej grupy „Profesorowie na rzecz Silnego Izraela". Deklarowane cele tej grupy brzmią nawet bardziej niepokojąco niż wypowiedzi samego Aumanna. Na ich stronie internetowej można przeczytać, iż są oni zatroskani „bezpieczeństwem i żydowskim charakterem państwa Izrael". Oficjalnie przeciwni są utworzeniu państwa palestyńskiego, a wycofanie osadników ze Strefy Gazy traktują jako „czystkę etniczną".

Po ogłoszeniu werdyktu Komitetu Noblowskiego, ponad tysiąc podpisów naukowców z całego świata znalazło się pod petycją wnoszącą o anulowanie przyznanie nagrody Aumannowi...

10. Sztokholm

Niezależnie od kontrowersyjnych poglądów Aumanna (i niezależnie od kontrowersji, czy Nagroda imienia Nobla powinna być przyznawana niezależnie od moralnej oceny laureatów), osiągnięcia naukowe Aumanna są nie do przecenienia. Powyżej wspominaliśmy zaledwie o wycinku z całej imponującej panoramy prac wielkiego uczonego. Wymieńmy jeszcze dwa hasła, które Aumannowi zawdzięczają narodziny zainteresowania naukowego: iterowane gry z niekompletną informacją [Aumann, Maschler 1995] oraz rynki z „kontinuum" uczestników [Aumann 1964], to ostatnie o całkiem ekonomicznym charakterze, by wskazać na uniwersalność wiedzy laureata, nie ograniczającej się do teorii gier.

Niemniej jednak, w uzasadnieniu werdyktu Komitetu Noblowskiego z 2005 r. szczególnie uznanie znalazło właśnie zastosowanie teorii gier: „Za postępy w zrozumieniu konfliktów i współpracy dzięki teoriogrowej analizie".

Podobno pod koniec ubiegłego wieku w środowisku czuło się, iż niedługo Nagroda imienia Nobla w dziedzinie ekonomii powędruje do któregoś z teoretyków gier. Świadkowie podają, że w 1994 r. na krótko przed ogłoszeniem zwycięzcy, na konferencji skupiającej największe sławy – praktycznie wszystkich potencjalnych kandydatów do najwyższego wyróżnienia – Aumann zachowywał się, jakby już wygrał [Nasar 2002]. Tymczasem Nagrodę faktycznie przyznano za osiągnięcia w dziedzinie teorii gier, ale otrzymali ją John Nash, John Harsanyi i Reinhard Selten. Aumann nigdy nie przyznał się do rozczarowania czy poczucia pokrzywdzenia werdyktem. Co więcej, gdy po upływie dekady sam otrzymał swoją Nagrodę, twierdził, iż nie spodziewał się wyróżnienia. Że teoria gier już została uhonorowana. Tymczasem, jeśli chodzi o tę dziedzinę, nie skończyło się nawet na dwóch nagrodach, bo już w 2013 r. ponownie została przyznana dwóm teoretykom gier.

Do Sztokholmu Aumann przybył ze sporą, trzydziestoosobową, gromadką członków rodziny. Aumann ogólnie jest bardzo rodzinną osobą. Co roku spędza czas na nartach z inną gałęzią z rozległego drzewa związków krwi. Częścią rodziny jest również wdowa po synu Szlomo, który zginął, służąc w armii izraelskiej. Ciekawym faktem – i być może szokującym dla polskiego czytelnika – jest to, iż po śmierci swojej żony oraz po śmierci małżonka siostry zmarłej żony, tych dwoje pobrało się. W kulturze europejskiej przez długi czas takie związki uważane były za kazirodcze i wymagały specjalnej dyspensy papieskiej.

Szczęśliwie, ceremonia wręczenia nagród w Sztokholmie rozpoczynała się dopiero o godzinie 16.30. Było to 38 minut po zakończeniu szabatu, więc Aumann mógł bez problemu wziąć w niej udział. Mimo wszystko na przyjęciu musiał być traktowany wyjątkowo: specjalnie

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 12 (18)

dla niego i towarzyszącej mu rodziny przygotowano ściśle koszerne menu, łącznie z koszernym winem.

Najwyraźniej Aumanna nie onieśmieliły kontrowersje wokół jego osoby, bo swój wykład noblowski zatytułował „Wojna i pokój". Niemniej jednak, w samej treści nie czynił odwołań do bieżącej sytuacji w Palestynie, a ograniczył się do naukowej analizy konfliktów i teoriogrowego podejścia do tej kwestii.

W pewnym momencie stwierdził, że Lloyd Shapley jest największym teoretykiem gier wszechczasów. Wzmianka to albo prorocza, albo stanowiąca bodziec dla słuchaczy – bo jednym z dwóch teoretyków gier, którzy w 2013 r. otrzymali wzmiankowaną wyżej kolejną Nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii przyznaną tej gałęzi nauki, był właśnie Lloyd Shapley...

Literatura

Anscombe F.J., Aumann R.J., *A definition of subjective probability*, „Annals of Mathematical Statistics" 1963, Vol. 34, s. 199–205.

Aumann R.J., *Markets with a continuum of traders*, „Econometrica" 1964, Vol. 32, s. 39–50.

Aumann R.J., *Subjectivity and correlation in randomized strategies*, „Journal of Mathematical Economics" 1974, Vol. 1, s. 67–96.

Aumann R.J., *Agreeing to disagree*, „The Annals of Statistics" 1976, Vol. 4, s. 1236–1239.

Aumann R.J., *Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality*, „Econometrica" 1987, Vol. 55, s. 1–18.

Aumann R.J., *Letter from Robert Aumann to Leonard Savage, 8 January 1971*, [w:] R.J. Aumann, *Collected Pape*rs, Vol. 1, MIT Press, Cambridge, MA, 1997, s. 305–306.

Aumann R.J., Maschler M., *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*, „Journal of Economic Theory" 1985, Vol. 36, s. 195–213.

Aumann R.J., Maschler M., *Repeated Games with Incomplete Information*, MIT Press, 1995.

Aumann R.J., Maschler M., Stearns R., *Repeated games of incomplete information: an approach to the non-zero sum case*, [w:] *Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-143* 1968, Chapter IV, s. 117–216.

Axelrod R., *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, New York 1984.

Dunbar R., *The Human Story*, Faber and Faber, London 2004.

Hart S., *An Interwiev with Robert Aumann*, [w:] P.A. Samuelson, W.A. Barnett (red.) *Inside the Economist's Mind: Conversations with Eminent Economists*, John Wiley & Sons, 2009.

Kahneman D., *Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym*, Media Rodzina, Poznań 2012.

Luce R.D., Raiffa H., *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*, Courier Dover Publications, 1957.

Malawski M., Wieczorek A., Sosnowska H., *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.

Monko-Ejgenberg T., *Prof. Aumann i polityka zagraniczna Izraela*, 2007, http://www.jewish.org.pl/index.php/pl/opinie-komentarze-mainmenu-62/3007-prof-aumann-i-polityka-zagraniczna-izraela-.html.

Nasar S., *Piękny umysł*, MUZA, Warszawa 2002.
Savage L., *The Foundations of Statistics*, Dover, Mineola, NY, 1954.
Schecter S., *How the Talmud divides an estate among creditors*, [w:] T. Bourama i in., *Bridging Mathematics, Statistics, Engineering and Technology*, Springer, New York 2012, s. 29–42.
Trivers R., *The Folly of Fools: The Logic of Deceit and Self-Deception in Human Life*, Basic Books, New York 2011.
Tversky A., Kahneman D., *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, „Science" 1974, Vol. 185, s. 1124–1131.

RATIONALITY, CONFLICTS AND GAME THEORY IN THE LIFE AND CAREER OF ROBERT J. AUMANN (NOBEL PRIZE IN ECONOMIC SCIENCES, 2005)

Summary: Robert J. Aumann received the Nobel Prize in Economic Sciences in 2005 for his work on conflict and cooperation through game-theory analysis. The best known of his achievements is the concept of correlated equilibrium. He is also famous, not only among scientists, for his attempts to apply mathematical results to real political conflicts. The paper presents the sketch of main ideas of Aumann's, including common knowledge and rationality, theorem considering Nash equilibria in iterated games, correlated equilibrium and theorem related to "agreeing to disagree". There is also mentioned a very interesting problem of "how the Talmud divides an estate among creditors", solved by Aumann. Moreover, the personal profile of Aumann is presented, as a man and as a political figure.

Keywords: Robert J. Aumann, correlated equilibrium, repeated games, Folk Theorem.