

Mechanika ogólna

Alicja Pac-Pomarnacka

Mechanika ogólna

z przykładami obliczeń



Wrocław 2004

Opiniodawca

prof. dr hab. inż. Wiesław Buczkowski

Redaktor merytoryczny

prof. dr hab. inż. Włodzimierz Czamara

Opracowanie redakcyjne i korekta:

mgr Elżbieta Winiarska-Grabosz
Janina Szydłowska

Łamanie

Teresa Alicja Chmura

Projekt okładki

Romuald Lazarowicz

Skrypty Akademii Rolniczej we Wrocławiu nr 486

© Copyright by Wydawnictwo Akademii Rolniczej we Wrocławiu, Wrocław 2004

ISSN 0239-5762

ISBN 83-89189-23-2

WYDAWNICTWO AKADEMII ROLNICZEJ WE WROCŁAWIU

Redaktor naczelny – J e r z y S o b o t a

ul. Sopocka 23, 50-344 Wrocław, tel. (071) 328-12-77

e-mail: wyd@ozi.ar.wroc.pl

Nakład: 300 + 16 egz. Ark. druk. 12,0

Druk i oprawa: F.P.H. „ELMA”

Spis treści

1. WSTĘP	7
2. ELEMENTARNE WIADOMOŚCI Z RACHUNKU WEKTOROWEGO.....	9
2.1. Pojęcie wektora.....	9
2.2. Kąt kierunkowy wektora.....	10
2.3. Rzut wektora na oś.....	10
2.4. Dodawanie i odejmowanie wektorów.....	12
2.5. Analityczne przedstawienie wektora	13
2.6. Mnożenie wektorów	16
2.7. Pytania i zadania do rozdziału 2	19
3. PODSTAWOWE POJĘCIA MECHANIKI I ZASADY STATYKI.....	21
3.1. Siła	21
3.2. Punkt materialny i ciało doskonale sztywne, stopnie swobody	22
3.3. Ogólne wiadomości o obliczeniach statycznych.....	23
3.4. Zasady statyki	31
3.5. Pytania do rozdziału 3.....	35
4. UKŁADY SIŁ ZBIEŻNYCH.....	36
4.1. Redukcja płaskiego układu sił zbieżnych do wypadkowej	36
4.2. Redukcja przestrzennego układu sił zbieżnych do wypadkowej	38
4.3. Równowaga płaskiego układu sił zbieżnych	41
4.3.1. Równowaga trzech sił nierównoległych	42
4.4. Równowaga przestrzennego układu sił zbieżnych.....	43
4.5. Rozkład i równoważenie siły dwiema siłami o zadanych kierunkach działania	44
4.5.1. Rozkład siły P na dwie siły o zadanych kierunkach działania	44
4.5.2. Zrównoważenie siły dwiema siłami o zadanych kierunkach działania ...	46
4.6. Pytania i zadania do rozdziału 4	52
5. MOMENT STATYCZNY SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU I WZGLĘDEM OSI	54
5.1. Moment statyczny siły względem punktu. Twierdzenie Varignona	54
5.2. Moment statyczny siły względem osi	60
5.3. Pytania do rozdziału 5.....	65
6. SIŁY RÓWNOLEGŁE	66
6.1. Wypadkowa sił równoległych.....	66
6.2. Rozkład i równoważenie siły dwiema siłami do niej równoległymi.....	68
6.3. Para sił i jej moment statyczny	70
6.4. Równoległe przesunięcie siły	72
6.5. Pytania do rozdziału 6.....	74

7. UKŁADY SIŁ NIEZBIEŻNYCH	75
7.1. Sprowadzenie płaskiego układu sił niezbieżnych do bieguna	75
7.2. Redukcja płaskiego układu sił niezbieżnych do wypadkowej	81
7.3. Wykreślna redukcja płaskiego układu sił niezbieżnych. Wielobok sznurowy	86
7.4. Równowaga płaskiego układu sił niezbieżnych	91
7.4.1. Analityczne warunki równowagi płaskiego, niezbieżnego układu sił	91
7.4.2. Geometryczne warunki równowagi płaskiego, niezbieżnego układu sił	93
7.5. Rozkład i równoważenie siły trzema siłami o zadanych kierunkach działania	94
7.5.1. Rozkład siły na trzy siły składowe	94
7.5.2. Zrównoważenie siły trzema siłami o zadanych kierunkach działania	98
7.6. Przestrzenny układ sił niezbieżnych – redukcja i równowaga	105
7.6.1. Sprowadzenie przestrzennego, dowolnego układu sił do bieguna	105
7.6.2. Równowaga przestrzennego, dowolnego układu sił	110
7.7. Pytania i zadania do rozdziału 7	111
8. WYZNACZANIE ODDZIAŁYWAŃ	112
9. WYZNACZANIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH	128
9.1. Definicje sił wewnętrznych	128
9.2. Zależności różniczkowe między siłami wewnętrznymi	131
10. WYKRESY SIŁ WEWNĘTRZNYCH W BELKACH	134
10.1. Wiadomości wstępne	134
10.2. Wsporniki	135
10.3. Belki wolno podparte	143
10.4. Belki wieloprzęsłowe przegubowe	155
10.4.1. Wiadomości wstępne	155
10.4.2. Sposoby rozwiązywania belek przegubowych	158
11. RAMY I ŁUKI	166
11.1. Pojęcia ogólne i uwagi wstępne	166
11.2. Wyznaczanie sił wewnętrznych w ramach i łukach	167
12. KRATOWNICE	178
12.1. Wiadomości ogólne	178
12.2. Metody rozwiązywania kratownic	181
12.2.1. Metoda równoważenia węzłów	181
12.2.2. Metoda przecięć	186
PIŚMIENNICTWO	193

1. Wstęp

Mechanika ogólna jest działem fizyki, zajmuje się badaniem ogólnych praw ruchu i równowagi ciał materialnych oraz zastosowaniem tych praw do pewnych wyidealizowanych schematów ciał materialnych, takich jak punkt materialny i ciało doskonale sztywne. Podzielić ją można na dwa działy: kinematykę i dynamikę. Kinematyka zajmuje się badaniem ruchu ciał niezależnie od sił wywołujących ten ruch. Dynamika rozpatruje ruch ciał materialnych w zależności od sił działających na te ciała. W szczególnym przypadku działania wywierane przez siły na ciało materialne mogą się wzajemnie znosić, mówimy wtedy, że siły się równoważą. Część dynamiki dotycząca tych właśnie przypadków nosi nazwę statyki, a pozostała, dotycząca ruchu ciał poddanych działaniu sił, nazwana została kinetyką.

Niniejszy skrypt przeznaczony jest dla studentów kierunku budownictwo na Wydziale Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji Akademii Rolniczej we Wrocławiu, gdzie mechanika ogólna wykładana jest w semestrze drugim. Na mechanice ogólnej opierają się w swych rozważaniach dwa przedmioty techniczne: wytrzymałość materiałów w semestrze trzecim i czwartym oraz mechanika budowli w semestrze czwartym i piątym. Ze względu na kolejność prowadzenia tych trzech wymienionych wyżej przedmiotów oraz ze względu na ich program i wymiar godzinowy – w ramach mechaniki ogólnej wykładana jest statyka ciała sztywnego w odniesieniu do układów prętowych.

Skrypt napisany został na podstawie podręczników autorów, których spis zamieszczono na końcu. Warto polecenia do samodzielnego studiowania są też podręczniki Zbigniewa Cywińskiego i Witolda Nowackiego.

2. Elementarne wiadomości z rachunku wektorowego

2.1. Pojęcie wektora

Wielkość wektorowa jest to wielkość określona liczbą oraz mająca określony kierunek i zwrot.

Przykładem wielkości wektorowej jest np. siła, prędkość, przyspieszenie. Wielkość wektorową przedstawia się graficznie w postaci wektora (rys. 2.1a), który oznacza się literą ze strzałką, np. \vec{a} lub symbolem \overrightarrow{AB} , gdzie A oznacza początek, zaś B koniec wektora. Długość odcinka \overline{AB} odpowiada, w obranej skali, wartości liczbowej wektora. Prosta l , na której leży wektor \vec{a} , nazywa się prostą (linią) działania lub kierunkiem wektora. Wartość bezwzględna wektora nazywa się modułem wektora. Moduł wektora oznacza się następująco:

$$|\vec{a}| = a \quad \text{lub} \quad |\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$$

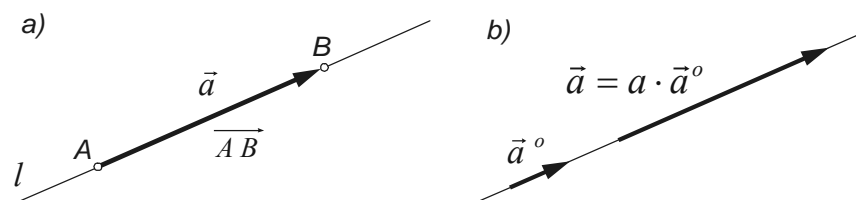
Rozróżnia się trzy rodzaje wektorów: wektory związane z punktem (zaczepione) – np. tzw. promień-wektor – \vec{r} , który zaczepiony w początku układu współrzędnych służy do jednoznacznego określenia dowolnego punktu w przestrzeni; wektory związane z prostą (przesuwne), które mogą zmieniać swoje położenie, ale tylko wzdłuż linii działania (np. wektor siły) oraz wektory swobodne, które można przemieszczać równolegle do ich linii działania.

Wektorami równoważnymi nazywa się takie dwa wektory, które mają jednakowe moduły, jednakowe zwroty i wspólną linię działania (równoważność wektorów zapisuje się: $\vec{a} \equiv \vec{b}$).

Wektorem jednostkowym, inaczej wersorem nazywa się taki wektor, który ma ten sam kierunek i zwrot co dany wektor, lecz którego moduł równa się jedności.

Jeżeli wersor danego wektora \vec{a} oznaczymy przez \vec{a}^0 , to wektor \vec{a} możemy zapisać w postaci iloczynu modułu tego wektora przez jego wersor, czyli:

$$\vec{a} = a \cdot \vec{a}^0 \tag{2.1}$$



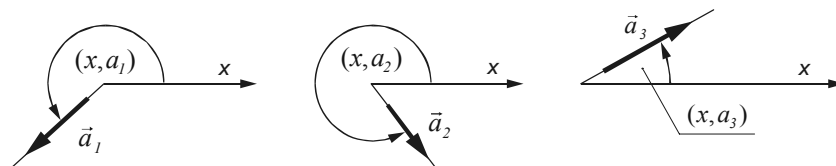
Rys. 2.1 a) – oznaczenie wektora, b) – przedstawienie wektora za pomocą wektora

2.2. Kąt kierunkowy wektora

Wprowadzając odpowiednią umowę odmierzenia kąta, tak zwanego kąta kierunkowego jaki wektor tworzy z dowolną osią odniesienia, można przez podanie wielkości tego kąta określić zarówno kierunek, jak i zwrot wektora.

Przez kąt kierunkowy wektora rozumiemy kąt, o jaki trzeba obrócić oś x w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, do zgodnego co do zwrotu pokrycia się tej osi z wektorem.

Ilustrację powyższej definicji przedstawiono na rysunku 2.2. Kąt kierunkowy wektora \vec{a} względem osi x oznaczamy symbolem (x, a)



Rys. 2.2. Kąty kierunkowe wektorów

2.3. Rzut wektora na oś

Rzutek wektora na oś nazywamy wektor, którego początkiem jest rzut prostokątny początku danego wektora na oś, końcem zaś rzut prostokątny jego końca na tę oś.

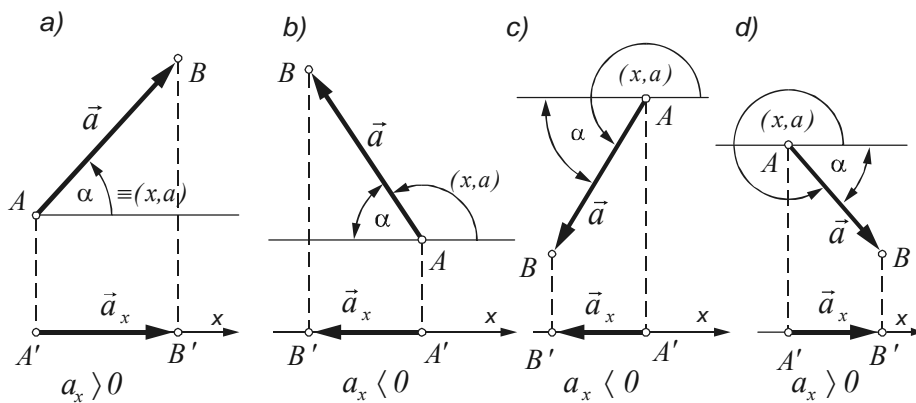
Rzut wektora na oś oznaczamy zwykle tą samą literą co dany wektor i dodajemy do niej wskaźnik odpowiadający osi rzutów – tak jak pokazano to na rysunku 2.3.

Z warunków geometrycznych wynika zależność

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos(x, a) \quad (2.2)$$

Wielkość liczbową a_x nazywamy miarą rzutu wektora \vec{a} na oś x .

Miara rzutu wektora na oś x jest równa iloczynowi modułu tego wektora przez cosinus kąta kierunkowego tego wektora w odniesieniu do osi x . W zależności od wartości kąta kierunkowego miara rzutu wektora na oś może przybierać wartość dodatnią lub ujemną. Cosinusy kątów kierunkowych z drugiej i trzeciej ćwiartki ($90^\circ < (x, a) < 270^\circ$) są mniejsze od zera – miary rzutów wektora \vec{a} na rysunku 2.3b i c mają więc znaki ujemne. Cosinusy kątów kierunkowych pierwszej i czwartej ćwiartki są większe od zera i odpowiednio do tego miary rzutów wektora \vec{a} na rysunku 2.3a i d są dodatnie. Możemy zatem powiedzieć, że miara rzutu wektora na oś ma znak dodatni, gdy zwrot tego rzutu jest zgodny ze zwrotem osi. Gdy zwrot rzutu wektora jest niezgodny ze zwrotem osi, ma ona znak ujemny.



Rys. 2.3. Rzuty wektorów na oś x przy różnych kątach kierunkowych

Obliczanie miary rzutu wektora na oś może więc być przeprowadzane ze wzoru

$$a_x = \pm |\vec{a}| \cdot \cos \alpha \quad (2.3)$$

gdzie α jest kątem ostrym między kierunkiem wektora a osią ($\cos \alpha$ zawsze jest większy od zera), zaś znak dodatni bądź ujemny ustalany jest na podstawie rysunku.

Dla wektora o kącie kierunkowym równym zero rzut na oś x jest wektorem równym temuż wektorowi ($\vec{a}_x = \vec{a}$); dla wektora o kącie kierunkowym równym 180° jego rzut na oś x jest wektorem przeciwnym ($\vec{a}_x = -\vec{a}$).

Rzuty na oś x wektorów o kątach kierunkowych równych 90° i 270° są równe zeru.

2.4. Dodawanie i odejmowanie wektorów

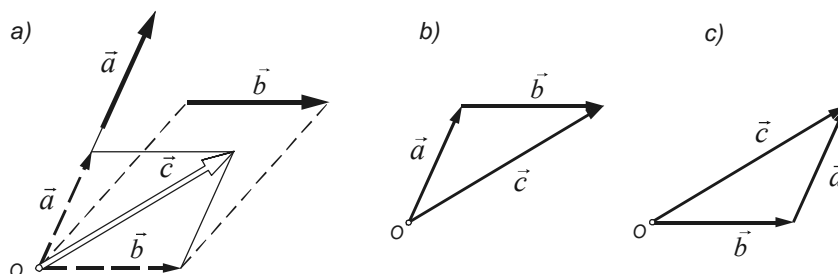
Dodawanie geometryczne dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} polega na zbudowaniu na tych wektorach równoległoboku. Wektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ jest przekątną tego równoległoboku, jak to pokazano na rysunku 2.4a.

Dla otrzymania sumy \vec{c} wektorów \vec{a} i \vec{b} można zastosować też metodę wieloboku wektorów pokazaną na rysunku 2.4b.

Wektor \vec{a} zaczepiony w dowolnym punkcie i narysowany w obranej skali długości tworzy pierwszy bok wieloboku, wektor \vec{b} zaczepiony w końcu wektora \vec{a} narysowany w tej samej obranej skali równoległe do swej prostej działania tworzy jego drugi bok. Sumą wektorów \vec{a} i \vec{b} jest wektor \vec{c} o module wynikającym z długości trzeciego boku wieloboku i kierunku równoległym do tego boku. Początkiem wektora \vec{c} jest początek pierwszego wektora, końcem – koniec drugiego wektora. Kolejność rysowania wektorów jest dowolna (por. rys. 2.4c).

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (2.4)$$

Dodawanie wektorów podlega więc prawu przemienności.



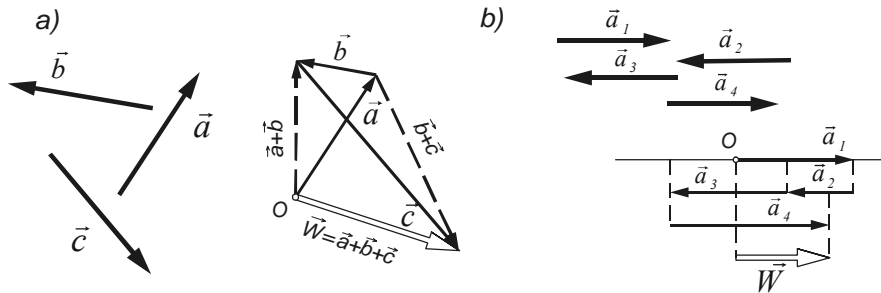
Rys. 2.4. Dodawanie geometryczne dwóch wektorów: a) – metoda równoległoboku, b) i c) – metoda wieloboku

Metodą wieloboku można znaleźć sumę dowolnej liczby wektorów na płaszczyźnie i w przestrzeni. Sumą wektorów jest zawsze wektor łączący początek pierwszego z końcem ostatniego wektora wieloboku (rys. 2.5).

Na rysunku 2.5 pokazano też, że dodawanie wektorów podlega prawu łączności (rys. 2.5a)

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (2.5)$$

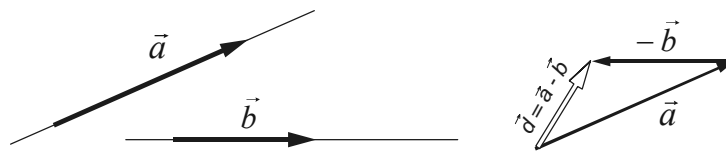
oraz że gdy wektory składowe są do siebie równoległe, to wynik dodawania wektorowego pokrywa się liczbowo z wynikiem dodawania algebraicznego (rys. 2.5b).



Rys. 2.5. Dodawanie wektorów metodą wieloboku: a) wektory dowolne, b) wektory równoległe

Różnicą dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} nazywa się wektor \vec{d} , który otrzymujemy przez dodanie do wektora \vec{a} wektora przeciwnego do wektora \vec{b} , czyli wektora $-\vec{b}$ (rys. 2.6)

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (2.6)$$



Rys. 2.6. Odejmowanie wektorów

2.5. Analityczne przedstawienie wektora

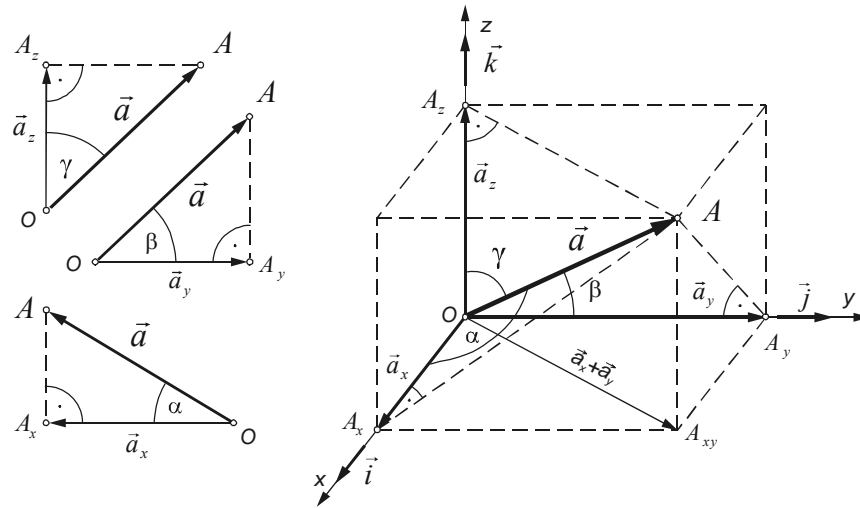
Łatwo zauważyć, że jeżeli wyznaczmy rzuty dowolnego wektora w przestrzeni na trzy osie układu współrzędnych prostokątnych, to wektor ten jest sumą wektorową tych rzutów (rys. 2.7)

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Przyjmując, że wzdłuż osi x , y i z działają wektory jednostkowe, czyli wersory, oznaczone odpowiednio \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} , można powyższe równanie wektorowe zapisać następująco

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (2.7)$$

Powyższy zapis jest analitycznym przedstawieniem wektora \vec{a} .



Rys. 2.7. Składowe wektora \vec{a} w prawoskrętnym układzie prostokątnym $Oxyz$

Moduł wektora \vec{a} obliczamy ze wzoru na długość przekątnej prostopadłościanu zbudowanego na składowych tego wektora (por. rys. 2.7)

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.8)$$

Cosinusy kątów jakie wektor \vec{a} tworzy z osiami układu współrzędnych x , y i z wynoszą odpowiednio (por. rys. 2.7)

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a} \quad (2.9)$$

Z warunków geometrycznych wynika następujący związek między funkcjami trygonometrycznymi kątów, α , β i γ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (2.10)$$

W związku z powyższym, gdy chcemy jednoznacznie opisać wektor w przestrzeni, musimy podać jego moduł i dwa z trzech kątów, jakie jego kierunek tworzy z osiami układu współrzędnych.

Wartość kąta trzeciego obliczymy z przekształconego wzoru (2.10), np.

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma},$$

z tym jednak, że musimy dodatkowo wiedzieć, jaki znak należy nadać wartości pierwiastka: "+" czy "-", a więc, czy kąt γ jest w danym przypadku ostry, czy rozwarty.

Przykład 2.1. Zapisać analitycznie wektor \vec{a} o module $a = 10$, dla którego kąt α jest rozwarty, kąt $\beta = 45^\circ$, kąt $\gamma = 120^\circ$.

Rozwiązanie

Obliczamy składowe wektora \vec{a}

$$a_x = a \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$a_x = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -5 \quad (\text{cosinus kąta rozwartego ma wartość ujemną})$$

$$a_y = a \cdot \cos \beta = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7.07$$

$$a_z = a \cdot \cos \gamma = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -5$$

Wektor \vec{a} w zapisie analitycznym: $\vec{a} = -5\vec{i} + 7,07\vec{j} - 5\vec{k}$

Przykład 2.2. Zapisać analitycznie wektor \vec{a} , którego początek znajduje się w punkcie A o współrzędnych $(-2, -4, 3)$, koniec zaś w punkcie B o współrzędnych $(8, -6, -12)$.

Rozwiązanie

Składowe wektora \vec{a} mają następujące wartości:

$$a_x = x_B - x_A = 8 - (-2) = 10$$

$$a_y = y_B - y_A = -6 - (-4) = -2$$

$$a_z = z_B - z_A = -12 - 3 = -15$$

Wektor \vec{a} w zapisie analitycznym: $\vec{a} = 10\vec{i} - 2\vec{j} - 15\vec{k}$

Dodawanie analityczne dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} polega na wyrażeniu ich w postaci analitycznej (wzór 2.7), a następnie dodaniu składowych tych wektorów przy odpowiednich wersorach:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} = \vec{c} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wynika to z poniższego twierdzenia, które ilustruje rysunek 2.8.

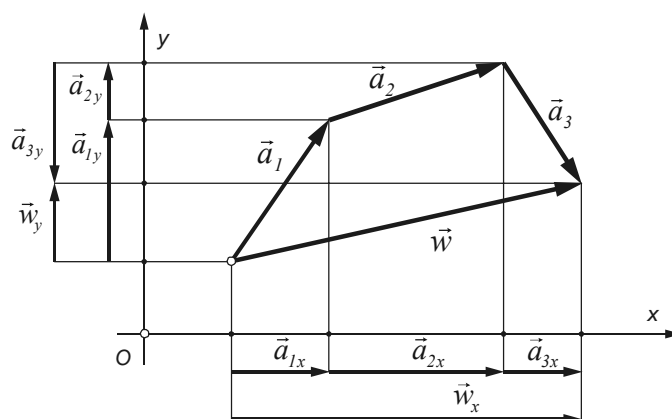
TWIERDZENIE

Rzut sumy wektorów na oś równa się sumie algebraicznej rzutów wektorów składowych na tę oś.

Ogólnie można napisać:

$$w_x = \sum_{i=1}^n a_{ix}; \quad w_y = \sum_{i=1}^n a_{iy} \quad (2.12)$$

Prowadząc obliczenia należy pamiętać, że miary rzutów wektorów na osie mogą mieć znak dodatni lub ujemny.



Rys. 2.8. Ilustracja twierdzenia o rzucie sumy wektorów na oś

2.6. Mnożenie wektorów

Są dwa sposoby mnożenia wektorów: mnożenie skalarne i mnożenie wektorowe.

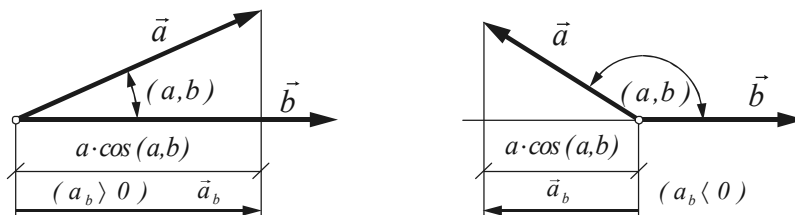
Iloczyn skalarny $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} jest to liczba równa iloczynowi modułów tych wektorów pomnożonemu przez cosinus kąta zawartego między nimi.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha, \beta) \quad (2.13)$$

Definicja kąta między dwoma wektorami jest następująca (por. rys. 2.9):

Kąt między wektorami \vec{a} i \vec{b} , (a, b) jest to mniejszy z kątów, o który trzeba obrócić wektor \vec{a} do zgodnego co do zwrotów pokrycia się z wektorem \vec{b} .

W związku z tym, że iloczyn $a \cdot \cos(a, b)$ jest miarą rzutu wektora \vec{a} na wektor \vec{b} , można też powiedzieć, że **iloczyn skalarny dwóch wektorów jest to iloczyn modułu jednego wektora przez miarę rzutu drugiego wektora na kierunek pierwszego**. Znak iloczynu skalarnego zależy od znaku cosinusa kąta między wektorami (jest ujemny, gdy kąt między wektorami jest rozwarty i dodatni, gdy jest on ostry). Gdy wektory \vec{a} i \vec{b} są do siebie prostopadłe, ich iloczyn skalarny równa się zero.



Rys. 2.9. Ilustracja iloczynu skalarnego dwóch wektorów

Iloczyn skalarny spełnia następujące prawa:

- prawo przemienności: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (2.14)
- prawo rozdzielności: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (2.15)
- prawo łączności mnożenia przez liczbę: $m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$ (2.16)

Z własności iloczynu skalarnego wynikają następujące związki między wektorami jednostkowymi (wersorami):

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad (2.17)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad (2.18)$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów w zapisie analitycznym ma postać:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + \\ &+ a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned} \quad (2.19)$$

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego i wzoru (2.19), można wyznaczyć kąt między dwoma wektorami

$$\cos(a, b) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a \cdot b} \quad (2.20)$$

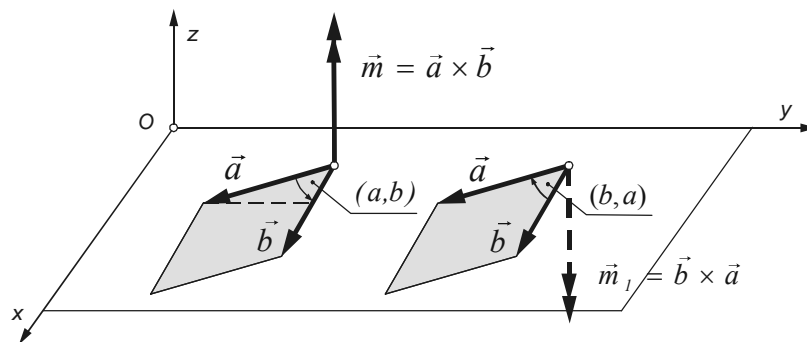
Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $(\vec{a} \times \vec{b})$ jest to wektor, którego moduł równa się iloczynowi modułów wektorów składowych pomnożonemu przez sinus kąta zawartego między nimi; którego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory \vec{a} i \vec{b} i którego zwrot wynika z reguły śruby prawoskrętnej.

Jeżeli iloczyn wektorowy oznaczymy przez \vec{m} , możemy zapisać:

$$\vec{m} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (2.21)$$

$$m = a \cdot b \sin(a, b) \quad (2.22)$$

Reguła śruby prawoskrętnej pozwala określić zwrot wektora \vec{m} w następujący sposób: jest on zgodny z kierunkiem ruchu śruby prawoskrętnej ustawionej prostopadle do wektorów \vec{a} i \vec{b} , obracanej w tę samą stronę, w którą obraca się wektor \vec{a} o kąt (a, b) do zgodnego co do zwrotu pokrycia się z wektorem \vec{b} (por. rys. 2.10).



Rys. 2.10. Ilustracja iloczynu wektorowego dwóch wektorów

Iloczyn wektorowy spełnia następujące prawa:

- Prawo rozdzielności względem dodawania

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (2.23)$$
- Prawo łączności (moduł iloczynu wektorowego wzrośnie m -krotnie, jeżeli jeden z jego czynników pomnoży się przez skalar m lub wzrośnie mn -krotnie, jeżeli jeszcze drugi czynnik pomnoży się przez skalar n)

$$m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times m\vec{b} \quad (2.24)$$

$$m\vec{a} \times n\vec{b} = (mn)(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.25)$$

Iloczyn wektorowy nie spełnia prawa przemienności

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (2.26)$$

Moduł iloczynu wektorowego równa się liczbowo polu równoległoboku zbudowanego na wektorach składowych, gdyż iloczyn $a \cdot \sin(a, b)$, jak również iloczyn $b \cdot \sin(a, b)$ przedstawiają wysokości tego równoległoboku (rys. 2.10).

Z własności iloczynu wektorowego wynikają związki między wersorami:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Iloczyn wektorowy w zapisie analitycznym oblicza się następująco:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Powyższe wyrażenie jest rozwinięciem wyznacznika i dlatego iloczyn wektorowy można zapisać

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

2.7. Pytania i zadania do rozdziału 2

1. Dodawanie i odejmowanie wektorów w ujęciu geometrycznym i analitycznym.
2. Iloczyn skalarny dwóch wektorów i jego właściwości.
3. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów i jego właściwości.
4. Iloczyny skalarne i wektorowe trzech wzajemnie prostopadłych wektorów jednostkowych (wersorów).

5. Na rysunku 2.11 dane są wektory $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ oraz $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ łączące odpowiednie punkty na ścianie dolnej, górnej i krawędzi bocznej prostopadłościanu. Zapisać te wektory analitycznie oraz obliczyć ich sumę, różnicę i kąt między nimi. Wyznaczyć też i naszkicować wektor \vec{m} , który jest ich iloczynem wektorowym. ($\vec{m} = \vec{a} \times \vec{b}$). Wyliczyć i zaznaczyć na szkicu kąty α , β i γ , jakie wektor \vec{m} tworzy z osiami układu współrzędnych.

Odpowiedź

$$\vec{a} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k},$$

$$\vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{k},$$

$$\vec{a} + \vec{b} = -6\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

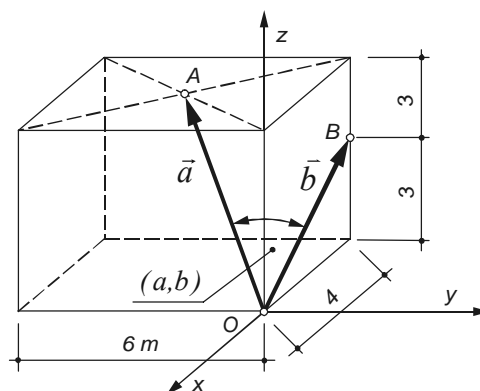
$$\cos(a, b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0,8105$$

$$(a, b) = 35,85^\circ$$

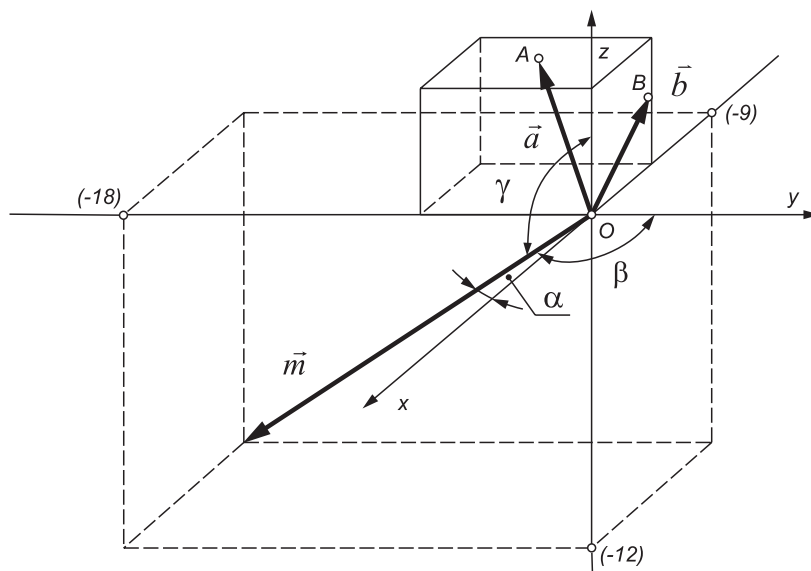
$$\vec{m} = -9\vec{i} - 18\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$\alpha = 112,59^\circ, \beta = 140,96^\circ,$$

$$\gamma = 120,81^\circ \text{ (rys. 2.12)}$$



Rys. 2.11



Rys. 2.12

3. Podstawowe pojęcia mechaniki i zasady statyki

3.1. Siła

Siła jest pojęciem abstrakcyjnym; istnienie jej możemy poznać jedynie po skutkach, jakie wywołuje.

W ujęciu teoretycznym **siłą nazywamy czynnik powodujący zmianę ruchu ciała materialnego** (zmiana ta może się wyrażać w zmianie prędkości, zmianie kierunku ruchu lub w obu tych zmianach jednocześnie).

W ujęciu technicznym **siłą nazywamy wzajemne mechaniczne oddziaływanie dwóch ciał materialnych**.

Działanie siły jest określone przez jej wartość, kierunek działania i zwrot. Na przykład: wartość siły ciężkości (ciężaru ciała) jest równa iloczynowi jego masy oraz przyspieszenia ziemskiego; kierunek działania siły ciężkości określa prosta łącząca środek ciężkości tego ciała ze środkiem ciężkości ziemi, a jej zwrot jest do środka ziemi.

Siła jest więc wielkością fizyczną wektorową, którą można przedstawić za pomocą odcinka skierowanego – wektora.

Ze względu na charakter działania i pochodzenie rozróżnia się następujące rodzaje sił:

- siły masowe, które są proporcjonalne do masy rozłożonej w objętości, działające na wszystkie punkty ciała;
- siły powierzchniowe, powstające przy bezpośrednim zetknięciu się jednego ciała z drugim;
- siły zewnętrzne, pochodzące od ciał nienależących do rozpatrywanego układu mechanicznego;
- siły wewnętrzne, pochodzące od punktów lub ciał należących do rozpatrywanego układu mechanicznego;
- siły czynne, czyli obciążenia zewnętrzne, mogące wywołać ruch;
- siły biernie, czyli reakcje powstające pod wpływem sił czynnych.

Pojęcia sił wewnętrznych, zewnętrznych, czynnych i biernych omówione są szerzej w rozdziale 3.3.

Jednostką siły w międzynarodowym układzie SI jest niuton (1 N). Siła równa jednemu niutonowi, ciału o masie jednego kilograma, nadaje przyspieszenie 1 m/s^2 . Wielokrotności niutona to kiloniuton i meganiuton:

$$1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}; \quad 1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$$

Związek niutona z kilogramem siłą, jedną z podstawowych jednostek układu technicznego, jest: $1 \text{ kG} = 9,8067 \text{ N}$

3.2. Punkt materialny i ciało doskonale sztywne, stopnie swobody

Mechanika ogólna zajmuje się badaniem ruchu i spoczynku uproszczonych modeli ciał rzeczywistych, którymi są punkt materialny i ciało doskonale sztywne.

Punkt materialny jest modelem ciała o tak małych wymiarach w porównaniu z wymiarami obszaru, w którym to ciało się porusza, że można pominąć zmiany położenia tego ciała wywołane przez obrót i traktować je jako punkt geometryczny, któremu przypisujemy przy tym pewną skończoną ilość materii.

Ciało doskonale sztywne to takie wyidealizowane ciało stałe, które składa się z układu punktów materialnych, których ilość w obrębie tego ciała wzrasta nieograniczenie przy jednocześnie malejących wymiarach tych punktów tworząc *continuum* oznaczające, że obszar zajęty przez ciało jest wypełniony materią w sposób ciągły.

Do obliczeń przyjmuje się, że ciało doskonale sztywne nie ulega żadnym odkształceniom pod wpływem działających nań sił.

Każde ciało doskonale sztywne, mogące poruszać się w przestrzeni, nazywa się ciałem swobodnym.

Stopniem swobody nazywa się możliwość wykonania ruchu ciała niezależnego od innych ruchów

I tak, na przykład:

- punkt materialny leżący na prostej x ma jeden stopień swobody – może poruszać się wzdłuż tej prostej;
- punkt materialny leżący na płaszczyźnie ma 2 stopnie swobody – może poruszać się w kierunku osi x oraz w kierunku osi y ;
- podobnie punkt w przestrzeni ma trzy stopnie swobody polegające na możliwości przemieszczeń wzdłuż trzech osi (x , y i z);
- ciało sztywne na płaszczyźnie posiada trzy stopnie swobody: możliwość niezależnych przesunięć w kierunkach osi x i y oraz możliwość obrotu względem osi z , prostopadłej do płaszczyzny Oxy ;
- ciało sztywne w przestrzeni ma sześć stopni swobody: możliwość przesunięć wzdłuż trzech osi (x , y i z) i możliwość niezależnych obrotów względem tych trzech osi.

W celu unieruchomienia ciała materialnego należy je związać z podstawą za pomocą więzi. Więź, która odbiera ciału jeden stopień swobody, nazywamy więzią pojedynczą.

Więź pojedyncza, to pręt idealnie sztywny, połączony przegubami z nieruchomą podstawą i danym ciałem materialnym.

Funkcjonowanie więzi ilustrują rysunki na stronach 27, 28 i 29 (rys. 3.8 – 3.13), gdzie pokazano sposoby łączenia tarcz i prętów z fundamentem.

- Wiąz pojedyncza AB na rysunku 3.8c odbiera tarczy jeden stopień swobody (możliwość ruchu wzdłuż prostej łączącej punkty A i B).
- Więzy AB i CB na rysunku 3.10b odbierają prętowi dwa stopnie swobody (możliwość ruchu w kierunku poziomym i pionowym), pozostawiając możliwość obrotu pręta wokół punktu B .
- Dwie więzi pojedyncze na rysunku 3.11b zostawiają prętowi jeden stopień swobody (możliwość przesuwu w kierunku poziomym).
- Trzy więzi pojedyncze z rysunku 3.12b całkowicie unieruchamiają pręt, odbierając mu wszystkie trzy stopnie swobody.

3.3. Ogólne wiadomości o obliczeniach statycznych

Obliczenia statyczne przeprowadzamy, z reguły rozpatrując pewien uproszczony, wyidealizowany model ustroju, tzw. schemat statyczny (obliczeniowy).

Zespół sił działających na ciało materialne nazywamy układem sił.

Każdy ustrój budowlany poddany jest z zewnątrz działaniu sił obciążających, czyli sił ciężkości, parcia wiatru, naporu wody itp.

Siły działające z zewnątrz na ustrój budowlany nazywamy obciążeniem.

Obciążenie dąży do wprowadzenia w ruch ustroju budowlanego. Jednym z zadań statyki budowli jest tak zaprojektować podpory i połączenia części ustroju między sobą, by stan spoczynku ustroju został nienaruszony.

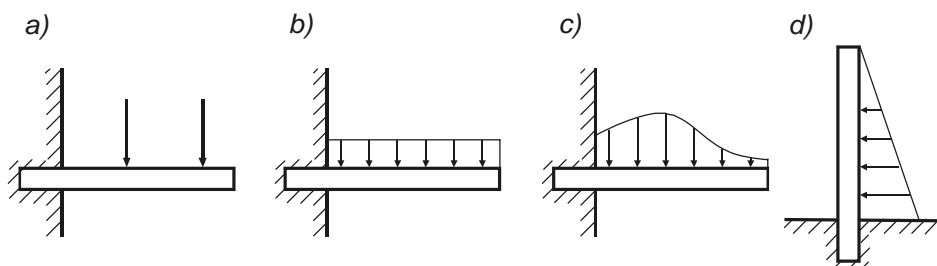
Siły dążące do wprowadzenia w ruch ciała materialnego nazywamy siłami czynnymi. Siły, które przeciwstawiają się dążeniu sił czynnych – siłami biernymi.

Siły bierne występują dopiero wtedy, gdy na ciało zaczną działać siły czynne; znikają zaś, gdy siły czynne przestają działać. Wynika stąd, że obciążenie należy zaliczyć do sił czynnych, oddziaływanie zaś więzi podporowych względnie więzi łączących ze sobą elementy konstrukcji – do sił biernych. Siły wewnętrzne (międzycząsteczkowe) wywołane obciążeniem są siłami biernymi.

Poza siłami, czyli tzw. czynnikami mechanicznymi, mogą działać na ustrój czynniki niemechaniczne (zmiana temperatury, przemieszczenia podpór, niedokładności montażu), które w pewnych warunkach powodują powstanie sił biernych.

Siły, które działają na punkt bryły, noszą nazwę sił skupionych, zaś siły działające na pewne pole – sił rozłożonych. Odpowiednio będziemy mówili o obciążeniu siłami skupionymi i o obciążeniu rozłożonym lub ciągłym. Mówiąc o sile skupionej, mamy na myśli sytuację, gdy pole, na które działa siła, jest bardzo małe w porównaniu z innymi wymiarami wchodzącymi do obliczeń. W rzeczywistości sił skupionych nie ma. Jednostką sił rozłożonych jest jednostka siły przypadającej na jednostkę pola, a więc np. kN/m^2 .

Jeżeli obciążenie rozłożone działa na pręt o stałej szerokości, to wprowadzamy obciążenie na jednostkę długości pręta, mnożąc wartość obciążenia na jednostkę pola przez szerokość pręta (kN/m).

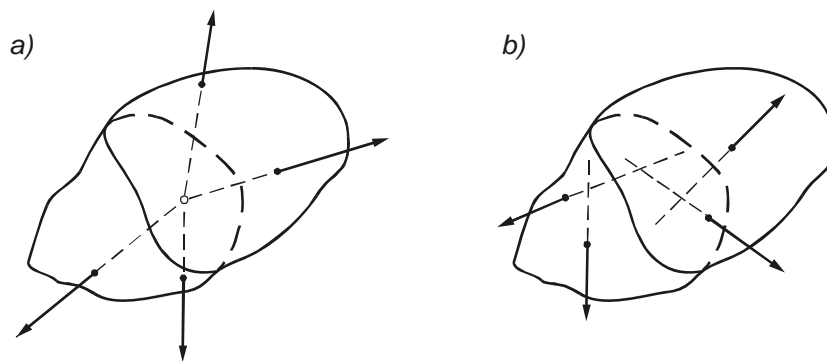


Rys. 3.1. Rodzaje obciążeń: a) siły skupione, b) obciążenie ciągłe równomierne, c) obciążenie ciągłe nierównomierne, d) obciążenie trójkątne

Siła skupiona, to na przykład – jak już wspomniano – nacisk słupa stojącego na belce. Przykładem obciążenia równomiernego jest ciężar własny belki, a obciążenia trójkątnego – parcie wody. Przykłady różnych obciążeń pokazano na rysunku 3.1.

Gdy siły czynne i bierno działające na bryłę leżą w jednej płaszczyźnie, tworzą układ płaski sił, gdy zaś nie leżą w jednej płaszczyźnie, tworzą układ przestrzenny sił.

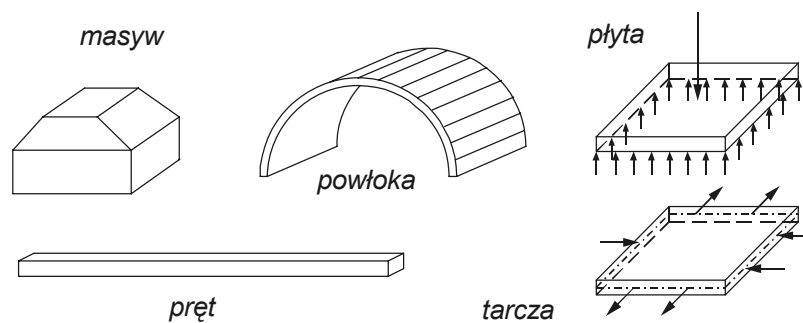
Wśród przestrzennych i płaskich układów sił rozróżniamy układy zbieżne (gdy proste działania wszystkich sił przecinają się w jednym punkcie) i układy niezbieżne, gdy warunek ten nie jest spełniony (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Zbieżny (a) i niezbieżny (b) układ sił

Każde ciało fizyczne posiada trzy wymiary: długość, szerokość i wysokość, czyli przedstawia bryłę materialną (masyw). W dalszych naszych rozważaniach będą dla wygody wprowadzane pewne pojęcia umowne; np. gdy jeden wymiar bryły jest bardzo mały w porównaniu z dwoma pozostałymi – rozpatrujemy to ciało jako powierzchnię materialną. W schemacie statycznym przestrzenną powierzchnię materialną nazywamy powłoką, zaś powierzchnię płaską, w zależności od roli, jaką odgrywa w ustroju

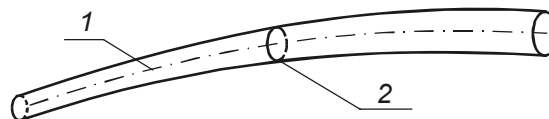
konstrukcyjnym, nazywamy tarczą lub płytą. Nazwę 'tarcza' stosujemy w przypadku obciążenia ustroju wyłącznie siłami leżącymi w jego płaszczyźnie środkowej, tzn. prowadzonej w połowie grubości; nazwę zaś 'płyta' – gdy siły obciążające są prostopadłe do tej płaszczyzny (rys. 3.3).



Rys. 3.3. Elementy konstrukcji

Gdy dwa wymiary bryły są małe w porównaniu z trzecim, mamy do czynienia z tzw. linią materialną, a w schemacie statycznym – z tzw. prętem. Największy wymiar nazywamy długością pręta, dwa pozostałe wymiarami poprzecznymi (rys. 3.3).

Oś pręta może być krzywą przestrzenną, krzywą płaską lub linią prostą (rys. 3.4). Przekrój poprzeczny pręta powstaje z przecięcia pręta płaszczyzną prostopadłą do jego osi.



Rys. 3.4. Pręt. 1 – oś, 2 – przekrój poprzeczny

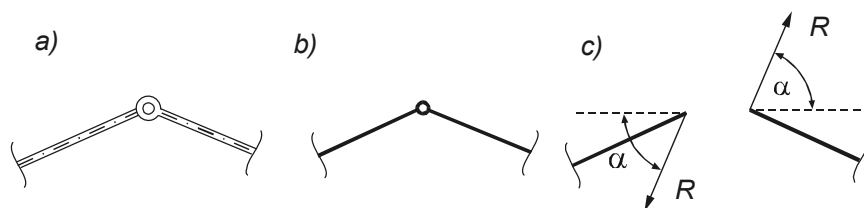
Kształt i wielkość przekroju poprzecznego może się zmieniać wzdłuż osi pręta; mamy wtedy do czynienia z prętem o przekroju zmiennym; w przeciwnym przypadku – z prętem o przekroju stałym. Pręt prosty o przekroju stałym nazywamy prętem pryzmatycznym.

W zależności od roli, jaką spełniają pręty w konstrukcji, będziemy nazywali pręty proste belkami, słupami, wieszakami, rozporami, ścięgnowymi, krzyżulcami, a pręty krzywe łukami, pierścieniami itd.

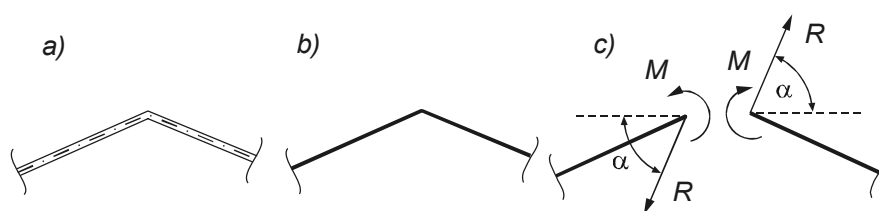
Płyta, tarcza, powłoka, pręt – to elementy konstrukcji, które odpowiednio ze sobą połączone i oparte na podłożu tworzą ustrój budowlany zdolny do przenoszenia obciążeń.

Połączenia elementów konstrukcji mają za zadanie ograniczać całkowicie lub częściowo swobodę przemieszczeń jednego elementu względem drugiego. Rozróżniamy przemieszczenia liniowe, czyli przesuw i przemieszczenia kątowe, czyli obroty. Zazwyczaj zakładamy, że w połączeniach pozwalających na pewne przemieszczenia nie występuje zjawisko tarcia. Rozpatrzmy tu dwa typy połączeń:

1. Połączenie przegubowe niepozwalające na przemieszczenia liniowe w żadnym kierunku, nieograniczające natomiast swobody wzajemnego obrotu jednego elementu względem drugiego (rys. 3.5a). W układzie płaskim jest to tzw. przegub płaski symbolicznie pokazany na rys. 3.5b, przy czym oddziaływaniem jednego elementu na drugi jest siła o nieznanym kierunku przechodzącym przez środek przegubu (rys. 3.5c).
2. Połączenie sztywne uniemożliwiające jakiegokolwiek przemieszczenie części łączonych, czyli zapewniające tzw. ciągłość konstrukcji (rys. 3.6a). W tym przypadku oddziaływanie jednego elementu na drugi zastępuje się, w układzie płaskim, zazwyczaj siłą wewnętrzną o nieznanym kierunku, sprzeciwiającą się przemieszczeniu liniowemu oraz momentem wewnętrznym, sprzeciwiającym się obrotowi (definicję momentu zawiera rozdz. 5).



Rys. 3.5: a) połączenie przegubowe, b) schemat statyczny połączenia przegubowego, c) oddziaływanie jednego elementu na drugi



Rys. 3.6: a) połączenie sztywne, b) schemat statyczny połączenia sztywnego, c) oddziaływanie jednego elementu na drugi

Podporą nazywamy element konstrukcyjny, którego zadaniem jest połączenie pośrednie bądź bezpośrednie ustroju budowlanego, bądź jego części z podłożem jako podstawą fundamentu.

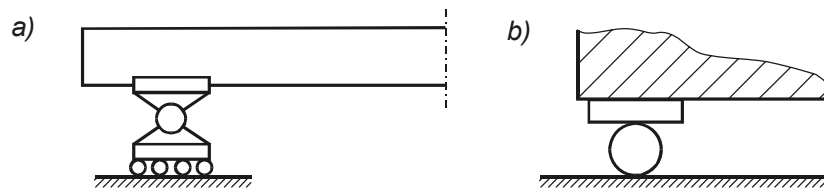
Rozróżniamy 5 zasadniczych, wyidealizowanych sposobów podparcia ustrojów płaskich:

1. Podpora przegubowa przesuwna, która pozwala na swobodny (bez tarcia) obrót tarczy dookoła pewnej osi prostopadłej do płaszczyzny tarczy oraz na przesuw wzdłuż tzw. płaszczyzny przesuwu prostopadłej do płaszczyzny tarczy.

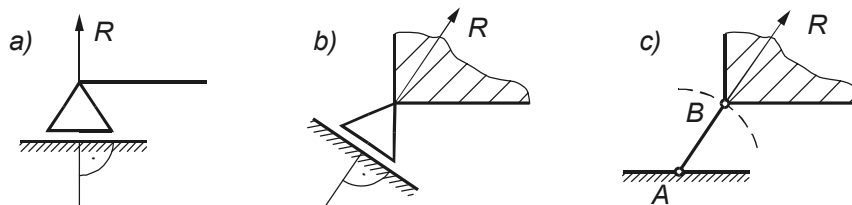
Na rysunku 3.7a i b przedstawione są szkicowo tego rodzaju podpory, zaś na rysunku 3.8 umowne ich oznaczenia.

Podpora przegubowa przesuwna powinna być tak skonstruowana, aby nie było możliwe oderwanie się górnej jej części od dolnej.

W przypadku podpory przegubowej przesuwniej prosta działania siły podporowej jest znana. Musi ona bowiem przechodzić przez środek przegubu i wobec założenia, że tarcie nie występuje, musi być prostopadła do płaszczyzny przesuwu, jak to pokazano na rysunku 3.8a i b. Wystarczy więc wyznaczyć tylko jej wartość. Innymi słowy: w przypadku podpory przegubowej przesuwniej siła podporowa przedstawia jedną niewiadomą.



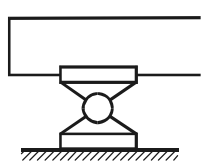
Rys. 3.7. Podpory przegubowe przesuwnie



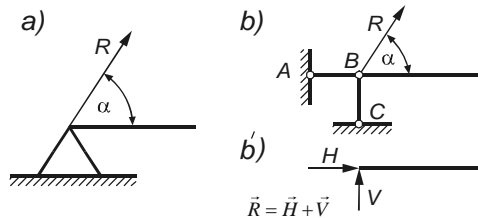
Rys. 3.8. Oznaczenia umowne podpory przegubowej przesuwniej

Podporę taką możemy również wyobrazić sobie jako skonstruowaną w postaci pręta połączonego z tarczą i fundamentem przegubami. Siła podporowa będzie wtedy przechodziła przez środki obu przegubów, a więc wzdłuż osi pręta podporowego, przesuw zaś będzie możliwy w kierunku prostopadłym do tej osi, jak to pokazano na rysunku 3.8c. Jako że w konstrukcjach budowlanych przemieszczenia są bardzo małe, możemy uważać zaznaczone przemieszczenie przegubu za prostoliniowe.

2. Podpora przegubowa nieprzesuwna pozwala tylko na swobodny obrót dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny tarczy, nie pozwala natomiast na przesuw tarczy w żadnym kierunku. Szkicowo podpora taka przedstawiona jest na rysunkach 3.9 i 3.10.



Rys. 3.9. Podpora przegubowa nieprzesuwna



Rys. 3.10. Oznaczenia umowne podpory przegubowej nieprzesuwnej

W tym przypadku o sile podporowej wiemy tylko tyle, że jej prosta działania musi przechodzić przez środek przegubu. Znany jest więc tylko punkt przyłożenia siły, nieznana jest jej wartość i kąt kierunkowy, a więc w układzie płaskim mamy dwie niewiadome podporowe (rys. 3.10a).

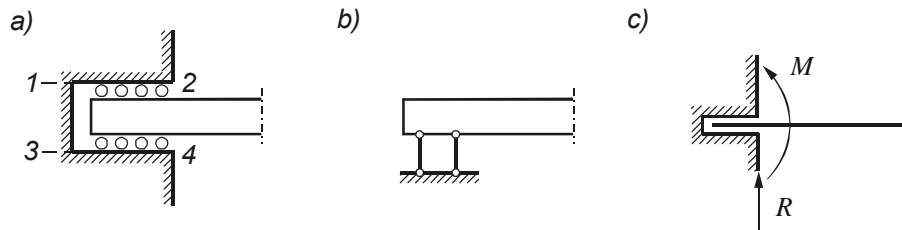
Zwykle do obliczeń wprowadzamy jako niewiadome nie wartość siły i jej kąt kierunkowy, a wielkości dwóch składowych tej siły obranych najczęściej wzdłuż dwóch osi wzajemnie prostopadłych, jak to pokazano na rysunku 3.10b'. Znając bowiem te wielkości, możemy wyznaczyć za pomocą odpowiednich wzorów moduł siły podporowej i jej kąt kierunkowy.

3. Utwierdzenie z możliwością przesuwu podłużnego. Ten sposób podparcia uniemożliwia jakikolwiek obrót; przesuw zaś jest możliwy jedynie w kierunku osi pręta. Przy założeniu, że wzdłuż płaszczyzn 1 – 2 i 3 – 4 (rys. 3.11a) nie występuje tarcie, kierunek siły podporowej jest prostopadły do tych płaszczyzn. Nieznanymi wielkościami są tu: wartość siły podporowej i jedna współrzędna punktu przyłożenia siły (mianowicie współrzędna wzdłuż osi pręta), a więc dwie niewiadome.

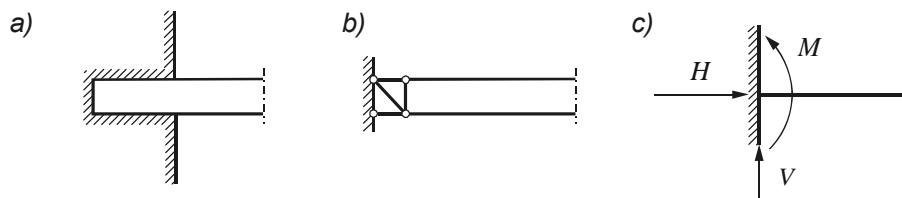
Do obliczeń statycznych wprowadzamy zwykle jako niewiadome: a) moduł siły, zakładając, że jej punkt przyłożenia leży w tak zwanym przekroju utwierdzenia 2 – 4 oraz b) wartość tak zwanego momentu utwierdzenia. Szerzej omówione to będzie później, w dalszych rozdziałach.

4. Utwierdzenie sztywne (rys. 3.12). W tym przypadku nie znamy ani wartości siły podporowej, ani położenia jej prostej działania. Mamy więc do czynienia z trzema niewiadomymi. Jako niewiadome przyjmujemy zazwyczaj wartości dwóch składowych siły podporowej przyłożonej w przekroju utwierdzenia oraz wielkość momentu utwierdzenia (rys. 3.12c).

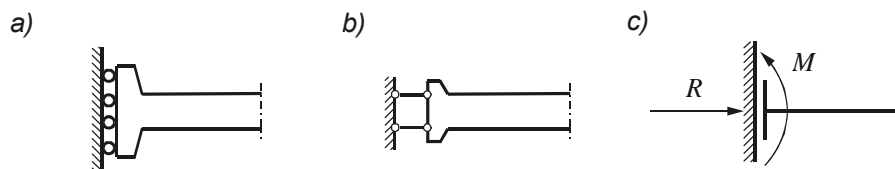
5. Utwierdzenie z możliwością przesuwu poprzecznego. Schemat takiego podparcia przedstawiony jest na rysunku 3.13a i b, zaś oznaczenia umowne na rysunku 3.13c. Należy rozumieć przy tym, że oderwanie się końca pręta od płaszczyzny przesuwu jest niemożliwe (widać to na schemacie 3.13b). Kierunek siły podporowej jest tu prostopadły do płaszczyzny przesuwu. Nieznana jest wartość siły i jedna współrzędna punktu przyłożenia tej siły a więc mamy na tej podporze dwie niewiadome. Niewiadome przyjmowane zazwyczaj do obliczeń to wartość siły podporowej i moment utwierdzenia.



Rys. 3.11. Utwierdzenie z możliwością przesuwu podłużnego



Rys. 3.12. Całkowite utwierdzenie



Rys. 3.13. Utwierdzenie z możliwością przesuwu poprzecznego

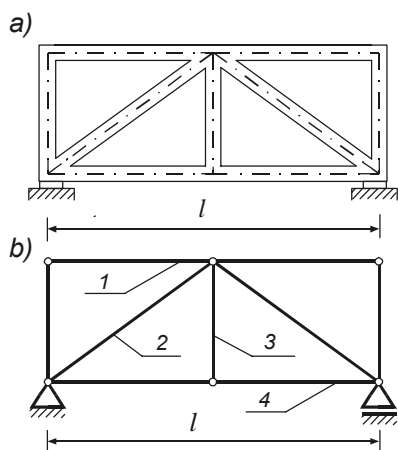
Wobec nieuwzględniania zazwyczaj w schemacie statycznym wymiarów poprzecznych pręta (pręt rysujemy jako linię) przyjmuje się zwykle, że siły przyłożone są do osi pręta, a co za tym idzie, przeguby podporowe przyjmujemy wtedy również na osi pręta.

Co do sposobu działania sił zakładamy, że siły te działają statycznie, tzn. że wartości ich rosną powoli od zera do wartości końcowej. Są jednak konstrukcje, do których omawianego założenia stosować nie można. Do takich konstrukcji, w pierwszym rzędzie, należą fundamenty pod młoty (działają na nie uderzenia) oraz fundamenty pod maszyny poddane działaniu sił szybkozmiennych.

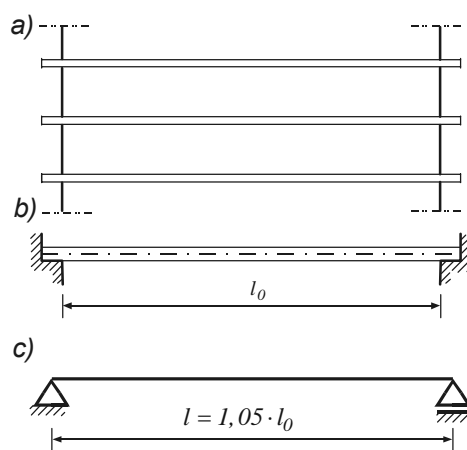
Poniżej podano kilka przykładów schematów statycznych najczęściej stosowanych konstrukcji prętowych.

- Ustrój pokazany na rys. 3.14a nosi nazwę kratownicy. Schemat statyczny kratownicy oraz nazwy poszczególnych prętów podane są na rysunku 3.14b.

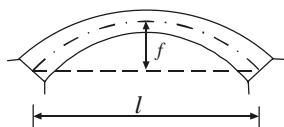
- Na rysunku 3.15 pokazany jest szkicowo strop belkowy w planie (a), widziany z boku (b) i schemat statyczny belki stropowej (c).
- Rysunki 3.16 i 3.17 przedstawiają łuk.
- Na rysunkach 3.18 i 3.19 pokazano ramę.



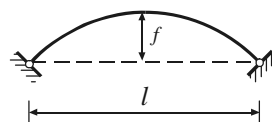
Rys. 3.14. Kratownica. 1 – pas górny, 2 – krzyżulec, 3 – słupek, 4 – pas dolny



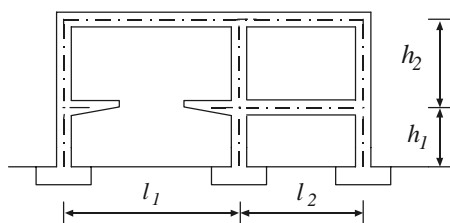
Rys. 3.15. Strop belkowy



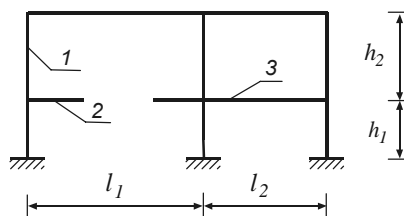
Rys. 3.16. Łuk



Rys. 3.17. Schemat statyczny łuku.
1 – rozpiętość, f – strzałka łuku



Rys. 3.18. Rama



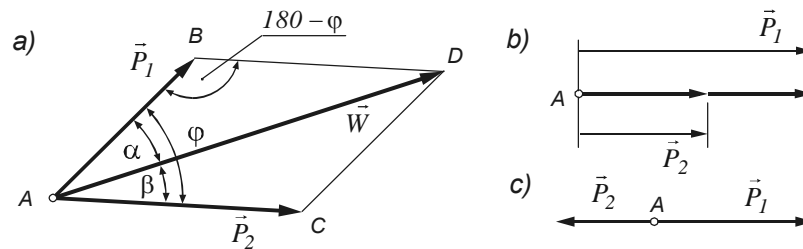
Rys. 3.19. Schemat statyczny ramy.
1 – słupek, 2 – wspornik, 3 – rozpora

3.4. Zasady statyki

Statyka jako dział mechaniki ogólnej wykorzystuje następujące zasady (aksjomaty), które wynikają z obserwacji otaczających nas zjawisk, których się nie udowadnia, a przyjmuje jako pewniki.

- **Zasada pierwsza (zasada równoległoboku)**

Dowolne dwie siły \vec{P}_1 i \vec{P}_2 przyłożone do jednego punktu można zastąpić siłą wypadkową \vec{W} przyłożoną do tegoż punktu. Wektor wypadkowej jest przekątną równoległoboku zbudowanego na wektorach sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 w sposób pokazany na rysunku 3.20a.



Rys. 3.20. Wypadkowa sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2

O wypadkowej \vec{W} mówimy, że jest ona siłą równoważną układowi sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 .

Jeżeli dany jest kąt φ między prostymi działaniami sił P_1 i P_2 , wartość liczbową wypadkowej \vec{W} możemy obliczyć ze wzoru:

$$W = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \varphi} \quad (3.1)$$

Z powyższego wzoru wynika, że gdy siły \vec{P}_1 i \vec{P}_2 działają wzdłuż jednej prostej i ich zwroty są zgodne (rys. 3.20b), wartość wypadkowej $W = P_1 + P_2$ (za kąt φ należy podstawić wtedy 0°), gdy natomiast siły te są przeciwnie skierowane (rys. 3.20c), podstawiamy $\varphi = 180^\circ$ i otrzymujemy $W = P_1 - P_2$.

Kąty α i β , jakie linia działania wypadkowej \vec{W} tworzy z kierunkami sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 , określimy z twierdzenia sinusów stosując je do trójkąta ABD lub ACD :

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin(180 - (\alpha + \beta))}, \quad \text{czyli:} \quad \frac{P_2}{\sin \alpha} = \frac{W}{\sin(180 - \varphi)},$$

$$\text{z czego otrzymujemy:} \quad \sin \alpha = \frac{P_2}{W} \sin \varphi \quad (3.2)$$

- **Zasada druga**

Dwie siły przyłożone do ciała sztywnego równoważą się tylko wtedy, gdy działają wzdłuż jednej prostej, mają te same wartości liczbowe i przeciwne zwroty.

Na rysunku 3.21 siły \vec{P} i \vec{P}_1 przyłożone do punktów A i B równoważą się, gdy działają wzdłuż jednej prostej AB , mają przeciwne zwroty i gdy ich wartości liczbowe są sobie równe ($P_1 = P$).

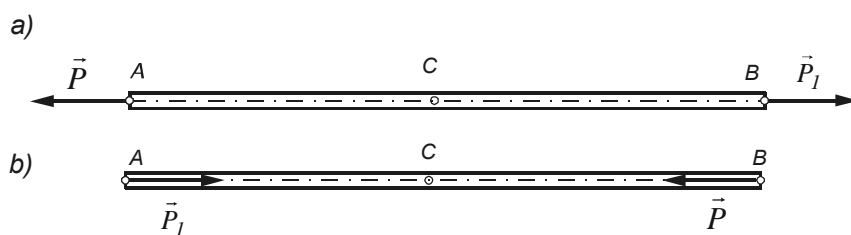
W zapisie wektorowym, dla oznaczenia wektorów o równych wartościach i przeciwnych zwrotach, w danym przypadku, zapiszemy: $\vec{P}_1 = -\vec{P}$.



Rys. 3.21. Układ sił równoważących się

Często spotykanym przykładem ciała pozostającego w równowadze pod działaniem dwóch sił jest pręt, do którego na obu jego końcach przyłożone są siły obciążające, tak jak to pokazano na rysunku 3.22.

Siły \vec{P} i \vec{P}_1 w przypadku równowagi spełniają opisane wyżej warunki, a więc działają wzdłuż osi pręta, mają jednakowe wartości i przeciwne zwroty. Gdy siły te działają tak jak na rysunku 3.22a, pręt jest rozciągany, gdy zaś tak jak na rys. 3.22b – ściskany. W opisanym przypadku pominęliśmy ciężar pręta, co jest usprawiedliwione, gdy jest on nieznaczny w porównaniu z siłami przyłożonymi na końcach.



Rys. 3.22. Pręt rozciągany (a) i ściskany (b)

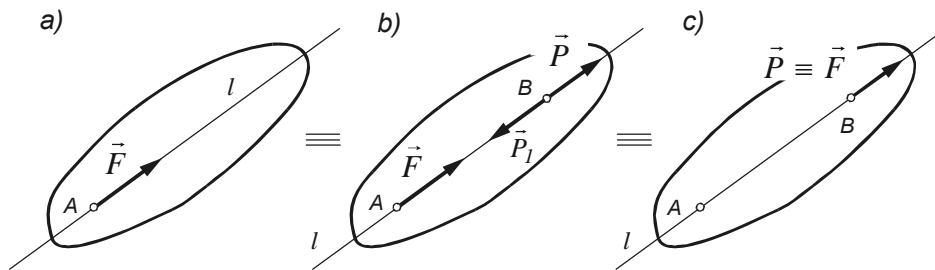
- **Zasada trzecia**

Działanie układu sił przyłożonych do ciała sztywnego nie ulegnie zmianie, gdy do niego dodamy lub odejmiemy dowolny układ sił równoważących się, czyli tzw. układ zerowy.

Jako przykład rozpatrzmy ciało, do którego w punkcie A jest przyłożona siła \vec{F} (rys. 3.23a). Do dowolnego punktu B leżącego na linii działania tej siły przyłożymy dwie równoważące się siły \vec{P} i \vec{P}_1 , których wartości liczbowe są równe sobie i równe wartości siły \vec{F} (rys. 3.23b)

$$P = P_1 = F$$

Przy tym założeniu siły \vec{F} i \vec{P}_1 , przyłożone odpowiednio do punktów A i B , tworzą także zerowy układ sił. Zgodnie z zasadą trzecią możemy te siły odrzucić i pozostanie wówczas jedynie siła \vec{P} przyłożona w punkcie B , której wartość liczbową równa jest F . Siła \vec{P} jest równoważna sile \vec{F} , gdyż ma ten sam co siła \vec{F} moduł, zwrot oraz tę samą prostą działania (rys 3.23c).



Rys. 3.23. Ilustracja zasady trzeciej

Udowodniliśmy więc następujące TWIERDZENIE

Każdą siłę działającą na ciało sztywne można przesunąć dowolnie wzdłuż jej prostej działania.

Wektor siły jest więc wektorem przesuwalnym – niezwiązanym z punktem zaczepienia, lecz związanym z prostą działania. Dla celów obliczeniowych można go przesunąć nawet poza obręb rozpatrywanego ciała materialnego, gdyż możemy zawsze myślowo związać ten wektor z ciałem za pomocą układu sztywnych, nieważkich prętów.

Powyższe twierdzenie może być stosowane przy rozpatrywaniu równowagi ciał, natomiast przy wyznaczaniu sił wewnętrznych w tych ciałach stosowanie tego twierdzenia wymaga ostrożności przy jego wykorzystywaniu. Ilustruje to rysunek 3.22, gdzie siły \vec{P} i \vec{P}_1 na rys. a) i b) zostały zamienione miejscami poprzez przesunięcie wzdłuż swych prostych działania, w wyniku czego pręt rozciągany stał się prętem ściskany. Można też sobie wyobrazić przesunięcie obu sił do punktu C . Zaczepienie ich w punkcie C sprawia, że w pręcie AB nie ma żadnych sił wewnętrznych – nie jest on ani ściskany, ani rozciągany.

- **Zasada czwarta (zasada zeszywnienia)**

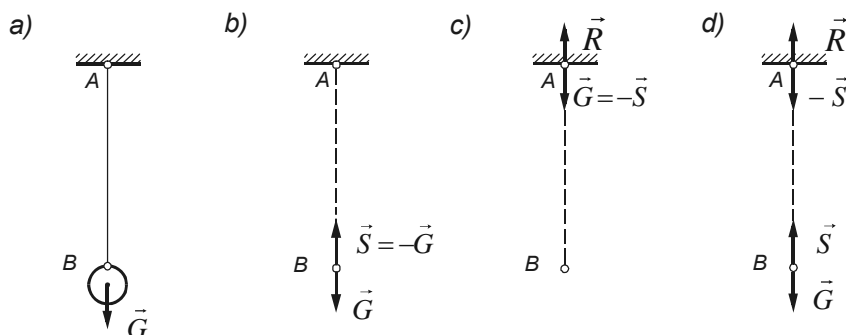
Jeżeli ciało odkształcalne znajduje się w równowadze pod działaniem pewnego układu sił, to po zeszywnieniu również będzie ono pozostawało w równowadze.

Z zasady tej wynika, że warunki równowagi, jakie muszą spełniać siły działające na ciało sztywne, obowiązują również dla identycznego ciała odkształcalnego. Jednak warunki, które w przypadku ciała sztywnego mogą być warunkami wystarczającymi, w przypadku ciała odkształcalnego mogą wymagać uzupełnień zależnych od rodzaju ciała.

- **Zasada piąta (zasada działania i przeciwdziałania)**

Każdemu działaniu towarzyszy przeciwdziałanie: równe co do wartości, o przeciwnym zwrocie, skierowane wzdłuż tej samej prostej.

Zasada ta jest trzecim prawem Newtona sformułowanym dla dowolnego ciała materialnego, a nie tylko dla punktu materialnego. Przykładem może być jednorodna kula o ciężarze G zawieszona na linie (rys. 3.24a). Kula działa na linę w punkcie B siłą \vec{G} , powstanie więc tam reakcja \vec{S} , przy czym $\vec{S} = -\vec{G}$. Również na punkt zamocowania A działa kula swym ciężarem za pośrednictwem linii, wywołując tym reakcję \vec{R} . ($\vec{G} = -\vec{R}$). W układzie kula - linia - sufit działają więc siły pokazane na rysunku 3.24d, przy czym ich wartości liczbowe są sobie równe.



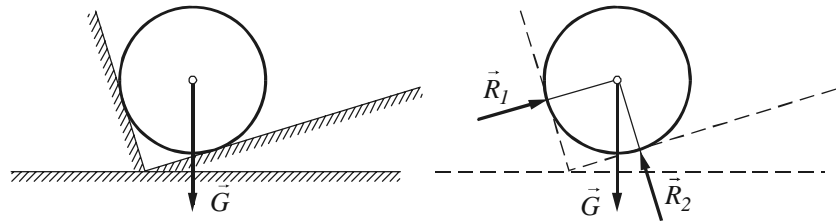
Rys. 3.24. Ilustracja zasady działania i przeciwdziałania

Ciężar ciała \vec{G} jest siłą zewnętrzną czynną, siła reakcji \vec{R} jest siłą zewnętrzną bierną, a siła \vec{S} siłą wewnętrzną w linie.

- **Zasada szósta (zasada oswobodzenia od więzów)**

Każde ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić od więzów, zastępując przy tym działanie tych więzów odpowiednimi reakcjami, a następnie rozpatrywać jako ciało swobodne, podlegające działaniu sił czynnych oraz reakcji więzów.

Zasadę powyższą ilustruje przykład pokazany na rysunku 3.25. Działanie ścian, na których oparta jest w dwóch punktach swej powierzchni gładka kula o ciężarze \vec{G} , zastąpione jest tu reakcjami \vec{R}_1 i \vec{R}_2 .



Rys. 3.25. Ilustracja zasady szóstej

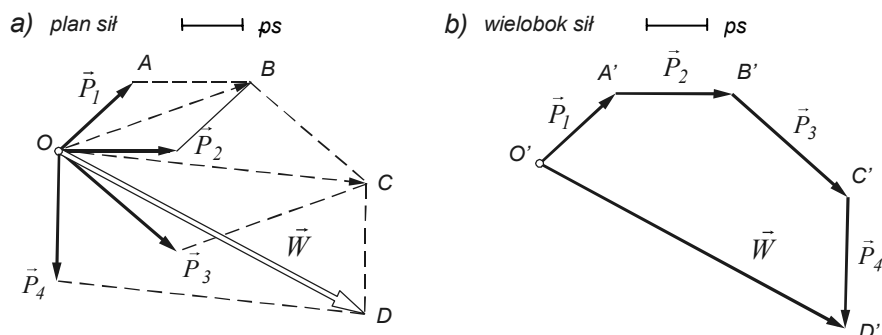
3.5. Pytania do rozdziału 3

1. Podać definicję siły, punktu materialnego i ciała doskonale sztywnego.
2. Omówić pojęcie stopni swobody, co to jest więź pojedyncza?
3. Jakie są rodzaje sił, obciążeń i układów sił?
4. Zdefiniować elementy z jakich mogą być zbudowane konstrukcje budowlane. Omówić sposoby łączenia elementów konstrukcji prętowych.
5. Wymienić najczęściej stosowane sposoby podparcia ustrojów budowlanych, omówić założenia dotyczące podpór.
6. Podać przykłady schematów statycznych konstrukcji budowlanych, omówić założenia dotyczące sposobu przyłożenia i działania sił na te konstrukcje.
7. Wymienić i omówić zasady statyki.

4. Układy sił zbieżnych

4.1. Redukcja płaskiego układu sił zbieżnych do wypadkowej

W rozdziale 3.4 udowodniliśmy, że siłę działającą na ciało sztywne można przesuwać wzdłuż jej linii działania; siły zbieżne można więc traktować jako przyłożone do jednego punktu. Na rysunku 4.1a przedstawiono taki właśnie układ sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ i \vec{P}_4 przyłożonych do punktu O pewnego ciała.



Rys. 4.1. Wyznaczanie wypadkowej płaskiego zbieżnego układu sił: a) metodą kolejnego dodawania; b) za pomocą wieloboku sił

Korzystając z reguły równoległoboku, wyznaczymy najpierw wypadkową sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 . Jest to siła \vec{OB} , do której następnie dodajemy siłę \vec{P}_3 , również korzystając z reguły równoległoboku. Otrzymujemy w ten sposób siłę \vec{OC} będącą wypadkową sił \vec{P}_1, \vec{P}_2 i \vec{P}_3 . Wystarczy teraz do siły \vec{OC} dodać ostatnią siłę, siłę \vec{P}_4 , by otrzymać siłę \vec{W} , która jest wypadkową danego układu sił.

Powyższy sposób, tzw. sposób kolejnego dodawania, można zastosować do dowolnej liczby sił lecz przy większej ich liczbie, rysunek staje się mało czytelny. Siłę

wypadkową \vec{W} wyznaczamy więc częściej za pomocą wieloboku sił. Konstrukcja tego wieloboku została omówiona w rozdz. 2.4 przy objaśnianiu dodawania wektorów swobodnych i pokazana jest na rysunku 4.1b.

Konstruując wielobok sił, należy pamiętać o nanoszeniu kolejnych sił w obranej skali sił. Wypadkową na planie sił należy narysować tak, by jej prosta działania przechodziła przez punkt zbieżności kierunków sił układu.

Wypadkowa \vec{W} jest sumą geometryczną układu sił \vec{P}_i .

Wyżej opisane wyznaczanie wypadkowej zbieżnego układu sił przeprowadzone było sposobem geometrycznym, co wektorowo zapisujemy następująco:

$$\vec{W} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad (4.1)$$

W sposobie analitycznym wyznaczania wypadkowej korzysta się z twierdzenia o rzucie sumy wektorów (rzut sumy wektorów na oś równa się sumie algebraicznej rzutów wektorów składowych na tę oś – por. rozdz. 2.5).

Przyjmując układ dwóch wzajemnie prostopadłych osi x i y jako układ odniesienia (rys. 4.2), obliczamy :

- rzuty wypadkowej na osie układu, czyli składowe wypadkowej

$$\begin{aligned} W_x &= \sum_{i=1}^n P_{ix} = P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \\ &= P_1 \cos(x, P_1) + P_2 \cos(x, P_2) + \dots + P_n \cos(x, P_n) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} W_y &= \sum_{i=1}^n P_{iy} = P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \\ &= P_1 \sin(x, P_1) + P_2 \sin(x, P_2) + \dots + P_n \sin(x, P_n) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Obliczając rzuty wypadkowej w praktyce, dobrze jest, po narysowaniu układu sił na szkicu i zaznaczeniu kątów α_i – ostrych, jakie tworzą kierunki działania sił z osią x (rys. 4.2b), zastosować wzory sumujące algebraicznie miary rzutów poszczególnych sił na osie układu współrzędnych, przy czym znaki tych rzutów należy ustalać na podstawie rysunku:

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = \pm P_1 \cos \alpha_1 \pm P_2 \cos \alpha_2 \pm \dots \pm P_n \cos \alpha_n \quad (4.4)$$

$$W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = \pm P_1 \sin \alpha_1 \pm P_2 \sin \alpha_2 \pm \dots \pm P_n \sin \alpha_n \quad (4.5)$$

- moduł wypadkowej

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (4.6)$$

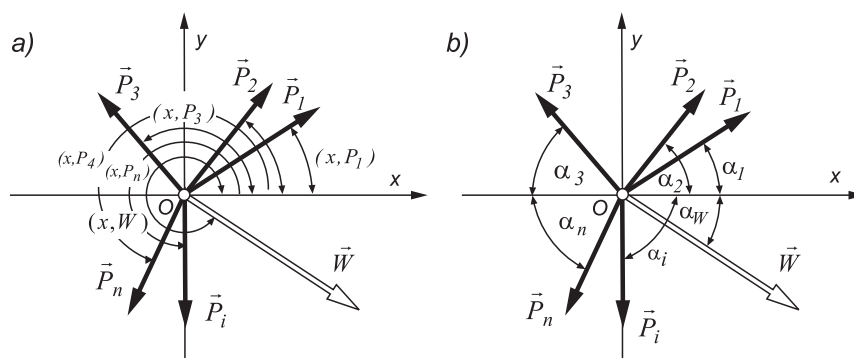
- kąt kierunkowy wypadkowej

$$\operatorname{tg}(x, W) = \frac{W_y}{W_x} \quad \left[\text{również: } \sin(x, W) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos(x, W) = \frac{W_x}{W} \right] \quad (4.7)$$

(**Uwaga:** ustalając kąt kierunkowy wypadkowej, bierzemy pod uwagę znaki wartości liczbowych jej rzutów na osie x i y , gdyż one decydują o tym, w której ćwiartce obliczany kąt się znajduje).

Wypadkowa zbieżnego układu sił działa wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt zbieżności kierunków sił tego układu. Kąt ostry między jej kierunkiem a osią x jest

$$\alpha_W = \text{arc tg } \frac{W_y}{W_x}$$



Rys. 4.2. Wypadkowa płaskiego, zbieżnego układu sił

4.2. Redukcja przestrzennego układu sił zbieżnych do wypadkowej

Stosując metodę kolejnego dodawania sił zbieżnych w przestrzeni, dochodzimy do następującego wniosku:

Przestrzenny układ sił zbieżnych $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ można zastąpić wypadkową \vec{W} przyłożoną w punkcie zbieżności, równą sumie geometrycznej tych sił

$$\vec{W} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad (4.8)$$

Sposób analityczny wyznaczania wypadkowej przestrzennego układu sił zbieżnych jest bardziej wygodny od geometrycznego, którym jest przestrzenny wielobok sił.

Dla danego układu sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ (rys. 4.3a) oblicza się sumy rzutów sił układu na poszczególne osie, czyli oblicza się:

- składowe wypadkowej

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = \sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha_i$$

$$W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = \sum_{i=1}^n P_i \cos \beta_i \quad (4.9)$$

$$W_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} = \sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma_i$$

- moduł wypadkowej

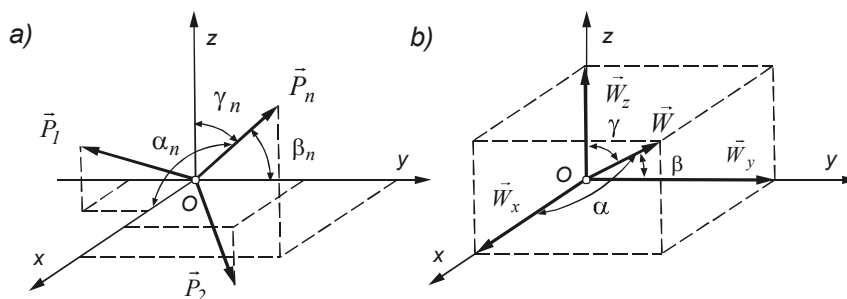
$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \quad (4.10)$$

- kąty, jakie tworzy wypadkowa z odpowiednimi osiami układu współrzędnych – po wyliczeniu ich cosinusów

$$\cos \alpha = \frac{W_x}{W}; \quad \cos \beta = \frac{W_y}{W}; \quad \cos \gamma = \frac{W_z}{W} \quad (4.11)$$

Sprawdzeniem obliczeń może być podstawienie obliczonych wartości cosinusów kątów do poniższego wzoru

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (\text{por. wzór 2.10})$$



Rys. 4.3 a) przestrzenny układ sił zbieżnych, b) wypadkowa przestrzennego układu sił zbieżnych i jej składowe

Przykład 4.1. Znaleźć wypadkową trzech sił zbieżnych działających w jednej płaszczyźnie na punkt A ciała materialnego (rys. 4.4). Dane są moduły tych sił:

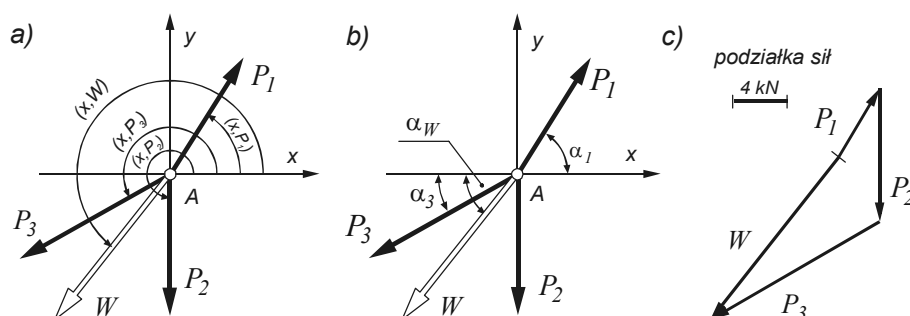
$$P_1 = 6 \text{ kN}, P_2 = 10 \text{ kN}, P_3 = 14 \text{ kN}$$

i ich kąty kierunkowe: $(x, P_1) = 60^\circ$, $(x, P_2) = 270^\circ$, $(x, P_3) = 210^\circ$.

Rozwiązanie

Składowe wypadkowej obliczymy, posługując się najpierw wzorem ogólnym:

$$\begin{aligned}
 W_x &= P_1 \cos(x, P_1) + P_2 \cos(x, P_2) + P_3 \cos(x, P_3) = \\
 &= 6 \cdot \cos 60^\circ + 10 \cdot \cos 270^\circ + 14 \cdot \cos 210^\circ = 6 \cdot 0,5 + 0 + 14 \cdot (-0,866) = -9,12 \text{ kN} \\
 W_y &= P_1 \sin(x, P_1) + P_2 \sin(x, P_2) + P_3 \sin(x, P_3) = \\
 &= 6 \cdot \sin 60^\circ + 10 \cdot \sin 270^\circ + 14 \cdot \sin 210^\circ = 6 \cdot 0,866 + 10 \cdot (-1) + 14 \cdot (-0,5) = -11,80 \text{ kN}
 \end{aligned}$$



Rys. 4.4

Składowe wypadkowej można również obliczyć, posługując się rysunkiem 4.4b, korzystając z zaznaczonych tam kątów ostrych α_i – ustalamy na podstawie rysunku znaki miar rzutów poszczególnych sił na osie x i y i obliczamy ich wartości liczbowe z odpowiednich zależności trygonometrycznych:

$$\begin{aligned}
 W_x &= \sum_{i=1}^n (\pm P_i \cos \alpha_i) = P_1 \cos \alpha_1 - P_3 \cos \alpha_3 = \\
 &= 6 \cdot \cos 60^\circ - 14 \cdot \cos 30^\circ = -9,12 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_y &= \sum_{i=1}^n (\pm P_i \sin \alpha_i) = P_1 \sin \alpha_1 - P_2 - P_3 \sin \alpha_3 = \\
 &= 6 \cdot \sin 60^\circ - 10 - 14 \cdot \sin 30^\circ = -11,80 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Moduł wypadkowej:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{(-9,12)^2 + (-11,8)^2} = 14,91 \text{ kN}$$

Kierunek wypadkowej określa kąt α_W , który wyznaczamy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \alpha_W = \frac{W_y}{W_x} = \frac{-11,8}{-9,12} = 1,2938; \quad \alpha_W = 52^\circ 18' \text{ (jest to mniejszy z kątów,}$$

jakie prosta działania wypadkowej tworzy z osią x).

Kąt kierunkowy wypadkowej znajduje się w trzeciej ćwiartce, gdyż znaki obu jej składowych są ujemne: $(x, W) = 180^\circ + 52^\circ 18' = 232^\circ 18'$.

Wektor wypadkowej wyznaczono też na rysunku 4.4c sposobem wykreślnym, konstruując wielobok sił.

Przykład 4.2. Do punktu O pewnego ciała zostały przyłożone trzy siły P_1 , P_2 i P_3 skierowane tak, jak zaznaczono na rysunku 4.5a. Mając dane wartości liczbowe i zwroty sił P_1 i P_2 , określić wartość siły P_3 , jeżeli wiadomo, że wypadkowa W ma być skierowana wzdłuż prostej OO' prostopadłej do kierunku sił P_1 i P_3 . Dane: $P_1 = 1 \text{ kN}$, $P_2 = 2 \text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$.

Rozwiązanie

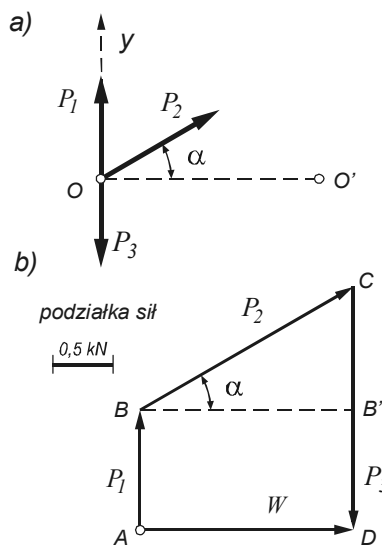
Na rysunku 4.5b wykreślono wielobok sił, który w tym przypadku jest czworobokiem. Wypadkową W określa bok AD , który zgodnie z warunkami zadania musi być równoległy do prostej OO' , czyli poziomy. Z rysunku otrzymujemy bezpośrednio:

$$P_3 = \overline{CD} = \overline{CB'} + \overline{B'D} = \\ = P_2 \sin \alpha + P_1 = 2 \cdot 0,5 + 1 = 2 \text{ kN}$$

Można też przeprowadzić następujące rozumowanie: jeżeli wypadkowa jest prostopadła do kierunku sił P_1 i P_3 , to jej rzut na ten kierunek jest równy zero, zatem przyjmując, że oś y pokrywa się z kierunkiem działania sił P_1 i P_3 , możemy napisać

$$W_y = P_1 - P_3 + P_2 \sin \alpha = 0,$$

z czego wynika, że $P_3 = 2 \text{ kN}$



Rys. 4.5

4.3. Równowaga płaskiego układu sił zbieżnych

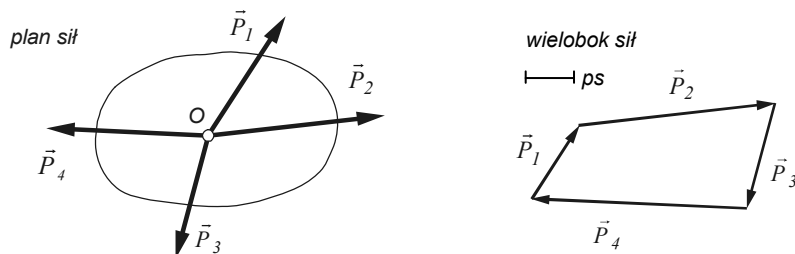
Ciało poddane działaniu płaskiego układu sił zbieżnych znajduje się w równowadze, gdy suma geometryczna sił działających na to ciało, czyli ich wypadkowa, jest równa zero. Wielobok takich sił jest wielobokiem zamkniętym, to znaczy takim, w którym koniec ostatniej siły wieloboku znajduje się w początku siły pierwszej.

Zgodnie z powyższym można sformułować geometryczny warunek równowagi płaskiego zbieżnego układu sił:

Aby siły zbieżne, działające w jednej płaszczyźnie znajdowały się w równowadze, wielobok z nich zbudowany musi być zamknięty.

Powyzszy warunek zilustrowany jest na rysunku 4.6, a wyraża go równanie wektorowe:

$$\vec{W} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = 0 \quad (4.12)$$



Rys. 4.6. Ilustracja geometrycznego warunku równowagi płaskiego zbieżnego układu sił (wielobok sił zamknięty)

Rozpatrując zagadnienie równowagi płaskiego zbieżnego układu sił metodą analityczną, stwierdzamy, że wypadkowa, którą możemy zapisać $\vec{W} = W_x \vec{i} + W_y \vec{j}$ równa się zeru, gdy jej obie składowe są równe zeru, a więc mamy dwa równania równowagi płaskiego zbieżnego układu sił:

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad (4.13)$$

W skrócie zapisujemy zwykle powyższe równania następująco:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0 \quad (4.13a)$$

Formułując analityczne warunki równowagi, napiszemy:

Aby siły zbieżne działające w jednej płaszczyźnie znajdowały się w równowadze, sumy rzutów tych sił na dwie osie układu współrzędnych muszą być równe zeru, dla każdej osi z osobna.

Przy rozwiązywaniu zagadnień równowagi dotyczących układów n sił zbieżnych o określonych prostych działania należy dysponować danymi liczbowymi $(n-2)$ sił. Wtedy wartości liczbowe dwóch pozostałych sił niewiadomych można wyznaczyć z warunków równowagi.

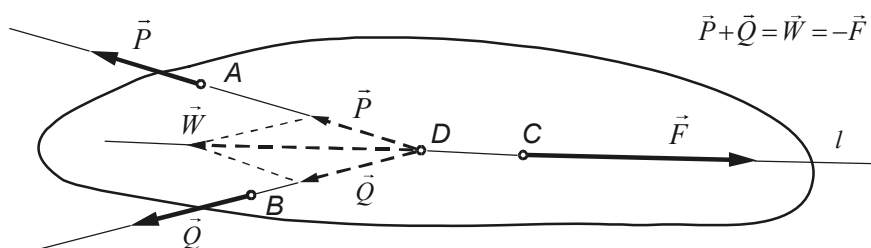
4.3.1. Równowaga trzech sił nierównoległych

TWIERDZENIE

Trzy nierównoległe siły leżące w jednej płaszczyźnie mogą być w równowadze tylko wtedy, gdy proste ich działania przecinają się w jednym punkcie.

Rozumowanie, które dowodzi prawdziwości powyższego twierdzenia, jest następujące: jeżeli wyobrazimy sobie tarczę obciążoną trzema siłami \vec{P} , \vec{Q} i \vec{F} przyłożonymi

odpowiednio w punktach A , B i C (rys. 4.7), to siłę \vec{P} i \vec{Q} możemy zastąpić wypadkową \vec{W} , której prosta działania l przechodzi przez punkt D . W ten sposób zredukowaliśmy układ do dwóch sił \vec{W} i \vec{F} . Skoro te dwie siły mają być w równowadze, to zgodnie z drugą zasadą statyki muszą mieć wspólną prostą działania. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy prosta działania siły \vec{F} przechodzi przez punkt D .



Rys. 4.7. Równowaga trzech sił nierównoległych

4.4. Równowaga przestrzennego układu sił zbieżnych

Przestrzenny układ sił zbieżnych można zastąpić jedną siłą wypadkową

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

Układ taki znajduje się więc w równowadze, gdy jego wypadkowa jest równa zeru.

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = 0 \quad (4.14)$$

Przestrzenny wielobok sił jest wtedy zamknięty (jest to geometryczny warunek równowagi) a z zapisu analitycznego

$$\vec{W} = W_x \vec{i} + W_y \vec{j} + W_z \vec{k} = 0.$$

wynikają trzy równania równowagi przestrzennego, zbieżnego układu sił:

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad W_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \quad (4.15)$$

Równania powyższe zapisujemy najczęściej w uproszczony sposób:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0 \quad (4.15a)$$

Analityczne warunki równowagi przestrzennego, zbieżnego układu sił brzmią następująco:

Aby siły zbieżne znajdowały się w równowadze, sumy rzutów tych sił na trzy osie układu współrzędnych muszą być równe zeru dla każdej osi z osobna.

Z powyższych rozważań wynika, że przy rozwiązywaniu zagadnień równowagi dotyczących n sił przestrzennych zbieżnych, o określonych prostych działania, powinno się dysponować danymi liczbowymi $(n-3)$ sił. Wartości liczbowe pozostałych trzech sił niewiadomych można wyznaczyć z równań równowagi.

4.5. Rozkład i równoważenie siły dwiema siłami o zadanych kierunkach działania

Rozkład i równoważenie siły *dwiema* siłami o zadanych kierunkach działania to dwa spośród czterech tzw. podstawowych zadań statyki, na których opierają się kolejne zadania dotyczące przekształcania układów sił. Dwa następne podstawowe zadania statyki – rozkład i równoważenie siły *trzema* siłami o zadanych kierunkach działania zostaną omówione w rozdziale 7.

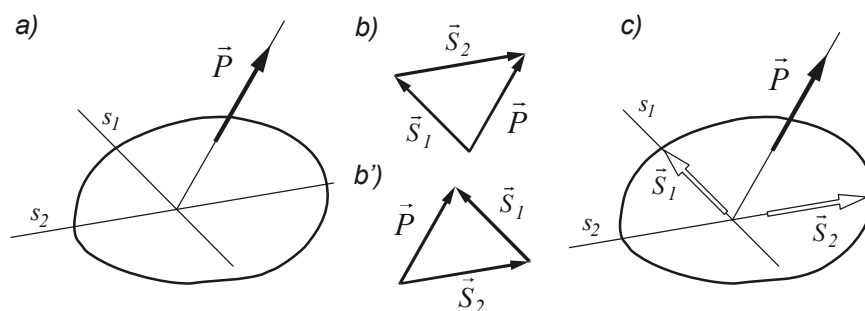
4.5.1. Rozkład siły \vec{P} na dwie siły o zadanych kierunkach działania

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia takich dwóch sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 , których suma geometryczna równa się sile \vec{P}

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{P} \quad (4.16)$$

Z rozważań w poprzednich rozdziałach wiemy, że jeżeli siła \vec{P} jest wypadkową sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 , to kierunki sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 muszą leżeć w jednej płaszczyźnie z siłą \vec{P} i być zbieżne z nią w jednym punkcie (por. rys. 4.8a, gdzie proste s_1 i s_2 są kierunkami szukanych sił).

Rozwiązanie sposobem wykreślnym tego zadania polega na narysowaniu wieloboku sił, w którym jeden bok jest w obranej skali naniesioną siłą \vec{P} , a dwa pozostałe boki tworzące trójkąt z siłą \vec{P} są poprowadzone równolegle do kierunków s_1 i s_2 , przez koniec i początek wektora \vec{P} (rys. 4.8b).

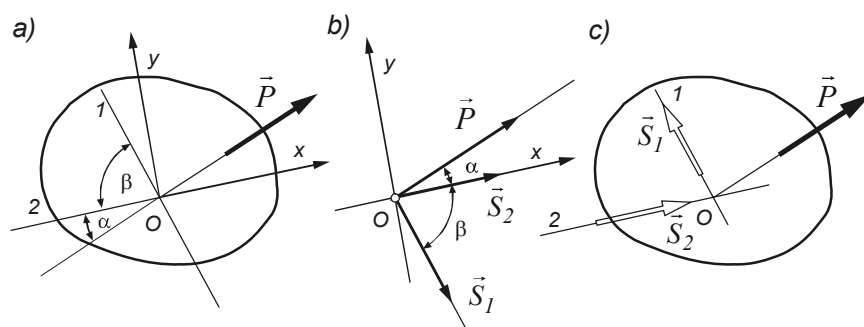


Rys. 4.8. Rozkład siły na dwie składowe

Należy zauważyć, że obojętne jest dla rozwiązania zadania, czy kierunek wektora \vec{S}_1 przeprowadzimy na wieloboku sił przez początek, czy przez koniec wektora siły \vec{P} (por. rys. 4.8b i b').

Długości odcinków tworzących otrzymane boki trójkąta przedstawiają, w obranej podziałce, moduły sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 . Zwroty tych sił otrzymujemy biorąc pod uwagę, że siła \vec{P} jest ich wypadkową, czyli jej początek jest też początkiem jednego z wektorów sił \vec{S} , a koniec – końcem drugiego z nich. Mówimy w tym przypadku, że obieg strzałek w tym wieloboku sił jest niezgodny.

Rozwiązanie analityczne zaczynamy od obrania układu współrzędnych Oxy , a następnie wykorzystujemy twierdzenie o rzutach wypadkowej na osie tego układu. Dobrze jest, dla ułatwienia obliczeń, jedną z osi przyjąć wzdłuż prostej działania jednej z nieznanych sił \vec{S} (na rys. 4.9b oś x przyjęto współliniowo z siłą \vec{S}_2).



Rys. 4.9. Rozkład siły na dwie składowe metodą analityczną

Nieznane zwroty sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 zakładamy dowolnie. W związku z tym, że rzut wypadkowej na oś równa się sumie rzutów sił składowych na tę oś, możemy moduły sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 wyznaczyć z poniższych równań:

$$P_x = \sum_{i=1}^n S_{ix}; \quad P \cos \alpha = S_2 + S_1 \cos \beta$$

$$P_y = \sum_{i=1}^n S_{iy}; \quad P \sin \alpha = -S_1 \sin \beta$$

Rozwiązując powyższy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, otrzymujemy:

$$S_1 = -\frac{P \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= P \cos \alpha - S_1 \cos \beta = \\ &= P \cos \alpha - \left(-\frac{P \sin \alpha}{\sin \beta} \right) \cos \beta = P \cos \alpha + P \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta = P \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \end{aligned}$$

Znak minus w wyrażeniu na S_1 wskazuje, że zwrot siły \vec{S}_1 jest odwrotny niż założono. Na rysunku 4.9c siły \vec{S} naniesione są na plan sił z właściwymi zwrotami.

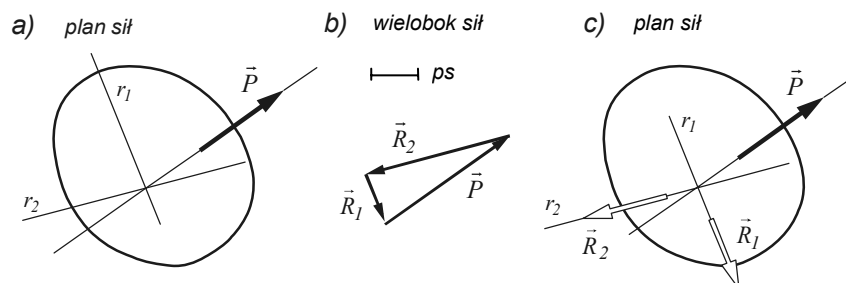
4.5.2. Zrównoważenie siły dwiema siłami o zadanych kierunkach działania

Zadanie polega na znalezieniu takich dwóch sił \vec{R}_1 i \vec{R}_2 , których wypadkowa zrównoważy siłę \vec{P} . Wektorowy zapis tego zadania jest

$$\vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0$$

Siła \vec{P} wraz z siłami \vec{R}_1 i \vec{R}_2 jest w równowadze, musi zatem leżeć z tymi siłami w jednej płaszczyźnie i być z nimi zbieżna w jednym punkcie (por. twierdzenie z rozdz. 4.3.1), oraz musi tworzyć wraz z tymi siłami wielobok zamknięty. Zbudujemy więc wielobok sił, w tym przypadku trójkąt (rys. 4.10b), którego pierwszym bokiem będzie siła \vec{P} narysowana w przyjętej skali sił, a dwa następne boki równoległe do kierunków r_1 i r_2 wyznaczą moduły sił \vec{R}_1 i \vec{R}_2 , przy czym obie strzałki w tym trójkącie jest zamknięty, gdyż suma sił \vec{R}_1 i \vec{R}_2 musi równoważyć siłę \vec{P} .

Rozwiązanie tego zadania różni się od rozwiązania zadania poprzedniego tym, że zwroty otrzymanych w jego wyniku sił \vec{R} są przeciwne do zwrotów sił \vec{S} z zadania poprzedniego, zilustrowanego na rysunku 4.9.



Rys. 4.10. Zrównoważenie siły dwiema siłami metodą geometryczną

W metodzie analitycznej rozwiązania (por. rys. 4.11) równania, z których wyliczymy siły \vec{R} , są równaniami równowagi:

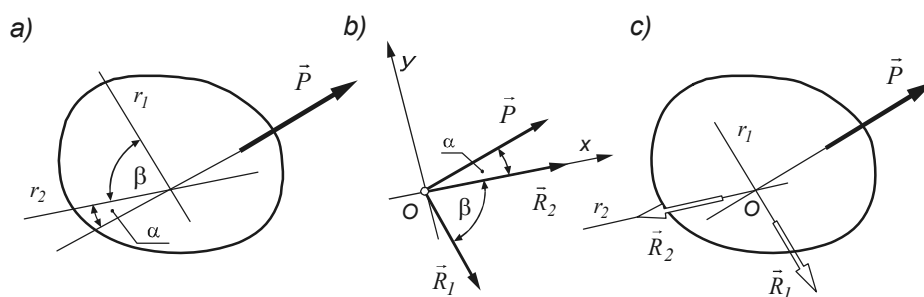
$$\sum X = 0; \quad P \cos \alpha + R_2 + R_1 \cos \beta = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad P \sin \alpha - R_1 \sin \beta = 0$$

W wyniku rozwiązania powyższego układu równań otrzymujemy wyrażenia na wartości liczbowe sił równoważących:

$$R_1 = \frac{P \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$R_2 = -P \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \quad (\text{znak ujemny świadczy o tym, że siła } \vec{R}_2 \text{ ma zwrot przeciwny do założonego na rys. 4.11b).}$$

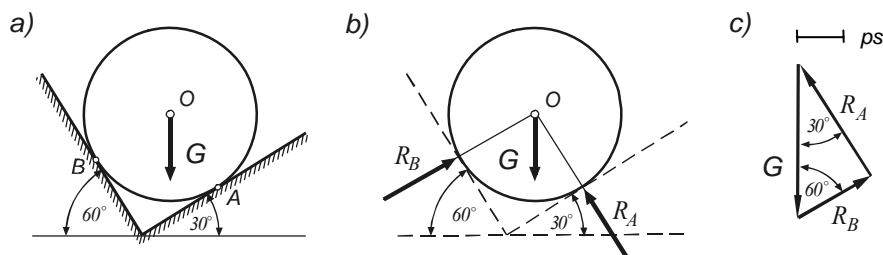


Rys. 4.11. Zrównoważenie siły dwiema siłami metodą analityczną

Na planach sił, na rysunkach 4.10c i 4.11c, siły równoważące siłę \vec{P} naniesione są z właściwymi zwrotami.

Przykład 4.3. Gładka, jednorodna kula o masie $m = 100 \text{ kg}$ spoczywa na dwóch gładkich płaszczyznach nachylonych do poziomu pod kątami wynoszącymi 30° i 60°

(rys. 4.12). Należy wyznaczyć reakcje występujące w punktach styku kuli z obu płaszczyznami.



Rys. 4.12

Rozwiązanie

Kula jest ciałem nieswobodnym, na które działa siła ciężkości G będąca tu siłą czynną. Obliczymy najpierw ciężar kuli.

$$G = m \cdot g$$

Podstawiając do powyższego wzoru $m = 100 \text{ kg}$ i $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, otrzymujemy

$$G = mg = 100 \cdot 9,81 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 981 \text{ N}$$

Aby wyznaczyć reakcje, kulę oswobodzamy od więzów, usuwając myślowo płaszczyzny, na których spoczywa i przykładamy reakcje więzów oznaczone przez R_A i R_B (rys. 4.12b). W punktach styku A i B nie występuje tarcie, więc reakcje są prostopadłe do powierzchni kuli i wobec tego ich proste działania przechodzą przez środek O , przez który przechodzi również prosta działania siły ciężkości G . Kula znajduje się w spoczynku, zatem siły G , R_A i R_B są w równowadze i muszą tworzyć zamknięty wielobok sił – w tym przypadku trójkąt (rys. 4.12c). W ten sposób otrzymaliśmy rozwiązanie metodą wykreślną (należy tylko w obranej skali sił odczytać długości boków trójkąta odpowiadające modułom odpowiednich reakcji). Jednocześnie z otrzymanego trójkąta, który jest trójkątem prostokątnym, gdyż kąt między płaszczyznami podparcia jest prosty, wynika bezpośrednio, że:

$$R_A = G \cdot \cos 30^\circ = 981 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 850 \text{ N}$$

$$R_B = G \cdot \sin 30^\circ = 981 \cdot \frac{1}{2} = 490,5 \text{ N}$$

Przykład 4.4. Ciało o ciężarze G zostało zawieszony w sposób podany na rysunku 4.13a na dwóch z założenia nieważkich linach. Obliczyć napięcia obu lin.

Rozwiązanie

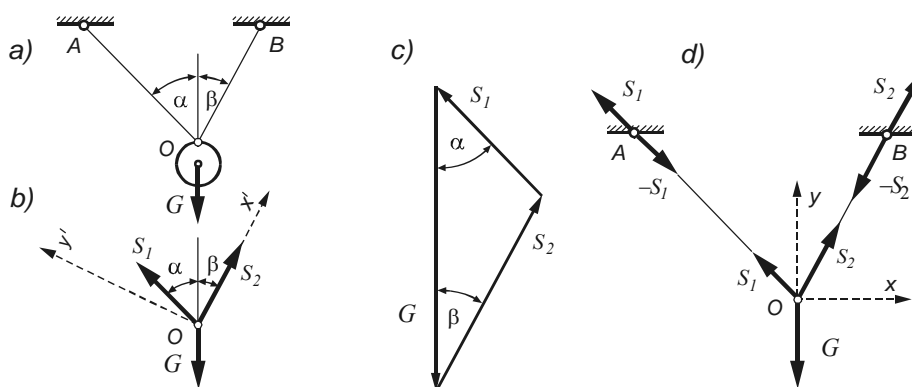
Zgodnie z szóstą zasadą statyki oswobodzamy zawieszony na linach ciało materialne od więzów, przecinając myślowo liny i zastępujemy oddziaływania lin ich reakcjami

S_1 i S_2 , tak jak to przedstawiono na rysunku 4.13b. Na rozpatrywane ciało działają więc trzy siły G , S_1 i S_2 , których proste działania przecinają się w punkcie O . Jako że ciało to znajduje się w spoczynku, przyłożone do niego siły muszą być w równowadze, a więc muszą tworzyć zamknięty wielobok sił. Biorąc pod uwagę, że siła ciężkości G jest znana co do wartości i co do kierunku, a siły S_1 i S_2 mają dane proste działania, wykreślamy trójkąt, zaczynając oczywiście od znanej siły G (rys. 4.13c). Stosując do otrzymanego trójkąta sił wzór sinusów, napiszemy.

$$\frac{S_1}{\sin \beta} = \frac{S_2}{\sin \alpha} = \frac{G}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]},$$

stąd

$$S_1 = G \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad S_2 = G \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



Rys. 4.13

Do tych samych wyników dojdziemy, gdy dla danego układu sił przyłożonych w punkcie O przyjmiemy układ osi Oxy jak na rys. 4.13d i zastosujemy analityczne warunki równowagi, które zapiszemy w postaci równań:

$$\sum X = 0; \quad -S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \beta = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \beta - G = 0$$

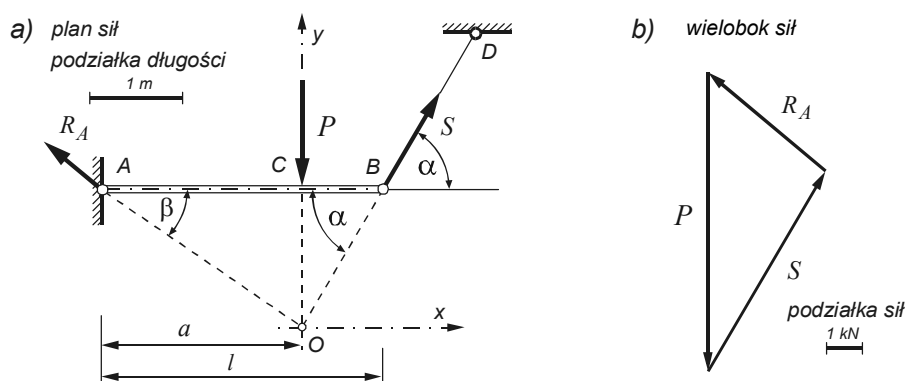
lub, przyjmując układ współrzędnych $Ox'y'$ tak, by jedna z osi pokrywała się z kierunkiem jednej z nieznanymi sił (rys. 4.13b), otrzymamy łatwiejszy do rozwiązania układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\sum X' = 0; \quad -G \cos \beta + S_2 + S_1 \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\sum Y' = 0; \quad -G \sin \beta + S_1 \sin(\alpha + \beta) = 0$$

Na rysunku 4.13d przedstawiono siły wzajemnego oddziaływania między linami a zawieszonym na nich ciężarem, siły wzajemnego oddziaływania obu przeciętych myślowo części lin, jak również siły reakcji w miejscach zamocowania lin do stropu.

Przykład 4.5. Pozioma belka AB połączona jest przegubowo końcem A z nieruchomą ścianą oraz zawieszona końcem B na linie BD tworzącej z poziomem kąt $\alpha=60^\circ$ (rys. 4.14a). Do belki została przyłożona pionowa siła $P = 10 \text{ kN}$ w odległości $a = 2 \text{ m}$ od lewego jej końca. Należy znaleźć siłę w linie i reakcję w przegubie A . Długość belki l równa jest 3 m . Ciężar własny belki w obliczeniach należy pominąć.



Rys. 4.14

Rozwiązanie

Na belkę, która pozostaje w równowadze, działają trzy siły: siła P , reakcja linii S (liczbowo równa napięciu linii) oraz reakcja R_A w przegubie A . Siły te nie są do siebie równoległe gdyż prosta działania siły P i prosta działania siły S przecinają się w punkcie oznaczonym na rysunku literą O . Przez ten punkt musi więc również przechodzić prosta działania reakcji R_A , gdyż trzy siły na płaszczyźnie mogą być w równowadze tylko wtedy, gdy ich kierunki przecinają się w jednym punkcie.

W celu rozwiązania tego zadania sposobem rachunkowym zapiszemy równania równowagi. Przyjmując układ odniesienia Oxy jak na rysunku, mamy:

$$\sum X = 0; \quad -R_A \cos \beta + S \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad -P + R_A \sin \beta + S \sin \alpha = 0;$$

Funkcje kąta β obliczymy z zależności trygonometrycznych

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} = \operatorname{tg} \alpha \quad \Rightarrow \quad \overline{OC} = \overline{CB} \operatorname{tg} \alpha = 1,0 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 1,73 \text{ m}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{1,73^2 + 2^2} = 2,65 \text{ m}$$

$$\sin \beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{1,73}{2,65} = 0,655, \quad \cos \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{2,0}{2,646} = 0,756$$

Po podstawieniu wartości liczbowych, otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} -R_A \cdot 0,756 + S \cdot 0,5 &= 0 \\ -P + R_A \cdot 0,655 + S \cdot 0,866 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy: $R_A = 5,09 \text{ kN}$; $S = 7,69 \text{ kN}$

Rozwiązanie graficzne tego zadania pokazano na rysunku 4.14b. Po wyznaczeniu kierunku siły R_A na planie sił wykreślono trójkąt sił, z którego można odczytać wartości modułów sił S i R_A w obranej wcześniej skali. Obieg strzałek w tym trójkącie jest zamknięty, gdyż siły znajdują się w równowadze.

Przykład 4.6. Pręty AB , AC i AD (rys. 4.15) połączone są przegubowo ze sobą nawzajem i z podłożem w miejscach podparcia. W przegubie A przyłożono dwie siły: siłę P wzdłuż kierunku AB i siłę $2P$ pionową. Wyznaczyć siły w prętach, jeżeli kąt $\alpha = 60^\circ$, a kąt $\beta = 45^\circ$. W obliczeniach pominąć ciężar własny prętów.

Rozwiązanie

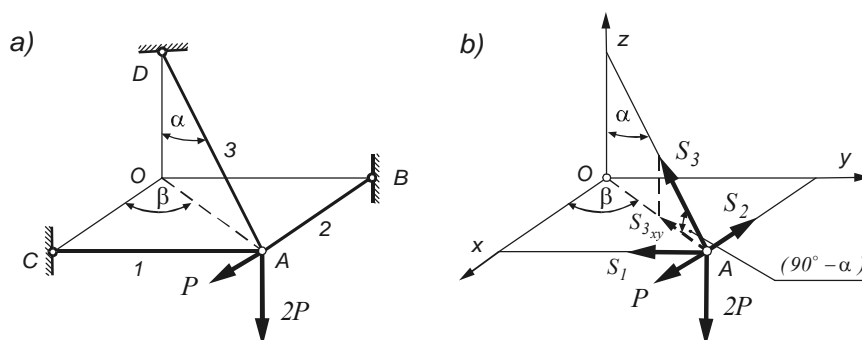
Po myślowym usunięciu więzi, jakimi są pręty, wstawiamy na ich miejsce reakcje tych prętów, czyli nieznanne siły S_1 , S_2 i S_3 (rys. 4.15b), przy czym założymy, że zwroty tych sił są skierowane od przegubu A (czyli, że wszystkie pręty tej konstrukcji są rozciągane). Istniejący tu przestrzenny układ sił zbieżnych znajduje się w równowadze, gdy spełnione są trzy równania równowagi:

$$\sum X = 0; \quad P - S_2 - S_3 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \beta = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad -S_1 - S_3 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sin \beta = 0$$

$$\sum Z = 0; \quad -2P + S_3 \sin(90^\circ - \alpha) = 0$$

(Uwaga: rzuty siły S_3 na osie x i y obliczono rzutując najpierw tę siłę na płaszczyznę x, y , by następnie ten rzut (siłę $S_{3,xy}$) zrzutować na oś x i y).



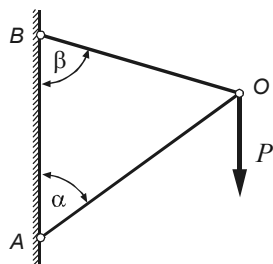
Rys. 4.15

Po podstawieniu danych i rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymamy

$$S_1 = -2,45 P, \quad S_2 = -1,45 P, \quad S_3 = 4P.$$

Wartości liczbowe sił w prętach 1 i 2 są ujemne, ich zwroty są zatem przeciwne do założonych, a więc pręty te są ściskane. Pręt 3 jest rozciągany – tak, jak założono na początku obliczeń.

4.6. Pytania i zadania do rozdziału 4



Rys. 4.16

1. Jaki układ sił nazywamy zbieżnym?
2. Omówić wykreślny i analityczny sposób wyznaczania wypadkowej płaskiego zbieżnego układu sił.
3. Omówić wyznaczanie wypadkowej przestrzennego układu sił zbieżnych.
4. Omówić wykreślne (geometryczne) i analityczne warunki równowagi płaskiego układu sił zbieżnych.
5. Omówić analityczne warunki równowagi układu sił zbieżnych w przestrzeni.
6. Dane są cztery siły zbieżne w przestrzeni:

$$\vec{P}_1 = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}; \quad \vec{P}_2 = 2\vec{i} - 10\vec{j} - 4\vec{k};$$

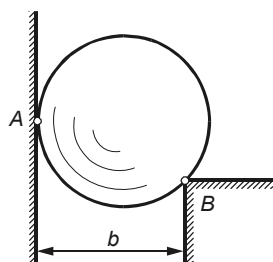
$$\vec{P}_3 = 3\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{P}_4 = -4\vec{j} - 9\vec{k}.$$

Składowe tych sił wyrażone są w niutonach. Obliczyć moduł wypadkowej oraz kąty jakie tworzy ona z osiami układu współrzędnych.

Odpowiedź

$$\vec{W} = \vec{i} - 17\vec{j} - 4\vec{k}; \quad W = 17,49 \text{ N};$$

$$\alpha = 86^\circ 43' \quad \beta = 166^\circ 22' \quad \gamma = 103^\circ 13'$$



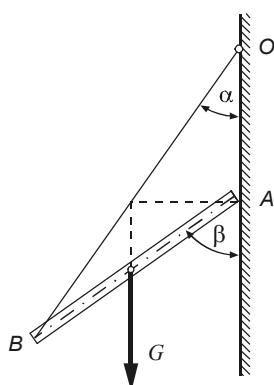
Rys. 4.17

7. Wyznaczyć siły w prętach OA i OB, tworzących wieszak AOB przedstawiony na rys. 4.16 w przypadku, gdy do przegubu O przyłożona jest pionowa siła P. Pręty należy potraktować jako nieważkie.

Odpowiedź

$$S_{OA} = P \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad S_{OB} = P \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

(Pręt OA jest ściskany a pręt OB – rozciągany)



Rys. 4.18

8. Gładka, jednorodna kula o ciężarze G opiera się o pionową gładką ścianę w punkcie A oraz o poziomą krawędź w punkcie B , (rys. 4.17). Należy wyznaczyć reakcje podpór. Promień kuli równy jest r a odległość punktu B od pionowej ściany wynosi b .

Odpowiedź

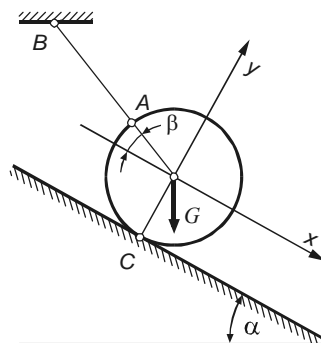
$$R_A = G \frac{b-r}{\sqrt{b(2r-b)}}, \quad R_B = G \frac{r}{\sqrt{b(2r-b)}}$$

9. Jednorodny pręt AB o długości $2l$ i ciężarze G opiera się w punkcie A o gładką pionową ścianę, a w punkcie B przytrzymywany jest liną, której drugi koniec jest przymocowany do ściany w punkcie O (rys. 4.18). Dany jest kąt α nachylenia liny. Obliczyć kąt β nachylenia pręta w położeniu równowagi oraz reakcję ściany i siłę napinającą linę.

Odpowiedź

$$\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha, \quad R_B = \frac{G}{\cos \alpha}, \quad R_A = G \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

10. Jednorodna kula o ciężarze G spoczywa na gładkiej równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α . Kula ta utrzymywana jest na równi za pomocą cięgna AB przymocowanego do kuli w punkcie A i nachylonego do równi pod kątem β (rys. 4.19). Obliczyć oddziaływanie równi i cięgna na kulę.



Rys. 4.19

Odpowiedź:

$$R_A = G \frac{\sin \alpha}{\cos \beta};$$

$$R_C = G \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

5. Moment statyczny siły względem punktu i względem osi

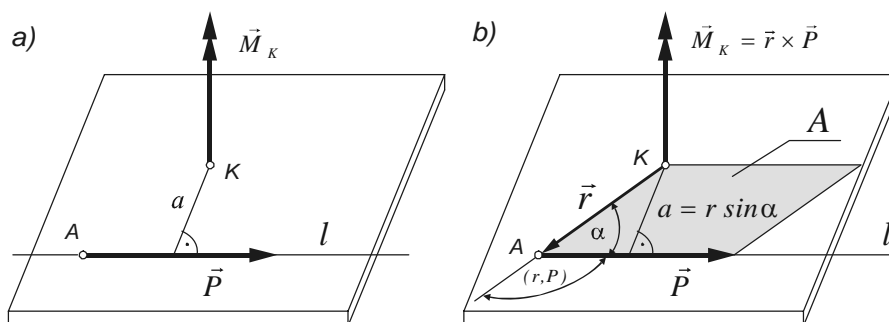
Siła działająca na ciało materialne może wywoływać jego obrót względem punktu lub osi. Wartość momentu siły względem punktu lub osi jest miarą intensywności tego obrotu.

5.1. Moment statyczny siły względem punktu. Twierdzenie Varignona

Rozpatrzmy działanie siły na punkt A tarczy prostokątnej, na której zaznaczony jest także punkt K (rys. 5.1a). Tarcza, wektor siły i punkt K leżą w jednej płaszczyźnie. Wyobraźmy sobie, że tarcza ułożona jest na poziomym stole na kulkach tak, że może się poruszać bez tarcia, oraz że jest nasadzona w punkcie K na okrągły, przytwierdzony do stołu bolec, dookoła którego może się obracać. Działanie siły P na punkt A , tak jak to pokazano na rysunku 5.1, spowoduje obrót tarczy dookoła punktu K . Czynnikiem powodujący ten obrót nazywamy momentem statycznym siły względem punktu. Jako że obrót może się odbywać w kierunku zgodnym lub przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, moment statyczny siły przedstawiamy w postaci wektora prostopadłego do płaszczyzny, w której zachodzi obrót, a zwrot tego wektora określamy za pomocą reguły śruby prawoskrętnej.

Momentem statycznym siły \vec{P} względem punktu K nazywamy wielkość wektorową, której moduł jest równy iloczynowi modułu siły i ramienia tej siły względem punktu K ($M_K = P \cdot a$), której kierunek jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez kierunek siły i punkt K , a zwrot zgodny z regułą śruby prawoskrętnej.

Ramieniem siły \vec{P} względem punktu K nazywamy odległość a prostej działania l tej siły od punktu K . Punkt K nazywamy biegunem momentu. Zwrot wektora momentu, w celu odróżnienia go od wektora siły, oznaczamy podwójnym grotem.



Rys. 5.1. Moment statyczny siły względem punktu

Moment siły względem bieguna jest równy zero, gdy ramię działania tej siły jest równe zero, czyli gdy biegun leży na prostej działania siły.

Bardzo wygodne i użyteczne w obliczeniach jest przedstawienie wektora momentu siły względem bieguna za pomocą iloczynu wektorowego dwóch wektorów, zgodnie z poniższą definicją (por. rys. 5.1b):

Momentem siły \vec{P} względem punktu K nazywamy wektor \vec{M}_K , który równy jest iloczynowi wektorowemu promienia wodzącego \vec{r} i wektora siły \vec{P} ($\vec{M}_K = \vec{r} \times \vec{P}$). (Promień wodzący \vec{r} jest wektorem, którego początek jest w punkcie K , a koniec w punkcie przyłożenia siły \vec{P}).

Z definicji iloczynu wektorowego mamy

$$M_K = |\vec{M}_K| = |\vec{r}| \cdot |\vec{P}| \sin(r, P)$$

ponieważ

$$\sin(r, P) = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \text{zaś} \quad |\vec{r}| \sin \alpha = a,$$

więc

$$M_K = P \cdot a \tag{5.1}$$

Analizując rysunek 5.1b, stwierdzamy też, że

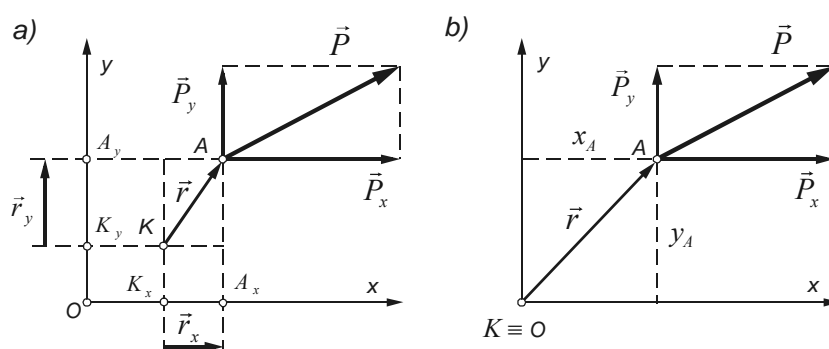
Moduł momentu statycznego siły względem punktu jest równy polu równoległoboku zbudowanego na promieniu wodzącym i wektorze siły ($M_K = P \cdot a = A$).

Gdy prostokątny układ odniesienia Oxy przyjmiemy tak, że siła \vec{P} i biegun K leżą na płaszczyźnie xy (rys. 5.2a), wyliczenie momentu \vec{M}_K przeprowadzimy następująco:

$$\vec{M}_K = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ P_x & P_y & 0 \end{vmatrix} = (r_x P_y - r_y P_x) \vec{k} \quad (5.2)$$

gdzie składowe promienia wodzącego są:

$$r_x = x_A - x_K, \quad r_y = y_A - y_K \quad (5.3)$$



Rys. 5.2. Moment statyczny siły \vec{P} względem punktu K

Gdy punkt K leży w początku układu współrzędnych ($x_K = y_K = 0$) (rys. 5.2b), wtedy

$$\vec{M}_K = (x_A P_y - y_A P_x) \vec{k} \quad (5.4)$$

czyli miarę wektora \vec{M}_K obliczamy ze wzoru:

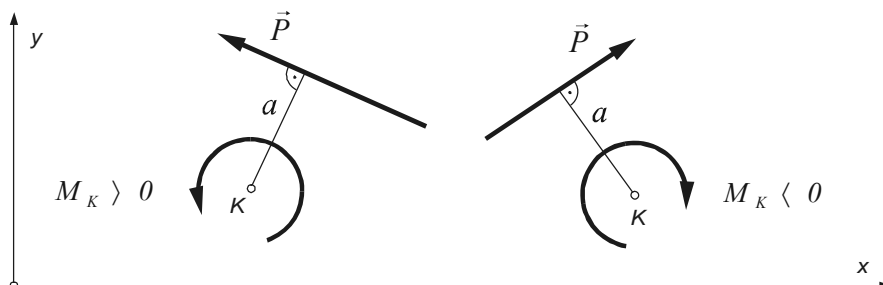
$$M_K = x_A P_y - y_A P_x \quad (5.5)$$

Ze wzoru 5.5 wynika następujące TWIERDZENIE

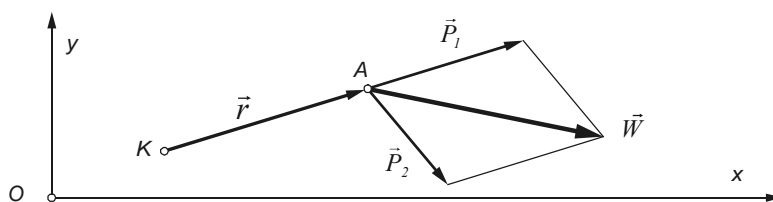
Moment statyczny siły względem bieguna jest równy sumie momentów składowych tej siły względem tego bieguna.

W przyjętym układzie odniesienia znak plus (+) oznacza, że siła stara się wykonać obrót w kierunku niezgodnym z ruchem wskazówek zegara, znak minus (-) oznacza przeciwny kierunek obrotu.

Symboliczne oznaczenia momentów w płaszczyźnie prostopadłej do prostej działania ich wektorów (czyli w płaszczyźnie działania sił) pokazano na rysunku 5.3.

Rys. 5.3. Dodatni i ujemny moment statyczny siły \vec{P} względem punktu K

Rozpatrzmy teraz dwie dowolne siły \vec{P}_1 i \vec{P}_2 zaczepione w punkcie A na płaszczyźnie Oxy (rys. 5.4). Znajdziemy związek między momentami tych sił a momentem ich wypadkowej względem dowolnego punktu K leżącego w tej samej płaszczyźnie.



Rys. 5.4. Moment statyczny wypadkowej dwóch sił

Momenty sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 względem bieguna K możemy dodać algebraicznie, gdyż są one wektorami działającymi wzdłuż jednej prostej. Posługując się rachunkiem wektorowym, zapiszemy:

$$\begin{aligned} \vec{M}_K &= (\vec{r} \times \vec{P}_1) + (\vec{r} \times \vec{P}_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ P_{1x} & P_{1y} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ P_{2x} & P_{2y} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (r_x P_{1y} - r_y P_{1x}) \vec{k} + (r_x P_{2y} - r_y P_{2x}) \vec{k} = \\ &= [r_x (P_{1y} + P_{2y}) - r_y (P_{1x} + P_{2x})] \vec{k} = (r_x W_y - r_y W_x) \vec{k} = \vec{r} \times \vec{W} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Z powyższego wynika następujące TWIERDZENIE

Moment statyczny wypadkowej dwóch sił względem dowolnego punktu K równy jest sumie momentów tych sił względem tegoż punktu.

Twierdzenie powyższe nazywa się TWIERDZENIEM VARIGNONA i można je uogólnić dla dowolnego płaskiego układu sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$, gdyż do wypadkowej dwóch pierwszych sił można kolejno, po jednej, dodawać siły następne aż do ostatniej i „cały czas” twierdzenie to będzie obowiązywało.

Tak więc UOGÓLNIONE TWIERDZENIE VARIGNONA brzmi

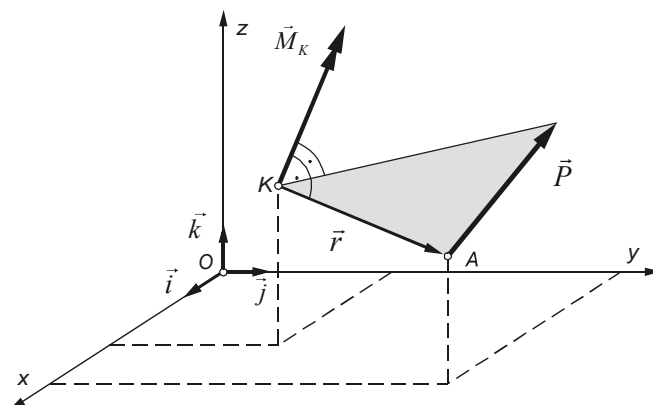
Moment statyczny wypadkowej dowolnego układu sił względem dowolnie obranego bieguna leżącego w płaszczyźnie tego układu równa się sumie algebraicznej momentów wszystkich sił układu względem obranego bieguna.

Moment statyczny siły względem punktu w przestrzennym układzie współrzędnych prostokątnych $Oxyz$ (rys. 5.5) zapiszemy podobnie jak wyżej (por. wzór 5.2) w postaci iloczynu wektorowego promienia wodzącego i siły: $\vec{M}_K = \vec{r} \times \vec{P}$

$$\vec{M}_K = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = (r_y P_z - r_z P_y) \vec{i} + (r_z P_x - r_x P_z) \vec{j} + (r_x P_y - r_y P_x) \vec{k} \quad (5.7)$$

gdzie składowe promienia wodzącego są:

$$r_x = x_A - x_K, \quad r_y = y_A - y_K, \quad r_z = z_A - z_K \quad (5.8)$$



Rys. 5.5. Moment statyczny siły \vec{P} względem punktu K

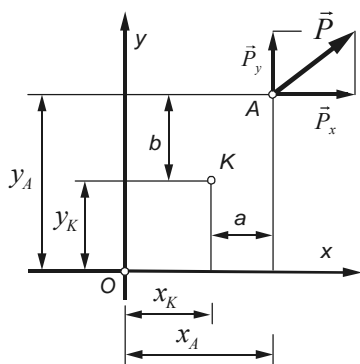
Przykład 5.1. Na tarczę leżącą w płaszczyźnie Oxy działa siła $P = 10\text{ N}$ tworząca z osią x kąt $(x,P) = 150^\circ$ (rys. 5.6). Współrzędne punktu A przyłożenia siły wynoszą: $x_A = 3,0\text{ m}$, $y_A = 5,0\text{ m}$. Wyznaczyć moment tej siły względem bieguna K o współrzędnych: $x_K = 6,0\text{ m}$, $y_K = -2,0\text{ m}$.

Rozwiązanie

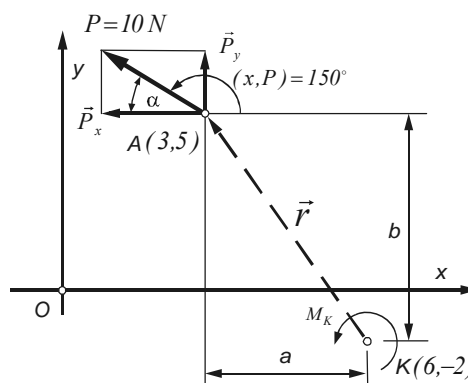
Wykonując obliczenia, możemy postępować dwojako:

- Wyprowadzamy wzór ogólny, posługując się rysunkiem 5.6, na którym wszystkie wchodzące do wzoru wielkości są przyjęte jako dodatnie. Uwzględniając przyjętą umowę znakowania momentów, napiszemy:

$$M_K = a \cdot P_y - b \cdot P_x = (x_A - x_K) \cdot P_y - (y_A - y_K) \cdot P_x,$$
 przy czym do wzoru tego musimy następnie podstawić odpowiednie wartości z właściwymi znakami, zadanymi w temacie zadania.
- Rysujemy szkic uwzględniając aktualne dane z zadania (rys. 5.7) i następnie na podstawie szkicu obliczamy moment siły jako sumę algebraiczną momentów jej składowych, operując bezwzględными wartościami sił i ich ramion działania oraz ustalając na podstawie tegoż szkicu znaki momentów.



Rys. 5.6



Rys. 5.7

Zastosujemy tu drugi sposób, obliczając najpierw wartości bezwzględne składowych siły P (rys. 5.7):

$$|\vec{P}_x| = P \cdot \cos \alpha = 10 \cdot \cos 30^\circ = 8,66\text{ N}$$

$$|\vec{P}_y| = P \cdot \sin \alpha = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5,00\text{ N}$$

Ramiona sił \vec{P}_y i \vec{P}_x wynoszą odpowiednio: $a = 6 - 3 = 3 \text{ m}$; $b = 5 + 2 = 7 \text{ m}$, a zatem:

$$M_K = -a \cdot |\vec{P}_y| + b \cdot |\vec{P}_x| = -3 \cdot 5 + 7 \cdot 8,66 = 45,62 \text{ Nm}$$

Dodatnia wartość momentu M_K wskazuje na to, że moment jest lewoskrętny, czyli wektor momentu prostopadły do płaszczyzny rysunku przyłożony w punkcie K ma zwrot ku patrzącemu. Symbolem momentu \vec{M}_K na płaszczyźnie Oxy jest niepełny okrąg o środku w punkcie K ze strzałką oznaczającą obrót w kierunku niezgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (w lewo).

Wynik sprawdzimy za pomocą rachunku wektorowego.

Siła w zapisie analitycznym:

$$\vec{P} = -8,66 \vec{i} + 5,0 \vec{j},$$

promień wodzący:

$$\vec{r} = (x_A - x_K) \vec{i} + (y_A - y_K) \vec{j} = (3 - 6) \vec{i} + [5 - (-2)] \vec{j} = -3 \vec{i} + 7 \vec{j},$$

więc

$$\vec{M}_K = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3,00 & 7,00 & 0,00 \\ -8,66 & 5,00 & 0,00 \end{vmatrix} = [(-3)5 - 7(-8,66)] \vec{k} = 45,62 \vec{k}$$

Wektor \vec{M}_K jest równoległy do osi z . Dodatnia wartość miary rzutu tego wektora na oś z wskazuje na zgodność zwrotu wektora momentu ze zwrotem osi z .

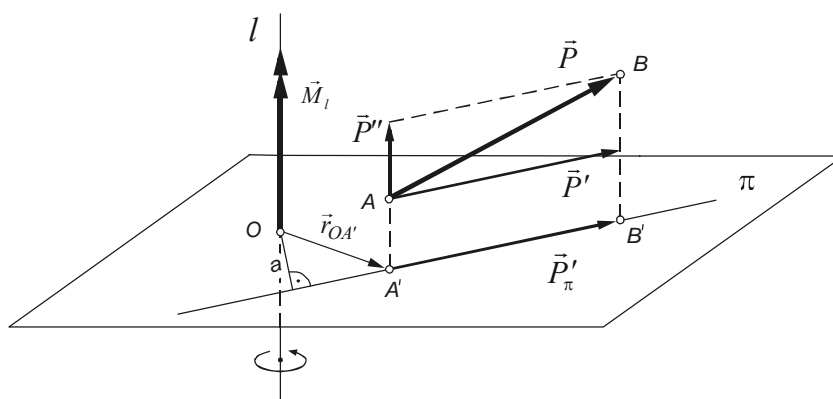
5.2. Moment statyczny siły względem osi

Założymy teraz, że punkt A (rys. 5.8), do którego przyłożona jest siła \vec{P} , jest dowolnym punktem ciała, które pod wpływem działania tej siły może obracać się względem prostej l zwanej osią obrotu. Wartość momentu siły \vec{P} względem osi l jest – jak już wspomniano wyżej – miarą intensywności tego obrotu. Jeżeli siłę \vec{P} rozłożymy w płaszczyźnie równoległej do osi l na dwie składowe – prostopadłą i równoległą do osi l : \vec{P}' i \vec{P}'' , zauważymy, że składowa \vec{P}'' równoległa do osi l nie wywołuje obrotu. O intensywności obrotu decyduje więc składowa pozioma \vec{P}' , równoległa do płaszczyzny π prostopadłej do osi l . Stąd definicja momentu siły względem osi:

Moment statyczny siły względem osi jest równy momentowi rzutu tej siły na płaszczyznę prostopadłą do osi względem punktu przecięcia się osi z tą płaszczyzną.

Moment siły względem osi ma moduł równy $|\vec{M}_l| = P'_\pi \cdot a$, jego kierunek działania jest wzdłuż osi l , a zwrot zgodny z regułą śruby prawoskrętnej.

Możemy również obliczyć \vec{M}_l za pomocą rachunku wektorowego: $\vec{M}_l = \vec{r}_{OA'} \times \vec{P}'_\pi$



Rys. 5.8. Moment siły względem osi

Wyznamy teraz momenty statyczne siły \vec{P} zaczepionej w dowolnym punkcie A o współrzędnych x_A, y_A, z_A względem osi układu odniesienia x, y, z (rys. 5.9). Zgodnie z definicją momentu siły względem osi, moment siły \vec{P} względem osi x jest równy momentowi rzutu tej siły na płaszczyznę Oyz względem bieguna O .

$\vec{M}_x = \vec{M}_O(P_{yz})$ (symbol $M_O(P_{yz})$ należy rozumieć jako moment siły P_{yz} względem bieguna O).

Wiemy już też, że moment siły względem bieguna jest sumą momentów składowych tej siły względem tego bieguna.

$$M_x = M_O(P_y) + M_O(P_z) = y_A P_z - z_A P_y \quad \text{por. wzór (5.5)}$$

Podobnie dla pozostałych osi:

$$\vec{M}_y = \vec{M}_O(P_{zx})$$

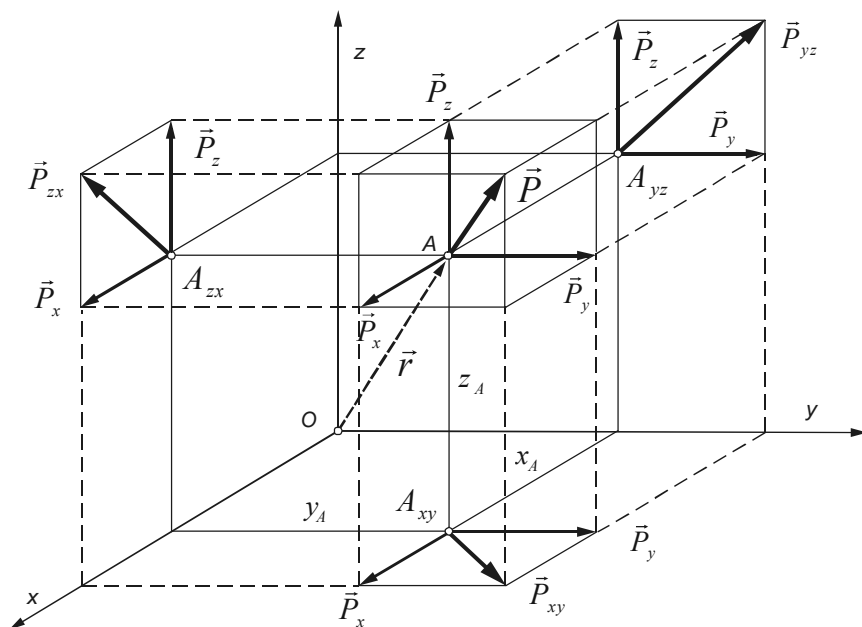
$$M_y = z_A P_x - x_A P_z$$

$$\vec{M}_z = \vec{M}_O(P_{xy})$$

$$M_z = x_A P_y - y_A P_x$$

Zapis analityczny powyższych wzorów jest następujący:

$$\vec{M}_x = (y_A P_z - z_A P_y) \vec{i}; \quad \vec{M}_y = (z_A P_x - x_A P_z) \vec{j}; \quad \vec{M}_z = (x_A P_y - y_A P_x) \vec{k} \quad (5.9)$$

Rys. 5.9. Rzuty siły P na płaszczyzny prostopadłe do osi x , y , z

Zauważmy teraz, że gdy zsumujemy momenty siły \vec{P} względem osi x , y i z , otrzymamy w wyniku moment statyczny tej siły względem bieguna O ; współrzędne x_A , y_A i z_A są bowiem składowymi promienia wodzącego siły \vec{P} :

$$x_A = r_x, \quad y_A = r_y, \quad z_A = r_z, \quad \text{czyli:} \quad (5.10)$$

$$\vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = (r_y P_z - r_z P_y) \vec{i} + (r_z P_x - r_x P_z) \vec{j} + (r_x P_y - r_y P_x) \vec{k} = \vec{M}_0$$

(porównaj wzór (5.7)).

Wynika stąd wniosek:

Moment statyczny siły względem bieguna jest równy sumie momentów statycznych tej siły względem trzech osi prostokątnego układu współrzędnych przechodzących przez ten biegun.

Ostatecznie więc zapiszemy

$$\vec{M}_0 = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \quad (5.11)$$

przy czym:

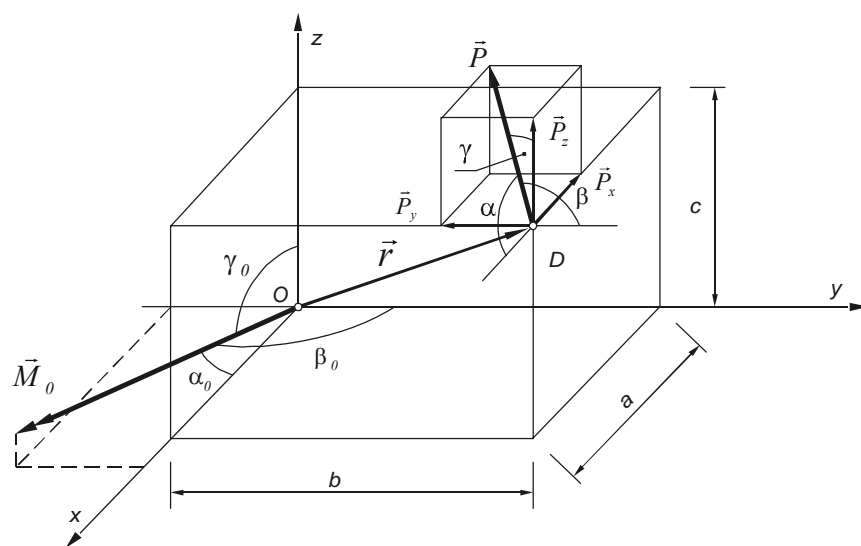
$$M_x = yP_z - zP_y; \quad M_y = zP_x - xP_z; \quad M_z = xP_y - yP_x \quad (5.12)$$

gdzie x , y , z – współrzędne punktu zaczepienia siły.

Gdy dany jest przestrzenny układ sił \vec{P}_i przyłożonych w punktach A_i o współrzędnych x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, n$), to moment tego układu sił względem poszczególnych osi obliczamy biorąc pod uwagę to, że momenty poszczególnych sił względem tych osi są współliniowe i dlatego możemy sumować je algebraicznie:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^n M_{ix} = \sum_{i=1}^n (y_i P_{iz} - z_i P_{iy}) \\ M_y &= \sum_{i=1}^n M_{iy} = \sum_{i=1}^n (z_i P_{ix} - x_i P_{iz}) \\ M_z &= \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (x_i P_{iy} - y_i P_{ix}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Przykład 5.2. Na prostopadłościan (rys. 5.10) o bokach: $a = 3 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$, $c = 4 \text{ m}$, działa w wierzchołku D siła $P = 10 \text{ N}$. Kąty, jakie wektor siły tworzy z osiami x i z , wynoszą odpowiednio: $\alpha = 115^\circ$, $\gamma = 47^\circ$. Kąt β jest rozwarty. Wyznaczyć wektor momentu statycznego siły P względem początku układu współrzędnych.



Rys. 5.10

Rozwiązanie

Kąt β wyznaczymy z zależności: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, pamiętając o tym, że $\cos \beta$ ma znak ujemny, gdyż kąt β jest rozwarty

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - \cos^2 115^\circ - \cos^2 47^\circ} = -0,5969$$

$$\beta = 126^\circ 38'$$

Miary rzutów siły P na poszczególne osie wynoszą:

$$P_x = P \cdot \cos \alpha = 10 \cdot \cos 115^\circ = -4,23 \text{ N}$$

$$P_y = P \cdot \cos \beta = 10 \cdot \cos 126^\circ 38' = -5,97 \text{ N}$$

$$P_z = P \cdot \cos \gamma = 10 \cdot \cos 47^\circ = 6,82 \text{ N}$$

Współrzędne punktu przyłożenia siły są:

$$x = a = 3 \text{ m}, \quad y = b = 6 \text{ m}, \quad z = c = 4 \text{ m}$$

Wartości liczbowe momentów siły P względem poszczególnych osi wynoszą:

$$M_x = yP_z - zP_y = 6 \cdot 6,82 - 4 \cdot (-5,97) = 64,8 \text{ Nm}$$

$$M_y = zP_x - xP_z = 4 \cdot (-4,23) - 3 \cdot 6,82 = -37,38 \text{ Nm}$$

$$M_z = xP_y - yP_x = 3 \cdot (-5,97) - 6 \cdot (-4,23) = 7,47 \text{ Nm}$$

Moduł wektora momentu

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{64,8^2 + (-37,38)^2 + 7,47^2} = 75,18 \text{ Nm}$$

Cosinusy kątów jakie wektor momentu tworzy z osiami układu współrzędnych:

$$\cos \alpha_0 = \frac{M_x}{M_0} = \frac{64,8}{75,18} = 0,8619; \quad \alpha_0 = 30^\circ 28'$$

$$\cos \beta_0 = \frac{M_y}{M_0} = \frac{-37,38}{75,18} = -0,4972; \quad \beta_0 = 119^\circ 48'$$

$$\cos \gamma_0 = \frac{M_z}{M_0} = \frac{7,47}{75,18} = 0,0994; \quad \gamma_0 = 84^\circ 17'$$

Kontrola obliczeń:

(suma kwadratów cosinusów obliczonych kątów powinna być równa jedności)

$$0,8619^2 + (-0,4972)^2 + 0,0994^2 = 0,9999 \cong 1$$

Przykład 5.3. Wykorzystując dane z przykładu poprzedniego, wyznaczyć wektor momentu M_0 , stosując analityczny zapis wektorów i rachunek wektorowy.

Rozwiązanie

Stosując zapis analityczny mamy:

$$\vec{P} = -4,23 \vec{i} - 5,97 \vec{j} + 6,82 \vec{k}, \quad \vec{r} = \overline{OD} = 3,00 \vec{i} + 6,00 \vec{j} + 4,00 \vec{k},$$

więc

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3,00 & 6,00 & 4,00 \\ -4,23 & -5,97 & 6,82 \end{vmatrix} = [6 \cdot 6,82 - 4 \cdot (-5,97)] \vec{i} +$$

$$- [3 \cdot 6,82 - 4 \cdot (-4,23)] \vec{j} + [3(-5,97) - 6(-4,23)] \vec{k} =$$

$$= 64,8 \vec{i} - 37,38 \vec{j} + 7,47 \vec{k}$$

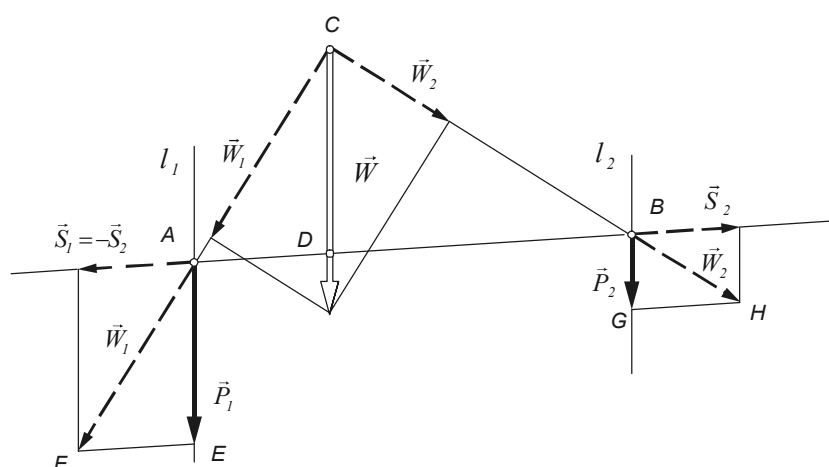
5.3. Pytania do rozdziału 5

1. Podać definicję momentu statycznego siły względem punktu.
2. Moment statyczny siły względem punktu jako iloczyn wektorowy.
3. Twierdzenie o momencie wypadkowej dowolnego układu sił względem bieguna (twierdzenie Varignon).
4. Podać definicję momentu statycznego siły względem osi.
5. Moment statyczny siły względem bieguna jako suma momentów względem trzech osi.

6. Siły równoległe

6.1. Wypadkowa sił równoległych

Siły nazywamy równoległymi, gdy ich proste działania są do siebie równoległe. W szczególnym przypadku, gdy proste działania sił pokrywają się, siły te dodają się algebraicznie. W pozostałych przypadkach wartość liczbowa wypadkowej jest równa sumie algebraicznej wartości sił składowych, a położenie jej prostej działania wyznaczamy z warunków geometrycznych lub analitycznie z wyprowadzonych niżej wzorów. Wyznaczenie wypadkowej dwóch sił równoległych \vec{P}_1 i \vec{P}_2 przyłożonych w punktach A i B ciała sztywnego i działających wzdłuż prostych l_1 i l_2 pokazano na rysunku 6.1.



Rys. 6.1. Wypadkowa dwóch sił równoległych zgodnie skierowanych

Wypadkową tych sił wyznaczono w następujący sposób: do układu sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 dodano układ równoważny zeru: są to siły \vec{S}_1 i \vec{S}_2 równe co do modułu, o przeciwnych zwrotach, działające wzdłuż prostej łączącej punkty A i B . Zgodnie z trzecią zasadą statyki stan ruchu ciała sztywnego nie ulegnie w tym przypadku żadnej zmianie.

Następnie pary sił \vec{P}_1 i \vec{S}_1 oraz \vec{P}_2 i \vec{S}_2 zastąpiono ich wypadkowymi, korzystając z zasady równoległoboku.

$$\begin{aligned}\vec{P}_1 + \vec{S}_1 &= \vec{W}_1 \\ \vec{P}_2 + \vec{S}_2 &= \vec{W}_2\end{aligned}$$

Po geometrycznym zsumowaniu sił \vec{W}_1 i \vec{W}_2 (również na podstawie równoległoboku, po przesunięciu tych sił do punktu zbieżności C) otrzymano wypadkową całego układu sił:

$$\vec{W}_1 + \vec{W}_2 = \vec{P}_1 + \vec{S}_1 + \vec{P}_2 + \vec{S}_2 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{W}$$

(suma sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 równa się zeru).

Prosta działania wypadkowej \vec{W} przecina prostą łączącą punkty A i B w punkcie D , którego położenie wyznaczamy następująco:

z podobieństwa trójkątów ACD i AEF oraz BCD i BGH mamy:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{S_1}{P_1}; \quad \frac{BD}{CD} = \frac{S_2}{P_2}; \quad (6.1)$$

po uwzględnieniu tego, że $S_1 = S_2$ i po podzieleniu stronami otrzymujemy

$$\frac{AD}{BD} = \frac{P_2}{P_1} \quad (6.2)$$

Punkt D dzieli wewnętrznie odcinek AB w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do wartości liczbowych sił P_1 i P_2 .

Położenie prostej działania wypadkowej określimy, uwzględniając oprócz proporcji (6.2) zależność

$$AB = AD + BD; \quad (6.3)$$

$$\frac{AD}{AB - AD} = \frac{P_2}{P_1} \quad (6.4)$$

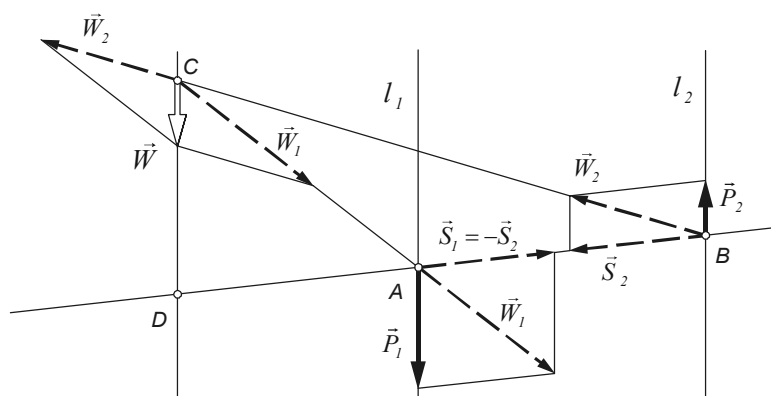
skąd po przekształceniach otrzymamy $AD = AB \frac{P_2}{P_1 + P_2}$ (6.5)

$$\text{Łatwo jest też sprawdzić, że } BD = AB \frac{P_1}{P_1 + P_2} \quad (6.6)$$

Wypadkowa dwóch sił równoległych zgodnie skierowanych działa równoległe do tych sił i ma zwrot zgodny z ich zwrotem. Moduł wypadkowej jest równy sumie modułów sił, a prosta działania wypadkowej dzieli wewnętrznie odległość między prostymi działania sił w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do wartości tych sił.

Kierując się wyżej opisanym rozumowaniem można też znaleźć wypadkową dwóch sił równoległych, lecz przeciwnie skierowanych (rys. 6.2) i udowodnić poniższe stwierdzenie

Wypadkowa dwóch sił równoległych przeciwnie skierowanych działa równoległe do tych sił i ma zwrot zgodny ze zwrotem siły większej. Jej wartość jest różnicą wartości tych dwóch sił, a jej prosta działania dzieli zewnętrzną odległość między prostymi działania tych sił w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do ich wartości i leży po stronie siły większej ($W = P_1 - P_2$; $DA/DB = P_2/P_1$).



Rys. 6.2. Wypadkowa dwóch sił równoległych, przeciwnie skierowanych

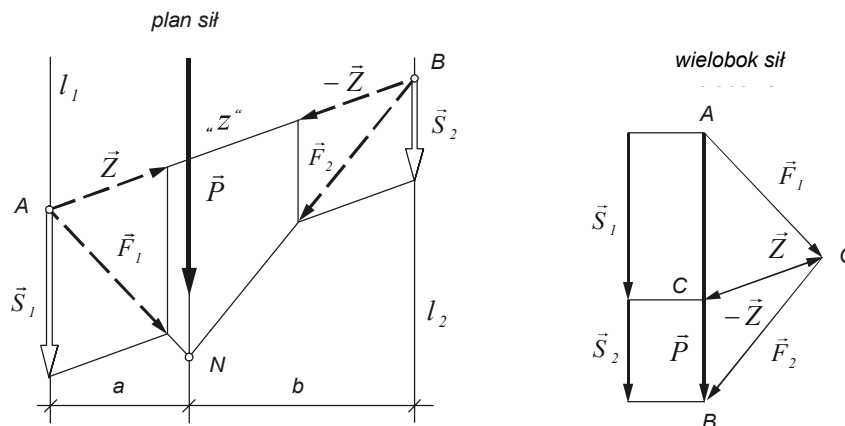
6.2. Rozkład i równoważenie siły dwiema siłami do niej równoległymi

Zadaniem odwrotnym do wyznaczenia wypadkowej dwóch sił równoległych jest rozkład siły na dwie siły o kierunkach równoległych do kierunku działania tej siły. Spełnione jest wtedy równanie wektorowe

$$\vec{P} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

Na rysunku 6.3 pokazano sposób geometryczny rozwiązania tego zadania. Składa się on z trzech etapów:

- a) Zastępujemy siłę \vec{P} dwiema siłami \vec{F}_1 i \vec{F}_2 zbieżnymi z tą siłą w dowolnym punkcie N na planie sił, a na wieloboku sił tworzącymi z nią trójkąt AOB ($\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$) (por. rozdz. 4.5). Kierunki sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 przecinają się z danymi kierunkami l_1 i l_2 na planie sił odpowiednio w punktach A i B (w tych punktach zaczepiamy siły \vec{F}_1 i \vec{F}_2); i z kolei:
- b) Zastępujemy siłę \vec{F}_1 siłą pionową \vec{S}_1 oraz siłą \vec{Z} działającą wzdłuż prostej „z” łączącej punkty A i B . (Na wieloboku sił dorysowujemy siłę \vec{Z} i \vec{S}_1 tak, by tworzyły trójkąt z siłą \vec{F}_1 (trójkąt ACO) i by obieg strzałek w tym trójkącie był niezgodny) ($\vec{F}_1 = \vec{S}_1 + \vec{Z}$).
- c) Zastępujemy siłę \vec{F}_2 siłą pionową \vec{S}_2 oraz siłą $-\vec{Z}$ działającą wzdłuż prostej „z”, (wielobok sił uzupełniamy siłami $-\vec{Z}$ i \vec{S}_2 , podobnie jak wyżej) ($\vec{F}_2 = -\vec{Z} + \vec{S}_2$).



Rys. 6.3. Rozkład siły \vec{P} na dwie siły do niej równoległe

Otrzymaliśmy w powyższy sposób układ sił równoważny sile \vec{P} , złożony z czterech sił (\vec{S}_1 , \vec{S}_2 , \vec{Z} i $-\vec{Z}$), z których dwie: (\vec{Z} i $-\vec{Z}$) są układem równoważnym zeru – usuwamy je więc z układu. Pozostają dwie siły (\vec{S}_1 i \vec{S}_2) równoważne sile \vec{P} i spełniające warunki zadania. Moduły tych sił odczytujemy z wieloboku sił, w którym siły nanoszone były w przyjętej wcześniej skali sił.

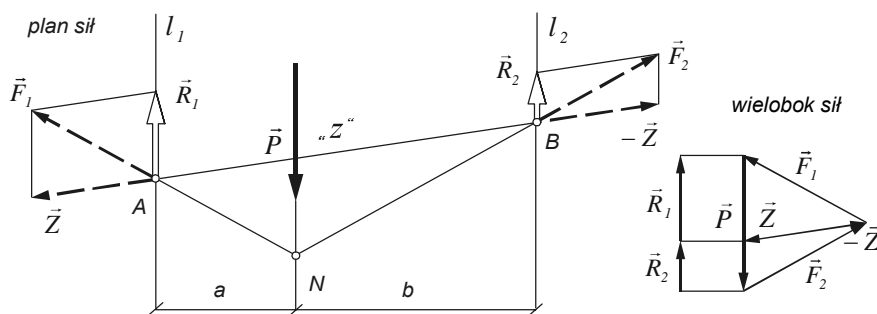
W związku z tym, że siła \vec{P} jest wypadkową sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 , zachodzą tu więc te same związki, które wyprowadzone zostały wyżej, w rozdziale 6.1:

$$P = S_1 + S_2 \quad (6.7)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{S_2}{S_1} \quad (6.8)$$

Rozwiązując powyższy układ równań, można więc siły \vec{S}_1 i \vec{S}_2 wyznaczyć sposobem analitycznym, pamiętając że zwroty sił \vec{S} są zgodne ze zwrotem siły \vec{P} .

Zrównoważenie siły dwiema siłami do niej równoległymi (por. rys. 6.4) polega na tym, że najpierw zrównoważymy siłę \vec{P} dwiema siłami \vec{F}_1 i \vec{F}_2 , a następnie rozkładamy te siły – po zaczepieniu ich w punktach A i B - odpowiednio, na siły \vec{R}_1 i \vec{Z} oraz \vec{R}_2 i $-\vec{Z}$.



Rys. 6.4. Zrównoważenie siły \vec{P} dwiema siłami do niej równoległymi

6.3. Para sił i jej moment statyczny

Parą sił nazywamy układ dwóch sił równoległych, o równych wartościach, lecz przeciwnych zwrotach.

Płaszczyzna, w której leżą obie siły, jest płaszczyzną pary sił. Ramieniem pary sił nazywa się odległość między prostymi działania obu sił (rys. 6.5).

Siły tworzące parę sił nie mają wypadkowej

$$\vec{W} = \vec{P} + \vec{P}_1 = 0 \quad (6.9)$$

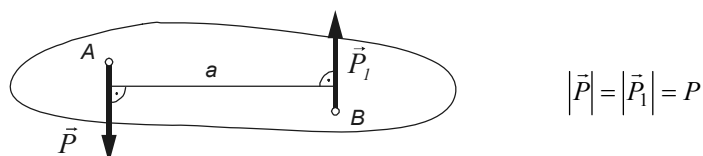
ale i nie pozostają w równowadze, gdyż nie działają wzdłuż jednej prostej. Para sił działając na ciało materialne wywołuje jego obrót. Suma momentów sił \vec{P} i \vec{P}_1 tworzących parę sił względem dowolnego punktu O leżącego w płaszczyźnie działania pary wynosi

$$M_0 = P \cdot a_1 - P_1 \cdot a_2$$

gdzie a_1 i a_2 oznaczają ramiona sił \vec{P} i \vec{P}_1 względem punktu O (rys. 6.6a).

Gdy uwzględnimy, że moduły obu sił są sobie równe ($P = P_1$),

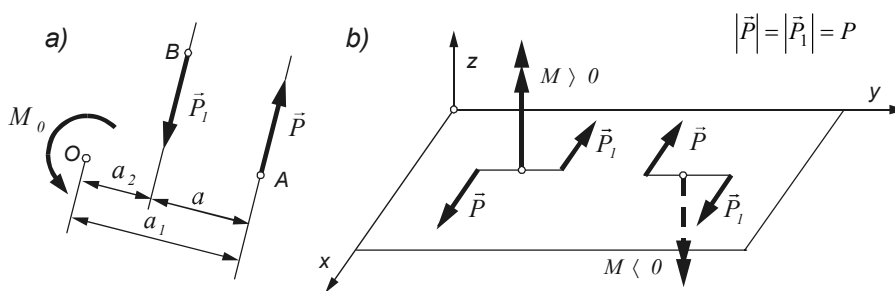
oraz że $a_1 - a_2 = a$, otrzymamy: $M_0 = P \cdot a_1 - P \cdot a_2 = P \cdot (a_1 - a_2) = P \cdot a$ (6.10)



Rys. 6.5. Para sił

Moment pary sił jest niezależny od wyboru punktu O i jest wielkością stałą, a jego wartość liczbowa równa jest iloczynowi modułu jednej z sił przez ramię pary sił. Wektor momentu pary sił jest prostopadły do płaszczyzny pary sił, a jego zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej.

Wobec niezależności momentu pary sił od położenia punktu O symbol momentu może być pozbawiony indeksu wskazującego symbol punktu ($M = P \cdot a$). Wektor momentu pary sił jest więc wektorem swobodnym – odkładamy go z dowolnego punktu płaszczyzny pary sił. Na rysunku 6.6b pokazano pary sił i wektory ich momentów w układzie przestrzennym.



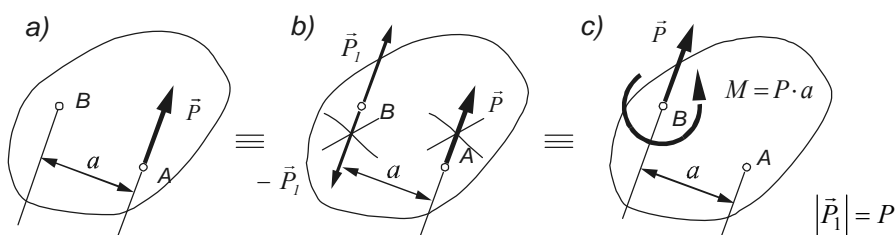
Rys. 6.6. Moment pary sił: a) w układzie płaskim, b) w przestrzeni

6.4. Równoległe przesunięcie siły

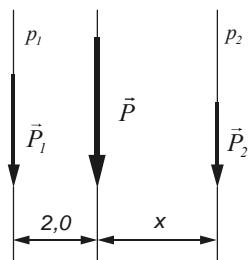
W punkcie A tarczy przyłożona jest działająca w jej płaszczyźnie siła \vec{P} (rys. 6.7a). Należy przenieść równoległe siłę \vec{P} do punktu B , nie zmieniając skutków jej działania na tarczę.

Wykorzystujemy tu trzecią zasadę statyki: przykładamy w punkcie B układ sił równoważny zeru, czyli dwie siły \vec{P}_1 i $-\vec{P}_1$ o zwrotach przeciwnych, równe co do modułu sile \vec{P} i równoległe do niej (rys. 6.7b). Otrzymujemy układ trzech sił równoważny poprzedniemu, w którym siły przekreślone stanowią parę sił o momencie $M = P \cdot a$. A zatem:

Przesuwając siłę \vec{P} równoległe na odległość a , musimy jednocześnie dodać do układu moment o wartości $M = P \cdot a$ (rys. 6.7c).



Rys. 6.7. Równoległe przesunięcie siły



Rys. 6.8

Przykład 6.1. Siłę P rozłożono na dwie siły składowe P_1 i P_2 działające wzdłuż prostych p_1 i p_2 równoległych do linii działania siły P (rys. 6.8). Odległość prostej p_1 od linii działania siły P wynosi 2 m , siła P ma wartość 200 N , a wartość liczbową siły składowej działającej wzdłuż prostej p_1 wynosi $P_1 = 150\text{ N}$. Obliczyć odległość x prostej p_2 od linii działania siły P .

Rozwiązanie

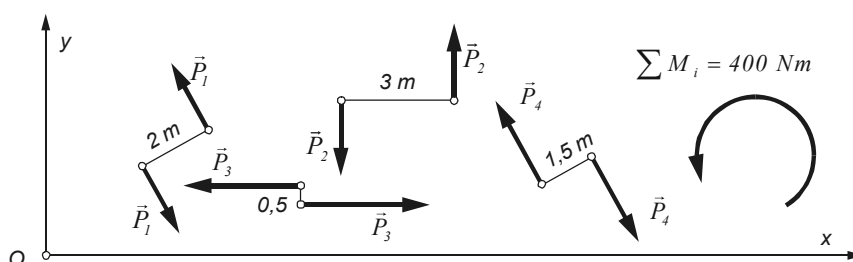
Wartość liczbową siły P_2

$$P_2 = P - P_1 = 200 - 150 = 50\text{ N}$$

Kierunek siły P dzieli odległość między prostymi p_1 i p_2 na odcinki odwrotnie proporcjonalne do wartości sił działających wzdłuż tych prostych:

$$\frac{2}{x} = \frac{P_2}{P_1}, \quad \text{więc} \quad x = \frac{2P_1}{P_2} = \frac{2 \cdot 150}{50} = 6 \text{ m}$$

Przykład 6.2. Do ciała sztywnego zostały przyłożone w jednej płaszczyźnie cztery pary sił. Ramiona tych par podaje rysunek 6.9 a wartości liczbowe sił są następujące: $P_1 = P_3 = 100 \text{ N}$, $P_2 = 200 \text{ N}$, $P_4 = 300 \text{ N}$. Określić wypadkową parę sił.



Rys. 6.9

Rozwiązanie

Momenty danych par sił są następujące:

$$M_1 = 100 \cdot 2 = 200 \text{ Nm}, \quad M_2 = 200 \cdot 3 = 600 \text{ Nm}, \quad M_3 = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ Nm},$$

$$M_4 = -300 \cdot 1,5 = -450 \text{ Nm},$$

Moment wypadkowej pary sił jest algebraiczną sumą momentów par składowych (wektory momentów składowych par sił są wektorami swobodnymi prostopadłymi do płaszczyzny Oxy , możemy więc je traktować jako współliniowe)

$$M = \sum_{i=1}^4 M_i = 200 + 600 + 50 - 450 = 400 \text{ Nm}$$

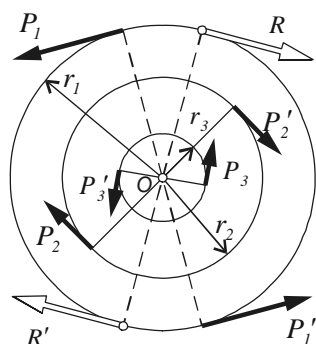
Otrzymana para sił może być na przykład utworzona z dwóch sił o wartościach liczbowych po 400 N działających na ramieniu 1 m i wywołujących obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Przykład 6.3. Do krążka przedstawionego na rysunku 6.10 przyłożone zostały trzy pary sił o wartościach liczbowych: $P_1 = 100 \text{ N}$, $P_2 = 50 \text{ N}$, $P_3 = 60 \text{ N}$. Jaką parę sił należy przyłożyć na obwodzie zewnętrznym krążka, by pozostawał on w równowadze? (wartości promieni obwodów krążka, są: $r_1 = 35 \text{ cm}$, $r_2 = 22 \text{ cm}$, $r_3 = 10 \text{ cm}$).

Rozwiązanie

Obliczamy moment wypadkowy:

$$\begin{aligned} M &= P_1 \cdot r_1 - P_2 \cdot r_2 + P_3 \cdot r_3 = \\ &= 100 \cdot 0,7 - 50 \cdot 0,44 + 60 \cdot 0,2 = 60 \text{ Nm} \end{aligned}$$



Rys. 6.10

W celu zrównoważenia działania tego momentu – do obwodu krążka należy przyłożyć parę sił o wartości momentu

$$M_R = -60 \text{ Nm}$$

Jako że ramię tej pary sił wynosi $r_1 = 0,7 \text{ m}$, więc siły na obwodzie muszą mieć wartości

$$R = R' = \frac{|\vec{M}_R|}{r_1} = \frac{60}{0,7} = 85,71 \text{ N}$$

i wywoływać obrót krążka w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (wskazuje na to znak „-” przy wartości liczbowej momentu M_R).

6.5. Pytania do rozdziału 6

1. Wyznaczanie wypadkowej dwóch sił równoległych.
2. Rozkład siły na dwie siły do niej równoległe.
3. Zrównoważenie siły dwiema siłami o kierunkach działania równoległych do tej siły.
4. Co to jest para sił?
5. Jaka jest wartość momentu pary sił?
6. Wykazać brak zależności wartości momentu pary sił od punktu, względem którego ten moment wyznaczono.
7. Jakiego rodzaju wektorem jest moment pary sił?
8. Na czym polega równoległe przesunięcie siły?

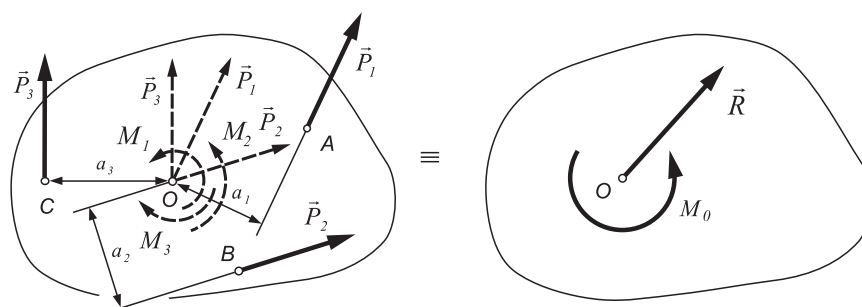
Uwaga: Do sił równoległych mają zastosowanie wszystkie prawa dotyczące układów sił niezbieżnych, o których mowa jest w rozdziale następnym – siódmym; wobec tego należy pamiętać o tym, że rozwiązanie zadań omawianych w niniejszym rozdziale można też przeprowadzić inaczej: – korzystając np. z konstrukcji wieloboku sznurowego, równań równowagi niezbieżnych układów sił, twierdzenia Varignon.

7. Układy sił niezbieżnych

7.1. Sprowadzenie płaskiego układu sił niezbieżnych do bieguna

Płaski niezbieżny układ sił możemy sprowadzić do bieguna, czyli zastąpić innym, prostszym układem sił składającym się z dwóch tylko wektorów.

Dokonyjemy tego poprzez przekształcenie polegające na równoległym przesunięciu wszystkich sił danego układu, do jednego punktu – tzw. bieguna redukcji. Czynność tę zilustrowano na rysunku 7.1, gdzie dane są siły \vec{P}_1 , \vec{P}_2 i \vec{P}_3 zaczepione w punktach A , B i C tarczy materialnej oraz punkt O , do którego mamy sprowadzić układ sił P .



Rys. 7.1. Sprowadzenie układu trzech sił do bieguna O

Przesuwamy najpierw równolegle siłę \vec{P}_1 do punktu O (czyli zaczepiamy ją w punkcie O zachowując jej kąt kierunkowy i dodajemy do układu parę sił o wartości momentu $M_1 = P_1 \cdot a_1$ – por. rozdz. 6.4). Następnie do punktu O przesuwamy równolegle siłę \vec{P}_2 (zaczepiamy ją w punkcie O i dodajemy moment $M_2 = P_2 \cdot a_2$). Po przesunięciu siły \vec{P}_3 do punktu O dodajemy do układu moment $M_3 = P_3 \cdot a_3$ (Momenty M_1 i M_2 dążą do obrotu tarczy w lewo, zaś moment M_3 obraca tarczę w prawo).

Tak więc, zamiast sił układu pierwotnego mamy w punkcie O układ trzech sił zbieżnych, które zastępujemy ich sumą geometryczną :

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 \quad (7.1)$$

oraz trzy współliniowe, prostopadłe do tarczy momenty, których moduły możemy dodać algebraicznie

$$M_0 = P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3 \quad (7.2)$$

Gdy w układzie jest n sił, wzory ogólne są:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad (7.3)$$

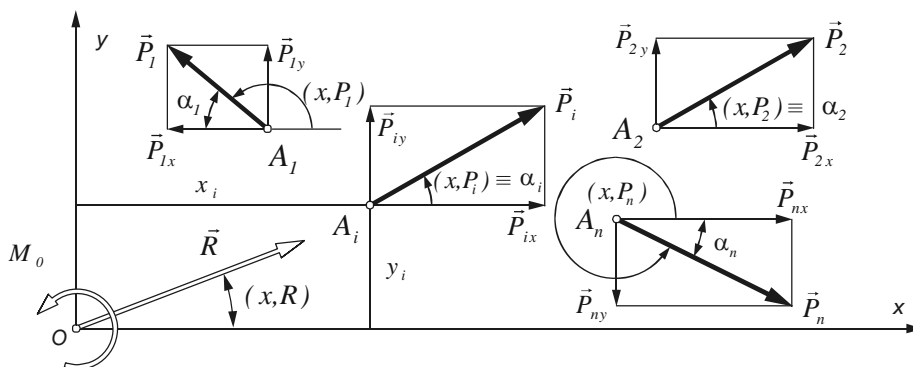
$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{0i} \quad (7.4)$$

Wektor \vec{R} nazywa się wektorem głównym układu, moment \vec{M}_0 – momentem głównym względem bieguna redukcji O .

Wektor główny nie jest zależny od położenia bieguna redukcji, zaś moment główny jest od jego położenia zależny. Reasumując powyższe rozważania, możemy stwierdzić:

Dowolny płaski układ sił przyłożonych do ciała sztywnego można zastąpić wektorem głównym \vec{R} przyłożonym do dowolnego punktu O , równym sumie geometrycznej sił układu oraz momentem głównym \vec{M}_0 równym sumie momentów danych sił względem punktu O .

Załóżmy, że płaski niezbieżny układ sił dany jest w prostokątnym układzie współrzędnych o początku w biegunie redukcji O , tak jak to pokazuje rysunek 7.2.



Rys. 7.2. Sprowadzenie płaskiego niezbieżnego układu sił do bieguna O

Składowe wektora głównego \vec{R} wyznaczamy, sumując algebraicznie miary rzutów sił układu na osie x i y

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} ; \quad R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} \quad \text{porównaj wzory (4.2) – (4.5)}$$

Wzór na wartość liczbową momentu siły \vec{P}_i zaczepionej w punkcie A_i o współrzędnych x_i, y_i względem początku układu współrzędnych (por. rozdz. 5.1) jest

$$M_{0i} = x_i P_{iy} - y_i P_{ix} \quad (\text{porównaj wzór (5.5)})$$

Otrzymujemy więc następujące wyrażenie określające moment główny danego układu sił względem początku układu współrzędnych

$$M_0 = \sum_{i=1}^n (x_i P_{iy} - y_i P_{ix}) \quad (7.5)$$

Moduł wektora głównego oraz jego kąt kierunkowy wyznaczamy ze wzorów poniższych (por. rozdz. 4.1):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (7.6)$$

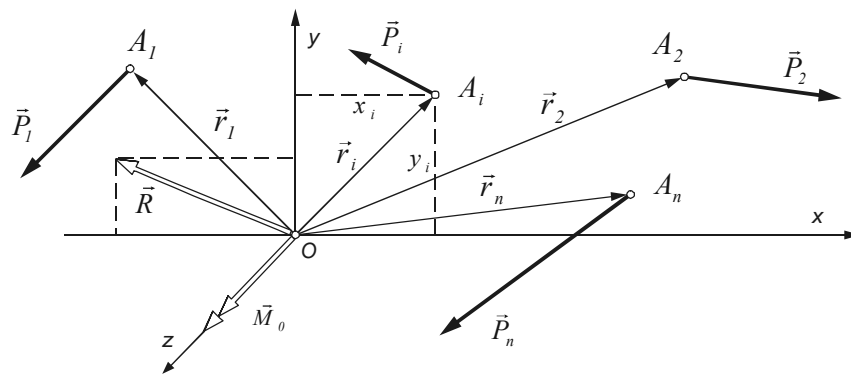
$$(x, R) = \text{arc tg} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) \quad (7.7)$$

(Uwaga: przy ustalaniu wielkości kąta kierunkowego należy wziąć pod uwagę znaki miar rzutów wektora \vec{R} na osie x i y , gdyż one decydują o tym, w której ćwiartce ten kąt się znajduje).

Gdy zastosujemy do omawianego zadania analityczny zapis wektorów i rachunek wektorowy, otrzymamy następujące wzory (por. rys. 7.3).

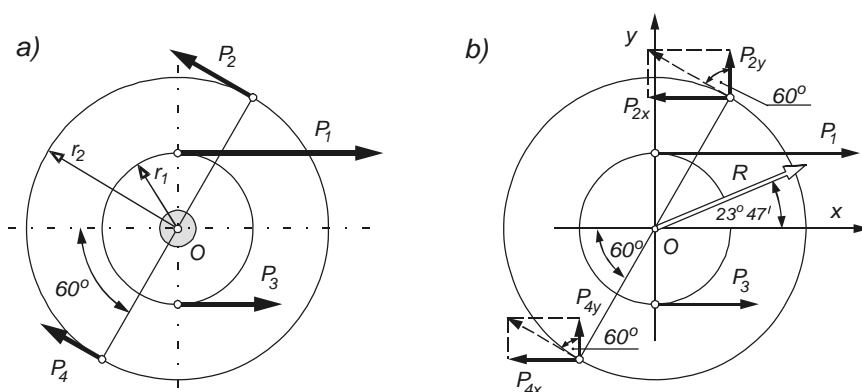
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \left(\sum_{i=1}^n P_{ix} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n P_{iy} \right) \vec{j} \quad (7.8)$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{0i} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{P}_i) \quad (7.9)$$



Rys. 7.3. Sprowadzenie płaskiego dowolnego układu sił do bieguna O

Przykład 7.1. Na rysunku 7.4 przedstawione jest schematycznie schodkowe koło pasowe i podane są siły napięcia pasów. Należy zredukować te siły, obierając za środek redukcji środek koła pasowego, czyli sprowadzić układ sił do bieguna O , przyjmując następujące dane liczbowe: $P_1 = 800\text{ N}$, $P_2 = P_3 = 400\text{ N}$, $P_4 = 200\text{ N}$; $r_1 = 14\text{ cm}$, $r_2 = 28\text{ cm}$.



Rys. 7.4

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy, posługując się szkicem (rys. 7.4b), gdzie zamiast sił P_2 i P_4 narysowano ich składowe poziome i pionowe oraz zaznaczono kąty potrzebne do obliczeń.

Składowe wektora głównego są algebraiczną sumą odpowiednich składowych sił P :

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^4 P_{ix} = P_1 - P_2 \sin 60^\circ + P_3 - P_4 \sin 60^\circ = \\ &= 800 - 400 \cdot 0,866 + 400 - 200 \cdot 0,866 = 680,4\text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= \sum_{i=1}^4 P_{iy} = 0 + P_2 \cos 60^\circ + 0 + P_4 \cos 60^\circ = \\ &= 400 \cdot 0,5 + 200 \cdot 0,5 = 300\text{ N} \end{aligned}$$

Moduł wektora głównego

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{680,4^2 + 300^2} = 743,6\text{ N}$$

Kąt kierunkowy wektora głównego obliczymy po wyznaczeniu kąta α_R

$$\alpha_R = \arctg \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = \arctg \left(\frac{300}{680,4} \right) = 23^\circ 47'$$

znaki obu składowych wektora głównego są dodatnie, wobec czego kąt kierunkowy znajduje się w pierwszej ćwiartce

$$(x, R) = \alpha_R = 23^\circ 47'$$

Moment główny względem bieguna O

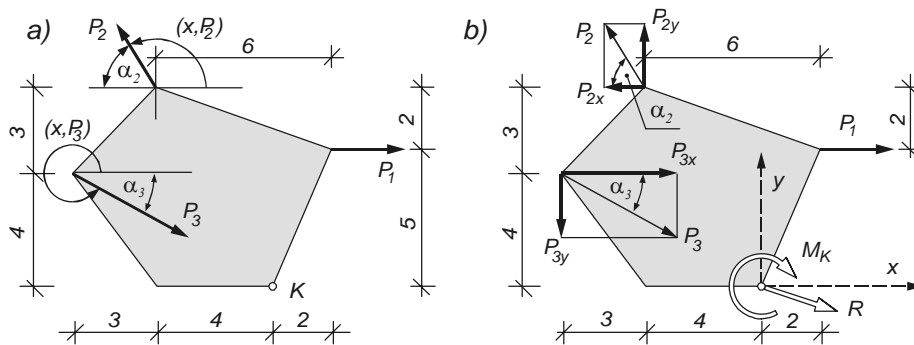
$$\begin{aligned} M_O &= \sum_{i=1}^4 M_{0i} = -P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2 + P_3 \cdot r_1 - P_4 \cdot r_2 = \\ &= -800 \cdot 0,14 + 400 \cdot 0,28 + 400 \cdot 0,14 - 200 \cdot 0,28 = 0 \end{aligned}$$

Odpowiedź

Układ redukuje się do siły równej $743,6 \text{ kN}$ zaczepionej w biegunie O , nachylonej do poziomu pod kątem $23^\circ 47'$ (por. rys. 7.4b).

Przykład 7.2. Do tarczy o kształcie pięciokąta przyłożono w jej wierzchołkach trzy siły, jak to pokazuje rysunek 7.5a. Należy sprowadzić ten układ sił do bieguna K obranego w prawym dolnym wierzchołku tarczy. Wymiary tarczy podane są na rysunku w metrach, wartości sił i ich kąty kierunkowe są następujące:

$$P_1 = 8 \text{ kN}, \quad P_2 = 10 \text{ kN}, \quad P_3 = 40 \text{ kN}; \quad (x, P_1) = 0^\circ, \quad (x, P_2) = 120^\circ, \quad (x, P_3) = 330^\circ.$$



Rys. 7.5

Rozwiązanie

1. Sporządzamy szkic do zadania: siły P_2 i P_3 rozkładamy na składowe – poziomą i pionową i otrzymujemy układ pięciu sił równoważny układowi poprzedniemu (rys. 7.5b). Kąty α_2 i α_3 są równe odpowiednio, $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$. Dla takiego układu sił obliczamy poniższe wielkości, ustalając znaki rzutów i momentów na podstawie szkicu.

Miary rzutów wektora głównego na osie układu współrzędnych:

$$R_x = \sum_{i=1}^3 (\pm P \cos \alpha) = P_1 - P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 = 8 - 10 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,866 = 37,64 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^3 (\pm P \sin \alpha) = 0 + P_2 \sin \alpha_1 - P_3 \sin \alpha_3 = 10 \cdot 0,866 - 40 \cdot 0,5 = -11,34 \text{ kN}$$

Moduł wektora głównego, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 39,31 \text{ kN}$

Kąt ostry między kierunkiem wektora głównego a osią x

$$\alpha_R = \text{arc tg} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = \text{arc tg} \left(\frac{-11,34}{37,64} \right) = 16^\circ 45'$$

Kąt kierunkowy wektora głównego (wektor główny znajduje się w IV ćwiartce)

$$(x, R) = 360^\circ - \alpha_R = 360^\circ - 16^\circ 45' = 343^\circ 15',$$

Moment główny względem bieguna K :

$$\begin{aligned} M_K &= \sum_{i=1}^5 (\pm P_i \cdot a_i) = -P_1 \cdot 5 + P_2 \cos \alpha_2 \cdot 7 - P_2 \sin \alpha_2 \cdot 4 + P_3 \sin \alpha_3 \cdot 7 - P_3 \cos \alpha_3 \cdot 4 = \\ &= -8 \cdot 5 + 10 \cos 60^\circ \cdot 7 - 10 \sin 60^\circ \cdot 4 + 40 \sin 30^\circ \cdot 7 - 40 \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 = \\ &= -38,2 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Odpowiedź

Układ wektorów \vec{R} i \vec{M}_K zaczepionych w punkcie K jest równoważny układowi sił P . Wektor \vec{R} i symbol wektora \vec{M}_K na płaszczyźnie x, y pokazano na rysunku 7.5b.

2. Obliczenia możemy sprawdzić, posługując się wzorami ogólnymi, do stosowania których nie potrzebny jest szkic – pod warunkiem że dane są współrzędne punktów zaczepienia sił, które w tym przypadku wynoszą:

Dla siły P_1 : $x_1 = 2, y_1 = 5 \text{ m}$;

dla siły P_2 : $x_2 = -4, y_2 = 7 \text{ m}$;

dla siły P_3 : $x_3 = -7, y_3 = 4 \text{ m}$.

$$R_x = \sum_{i=1}^3 P_i \cos(x, P_i) = 8 \cos 0^\circ + 10 \cos 120^\circ + 40 \cos 330^\circ = 37,64 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^3 P_i \sin(x, P_i) = 8 \sin 0^\circ + 10 \sin 120^\circ + 40 \sin 330^\circ = -11,34 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned}
M_K &= \sum_{i=1}^3 (P_{iy} \cdot x_i - P_{ix} \cdot y_i) = \\
&= P_1 \sin(x, P_1) \cdot x_1 - P_1 \cos(x, P_1) \cdot y_1 + P_2 \sin(x, P_2) \cdot x_2 - P_2 \cos(x, P_2) \cdot y_2 + \\
&+ P_3 \sin(x, P_3) \cdot x_3 - P_3 \cos(x, P_3) \cdot y_3 = \\
&= 8 \sin 0^\circ \cdot 2 - 8 \cos 0^\circ \cdot 5 + 10 \sin 120^\circ \cdot (-4) - 8 \cos 120^\circ \cdot 7 + \\
&+ 40 \sin 330^\circ \cdot (-7) - 40 \cos 330^\circ \cdot 4 = -38,2 \text{ kNm}
\end{aligned}$$

7.2. Redukcja płaskiego układu sił niezbieżnych do wypadkowej

W rozdziale 7.1 zostało pokazane, że każdy płaski układ sił można zastąpić, ogólnie rzecz biorąc, siłą \vec{R} równą wektorowi głównemu, przyłożoną do obranego punktu O oraz parą sił o momencie równym momentowi głównemu \vec{M}_0 . W szczególnym przypadku może się zdarzyć, że $\vec{R} = 0$, wtedy układ sprowadza się do pary sił o wartości równej \vec{M}_0 . Wykażemy teraz, że układ sił, w którym $\vec{R} \neq 0$ możemy zawsze sprowadzić do jednej siły, którą nazywamy wypadkową (\vec{W}). Oczywiście jest, że gdy przy $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_0 = 0$, to siłą wypadkową jest wektor główny \vec{R} zaczepiony w punkcie O ($\vec{W} = \vec{R}$).

Gdy $\vec{R} \neq 0$ i $\vec{M}_0 \neq 0$, siłą wypadkową rozpatrywanego płaskiego układu sił jest siła równa co do wartości wektorowi głównemu \vec{R} , równoległa i zgodna co do zwrotu z wektorem głównym, oddalona od jego kierunku działania o odległość a zależną od wielkości momentu \vec{M}_0 .

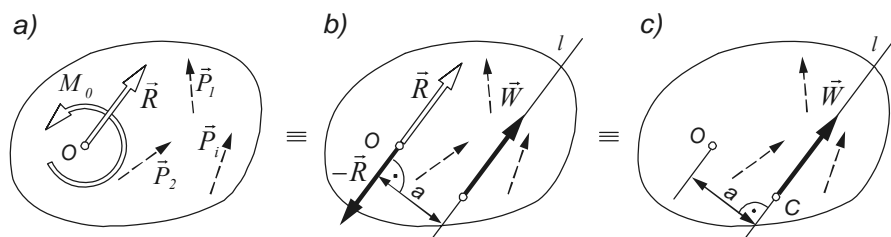
Rozumowanie prowadzące do powyższego wniosku zilustrowane jest na rysunku 7.6. Układ sił P_i sprowadzony do punktu O (rys. 7.6a) przekształcamy w ten sposób, że moment \vec{M}_0 zastępujemy parą sił $-\vec{R}$ i \vec{W} o modułach równych modułowi wektora głównego

$$|-\vec{R}| = |\vec{W}| = |\vec{R}|,$$

ramię a tej pary sił musi być wobec tego równe $a = \left| \frac{M_0}{W} \right|$

Zastępując moment \vec{M}_0 parą sił, należy pamiętać, by odcinek a , czyli ramię pary sił odmierzyć od punktu O w takim kierunku, aby znak momentu tej pary był zgodny ze

znakiem M_0 . (Na rys. 7.6 $M_0 > 0$, więc wobec tego siły $-\vec{R}$ i \vec{W} , przyłożone odpowiednio w punktach O i C muszą wywoływać obrót w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara).



Rys. 7.6. Redukcja płaskiego niezbieżnego układu sił do wypadkowej

W związku z tym, że siły \vec{R} i $-\vec{R}$ stanowią układ równoważny zeru, odejmujemy go od tarczy zgodnie z trzecią zasadą statyki i stwierdzamy, że nasz układ zredukował się do jednej tylko siły \vec{W} o prostej działania l . Siłę tę nazywamy wypadkową. Udowodniliśmy więc, że prawdziwe jest poniższe twierdzenie:

W przypadku gdy suma geometryczna układu sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ działających w jednej płaszczyźnie na ciało sztywne jest różna od zera, układ można zastąpić jedną siłą wypadkową równą co do modułu wektorowi głównemu \vec{R} i zgodną z nim co do zwrotu.

Jeżeli suma geometryczna sił układu jest równa zeru, układ może (ale nie musi) redukować się do pary sił, której wektor jest prostopadły do płaszczyzny działania tych sił.

Opierając się na powyższym twierdzeniu, mając dany płaski, niezbieżny układ sił w prostokątnym układzie odniesienia Oxy , możemy znaleźć równanie prostej działania wypadkowej tego układu (rys. 7.7).

Gdy x i y są współrzędnymi punktu zaczepienia siły wypadkowej \vec{W} , moment wypadkowej względem początku układu współrzędnych wyraża się wzorem

$$M_{0(\vec{W})} = x \cdot W_y - y \cdot W_x \quad \text{porównaj wzór (5.5)} \quad (7.10)$$

Z twierdzenia Varignona wiemy, że moment statyczny wypadkowej układu sił względem bieguna jest równy sumie momentów sił tego układu względem tego bieguna, a więc jest równy momentowi głównemu M_0 .

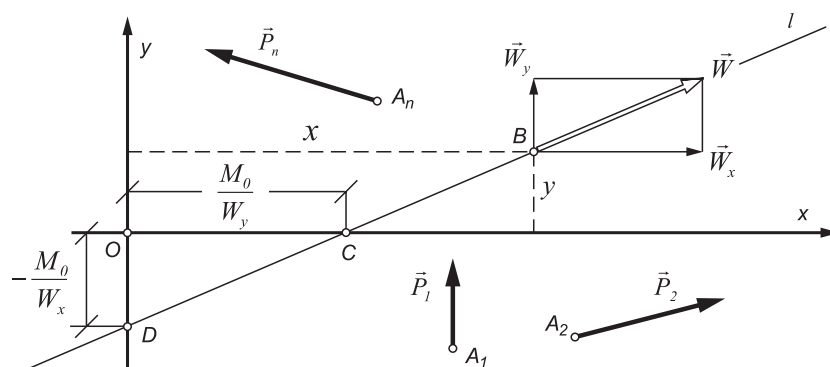
$$x \cdot W_y - y \cdot W_x = M_0 \quad (7.11)$$

Otrzymaliśmy równanie prostej l będącej linią działania wypadkowej danego układu sił.

Po przekształceniu powyższego równania otrzymamy je w postaci równania odcinkowego prostej

$$\frac{x}{\frac{M_0}{W_y}} + \frac{y}{-\frac{M_0}{W_x}} = 1 \quad (7.12)$$

gdzie wyrażenia w mianownikach: $\frac{M_0}{W_y}$ oraz $-\frac{M_0}{W_x}$ odpowiadają, odpowiednio, odcinkom OC i OD , jakie prosta działania wypadkowej odcina na osiach x i y .



Rys. 7.7. Prosta działania wypadkowej płaskiego niezbieżnego układu sił

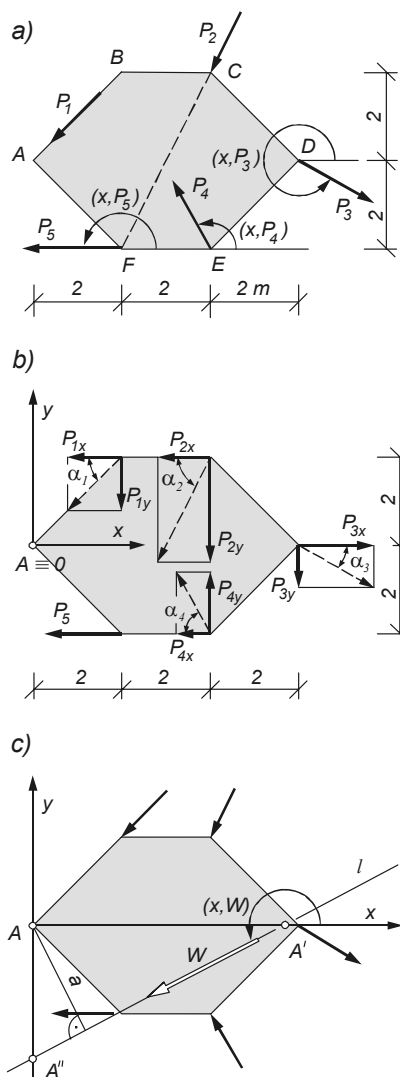
Przykład 7.3. Na tarczę w kształcie sześciokąta $ABCDEF$ działa pięć sił jak na rysunku 7.8a. Wartości sił są: $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 8 \text{ kN}$, $P_3 = 10 \text{ kN}$, $P_4 = 7 \text{ kN}$, $P_5 = 20 \text{ kN}$. Kierunek siły P_1 jest wzdłuż boku AB tarczy, kierunek siły P_2 przecina wierzchołki C i F , kąty kierunkowe sił P_3 i P_4 i P_5 wynoszą odpowiednio: 330° i 120° i 180° .

Wymiary tarczy podane są na rysunku w metrach.
Dokonać redukcji tego układu sił do wypadkowej.

Rozwiązanie

Sporządzamy szkic do zadania (rys. 7.8b), na którym wprowadzamy układ odniesienia Oxy , składowe sił P oraz kąty ostre α_i między kierunkami sił i osią x .

Potrzebne do dalszych obliczeń funkcje trygonometryczne kątów α wyznaczamy z zależności trygonometrycznych i warunków geometrycznych zadania.



Rys. 7.8

Z rysunku widać, że kąt

$$\alpha_1 = 45^\circ,$$

$$\sin \alpha_1 = \cos \alpha_1 = 0,707;$$

długość odcinka:

$$\overline{FC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,47 \text{ m},$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{FB}{FC} = \frac{4}{4,47} = 0,895,$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{BC}{FC} = \frac{2}{4,47} = 0,447;$$

$$\alpha_3 = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ,$$

$$\sin \alpha_3 = 0,5,$$

$$\cos \alpha_3 = 0,866;$$

$$\alpha_4 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\sin \alpha_4 = 0,866,$$

$$\cos \alpha_4 = 0,5.$$

Obliczamy składowe i moduł wypadkowej (stosując wzory ogólne będziemy posługiwać się szkicem dla ustalenia znaków poszczególnych wielkości):

$$\begin{aligned} W_x &= \sum_{i=1}^5 P_{ix} = -P_1 \cos \alpha_1 - P_2 \cos \alpha_2 + \\ &+ P_3 \cos \alpha_3 - P_4 \cos \alpha_4 - P_5 = \\ &= -10 \cdot 0,707 - 8 \cdot 0,447 + \\ &+ 10 \cdot 0,866 - 7 \cdot 0,5 - 20 = -25,49 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_y &= \sum_{i=1}^5 P_{iy} = -P_1 \sin \alpha_1 - P_2 \sin \alpha_2 + \\ &- P_3 \sin \alpha_3 + P_4 \sin \alpha_4 = \\ &= -10 \cdot 0,707 - 8 \cdot 0,894 + \\ &- 10 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,866 = -13,16 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \\ &= \sqrt{(-25,49)^2 + (-13,16)^2} = \\ &= 28,69 \text{ kN} \end{aligned}$$

Kąt kierunkowy wypadkowej obliczymy po wyznaczeniu kąta ostrego, jaki tworzy kierunek wypadkowej z osią x

$$\operatorname{tg} \alpha_W = \frac{W_y}{W_x} = \frac{-13,16}{-25,49} = 0,5163; \quad \alpha_W = 27,30^\circ$$

ponieważ miary obu rzutów wypadkowej na osie x i y mają znak ujemny, kąt kierunkowy znajduje się w III ćwiartce

$$(x, W) = 180^\circ + \alpha_W = 180^\circ + 27,30^\circ = 207,30^\circ$$

Obliczamy moment statyczny układu sił względem bieguna O (siła P_1 oraz składowa pozioma siły P_3 nie wpływają na wielkość tego momentu)

$$\begin{aligned} M_O &= \sum_{i=1}^6 P_i \cdot a_i = |P_{2x}| \cdot 2 - |P_{2y}| \cdot 4 - |P_{3y}| \cdot 6 + |P_{4y}| \cdot 4 - |P_{4x}| \cdot 2 - |P_5| \cdot 2 = \\ &= P_2 \cos \alpha_2 \cdot 2 - P_2 \sin \alpha_2 \cdot 4 - P_3 \sin \alpha_3 \cdot 6 + P_4 \sin \alpha_4 \cdot 4 - P_4 \cos \alpha_4 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = \\ &= 8 \cdot 0,447 \cdot 2 - 8 \cdot 0,895 \cdot 4 - 10 \cdot 0,5 \cdot 6 + 7 \cdot 0,866 \cdot 4 - 7 \cdot 0,5 \cdot 2 = -74,2 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Równanie prostej działania wypadkowej jest

$$\frac{x}{X_0} + \frac{y}{Y_0} = 1$$

Odcinki, jakie prosta działania wypadkowej odcina na osiach układu odniesienia, są:

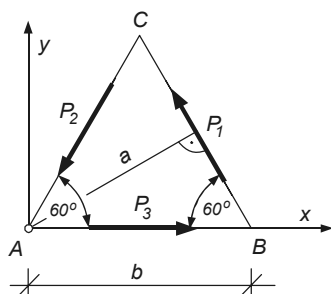
$$\begin{aligned} X_O &= \frac{M_O}{W_y} = \frac{-74,2}{-13,16} = 5,63 \text{ m}; \\ Y_O &= -\frac{M_O}{W_x} = -\frac{-74,2}{-25,49} = -2,91 \text{ m} \end{aligned}$$

Dla sprawdzenia, obliczamy jeszcze ramię działania wypadkowej względem punktu O .

$$a_O = \left| \frac{M_O}{W} \right| = \left| \frac{-74,2}{28,69} \right| = 2,59 \text{ m}$$

Odpowiedź

Wypadkowa ma moduł równy $28,69 \text{ kN}$, kąt kierunkowy $207,30^\circ$ i działa wzdłuż prostej l . Prosta l odcina na osi odciętych odcinek $A-A'$ o długości $5,63 \text{ m}$, na osi zaś rzędnych odcinek $A-A''$ o długości $2,91 \text{ m}$ (po stronie ujemnej – por. rys. 7.8c).



Rys. 7.9

Przykład 7.4. Dokonać redukcji układu trzech sił o jednakowych modułach działających wzdłuż boków tarczy równobocznej jak na rysunku 7.9.

Do obliczeń przyjąć:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P = 100 \text{ N}, \quad b = 6 \text{ m}.$$

Rozwiązanie

Sprowadzimy dany układ sił do bieguny obranego w wierzchołku A tarczy.

Miary rzutów wektora głównego na osie układu odniesienia są:

$$R_x = P - 2P \cos 60^\circ = 100 - 200 \cdot 0,5 = 0, \quad R_y = P \sin 60^\circ - P \sin 60^\circ = 0$$

Moment główny względem bieguna A

$$M_A = P \cdot a = P \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = P \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = 100 \cdot \frac{6}{2} \sqrt{3} = 519,6 \text{ Nm}$$

Odpowiedź

Układ sił redukuje się do pary sił o wartości momentu $519,6 \text{ Nm}$, obracającej tarczę w kierunku niezgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

7.3. Wykreślna redukcja płaskiego układu sił niezbieżnych.

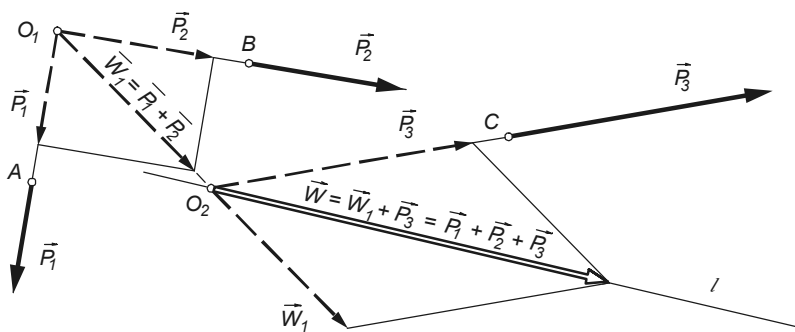
Wielobok sznurowy

Z rozważań w rozdziale poprzednim (7.2) wiemy, że w wielu przypadkach – płaski niezbieżny układ sił można zastąpić wypadkową, która ma określony moduł i kąt kierunkowy oraz ściśle określoną linię działania. Na rysunku 7.10 przedstawiono sposób wykreślny wyznaczenia wypadkowej, polegający na kolejnym dodawaniu poszczególnych sił układu przy wykorzystaniu reguły równoległoboku oraz twierdzenia mówiącego o tym, że siłę można przesuwać wzdłuż jej prostej działania. Na rysunku tym dane są trzy siły \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , i \vec{P}_3 , zaczepione w punktach A , B i C . Po zastąpieniu sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 siłą $\vec{W}_1 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ dodajemy do siły \vec{W}_1 siłę \vec{P}_3 i otrzymujemy wypadkową trzech danych sił.

$$\vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{P}_3 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$$

Wypadkowa \vec{W} ta działa wzdłuż prostej l , której położenie jest ściśle określone i wynika z danych wyjściowych.

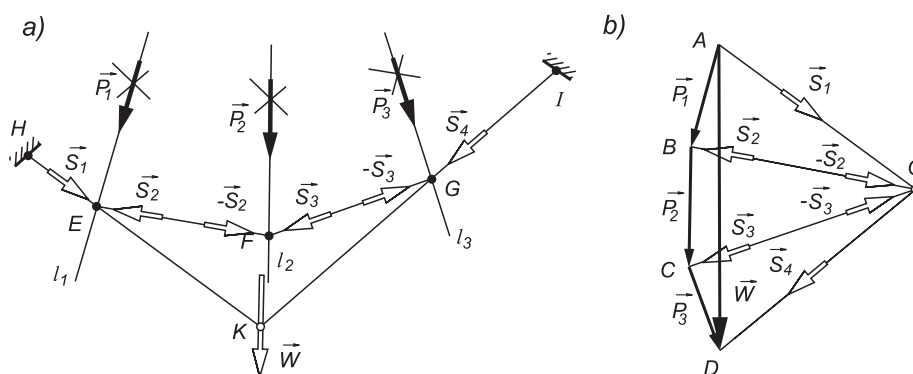
Metodę kolejnego dodawania można stosować do dowolnego układu sił nierównoległych, jednak w przypadku dużej liczby sił, a zwłaszcza sił o prostych działaniach przecinających się pod małymi kątami, prowadzi ona do dużych niedokładności rysunkowych i zawodzi, gdy proste działania sił nie przecinają się w obrębie rysunku.



Rys. 7.10. Wypadkowa płaskiego dowolnego układu sił – metoda kolejnego dodawania

Do wyznaczania wypadkowej sposobem graficznym częściej w praktyce stosowana jest metoda wykreślna zwana metodą wieloboku sznurowego.

Konstrukcja wieloboku sznurowego zilustrowana jest na rysunku 7.11, gdzie dane są trzy siły \vec{P}_1 , \vec{P}_2 i \vec{P}_3 , działające wzdłuż prostych l_1 , l_2 i l_3 leżących w jednej płaszczyźnie (rys. 7.11a). Wypadkową \vec{W} tych sił, co do wartości liczbowej i kierunku, określa bok zamykający AD wieloboku sił $ABCD$ (rys. 7.11b). Pozostaje jeszcze wyznaczenie prostej działania tej wypadkowej, które przeprowadzamy w sposób następujący:



Rys. 7.11. Konstrukcja wieloboku sznurowego: a) plan sił i wielobok sznurowy, b) wielobok sił

Zastępujemy najpierw siłę \vec{P}_1 siłami \vec{S}_1 i \vec{S}_2 o dowolnych prostych działaniach przecinających się z prostą działania siły \vec{P}_1 w dowolnym punkcie, np. punkcie E (rys. 7.11a). Moduły i zwroty sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 wyznaczamy z wieloboku sił (trójkąt AOB na rys. 7.11b). W ten sposób układ trzech sił przekształciliśmy w równoważny mu układ czterech sił \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , \vec{P}_2 i \vec{P}_3 .

Następnie zastępujemy siłę \vec{P}_2 również dwiema siłami, ale tak, by jedna z nich była równa co do wartości sile \vec{S}_2 i miała z nią wspólną prostą działania EF , ale zwrot przeciwny, czyli jest to siła $-\vec{S}_2$. W wyniku tego założenia, wektor drugiej składowej siły \vec{P}_2 (oznaczymy go przez \vec{S}_3) jest wyznaczony z trójkąta BOC ($\vec{S}_3 \equiv \vec{OC}$). Otrzymaliśmy więc układ sił równoważny danemu, złożony z pięciu sił: \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , $-\vec{S}_2$, \vec{S}_3 i \vec{P}_3 .

Trzecie przekształcenie polega na zastąpieniu siły \vec{P}_3 siłą równą $-\vec{S}_3$, działającą wzdłuż prostej FG i siłą \vec{S}_4 , której kierunek i wartość wyznaczamy z trójkąta COD na wieloboku sił (wektor \vec{OD}). Otrzymany układ sił składa się z sił następujących: \vec{S}_1 , \vec{S}_2 , $-\vec{S}_2$, \vec{S}_3 , $-\vec{S}_3$ i \vec{S}_4 . Zgodnie z trzecią zasadą statyki siły \vec{S}_2 , $-\vec{S}_2$, \vec{S}_3 i $-\vec{S}_3$ możemy z tego układu usunąć.

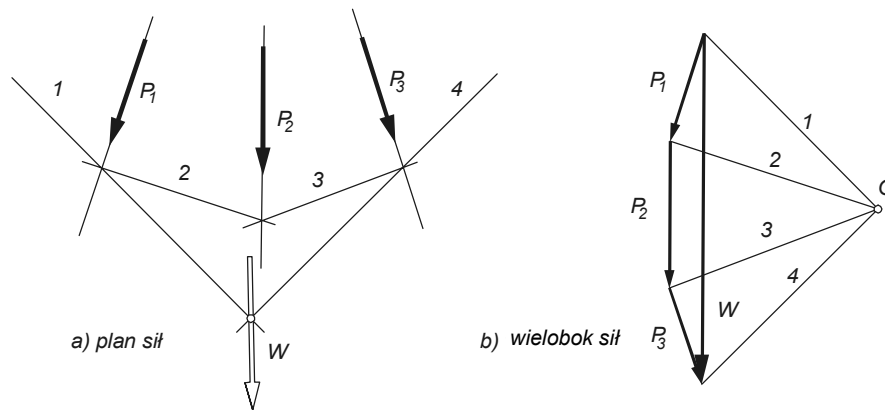
Pozostał więc układ dwóch sił \vec{S}_1 i \vec{S}_4 równoważny układowi zadanemu. Siły \vec{S}_1 i \vec{S}_4 można teraz zastąpić wypadkową \vec{W} , której prosta działania przechodzi przez punkt K przecięcia się prostych działania sił \vec{S}_1 i \vec{S}_4 i jest też wypadkową zadanego układu sił \vec{P} .

Linia łamana H,E,F,G,I na planie sił tworzy tzw. wielobok sznurowy. Jego nazwa pochodzi stąd, że gdybyśmy przez punkty H,E,F,G,I poprowadzili doskonale wiotki, pozbawiony ciężaru sznur, umocowany do nieruchomych punktów H i I , tak jak zaznaczono na rysunku, to pozostawałby on w równowadze pod działaniem sił \vec{P}_1 , \vec{P}_2 i \vec{P}_3 przyłożonych w węzłach E , F i G .

Napięcia w poszczególnych odcinkach tego sznura byłyby liczbowo równe wartościom odpowiednich sił z wieloboku sił. Tak więc odcinek HE rozciągany byłby siłą \vec{S}_1 , odcinki EF i FG odpowiednio siłami \vec{S}_2 i \vec{S}_3 , a odcinek GI siłą \vec{S}_4 .

Odcinki OA , OB , OC i OD na rys. 7.11b nazywamy promieniami wieloboku sił, a punkt O – biegunem wieloboku sił.

Stosując konstrukcję wieloboku sznurowego, w zadaniach praktycznych pomijamy rysowanie sił \vec{S} zarówno na planie, jak i na wieloboku sił. Wprowadzamy tylko niezbędne oznaczenia, numerując promienie wieloboku sznurowego, by potem w odpowiedniej kolejności przenieść je na plan sił. (por. rys 7.12).



Rys. 7.12. Wielobok sznurowy

Wskazówka: Przy obieraniu bieguna O w wieloboku sił należy zwracać uwagę na to, by promienie wieloboku nie przecinały się pod zbyt ostrymi kątami, gdyż wpływa to niekorzystnie na dokładność wyników. Kolejność nanoszenia sił na wielobok jest dowolna, ale warto narysować je w takiej kolejności, by rysunek uczynić bardziej przejrzystym. Położenie pierwszego wierzchołka wieloboku sznurowego obieramy na prostej działania pierwszej siły w zasadzie dowolnie, lecz należy liczyć się z tym, iż nie zawsze za pierwszym razem uda nam się ten wielobok narysować tak, by pierwszy i ostatni jego promień przecięły się w obrębie rysunku. Konstrukcję wieloboku sznurowego należy wtedy powtórzyć, zaczynając od innego punktu początkowego. W niektórych przypadkach trzeba też zmienić położenie bieguna wieloboku sił.

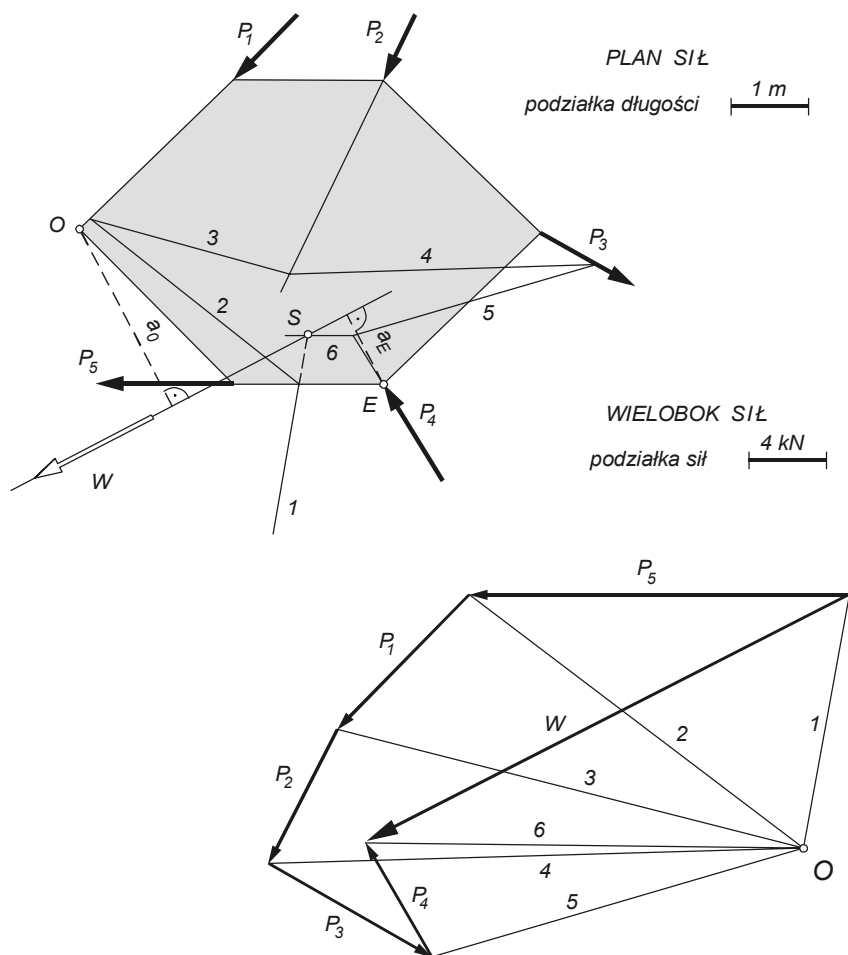
Przykład 7.5. Układ sił z przykładu 7.3 zredukować do wypadkowej za pomocą konstrukcji wieloboku sznurowego. Metodą wykreślną określić również wartości momentów statycznych tego układu sił względem biegunów O i E .

Rozwiązanie

Rozwiązanie wykreślne przedstawione jest na rysunku 7.13, gdzie po narysowaniu planu sił sporządzono ich wielobok, obrano biegun i narysowano promienie wieloboku, które ponumerowano i w odpowiedniej kolejności przeniesiono na plan sił. Na przecięciu pierwszego i ostatniego promienia otrzymano punkt S , przez który przechodzi prosta działania wypadkowej.

Przyjęto podziałkę długości: $1\text{ cm} \equiv 1\text{ m}$ oraz podziałkę sił: $1\text{ cm} \equiv 4\text{ kN}$.

Uwaga: Wykreślając wielobok sznurowy, należy pamiętać o następującej zasadzie: **proste tworzące na wieloboku sił trójkąt przecinają się na planie sił w jednym punkcie.**



Rys. 7.13

Z wieloboku sił w odpowiedniej skali odczytano: $W = 28,8 \text{ kN}$, $(x, W) = 207^\circ$.

Na planie sił odczytano długości ramion działania siły wypadkowej względem bieguny O i bieguny E : $a_O = 2,65 \text{ m}$; $a_E = 1,05 \text{ m}$,
wobec tego momenty rozpatrywanego układu sił względem biegunów O i E są:

$$M_O = a_O \cdot W = 2,65 \cdot 28,8 = 76,32 \text{ kNm} \quad (\text{moment prawoskrętny})$$

$$M_E = a_E \cdot W = 1,05 \cdot 28,8 = 30,24 \text{ kNm} \quad (\text{moment lewoskrętny})$$

7.4. Równowaga płaskiego układu sił niezbieżnych

7.4.1. Analityczne warunki równowagi płaskiego niezbieżnego układu sił

Sprowadzając płaski niezbieżny układ sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ do bieguna O , otrzymaliśmy w wyniku wektor główny $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$ przyłożony do tego bieguna oraz moment główny

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{0i},$$

które są równoważne układowi sił \vec{P} (por. rozważania w rozdz. 7.1).

Aby zachodziła równowaga dowolnego układu sił \vec{P} , zarówno wektor \vec{R} , jak i wektor \vec{M}_0 muszą być równe zeru

$$\vec{R} = 0; \quad \vec{M}_0 = 0 \quad (7.13)$$

Powyższe równania nazywamy wektorowymi równaniami równowagi.

Wektor \vec{R} leży na płaszczyźnie Oxy i ma dwie składowe: R_x i R_y . Jest on równy zeru, gdy obie jego składowe równają się zeru. Wektor \vec{M}_0 działa wzdłuż osi z , a więc ma jedną składową $M_z = M_0$ i jest równy zeru gdy $M_0 = 0$.

Tak więc dwa równania wektorowe (7.13) można zastąpić trzema równaniami skalarowymi, które nazywane są analitycznymi równaniami równowagi:

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{0i} = 0 \quad (7.14)$$

Równania te w skrócie zapisujemy często w sposób uproszczony:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_0 = 0 \quad (7.15)$$

Pierwsze dwa z powyższych równań równowagi nazywane są równaniami rzutów, a trzecie równanie – równaniem momentów.

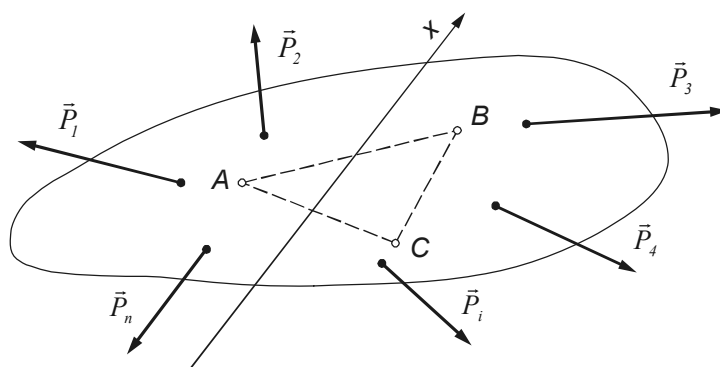
Należy dodać, że punkt O , względem którego oblicza się sumę momentów danych sił, może być obrany zupełnie dowolnie i nie musi pokrywać się z początkiem układu współrzędnych.

Analityczne warunki równowagi płaskiego niezbieżnego układu sił formułujemy następująco:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi płaskiego niezbieżnego układu sił jest, aby algebraiczne sumy rzutów sił układu na dwie osie wzajemnie nierównoległe były równe zero dla każdej osi z osobna, oraz by suma algebraiczna momentów tych sił względem dowolnie obranego bieguna była równa zero.

Omawiane tu równania równowagi można też zapisać inaczej, a mianowicie w postaci dwóch równań momentów i jednego równania rzutów; można bowiem wykazać, że

dla płaskiego dowolnego układu sił znajdującego się w równowadze, sumy momentów względem dowolnych dwóch punktów A i B są równe zero oraz suma rzutów sił na dowolną oś x , nie prostopadłą do odcinka AB , jest także równa zero (rys. 7.14).



Rys. 7.14. Płaski niezbieżny układ sił

Powyższe stwierdzenie wyrażają następujące równania, które zapiszemy w sposób uproszczony:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum X = 0 \quad (7.16)$$

Pierwsze równanie momentów oznacza, że układ jest w równowadze lub ma wypadkową przechodzącą przez punkt A . Jeżeli ponadto spełnione jest drugie równanie momentów, to układ jest w równowadze lub ma wypadkową działającą wzdłuż

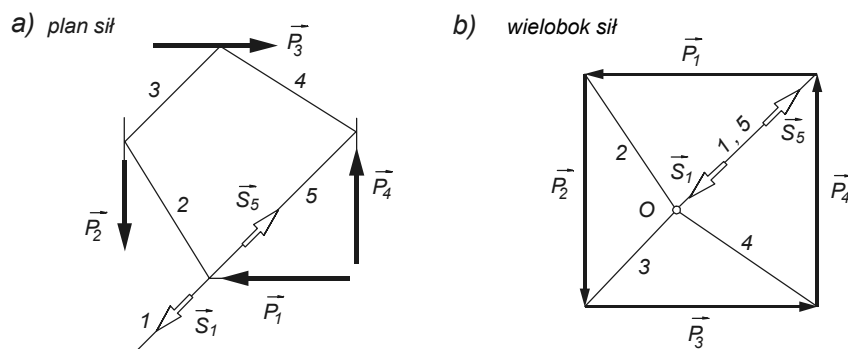
tworząc parę sił. Ramię a tej pary sił jest równe odległości między skrajnymi promieniami wieloboku sznurowego, czyli między promieniami 1 i 4. Układ sił \vec{P} został tu więc zredukowany do prawoskrętnej pary sił o wartości momentu równej $M = a \cdot S$.

W przypadku gdy ramię pary sił równa się zero, czyli gdy pierwszy i ostatni promień wieloboku sznurowego pokrywają się – działające wzdłuż nich siły równoważą się, co oznacza, że dany układ sił jest w równowadze. Wielobok sznurowy, podobnie jak wielobok sił, jest wówczas wielobokiem zamkniętym.

Rysunek 7.16 przedstawia taki właśnie układ czterech sił, dla których zarówno wielobok sił, jak i wielobok sznurowy jest zamknięty – układ ten pozostaje w równowadze.

Wyniki powyższych rozważań można sformułować następująco:

Koniecznym i wystarczającym warunkiem geometrycznym równowagi płaskiego niezbieżnego układu sił jest, by zarówno wielobok sił, jak i wielobok sznurowy były zamknięte.

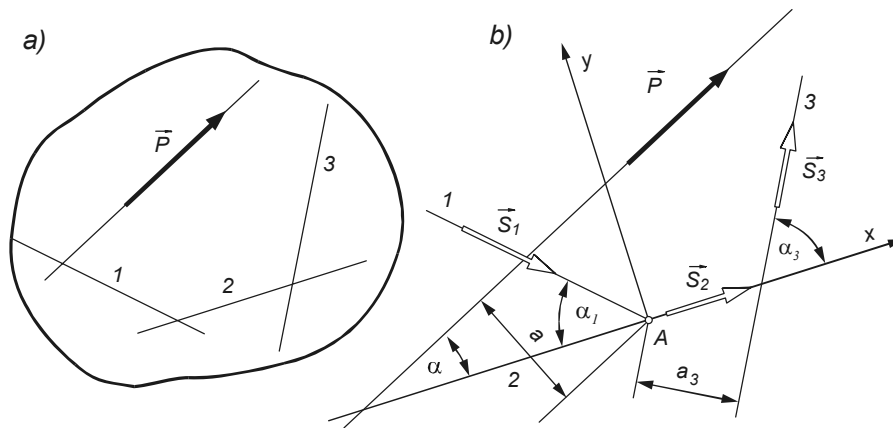


Rys. 7.16. Układ sił pozostających w równowadze

7.5. Rozkład i równoważenie siły trzema siłami o zadanych kierunkach działania

7.5.1. Rozkład siły na trzy siły składowe

Zadanie: daną siłę \vec{P} działającą na tarczę w jej płaszczyźnie rozłożyć na trzy siły \vec{S}_1 , \vec{S}_2 i \vec{S}_3 o zadanych prostych działania 1, 2, 3 leżących w płaszczyźnie tarczy i nieprzecinających się w jednym punkcie (rys. 7.17a).

Rys. 7.17. Rozkład siły \vec{P} na trzy siły składowe

Rozkład siły na trzy siły składowe jest inaczej zastąpieniem jej układem trzech sił, który jest tej sile równoważny, a więc musi być spełniona zależność wektorowa:

$$\vec{P} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 \quad (\text{siła } P \text{ jest wypadkową sił } S) \quad (7.18)$$

Rozwiązanie analityczne:

Przyjmujemy prostokątny układ osi Oxy o początku w punkcie np. A , w miejscu przecięcia się kierunków sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 , tak, by oś x pokrywała się z kierunkiem siły \vec{S}_2 . Zakładamy zwroty sił S dowolnie i układamy trzy niezależne równania. Pierwsze dwa z nich wynikają z twierdzenia o rzucie wypadkowej na oś (rzut wektora wypadkowego na oś równa się sumie algebraicznej rzutów wektorów składowych na tę oś – por. rozdz. 2.5). Trzecie równanie jest zastosowaniem twierdzenia Varignona o momencie wypadkowej układu sił względem dowolnego bieguna (moment wypadkowej płaskiego dowolnego układu sił względem dowolnie obranego bieguna równa się sumie algebraicznej momentów sił składowych względem tego bieguna – por. rozdz. 5.1).

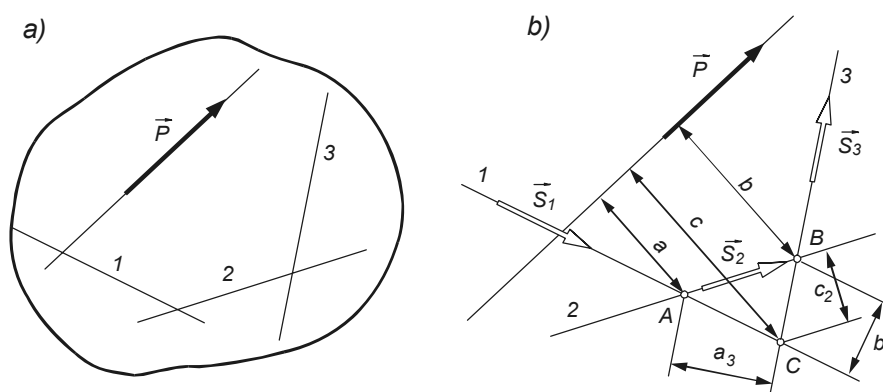
Trzy równania dla obliczenia sił S w omawianym przypadku są następujące:

$$P_x = \sum_{i=1}^n S_{ix}; \quad P \cos \alpha = S_1 \cos \alpha_1 + S_2 + S_3 \cos \alpha_3 \quad (\text{równanie rzutów})$$

$$P_y = \sum_{i=1}^n S_{iy}; \quad P \sin \alpha = -S_1 \sin \alpha_1 + S_3 \sin \alpha_3 \quad (\text{równanie rzutów})$$

$$M_{A(P)} = \sum_{i=1}^n M_{A(S_i)}; \quad -Pa = S_3 a_3 \quad (\text{równanie momentów})$$

gdzie a i a_3 są to odpowiednio ramiona sił \vec{P} i \vec{S}_3 względem bieguna A , które można wyznaczyć z warunków geometrycznych zadania. Jak widać, w ostatnim równaniu występuje tylko jedna niewiadoma \vec{S}_3 dzięki temu, że biegun A obraliśmy w punkcie przecięcia się prostych działania sił \vec{S}_1 i \vec{S}_2 . Nasuwa się więc myśl, żeby w celu ułatwienia obliczeń zrezygnować z równań rzutów, układając równania momentów względem punktów B i C obranych odpowiednio w punktach przecięcia się kierunków sił \vec{S}_2 i \vec{S}_3 oraz \vec{S}_1 i \vec{S}_3 (rys. 7.18).



Rys. 7.18. Rozkład siły na trzy składowe sposobem Rittera

Oznaczając odpowiednio ramiona sił względem biegunów tak jak na rysunku, napiszemy trzy równania momentów:

$$-Pa = S_3 a_3,$$

$$-Pb = S_1 b_1,$$

$$-Pc = -S_2 c_2,$$

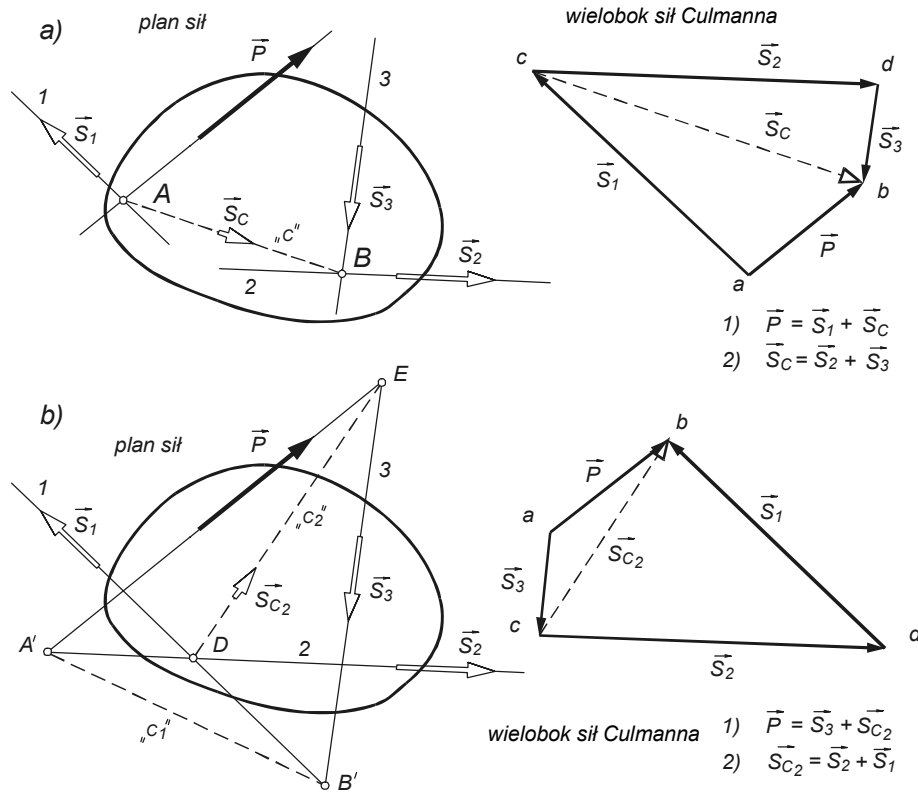
z których obliczymy siły:

$$S_1 = -\frac{Pb}{b_1}; \quad S_2 = \frac{Pc}{c_2}; \quad S_3 = -\frac{Pa}{a_3} \quad (7.19)$$

Opisany wyżej sposób rozwiązania, polegający na zastosowaniu trzech równań momentów nazywa się **sposobem Rittera**.

Znaki ujemne przy wartościach liczbowych sił oznaczają, że zwroty rzeczywiste tych sił są przeciwne do założonych.

Rozwiązanie wykreślne powyższego zadania przeprowadza się tzw. **sposobem Culmanna** na dwóch etapach (rys. 7.19).

Rys. 7.19. Sposób Culmanna rozkładu siły \vec{P} na trzy siły składowe

Na pierwszym etapie rozkładamy siłę \vec{P} na dwie siły: jedną o prostej działania pokrywającej się z którąkolwiek spośród zadanych prostych, np. z prostą l (będzie to siła \vec{S}_1) i drugą, której prosta działania przechodząc przez punkt zbieżności siły P z kierunkiem siły S_1 (punkt A) przecina również punkt zbieżności pozostałych dwóch sił (w tym przypadku punkt B) – będzie to siła \vec{S}_C (rys. 7.19a). Wektorowo zapiszemy to tak:

$$\vec{P} = \vec{S}_1 + \vec{S}_C. \quad (7.20)$$

Na drugim etapie musimy fikcyjną siłę \vec{S}_C rozłożyć na siły działające wzdłuż kierunków 2 i 3, czyli zastąpić siłami \vec{S}_2 i \vec{S}_3 .

Zapisując wektorowo tę czynność, mamy:

$$\vec{S}_C = \vec{S}_2 + \vec{S}_3 \quad (7.21)$$

Podstawiając równanie (7.21) do równania (7.20), otrzymujemy:

$$\vec{P} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3,$$

czyli warunki zadania są spełnione: siła P jest sumą sił S .

Konstrukcja wykreślna rozwiązania jest następująca: na rysunku 7.19a, na planie sił, narysowano najpierw *prostą Culmanna* łączącą punkty A i B , a na wieloboku sił, po naniesieniu w skali sił danej siły \vec{P} , utworzono trójkąt abc o bokach równoległych do prostych l i c , z którego wyznaczono moduły i zwroty sił \vec{S}_1 i \vec{S}_C . Następnie utworzono trójkąt cdb , który obrazuje rozkład siły \vec{S}_C na dwie składowe i z tego trójkąta wyznaczono moduły i zwroty sił \vec{S}_2 i \vec{S}_3 . W wieloboku sił $acdb$ obieg strzałek jest niezgodny, tzn. siła \vec{P} łączy początek pierwszego wektora (\vec{S}_1) z końcem wektora ostatniego (\vec{S}_3).

Uwaga: *prosta Culmanna* może też mieć przebieg inny, np. łączyć punkty A' i B' lub D i E (rys. 7.19b); wtedy kolejność wyznaczania sił S będzie inna, ale wyniki pozostaną te same.

7.5.2. Zrównoważenie siły trzema siłami o zadanych kierunkach działania

Zrównoważenie siły \vec{P} polega na znalezieniu takich trzech sił, które wraz z siłą \vec{P} stworzą układ znajdujący się w równowadze (zakładamy jak poprzednio, że układ sił jest płaski i kierunki trzech nieznanymi sił nie są zbieżne). Jeżeli siły równoważące siłę \vec{P} oznaczymy symbolem \vec{R} , to zadanie zapiszemy wektorowo: $\vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = 0$.

W wersji wykreślnej rozwiązania (sposobem Culmanna – patrz rys. 7.20), na pierwszym etapie równoważymy siłę \vec{P} siłami \vec{R}_1 i \vec{R}_C (wielobok sił abc), a na drugim – siłę \vec{R}_C rozkładamy na siły \vec{R}_2 i \vec{R}_3 (wielobok sił bdc). Wielobok sił $abcd$ jest w tym przypadku zamknięty (obieg strzałek musi być zgodny). Otrzymujemy w wyniku siły \vec{R} równe co do modułów siłom \vec{S} , lecz mające przeciwne do sił \vec{S} zwroty.

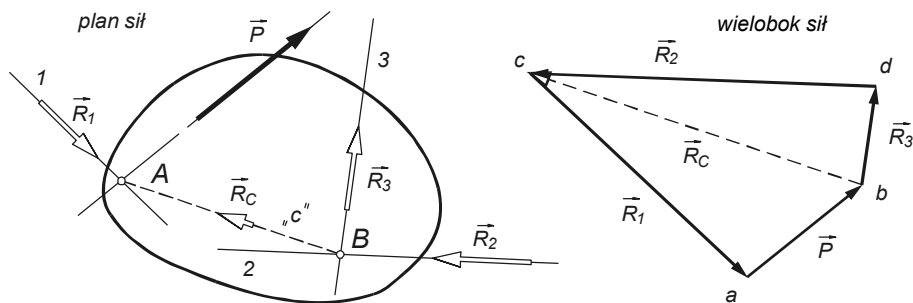
W rozwiązaniu analitycznym dla obliczenia sił R wykorzystamy rysunek 7.18, założymy tylko, że zmieniliśmy oznaczenia sił ($S \equiv R$). Rozpatrywany układ sił ma być równoważny zeru, więc zapiszemy trzy równania równowagi dla tego układu. Równania równowagi zapiszemy sposobem Rittera, by w każdym równaniu znalazła się tylko jedna siła niewiadoma:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \quad -Pa + R_3 a_3 = 0; \\ \sum M_B = 0; & \quad -Pb + R_1 b_1 = 0; \\ \sum M_C = 0; & \quad -Pc - R_2 c_2 = 0; \end{aligned}$$

Z równań tych otrzymamy:

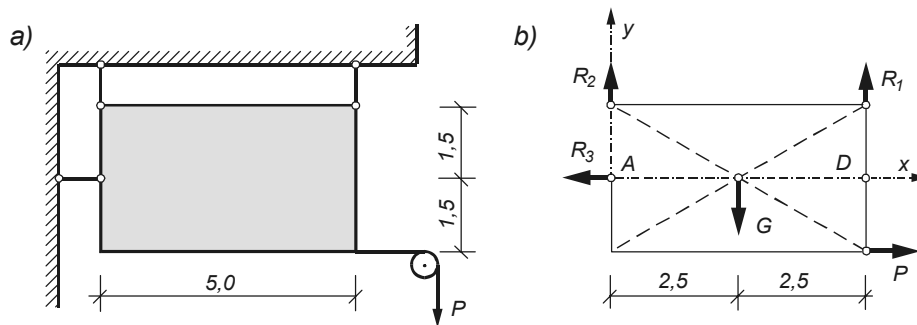
$$R_1 = \frac{P \cdot b}{b_1}; \quad R_2 = -\frac{P \cdot c}{c_2}; \quad R_3 = \frac{P \cdot a}{a_3} \quad (7.22)$$

(Porównaj równania (7.19) będące rezultatem obliczeń wartości liczbowych sił \vec{S} wynikających z rozkładu, a nie z równoważenia siły \vec{P}).



Rys. 7.20. Zrównoważenie siły trzema siłami sposobem Culmanna

Przykład 7.6. Prostokątna tarcza o ciężarze $G=50 \text{ kN}$ zawieszona jest na sztywnych, połączonych przegubowo z tarczą i podłożem prętach, jak na rysunku 7.21. Tarczę obciąża ciężar $P=100 \text{ kN}$ zawieszony na linie przeprowadzonej przez blok. Wymiary tarczy podane są w metrach. Wyznaczyć siły w prętach utrzymujących tarczę.



Rys. 7.21

Rozwiązanie analityczne

Zadanie sprowadza się do zrównoważenia układu sił zewnętrznych czynnych (sił G i P) siłami występującymi w prętach, czyli reakcjami prętów. Usuwamy więc myślowo te pręty i wstawiamy zamiast nich reakcje, przyjmując ich kierunki wzdłuż osi prętów, a zwroty – w kierunku np. "od" tarczy (znaczy to, że zakładamy, iż tarcza

jest od więzi odrywana, czyli, że pręty są rozciągane). Na rysunku 7.21b pokazany jest występujący tu układ sił (siłę G zaczepiamy w środku ciężkości tarczy), dla którego możemy napisać trzy równania równowagi i z nich wyliczyć nieznane siły:

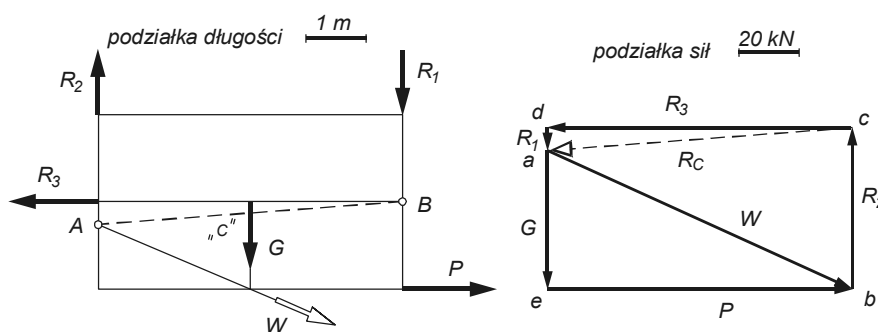
$$\sum X = 0; \quad P - R_3 = 0 \rightarrow R_3 = P = 100 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0; \quad 1,5P - 2,5G + 5R_1 = 0 \rightarrow R_1 = \frac{1}{5}(-1,5 \cdot 100 + 2,5 \cdot 50) = -5 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0; \quad -5R_2 + 1,5P + 2,5G = 0 \rightarrow R_2 = \frac{1}{5}(1,5 \cdot 100 + 2,5 \cdot 50) = 55 \text{ kN}$$

$$\text{Sprawdzenie: } \sum P_{iy} = R_2 + R_1 - G = 55 + (-5) - 50 = 0$$

Rozwiązanie wykreślne metodą Culmanna pokazane jest na rysunku 7.22. Wyznaczona z trójkąta sił aeb wypadkowa W sił G i P zrównoważona jest tu w pierwszym etapie siłą R_2 i R_C (trójkąt a,b,c na wieloboku sił), a w drugim etapie rozwiązania siła R_C rozłożona jest na siły R_1 i R_3 (trójkąt c,d,a na tym samym rysunku). Na planie sił na rysunku 7.22 siły reakcji R naniesione są z właściwymi zwrotami wynikającymi z konstrukcji wieloboku sił.



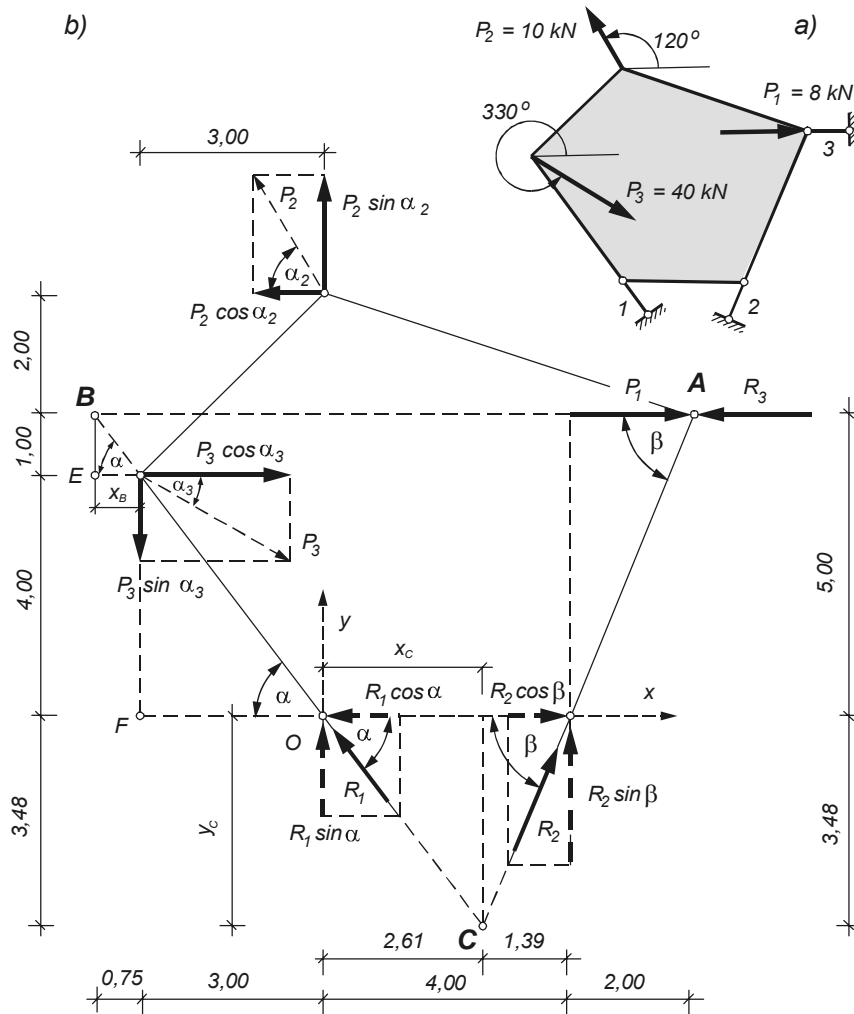
Rys. 7.22

Odpowiedź

Pręt nr 1 jest ściskany siłą 5 kN , pręty 2 i 3 są rozciągane siłami odpowiednio 55 i 100 kN .

Przykład 7.7. Wyznaczyć oddziaływania więzów utrzymujących w równowadze pięciokątną tarczę pokazaną na rysunku 7.23a, na którą działają siły 8 , 10 i 40 kN o kątach kierunkowych, odpowiednio: 0° , 120° i 330° (jest to układ sił z przykładu 7.2; wymiary tarczy podane są na rys. 7.5). Zadanie wykonać:

1) stosując równania równowagi w postaci dwóch równań rzutów i jednego równania momentów; 2) sposobem Rittera; 3) sposobem Culmanna.



Rys. 7.23

Rozwiązanie

Ad. 1 – Rysujemy szkic do zadania (rys. 7.23b), na którym usunięto myślowo więzy i założono, że reakcje więzów działają „do” tarczy, to znaczy, że tarcza jest do podłoża za pośrednictwem tych więzów dociskana. Wprowadzamy prostokątny układ odniesienia Oxy , zakładając jego początek w lewym dolnym narożniku tarczy.

- 1.1 – Biorąc pod uwagę wymiary tarczy, obliczamy funkcje trygonometryczne kątów nachylenia więzi 1 i 2 do poziomu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \text{ wobec czego } \sin \alpha = 0,8; \quad \cos \alpha = 0,6 \quad (\alpha = 59^{\circ}2')$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{2}, \text{ wobec czego } \sin \beta = 0,9285; \quad \cos \beta = 0,3714 \quad (\beta = 75^{\circ}46')$$

Kąty nachylenia sił P_2 i P_3 do osi x są odpowiednio równe: $\alpha_2 = 180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$,
 $\alpha_3 = 360^{\circ} - 330^{\circ} = 30^{\circ}$.

- 1.2 – Zapisujemy równania równowagi:

$$\sum X = 0; \quad -R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta - R_3 + P_1 - P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad R_1 \sin \alpha + R_2 \sin \beta + P_2 \sin \alpha_2 - P_3 \sin \alpha_3 = 0$$

$$\sum M_O = 0; \quad 4R_2 \sin \beta + 5R_3 - 5P_1 + 7P_2 \cos \alpha_2 - 4P_3 \cos \alpha_3 + 3P_3 \sin \alpha_3 = 0$$

Wstawiając dane do powyższych równań, mamy:

$$\left. \begin{aligned} -0,6R_1 + 0,3714R_2 - R_3 + 8 - 10 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,866 &= 0 \\ 0,8R_1 + 0,9285R_2 + 10 \cdot 0,866 - 40 \cdot 0,5 &= 0 \\ 4 \cdot 0,9285R_2 + 5R_3 - 5 \cdot 8 + 10 \cdot 0,5 \cdot 7 - 40 \cdot 0,866 \cdot 4 + 40 \cdot 0,5 \cdot 3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- 1.3 – Rozwiązujemy powyższy układ trzech równań z trzema niewiadomymi i otrzymujemy:

$$R_1 = 22,15 \text{ kN}, \quad R_2 = -6,89 \text{ kN}, \quad R_3 = 21,82 \text{ kN}$$

Otrzymane wyniki wskazują na to, że zwroty reakcji R_1 i R_3 są takie, jak przyjęto do obliczeń, zaś zwrot siły R_2 jest przeciwny do założonego ($R_2 < 0$).

Ad. 2 – W celu wyznaczenia oddziaływań posługujemy się tym samym szkicem nansząc na niego bieguny Rittera.

- 2.1 – Wyznaczamy położenie biegunów Rittera:

Biegun A znajduje się w miejscu przecięcia kierunków reakcji R_2 i R_3 czyli w prawym, górnym wierzchołku tarczy.

Biegun B jest na przecięciu kierunków sił R_1 i R_3 ; ażeby określić jego położenie, obliczymy długość odcinka x_B , wykorzystując zależność wynikającą z podobieństwa trójkątów prostokątnych, których wierzchołki przy kącie prostym oznaczono na rysunku 7.23 literami E i F .

$$\frac{x_B}{1} = \frac{3}{4}; \rightarrow x_B = 0,75 \text{ m}.$$

Bieguna C znajduje się w punkcie przecięcia sił R_1 i R_2 . Położenie tego bieguna określimy z układu równań

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_C}{x_C} &= \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} \\ \frac{y_C}{4 - x_C} &= \operatorname{tg} \beta = \frac{5}{2} \end{aligned} \right\},$$

po rozwiązaniu którego otrzymujemy: $x_C = 2,61 \text{ m}$, $y_C = 3,48 \text{ m}$

2.2 – Piszemy równania równowagi Rittera i rozwiązujemy je po kolei, gdyż w każdym z nich mamy tylko jedną niewiadomą:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-5R_1 \cos \alpha - 6R_1 \sin \alpha + 1P_3 \cos \alpha_3 + 9P_3 \sin \alpha_3 + 2P_2 \cos \alpha_2 - 6P_2 \sin \alpha_2 = 0;$$

$$-R_1(5 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,8) + 40 \cdot 0,866 + 40 \cdot 9 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,5 \cdot 2 - 10 \cdot 0,866 \cdot 6 = 0;$$

$$R_1 = 22,14 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$5R_2 \cos \beta + 7,75R_2 \sin \beta + 2P_2 \cos \alpha_2 + 3,75P_2 \sin \alpha_2 + 1P_3 \cos \alpha_3 - 0,75P_3 \sin \alpha_3 = 0$$

$$R_2(5 \cdot 0,3714 + 0,9285 \cdot 7,75) + 10(0,5 \cdot 2 + 0,866 \cdot 3,75) + 40(0,866 - 0,5 \cdot 0,75) = 0$$

$$R_2 = -6,86 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$8,48R_3 - 8,48P_1 + 10,48P_2 \cos \alpha_2 - 2,61P_2 \sin \alpha_2 + 5,61P_3 \sin \alpha_3 - 7,48P_3 \cos \alpha_3 = 0$$

$$8,48R_3 - 8,48 \cdot 8 + 10(10,48 \cdot 0,5 - 2,61 \cdot 0,866) + 40(5,61 \cdot 0,5 - 7,48 \cdot 0,866) = 0$$

$$R_3 = 21,81 \text{ kN}$$

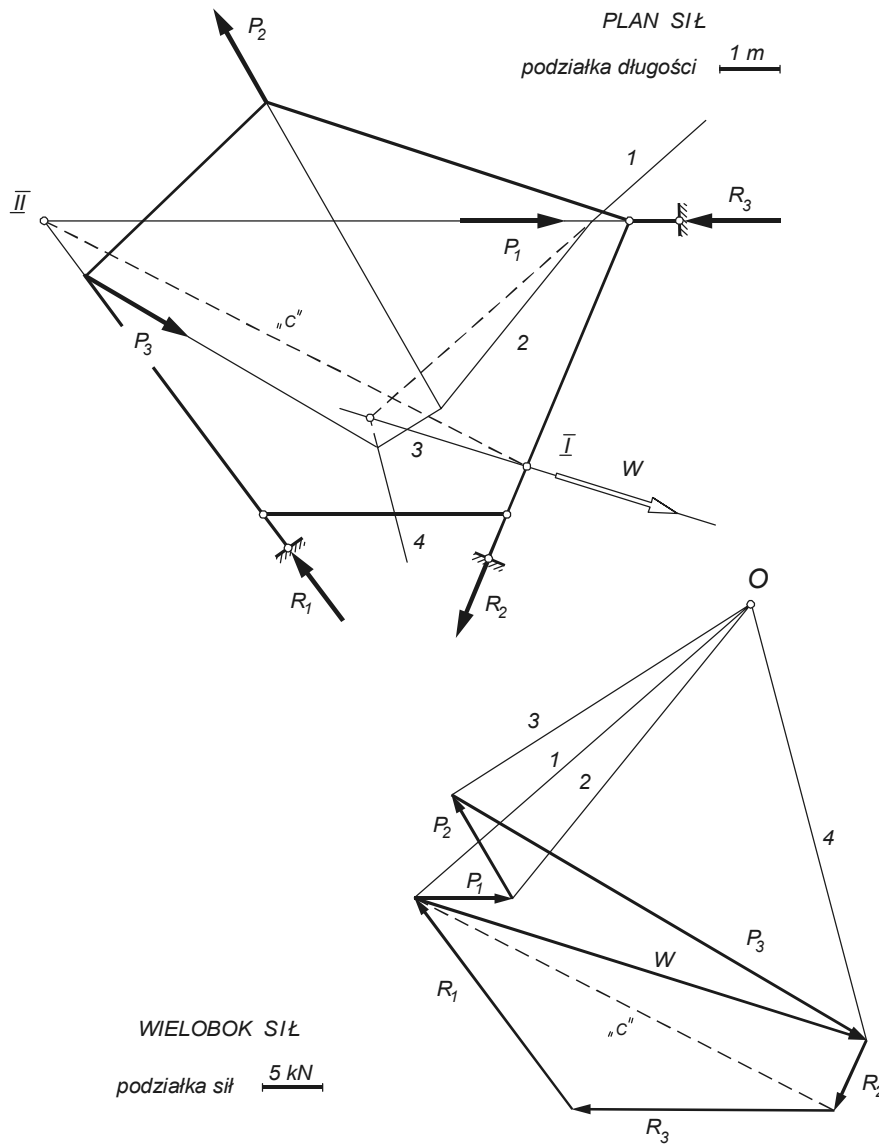
(Uwaga: W przypadku gdy istnieją tylko dwa bieguny Rittera, czyli gdy kierunki dwóch więzi są do siebie równoległe, zamiast trzeciego równania momentów wykorzystujemy równanie rzutów. Dobrze jest, gdy oś rzutów jest prostopadła do kierunków równoległych więzi – wtedy do równania rzutów nie wchodzi oddziaływanie tych więzi).

Ad. 3 – Rozwiązanie wykreślne metodą Culmanna pokazane jest na rysunku 7.24.

Pierwszym krokiem w rozwiązaniu jest zastąpienie układu sił P wypadkową W za pomocą wieloboku sznurowego. Następnie wypadkowa ta jest zrównoważona trzema reakcjami podłoża, czyli siłami współliniowymi z kierunkami więzi. (W pierwszym etapie zrównoważono tu siłę W siłą R_2 i siłą działającą wzdłuż prostej „c”, a w drugim etapie – siłę działającą wzdłuż prostej „c” rozłożono na siły R_3 i R_1). Ze zwrotów sił otrzymanych na wieloboku Culmanna widać, że więź nr 2 jest

rociągana, a dwie pozostałe więzi są ściskane. Wartości bezwzględne oddziaływań odczytane w przyjętej podziałce sił wynoszą:

$$R_1 = 22 \text{ kN}, \quad R_2 = 6,6 \text{ kN}, \quad R_3 = 21,7 \text{ kN}.$$



Rys. 7.24

7.6. Przestrzenny układ sił niezbieżnych – redukcja i równowaga

7.6.1. Sprowadzenie przestrzennego dowolnego układu sił do bieguna

W rozdziale 7.1 opisano sprowadzenie płaskiego układu sił do bieguna, czyli zastąpienie tego układu sił układem równoważnym składającym się z wektora głównego \vec{R} i momentu głównego \vec{M}_0 . Podobnie możemy sprowadzić do obranego bieguna dowolny przestrzenny układ sił.

Załóżmy, że do ciała sztywnego przyłożone są w punktach A_1, A_2, \dots, A_n siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ dowolnie skierowane w przestrzeni (rys. 7.25a). Każdą z tych sił możemy przesunąć równolegle i zaczepić w obranym dowolnie środku redukcji O , dodając do układu parę sił o momencie równym momentowi siły względem punktu O . W wyniku otrzymujemy układ sił zbieżnych $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ przyłożonych do punktu O oraz n par sił o momentach równych odpowiednio $\vec{M}_{01}, \vec{M}_{02}, \dots, \vec{M}_{0i}, \dots, \vec{M}_{0n}$, przy czym \vec{M}_{0i} oznacza tu moment siły \vec{P}_i przyłożonej w punkcie A_i względem punktu O zwanego środkiem redukcji.

Siły zbieżne \vec{P}_i przyłożone do punktu O zastąpić możemy, jak wiadomo, jedną siłą \vec{R} równą ich sumie geometrycznej. Podobnie układ par sił \vec{M}_{0i} równoważny jest jednej parze sił o momencie \vec{M}_0 równym sumie geometrycznej momentów tych par (rys. 7.25b).

Mamy więc:

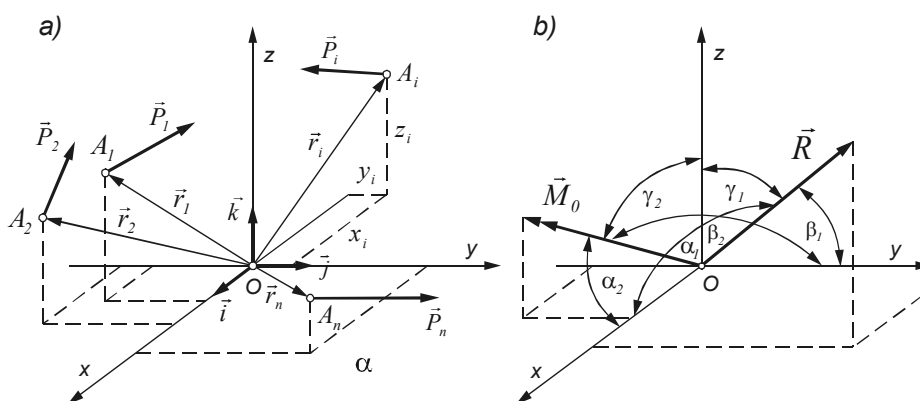
$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \\ \vec{M}_0 &= \sum_{i=1}^n \vec{M}_{0i} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{P}_n = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{P}_i)\end{aligned}\tag{7.23}$$

gdzie $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ są promieniami wodzącymi sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$.

Stwierdzamy zatem:

Przestrzenny dowolny układ sił działających na ciało sztywne można zastąpić siłą \vec{R} przyłożoną do dowolnie wybranego środka redukcji O , równą sumie geometrycznej wszystkich sił układu oraz parą o momencie \vec{M}_0 równym sumie geometrycznej momentów tych sił względem środka redukcji.

Przypomnijmy tu, że siłę \vec{R} nazywamy wektorem głównym, moment \vec{M}_0 zaś momentem głównym względem środka O (rys. 7.25b). Gdy zmienimy środek redukcji, moment główny \vec{M} układu ulegnie również zmianie, natomiast wektor główny \vec{R} pozostanie niezmienny.



Rys. 7.25. Sprowadzenie przestrzennego układu sił do początku układu współrzędnych

W przypadku gdy znane są składowe sił w prostokątnym układzie współrzędnych, a środkiem redukcji jest początek tego układu, składowe wektora \vec{R} i składowe wektora \vec{M}_0 znajdujemy z poniższych wzorów

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz}; \quad (7.24)$$

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_{ix} = \sum_{i=1}^n (P_{iz}y_i - P_{iy}z_i) \quad (7.25)$$

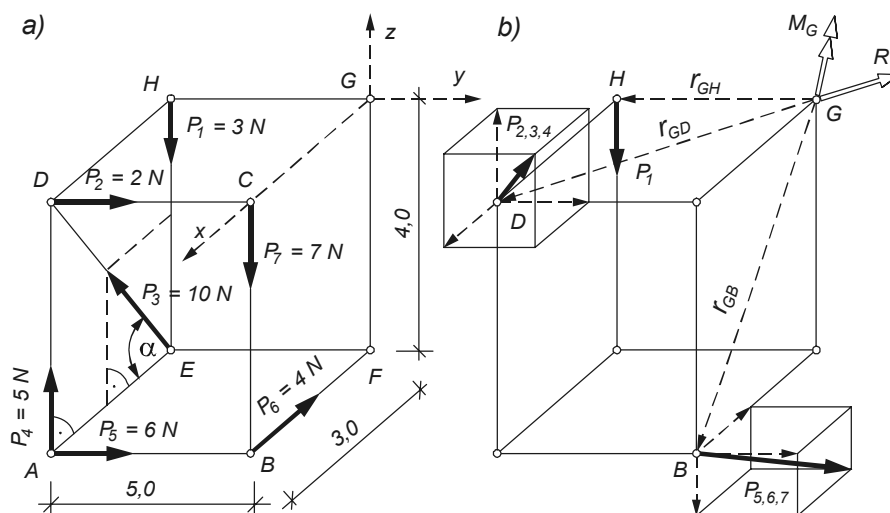
$$M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_{iy} = \sum_{i=1}^n (P_{ix}z_i - P_{iz}x_i) \quad (7.26)$$

$$M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (P_{iy}x_i - P_{ix}y_i) \quad (7.27)$$

gdzie x_i, y_i, z_i są współrzędnymi punktów zaczepienia sił \vec{P}_i .

Moduł i kąty, jakie tworzą te wektory z osiami x, y i z , obliczamy ze wzorów podanych wcześniej – porównaj wzory (2.8) i (2.9).

Przykład 7.8. Przestrzenny układ sił działających na bryłę prostopadłościenną w sposób pokazany na rysunku 7.26a sprowadzić do bieguna G . Wymiary prostopadłościanu podane są w metrach.



Rys. 7.26

Rozwiązanie

Sprowadzenie układu sił do bieguna polega na zastąpieniu tego układu dwoma wektorami: wektorem głównym zaczepionym w biegunie redukcji oraz wektorem momentu głównego względem bieguna redukcji.

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , które wynikają z wymiarów trójkąta prostokątnego EAD :

$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8, \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,6$$

Miary rzutów wektora głównego na osie x , y i z są:

$$R_x = \sum P_{ix} = P_3 \cos \alpha - P_6 = 10 \cdot 0,6 - 4 = 2 \text{ N}$$

$$R_y = \sum P_{iy} = P_2 + P_5 = 2 + 6 = 8 \text{ N}$$

$$R_z = \sum P_{iz} = -P_1 + P_3 \sin \alpha + P_4 - P_7 = -3 + 10 \cdot 0,8 + 5 = 3 \text{ N},$$

Moduł wektora głównego

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{2^2 + 8^2 + 3^2} = 8,77 \text{ N},$$

Kąty, jakie wektor główny tworzy z osiami układu współrzędnych:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{2}{8,77} = 0,2280; \quad \alpha = 76^\circ 49'$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{8}{8,77} = 0,9122; \quad \beta = 24^\circ 11'$$

$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{3}{8,77} = 0,3420; \quad \gamma = 69^\circ 59'$$

Składowe momentu statycznego układu sił względem biegun G są równe momentom tego układu względem poszczególnych osi x, y, z . Obliczymy je, posługując się szkicem (rys. 7.26a), ustalając znaki zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej (ramiona działania poszczególnych sił oznaczono przez a):

$$M_x = \sum (\pm a_i \cdot P_i) = 5P_1 - 5P_3 \sin \alpha - 5P_4 + 4P_5 = 3 \cdot 5 - 8 \cdot 5 - 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = -26 \text{ Nm}$$

$$M_y = \sum (\pm a_i \cdot P_i) = 4P_6 + 3P_7 - 4P_3 \cos \alpha - 3P_4 = 4 \cdot 4 + 7 \cdot 3 - 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -2 \text{ Nm}$$

$$M_z = \sum (\pm a_i \cdot P_i) = 5P_3 \cos \alpha + 3P_5 + 3P_2 = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 54 \text{ Nm}$$

Moduł momentu:

$$M_G = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-26)^2 + (-2)^2 + 54^2} = 59,96 \text{ Nm}$$

Kąty między \vec{M}_G i osiami układu współrzędnych:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_M &= \frac{M_x}{M_G} = \frac{-26}{59,96} = -0,4336; & \alpha_M &= 115^\circ 41' \\ \cos \beta_M &= \frac{M_y}{M_G} = \frac{-2}{59,96} = -0,0333; & \beta_M &= 91^\circ 54' \\ \cos \gamma_M &= \frac{M_z}{M_G} = \frac{54}{59,96} = 0,9006; & \gamma_M &= 25^\circ 45'\end{aligned}$$

Wyznaczenie momentu \vec{M}_G przeprowadzimy, również posługując się rachunkiem wektorowym, pozostawiając czytelnikowi sprawdzenie obliczeń za pomocą wzorów ogólnych (7.25), (7.26) i (7.27):

W celu uproszczenia obliczeń – siły układu możemy przesunąć wzdłuż ich prostych działania i zgrupować tak, by stworzyły zamiast układu siedmiu – układ trzech sił: w wierzchołku D zaczepimy siły P_2 , P_3 i P_4 , w wierzchołku B siły P_5 , P_6 i P_7 , a wierzchołku H zostanie siła P_1 (por rys. 7.26b). Otrzymamy:

$$\vec{P}_{2,3,4} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 13\vec{k}, \quad \vec{P}_{5,6,7} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}, \quad \vec{P}_1 = -3\vec{k}.$$

Promienie wodzące łączące biegun G z punktami zaczepienia powyższych trzech sił w zapisie analitycznym przedstawiają się następująco:

$$\vec{r}_{GD} = 3\vec{i} - 5\vec{j}, \quad \vec{r}_{GB} = 3\vec{i} - 4\vec{k}, \quad \vec{r}_{GH} = -5\vec{j}$$

Moment statyczny \vec{M}_G jest sumą iloczynów wektorowych promieni wodzących i sił:

$$\vec{M}_G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 13 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ -4 & 6 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -26\vec{i} - 2\vec{j} + 54\vec{k}$$

Tak więc ostatecznie: siła \vec{R} zaczepiona w biegunie G i moment \vec{M}_G stanowią układ równoważny układowi sił \vec{P} .

7.6.2. Równowaga przestrzennego dowolnego układu sił

W związku z tym, że dowolny układ sił działających na ciało sztywne możemy zastąpić wektorem głównym \vec{R} oraz momentem głównym \vec{M}_0 (por. rozdz. 7.5.1), ogólne warunki równowagi można zapisać w postaci równań wektorowych następująco:

$$\vec{R} = 0; \quad \vec{M}_0 = 0 \quad (7.28)$$

Stwierdzamy zatem:

Przestrzenny dowolny układ n sił jest w równowadze, jeżeli jego wektor główny \vec{R} jest równy zeru oraz gdy moment główny \vec{M}_0 układu względem dowolnego punktu O jest równy zeru.

Z powyższych wektorowych warunków równowagi możemy otrzymać odpowiadające im analityczne warunki równowagi. W przypadku bowiem, gdy ma być $\vec{R} = 0$ i $\vec{M}_0 = 0$, rzuty tych wektorów na trzy osie prostokątnego układu współrzędnych muszą się równać zeru. Obierając jako punkt O początek układu współrzędnych, otrzymujemy sześć równań równowagi przestrzennego, niezbieżnego układu sił:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

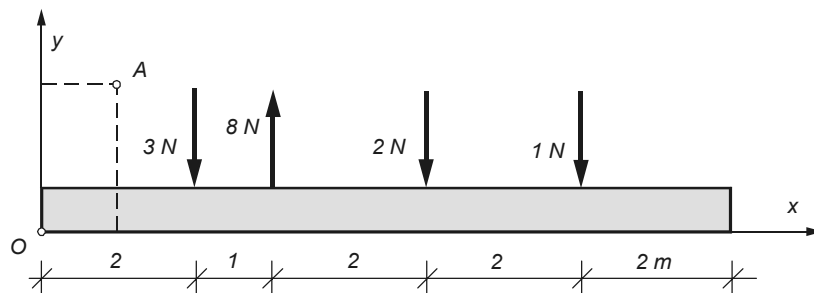
Analityczne warunki równowagi przestrzennego niezbieżnego układu sił formułujemy następująco

Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi przestrzennego niezbieżnego układu sił jest, by sumy algebraiczne rzutów wszystkich sił układu na trzy osie oraz sumy algebraiczne momentów tych sił względem trzech osi były równe zeru dla każdej osi z osobna.

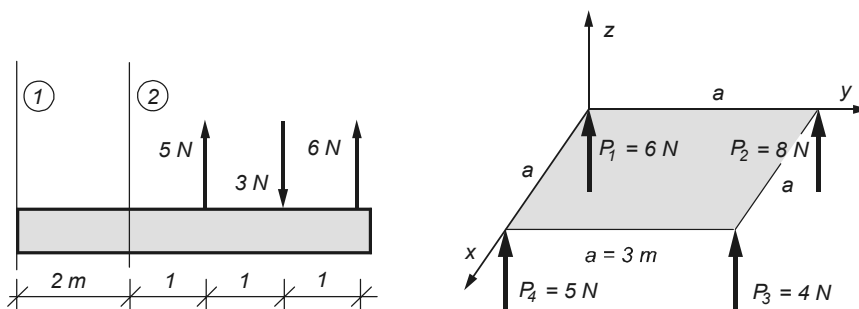
Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, możemy powiedzieć, że gdy rozpatrujemy ciało sztywne, które znajduje się w równowadze pod wpływem działania dowolnego przestrzennego układu sił, to ilość niewiadomych w tym zadaniu powinna być co najwyżej równa sześciu ($n \leq 6$), aby zadanie to mogło być rozwiązane w oparciu o prawa statyki.

7.7. Pytania i zadania do rozdziału 7

1. Na czym polega sprowadzenie układu sił do bieguna?
2. Jakie są możliwe przypadki redukcji płaskiego niezbieżnego układu sił?
3. Równania równowagi płaskiego niezbieżnego układu sił.
4. Graficzne warunki równowagi płaskiego niezbieżnego układu sił.
5. Na czym polega konstrukcja wieloboku sznurowego?
6. Rozkład siły na trzy siły o danych kierunkach działania. Omówić metodę Rittera i Culmanna.
7. Metodą analityczną zrównoważyć układ sił równoległych dwiema siłami, z których jedna działa wzdłuż osi x , a kierunek działania drugiej przechodzi przez punkt A o współrzędnych $(1,2)$ (rys. 7.27).
8. Układ sił równoległych rozłożyć na dwie siły składowe o kierunkach 1 i 2 metodą analityczną oraz graficzną (rys. 7.28).
9. Cztery siły równoległe są zaczepione w wierzchołkach kwadratu o boku a i działają prostopadłe do jego płaszczyzny. Znaleźć wypadkową tych sił (rys. 7.29).



Rys. 7.27



Rys. 7.28

Rys. 7.29

8. Wyznaczanie oddziaływań

Wszystkie budowle powinny być ustrojami geometrycznie niezmiennymi. **Ustrój geometrycznie niezmienny to taki ustrój, który nie ma stopni swobody (również żaden z elementów tego ustroju nie ma możliwości poruszania się względem elementów sąsiednich). Można też powiedzieć, że geometrycznie niezmienny jest taki ustrój, którego geometrycznego kształtu nie można zmienić bez deformacji jego elementów.**

Pod wpływem sił zewnętrznych czynnych działających na ustrój, w miejscach podparcia tego ustroju, powstają oddziaływania (reakcje), czyli siły zewnętrzne bierno. Oddziaływanie jest to działanie podpory na ustrój (a nie odwrotnie). Gdy rozpatrujemy siły, z jakimi jedna część ustroju działa na drugą, mamy do czynienia z siłami wewnętrznymi. Zarówno oddziaływania, jak i siły wewnętrzne, zgodnie z warunkami pracy konstrukcji, stanowią układ sił równoważący układ sił znanych (zewnętrznych czynnych), działających na ustrój lub na myślowo odciętą, bądź wyciętą jego część.

Ustrój geometrycznie niezmienny nazywamy statycznie wyznaczalnym, jeśli oddziaływania więzi zewnętrznych i wewnętrznych w tym ustroju można wyznaczyć, wykorzystując wyłącznie równania równowagi ciała sztywnego. W przeciwnym przypadku ustrój jest statycznie niewyznaczalny.

W rozdziale niniejszym omówione zostały jedynie zagadnienia dotyczące rozwiązywania ustrojów prętowych statycznie wyznaczalnych.

Ogólny tok postępowania przy wyznaczaniu oddziaływań w ustrojach statycznie wyznaczalnych jest następujący:

- A. **W przypadku rozwiązania sposobem analitycznym:**
 - I. Rysujemy schemat statyczny ustroju wraz z zadaniem obciążeniem.
 - II. Obieramy układ osi rzutów.
 - III. Oswobodzamy ustrój, tzn. usuwamy myślowo więzy i zastępujemy ich oddziaływania odpowiednimi siłami uogólnionymi (siły skupione, momenty), przy czym:
 1. Siłę o nieznanym kierunku zastępujemy zwykle jej składowymi, równoległymi do obranych osi rzutów.
 2. Zakładamy zwroty sił szukanych, co jest konieczne ze względu na wypisanie równań równowagi. Zwroty te możemy zakładać dowolnie; jeśli zwrot założyliśmy zgodnie z rzeczywistością, to otrzymamy w wyniku obliczeń wartość liczbową tej siły dodatnią; jeśli zaś niezgodnie – to ujemną.

Wymaga to porównywania odpowiedzi ze szkicem przedstawiającym oswobodzony ustrój, na którym są zaznaczone zwroty sił uogólnionych.

- IV. Ustalamy liczbę niewiadomych i liczbę równań równowagi.
- V. Układamy równania równowagi.
- VI. Rozwiązujemy układ równań równowagi.

B. W przypadku rozwiązania sposobem wykreślnym:

- I. Rysujemy w obranej podziałce długości plan sił.
- II. Oswobadzamy ustrój od więzi.
- III. Wyznaczamy niewiadome wykorzystując geometryczne warunki równowagi.

Przy obliczeniach statycznych należy przyjąć i stosować zasadę, by gdy tylko to jest możliwe, przeprowadzać na każdym etapie rozwiązania – czy to analitycznego, czy geometrycznego – całkowitą lub częściową kontrolę wyników, bądź to przez zastosowanie równań kontrolujących, bądź przez wykorzystanie kryteriów geometrycznych.

Przy rozwiązywaniu zadań sposobem analitycznym, wskazane jest przeprowadzać rozwiązanie na liczbach ogólnych, co pozwala na przedyskutowanie wyników i rozpatrzenie tzw. przypadków szczególnych, jak również na sprawdzenie, czy prawidłowe są wymiary poszczególnych elementów rozwiązania oraz czy odpowiedzi otrzymano we właściwych jednostkach.

Oprócz kontroli za pomocą ścisłych kryteriów należy zawsze poddać wyniki krytycznej ocenie w oparciu o wyczucie techniczne.

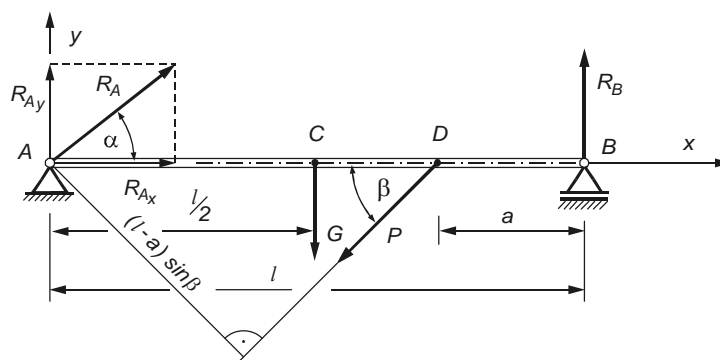
W rozdziale poprzednim, w oparciu o powyższe uwagi rozpatrywano równowagę prostokątnej i pięciokątnej *tarczy* obciążonej siłami zewnętrznymi (porównaj przykład 7.6 i 7.7). Oddziaływania więzi pojedynczych wyznaczone zostały tam zarówno sposobem analitycznym, jak i graficznym. W rozdziale niniejszym, w poniższych przykładach, wyznaczone będą reakcje podpór w *ustrojach prętowych* statycznie wyznaczalnych.

Przykład 8.1. Jednorodna, pozioma belka AB o ciężarze równym G oparta jest na podporze przegubowej nieprzesuwnej końcem A oraz na podporze przegubowej przesuwnej końcem B . W punkcie D do belki przyłożona jest siła P o prostej działania tworzącej kąt β z osią belki (rys. 8.1). Wyznaczyć reakcje podpór.

Dane liczbowe: $G = 100 \text{ N}$, $P = 500 \text{ N}$, $\beta = 60^\circ$, $l = 2 \text{ m}$, $a = 0,5 \text{ m}$.

Rozwiązanie

Układ osi rzutów obierzemy tak, jak to jest zaznaczone na rysunku 8.1. Początek układu znajduje się w punkcie A , oś x pokrywa się z osią belki, a oś y jest do niej prostopadła. Na belkę działają następujące siły: siła ciężkości G przyłożona w środku ciężkości C belki, siła P (są to siły zewnętrzne czynne) oraz reakcje podpór R_A i R_B (siły zewnętrzne bierne). Kierunek reakcji R_B jest znany, gdyż jak wiemy jest prostopadły do płaszczyzny, po której może przesuwać się podpora, a więc w tym przypadku pionowy. Kierunek reakcji R_A w przegubie A nie jest znany, wiadomo tylko, że przechodzi przez środek przegubu, tj. punkt A . Kąt, jaki kierunek reakcji R_A tworzy z osią x oznaczmy przez α .



Rys. 8.1

Reakcję R_A rozłożymy na dwie składowe działające wzdłuż osi prostokątnego układu współrzędnych. Składowe tej reakcji zostały oznaczone przez R_{Ax} i R_{Ay} . Mamy więc trzy niewiadome R_B , R_{Ax} i R_{Ay} , które wyznaczymy z trzech równań równowagi.

Układ sił działających na belkę jest układem płaskim niezbieżnym, więc aby belka znajdowała się w równowadze, muszą być spełnione trzy analityczne warunki równowagi, wyrażone poniższymi równaniami (por. rozdz. 7.4.1).

Równanie rzutów na oś poziomą

$$\sum X = 0; \quad R_{Ax} - P \cos \beta = 0 \quad (8.1)$$

Równanie rzutów na oś pionową

$$\sum Y = 0; \quad R_{Ay} - G - P \sin \beta + R_B = 0 \quad (8.2)$$

Równanie momentów względem punktu A

$$\sum M_A = 0; \quad -G l/2 - P(l-a) \sin \beta + R_B l = 0 \quad (8.3)$$

Do równania (8.3) nie wchodzi niewiadome R_{Ax} i R_{Ay} , gdyż ramię reakcji R_A względem punktu A jest równe zero. Ramię siły P , jak wynika z rysunku, jest równe $(l-a) \sin \beta$.

Z rozwiązania układu równań (8.1, 8.2, 8.3) otrzymujemy:

$$R_{Ax} = P \cos \beta, \quad R_{Ay} = \frac{G}{2} + P \frac{a}{l} \sin \beta, \quad R_B = \frac{G}{2} + P \left(1 - \frac{a}{l}\right) \sin \beta$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy

$$R_{Ax} = 250 \text{ N}, \quad R_{Ay} = 158 \text{ N}, \quad R_B = 374 \text{ N}.$$

Wyznamy jeszcze wartość bezwzględna reakcji R_A oraz kąt α , który tworzy ona z osią x :

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 296 \text{ N}$$

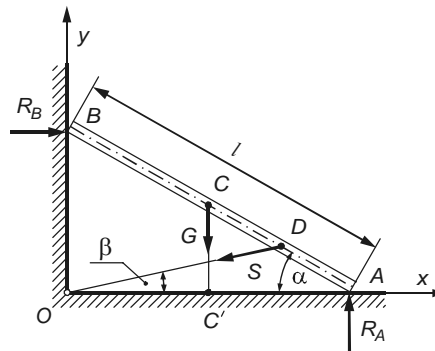
$$\cos \alpha = \frac{R_{Ax}}{R_A} = 0,845, \quad \alpha = 32,3^\circ$$

Przykład 8.2. Jednorodny pręt AB o ciężarze G i długości równej l opiera się końcem B o gładką, pionową ścianę, a końcem A o gładką, poziomą podłogę, przy czym oś pręta tworzy z poziomem kąt α (rys. 8.2). W punkcie D pręt przymocowany jest liną OD do nieruchomego punktu O . Lina ta tworzy z poziomem kąt β . Obliczyć reakcje w punktach styku pręta ze ścianą i podłogą oraz napięcie liny OD .

Rozwiązanie

Na pręt działają następujące siły: siła ciężkości G przyłożona w środku ciężkości pręta, reakcja liny S oraz reakcje w punktach styku A i B oznaczone odpowiednio przez R_A i R_B . Ponieważ płaszczyzny pozioma i pionowa, o które opierają się końce pręta są gładkie, linie działania reakcji R_A i R_B są prostopadłe do tych płaszczyzn.

Układ sił jest płaski niezbieżny. Napiżemy równania równowagi tego układu. (układ osi współrzędnych obrano tak, jak pokazuje rys. 8.2).



Rys. 8.2

Równanie rzutów na oś Ox

$$\sum X = 0; \quad R_B - S \cos \beta = 0 \quad (8.4)$$

Równanie rzutów na oś Oy

$$\sum Y = 0; \quad R_A - S \sin \beta - G = 0 \quad (8.5)$$

Równanie momentów względem punktu O

$$\sum M_0 = 0; \quad R_A \cdot \overline{OA} - G \cdot \overline{OC'} - R_B \cdot \overline{OB} = 0$$

Ponieważ

$$\overline{OA} = \overline{AB} \cos \alpha = l \cos \alpha, \quad \overline{OC'} = \overline{BC} \cos \alpha = \frac{l}{2} \cos \alpha, \quad \overline{OB} = \overline{AB} \sin \alpha = l \sin \alpha$$

zatem po podstawieniu, mamy

$$R_A \cdot l \cos \alpha - G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha - R_B \cdot l \sin \alpha = 0$$

a po przekształceniu

$$R_A - \frac{G}{2} - R_B \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad (8.6)$$

Rozwiązując układ równań (8.4, 8.5, 8.6), otrzymujemy:

$$S = \frac{G}{2 \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}$$

$$R_A = G \frac{2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{2(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}, \quad R_B = \frac{G}{2(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}$$

Z powyższych wzorów wynika, że równowaga pręta jest możliwa tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta > 0, \quad \text{tj. gdy} \quad \alpha > \beta.$$

W przeciwnym bowiem przypadku lina OD byłaby ściskana ($S < 0$), a reakcje w punktach styku pręta z płaszczyznami musiałyby mieć zwroty przeciwne do zaznaczonych na rysunku 8.2, co jest niemożliwe, gdyż pręt opiera się swobodnie o ścianę i podłogę.

Aby i wtedy pręt pozostawał w równowadze, należałoby linę OD zastąpić prętem, a w punktach A i D umieścić prowadnice umożliwiające zmianę kierunku reakcji. W przypadku gdy $\alpha = \beta$, tj. gdy punkt D leży w środku długości pręta, równowaga w ogóle nie jest możliwa, gdyż na siły S , R_A i R_B otrzymujemy wówczas wartości nieskończenie wielkie.

Przykład 8.3. Rama ACB opiera się w punktach A i B na podporach przegubowych nieprzesuwnych. Składa się ona z dwóch symetrycznych części połączonych przegubem C (taki ustrój nazywamy trójprzegubem). Rama obciążona jest siłami P_1 , P_2 i P_3 , (rys. 8.3). Obliczyć reakcje podpór. Ciężar własny konstrukcji pominąć.

Dane liczbowe: $P_1 = 1,0 \text{ kN}$, $P_2 = 2,0 \text{ kN}$, $P_3 = 1,0 \text{ kN}$, $l = 1,0 \text{ m}$, $h = 3,0 \text{ m}$, $a = 0,6 \text{ m}$, $b = 0,2 \text{ m}$, $c = 2,0 \text{ m}$.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy najpierw równowagę całej ramy ACB . Działają na nią następujące siły zewnętrzne: P_1 , P_2 i P_3 oraz reakcje w przegubach A i B . Ponieważ kierunki tych reakcji nie są znane, rozłożymy je na składowe wzdłuż osi współrzędnych x i y obranych tak, jak na rysunku 8.3.

Równania równowagi napiszemy w następującej postaci:

$$\text{równanie momentów względem punktu } A \quad \left(\sum M_A = 0 \right)$$

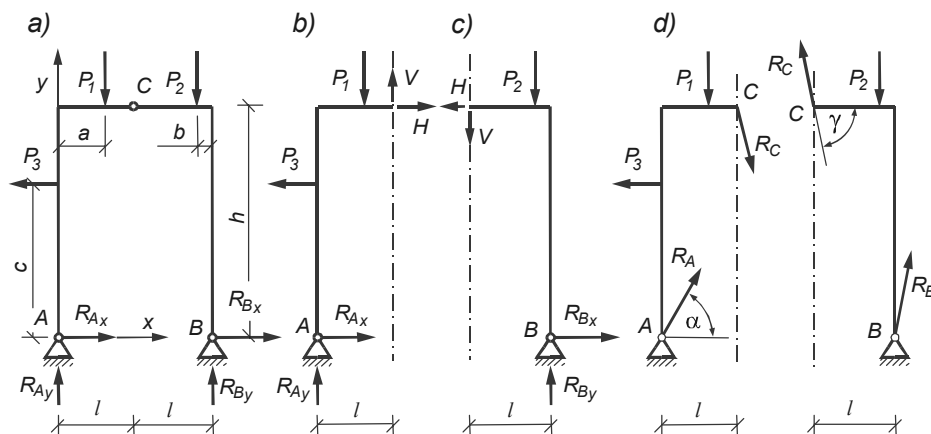
$$P_3 \cdot c - P_1 \cdot a - P_2(2l - b) + R_{By} \cdot 2l = 0 \quad (8.7)$$

$$\text{równanie momentów względem punktu } B \quad \left(\sum M_B = 0 \right)$$

$$P_2 \cdot b + P_1(2l - a) + P_3 \cdot c - R_{Ay} \cdot 2l = 0 \quad (8.8)$$

$$\text{równanie rzutów na oś } x \quad \left(\sum X = 0 \right)$$

$$-P_3 + R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \quad (8.9)$$



Rys. 8.3

Z równań (8.7, 8.8, 8.9) nie możemy obliczyć wszystkich czterech niewiadomych (R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Bx} , R_{By}), gdyż jest ich więcej niż równań. Dla ramy ACB traktowanej jako całość wykorzystaliśmy już wszystkie równania równowagi, możemy jednak rozpatrzyć teraz równowagę jej lewej lub prawej części, co da nam nowe trzy równania.

Ułożymy te równania np. dla części lewej (na lewo od przegubu C , w którym myślowo przecięliśmy ramę). Na część lewą ramy działają następujące siły: P_1 , P_3 , reakcja w przegubie A , której składowe oznaczyliśmy przez R_{Ax} i R_{Ay} oraz reakcja w przegubie C stanowiąca oddziaływanie prawej części ramy na lewą (rys. 8.3b). Kierunek tej reakcji jest nieznan. Wobec tego rozłożymy ją na dwie składowe: poziomą H i pionową V , wprowadzając tym samym jeszcze dwie nowe niewiadome. Dla części lewej mamy więc trzy równania równowagi i dwie nowe niewiadome, które musimy w tych równaniach uwzględnić. Ogółem mamy więc sześć niewiadomych i tyleż równań dla ich wyznaczenia.

Równania równowagi lewej części ramy (rys. 8.3b) zapiszemy następująco:

równanie momentów względem punktu C ($\sum M_C = 0$)

$$R_{Ax}h - R_{Ay}l - P_3(h - c) + P_1(l - a) = 0 \quad (8.10)$$

równanie rzutów na oś poziomą ($\sum X = 0$)

$$R_{Ax} + H - P = 0 \quad (8.11)$$

równanie rzutów na oś pionową ($\sum Y = 0$)

$$R_{Ay} + V - P_1 = 0 \quad (8.12)$$

Po wstawieniu danych liczbowych zadania otrzymujemy układ równań

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot R_{By} - 2,2 &= 0 \\ -2 \cdot R_{Ay} + 3,8 &= 0 \\ R_{Ax} + R_{Bx} - 1 &= 0 \\ 3 \cdot R_{Ax} - R_{Ay} - 0,6 &= 0 \\ R_{Ax} + H - 1 &= 0 \\ R_{Ay} + V - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

W wyniku rozwiązania tego układu otrzymamy:

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= 0,83 \text{ kN}, & R_{Ay} &= 1,90 \text{ kN}, \\ R_{Bx} &= 0,17 \text{ kN}, & R_{By} &= 1,10 \text{ kN}, \\ V &= -0,90 \text{ kN}, & H &= 0,17 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Znak ujemny przy wartości V oznacza, że składowa pionowa reakcji R_C ma zwrot przeciwny do założonego.

Wartości bezwzględne i kąty nachylenia reakcji podpór i reakcji w przegubie C są:

$$\begin{aligned} R_A &= \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 2,07 \text{ kN}, & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = 2,2809, & \alpha &= 66,32^\circ \\ R_B &= \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = 1,11 \text{ kN}, & \operatorname{tg} \beta &= \frac{R_{By}}{R_{Bx}} = 6,5987, & \beta &= 81,38^\circ \\ R_C &= \sqrt{H^2 + V^2} = 0,92 \text{ kN}, & \operatorname{tg} \gamma &= \frac{V}{H} = 5,3989, & \gamma &= 79,50^\circ. \end{aligned}$$

Na rysunku 8.3c przedstawiono prawą część ramy oraz siły zewnętrzne, jakie na nią działają. Składowe reakcje w przegubie C , w myśl zasady działania i przeciwdziałania, są równe co do wartości i przeciwnie co do zwrotu składowym odpowiedniej reakcji działającej na lewą część ramy (rys. 8.3b). W układzie równań (8.7, 8.8, 8.9), sił tych nie braliśmy pod uwagę, gdyż dla ramy ACB rozpatrywanej jako całość są one siłami wewnętrznymi i znoszą się wzajemnie. Na rysunku 8.3d reakcje i siły wewnętrzne w przegubie C naniesiono z właściwymi zwrotami.

Przykład 8.4. Pręt AB utwierdzony jest końcem B w sposób sztywny i obciążony następująco: siłą skupioną $P = 16 \text{ kN}$ działającą pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do osi belki, parą sił o wartości momentu $M = 6 \text{ kNm}$, obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym o intensywności $q = 2 \text{ kN/m}$ i obciążeniem ciągłym zmieniającym się liniowo od zera do wartości $q_0 = 3 \text{ kN/m}$ (rys. 8.4a). Wyznaczyć reakcje utwierdzenia sztywnego.

*Rozwiązanie
analityczne*

Obciążenie rozłożone można zastąpić siłą skupioną będącą wypadkową tego obciążenia. Całkowita wartość obciążenia trójkątnego jest równa wielkości pola trójkąta obciążenia i wynosi

$$Q_1 = \frac{1}{2} q_0 \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ kN}$$

Jest to siła przechodząca przez środek ciężkości trójkąta, czyli w odległości $l/3$ od podstawy tego trójkąta. Całkowita wartość obciążenia rozłożonego równomiernie jest równa polu prostokąta obciążenia, wynosi

$$Q_2 = q \cdot l = 2 \cdot 6 = 12 \text{ kN}$$

i przechodzi przez środek ciężkości prostokąta, w odległości $l/2$ od punktów B i C. Siły zewnętrzne czynne są to więc siły Q_1, Q_2, P i M (rys. 8.4b).

Działaniu tych sił czynnych przeciwstawia się podpora, odbierając belce w miejscu podparcia wszystkie trzy stopnie swobody: możliwość przemieszczania się w pionie (reakcja V_B), możliwość przemieszczania się w poziomie (reakcja H_B) i możliwość obrotu (moment podporowy M_B).

Trzy równania równowagi tego płaskiego, niezbieżnego układu sił zapiszemy następująco:

$$\text{Równanie rzutów na oś } x \left(\sum X = 0 \right): \quad P \cos \alpha - H_B = 0$$

$$\text{Równanie rzutów na oś } y \left(\sum Y = 0 \right): \quad P \sin \alpha - Q_1 - Q_2 + V_B = 0$$

$$\text{Równanie momentów względem punktu } B \left(\sum M_B = 0 \right):$$

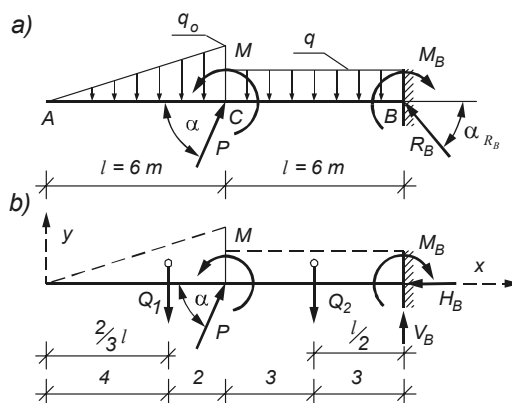
$$Q_1(l + l/3) + Q_2 l/2 - P \sin \alpha \cdot l + M - M_B = 0.$$

Z równań powyższych, po wstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$H_B = P \cos \alpha = 8 \text{ kN}$$

$$V_B = Q_1 + Q_2 - P \sin \alpha = 7,14 \text{ kN}$$

$$M_B = Q_1(l + l/3) + Q_2 l/2 - P \sin \alpha \cdot l + M = 30,86 \text{ kNm}$$



Rys. 8.4

Wykonamy sprawdzenie obliczeń, pisząc równanie momentów względem punktu A

$$\sum M_A = -Q_1 \cdot \frac{2}{3}l + P \sin \alpha \cdot l + M - Q_2 \left(l + \frac{l}{2} \right) - M_B + V_B \cdot 2l = 0,005 \cong 0$$

Obliczymy moduł i kąt nachylenia reakcji R_B do osi x

$$R_B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2} = 10,72 \text{ kN}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{R_B} = \frac{V_B}{H_B} = 0,8928 \rightarrow \alpha_{R_B} = 41,76^\circ$$

Rozwiązanie graficzne

1. Rysujemy plan sił, na którym moment skupiony przedstawiamy w postaci pary sił. Może to być na przykład para sił F działających na ramieniu $r = 2,0 \text{ m}$. Moduły sił F muszą wtedy wynosić $F_1 = F_2 = M/r = 6/2 = 3 \text{ kN}$. Siły te muszą mieć odpowiednie zwroty – zgodne z kierunkiem działania momentu M (rys. 8.5a). Siły rozłożone zastępujemy ich wypadkowymi, siłami Q_1 i Q_2 – jak wyżej, w rozwiązaniu analitycznym.
2. Rysujemy wielobok sił a, b, c, d, e, f (rys. 8.5b), z którego otrzymujemy moduł i kąt kierunkowy wypadkowej oraz wielobok sznurowy $1, 2, 3, 4, 5, 6$, dzięki któremu znajdujemy na planie sił prostą działania wypadkowej.
3. Układ sił czynnych, zastąpiony teraz jedną tylko siłą \vec{W} , równoważymy siłą \vec{R} , współliniową z siłą \vec{W} , mającą ten sam co siła \vec{W} kierunek, ale przeciwny zwrot.
4. Sprowadzamy siłę \vec{R} do punktu B , czyli przesuwamy ją równoległe i otrzymujemy równoważny sile \vec{R} układ dwóch wektorów: reakcję \vec{R}_B i moment \vec{M}_B o module $M_B = R \cdot a$. Są to szukane reakcje utwierdzenia sztywnego.

Wyniki metody wykreślnej otrzymane z powyższego rozwiązania (odczytane z rysunku) są następujące:

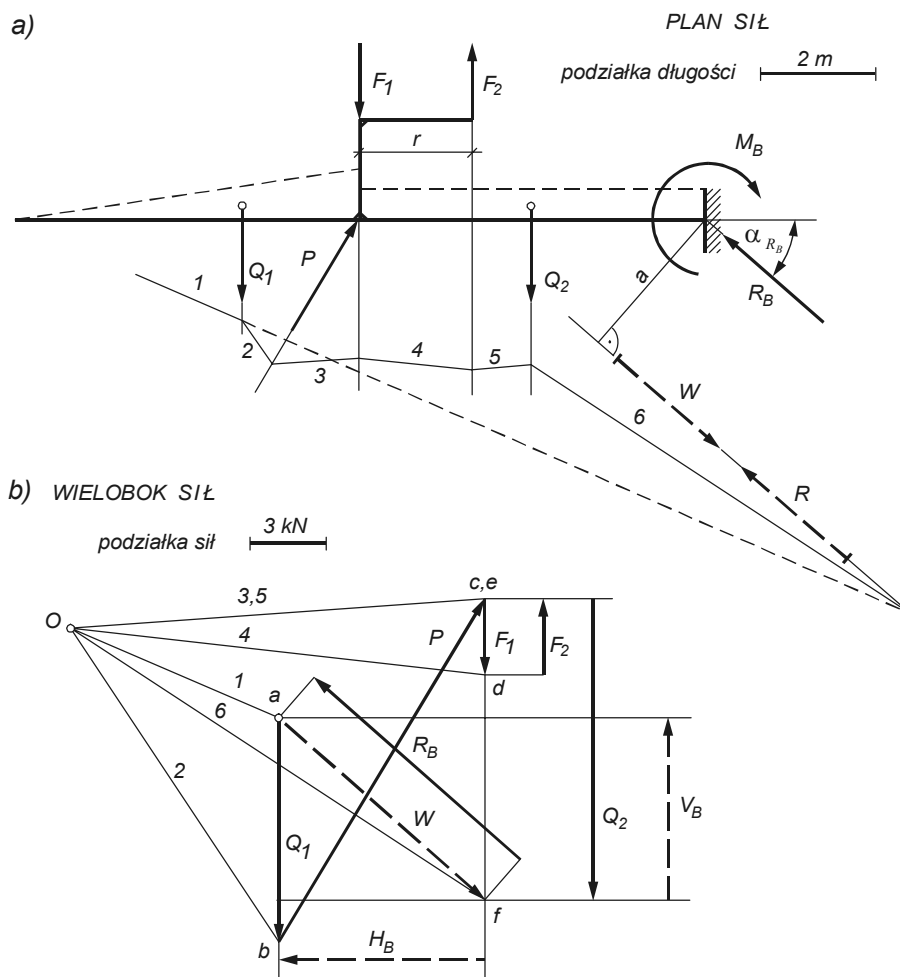
$$R_B = 10,6 \text{ kN}, \quad \alpha_{R_B} = 42^\circ,$$

$$a = 2,95 \text{ m}.$$

$$M = a \cdot R = 31,27 \text{ kNm}.$$

Dla porównania wyników z wynikami metody analitycznej zaznaczono też i odczytano wartości składowych siły R_B :

$$V_B = 7,2 \text{ kN}, \quad H_B = 7,8 \text{ kN}.$$



Rys. 8.5. Graficzne wyznaczenie oddziaływań utwierdzenia sztywnego

Przykład 8.5. Pozioma belka AC opiera się końcem A na podporze przegubowej nieprzesuwnej i w punkcie B podparta jest podporą przegubową przesuwą ustawioną ukośnie, tak jak to pokazano na rysunku 8.6. Obciążenie belki stanowią: siła skupiona P o wartości 20 kN odchylona od poziomu o 30° , obciążenie ciągłe równomiernie rozłożone $q_1 = 3 \text{ kN/m}$ i obciążenie zmieniające się liniowo od wartości $q_1 = 3 \text{ kN/m}$ do $q_2 = 5 \text{ kN/m}$.

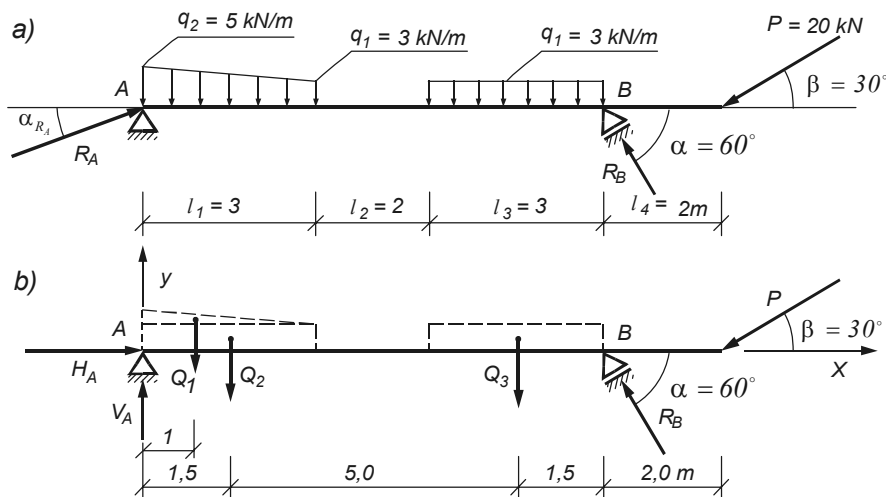
Wyznaczyć oddziaływania podpór. Wymiary belki podane są na rysunku w metrach.

Rozwiązanie analityczne

Reakcja podpory przegubowej nieprzesuwnej ma dwie składowe – poziomą i pionową (H_A i V_A), których zwroty przyjmijmy ku belce (rys. 8.6b). Reakcja podpory przegubowej przesuwnej R_B odchylna jest o 60° od poziomu, gdyż jest prostopadła do płaszczyzny poślizgu tej podpory. Jej zwrot przyjmijmy również ku belce, czyli do góry. Obciążenie rozłożone w formie trapezu podzielimy na dwie części: obciążenie trójkątne zastąpimy jego siłą wypadkową, czyli siłą

$$Q_1 = \frac{(q_2 - q_1) \cdot l_1}{2} = \frac{(5 - 3) \cdot 3}{2} = 3 \text{ kN}$$

a obciążenie prostokątne wypadkową $Q_2 = q_1 \cdot l_1 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ kN}$.



Rys. 8.6

Obciążenie rozłożone równomiernie reprezentuje siła $Q_3 = q_1 \cdot l_3 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ kN}$.

Wszystkie siły zewnętrzne zaznaczono na rysunku 8.6b. Siły czynne to: Q_1, Q_2, Q_3 i P , siły bierne to: H_A, V_A i R_B .

Równania równowagi dla tego układu sił niezbędnych zapiszemy tak, by w każdym z tych równań występowała tylko jedna wielkość niewiadoma.

Równanie momentów względem punktu A ($\sum M_A = 0$):

$$\begin{aligned} & -Q_1 l_1/3 - Q_2 l_1/2 - Q_3(l_1 + l_2 + l_3/2) + R_B \sin \alpha (l_1 + l_2 + l_3) + \\ & - P \sin \beta (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = 0 \end{aligned}$$

do powyższego równania wstawiamy dane liczbowe

$$3 \cdot 1 - 9 \cdot 1,5 - 9 \cdot 6,5 + R_B \sin 60^\circ \cdot 8 - 20 \sin 30^\circ \cdot 10 = 0$$

i otrzymujemy wartość reakcji R_B : $R_B = 25,26 \text{ kN}$

Równanie momentów względem punktu B ($\sum M_C = 0$):

$$-V_A(l_1 + l_2 + l_3) + Q_1(l_1 \cdot 2/3 + l_2 + l_3) + Q_2(l_1 \cdot 1/2 + l_2 + l_3) + Q_3 l_3 \cdot 1/2 - P \sin \beta \cdot l_4 = 0$$

podstawiamy dane liczbowe

$$-V_A \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 9 \cdot 6,5 + 9 \cdot 1,5 - 20 \sin 30^\circ \cdot 2 = 0$$

i otrzymujemy wartość składowej pionowej reakcji R_A : $V_A = 9,12 \text{ kN}$

Równanie rzutów na oś poziomą ($\sum X = 0$):

$$H_A - R_B \cos \alpha - P \cos \beta = 0$$

stąd wyliczamy poziomą składową reakcji R_A

$$H_A = R_B \cos \alpha = P \cos \beta = 25,26 \cos 60^\circ + 20 \cos 30^\circ = 29,95 \text{ kN}$$

Wykonamy sprawdzenie obliczeń, wykorzystując równanie rzutów na oś pionową

$$\sum Y = V_A - Q_1 - Q_2 - Q_3 + R_B \sin \alpha - P \sin \beta = 9,125 - 3 - 9 - 9 + 25,26 \sin 60^\circ - 20 \sin 30^\circ = 0$$

Obliczymy jeszcze moduł i kąt nachylenia reakcji R_A do poziomu:

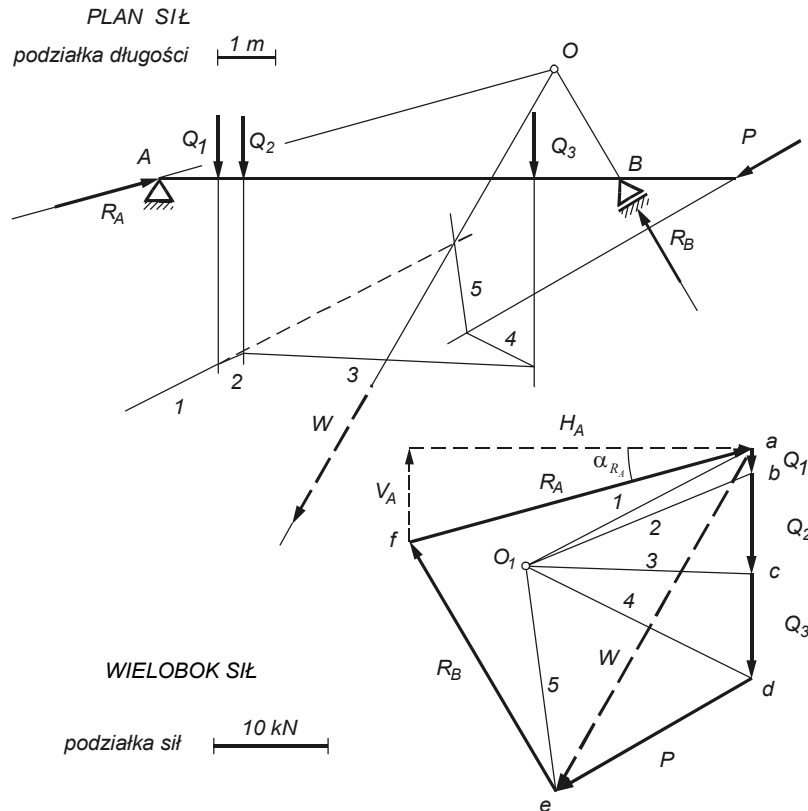
$$R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} = \sqrt{9,12^2 + 29,95^2} = 31,31 \text{ kN},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{R_A} = \frac{V_A}{H_A} = \frac{9,12}{29,95} \rightarrow \alpha_{R_A} = 16,94^\circ$$

Rozwiązanie graficzne przedstawione jest na rysunku 8.7.

Za pomocą wieloboku sznurowego $1,2,3,4,5$ wyznaczono najpierw wypadkową wszystkich sił zewnętrznych czynnych. Następnie należało tę wypadkową zrównoważyć dwiema reakcjami, których kierunki przechodzą przez punkty A i B . Ponieważ wiadomo, że trzy nierównoległe siły działające w jednej płaszczyźnie mogą być w równowadze tylko wtedy, gdy są zbieżne (por. twierdzenie w rozdz. 4.3.1), więc punktem zbieżności jest punkt O , gdyż w punkcie tym przecinają się kierunki sił W i R_B . Wyznaczono dzięki temu rozumowaniu kierunek reakcji R_A (łącznie punkt A z punktem O) a na wieloboku sił skonstruowano trójkąt aef o bokach równoległych do kierunków działania trzech rozpatrywanych sił. Zwroty reakcji przyjęto tak, by wraz z siłą W stanowiły wielobok sił zamknięty o zgodnym obiegu strzałek (jest to graficzny warunek równowagi zbieżnego układu sił). Z wieloboku sił odczytano w obranej skali sił wartości modułów reakcji i zmierzono kąt nachylenia siły R_A do poziomu.

Otrzymano: $R_A = 31 \text{ kN}$, $R_B = 25 \text{ kN}$, $\alpha_{R_A} = 16^\circ$



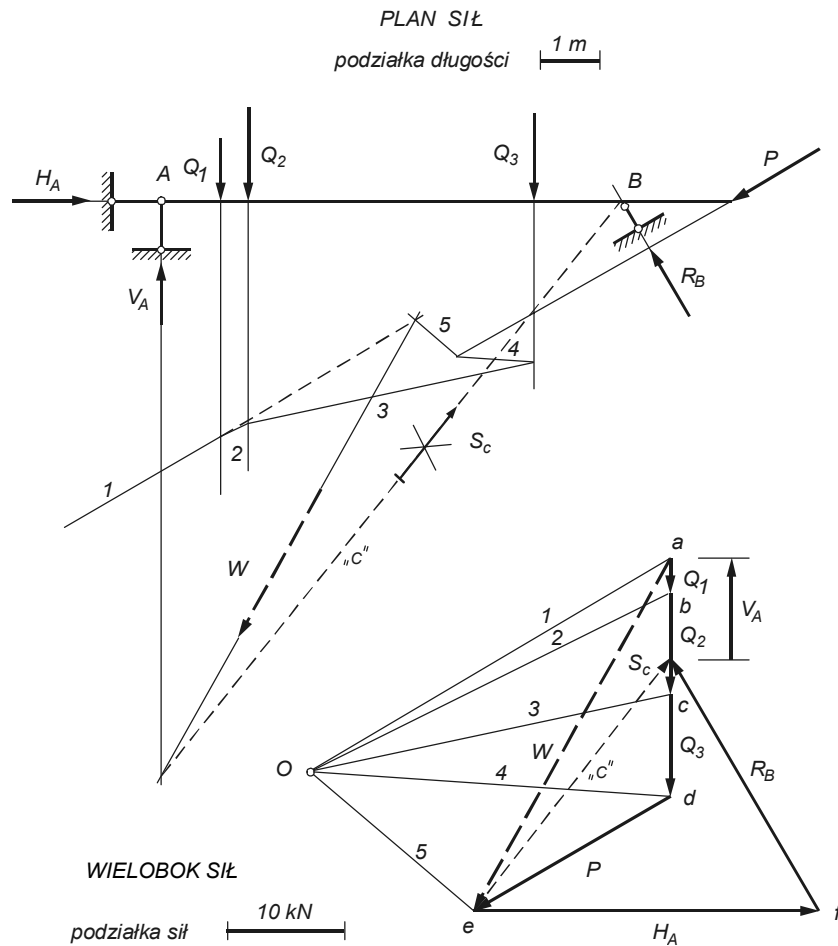
Rys. 8.7. Graficzne wyznaczenie oddziaływań na podstawie twierdzenia o równowadze trzech sił nierównoległych na płaszczyźnie

Rozwiązanie *graficzne* omawianego zadania za pomocą *konstrukcji Culmanna* przedstawiono na rysunku 8.8 (por. rozdz. 7.5.1).

Wypadkową sił zewnętrznych czynnych zrównoważono tu trzema siłami o kierunkach więzi pojedynczych odpowiadających zadanym sposobom podparcia belki w punktach A i B . (Najpierw zrównoważono siłę W siłą V_A i S_C , a później siłę S_C rozłożono na dwie siły składowe: R_B i H_A).

Z wieloboku sił Culmanna $aefg$ odczytano w skali wieloboku sił:

$$H_A = 30 \text{ kN}, \quad V_A = 9,4 \text{ kN}, \quad R_B = 25 \text{ kN}.$$



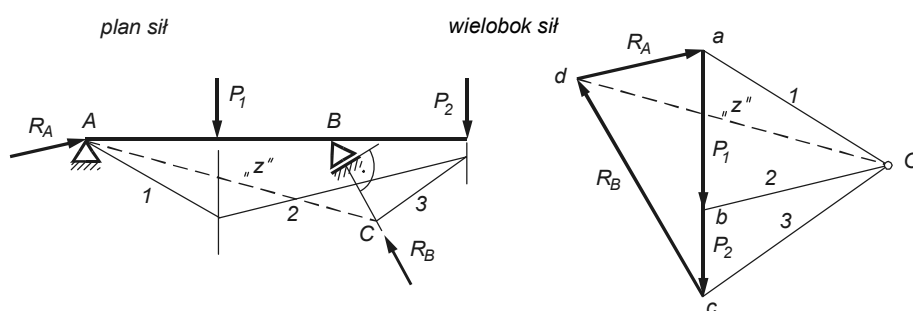
Rys. 8.8. Graficzne wyznaczenie oddziaływań metodą Culmanna

Przykład 8.6. Belka wolno podparta ze wspornikiem (rys. 8.9) obciążona jest siłami P_1 i P_2 jak na rysunku. Wyznaczyć oddziaływania podpór tej belki przy zastosowaniu zamykającej.

Rozwiązanie

Układ sił P_1 , P_2 , R_A i R_B będzie w równowadze, gdy zostaną spełnione dwa graficzne warunki równowagi: 1° wielobok tych sił będzie zamknięty, 2° wielobok sznurowy

wykreślony dla układu tych sił będzie również zamknięty. Rysujemy więc na wieloboku sił siłę P_1 i P_2 , po czym wykreślanie wieloboku sznurowego rozpoczynamy od punktu A , gdyż przez ten punkt przechodzi prosta działania reakcji R_A (kąta nachylenia tej prostej nie znamy). Zgodnie z zasadą wykreślania wieloboku sznurowego, na kierunku siły P_1 przecinają się ze sobą promienie 1 i 2 oraz na kierunku siły P_2 - promienie 2 i 3. Promień 3 prowadzimy do przecięcia się z kierunkiem siły R_B i otrzymujemy punkt C , który wraz z punktem A wyznacza położenie tzw. *zamykającej*, czyli promienia zamykającego wielobok sznurowy. Kierunek *zamykającej* przenosimy równoległe na wielobok sił, przeprowadzając go przez biegun O .



Rys. 8.9. Zastosowanie *zamykającej* do wyznaczenia oddziaływań w belce

Przystępujemy teraz do wyznaczania reakcji. Musimy zacząć od siły R_B , gdyż jej kierunek znany (jest on prostopadły do płaszczyzny poślizgu podpory przegubowej przesuwnej). W punkcie C na planie sił przecina się z kierunkiem reakcji R_B promień 3 i *zamykająca*, w związku z czym na wieloboku sił te trzy kierunki muszą tworzyć trójkąt. Z punktu c na wieloboku sił kreślimy więc prostą równoległą do kierunku reakcji R_B i otrzymujemy w ten sposób, w punkcie przecięcia się z *zamykającą* punkt d wyznaczający koniec wektora siły R_B . Reakcję R_A wyznaczymy z pierwszego warunku równowagi: by wielobok sił był zamknięty, reakcja R_A musi łączyć punkty d i a i posiadać zwrot w prawo.

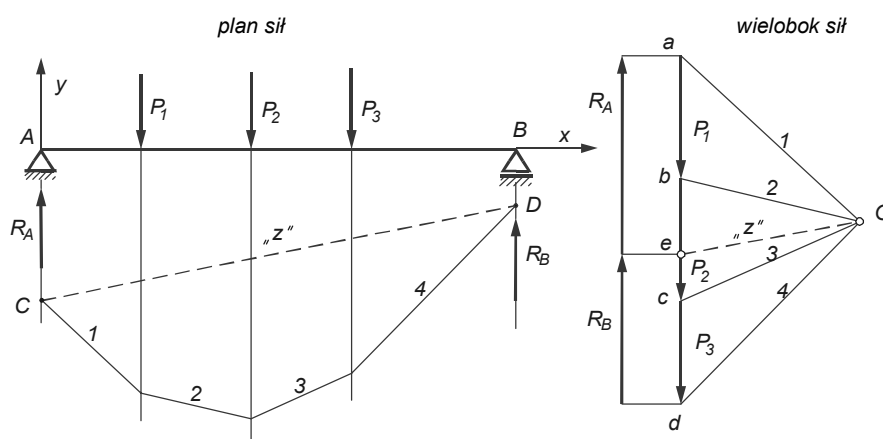
Przykład 8.7. Belka wolno podparta (rys. 8.10) obciążona jest układem sił P_1 , P_2 , P_3 . Wyznaczyć wykreślnie reakcje.

Rozwiązanie

Mamy tu do czynienia z układem sił równoległych, gdyż zarówno reakcja R_B , jak i R_A są siłami pionowymi, równoległymi do sił P . (W przypadku gdyby siła R_A nie miała kierunku pionowego, warunek sumy rzutów na oś poziomą ($\Sigma X = 0$) nie mógłby być spełniony).

Wobec powyższego wielobok sznurowy sił czynnych możemy wykreślać prowadząc pierwszy bok wieloboku przez dowolny punkt na prostej działania siły R_A , np. przez punkt C . Ostatni bok wieloboku sznurowego przedłużamy do przecięcia się

z prostą działania siły R_B (punkt D). Prosta CD jest *zamykającą*, którą przenosimy równolegle na wielobok sił. Wektor $d\vec{e}$ wieloboku sił jako trzeci bok trójkąta, którego pozostałymi bokami są promienie z i 4 wyznacza siłę R_B , zaś wektor $e\vec{a}$ wyznacza siłę R_A gdyż jest trzecim bokiem trójkąta o bokach z i 1 .



Rys. 8.10. Wyznaczenie oddziaływań z zastosowaniem zamykającej

9. Wyznaczanie sił wewnętrznych

9.1. Definicje sił wewnętrznych

Rozpatrując znajdujący się w równowadze ustrój budowlany poddany działaniu sił zewnętrznych, stwierdziliśmy, że warunkiem tej równowagi jest, by układ sił zewnętrznych (czynnych i biernych) był układem równoważnym zeru. W tym przypadku spełniony jest warunek stateczności ustroju. Ustroje budowlane muszą ponadto spełniać warunek wytrzymałości, to znaczy muszą być odporne na zniszczenie oraz zbyt wielkie odkształcenia ich elementów.

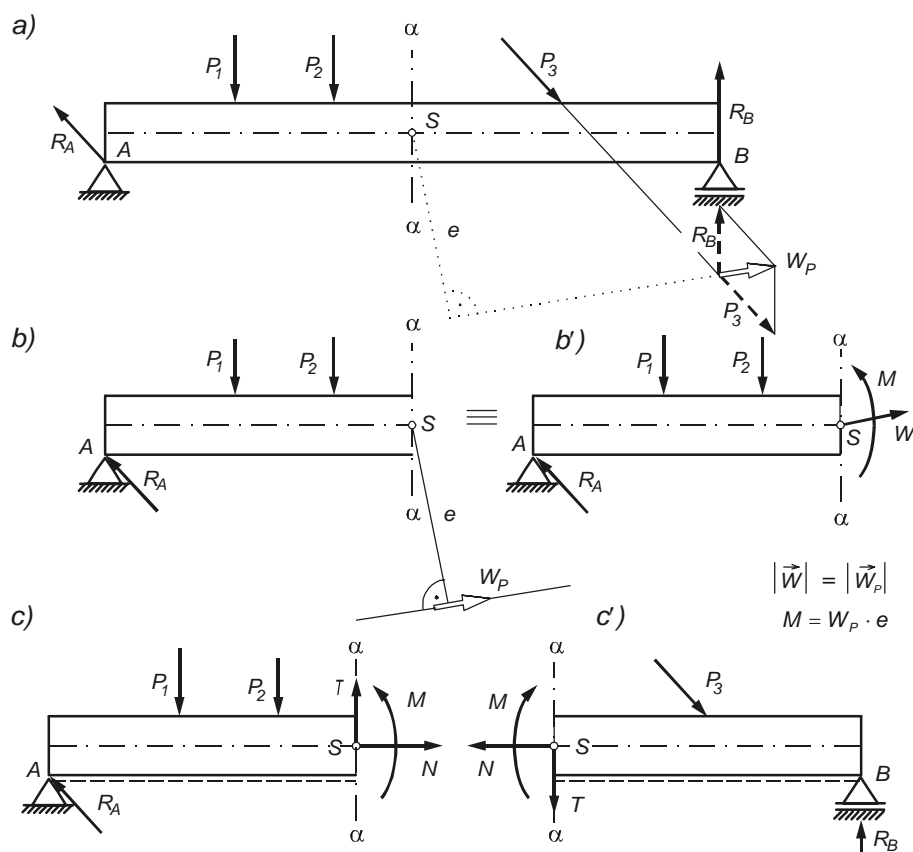
Rozpatrując wytrzymałość poszczególnych elementów ustroju, musimy znać siły wewnętrzne w poszczególnych przekrojach poprzecznych tych elementów. O siłach wewnętrznych wspomniano przy omawianiu klasyfikacji sił (por. rozdz. 3.1 i 3.4). Ogólnie można powiedzieć, że **siły wewnętrzne (przekrojowe) to siły obrazujące oddziaływanie jednej części przeciętego przekrojem poprzecznym ciała materialnego na część pozostałą.**

Siły wewnętrzne działające w przekroju poprzecznym pręta można wyznaczyć metodą przecięć, która polega na myślowym przecięciu pręta na dwie części i na rozpatrzeniu równowagi obu jego części po tym przecięciu.

Na rysunku 9.1a pokazano belkę obciążoną siłami P_1 , P_2 , P_3 , R_A , i R_B stanowiącymi układ równoważny zeru. Po myślowym przecięciu belki w przekroju α - α , stwierdzamy, że prawa część belki na lewą jej część działa siłami P_3 i R_B , których wypadkowa W_p (indeks p oznacza, że siła W jest sumą sił działających po prawej stronie przekroju) wyznaczona została na podstawie reguły równoległoboku. Zatem na część lewą belki działają siły R_A , P_1 , P_2 oraz siła W_p , czyli oddziaływanie prawej części belki na lewą (rys. 9.1b). Siłę W_p sprowadzamy teraz do środka ciężkości S przekroju α - α . Otrzymujemy układ równoważny sile W_p : zaczepioną w punkcie S siłę W i moment $M = W_p \cdot e$ (rys. 9.1b'). Następnie siłę W rozkładamy na dwie siły składowe: na siłę T – styczną do przekroju, nazywaną siłą poprzeczną lub tnącą i na siłę N – normalną do przekroju, nazywaną siłą podłużną lub osiową. Moment M nazywamy momentem zginającym (rys. 9c).

Analizując działanie lewej części belki na prawą, możemy przeprowadzić podobne rozumowanie, w wyniku którego stwierdzimy, że lewa część belki na prawą działa takimi samymi co do modułu siłami co prawa na lewą, lecz siły te mają przeciwny zwrot (zasada akcji i reakcji) (rys. 9.1c').

Reasumując powyższe rozważania, możemy stwierdzić, że obliczanie sił wewnętrznych w danym przekroju polega na sprowadzeniu sił działających po jednej stronie tego przekroju do jego środka ciężkości. Siły wewnętrzne można obliczać na podstawie sił działających bądź to na prawo, bądź na lewo od rozpatrywanego przekroju.



Rys. 9.1. Siły wewnętrzne w przekroju α - α belki wolno podpartej

Wprowadzimy następujące definicje pomocne w obliczaniu sił wewnętrznych w przekrojach poprzecznych elementów konstrukcji (dotyczą one także ustrojów o prętach zakrzywionych):

Wartość siły osiowej w rozpatrywanym przekroju pręta równa się sumie rzutów wszystkich sił zewnętrznych działających na ustrój po jednej stronie tego przekroju na kierunku styczny do osi pręta w tymże przekroju.

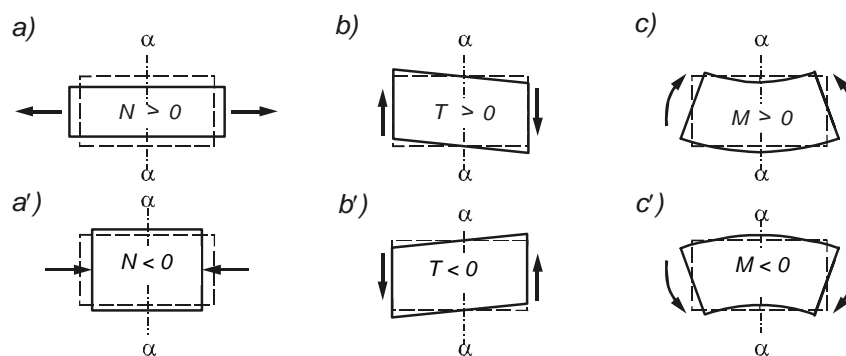
Wartość siły tnącej w rozpatrywanym przekroju równa się algebraicznej sumie rzutów wszystkich sił zewnętrznych działających na ustrój po jednej stronie tego przekroju na kierunek prostopadły do osi pręta w tymże przekroju.

Wartość momentu zginającego w rozpatrywanym przekroju pręta równa się algebraicznej sumie momentów wszystkich sił działających po jednej stronie tego przekroju względem jego środka ciężkości.

Obliczanie sił wewnętrznych wymaga ustalenia umowy ich znakowania. Umowa ta nazywana jest **umową wytrzymałościową** znakowania – w odróżnieniu od **umowy statycznej**, którą posługujemy się przy zapisywaniu warunków równowagi całego ustroju statycznego.

W umowie wytrzymałościowej znak siły wewnętrznej zależy od tego, czy obliczamy tę siłę na podstawie sił działających po lewej czy też po prawej stronie przekroju. Aby uniknąć niejednoznaczności w określaniu, która strona jest lewa, a która prawa, wprowadzamy pojęcie włókien dolnych oznaczających spód pręta budującego konstrukcję: linią przerywaną zaznaczamy te włókna, które uważamy za dolne (por. rys. 9.1c i c'). Na rysunku 9.2 pokazane są przyjęte reguły znakowania sił wewnętrznych.

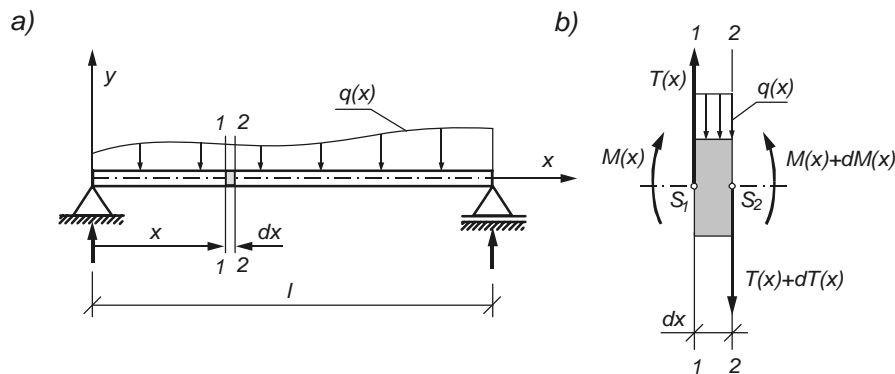
- **Siła podłużna** jest dodatnia, gdy działa z lewej strony przekroju w lewo lub z prawej strony przekroju w prawo, czyli *od* przekroju (dodatnia siła osiowa powoduje rozciąganie elementu pręta, na który działa – por. rys. 9.2a).
- **Siła poprzeczna** jest dodatnia, gdy działa z lewej strony przekroju w górę lub z prawej strony przekroju w dół. (Deformacja elementu pręta w pobliżu przekroju α - α spowodowana dodatnią siłą poprzeczną pokazana jest na rys. 9.2b).
- **Moment zginający** jest dodatni, gdy działa z lewej strony przekroju w prawo, lub z prawej strony przekroju w lewo lub inaczej: gdy pochodzi od siły powodującej wygięcie pręta wypukłością ku dołowi (włókna dolne są wtedy rozciągane, a górne ściskane – por. rys. 9.2c).



Rys. 9.2. Znakowanie sił wewnętrznych

W przypadkach przeciwnych niż opisano wyżej siły wewnętrzne mają znaki ujemne (por. rys. 9.2 a', b', c').

9.2. Zależności różniczkowe między siłami wewnętrznymi



Rys. 9.3

Rozpatrzmy belkę o obciążeniu zmiennym $q(x)$ przedstawioną na rysunku 9.3a. W odległości x od lewej podpory wytnijmy fragment tej belki – nieskończenie krótki – o długości dx , ograniczony przekrojami 1 i 2 (rys. 9.3b). Rozpatrzmy teraz równowagę tego fragmentu – siły na niego działające powinny spełniać warunki równowagi. W przekroju 1-1 działają siły wewnętrzne $T(x)$ i $M(x)$. Przekrój 2-2 znajduje się nieskończenie blisko przekroju 1-1, więc siły wewnętrzne w nim działające doznają nieskończenie małych przyrostów wartości: $dT(x)$ i $dM(x)$. Na wycięty element działa ponadto obciążenie $q(x)$. Przyjmujemy, że jest ono prostokątne, czyli że na długości dx nie ulega zmianie. Zapišemy warunek sumy momentów względem punktu S_2 :

$$\sum M_{S_2} = 0; \quad -T(x) \cdot dx - M(x) + M(x) + dM(x) + q(x) \cdot dx \frac{dx}{2} = 0$$

Po odrzuceniu małej wartości drugiego rzędu, jaką jest iloczyn $q(x) \cdot dx^2/2$, otrzymujemy związek między momentem zginającym a siłą poprzeczną:

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (9.1)$$

Z warunku rzutów na oś y

$$\sum Y = 0; \quad T(x) - [T(x) + dT(x)] - q(x) \cdot dx = 0$$

otrzymujemy

$$-q(x) = \frac{dT(x)}{dx} \quad (9.2)$$

Wobec powyższego możemy sformułować zależności różniczkowe między obciążeniem, siłą tnącą i momentem zginającym:

- Równanie siły tnącej jest pochodną równania momentu zginającego podług zmiennej x mierzonej wzdłuż osi belki.
- Intensywność obciążenia ciągłego ze znakiem ujemnym jest pochodną siły tnącej podług zmiennej x mierzonej wzdłuż osi belki.

Przykład 9.1. Obliczyć siły wewnętrzne w przekroju α - α belki wolno podpartej ze wspornikiem (rys. 9.4). Obciążenie i wymiary belki podane są na rysunku. Kąt $\alpha_1 = 60^\circ$, kąt $\alpha_3 = 30^\circ$.

Rozwiązanie

W pierwszej kolejności wyznaczamy oddziaływania podpór. Wykorzystujemy tu równania równowagi płaskiego dowolnego układu sił i stosujemy *umowę statyczną* znakowania sił:

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A l - P_1 \sin \alpha_1 (l + l_1) - M + P_2 (l + b) + P_3 \sin \alpha_3 \cdot e = 0$$

$$R_A = \frac{1}{5} (-2 \cdot 0,866 \cdot 7 - 10 + 8 \cdot 6 + 10 \cdot 0,707 \cdot 2) = 8,00 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0; \quad R_A + V_B + P_1 \sin \alpha_1 - P_2 - P_3 \sin \alpha_3 = 0$$

$$V_B = -8 - 2 \cdot 0,866 + 8 + 10 \cdot 0,707 = 5,33 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0; \quad H_B + P_1 \cos \alpha_1 - P_3 \cos \alpha_3 = 0$$

$$H_B = -2 \cos 60^\circ + 10 \cos 45^\circ = 6,07 \text{ kN}$$

Siły wewnętrzne obliczymy dwa razy: a) – na podstawie sił znajdujących się na lewo od przekroju α - α oraz b) – na podstawie sił znajdujących się na prawo od przekroju α - α . Stosujemy tu *umowę wytrzymałościową* znakowania sił:

a)

$$N_\alpha = -P_1 \cos \alpha_1 = -2 \cdot 0,5 = -1,0 \text{ kN}$$

$$T_\alpha = P_1 \sin \alpha_1 - P_2 + R_A = 2 \cdot 0,866 - 8 + 8 = 1,73 \text{ kN}$$

$$M_\alpha = P_1 \sin \alpha_1 \cdot (l_1 + c) + R_A \cdot c - P_2 \cdot b = 2 \cdot 0,866 \cdot 3 + 8 \cdot 1 - 8 \cdot 2 = -2,80 \text{ kNm}$$

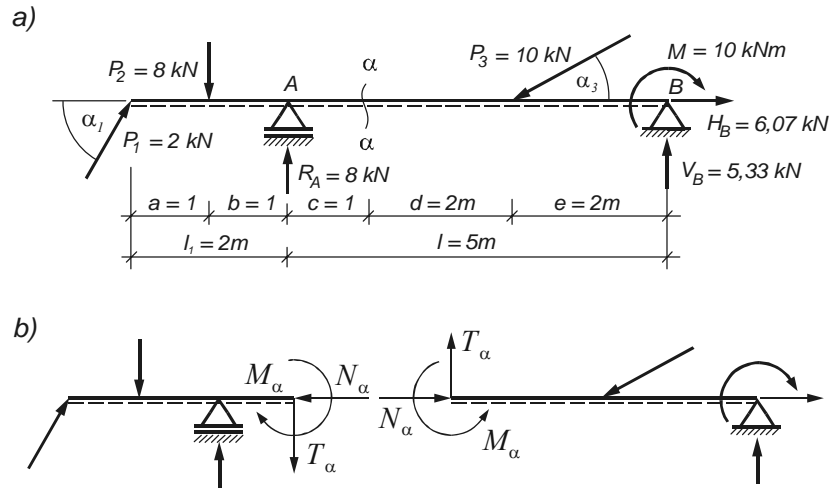
b)

$$N_\alpha = H_A - P_3 \cos \alpha_3 = 6,07 - 10 \cdot 0,707 = -1,0 \text{ kN}$$

$$T_\alpha = -V_A + P_3 \sin \alpha_3 = -5,33 + 10 \cdot 0,707 = 1,73 \text{ kN}$$

$$M_\alpha = V_A (d + e) - M - P_3 \sin \alpha_3 \cdot d = 5,33 \cdot 4 - 10 - 10 \cdot 0,707 \cdot 2 = -2,80 \text{ kNm}$$

Na rysunku 9.4b pokazano obliczone siły wewnętrzne. Są one „wprowadzone” w przekrój $\alpha\text{-}\alpha$ po uprzednim myślowym przecięciu belki i odsunięciu jej obu części, tak by powstało miejsce na narysowanie wektorów tych sił. Siły wewnętrzne naniesione są na rysunek z właściwymi zwrotami.



Rys. 9.4

10. Wykresy sił wewnętrznych w belkach

10.1. Wiadomości wstępne

Z rozważań podanych w rozdziale 9 wynika, że wartości sił osiowych, tnących i momentów zginających zmieniają się w ogólnym przypadku wraz ze zmianą położenia przekroju. Prawo zmienności tych wielkości możemy wyrazić analitycznie przedstawiając je jako funkcję współrzędnych określających położenie przekrojów poprzecznych pręta.

Wykresy sił wewnętrznych sporządzamy zazwyczaj pod schematem rozpatrywanej belki w ten sposób, że za podstawę wykresu przyjmujemy zarys osiowy belki, a rzędne odpowiadające wartościom danej siły wewnętrznej w poszczególnych przekrojach, odkładamy w tych przekrojach prostopadle do osi belki z zachowaniem przyjętej wcześniej skali.

Wyznaczając siły wewnętrzne, stosujemy umowę wytrzymałościową znakowania tych sił, przy czym w górę od osi odniesienia odkładamy wartości dodatnie sił osiowych i tnących oraz ujemne wartości momentów zginających. Ujemne siły osiowe i tnące oraz dodatnie momenty zginające odkładamy w dół od osi odniesienia. Dzięki takiej umowie dotyczącej rysowania wykresów sił wewnętrznych wykresy momentów zginających rysowane są zawsze po stronie włókien rozciąganych (jeśli np. belka pod wpływem działania sił zewnętrznych wygina się wypukłością do dołu, to wykres momentów zginających będzie narysowany po dolnej stronie osi odniesienia).

Przy sporządzaniu wykresów sił wewnętrznych przyjmujemy następujący tok postępowania:

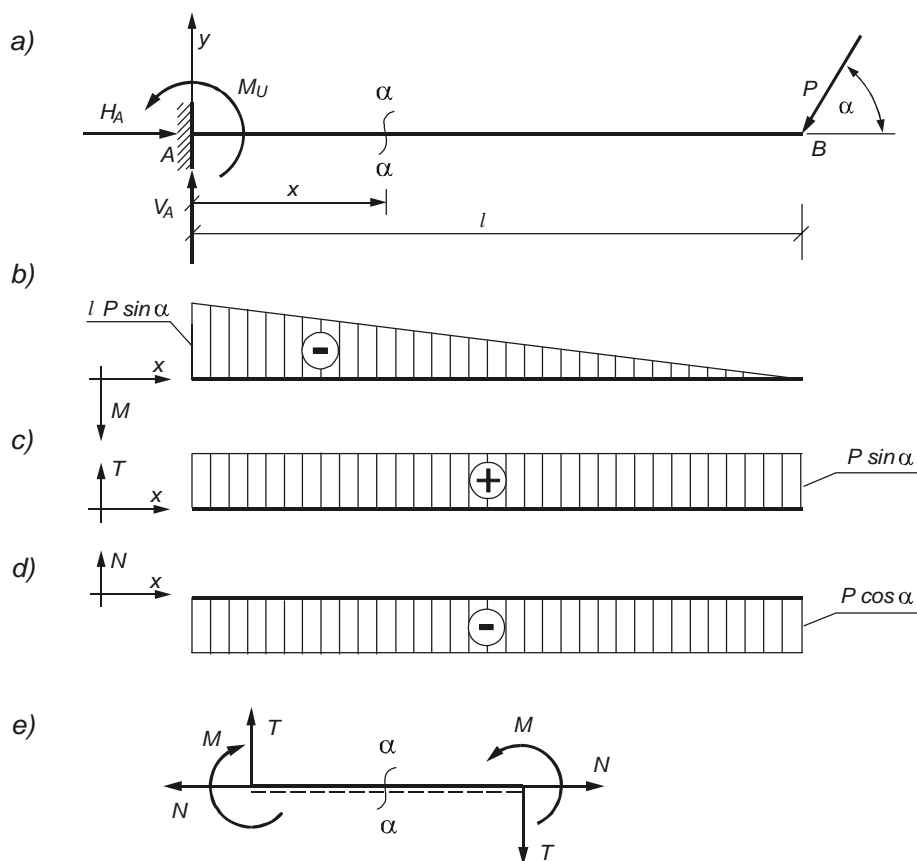
- wyznaczamy wartości reakcji podpór;
- ustalamy przedziały zmienności funkcji momentów zginających, sił tnących i osiowych;
- wypisujemy zależności między siłami wewnętrznymi i współrzędną określającą położenie przekroju w poszczególnych przedziałach obciążenia, stosując zasadę znakowania sił wewnętrznych zgodną z definicjami podanymi w rozdziale 9.1;
- dla poszczególnych przedziałów obciążenia sporządzamy odpowiednie wykresy.

Należy pamiętać, że granicą przedziału obciążenia jest punkt przyłożenia siły skupionej oraz początek lub koniec obciążenia ciągłego, a w przypadku innych niż belki proste ustrojów prętowych – również punkt załamania osi pręta.

10.2. Wsporniki

Wspornikiem nazywamy pręt, którego jeden koniec jest swobodny, a drugi sztywno utwierdzony. Rozpatrzmy kilka przypadków obciążeń wspornika i sporządzimy wykresy sił wewnętrznych przy tych obciążeniach.

Przykład 10.1. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych dla wspornika obciążonego siłą P nachyloną pod kątem α do osi wspornika (rys. 10.1a).



Rys. 10.1

Rozwiązanie

Wykorzystując równania równowagi płaskiego niezbieżnego układu sił, obliczamy oddziaływania:

$$\begin{aligned} \sum X &= H_A - P \cos \alpha = 0; & H_A &= P \cos \alpha \\ \sum Y &= V_A - P \sin \alpha = 0; & V_A &= P \sin \alpha \\ \sum M_A &= M_U - P \sin \alpha \cdot l = 0; & M_U &= l P \sin \alpha \end{aligned}$$

Znaki wartości reakcji są dodatnie, więc ich zwroty zaznaczone na rysunku 10.1a są właściwe.

Rozpatrywana belka ma tylko jeden przedział zmienności sił wewnętrznych. Przyjmujemy, że początek układu odniesienia znajduje się w punkcie A , a rozpatrywany przekrój poprzeczny znajduje się w odległości x od niego, i że siły wewnętrzne będziemy liczyć na podstawie sił z lewej strony przekroju. Gdy obliczamy siły wewnętrzne na podstawie sił z lewej strony przekroju, moment zginający jest dodatni, gdy wywołuje obrót w prawo, siła tnąca jest dodatnia, gdy ma zwrot do góry, a siła podłużna jest dodatnia, gdy działa w lewo (ilustruje to rys. 10.1e).

Dla x w przedziale zmienności $x \in \langle 0; l \rangle$ równania sił wewnętrznych są następujące:

$$\begin{aligned} M(x) &= -M_U + V_A \cdot x = -lP \sin \alpha + P \sin \alpha \cdot x \\ T(x) &= V_A = P \sin \alpha \\ N(x) &= -H_A = -P \cos \alpha \end{aligned}$$

Wartość momentu zginającego zmienia się liniowo. Nieskończenie blisko punktu utwierdzenia (dla $x = 0$) $M(0) = -lP \sin \alpha$, a na końcu wspornika (dla $x = l$) $M(l) = 0$. Wykres momentów zginających pokazano na rysunku 10.1b. Zgodnie z umową wartości ujemne momentów odłożono w górę od osi odniesienia.

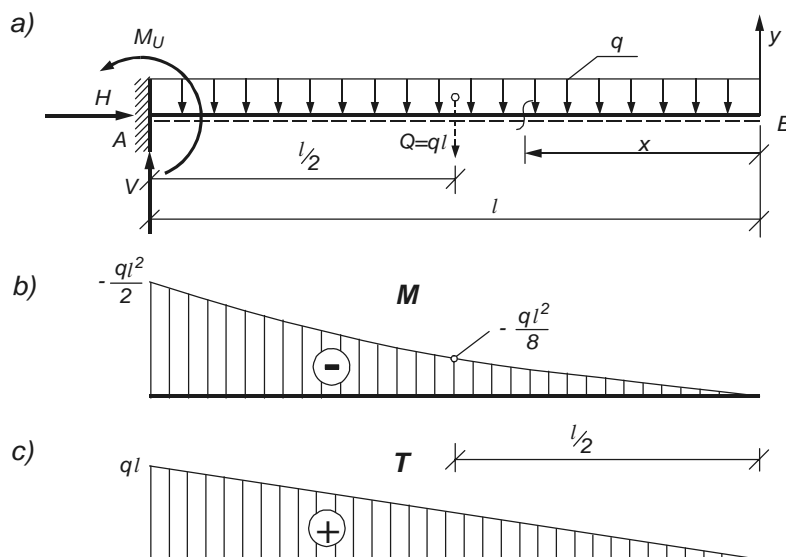
Wartości sił tnących i osiowych są stałe, nie zależą od wartości x . Na rysunku 10.1c i d wykres sił tnących jako dodatnich narysowany jest *nad* osią odniesienia, wykres sił osiowych – ponieważ są ujemne – jest narysowany *pod* osią odniesienia.

Przykład 10.2. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych dla wspornika obciążonego na całej długości obciążeniem ciągłym równomiernym q kN/m (rys. 10.2).

Rozwiązanie

W podanej belce występują momenty zginające i siły tnące. Siły osiowe nie występują, gdyż wszystkie siły zewnętrzne działają prostopadle do osi belki, w związku z czym pozioma składowa reakcji sztywnego utwierdzenia równa się zero. Belka ma jeden przedział obciążenia. Układ odniesienia przyjmujemy tak, jak to zaznaczono na rysunku 10.2a: jego początek znajduje się w punkcie B . Siły wewnętrzne będziemy obliczać na podstawie sił działających po prawej stronie przekroju. Wypadkową obciążenia działającego na belkę po prawej stronie przekroju jest siła $Q(x) = q \cdot x$ (por. rys. 10.3). Prosta działania wypadkowej przechodzi przez środek ciężkości prostokąta obrazującego rozkład siły q .

Gdy liczymy siły wewnętrzne na podstawie sił z prawej strony przekroju, moment zginający jest dodatni, gdy wywołuje obrót w lewo, siła tnąca jest dodatnia, gdy ma zwrot w dół, a siła podłużna jest dodatnia, gdy działa w prawo (por. rys. 10.1e).



Rys. 10.2

Równania sił wewnętrznych:

$$M(x) = -Q(x) \cdot \frac{x}{2} = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$T(x) = Q(x) = q \cdot x; \quad N(x) = 0$$

Wykres momentów jest krzywą drugiego stopnia i aby go orientacyjnie narysować, trzeba obliczyć wartości funkcji $M(x)$ przynajmniej w trzech punktach:

$$M(0) = 0$$

$$M(l/2) = -q \frac{(l/2)^2}{2} = -\frac{q \cdot l^2}{8}$$

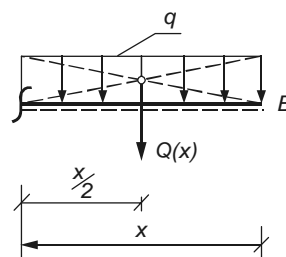
$$M(l) = -\frac{q \cdot l^2}{2}$$

Wykres sił tnących jest linią prostą.

$$T(0) = 0$$

$$T(l) = q \cdot l$$

Wykresy M i T pokazane są na rysunku 10.2b i c.



Rys. 10.3

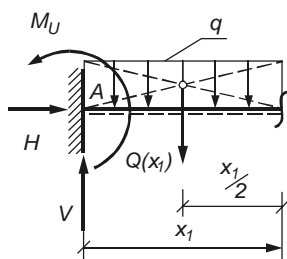
Z powyższego wynika, że w przypadku wspornika można sporządzić wykresy sił wewnętrznych bez uprzedniego obliczania reakcji podporowych. Co więcej: reakcje podporowe można wyznaczyć, odczytując ich wartości z wykresów i ustalając właściwe zwroty w oparciu o umowę wytrzymałościową znakowania sił wewnętrznych. W omawianym przypadku widać, że:

- 1) moment M_U na podporze ma wartość $0,5 ql^2$ i działa w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (musi bowiem wywołać moment zginający ujemny w przekroju A wspornika, gdy bierzemy go pod uwagę, licząc moment zginający w przekroju A od strony lewej);
- 2) siła V ma wartość ql i zwrot do góry (wywołuje w przekroju A siłę tnącą dodatnią);
- 3) siła $H = 0$.

Możemy to sprawdzić, pisząc równania równowagi dla całej belki, z których otrzymamy wartości reakcji:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; & H &= 0 \\ \sum Y &= 0; & V - ql &= 0 \rightarrow V = ql \\ \sum M_A &= 0; & M_U - ql \frac{l}{2} &= 0 \rightarrow M_U = ql^2/2\end{aligned}$$

Po obliczeniu reakcji napiszemy teraz równania sił wewnętrznych na podstawie sił z lewej strony przekroju, a więc w układzie odniesienia o początku w punkcie A (oś x_1 ma tu zwrot w prawo – por. rys. 10.4):



Rys. 10.4

$$M(x_1) = -M_U + Vx_1 - \frac{qx_1^2}{2}$$

$$T(x_1) = V - qx_1$$

$$N(x_1) = -H = 0$$

Mamy teraz:

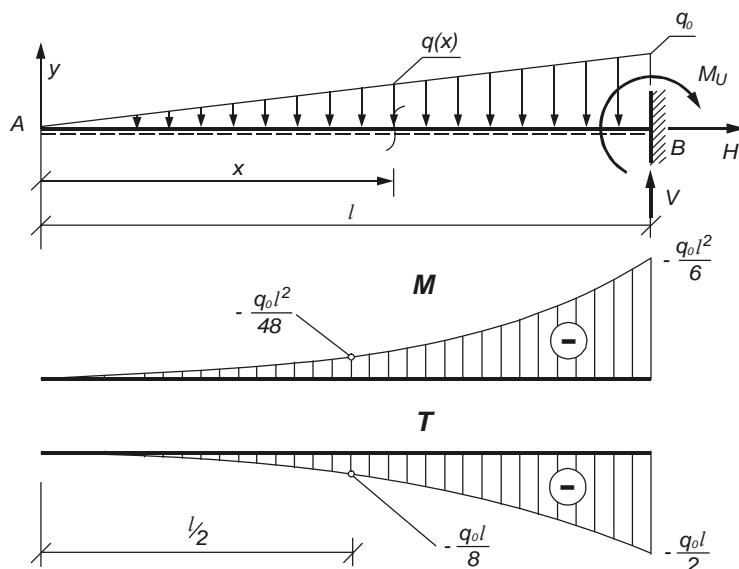
$$M(0) = -M_U = -\frac{ql^2}{2}$$

$$T(0) = V = q \cdot l$$

$$N(0) = -H = 0$$

oraz: $M(l) = 0$, $T(l) = 0$, $N(l) = 0$
co potwierdza wyniki otrzymane wcześniej.

Przykład 10.3. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych dla wspornika obciążonego siłą zmieniającą się liniowo w sposób ciągły od wartości 0 do q_0 [kN/m] (rys. 10.5).



Rys. 10.5

Rozwiązanie

Oddziaływania utwierdzenia sztywnego obliczamy z równań równowagi:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & H &= 0 \\ \sum Y &= 0; & V - Q &= 0 \\ \sum M_B &= 0; & Q \cdot \frac{1}{3}l - M_U &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $Q = \frac{q_0 l}{2}$ – jest siłą wypadkową obciążenia trójkątnego.

Oddziaływania wynoszą:

$$H = 0; \quad V = \frac{q_0 l}{2}; \quad M_U = \frac{l}{3} \cdot \frac{q_0 l}{2} = \frac{q_0 l^2}{6}$$

Belka ma jeden przedział obciążenia ($x \in \langle 0; l \rangle$). Siły wewnętrzne będziemy obliczać na podstawie sił z lewej strony przekroju. Po lewej stronie przekroju oddalonego o x od punktu A działa siła $Q(x)$, która jest wypadkową obciążenia trójkątnego (por. rys. 10.6): $Q(x) = 0,5q(x) \cdot x$.

Na podstawie podobieństwa odpowiednich trójkątów na rysunku 10.6 możemy na-

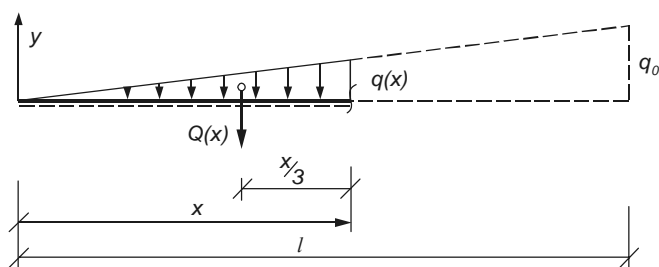
pisać: $\frac{q(x)}{x} = \frac{q_0}{l}$,

stąd

$$q(x) = \frac{q_0 x}{l}$$

oraz

$$Q(x) = 0,5 \frac{q_0 x}{l} x = \frac{q_0 x^2}{2l}$$



Rys. 10.6

Równania sił wewnętrznych są więc następujące:

$$M(x) = -Q(x) \cdot \frac{x}{3} = -\frac{q_0 x^2}{2l} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{q_0 x^3}{6l}$$

$$T(x) = -Q(x) = -\frac{q_0 x^2}{2l}$$

$$N(x) = 0$$

Otrzymaliśmy krzywą trzeciego i drugiego stopnia. Dla narysowania wykresów M i T obliczymy wartości ich funkcji w trzech punktach:

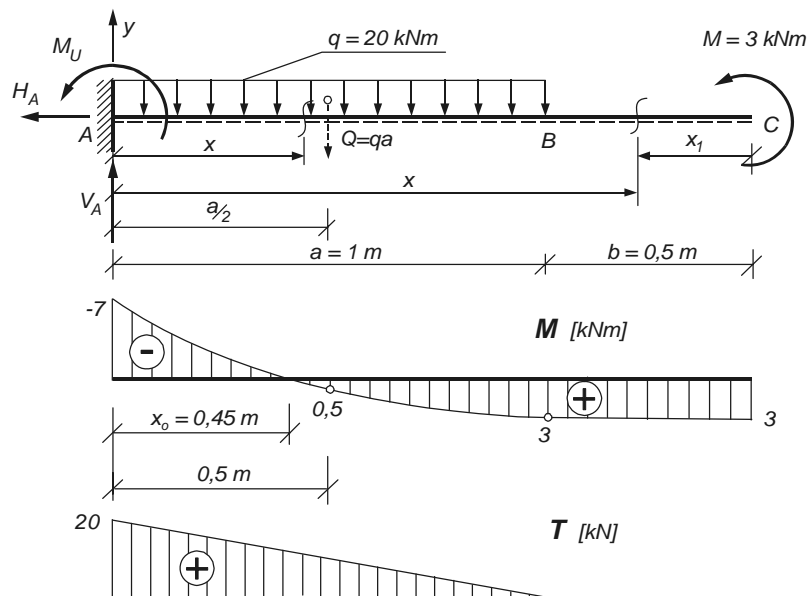
$$\text{dla } x = 0: \quad M(0) = 0; \quad T(0) = 0$$

$$\text{dla } x = l/2: \quad M(l/2) = -\frac{q_0 (l/2)^3}{6l} = -\frac{q_0 l^2}{48}; \quad T(l/2) = -\frac{q_0 (l/2)^2}{2l} = -\frac{q_0 l}{8}$$

$$\text{dla } x = l: \quad M(l) = -\frac{q_0 l^2}{6}; \quad T(l) = -\frac{q_0 l}{2}$$

Wykresy M i T pokazane są na rysunku 10.5.

Przykład 10.4. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych dla wspornika obciążonego siłą równomiernie rozłożoną q i momentem skupionym M przyłożonym do końca wspornika tak, jak to pokazane jest na rysunku 10.7. Do obliczeń przyjmij: $a=1\text{ m}$, $b=0,5\text{ m}$, $q=20\text{ kN/m}$, $M=3\text{ kNm}$.



Rys. 10.7

Rozwiązanie

Wyznaczając reakcje, zastępujemy siłę rozłożoną równomiernie wypadkową tej siły $Q = qa$.

$$\begin{aligned} \sum X = H_A = 0; & \quad H_A = 0 \text{ kN} \\ \sum Y = V_A - Q = 0; & \quad V_A = Q = q \cdot a = 20 \text{ kN} \\ \sum M_A = M_U - Q \frac{a}{2} + M = 0; & \quad M_U = \frac{qa^2}{2} - M = 7 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Wspornik ma dwa przedziały obciążenia. Siły wewnętrzne będziemy liczyć na podstawie sił z lewej strony przekroju (za początek układu odniesienia przyjmujemy punkt A).

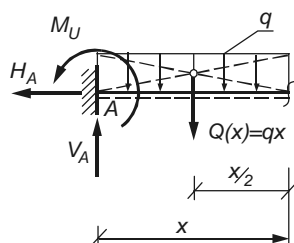
Równania M , T i N dla przedziału A - B , (dla $x \in \langle 0; 1 \rangle$) (por. rys. 10.8):

$$\begin{aligned} M(x) &= V_A x - M_U - qx \frac{x}{2} = 20x - 7 - 10x^2 \\ M(0) &= -7,0 \text{ kNm}, \quad M(0,5) = 0,5 \text{ kNm}, \quad M(1,0) = 3,0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Wyznamy wartość współrzędnej $x + x_0$, dla której moment zginający równy jest zeru:

$$M(x) = -10x^2 + 20x - 7 = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac = 120, \quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

otrzymujemy $x_1 = 0,45 \text{ m}$, $x_2 = 1,54 \text{ m}$, przy czym odcięta x_2 znajduje się poza przedziałem obciążenia, więc $x_0 = 0,45 \text{ m}$.



Rys. 10.8

$$T(x) = V_A - qx = 20 - 20x$$

$$T(0) = 20 \text{ kN}, \quad T(1,0) = 0 \text{ kN}$$

$$N(x) = 0$$

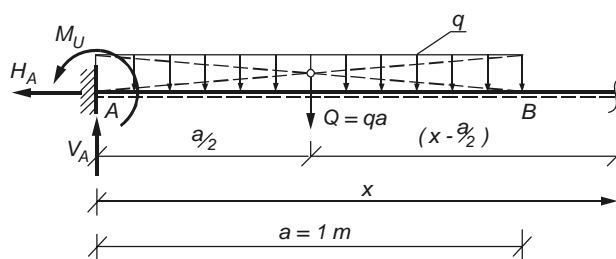
Równania M , T i N dla przedziału $B-C$ ($x \in \langle 1; 1,5 \rangle$) (por. rys. 10.9):

$$\begin{aligned} M(x) &= V_A x - M_U - qa \left(x - \frac{a}{2} \right) = \\ &= 20x - 7 - 20 \left(x - 0,5 \right) = 3,0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$T(x) = V_A - q \cdot a = 20 - 20 = 0$$

$$N(x) = 0$$

Wykresy M i T pokazane są na rysunku 10.7.



Rys. 10.9

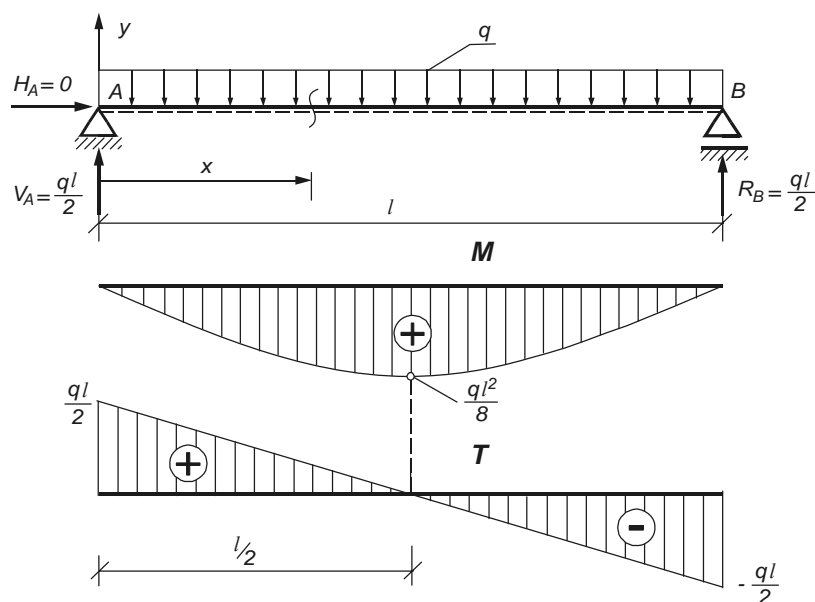
Na koniec warto zauważyć, że w omawianej belce równania sił wewnętrznych lepiej jest napisać biorąc pod uwagę siły z prawej strony przekroju. Na przykład w przedziale $B-C$ ($x_1 \in \langle 0; 0,5 \rangle$) – por. rys. 10.7), po prawej stronie przekroju działa tylko moment M , wobec czego mamy:

$$M(x_1) = M = 3 \text{ kNm}, \quad T(x_1) = 0, \quad N(x_1) = 0$$

10.3. Belki wolno podparte

Belki wolno podparte to pręty proste spoczywające na dwóch podporach przegubowych, z których jedna jest przesuwna, a druga nieprzesuwna.

Przykład 10.5. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych dla belki o obciążeniu ciągłym o stałej intensywności q (rys. 10.10).



Rys. 10.10

Rozwiązanie

Równania równowagi i wartości reakcji są:

$$\sum X = H_A = 0; \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = -q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot l = 0; \quad R_B = \frac{ql}{2}$$

$$\sum M_B = q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - V_A \cdot l = 0; \quad V_A = \frac{ql}{2}$$

Mamy tu jeden przedział obciążenia, gdzie $x \in \langle 0; l \rangle$. Równania sił wewnętrznych są następujące:

$$M(x) = V_A x - qx \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$T(x) = V_A - qx = \frac{ql}{2} - qx$$

$$N(x) = -H_A = 0$$

- Funkcja $M(x)$ jest krzywą drugiego stopnia, wartości momentów na początku i na końcu belki są:

$$\text{dla } x = 0: \quad M(0) = 0$$

$$\text{dla } x = l: \quad M(l) = 0$$

Zbadamy teraz ekstremum funkcji. W tym celu obliczamy pierwszą pochodną funkcji $M(x)$ i przyrównujemy ją do zera:

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0$$

$$\text{stąd: } x = \frac{l}{2}$$

$$\text{dla } x = \frac{l}{2}: \quad M(l/2) = M_{\text{extr}} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ql^2}{8}$$

- Funkcja $T(x)$ jest prostoliniowa:

$$\text{dla } x = 0: \quad T(0) = ql/2$$

$$\text{dla } x = l: \quad T(l) = -ql/2$$

Wykresy sił M i T pokazane są na rysunku 10.10. Należy tu zauważyć, że w przekroju, w którym moment osiąga wartość ekstremalną siła tnąca równa jest zero. Wynika to z tego, że pierwsza pochodna równania momentów jest równaniem sił tnących:

$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x) \quad (\text{por. rozdz. 9.2})$$

Przykład 10.6. Rozwiązać belkę wolno podpartą obciążoną jak na rysunku 10.11.

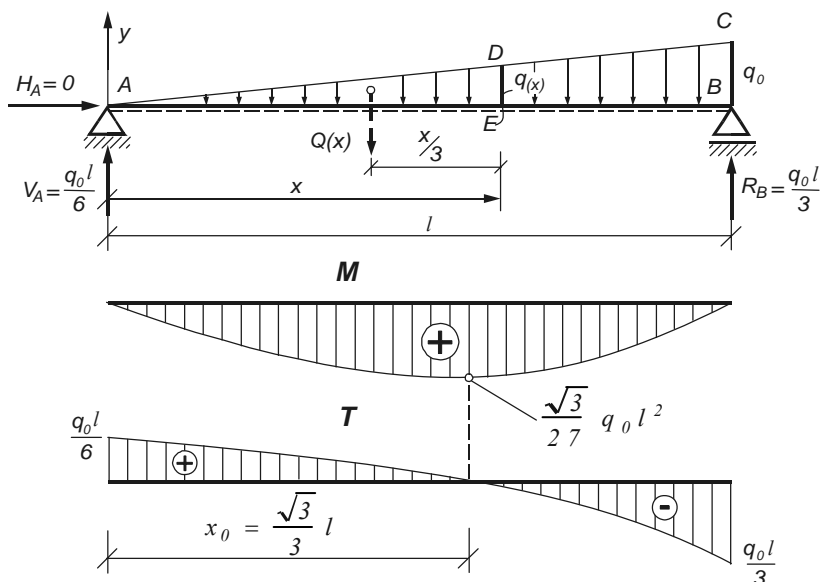
Rozwiązanie

Obciążenie rozłożone po trójkącie zastępujemy wypadkową $Q = q_0 l/2$ zaczepioną w środku ciężkości trójkąta obciążenia. Z równań równowagi otrzymujemy wartości reakcji:

$$\sum X = H_A = 0$$

$$\sum M_A = -\frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{2}{3} l + R_B \cdot l = 0; \quad R_B = \frac{q_0 l}{3}$$

$$\sum M_B = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{1}{3} l - V_A \cdot l = 0; \quad V_A = \frac{q_0 l}{6}$$



Rys. 10.11

Zanim napiszemy równania sił wewnętrznych, podobnie jak w przykładzie 10.3, obliczymy wartość siły $Q(x)$, czyli wypadkowej obciążenia rozłożonego znajdującego się po lewej stronie przekroju oznaczonego literą E (przekroju oddalonego o x od początku układu odniesienia – por. rys. 10.11).

Z proporcji $\frac{q(x)}{x} = \frac{q_0}{l}$ (z podobieństwa trójkątów AED i ABC),

mamy

$$q(x) = \frac{q_0 x}{l}$$

wobec tego

$$Q(x) = \frac{q(x) \cdot x}{2} = \frac{\frac{q_0 x}{l} \cdot x}{2} = \frac{q_0 x^2}{2l}$$

Możemy teraz napisać równania sił wewnętrznych (jest tu jeden przedział obciążenia: $x \in \langle 0; l \rangle$):

$$M(x) = V_A x - Q(x) \cdot \frac{1}{3} x = \frac{q_0 l}{6} x - \frac{q_0 x^2}{2l} \cdot \frac{1}{3} x = \frac{q_0 l}{6} x - \frac{q_0}{6l} x^3,$$

$$T(x) = V_A - Q(x) = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l} x^2$$

$$N(x) = -H_A = 0$$

Rzędne charakterystyczne wykresu momentów zginających, który jest krzywą trzeciego stopnia:

- dla $x = 0$: $M(0) = 0$
- dla $x = l$: $M(l) = 0$
- ekstremum funkcji $M(x)$
(pierwszą pochodną równania momentów przyrównujemy do zera i otrzymujemy położenie przekroju, w którym wartość momentu osiąga ekstremum):

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l} x^2 = 0$$

$$\text{stąd } x^2 = \frac{l^2}{3}, \quad x = x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} l \cong 0,577 \cdot l$$

$$\text{dla } x = x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} l: \quad M\left(\frac{\sqrt{3}l}{3}\right) = M_{\text{extr}} = \frac{\sqrt{3}}{27} q_0 l^2 \cong 0,064 q_0 l^2$$

Rzędne charakterystyczne wykresu sił tnących:

- dla $x = 0$: $T(0) = \frac{q_0 l}{6}$
- dla $x = l$: $T(l) = -\frac{1}{3} q_0 l$
- dla $x = x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} l$: $T\left(\frac{\sqrt{3}l}{3}\right) = 0$

Wykresy M i T pokazane są na rysunku 10.11.

Przykład 10.7. Rozwiązać belkę wolno podpartą obciążoną w punkcie C parą sił o momencie M jak na rysunku 10.12.

Rozwiązanie

Równania równowagi i oddziaływania:

$$\begin{aligned} \sum X &= H_A = 0 \\ \sum M_A &= R_B \cdot l - M = 0 \quad \rightarrow \quad R_B = M/l \\ \sum M_B &= -V_A \cdot l - M = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = -M/l \end{aligned}$$

Belka ma dwa przedziały obciążenia ze względu na momenty zginające ($A-C$ i $C-B$) oraz jeden przedział obciążenia ($A-B$) ze względu na siły tnące (rzut pary sił na dowolną oś równa się zeru). Siły osiowe w belce nie występują. Na rysunku 10.12b siła V_A narysowana jest z właściwym zwrotem – równania sił wewnętrznych napiszemy, posługując się tym właśnie rysunkiem.

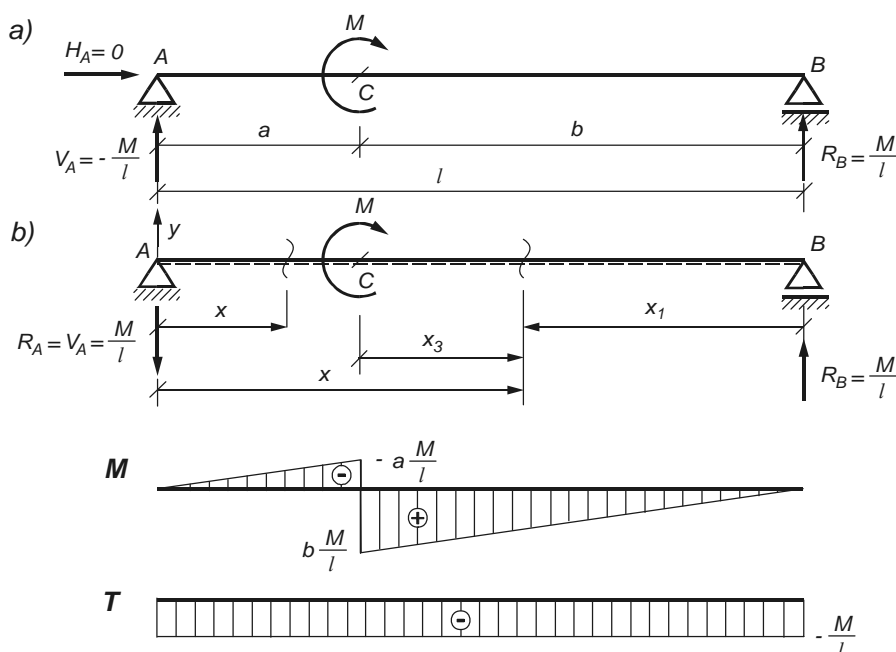
Równania momentów zginających:

$$\text{Przedział } A-C \ (x \in \langle 0 ; a \rangle): \quad M(x) = -V_A x = -\frac{M}{l} x$$

$$\text{Przedział } B-C \ (x_1 \in \langle 0 ; b \rangle): \quad M(x_1) = R_B x_1 = \frac{M}{l} x_1$$

Równanie sił tnących:

$$\text{Przedział } A-B \ (x \in \langle 0 ; l \rangle): \quad T(x) = -V_A = -\frac{M}{l}$$



Rys. 10.12

Wykresy M i T narysowane są na rysunku 10.12.

Uwaga:

Gdy obliczamy momenty zginające w przedziale $C-B$ na podstawie sił z lewej strony przekroju, przyjmując punkt A za początek układu odniesienia, równanie momentów zginających ma postać:

$$M(x) = -V_A x + M \quad \text{i ważne jest dla } x \text{ w przedziale od } a \text{ do } l \ (x \in \langle a ; l \rangle)$$

Wartość momentu na początku przedziału wynosi:

$$M(a) = -V_A \cdot a + M = -\frac{M}{l} \cdot a + M = -\frac{M}{l} (l - b) + M = \frac{Mb}{l}$$

a na końcu przedziału

$$M(l) = -V_A \cdot l + M = -\frac{M}{l} \cdot l + M = 0$$

Gdybyśmy przyjęli, że początek układu odniesienia dla przedziału $C-B$ znajduje się w punkcie C ($x_3 \in \langle 0; b \rangle$), to:

$$M(x_3) = -V_A(x_3 + a) + M;$$

$$M(0) = -V_A \cdot a + M = \frac{Mb}{l}; \quad M(b) = -V_A \cdot (b + a) + M = 0.$$

Wyniki obliczeń są zgodne z przeprowadzonymi wyżej.

Przykład 10.8. Rozwiązać belkę wolno podpartą ze wspornikami obciążoną siłą równomiernie rozłożoną (rys. 10.13). Do obliczeń przyjąć: $q = 2 \text{ kN/m}$, $l = 4,0 \text{ m}$, $a = 1,0 \text{ m}$.

Rozwiązanie

Składowa pozioma reakcji na podporze B równa jest zero, gdyż wszystkie siły działające na belkę są prostopadłe do jej osi.

Z równań równowagi otrzymujemy:

$$\sum M_A = -q(l + 2a) \cdot \frac{l}{2} + V_B \cdot l = 0$$

$$V_B = \frac{q(l + 2a)}{2} = \frac{2(4 + 2)}{2} = 6 \text{ kN}$$

$$\sum Y = R_A + V_B - q(l + 2a) = 0$$

$$R_A = q(l + 2a) - V_B = 2(4 + 2) - 6 = 6 \text{ kN}$$

Belka ma trzy przedziały zmienności momentów zginających i sił tnących. Przyjmujemy dla wszystkich przedziałów jeden układ odniesienia: położenie przekrojów poprzecznych będziemy określać odlegościami od punktu C .

Równania M i T dla przedziału $C-A$ ($x \in \langle 0; 1 \rangle$):

$$M(x) = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -x^2$$

$$M(0) = 0, \quad M(0,5) = -0,25 \text{ kNm}, \quad M(1) = -1 \text{ kNm}$$

$$T(x) = -q \cdot x = -2x$$

$$T(0) = 0, \quad T(0,5) = -1 \text{ kN}, \quad T(1) = -2 \text{ kN}$$

Równania M i T dla przedziału $A-B$ ($x \in \langle 1; 5 \rangle$):

$$M(x) = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + R_A(x - a) = -2x \frac{x}{2} + 6(x - 1) = -x^2 + 6x - 6$$

$$M(1) = -1 + 6 - 6 = -1 \text{ kNm}, \quad M(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 6 = 3 \text{ kNm},$$

$$M(5) = -5^2 + 6 \cdot 5 - 6 = -1 \text{ kNm}$$

$$T(x) = -q \cdot x + R_A = -2x + 6$$

$$T(1) = -2 \cdot 1 + 6 = 4 \text{ kN}, \quad T(5) = -2 \cdot 5 + 6 = -4 \text{ kN}$$

Równania M i T dla przedziału $B-D$ ($x \in \langle 5; 6 \rangle$):

$$M(x) = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + R_A(x-a) + V_B(x-a-l) =$$

$$-2x \frac{x}{2} + 6(x-1) + 6(x-5) = -x^2 + 12x - 36$$

$$M(5) = -5^2 + 12 \cdot 5 - 36 = -1 \text{ kNm},$$

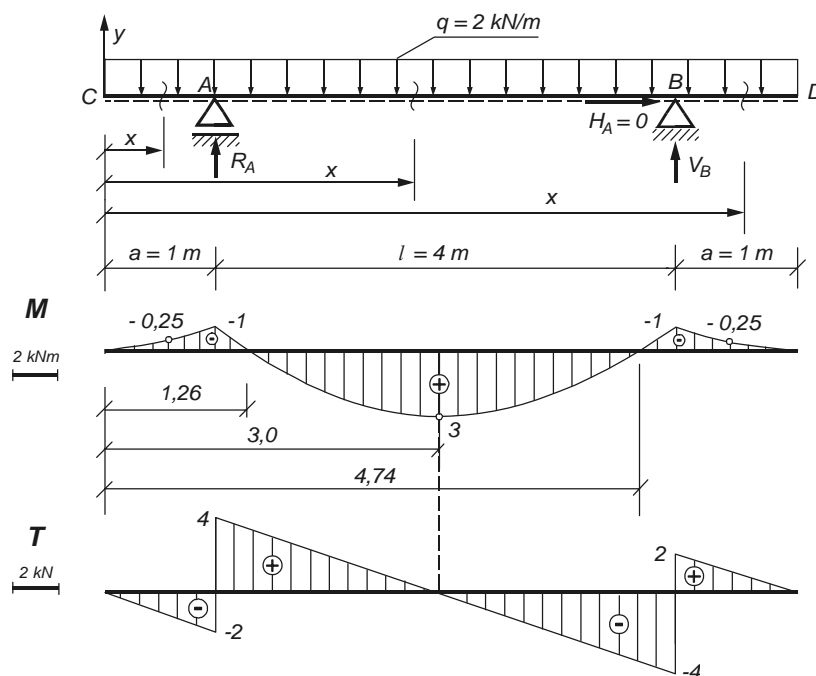
$$M(5,5) = -5,5^2 + 12 \cdot 5,5 - 36 = -0,25 \text{ kNm},$$

$$M(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 36 = 0 \text{ kNm}$$

$$T(x) = -q \cdot x + R_A + V_B = -2x + 6 + 6 = -2x + 12$$

$$T(5) = -2 \cdot 5 + 12 = 2 \text{ kN}, \quad T(6) = -2 \cdot 6 + 12 = 0 \text{ kN}$$

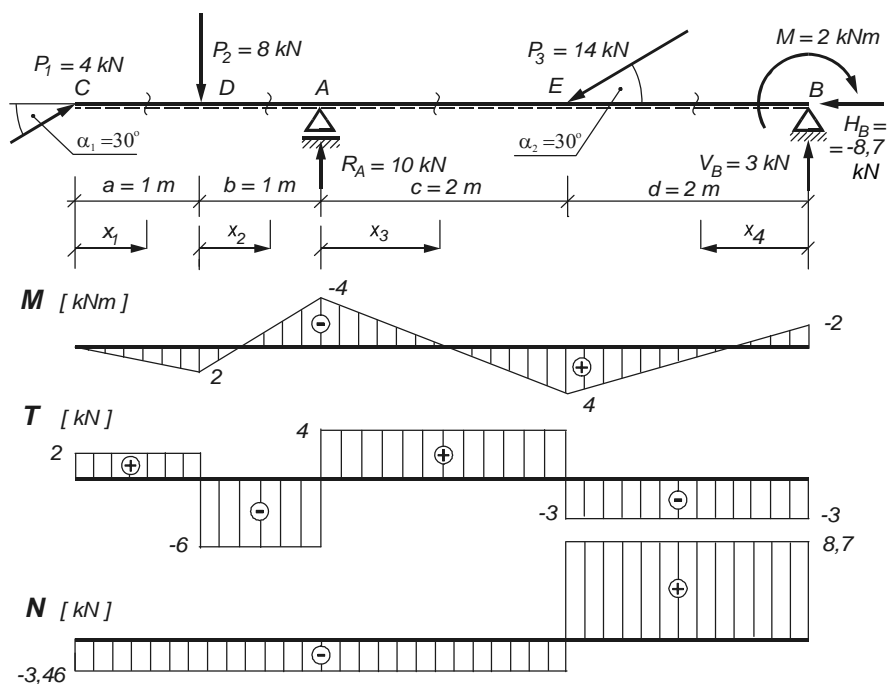
Wykresy M i T przedstawiono na rysunku 10.13.



Rys. 10.13

Przykład 10.9. Rozwiązać belkę wolno podpartą ze wspornikiem o schemacie pokazanym na rysunku 10.14.

Do obliczeń przyjąć: $P_1 = 4 \text{ kN}$, $P_2 = 8 \text{ kN}$, $P_3 = 14 \text{ kN}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$, $M = 2 \text{ kNm}$, $a = b = 1 \text{ m}$, $c = d = 2 \text{ m}$.



Rys. 10.14

Rozwiązanie

Wyznaczamy oddziaływania z równań równowagi:

$$\sum X = P_1 \cos \alpha_1 - P_3 \cos \alpha_2 - H_B = 0$$

$$H_B = P_1 \cos \alpha_1 - P_3 \cos \alpha_2 = 4 \cos 30^\circ - 14 \cos 30^\circ = -8,66 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = -R_A(c+d) - P_1 \sin \alpha_1(a+b+c+d) + P_2(b+c+d) + P_3 \sin \alpha_2 d - M = 0$$

$$R_A = \frac{1}{4}(-4 \sin 30^\circ \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 14 \sin 30^\circ \cdot 2 - 2) = 10 \text{ kN}$$

$$\sum Y = R_A + V_B + P_1 \sin \alpha_1 - P_2 - P_3 \sin \alpha_2 = 0$$

$$V_B = -R_A - P_1 \sin \alpha_1 + P_2 + P_3 \sin \alpha_2 = \\ = -10 - 4 \sin 30^\circ + 8 + 14 \sin 30^\circ = 3 \text{ kN}$$

Sprawdzenie

$$\sum M_C = -P_2 \cdot a + R_A(a+b) - P_3 \sin \alpha_2(a+b+c) - M + V_B(a+b+c+d) = \\ = -8 + 10 \cdot 2 - 14 \sin 30^\circ \cdot 4 - 2 + 3 \cdot 6 = 0$$

Belka posiada cztery przedziały zmienności sił M i T ($C-D$, $D-A$, $A-E$ i $E-B$) oraz dwa przedziały zmienności sił N ($C-E$ i $E-B$).

Układy odniesienia dla wykresów sił wewnętrznych przyjmujemy tak, jak na rysunku 10.14 (początek każdego z układów znajduje się na początku danego przedziału obciążenia).

Równania momentów zginających są następujące:

$$\begin{aligned} x_1 \in \langle 0; 1 \rangle : \quad M(x_1) &= P_1 \sin \alpha_1 x_1 = 2x_1 \\ x_2 \in \langle 0; 1 \rangle : \quad M(x_2) &= P_1 \sin \alpha_1 \cdot (x_2 + a) - P_2 x_2 = 2x_2 + 2 - 8x_2 = 2 - 6x_2 \\ x_3 \in \langle 0; 2 \rangle : \quad M(x_3) &= P_1 \sin \alpha_1 \cdot (x_3 + a + b) - P_2(x_3 + b) + R_A x_3 = \\ &= 2x_3 + 4 - 8x_3 - 8 + 10x_3 = -4 + 4x_3 \\ x_4 \in \langle 0; 2 \rangle : \quad M(x_4) &= -M + V_B x_4 = -2 + 3x_4 \end{aligned}$$

Równania sił tnących:

$$\begin{aligned} x_1 \in \langle 0; 1 \rangle : \quad T(x_1) &= P_1 \sin \alpha_1 = 2 \text{ kN} \\ x_2 \in \langle 0; 1 \rangle : \quad T(x_2) &= P_1 \sin \alpha_1 - P_2 = 2 - 8 = -6 \text{ kN} \\ x_3 \in \langle 0; 2 \rangle : \quad T(x_3) &= P_1 \sin \alpha_1 - P_2 + R_A = -6 + 10 = 4 \text{ kN} \\ x_4 \in \langle 0; 2 \rangle : \quad T(x_4) &= -V_B = -3 \text{ kN} \end{aligned}$$

Równania sił podłużnych:

$$\begin{aligned} x_1 \in \langle 0; 4 \rangle : \quad N(x_1) &= -P_1 \cos 30^\circ = -8 \cdot 0,866 = -3,46 \text{ kN} \\ x_4 \in \langle 0; 2 \rangle : \quad N(x_4) &= -H_B = -(-8,66) = 8,66 \text{ kN} \end{aligned}$$

Wykresy sił M , N i T – we wszystkich przedziałach liniowe – są pokazane na rysunku 10.14.

Przykład 10.10. Dla belki dwuwspornikowej, obciążonej jak na rysunku 10.15, wyznaczyć reakcje podpór i sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

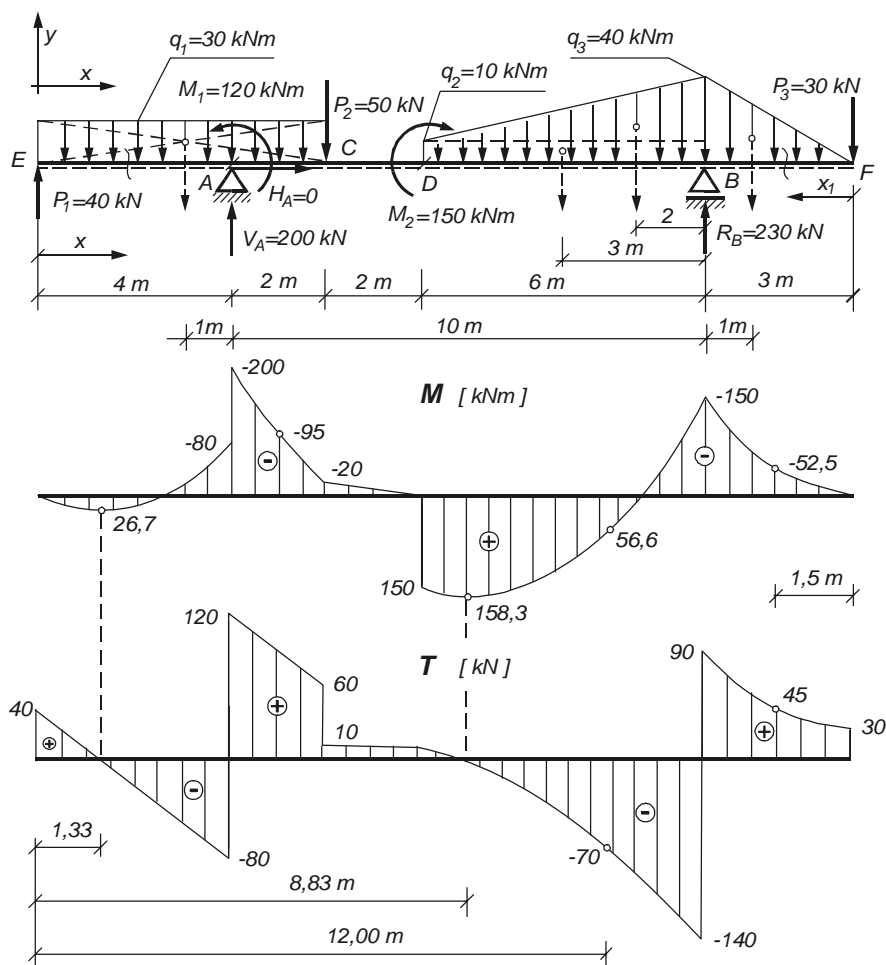
Dane: $P_1 = 40 \text{ kN}$, $P_2 = 50 \text{ kN}$, $P_3 = 30 \text{ kN}$, $q_1 = 30 \text{ kN/m}$, $q_2 = 10 \text{ kN/m}$, $q_3 = 40 \text{ kN/m}$, $M_1 = 120 \text{ kNm}$, $M_2 = 150 \text{ kNm}$.

Rozwiązanie

Obliczamy reakcje podpór z równań równowagi:

Uwaga: siła reprezentująca obciążenie trapezowe rozłożona jest tu na dwie siły: wypadkową obciążenia prostokątnego o intensywności q_2 oraz wypadkową obciążenia

trójkątnego zmieniającego się od wartości 0 do wartości równej $q_3 - q_2$ – (por. rys. 10.15 oraz rys. 10.16).



Rys. 10.15

$$\begin{aligned} \sum M_B = & -10 V_A - 14 P_1 + M_1 + 6q_1 \cdot 11 + 8 P_2 - M_2 + 6q_2 \cdot 3 + \\ & + 6(q_3 - q_2) \cdot 0,5 \cdot 2 - 3q_3 \cdot 0,5 \cdot 1 - 3P_3 = 0, \\ & V_A = 200 \text{ kN.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = & 10 R_B - 13 P_3 - 3q_3 \cdot 0,5 \cdot 11 - (q_3 - q_2) \cdot 6 \cdot 0,5 \cdot 8 - 6q_2 \cdot 7 - M_2 - 2P_2 + \\ & + 6q_1 \cdot 1 + M_1 - 4P_1 = 0, \\ & R_B = 230 \text{ kN.} \end{aligned}$$

$$\Sigma X = H_A = 0$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= -6q_1 - P_2 - P_3 - 6q_2 - 6(q_3 - q_2) \cdot 0,5 - 3q_3 \cdot 0,5 + P_1 + R_A + R_B = \\ &= 10(-18-5-3-6-9-6+4+20+23) = 0 \end{aligned}$$

Układy odniesienia dla wykresów sił wewnętrznych przyjmujemy tak, jak zaznaczono na rysunku 10.15 i 10.16. Dla pierwszych czterech przedziałów obciążenia (licząc od strony lewej) przyjmujemy, że ich początek znajduje się w punkcie E . Siły wewnętrzne w przedziale ostatnim, piątym, wyznaczmy w oparciu o siły z prawej strony przekroju, w układzie o początku w punkcie F .

Równania sił wewnętrznych w przedziale $E-A$ ($x \in \langle 0 ; 4 \rangle$):

$$M(x) = P_1 x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 40x - 15x^2$$

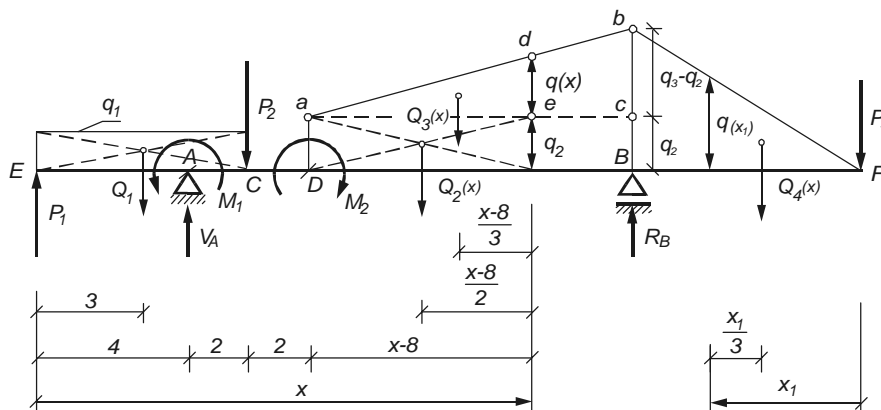
$$M(0) = 0, \quad M(4) = -80 \text{ kNm}$$

$$M'(x) = 40 - 30x = 0 \rightarrow x = 1,33 \text{ m}$$

$$M(1,33) = M_{\max} = 26,67 \text{ kNm}$$

$$T(x) = P_1 - q_1 x = 40 - 30x$$

$$T(0) = 40 \text{ kN}, \quad T(4) = -80 \text{ kN}$$



Rys. 10.16

Równania sił wewnętrznych w przedziale $A-C$ ($x \in \langle 4 ; 6 \rangle$):

$$M(x) = P_1 x - q_1 x \frac{x}{2} + V_A(x-4) - M_1 = -15x^2 + 240x - 920$$

$$M(4) = -200 \text{ kNm}, \quad M(6) = -20 \text{ kNm}, \quad M(5) = -95 \text{ kNm},$$

$$T(x) = P_1 - q_1 x + V_A = -30x + 240$$

$$T(4) = 120 \text{ kN}, \quad T(6) = 60 \text{ kN}$$

Równania sił wewnętrznych w przedziale $C-D$ ($x \in \langle 6; 8 \rangle$):

$$M(x) = P_1 x - 6q_1(x-3) + V_A(x-4) - M_1 - P_2(x-6) = 10x - 80$$

$$M(6) = -20 \text{ kNm}, \quad M(8) = 0 \text{ kNm}$$

$$T(x) = P_1 - 6q_1 + V_A - P_2 = 10 \text{ kN}$$

Równania sił wewnętrznych w przedziale $D-B$ ($x \in \langle 8; 14 \rangle$):

(siły działające po lewej stronie przekrojów w tym przedziale i ich ramiona działania pokazane są na rysunku 10.16. Z podobieństwa trójkątów abc i ade wynika proporcja: $\frac{q(x)}{x-8} = \frac{q_3 - q_2}{6}$, czyli możemy wyznaczyć wielkość $q(x)$ potrzebną do obliczenia wypadkowej sił rozłożonych po trójkącie, działających na lewo od rozpatrywanego przekroju: $q(x) = \frac{(q_3 - q_2)(x-8)}{6}$).

$$M(x) = P_1 x - 6q_1(x-3) + V_A(x-4) - M_1 - P_2(x-6) + M_2 - Q_2(x) \frac{x-8}{2} - Q_3(x) \frac{x-8}{3} =$$

$$= P_1 x - 6q_1(x-3) + V_A(x-4) - M_1 - P_2(x-6) + M_2 +$$

$$- q_2(x-8) \cdot \frac{(x-8)}{2} - \frac{(q_3 - q_2)(x-8)}{6} \cdot \frac{(x-8)}{2} \cdot \frac{(x-8)}{3} =$$

$$= 10x + 70 - \frac{10(x-8)^2}{2} - \frac{30(x-8)^3}{36}$$

Wartość ekstremalna funkcji $M(x)$ występuje tam, gdzie pierwsza pochodna równania momentów równa jest zeru:

$$\frac{dM(x)}{dx} = 10 - 10(x-8) - \frac{30(x-8)^2}{12} = -2,5x^2 + 30x - 70 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4(-2,5)(-70) = 200$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30 \pm \sqrt{200}}{2(-2,5)} \rightarrow x_1 = 3,17 \text{ m}, \quad x_2 = 8,83 \text{ m}$$

(przekrój o odciętej $x_1 = 3,17 \text{ m}$ znajduje się poza rozpatrywanym przedziałem obciążenia).

By narysować wykres, obliczymy wartości momentów zginających na początku przedziału, na jego końcu, w miejscu występowania ekstremum oraz dla $x = 12,0 \text{ m}$.

$$M(8) = 150 \text{ kNm}, \quad M(14) = -150 \text{ kNm},$$

$$M_{\max} = M(8,33) = 158,30 \text{ kNm}, \quad M(12) = 56,66 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned}
 T(x) &= P_1 - 6q_1 + V_A - P_2 - Q_2(x) - Q_3(x) = \\
 &= P_1 - 6q_1 + V_A - P_2 - q_2(x-8) - \frac{(q_3 - q_2)(x-8)}{6} \cdot \frac{(x-8)}{2} = \\
 &= 10 - 10(x-8) - \frac{30(x-8)^2}{12}
 \end{aligned}$$

Wykres sił tnących narysujemy po wyliczeniu ich wartości w czterech punktach:

$$T(8) = 10, \quad T(8,33) = 0 \text{ kN}, \quad T(12) = -70 \text{ kN}, \quad T(14) = -140 \text{ kN}$$

Równania sił wewnętrznych w przedziale $F-B$ ($x_1 \in \langle 0; 3 \rangle$):

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{q(x_1)}{x_1} = \frac{q_3}{3}, \text{ stąd: } q(x_1) = \frac{q_3 x_1}{3} \text{ zaś } Q_4(x_1) = \frac{q(x_1)x_1}{2} = \frac{q_3 x_1^2}{6} \right) \\
 M(x_1) = -P_3 x_1 - Q_4(x) \cdot \frac{x_1}{3} = -P_3 x_1 - \frac{q_3 x_1^2}{6} \cdot \frac{x_1}{3} = -30x_1 - \frac{40x_1^3}{18} \\
 M(0) = 0, \quad M(1,5) = -52,5, \quad M(3) = -150 \text{ kNm} \\
 T(x_1) = P_3 + Q_4(x_1) = P_3 + \frac{q_3 x_1^2}{6} = 30 + \frac{40x_1^2}{6} \\
 T(0) = 30, \quad T(1,5) = 45, \quad T(3) = 90 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Wykresy momentów zginających i sił tnących pokazane są na rysunku 10.15.

10.4. Belki wieloprzęsłowe przegubowe

10.4.1. Wiadomości wstępne

Belki oparte na większej ilości podpór niż dwie nazywają się belkami wieloprzęsłowymi (rys. 10.17a). Zależnie od liczby przęseł będą to belki dwu-, trój-, ... n -przęsłowe. Belka n -przęsłowa spoczywa na $n+1$ podporach, z których jedna jest nieprzesuwna, pozostałe zaś pozwalają na przesuw podłużny. Rozpatrując taką belkę jako jedną tarczę, możemy ułożyć trzy równania równowagi dla zadanych sił czynnych i niewiadomych oddziaływań podpór. W belce tego rodzaju liczba niewiadomych składowych reakcji wynosi $n_n > 3$, a zatem belka taka jest $(n_n - 3)$ -krotnie statycznie niewyznaczalna. Aby belkę taką przekształcić w ustrój statycznie wyznaczalny, dodaje się w przęsłach tyle przegubów, ile wynosi stopień statycznej niewyznaczalności. Rozmieszczenie przegubów jest z teoretycznego punktu widzenia obojętne, byleby ustrój pozostał geometrycznie niezmienny. Dodanie przegubu daje możliwość ułożenia dodatkowego równania, wypływającego z warunku, że moment zginający, czyli suma momentów statycznych wszystkich sił działających na ustrój po jednej stronie przegubu względem bieguna obranego w tym przegubie równa się zeru. Jest tak, gdyż w miejscu

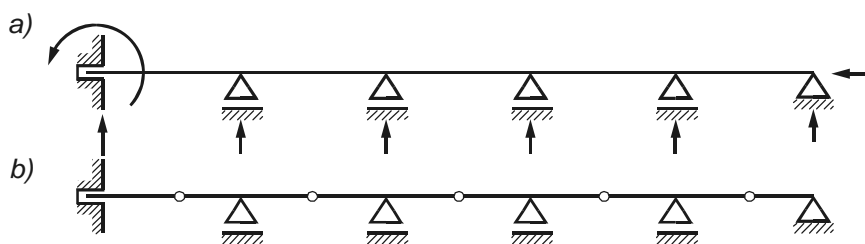
przegubu możliwy jest swobodny obrót obu łączonych przegubem przekrojów i teoretycznie zakłada się brak tarcia przy tym obrocie.

Przykład belki wieloprzęsłowej (pięcioprzęsłowej) pokazany jest na rysunku 10.17a. Skrajna lewa podpora tej belki jest utwierdzeniem z możliwością przesuwu podłużnego, prawa podpora skrajna – podporą przegubową nieprzesuwną, pozostałe podpory to podpory przegubowe przesuwne.

W rozpatrywanym przypadku liczba niewiadomych oddziaływań zewnętrznych wynosi $n_n = 8$, a mianowicie: po dwie niewiadome na prawej i lewej podporze skrajnej oraz po jednej niewiadomej na pośrednich podporach przegubowych przesuwnych. Liczbę tzw. niewiadomych nadliczbowych określamy z zależności:

$$n_h = n_n - 3 = 8 - 3 = 5$$

Wynika stąd, że aby belkę pokazaną na rysunku 10.17a przekształcić w ustrój statycznie wyznaczalny, należy dodać 5 przegubów. Można je rozmieścić na przykład tak, jak to pokazano na rysunku 10.17b.



Rys. 10.17

Na rysunkach 10.18a ÷ g pokazane są różne sposoby rozmieszczenia przegubów w belkach czteroprzęsłowych.

Najczęściej stosowane w praktyce są belki o schematach takich jak na rysunku 10.18a i b.

Belki pokazane na rysunku 10.18d i e są przykładami układów geometrycznie zmiennych (zaznaczono możliwy sposób przemieszczenia ich osi z pominięciem przemieszczeń poziomych jako bardzo małych w porównaniu z pionowymi oraz zaznaczono też odcinki statycznie niewyznaczalne tych belek). Belki takie są nieprzydatne w praktyce.

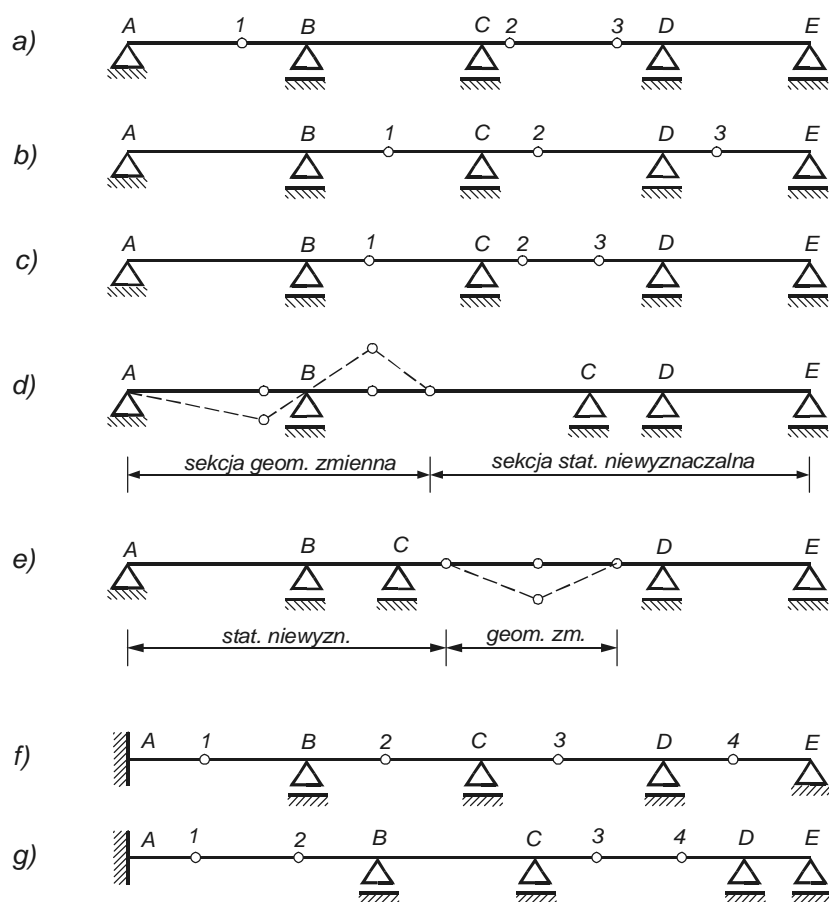
Belka na rysunku 10.18a składa się z czterech sekcji połączonych przegubami, z których dwie: belka dwuwspornikowa spoczywająca na podporach B i C oraz belka jednowspornikowa spoczywająca na podporach D i E, mogą pracować samodzielnie; nazywamy je belkami podstawowymi. Pozostałe dwie belki, to: belka A-I oparta na podporze A i końcu wspornika belki I-2 oraz belka 2-3 oparta na wspornikach belek I-2 i 3-E. Belkę A-I nazywamy jednostronnie podwieszoną, belkę 2-3 nazywamy belką podwieszoną.

Na schemacie 10.18b mamy tylko jedną belkę podstawową (jednowspornikową spoczywającą na podporach A i B); pozostałe belki są belkami jednostronnie podwieszonymi.

Na schemacie 10.18f belką podstawową jest wspornik A-I, pozostałe belki są jednostronnie podwieszone. Schemat 10.18g ma trzy belki podstawowe (wspornik A-I oraz

belka dwuwspornikowa 2-3 i jednowspornikowa 4-E) oraz dwie belki podwieszane (1-2 i 3-4).

Zaletą belek wieloprzęsłowych przegubowych w porównaniu z układem belek jednoprzęsłowych jest to, że obciążenie wsporników działa odciążająco na część międzypodporową belki*, dzięki czemu dobierając odpowiednio rozstaw podpór i długości wsporników, czyli rozstaw przegubów, możemy zwiększyć rozpiętości przęseł i osiągnąć korzyści ekonomiczne.



Rys. 10.18

* przy założeniu, że zwroty sił obciążających wsporniki i część międzypodporową są jednakowe

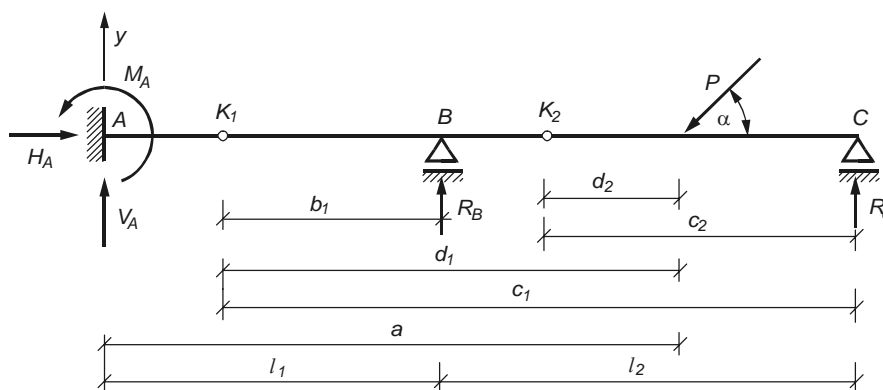
10.4.2. Sposoby rozwiązywania belek przegubowych

Omówimy tu dwa sposoby analityczne.

Sposób pierwszy polega na ułożeniu trzech równań równowagi dla wszystkich sił czynnych i biernych, działających na ustrój oraz ułożeniu tylu równań momentów zginających, ile jest w belce przegubów. W każdym bowiem przegubie moment zginający jest równy zero. Dla belki przykładowej pokazanej na rysunku 10.19, równania te mogą być zapisane w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\sum X &= H_A - P \cos \alpha = 0 \\ \sum Y &= V_A + R_B + R_C - P \sin \alpha = 0 \\ \sum M_A &= M_A + R_B \cdot l_1 + R_C(l_1 + l_2) - P \sin \alpha \cdot a = 0 \\ M_{K_2} &= R_C \cdot c_2 - P \sin \alpha \cdot d_2 = 0 \\ M_{K_1} &= R_C \cdot c_1 + R_B \cdot b_1 - P \sin \alpha \cdot d_1 = 0\end{aligned}$$

Powyższe równania równowagi i równania momentów zginających można też zapisać inaczej, zastępując np. równania rzutów równaniami momentów; możemy też liczyć momenty w przegubach uwzględniając siły nie z prawej, lecz z lewej strony przegubów.

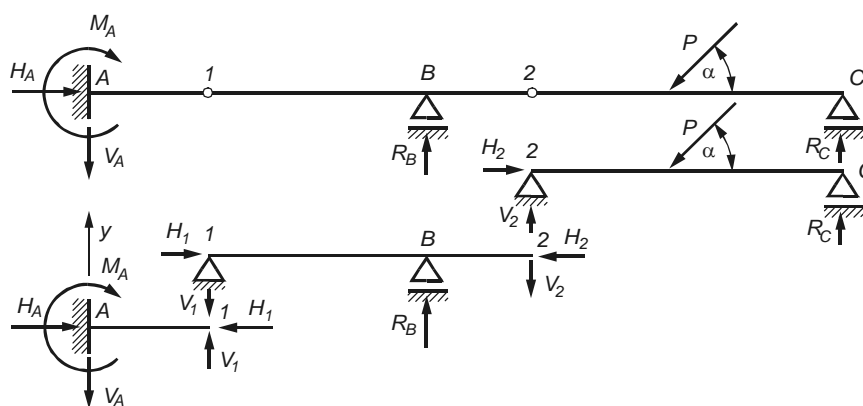


Rys. 10.19

Rozwiązanie powyższego układu pięciu równań z pięcioma niewiadomymi da nam w wyniku wartości reakcji podpór i w związku z tym możliwość sporządzenia wykresów sił wewnętrznych w belce.

Sposób drugi polega na podziale belki przegubowej na belki podstawowe i podwieszane, jak to pokazano na rysunku 10.20. Wymaga to wprowadzenia w przegubach reakcji, z których każda przedstawia dwie niewiadome (siła o nieznanym kierunku).

Belka $A-1$ na rysunku 10.20 jest belką podstawową: statycznie wyznaczalna i geometrycznie niezmienna jest oparciem dla lewego końca belki $1-2$ podpartej w punkcie B na podporze przegubowej przesuwnej (jest to belka jednostronnie podwieszona). Na wsporniku belki $1-2$, w punkcie 2 , oparty jest lewy koniec drugiej belki jednostronnie podwieszanej – belki $2-C$. Prawy koniec tej belki opiera się na podporze przegubowej przesuwnej C .



Rys. 10.20

Biorąc pod uwagę, że dla każdej z tych trzech belek możemy wypisać trzy równania równowagi, otrzymujemy odpowiednią liczbę równań dla wyznaczenia wszystkich niewiadomych. Ilość równań, którymi dysponujemy wynosi dziewięć $(3 \cdot 3)$, i niewiadomych jest również dziewięć $(M_A, H_A, V_A, V_1, H_1, R_B, H_2, V_2 \text{ i } R_C)$.

Wprowadzenie większej liczby niewiadomych w porównaniu ze sposobem pierwszym komplikuje tylko pozornie rozwiązanie; wielkości oddziaływań w przegubach muszą bowiem i tak być wyznaczone w celu zaprojektowania konstrukcji przegubu. Poza tym przy sposobie drugim układ równań rozwiązuje się łatwiej, niż przy sposobie pierwszym.

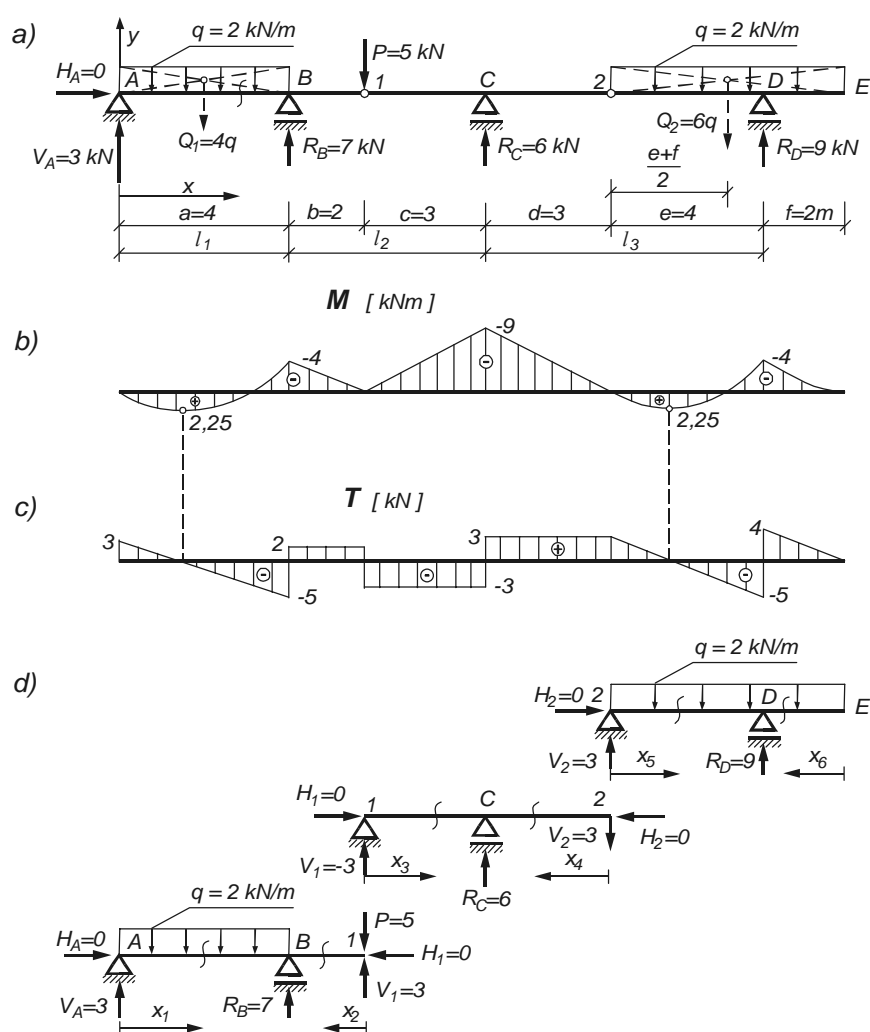
Rozwiązywanie sposobem drugim zaczyna się od belki „najwyżej” podwieszanej; w omawianym przypadku pokazanym na rysunku 10.20, od belki $2-C$, której oddziaływanie na belkę $1-2$ obrazują siły równe co do modułu i kierunku siłom reakcji H_2 i V_2 , lecz mające przeciwne do tych reakcji zwroty.

W następnej kolejności rozwiązujemy belkę $1-2$ uwzględniając w jej obciążeniu wyliczone wcześniej siły H_2 i V_2 . Jako ostatnią rozwiązujemy belkę $A-1$ uwzględniając oczywiście obciążenie jej siłami H_1 i V_1 .

Przykład 10.11. Rozwiązać belkę przegubową trójprzęsłową, której schemat statyczny, wymiary i obciążenie pokazano na rysunku 10.21.

Rozwiązanie przeprowadzimy dwoma sposobami opisanymi powyżej w niniejszym rozdziale.

Sposób pierwszy: Oddziaływania zaznaczone na rysunku 10.21a wyliczymy z trzech równań równowagi i dwóch równań momentów zginających, przy czym wykorzystamy te równania zapisując je w kolejności takiej, by każde z nich zawierało co najwyżej jedną niewiadomą:



Rys. 10.21

Gdy ustrój znajduje się w równowadze, suma rzutów wszystkich sił na oś x równa jest zeru

$$\sum X = H_A = 0$$

Moment zginający w przegubie 2 równa się zeru:

$$M_2 = R_D \cdot e - q(e+f) \frac{(e+f)}{2} = 0; \quad R_D = \frac{1}{e} q \frac{(e+f)^2}{2} = \frac{1}{4} 2 \frac{6^2}{2} = 9 \text{ kN}$$

Moment zginający w przegubie 1 równa się zeru:

$$M_1 = R_C \cdot c + R_D(l_3 + c) - q(e+f) \left(c + d + \frac{e+f}{2} \right) = 0$$

$$R_C = \frac{1}{c} \left(-R_D(l_3 + c) + q(e+f) \left(c + d + \frac{e+f}{2} \right) \right) = \frac{1}{3} (-9 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 9) = 6 \text{ kN}$$

Suma momentów wszystkich sił względem punktu A równa się zeru:

$$\begin{aligned} \sum M_A = R_D(l_1 + l_2 + l_3) + R_C(l_1 + l_2) + R_B \cdot l_1 - P(l_1 + b) + \\ - q(e+f) \left(l_1 + l_2 + d + \frac{e+f}{2} \right) - q \cdot l_1 \frac{l_1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$R_B = \frac{1}{4} \left(-9 \cdot 16 - 6 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{4^2}{2} \right) = 7 \text{ kN}$$

Suma rzutów wszystkich sił na oś y równa się zeru:

$$\begin{aligned} \sum Y = V_A + R_B + R_C + R_D - q \cdot a - P - q(e+f) = 0 \\ V_A = -R_B - R_C - R_D + q \cdot a + P + q(e+f) = \\ = -7 - 6 - 9 + 2 \cdot 4 + 5 + 2 \cdot 6 = 3 \text{ kN} \end{aligned}$$

Po wyliczeniu oddziaływań dobrze jest wykonać sprawdzenie otrzymanych wyników. Obliczymy np. sumę momentów wszystkich sił względem bieguna obranego w przegubie 1

$$\sum M_1 = -V_A \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot 4 - R_B \cdot 2 + R_C \cdot 3 + R_D \cdot 10 - q \cdot 6 \cdot 9 = 0 \quad (O.K.)$$

W belce jest sześć przedziałów obciążenia. Zapišemy równania sił wewnętrznych dla każdego z nich, przyjmąwszy układ odniesienia tak, jak na rysunku 10.21a. (początek w punkcie A). Równania te są następujące:

Przedział $A-B$ ($x \in (0; 4)$)

$$M(x) = V_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$T(x) = R_A - q \cdot x$$

Przedział *B-1* ($x \in \langle 4 ; 6 \rangle$)

$$M(x) = V_A x - 4q(x-2) + R_B(x-4)$$

$$T(x) = V_A + R_B - 4q$$

Przedział *1-C* ($x \in \langle 6 ; 9 \rangle$)

$$M(x) = V_A x - 4q(x-2) + R_B(x-4) - P(x-6)$$

$$T(x) = V_A - 4q + R_B - P$$

Przedział *C-2* ($x \in \langle 9 ; 12 \rangle$)

$$M(x) = V_A x - 4q(x-2) + R_B(x-4) - P(x-6) + R_C(x-9)$$

$$T(x) = V_A - 4q + R_B - P + R_C$$

Przedział *2-D* ($x \in \langle 12 ; 16 \rangle$)

$$M(x) = V_A x - 4q(x-2) + R_B(x-4) - P(x-6) + R_C(x-9) - \frac{q(x-12)^2}{2}$$

$$T(x) = V_A - 4q + R_B - P + R_C - q(x-12)$$

Przedział *D-E* ($x \in \langle 16 ; 18 \rangle$)

$$M(x) = V_A x - 4q(x-2) + R_B(x-4) +$$

$$+ R_B(x-4) - P(x-6) + R_C(x-9) - \frac{q(x-12)^2}{2} + R_D(x-16)$$

$$T(x) = V_A - 4q + R_B - P + R_C - q(x-12) + R_D$$

Wykresy M i T przedstawiono na rysunku 10.20b i c, zaś podstawienie danych do równań i sprawdzenie podanych wyników obliczeń pozostawia się czytelnikowi.

Sposób drugi rozwiązania polega na tym, że rozpatrujemy schemat danej belki przegubowej, uwzględniając oddziaływania jej części podwieszonych na siebie nawzajem i na belkę podstawową (rys. 10.21d). Belką podstawową jest tu belka *A-1* – wolno podparta ze wspornikiem, na końcu którego opiera się lewy kraniec belki jednostronnie podwieszanej *1-2*, na której z kolei w punkcie 2 opiera się lewy koniec belki jednostronnie podwieszanej *2-E*.

Obliczenia zaczynamy od belki *2-E*, dla której obciążeniem zewnętrznym czynnym jest dane obciążenie równomiernie rozłożone q . Wykorzystując równania równowagi otrzymamy następujące wartości oddziaływań w tej belce:

$$H_2 = 0; \quad V_2 = 3 \text{ kN}; \quad R_D = 9 \text{ kN}$$

(sprawdzenie tych wyników i następnych pozostawia się czytelnikowi).

Przechodzimy teraz do belki *1-2*, która nie ma zadanych obciążeń zewnętrznych czynnych, do końca której przykładamy siły H_2 i V_2 z przeciwnymi zwrotami, czyli siły, jakimi działa na belkę *1-2* belka *2-E*. (Założyliśmy tu, że siła P , która działa

w przegubie I będzie obciążała wspornik belki $A-I$, choć równie dobrze mogłaby ona działać na podporę I belki $I-2$).

Reakcje w podporach I i C belki $I-2$ są:

$$H_I = 0; \quad V_I = -3 \text{ kN}; \quad R_C = 6 \text{ kN} \quad (\text{prawdziwy zwrot siły } V_I \text{ jest w dół})$$

Z kolei reakcje H_I i V_I z przeciwnymi zwrotami przenosimy na belkę podstawową $A-I$, dla której obliczamy reakcje w podporach A i B , uwzględniając również obciążenie równomiernie rozłożone q i siłę P . Otrzymujemy:

$$H_A = 0; \quad V_A = 3 \text{ kN}; \quad R_B = 7 \text{ kN}$$

Otrzymaliśmy więc reakcje takie same jak w pierwszym sposobie rozwiązania; ponieważ jednak obliczyliśmy również siły wewnętrzne w przegubach, równania sił wewnętrznych możemy teraz zapisać dla każdej belki z osobna.

Dla poszczególnych przedziałów obciążenia przyjęto układy odniesienia tak, jak to zaznaczono na rysunku 10.21d. Siły wewnętrzne liczone są raz z lewej, raz z prawej strony przekrojów, gdyż równania sił wewnętrznych mają wtedy stosunkowo najprostszą postać:

$$\text{Przedział } A-B \quad (x_1 \in \langle 0; 4 \rangle): \quad M(x_1) = V_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2} = 3x_1 - x_1^2;$$

$$T(x_1) = V_A - qx_1 = 3 - 2x_1$$

$$\text{Przedział } I-B \quad (x_2 \in \langle 0; 2 \rangle): \quad M(x_2) = V_I x_2 - Px_2 = -2x_2;$$

$$T(x_2) = -V_I + P = 2$$

$$\text{Przedział } I-C \quad (x_3 \in \langle 0; 3 \rangle): \quad M(x_3) = V_I x_3 = -3x_3;$$

$$T(x_3) = V_I = -3$$

$$\text{Przedział } 2-C \quad (x_4 \in \langle 0; 3 \rangle): \quad M(x_4) = -V_2 x_4 = -3x_4;$$

$$T(x_4) = V_2 = 3$$

$$\text{Przedział } 2-D \quad (x_5 \in \langle 0; 4 \rangle): \quad M(x_5) = V_2 x_5 - \frac{q x_5^2}{2} = 3x_5 - x_5^2;$$

$$T(x_5) = V_2 - qx_5 = 3 - 2x_5$$

$$\text{Przedział } E-D \quad (x_6 \in \langle 0; 2 \rangle): \quad M(x_6) = -\frac{q x_6^2}{2} = -x_6^2;$$

$$T(x_6) = qx_6 = 2x_6$$

Na podstawie powyższych równań otrzymamy wykresy sił wewnętrznych takie jak poprzednio.

Przykład 10.12. Rozwiązać belkę dwuprzęsłową przegubową pokazaną na rysunku 10.22.

Omówimy tu rozwiązanie belki sposobem drugim, podając jedynie wyniki obliczeń, szczegółowe rozwiązanie pozostawiając czytelnikowi.

W zadanym schemacie mamy dwie belki podstawowe: wspornik $A-I$ i belkę wolno podpartą $2-3$. Na końcach tych belek podwieszona jest belka $I-2$. Oddziaływanie belki podwieszanej na końce wsporników belek podstawowych obrazują siły R_1 i R_2 . Sił poziomych w utwierdzeniu i przegubach nie zaznaczono, gdyż są one równe zeru ze

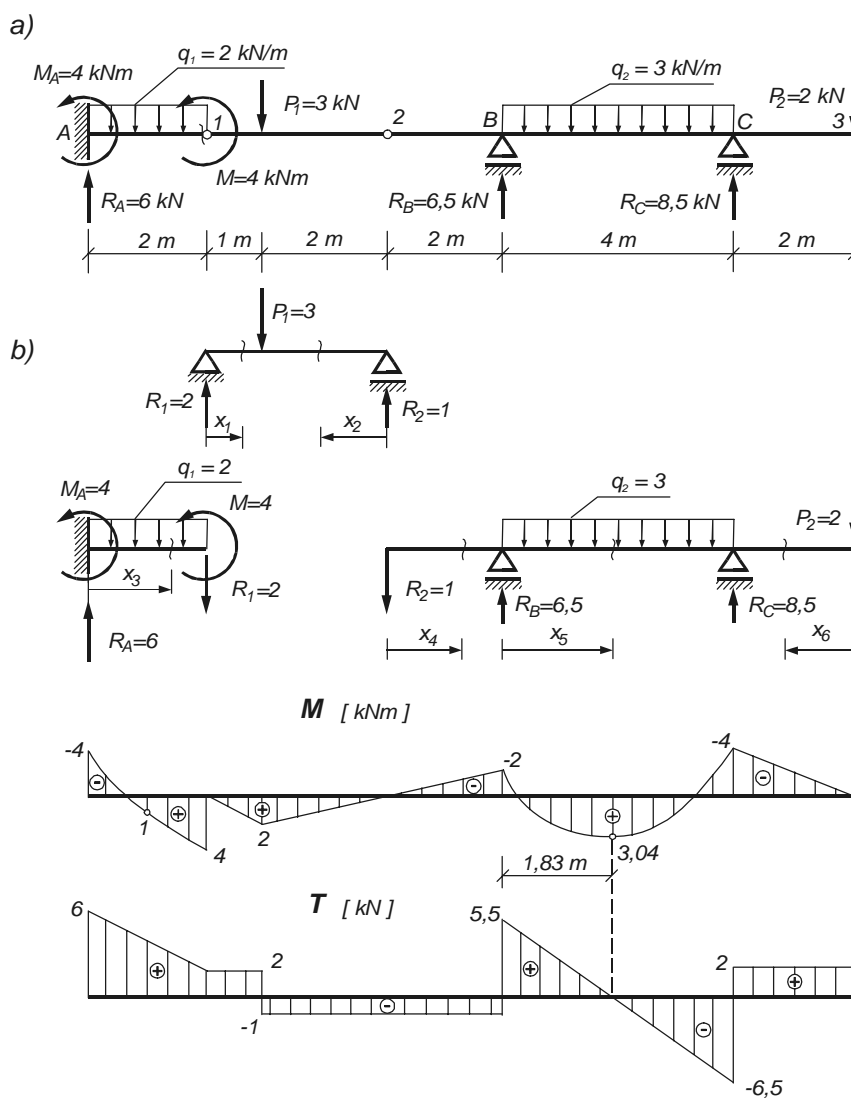
względu na to, iż omawiana belka przegubowa obciążona jest jedynie siłami prostopadłymi do osi.

Obliczenia rozpoczynamy od belki podwieszanej 1-2 obciążonej siłą P_1 . Z równań równowagi otrzymujemy wartości reakcji:

$$R_1 = 2 \text{ kN}, \quad R_2 = 1 \text{ kN}$$

Równania sił wewnętrznych zapiszemy w sposób najprostszy, jeśli oierzemy układy odniesienia tak, jak zaznaczono to na rysunku 10.22b:

$$M(x_1) = R_1 x_1; \quad T(x_1) = R_1; \quad M(x_2) = R_2 x_2; \quad T(x_2) = -R_2$$



Rys. 10.22

Kolejność rozwiązywania belek podstawowych jest obojętna, przejdziemy więc np. do belki $A-I$: obciążonej obciążeniem q_1 , momentem M i siłą R_1 zwróconą w dół. Otrzymamy:

$$R_A = 6 \text{ kN}, \quad M_A = 4 \text{ kNm}$$

Równania sił wewnętrznych:

$$M(x_3) = R_A x_3 - M_A - \frac{q_1 x_3^2}{2}$$

$$T(x_3) = R_A - q_1 x_3$$

Rozwiązując belkę 2-3 obciążoną siłą równomiernie rozłożoną q_2 , siłą P_2 i siłą R_2 zwróconą w dół, otrzymujemy:

$$R_B = 6,5 \text{ kN}, \quad R_C = 8,5 \text{ kN}$$

Równania sił wewnętrznych są:

$$M(x_4) = -R_2 x_4$$

$$T(x_4) = -R_2$$

$$M(x_5) = -R_2(x_5 + 2) + R_B x_5 - \frac{q_2 x_5^2}{2}$$

$$T(x_5) = -R_2 + R_B - q_2 x_5$$

$$M(x_6) = -P_2 x_6$$

$$T(x_6) = P_2$$

Wykresy sił wewnętrznych pokazane są na rysunku 10.22.

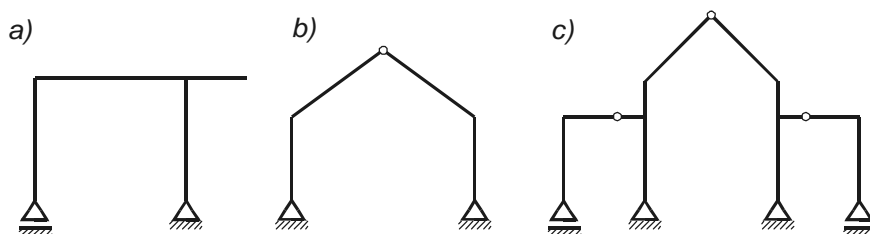
11. Ramy i łuki

11.1. Pojęcia ogólne i uwagi wstępne

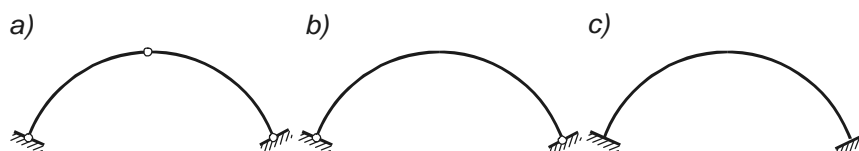
Ramą nazywamy układ składający się z prętów (przeważnie prostoliniowych) połączonych ze sobą we wszystkich lub tylko w niektórych węzłach w sposób sztywny (por. rys. 11.1a, b i c, na którym przedstawiono odpowiednio: ramę, ramę trójprzegubową i ramę wieloprzegubową).

Węzeł nazywamy element konstrukcyjny stanowiący połączenie schodzących się w nim prętów, których osie przecinają się w tzw. punkcie węzłowym. Sztywność węzła wyklucza wzajemny obrót połączonych w nim prętów.

Pręt zakrzywiony odpowiednio podparty lub układ takich prętów nazywamy **łukiem** (rys. 11.2a, b i c).



Rys. 11.1. Ramy



Rys. 11.2. Łuki

Rozwiązywanie ram i łuków polega na wyznaczeniu reakcji podpór oraz na sporządzeniu wykresów sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach obciążenia.

Ustroje pokazane na rysunku 11.1a, b i c oraz na rysunku 11.2a są statycznie wyznaczalne, pozostałe dwa ustroje (łuki na rys. 11.2b i c) są statycznie niewyznaczalne.

Oddziaływania dla ramy z rysunku 11.1a obliczamy z trzech równań równowagi. W przypadku ramy trójprzegubowej i łuku trójprzegubowego (rys. 11.1b i 11.2a) oraz ramy wieloprzegubowej (rys. 11.1c) – oprócz trzech równań równowagi wykorzystujemy do obliczenia oddziaływań równania uwzględniające fakt, że w każdym z przegubów występujących w ustroju wartość momentu zginającego równa jest zero; czyli równania, w których zapisany jest warunek, że suma momentów statycznych wszystkich sił działających na ustrój po jednej stronie przegubu względem bieguna obranego w tym przegubie równa jest zero ($M_P = 0$).

11.2. Wyznaczanie sił wewnętrznych w ramach i łukach

Definicje sił wewnętrznych omówione w rozdziale 9.1 obejmują również ramy i łuki. Przy sporządzaniu wykresów M , T i N w ramach, rzędne sił wewnętrznych odkładamy prostopadle do osi pręta ramy traktując jej oś jako prostą odniesienia. Aby uniknąć niejasności przy znakowaniu sił wewnętrznych, należy w każdym przedziale obciążenia ramy zaznaczyć włókna, które będzie się traktować jako „dolne” i odpowiednio do tego wykresy dodatnich sił poprzecznych i podłużnych rysować po stronie włókien „górnych” a wykresy dodatnich momentów zginających po stronie włókien „dolnych”. Stosujemy więc te same reguły znakowania i rysowania wykresów sił wewnętrznych, jakie przyjęliśmy dla belki o osi poziomej (por. rozdz. 10.1).

Przykład 11.1. Narysować wykresy sił wewnętrznych dla ramy obciążonej siłą P i poziomo działającym obciążeniem równomiernie rozłożonym q (rys. 11.3).

Do obliczeń przyjmij następujące dane:
 $P = 8 \text{ kN}$, $q = 2 \text{ kN/m}$, $h = a = 4 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$.

Rozwiązanie

Reakcje podpór wyliczymy z warunków równowagi:

$$\sum X = 0; \quad qh - H_B = 0;$$

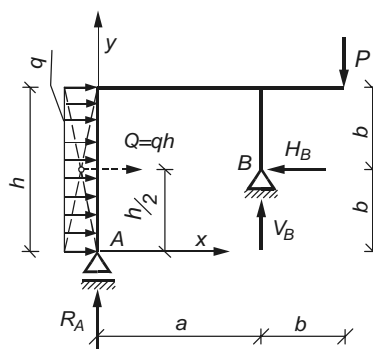
$$H_B = qh = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A a - P b = 0;$$

$$R_A = -P b/a = -8 \cdot 2/4 = -4 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0; \quad -P + R_A + V_B = 0;$$

$$V_B = P - R_A = 8 - (-4) = 12 \text{ kN}$$



Rys. 11.3

Rama ma cztery przedziały obciążenia (por. rys. 11.4):

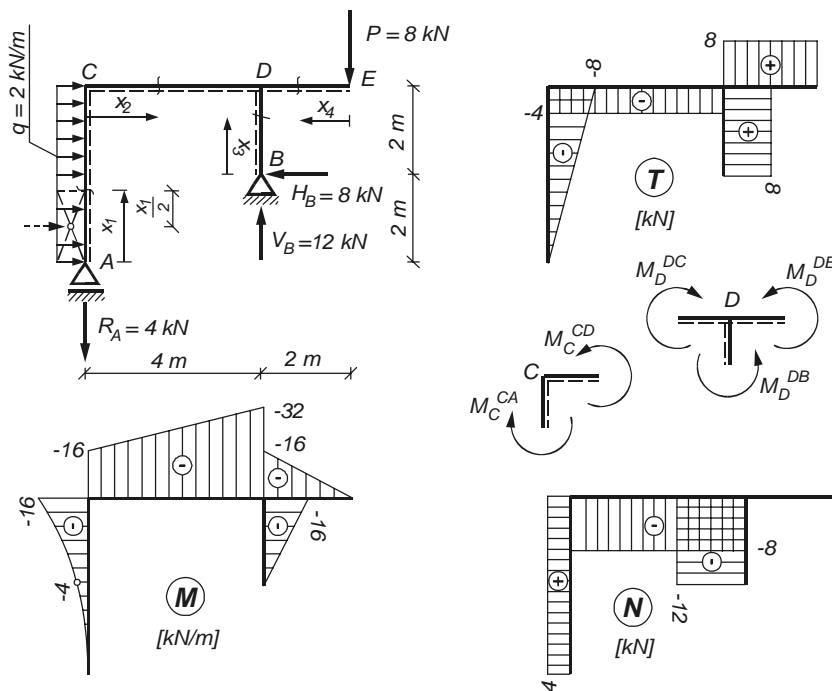
$$A-C (x_1 \in \langle 0; 4 \rangle),$$

$$C-D (x_2 \in \langle 0; 4 \rangle),$$

$$B-D (x_3 \in \langle 0; 2 \rangle),$$

$$E-D (x_4 \in \langle 0; 2 \rangle).$$

Siły wewnętrzne w przekrojach pierwszych dwóch przedziałów będziemy obliczać, biorąc pod uwagę siły z lewej strony przekroju, w dwóch pozostałych przedziałach obciążenia będziemy uwzględniać siły z prawej strony przekroju (jest to zaznaczone poprzez wprowadzenie układów odniesienia x_1 , x_2 , x_3 i x_4 oraz przez zaznaczenie włókien dolnych linią przerywaną). Na schemacie ramy pokazanej na rysunku 11.4 reakcję R_A narysowano ze zwrotem właściwym – w dół. Tym właśnie schematem będziemy się posługiwać, zapisując równania sił wewnętrznych.



Rys. 11.4

Siły podłużne we wszystkich przedziałach obciążenia mają wartości stałe:

$N^{AC} = R_A = 4 \text{ kN}$; $N^{CD} = -q h = -2 \cdot 4 = -8 \text{ kN}$; $N^{ED} = 0$; $N^{BD} = -V_B = -12 \text{ kN}$ gdzie N^{AC} (N^{CD} itd.) oznacza, że wyznaczamy siłę podłużną w przedziale $A-C$ ($C-D$ itd.).

Siły poprzeczne:

$$\begin{aligned} T^{AC} = T(x_1) &= -q x_1 = -2 x_1; & T(0) &= 0, & T(4) &= -8 \text{ kN} \\ T^{CD} &= -R_A = -4 \text{ kN}; & T^{BD} &= H_B = 8 \text{ kN}; & T^{ED} &= P = 8 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Momenty zginające:

$$\begin{aligned} M^{AC} = M(x_1) &= -q x_1 \cdot 0,5x_1 = -x_1^2; & M(0) &= 0, & M(2) &= -4 \text{ kNm}, & M(4) &= -16 \text{ kNm} \\ M^{CD} = M(x_2) &= -R_A x_2 - q h \cdot 0,5h = -4 x_2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = -4 x_2 - 16 \\ & M(0) &= -16, & M(4) &= -32 \text{ kNm} \\ M^{BD} = M(x_3) &= -H_B x_3 = -8 x_3; & M(0) &= 0, & M(2) &= -16 \text{ kNm} \\ M^{ED} = M(x_4) &= -P x_4 = -8 x_4; & M(0) &= 0, & M(2) &= -16 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Wykresy M , T i N narysowano na rysunku 11.4.

Wykonamy teraz wrywkowe sprawdzenie obliczeń momentów zginających. W tym celu wytniemy myślowo z ramy węzły C i D . W każdym z przeciętych myślowo przywęzłowych przekrojów poprzecznych, położonych nieskończenie blisko węzła, działają wyliczone wyżej momenty zginające, które gdyby miały wartości dodatnie, działałyby tak, jak zaznaczono na rysunku 11.4 (momenty dodatnie rozciągają włókna dolne prętów ramy).

Równowaga węzłów C i D wymaga, ażeby suma momentów działających na te węzły była równa zero (stosujemy tu umowę statyczną znakowania momentów i oznaczenia momentów takie, jak na rysunku 11.4):

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0; & M_C^{CD} - M_C^{CA} &= -16 - (-16) = 0 \\ \sum M_D &= 0; & -M_D^{DC} + M_D^{DE} + M_D^{DB} &= -(-32) + (-16) + (-16) = 0 \end{aligned}$$

Jedno z trzech równań równowagi obu węzłów jest spełnione, więc momenty przywęzłowe obliczone są dobrze. By sprawdzić obliczenie sił tnących i normalnych, należy te siły wprowadzić do przekrojów przywęzłowych i zbadać, czy spełnione są dwa następnne warunki równowagi, czyli czy sumy rzutów tych sił na osie x i y są równe zero. Takie pełne sprawdzenie sił wewnętrznych w przekrojach przywęzłowych wykonano w przykładzie 11.2.

Przykład 11.2. Dla ramy trójprzegubowej pokazanej na rysunku 11.5 sporządzić wykresy M , T i N . Obciążenie ramy jest równomiernie rozłożone: jedno działa poziomo z intensywnością „ p ” na metr bieżący rzutu osi ramy na prostą pionową; drugie działa pionowo z intensywnością dwukrotnie większą ($q = 2p$) na metr bieżący rzutu osi ramy na kierunek poziomy.

Rozwiązanie

Reakcje podpór (rys. 11.5) wyznaczmy z równań zapisanych w takiej kolejności, by każde z nich zawierało tylko jedną niewiadomą:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; & 7ap \cdot 3,5a + 8a \cdot V_B &= 0; & V_B &= -3,06ap \\ M_C &= 0; & 7a \cdot H_B + 4a \cdot V_B - 3,5a \cdot 7ap &= 0; & H_B &= 5,25ap \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad H_A + H_B - 7ap = 0; \quad H_A = 1,75ap \\ \sum Y = 0; \quad V_A + V_B - 16ap = 0; \quad V_A = 19,06ap \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

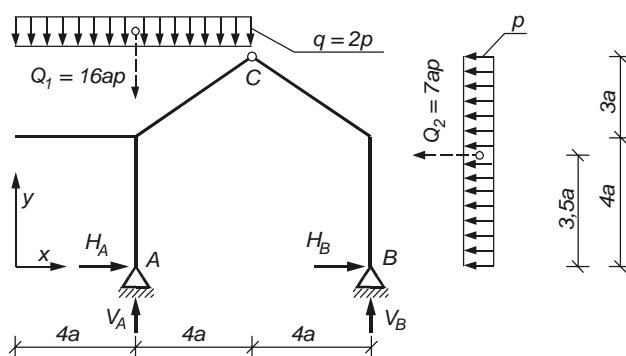
$$M_C = 4a \cdot V_A - 7a \cdot H_A - 16ap \cdot 4a = 4 \cdot 19,0625a^2 p - 7a \cdot 1,75ap - 4a \cdot 16ap = 0$$

Warto tu przypomnieć, że z powyższych równań pierwsze, trzecie i czwarte to równania równowagi całego ustroju, zaś równanie drugie jest zapisaniem warunku, że moment zginający w przegubie C równa się zero. Moment ten jest tu liczony na podstawie sił działających po prawej stronie przegubu.

Wyznamy teraz potrzebne w dalszych obliczeniach funkcje kąta nachylenia ukośnych prętów ramy (rys. 11.6).

Długość pręta $CE = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$, wobec czego:

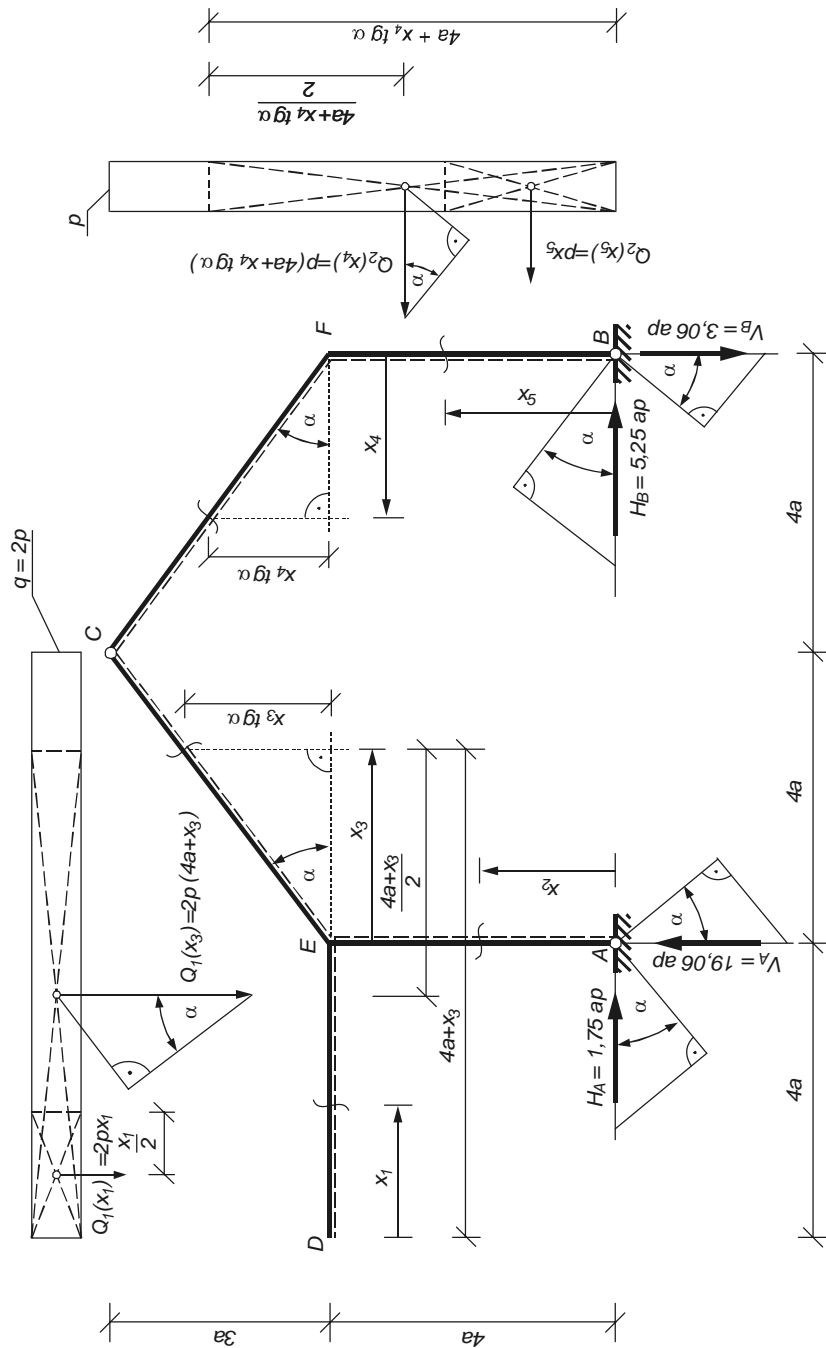
$$\sin \alpha = 0,8; \quad \cos \alpha = 0,6; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,75.$$



Rys. 11.5

Równania sił wewnętrznych wypiszemy, korzystając z oznaczeń przyjętych na rysunku 11.6, na którym reakcja V_B naniesiona jest z właściwym zwrotem – w dół.

Równania sił wewnętrznych będziemy musieli zapisać dla pięciu przedziałów obciążenia. Przyjęto, że odcięta x określająca położenie przekroju w danym przedziale obciążenia jest mierzona wzdłuż osi równoległej do osi prętów pionowych i poziomych ramy, oraz że jest mierzona w poziomie dla przedziałów obciążenia prętów ukośnych (por. rys. 11.6). Tak więc mamy tu trzy przedziały obciążenia, w których będziemy liczyć siły wewnętrzne na podstawie sił z lewej strony ustroju, są to przedziały:



Rys. 11.6

$$D-E (x_1 \in \langle 0 ; 4a \rangle)$$

$$A-E (x_2 \in \langle 0 ; 4a \rangle)$$

$$E-C (x_3 \in \langle 0 ; 4a \rangle)$$

oraz dwa przedziały obciążenia, w których obliczymy siły wewnętrzne, „idąc” od strony prawej do lewej:

$$F-C (x_4 \in \langle 0 ; 4a \rangle)$$

$$B-F (x_5 \in \langle 0 ; 4a \rangle)$$

Siły podłużne:

$$N^{DE} = 0$$

$$N^{AE} = -V_A = -19,06ap$$

$$\begin{aligned} N^{EC} = N(x_3) &= -H_A \cos \alpha - V_A \sin \alpha + 2p(4a + x_3) \sin \alpha = \\ &= -1,75 \cdot 0,8ap - 19,06 \cdot 0,6ap + 8 \cdot 0,6ap + 2 \cdot 0,6px_3 = 1,2px_3 - 8,04ap \\ N(0) &= -8,04ap ; \quad N(4a) = -3,24ap \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^{FC} = N(x_4) &= H_B \cos \alpha + V_B \sin \alpha - p(4a + x_4 \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha = \\ &= 5,25 \cdot 0,8ap + 3,06 \cdot 0,6ap - 0,8 \cdot 4,0ap - 0,8 \cdot 0,75px_4 = -0,6px_4 + 2,84ap \\ N(0) &= 2,84ap ; \quad N(4a) = 0,44ap \end{aligned}$$

$$N^{BF} = N(x_5) = V_B = 3,06ap$$

Siły poprzeczne:

$$T^{DE} = T(x_1) = -2px_1 ; \quad T(0) = 0, \quad T(4a) = -8ap$$

$$T^{AE} = -H_A = -1,75ap$$

$$\begin{aligned} T^{EC} = T(x_3) &= -H_A \sin \alpha + V_A \cos \alpha - 2p(4a + x_3) \cos \alpha = \\ &= -1,75 \cdot 0,6ap + 19,06 \cdot 0,8ap - 2p \cdot 4a \cdot 0,8 - 2p \cdot 0,8x_3 = -1,6px_3 + 7,8ap \\ T(0) &= 7,8ap, \quad T(4a) = 1,4ap \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{FC} = T(x_4) &= -H_B \sin \alpha + V_B \cos \alpha + p(4a + x_4 \operatorname{tg} \alpha) \sin \alpha = \\ &= -5,25 \cdot 0,6ap + 3,06 \cdot 0,8ap + 4,0 \cdot 0,6ap + 0,6 \cdot 0,75px_4 = 0,45px_4 + 1,7ap \\ T(0) &= 1,7ap, \quad T(4a) = 3,5ap \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{BF} = T(x_5) &= -H_B + px_5 = px_5 - 5,25ap \\ T(0) &= -5,25ap, \quad T(4a) = -1,25ap \end{aligned}$$

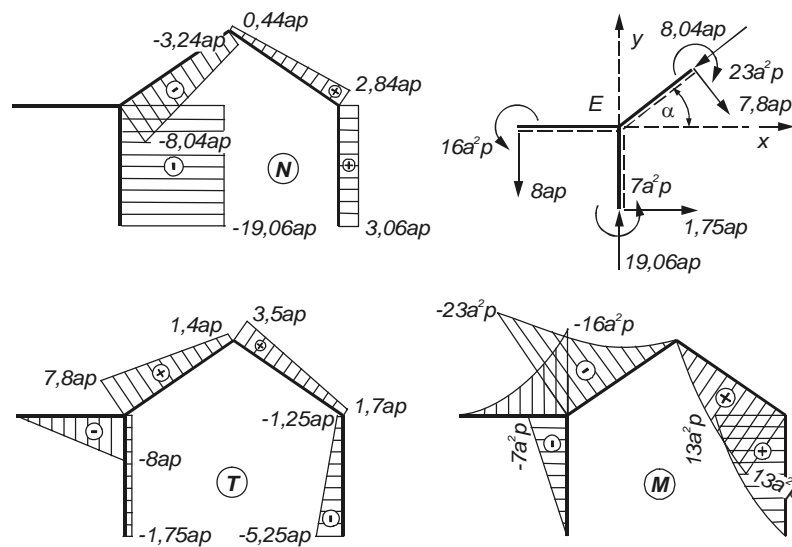
Momenty zginające:

$$\begin{aligned} M^{DE} = M(x_1) &= -2px_1 \cdot 0,5x_1 = -px_1^2 ; \\ M(0) &= 0, \quad M(2a) = -4a^2p, \quad M(4a) = -16a^2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{AE} = M(x_2) &= -H_A x_2 = -1,75ap \cdot x_2 ; \\ M(0) &= 0, \quad M(4a) = -7a^2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M^{EC} = M(x_3) &= V_A x_3 - H_A(4a + x_3 \operatorname{tg} \alpha) - 2p(4a + x_3) \frac{4a + x_3}{2} = \\
 &= 19,06ap \cdot x_3 - 1,75ap \cdot 4a - 1,75ap \cdot x_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha - p(4a + x_3)^2 = \\
 &= -p \cdot x_3^2 + 9,75ap \cdot x_3 - 23a^2 p \\
 M(0) &= -23a^2 p, \quad M(2a) = -7,5a^2 p, \quad M(4a) = 0 \\
 M^{FC} = M(x_4) &= H_B(4a + x_4 \operatorname{tg} \alpha) - V_B x_4 - p(4a + x_4 \operatorname{tg} \alpha) \frac{4a + x_4 \operatorname{tg} \alpha}{2} = \\
 &= 5,25ap(4a + x_4 \cdot 0,75) - 3,06ap \cdot x_4 - \frac{p}{2}(4a + 0,75x_4)^2 = \\
 &= -0,28p \cdot x_4^2 - 2,12ap \cdot x_4 + 13a^2 p \\
 M(0) &= 13a^2 p, \quad M(2a) = 7,64a^2 p, \quad M(4a) = 0,04a^2 p \cong 0 \\
 M^{BF} = M(x_5) &= H_B x_5 - p x_5 \cdot 0,5 x_5 = -0,5p \cdot x_5 + 5,25ap \cdot x_5 \\
 M(0) &= 0, \quad M(2a) = 8,5a^2 p, \quad M(4a) = 13a^2 p
 \end{aligned}$$

Wykresy N , T i M pokazane są na rysunku 11.7.



Rys. 11.7

Aby weryfikacyjnie sprawdzić wyniki obliczeń, możemy rozpatrzyć równowagę poszczególnych węzłów myślowo wyciętych z trójkątnego przegubu. Dla przykładu rozpatrzmy tu jedynie węzeł E .

Na schemacie wyciętego węzła E (rys. 11.7), siły wewnętrzne mają zwroty uwzględniające ich znaki wynikające z obliczeń. Wektory sił tnących narysowane są dla przejrzystości w pewnym oddaleniu od węzła, są one jednak przyłożone nieskończenie blisko punktu węzłowego i można przyjąć, że proste ich działania przecinają ten punkt.

Równania równowagi sił działających na węzeł E są następujące:

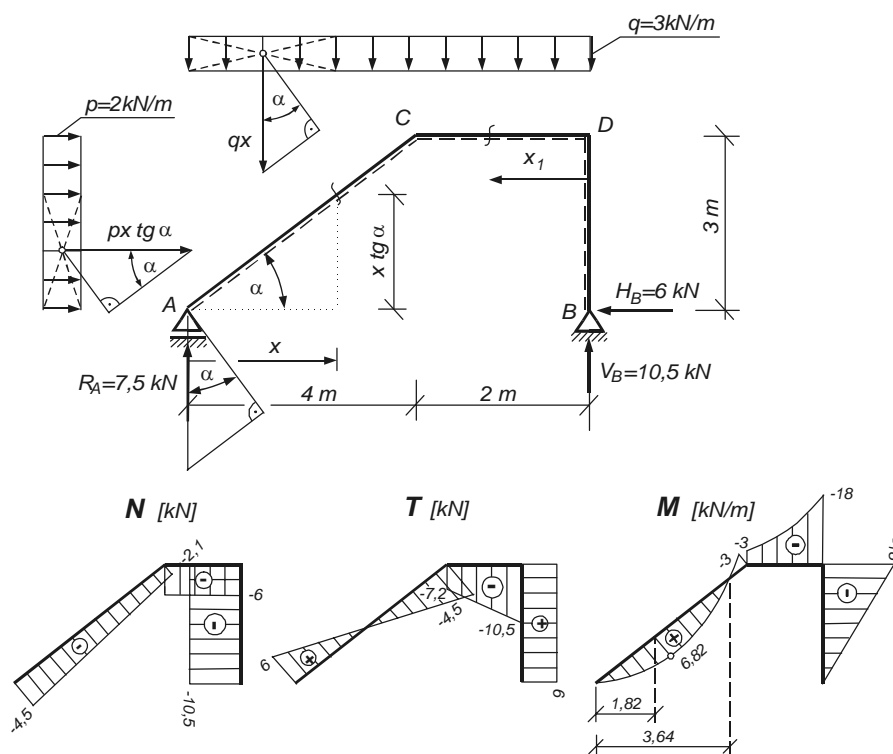
$$\begin{aligned} \sum X &= (-8,04ap) \cos \alpha + 1,75ap + 7,8ap \cos(90^\circ - \alpha) = \\ &= (-6,43 + 1,75 + 4,68)ap = 0 \end{aligned}$$

$$\sum Y = -8ap + 19,06ap - 8ap \cdot 0,6 - 7,8ap \cdot 0,8 = 0$$

$$\sum M_E = -23a^2 p + 16a^2 p + 7a^2 p = 0$$

Warunki równowagi są spełnione, węzeł znajduje się więc w równowadze. (*Uwaga:* gdyby na wycięty węzeł działała jakaś siła zewnętrzna czynna (lub para sił) – trzeba by ją oczywiście uwzględnić podczas badania równowagi tego węzła).

Przykład 11.3. Dla ramy o schemacie statycznym i obciążeniu jak na rysunku 11.8 sporządzić wykresy M , T i N .



Rys. 11.8

Rozwiązanie

Z równań równowagi wyliczamy reakcje podpór ramy:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; & -6R_A - p \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 6 \cdot 3 = 0; & R_A = 7,5 \text{ kN} \\ \sum Y = 0; & R_A + V_B - q \cdot 6 = 0; & V_B = 10,5 \text{ kN} \\ \sum X = 0; & p \cdot 3 - H_B = 0; & H_B = 6 \text{ kN} \end{aligned}$$

Funkcje trygonometryczne kąta α mają następujące wartości:

$$\operatorname{tg} \alpha = 3/4 = 0,75, \quad \sin \alpha = 3/5 = 0,6, \quad \cos \alpha = 4/5 = 0,8$$

Wykresy sił poprzecznych i podłużnych dla całej ramy oraz momenty zginające w przedziale $B-D$ mają przebieg liniowy, wykreślmy je więc w oparciu o wartości tych sił wyliczone w węzłach (na początku i na końcu przedziałów obciążenia), przy czym będziemy stosować następujące oznaczenia:

T^{BD} , (N^{BD}) – siła poprzeczna (podłużna) w przedziale $B-D$,
 $T_{C(l)}$, $(N_{C(l)})$ – siła poprzeczna (podłużna) w węźle C z lewej strony,
 $T_{C(p)}$, $(N_{C(p)})$ – siła poprzeczna (podłużna) w węźle C z prawej strony,
 M_C , (M_D) – moment zginający w węźle C (D) ... itp.

Siły podłużne:

$$\begin{aligned} N_{A(p)} &= -R_A \sin \alpha = -4,5 \text{ kN} \\ N_{C(l)} &= -R_A \sin \alpha - 3p \cos \alpha + 4q \sin \alpha = -2,1 \text{ kN} \\ N^{CD} &= -H_B = -6,0 \text{ kN} \\ N^{DB} &= -V_B = -10,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Siły poprzeczne:

$$\begin{aligned} T_{A(p)} &= R_A \cos \alpha = 6,0 \text{ kN} \\ T_{C(l)} &= R_A \cos \alpha - 3p \sin \alpha - 4q \cos \alpha = -7,2 \text{ kN} \\ T_{C(p)} &= -V_B + 2q = -4,5 \text{ kN} \\ T_{D(l)} &= -V_B = -10,5 \text{ kN} \\ T^{BD} &= H_B = 6,0 \text{ kN} \end{aligned}$$

Momenty zginające w przedziale $B-D$:

$$M_B = 0; \quad M_D = -3H_B = -18,0 \text{ kNm};$$

Równania momentów zginających w przedziałach $D-C$ i $A-C$:

$$\begin{aligned} M^{DC} &= M(x_1) = V_B x_1 - 3H_B - qx_1 \cdot 0,5x_1 = 10,5x_1 - 6 \cdot 3 - 1,5x_1^2 = \\ &= -1,5x_1^2 + 10,5x_1 - 18 \end{aligned}$$

$$M(0) = -18 \text{ kNm}, \quad M(1) = -9 \text{ kNm}, \quad M(2) = -3 \text{ kNm}.$$

$$M^{AC} = M(x) = R_A x - px \operatorname{tg} \alpha \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{2} - qx \frac{x}{2} = 7,5x - 1,5x \frac{0,75}{2} x - 1,5x^2 =$$

$$= -2,06x^2 + 7,5x$$

$$M(0) = 0 \text{ kNm}, \quad M(4) = -3 \text{ kNm},$$

Moment ekstremalny w przedziale $A-C$:

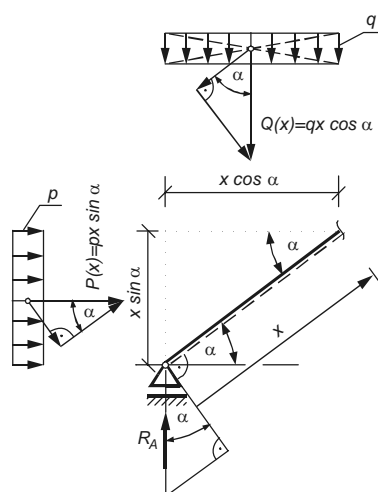
$$\frac{dM(x)}{dx} = -4,125x + 7,5 = 0 \rightarrow x = \frac{7,5}{4,125} = 1,82 \text{ m},$$

$$M_{\max} = M(1,82) = 6,82 \text{ kNm}$$

Miejsce zerowe momentu gnącego w przedziale $A-C$:

$$M(x) = -2,06x^2 + 7,5x = 0 \rightarrow x_0 = 3,64 \text{ m}.$$

Wykresy N , T i M pokazane są na rysunku 11.8.



Rys. 11.9

Uwaga: Położenie przekroju w przedziale $A-C$ określone jest w powyższych równaniach odległością x od punktu A mierzoną w poziomie. Gdy oś układu odniesienia w tym przedziale przyjmujemy wzdłuż osi pręta $A-C$, jak na rysunku 11.9, równania sił wewnętrznych będą następujące:

Przedział $A-C$ ($x \in \langle 0; 5 \rangle$):

$$N(x) = R_A \sin \alpha - px \sin \alpha \cdot \cos \alpha +$$

$$+ qx \cos \alpha$$

$$T(x) = R_A \cos \alpha - px \sin \alpha \cdot \sin \alpha +$$

$$+ qx \cos \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$M(x) = R_A \cos \alpha \cdot x +$$

$$- px \sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{2} - qx \cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{x}{2}$$

Przykład 11.4. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych dla wspornika o promieniu r obciążonego siłą q rozłożoną równomiernie w stosunku do rzutu osi tego wspornika na oś pionową (rys. 11.10).

Rozwiązanie

Reakcje podpory obliczone z równań równowagi wynoszą:

$$V = 0, \quad H = qr, \quad M = qr^2/2.$$

Równania sił wewnętrznych zapiszemy biorąc pod uwagę siły z prawej strony przekroju $\alpha-\alpha$, którego położenie określa kąt φ odmierzany w lewo od kierunku pionowego Oy . Mamy tu do czynienia z jednym przedziałem obciążenia ($\varphi \in \langle 0; \pi/2 \rangle$).

Równanie sił podłużnych:

$$N(\varphi) = Q(\varphi)\cos\varphi = q(r - r\cos\varphi)\cos\varphi = qr\cos\varphi - qr\cos^2\varphi$$

$$N(0) = 0, \quad N(45^\circ) = 0,207qr, \quad N(90^\circ) = 0$$

Ekstremum funkcji (pierwszą pochodną równania siły podłużnej przyrównujemy do zera):

$$\frac{dN(\varphi)}{d\varphi} = -qr\sin\varphi + 2qr\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$qr\sin\varphi(-1 + 2\cos\varphi) = 0$$

$$\text{równanie jest spełnione dla } \sin\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0 + n\pi$$

$$\text{oraz dla } 2\cos\varphi = 1 \rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = 60^\circ$$

$$N_{\max} = N(60^\circ) = 0,25qr$$

Równanie sił poprzecznych:

$$T(\varphi) = Q(\varphi)\sin\varphi = q(r - r\cos\varphi)\sin\varphi = qr\sin\varphi - qr\sin\varphi\cos\varphi$$

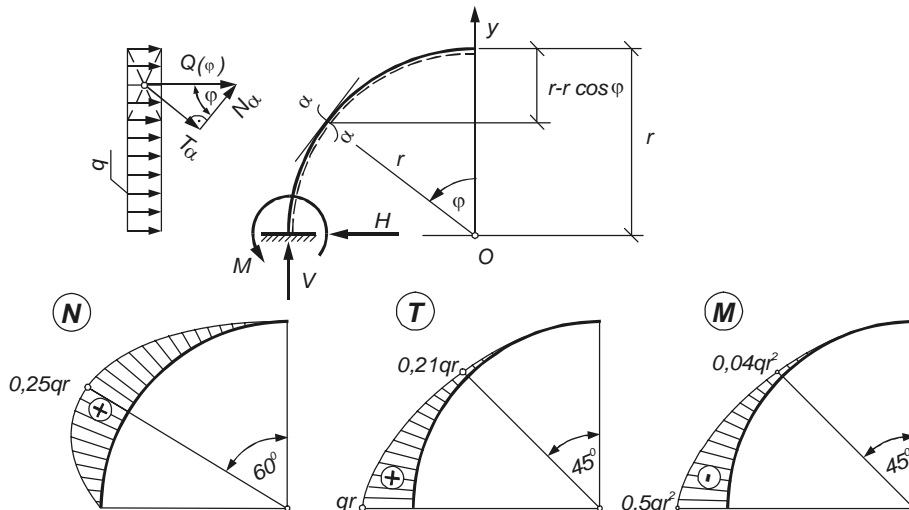
$$T(0) = 0, \quad T(45^\circ) = 0,207qr, \quad T(90^\circ) = qr$$

Równanie momentów zginających:

$$M(\varphi) = -Q(\varphi)\frac{r - r\cos\varphi}{2} = -\frac{q(r - r\cos\varphi)(r - r\cos\varphi)}{2} = -\frac{qr^2}{2}(1 - \cos\varphi)^2$$

$$M(0) = 0, \quad M(45^\circ) = -0,043qr^2, \quad M(90^\circ) = -0,5qr^2$$

Wykresy sił wewnętrznych łuku kołowego sporządzono, odkładając ich wartości wzdłuż promienia krzywizny – prostopadle do osi łuku (rys.11.10).

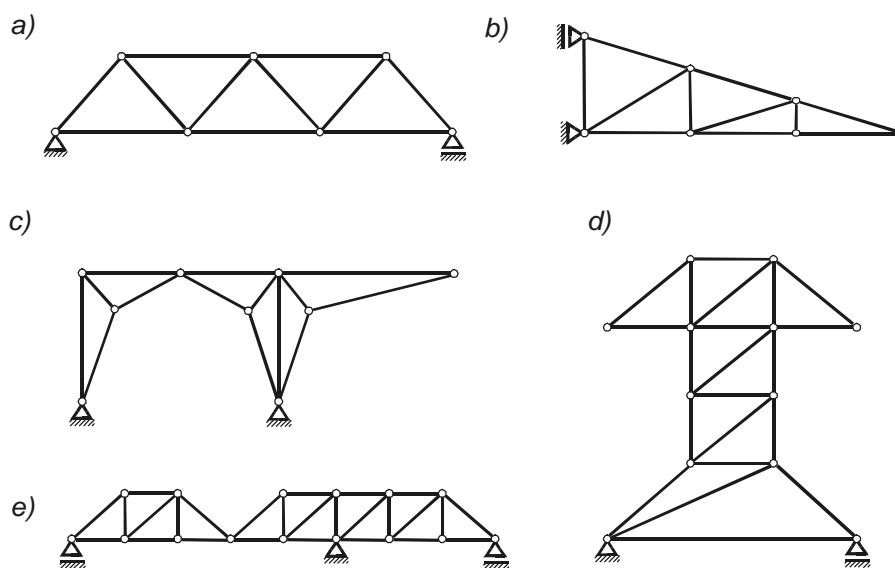


Rys. 11.10

12. Kratownice

12.1. Wiadomości ogólne

Układ złożony z prętów, których końce są ze sobą połączone przegubowo, nazywamy kratownicą. W przypadku gdy osie wszystkich prętów leżą w jednej płaszczyźnie, kratownicę nazywamy kratownicą płaską. Zawartość niniejszego rozdziału dotyczy kratownic płaskich. Ze względu na swoją lekkość i prostotę wykonania znajdują one szerokie zastosowanie w wielu konstrukcjach inżynierskich. Stosuje się je na przykład przy budowie mostów, różnego rodzaju słupów, belek, dźwigów itp. Przykłady schematów kratownic pokazano na rysunku 12.1.



Rys. 12.1

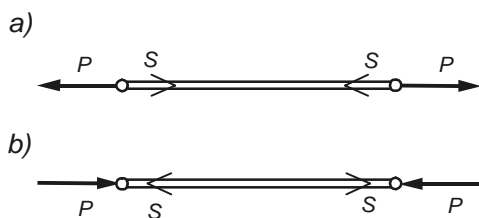
Idealna kratownica, którą będziemy brać pod uwagę w naszych rozważaniach, spełnia następujące założenia:

- pręty kratownicy są nieważkie,

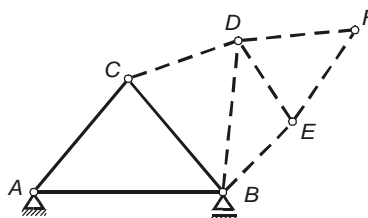
- osie prętów są prostoliniowe i przecinają się w jednym punkcie (w węźle),
- w przegubach łączących pręty nie ma tarcia,
- siły zewnętrzne działają w płaszczyźnie kratownicy i są przyłożone bezpośrednio do węzłów.

W związku z ostatnim warunkiem w prętach występują wyłącznie siły osiowe. Pręty kratownicy mogą znajdować się bowiem w równowadze tylko wtedy, gdy działające nań siły przekazywane w węzłach są z tymi prętami współliniowe. Siły te, jak wiemy, wywołują w prętach osiowe siły wewnętrzne. Gdy oddziaływania węzłów na pręt (siły P) mają takie zwroty jak na rysunku 12.2a – pręt jest rozciągany, gdy zaś takie, jak na rysunku 12.2b – pręt jest ściskany.

Siły S na rysunku 12.2 są siłami wewnętrznymi w prętach. Znajomość tych sił jest konieczna, gdyż od ich wartości zależą wynikające z obliczeń wytrzymałościowych wymiary poprzeczne prętów kratownicy.



Rys. 12.2



Rys. 12.3

Kratownica, by spełnić swoje zadanie jako element konstrukcji, musi być układem sztywnym (geometrycznie niezmiennym). Najprostszym takim układem jest kratownica trójkątna (rys. 12.3) zbudowana z trzech prętów połączonych w węzłach A , B i C . Aby utworzyć nowy węzeł należy dodać dwa pręty, np. CD i BD , tak jak zaznaczono liniami przerywanymi. Podobnie dla następnego i dalszych węzłów potrzebne są do ich utworzenia po dwa nowe pręty. Tak więc stwierdzamy, że do zbudowania każdego nowego węzła potrzeba dwóch prętów z wyjątkiem pierwszych trzech węzłów, dla których wystarczą trzy pręty zamiast sześciu. Z powyższego wynika następujący związek między liczbą prętów p a liczbą węzłów w w kratownicy płaskiej. Warunek ten musi być spełniony, aby kratownica była geometrycznie niezmienna:

$$p = 2w - 3$$

Na rysunku 12.4a przedstawiona jest kratownica zbudowana z pięciu prętów połączonych w czterech węzłach. Podstawiając do powyższego wzoru $p = 5$, $w = 4$, stwierdzamy, że warunek sztywności jest spełniony:

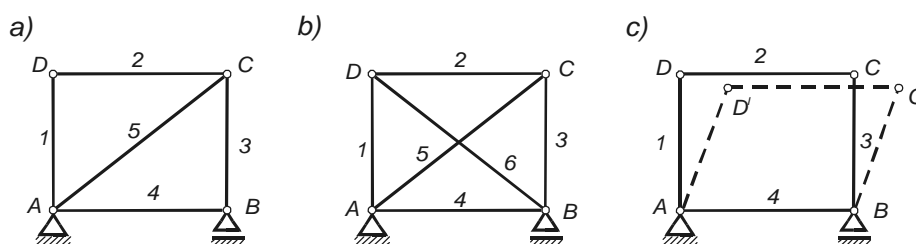
$$5 = 2 \cdot 4 - 3$$

Jeżeli między węzłami B i D wstawimy dodatkowo szósty pręt (rys. 12.4b), to liczba prętów w kratownicy będzie większa od tej, która wynika z warunku sztywności.

Kratownicę nazywamy wtedy przesytywnioną. Na rysunku 12.4c przedstawiony jest układ, dla którego warunek sztywności nie jest spełniony, gdyż liczba prętów jest mniejsza od podwojonej ilości węzłów pomniejszonej o 3:

$$p = 4 < 2 \cdot 4 - 3$$

Układ ten jest geometrycznie zmienny, gdyż może zmieniać swój kształt geometryczny bez zmiany długości prętów tak, jak to zaznaczono liniami przerywanymi na rysunku 12.4c.



Rys. 12.4

Sformułowany wyżej warunek sztywności jest warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym. Może się zdarzyć, że przy spełnionym warunku sztywności, jedna część kratownicy jest przesytywniona, druga zaś geometrycznie zmienna i tym samym kratownica nie może spełniać swego zadania.

Sposoby podparcia kratownic pokazane na powyższych rysunkach zaprojektowane są tak, by oddziaływania podpór na konstrukcję mogły być wyznaczone z warunków równowagi całej kratownicy lub też i jej części (czyli tak, jak dla omawianych wcześniej belek, ram i trójpregubów). Mówimy, że kratownice te są zewnętrznie statycznie wyznaczalne. Siły działające na poszczególne pręty kratownicy możemy wyznaczyć analitycznie, rozpatrując równowagę sił działających na wycięte myślowo węzły. Każdy taki węzeł przedstawia płaski, zbieżny układ sił pozostających w równowadze. Dla takiego układu spełnione są dwa równania równowagi (sumy rzutów tych sił na osie x i y są równe zero). Gdy ilość węzłów kratownicy oznaczmy przez w , wtedy dla całej kratownicy możemy ułożyć $2w$ równań. O ile w danej kratownicy liczba niewiadomych będzie równa liczbie równań, które mamy do dyspozycji – kratownica będzie statycznie wyznaczalna. Mamy zatem warunek statycznej wyznaczalności kratownicy:

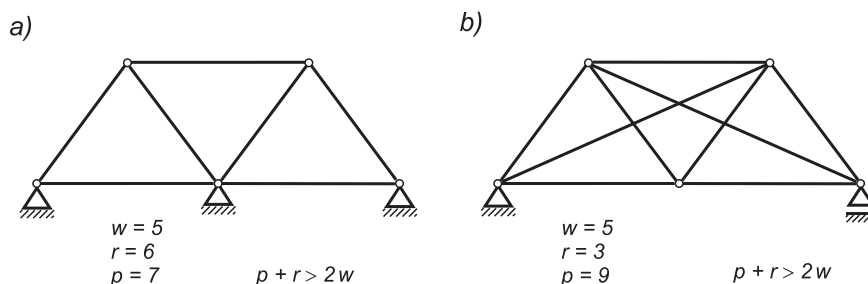
$$p+r = 2w$$

gdzie: w – ilość węzłów,
 p – ilość sił w prętach,
 r – ilość składowych reakcji podpór.

Dla przykładu rozpatrzmy kratownicę z rysunku 12.1c. Dla kratownicy tej mamy: $w = 9$, $p = 14$, $r = 4$. Kratownica ta jest zewnętrznie statycznie wyznaczalna (reakcje wyznaczamy jak dla układów trójpregubowych) i jest też statycznie wewnętrznie wyznaczalna, gdyż:

$$14+4 = 2 \cdot 9 \quad (p+r = 2w)$$

Na rysunku 12.5 przedstawiono kratownicę zewnętrze trzykrotnie statycznie niewyznaczalną (rys. 12.5a) i wewnętrze dwukrotnie statycznie niewyznaczalną (rys. 12.5b).



Rys. 12.5

12.2. Metody rozwiązywania kratownic

12.2.1. Metoda równoważenia węzłów

Metoda równoważenia węzłów polega na rozpatrzeniu równowagi każdego węzła oddzielnie. Tok postępowania wyjaśnimy na przykładzie kratownicy przedstawionej na rysunku 12.6. Kratownica ta ma 8 węzłów i 13 prętów, jest więc spełniony warunek statycznej wyznaczalności: $2 \cdot 8 = 13 + 3$ ($2w = p + r$).

Określamy najpierw z równań równowagi dla całej kratownicy oddziaływania podpór V_A i H_A oraz R_E .

Równania równowagi możemy zapisać następująco:

$$\sum M_A = 0; \quad -P_1 \cdot b - P_2 \cdot a - P_3 \cdot 2a - P_4 \cdot 3a + V_E \cdot 4a = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad V_A + V_E - P_2 - P_3 - P_4 = 0$$

$$\sum X = 0; \quad H_A + P_1 = 0$$

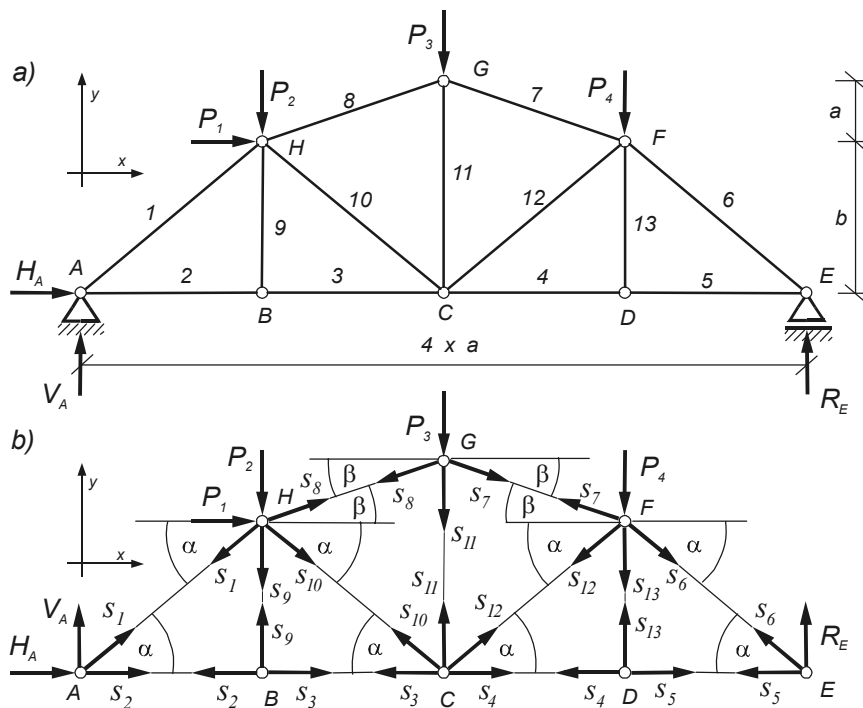
Po wyliczeniu oddziaływań z powyższych równań wykonujemy sprawdzenie obliczeń, układając równanie momentów np. względem bieguna H ($\sum M_H = 0$)

Wycinamy teraz myślowo węzeł A .

Działają na niego składowe reakcji podpory A (znane siły H_A i V_A) oraz dwie niewiadome reakcje prętów oznaczonych cyframi 1 i 2 – są to siły S_1 i S_2 . Na rysunku 12.6 obie te siły mają zwrot *od* węzła A , co oznacza, że przyjęliśmy, iż oba pręty są rozciągane (por. rys. 12.2a). Założenie to uczynimy dla wszystkich prętów kratownicy, gdyż jest ono wygodne z tego względu, że po obliczeniu sił w prętach wartość siły otrzymana ze znakiem (+) będzie oznaczała, że pręt jest rzeczywiście rozciągany, a wartość

otrzymana ze znakiem (-), że jest ściskany. Jest to zgodne z umową wytrzymałościową znakowania sił osiowych.

Układ osi x y przyjmijmy tu dla wszystkich węzłów jednakowy: – oś x będzie pozioma ze zwrotem w prawo, oś y pionowa ze zwrotem w górę. Ustalenie takie nie jest oczywiście konieczne – układ osi rzutów może być dla każdego węzła inny.



Rys. 12.6

Równania równowagi dla sił zbieżnych w węzle węzła A są następujące:

$$\sum X = H_A + S_2 + S_1 \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y = V_A + S_1 \sin \alpha = 0$$

otrzymujemy z tych równań:

$$S_1 = -\frac{V_A}{\sin \alpha}$$

$$S_2 = -H_A - S_1 \cos \alpha = -H_A - \left(-\frac{V_A}{\sin \alpha}\right) \cos \alpha = -H_A + V_A \operatorname{ctg} \alpha$$

(Uwaga: również wyrażenia na V_A i H_A należy tu wstawić do wzoru ze znakami takimi, jakie wynikają z wcześniejszych obliczeń).

Zachowując kierunek rozwiązywania węzłów od lewej do prawej strony, musimy przejść teraz do rozpatrzenia równowagi węzła B , gdyż w węźle H są jeszcze trzy siły niewiadome. Na węzeł B działa obliczona już siła S_2 oraz dwie nieznanne reakcje prętów 9 i 3 (siły S_9 i S_3). Równania równowagi dla sił działających w tym węźle mają postać:

$$\begin{aligned}\sum X &= -S_2 + S_3 = 0 \\ \sum Y &= S_9 = 0\end{aligned}$$

czyli

$$S_9 = 0, \quad S_3 = S_2 = -H_A + V_A \operatorname{ctg} \alpha$$

Teraz możemy rozpatrzeć węzeł H , gdyż nieznanne są w nim tylko dwie siły: S_8 i S_{10} .

Równania równowagi dla węzła H :

$$\begin{aligned}\sum X &= -S_1 \cos \alpha + P_1 + S_{10} \cos \alpha + S_8 \cos \beta = 0 \\ \sum Y &= -S_1 \sin \alpha - P_2 - S_{10} \sin \alpha + S_8 \sin \beta = 0\end{aligned}$$

Z równań tych wyliczamy S_8 i S_{10} (pominiemy w tym momencie podanie wyników).

Przechodzimy do węzła G , dla którego układ równań równowagi zbiegających się w nim sił jest następujący:

$$\begin{aligned}\sum X &= S_7 \cos \beta - S_8 \cos \beta = 0 \\ \sum Y &= -S_8 \sin \beta - P_3 - S_{11} - S_7 \sin \beta = 0\end{aligned}$$

Wyliczamy siły S_7 i S_{11} , po czym przechodzimy do węzła C :

$$\begin{aligned}\sum X &= -S_3 - S_{10} \cos \alpha + S_{12} \cos \alpha + S_4 = 0 \\ \sum Y &= S_{10} \sin \alpha + S_{11} + S_{12} \sin \alpha = 0\end{aligned}$$

Wyliczamy S_4 i S_{12} i przechodzimy do węzła D :

$$\begin{aligned}\sum X &= -S_4 + S_5 = 0; \quad S_5 = S_4 \\ \sum Y &= S_{13} = 0\end{aligned}$$

a następnie do węzła E , gdzie aby obliczyć S_6 wystarczy jedno równanie rzutów:

$$\sum X = -S_5 - S_6 \cos \alpha = 0 \quad S_6 = -\frac{S_5}{\cos \alpha}$$

Drugie równanie rzutów jest sprawdzeniem obliczenia reakcji R_E :

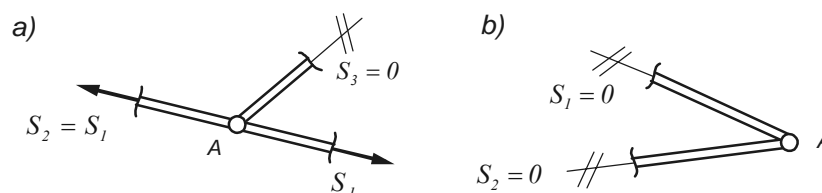
$$\sum Y = S_6 \sin \alpha + R_E = 0; \quad \left(R_E = -S_6 \sin \alpha = -\left(-\frac{S_5}{\cos \alpha}\right) \sin \alpha = S_5 \operatorname{tg} \alpha \right)$$

Wszystkie siły w węźle F zostały już wcześniej wyliczone, ułożenie więc równań równowagi dla tego węzła i sprawdzenie czy są one spełnione, jest sprawdzeniem rozwiązania całej kratownicy:

$$\begin{aligned}\sum X &= -S_7 \cos \beta - S_{12} \cos \alpha + S_6 \cos \alpha = 0 \\ \sum Y &= -P_4 + S_7 \sin \beta - S_{12} \sin \alpha - S_{13} - S_6 \sin \alpha = 0\end{aligned}$$

Analizując tok i wyniki obliczeń w powyższym przykładzie, zwróćmy uwagę na dwie sprawy:

- Kolejność rozwiązywania węzłów kratownicy nie jest całkowicie dowolna – musimy zacząć od takiego węzła, w którym są najwyżej dwie siły niewiadome, by móc wyliczyć je z dwóch równań równowagi.
- W kratownicach występują pręty, w których siły osiowe równe są zeru (pręt 9 i pręt 13 w powyższym przykładzie). Pręty takie łatwo jest zauważyć i wyeliminować wcześniej z obliczeń. Na rysunku 12.7 zilustrowane są dwa przypadki, gdy w prętach kratownicy nie ma sił osiowych (pręty te nazywamy zerowymi):
 - a) gdy w węźle, do którego nie jest przyłożona żadna siła zewnętrzna, schodzą się trzy pręty, przy czym osie dwóch z nich tworzą jedną prostą, siła w przecie trzecim jest równa zeru (wynika to z równania rzutów na oś prostopadłą do kierunku współliniowych prętów);
 - b) gdy w węźle schodzą się dwa pręty nieleżące na jednej prostej i do węzła nie jest przyłożona żadna siła zewnętrzna, oba pręty są prętami zerowymi (żeby siły w tych prętach będąc różnymi od zera mogły się równoważyć, musiałyby leżeć na jednej prostej).



Rys. 12.7

Przykład 12.1. Obliczyć reakcje podpór i siły w prętach kratownicy obciążonej w węzłach D i E siłami P_1 , P_2 i P_3 (rys. 12.8). Dane: $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 5 \text{ kN}$, $P_3 = 5 \text{ kN}$. Wymiary podane są na rysunku w metrach.

Rozwiązanie

Reakcje podpór wyliczymy z poniższych równań równowagi:

$$\sum M_B = 0; \quad 4R_A - 4P_1 - 2P_2 - 8P_3 = 0$$

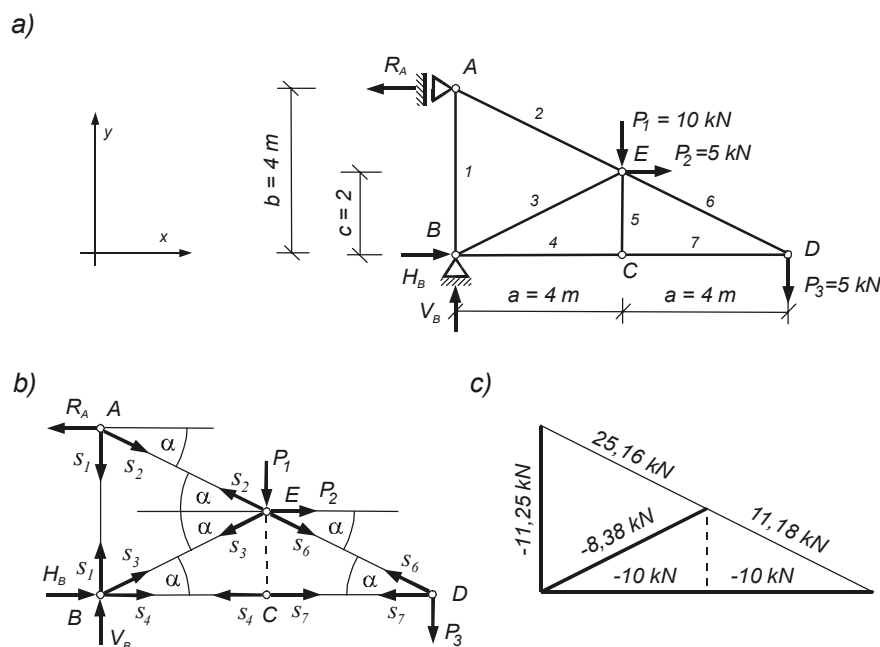
$$R_A = \frac{1}{4}(4 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 8 \cdot 5) = 22,5 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0; \quad V_B - P_1 - P_3 = 0, \quad V_B = 10 + 5 = 15 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0; \quad H_B + P_2 - R_A = 0, \quad H_B = 22,5 - 5 = 17,5 \text{ kN}$$

Wykonamy sprawdzenie obliczeń:

$$\sum M_E = -4P_3 - 4V_B + 2H_B + 2R_A = -4 \cdot 5 - 15 \cdot 4 + 2 \cdot 17,5 + 2 \cdot 22,5 = 0 \text{ (O.K.)}$$



Rys. 12.8

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , które wynikają z wymiarów kratownicy:

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,4472, \quad \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,8944$$

Z równań równowagi węzła A (rys. 12.8.b) wyliczamy siły w prętach schodzących się w tym węzle (są to siły S_1 i S_2 ; założyliśmy ich zwroty *od* węzła, to znaczy, że założyliśmy, iż pręty 1 i 2 są rozciągane. To założenie zrobiliśmy również dla pozostałych prętów kratownicy).

$$\sum X = -R_A + S_2 \cos \alpha = 0, \quad S_2 = \frac{R_A}{\cos \alpha} = \frac{22,5}{0,8944} = 25,16 \text{ kN}$$

$$\sum Y = -S_1 - S_2 \sin \alpha = 0$$

$$S_1 = -S_2 \sin \alpha = -25,16 \cdot 0,4472 = -11,25 \text{ kN}$$

Rozpatrujemy teraz równowagę węzła B (są tam nieznanne siły w prętach 3 i 4):

$$\sum Y = V_B + S_1 + S_3 \sin \alpha = 0$$

$$S_3 = \frac{1}{\sin \alpha} (-V_B - S_1) = \frac{1}{0,4472} (-15 - (-11,25)) = -8,385 \text{ kN}$$

$$\sum X = S_3 \cos \alpha + S_4 + H_B = 0$$

$$S_4 = -H_B - S_3 \cos \alpha = -17,5 - (-8,385) \cdot 0,8944 = -10,0 \text{ kN}$$

W węźle C pręt 5 jest prętem tzw. zerowym ($S_5 = 0$), napiszemy więc jedno równanie rzutów:

$$\sum X = -S_4 + S_7 = 0, \quad S_7 = S_4 = -10,0 \text{ kN}$$

W węźle D do obliczenia mamy siłę w pręcie 6 z równania rzutów na oś x :

$$\sum X = -S_7 - S_6 \cos \alpha = 0, \quad S_6 = -\frac{S_7}{\cos \alpha} = -\frac{-10}{0,8944} = 11,18 \text{ kN}$$

lub z równania rzutów na oś y :

$$\sum Y = -P_3 + S_6 \sin \alpha = 0 \quad S_6 = \frac{P_3}{\sin \alpha} = \frac{5}{0,4472} = 11,18 \text{ kN}$$

Równania równowagi dla sił w węźle E są ostatecznym sprawdzeniem prawidłowości wcześniejszych obliczeń:

$$\begin{aligned} \sum X &= -S_2 \cos \alpha - S_3 \cos \alpha + P_2 + S_6 \cos \alpha = \\ &= -25,16 \cdot 0,8944 - (-8,385) \cdot 0,8944 + 5 + 11,18 \cdot 0,8944 = -0,004 \cong 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y &= -P_1 + S_2 \sin \alpha - S_3 \sin \alpha - S_6 \sin \alpha = \\ &= -10 + 25,16 \cdot 0,4472 - (-8,385) \cdot 0,4472 - 11,18 \cdot 0,4472 = 0,0016 \cong 0 \end{aligned}$$

Wyniki obliczeń przedstawia w sposób lapidarny rysunku 12.8c, na którym osie prętów ściskanych wykreślone są grubą kreską, osie prętów rozciąganych cienką kreską a oś pręta zerowego kreską przerywaną.

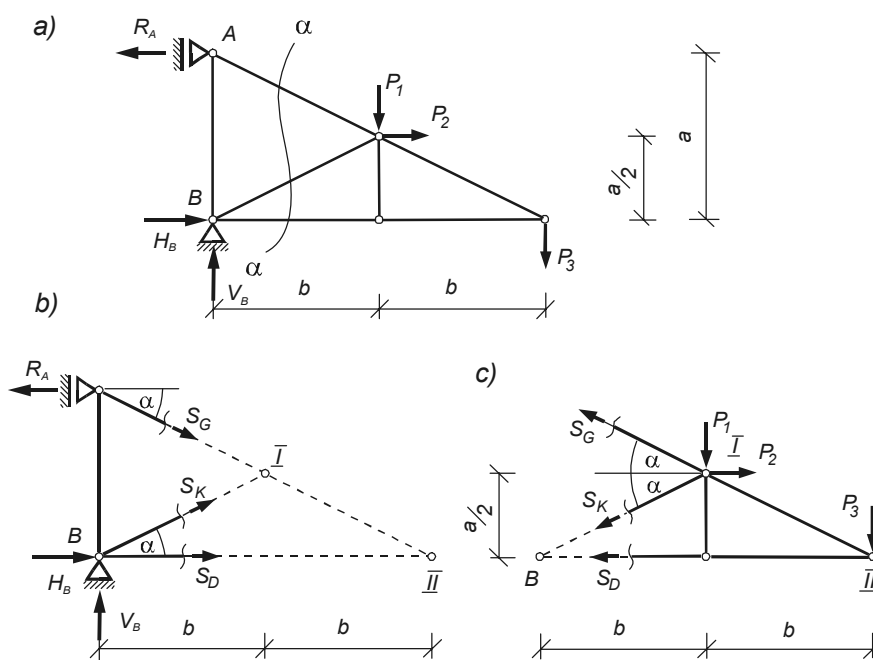
Analityczna metoda równoważenia węzłów ma swój odpowiednik w metodzie graficznej. Dla kolejnych węzłów rysujemy zamknięte wieloboki sił, zaczynając od węzła, w którym mamy co najwyżej dwie siły niewiadome. Rysujemy więc tyle wieloboków sił, ile jest węzłów w kratownicy, przy czym ostatni wielobok jest oczywiście zbudowany z sił już wcześniej wyznaczonych – czyli jest sprawdzeniem prawidłowości konstrukcji. W wyżej wspomnianych wielobokach każda z sił w pręcie powtarza się dwa razy – występuje z przeciwnymi zwrotami w wielobokach tych węzłów, które są połączone danym prętem. Okazuje się jednak, że można wszystkie wieloboki połączyć w jeden – zawierający wszystkie siły zewnętrzne i wewnętrzne kratownicy, a w wieloboku tym każda siła narysowana jest tylko jeden raz. Taki wielobok sił nazywa się *wielobokiem Cremony*; by go wykreślić, należy przestrzegać pewnych zasad postępowania dotyczących kolejności nanoszenia sił i sposobu ich oznaczania. Szczegółowe wskazówki z tym związane zawarte są w literaturze przedmiotowej podanej na końcu skryptu.

12.2.2. Metoda przecięć

Metoda przecięć jest wygodna w przypadku, gdy chodzi o obliczenie sił w niektórych tylko prętach kratownicy. Tak jak w sposobie równoważenia węzłów przecinaliśmy myślowo wszystkie pręty schodzące się w jednym węźle i rozpatrywaliśmy równowagę węzła, tak w metodzie przecięć przecinamy myślowo 3 niezbędne w jednym

punkcie pręty tak, by w ten sposób podzielić kratownicę na dwie oddzielne części, po czym rozpatrujemy równowagę lewej lub prawej części kratownicy. Ponieważ każda z dwóch części kratownicy znajduje się w równowadze, możemy wyznaczyć siły w przeciętych prętach, wykorzystując analityczne (*sposób Rittera*) lub graficzne (*sposób Culmanna*) warunki równowagi części lewej lub prawej.

Na rysunku 12.9 pokazana jest kratownica przecięta przez trzy pręty przekrojem $\alpha - \alpha$:



Rys. 12.9

Siły w przeciętych prętach obliczamy *sposobem Rittera* następująco: Piszemy równania równowagi lewej części kratownicy (rys.12.9b), wykorzystując równania momentów względem trzech biegunów obranych tak, by w każdym z równań niewiadomą była tylko jedna siła. Bieguny te to punkty przecięcia kierunków dwóch nieznanych sił, a więc biegunami Rittera w tym przypadku są:

- punkt B (punkt przecięcia kierunków sił S_K i S_D),
- punkt I (punkt przecięcia sił S_G i S_K),
- punkt II (punkt przecięcia sił S_D i S_G).

Mamy zatem:

$$\sum M_B = 0; \quad aR_A - a \cos \alpha \cdot S_G = 0; \quad S_G = \frac{R_A}{\cos \alpha}$$

$$\sum M_I = 0; \quad \frac{a}{2} S_D + \frac{a}{2} H_B - bV_B + \frac{a}{2} R_A = 0; \quad S_D = \frac{2b}{a} V_B - R_A - H_B$$

$$\sum M_{II} = 0; \quad -2b \sin \alpha \cdot S_K - 2bV_B + aR_A = 0, \quad S_K = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{a}{2b} R_A - V_B \right)$$

Te same wyniki otrzymamy, rozpatrując równowagę prawej części kratownicy (bieguny Rittera są oczywiście tymi samymi punktami – rys. 12.9c):

$$\sum M_B = 0; \quad b \sin \alpha \cdot S_G + \frac{a}{2} \cos \alpha \cdot S_G - bP_1 - \frac{a}{2} P_2 - 2bP_3 = 0$$

$$S_G \frac{1}{b \sin \alpha + \frac{a}{2} \cos \alpha} \left(bP_1 + \frac{a}{2} P_2 + 2bP_3 \right)$$

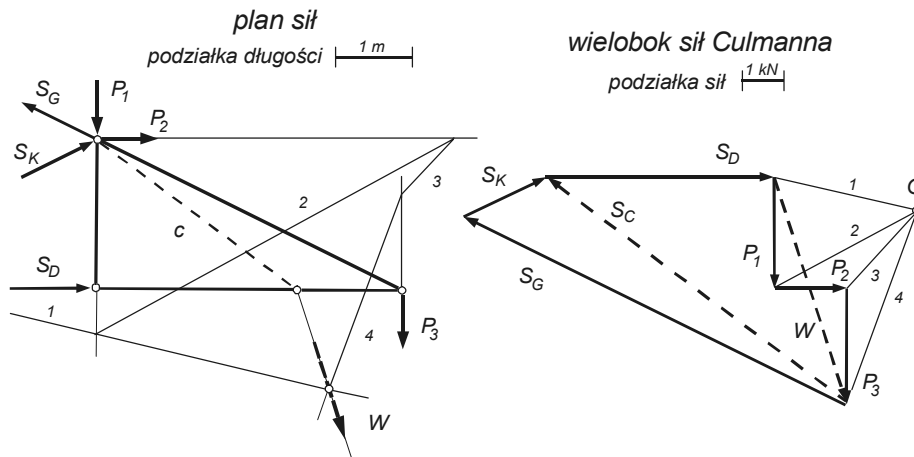
$$\sum M_I = 0; \quad -\frac{a}{2} S_D - bP_3 = 0, \quad S_D = -\frac{2b}{a} P_3$$

$$\sum M_{II} = 0; \quad b \sin \alpha \cdot S_K + \frac{a}{2} \cos \alpha \cdot S_K + bP_1 - \frac{a}{2} P_2 = 0$$

$$S_K = \frac{1}{b \sin \alpha + \frac{a}{2} \cos \alpha} \left(\frac{a}{2} P_2 - bP_1 \right)$$

Sposób Culmanna omówiony został w rozdziale 7.5.1. W zastosowaniu do kratownicy przedstawionej na rysunku 12.9 konstrukcję wieloboku sił Culmanna przedstawiono na rysunku 12.10.

Za pomocą wieloboku sznurowego wyznaczono najpierw wypadkową sił zewnętrznych działających na prawą część kratownicy przeciętej przekrojem $\alpha\text{-}\alpha$, po czym tę wypadkową zrównoważono siłami S_D i S_C , a następnie siłę S_C zastąpiono siłami S_G i S_K .

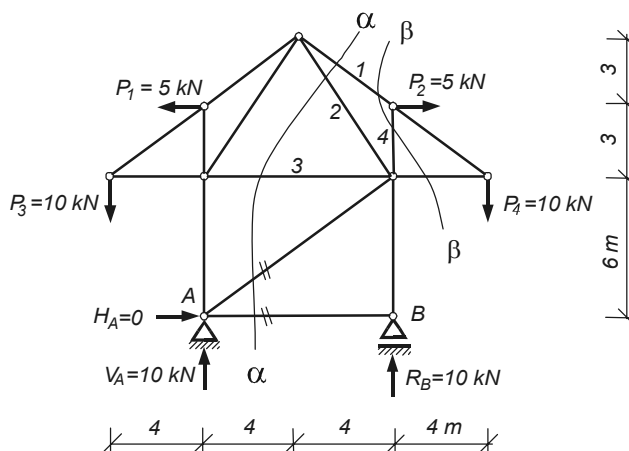


Rys. 12.10

W powyższym przykładzie wyznaczenie sił wewnętrznych w prętach przeciętych przekrojem $\alpha\text{-}\alpha$ nie wymagało wyznaczenia oddziaływań. Gdy jednak wyznaczenie

oddziaływań jest konieczne do wyznaczenia sił w prętach, można te oddziaływania znaleźć również metodą graficzną, posługując się sposobami omówionymi w rozdziale 8 niniejszego opracowania, a więc metodą Culmanna, za pomocą zamykającej lub z twierdzenia o trzech siłach nierównoległych na płaszczyźnie.

Przykład 12.2. Metodą przecięć Rittera obliczyć siły w prętach 1, 2, 3 i 4 kratownicy o wymiarach i obciążeniu jak na rysunku 12.11.



Rys. 12.11

Rozwiązanie

Łatwo zauważyć, że wobec symetrii kształtu i obciążenia kratownicy reakcje podpór mają tu następujące wartości: $H_A = 0$, $V_A = 10 \text{ kN}$, $V_B = 10 \text{ kN}$.

Biorąc pod uwagę to, iż w przekreślonych podwójną kreską prętach siły osiowe równają się zero, siły w prętach 1, 2 i 3 obliczymy, rozpatrując jedną z części kratownicy przeciętej przekrojem $\alpha\text{-}\alpha$ (przekrój przez 5 prętów, z których 2 są prętami zerowymi).

Siłę S_1 wyliczymy z równania momentów względem punktu I, biorąc pod uwagę obciążenie lewej części kratownicy (rys. 12.12)

$$\sum M_I = -6S_1 \cos \alpha + 4S_1 \sin \alpha + 3P_1 + 12P_3 - 8V_A = 0$$

Funkcje trygonometryczne kąta nachylenia siły S_1 do poziomu są następujące:

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,6, \quad \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8$$

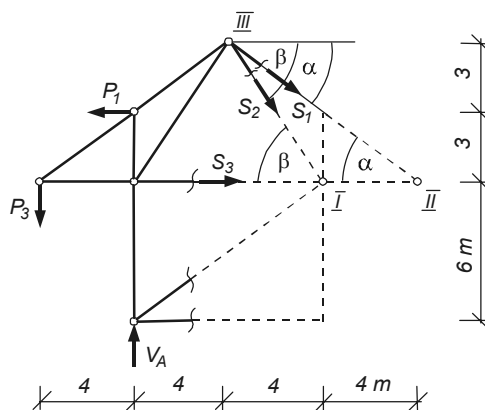
$$S_1 = \frac{-3P_1 - 12P_3 + 8V_A}{4\sin \alpha - 6\cos \alpha} = \frac{-3 \cdot 5 - 12 \cdot 10 + 8 \cdot 10}{4 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8} = 22,92 \text{ kN}$$

Siłę S_2 wyliczymy z równania momentów względem punktu II (również dla lewej kratownicy (rys. 12.12):

$$\sum M_{II} = -6S_2 \cos \beta + 8S_2 \sin \beta + 3P_1 + 16P_3 - 12V_A = 0$$

Funkcje trygonometryczne kąta nachylenia siły S_2 do poziomu są następujące:
 $\operatorname{tg} \beta = 3/2$, $\beta = 56,31^\circ$, stąd: $\sin \beta = 0,832$; $\cos \beta = 0,5547$

$$S_2 = \frac{-3P_1 - 16P_3 + 12V_A}{8\sin \beta - 6\cos \beta} = \frac{-3 \cdot 5 - 16 \cdot 10 + 12 \cdot 10}{8 \cdot 0,832 - 6 \cdot 0,5547} = -16,52 \text{ kN}$$



Rys. 12.12

Siłę S_3 wyliczymy z równania momentów względem punktu III :

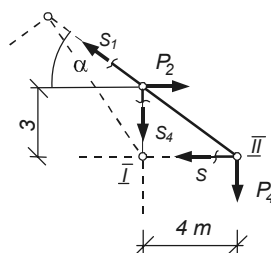
$$\sum M_{III} = 6S_3 - 3P_1 + 8P_3 - 4V_A = 0$$

$$S_3 = \frac{1}{6}(3P_1 - 8P_3 + 4V_A) = \frac{1}{6}(3 \cdot 5 - 8 \cdot 10 + 4 \cdot 10) = -4,17 \text{ kN}$$

Aby obliczyć siłę w pręcie 4, przetniemy kratownicę na dwie części przekrojem $\beta\text{-}\beta$ (rys. 12.11) i rozpatrzmy równowagę prawej jej części, wykorzystując równanie momentów względem punktu II (rys. 12.13):

$$\sum M_{II} = 4S_4 - 3P_2 = 0$$

$$S_4 = \frac{3P_2}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4} = 3,75 \text{ kN}$$



Rys. 12.13

Uwaga: z przecięcia kratownicy przekrojem $\beta-\beta$ łatwiej jest obliczyć siłę S_1 :

$$\begin{aligned}\sum M_I &= 3S_1 \cos \alpha - 3P_2 - 4P_4 = 0, \\ S_1 &= \frac{3P_2 + 4P_4}{3 \cos \alpha} = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 10}{3 \cdot 0,8} = 22,92 \text{ kN}\end{aligned}$$

Ostatecznie stwierdzamy zatem: Pręty 1 i 4 są rozciągane siłami, odpowiednio, 22,92 kN i 3,75 kN, zaś pręty 2 i 3 są ściskane siłami, odpowiednio, 16,52 kN i 4,17 kN.

Piśmiennictwo

- Cybulski A.*: Statyka ustrojów prętowych, tom I i II. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, 1978.
- Ganowicz R., Plenzler R.*: Statyka. Wydawnictwo Akademii Rolniczej w Poznaniu, 1997.
- Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W.*: Wytrzymałość materiałów. Arkady, Warszawa 1974.
- Jokiel M.*: Statyka i wytrzymałość materiałów. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, 1991.
- Kolendowicz T.*: Mechanika dla architektów. Arkady, Warszawa 1996.
- Leyko J.*: Mechanika ogólna, tom 1, Statyka i kinematyka. PWN, Warszawa 1996.
- Misiak J.*: Mechanika techniczna, tom 1, Statyka i wytrzymałość materiałów. WN-T, Warszawa 1996.
- Misiak J.*: Mechanika ogólna, tom 1, Statyka i kinematyka. WN-T, Warszawa 1995.
- Orłowski W., Słowański L.*: Wytrzymałość materiałów – przykłady obliczeń. Arkady, Warszawa 1978.