

**PRACE NAUKOWE**

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

**RESEARCH PAPERS**

of Wrocław University of Economics

**323**

# **Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski**



Redaktorzy naukowi

**Krzysztof Jajuga**

**Wanda Ronka-Chmielowiec**



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Agnieszka Flasińska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

[www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl), [www.ebscohost.com](http://www.ebscohost.com),

w Dolnośląskiej Bibliotece Cyfrowej [www.dbc.wroc.pl](http://www.dbc.wroc.pl),

The Central and Eastern European Online Library [www.ceeol.com](http://www.ceeol.com),

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

[http://kangur.uek.krakow.pl/bazy\\_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się

na stronie internetowej Wydawnictwa

[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie

wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

Wrocław 2013

**ISSN 1899-3192**

**ISBN 978-83-7695-351-9**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	11
<b>Adam Adamczyk:</b> Poziom wewnętrznych źródeł finansowania jako determinanta inwestycji w działalność B + R przedsiębiorstw .....	13
<b>Roman Asyngier:</b> Ekonomiczne i prawne aspekty nieprawidłowości funkcjonowania rynku NewConnect. Ocena i propozycje zmian.....	23
<b>Jacek Bialek:</b> Zastosowanie autorskiego indeksu wydajności pracy do analizy dynamiki cen jednostek rozrachunkowych OFE .....	34
<b>Magdalena Chmielowiec-Lewczuk:</b> Zrównoważona Karta Wyników w zakładzie ubezpieczeń.....	43
<b>Dawid Dawidowicz:</b> Ocena efektywności nowych i pozostałych funduszy inwestycyjnych akcji polskich w latach 2000–2012.....	53
<b>Ewa Dziwok:</b> Weryfikacja modeli krzywej dochodowości na podstawie metod dynamicznych.....	66
<b>Krzysztof Echaust:</b> Zwroty dzienne a zwroty nocne – porównanie wybranych własności na przykładzie kontraktów <i>futures</i> notowanych na GPW w Warszawie.....	75
<b>Urszula Gierałtowska:</b> Inwestowanie w metale szlachetne jako alternatywna forma lokowania kapitału .....	88
<b>Paweł Kliber:</b> Spread WIBOR-OIS jako miara ryzyka kredytowego i premii płynnościowej .....	101
<b>Karol Marek Klimczak:</b> Struktura autoregresyjna zysku rezydualnego spółek z Polski, Niemiec i Francji.....	112
<b>Anna Korzeniowska:</b> Wybrane problemy rynku finansowego wynikające z sytuacji na rynku oszczędności gospodarstw domowych.....	120
<b>Mieczysław Kowerski:</b> Cateringowa teoria dywidend.....	128
<b>Marzena Krawczyk:</b> Adekwatność oferty instytucji rynku finansowego do potrzeb kapitałowych MŚP.....	142
<b>Paweł Kufel, Magdalena Mosionek-Schweda:</b> Wpływ doświadczenia giełdowego na koszt pozyskiwania kapitału na rynku Catalyst .....	151
<b>Robert Kurek:</b> Ewolucja konwergencji regulacji i sposobów nadzorowania na rynku ubezpieczeniowym UE.....	161
<b>Sebastian Majewski, Mariusz Doszyń:</b> Efekty wpływu czynników behawioralnych na stopy zwrotu z akcji spółek sektora budowlanego notowanych na GPW w Warszawie.....	170

<b>Sebastian Majewski:</b> Behawioralny portfel według Maslowa – analiza symulacyjna.....	180
<b>Marta Malecka:</b> Metody oceny jakości prognoz ryzyka rynkowego – analiza porównawcza .....	192
<b>Aleksander R. Mercik:</b> Wykorzystanie rozkładu $t$ -Studenta do szacowania wartości zagrożonej .....	202
<b>Artur Mikulec:</b> Znormalizowany względem czasu $\tau$ wskaźnik Calmara i jego zastosowanie w analizie efektywności inwestycji portfelowych.....	212
<b>Wojciech Misterek:</b> Bariery w zakresie pozyskania zewnętrznych źródeł finansowania na realizację projektów innowacyjnych przedsiębiorstw .....	223
<b>Paweł Niszczota:</b> Wpływ języka raportowania na płynność spółek zagranicznych notowanych na GPW .....	232
<b>Dorota Pekasiewicz:</b> Wyznaczanie współczynnika bezpieczeństwa na podstawie kwantyla rozkładu sumy roszczeń w portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych.....	241
<b>Agnieszka Perepeczo:</b> Reakcja akcjonariuszy na decyzje o wypłacie dywidendy w spółkach publicznych – wyniki badań empirycznych.....	253
<b>Tomasz Pisula:</b> Metodyczne aspekty zastosowania modeli skoringowych do oceny zdolności kredytowej z wykorzystaniem metod ilościowych.....	265
<b>Paweł Porcenaluk:</b> Analiza wybranych miar ryzyka płynności dla akcji notowanych na GPW w Warszawie w latach 2001–2011 .....	289
<b>Marcin Salamaga:</b> Zastosowanie metody średniej kroczącej do badania zyskowności inwestycji na polskim rynku kapitałowym .....	298
<b>Rafał Siedlecki:</b> Prognozowanie trudności finansowych przedsiębiorstw z wykorzystaniem miary rozwoju Hellwiga .....	308
<b>Anna Sroczyńska-Baron:</b> Możliwości aplikacyjne gier mniejszościowych na Gieldzie Papierów Wartościowych .....	319
<b>Michał Stachura, Barbara Wodecka:</b> Asymetria w ujęciu Boshnakova – propozycja metody szacowania miar asymetrii z próby.....	328
<b>Piotr Staszkiwicz:</b> Verification of the disclosure lemma applied to the model for reputation risk for subsidiaries of non-public group with reciprocal shareholding on the Polish broker-dealers market.....	337
<b>Anna Szymańska:</b> Bayesowskie szacowanie stawek składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych z wybranymi funkcjami straty .....	347
<b>Jacek Welc:</b> Prognozowana dynamika zysków spółek a obciążenie błędów prognoz – doświadczenia polskie .....	357
<b>Jerzy Węclawski:</b> Pożyczki hybrydowe jako alternatywna forma finansowania przedsiębiorstw .....	366
<b>Ryszard Węgrzyn:</b> Analiza wrażliwości zmienności implikowanej względem instrumentu podstawowego opcji – podejście dynamiczne.....	375
<b>Stanisław Wieteska:</b> Obciążenia obiektów budowlanych śniegiem jako element ryzyka w ubezpieczeniach majątkowo-osobowych w Polskim obszarze klimatycznym .....	385

<b>Zuzanna Woško:</b> Odporność sektora bankowego w Polsce na szoki zewnętrzne w kontekście ryzyka kredytowego. Badanie zależności między zmiennymi makroekonomicznymi .....	397
<b>Anna Zamojska:</b> Wskaźnik Sharpe'a w teorii i w praktyce.....	406
<b>Aneta Zglińska-Pietrzak:</b> Bootstrapowe prognozy zmienności stóp zwrotu na podstawie modelu GARCH .....	415
<b>Monika Zielińska-Sitkiewicz:</b> Ocena kondycji rynku nieruchomości mieszkaniowych na podstawie badania danych z raportów finansowych firm deweloperskich .....	423

## Summaries

<b>Adam Adamczyk:</b> The level of internal sources of finance as a determinant of investment in R & D of enterprises .....	22
<b>Roman Asyngier:</b> Economic and legal aspects of irregularities in the functioning of the NewConnect market. Assessment and suggestions for changes .....	33
<b>Jacek Bialek:</b> Application of the original index of labour productivity in the analysis of open pension funds' units dynamics .....	42
<b>Magdalena Chmielowiec-Lewczuk:</b> Balanced Scorecard in insurance company.....	52
<b>Dawid Dawidowicz:</b> Evaluation of efficiency of new Polish equity investment funds in comparison to the other investment funds in the period 2000–2012 .....	65
<b>Ewa Dziwok:</b> Yield curve verification based on the correlation surface method .....	74
<b>Krzysztof Echaust:</b> Traded period returns and non-traded period returns – comparison of selected properties on the basis of futures contracts quoted on Warsaw Stock Exchange.....	87
<b>Urszula Gieraltowska:</b> Investing in precious metals as an alternative form of capital investment .....	100
<b>Paweł Kliber:</b> WIBOR-OIS spread as a measure of liquidity and default risk .....	111
<b>Karol Marek Klimczak:</b> Autoregressive structure of residual income of Polish, French and German firms.....	119
<b>Anna Korzeniowska:</b> Selected problems of financial market resulting from the situation on household savings market .....	127
<b>Mieczysław Kowerski:</b> Catering theory of dividends .....	141
<b>Marzena Krawczyk:</b> Adequacy of the offer given by financial market institution to capital needs of SMEs .....	150
<b>Paweł Kufel, Magdalena Mosionek-Schweda:</b> The impact of the stock-market experience on the cost of capital gained on the Catalyst market.....	160

<b>Robert Kurek:</b> The evolution in convergence of supervision regulations and methods on the European Union insurance market .....	169
<b>Sebastian Majewski, Mariusz Doszyń:</b> The effects of impact of behavioural factors on the rate of return of construction companies stocks listed on the Warsaw Stock Exchange.....	179
<b>Sebastian Majewski:</b> Behavioural portfolio according to Maslov – simulation analysis .....	191
<b>Marta Malecka:</b> Methods for evaluating Value-at-Risk forecasts – comparative analysis .....	201
<b>Aleksander R. Mercik:</b> Using the Student's $t$ distribution in Value-at-Risk estimation.....	211
<b>Artur Mikulec:</b> Tau-normalized-Calmar ratio and its application in the analysis of portfolio investment efficiency .....	222
<b>Wojciech Misterek:</b> Barriers in obtaining external funding to the realization of innovative projects in companies .....	231
<b>Paweł Niszczoła:</b> The language used in filings and the trading activity of foreign companies listed on the Warsaw Stock Exchange .....	240
<b>Dorota Pekasiewicz:</b> Determination of the safety factor based on quantile of the sum of claims distribution in the portfolio of automobile insurance....	252
<b>Agnieszka Perepeczo:</b> Market reactions to dividend announcements in public companies – empirical evidence.....	264
<b>Tomasz Pisula:</b> Methodological aspects of the application of credit scoring models to assess the creditworthiness with the use of quantitative methods .....	288
<b>Paweł Porcenaluk:</b> The analysis of the selected liquidity risk measures for stocks listed on the Warsaw Stock Exchange in 2001–2011 period.....	297
<b>Marcin Salamaga:</b> An application of moving average rules for testing the profitability of Polish stock market.....	307
<b>Rafał Siedlecki:</b> Forecasting financial problems of companies based on Hellwig measurement of development .....	318
<b>Anna Sroczyńska-Baron:</b> The application of the minority games and gambling on the stock exchange.....	327
<b>Michał Stachura, Barbara Wodecka:</b> Boshnakov's approach to asymmetry – proposal of estimation of sample asymmetry measures .....	336
<b>Piotr Staszkiwicz:</b> Weryfikacja lematu ujawnienia dla modelu ryzyka reputacji niepublicznych grup kapitałowych z powiązaniem wzajemnymi na polskim rynku firm inwestycyjnych .....	346
<b>Anna Szymańska:</b> Bayesian estimation of premium rates in motor insurance with selected loss functions .....	356
<b>Jacek Welc:</b> Forecasted earnings growth of companies and earnings forecast bias – Polish experience.....	365
<b>Jerzy Węclawski:</b> Hybrid loans as an alternative form of corporate finance ..	374

---

<b>Ryszard Węgrzyn:</b> Analysis of the sensitivity of implied volatility to the underlying instrument of option – a dynamic approach.....	384
<b>Stanisław Wieteska:</b> Overload of roofs of buildings with snow as an element of risk in property insurance in the Polish climate area.....	396
<b>Zuzanna Wośko:</b> Resilience of the Polish banking sector to external shocks in the context of credit risk. Analysis of the relationship between macro-economic variables .....	405
<b>Anna Zamojska:</b> Sharpe ratio – theory and practice.....	414
<b>Aneta Zglińska-Pietrzak:</b> Bootstrap predictions of returns for GARCH processes .....	422
<b>Monika Zielińska-Sitkiewicz:</b> Assessment of the condition of the Polish real estate market based on the data analysis from the financial statements of developers .....	437

**Dorota Pekasiewicz**

Uniwersytet Łódzki

---

## WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA BEZPIECZEŃSTWA NA PODSTAWIE KWANTYLA ROZKŁADU SUMY ROSZCZEŃ W PORTFELU UBEZPIECZEŃ KOMUNIKACYJNYCH

---

**Streszczenie:** Ubezpieczyciel, obliczając składkę dla danego portfela, powiększa składkę netto minimum o współczynnik bezpieczeństwa. Współczynnik bezpieczeństwa jest tajemnicą każdego towarzystwa ubezpieczeniowego. W pracy przedstawiono metody wyznaczania współczynnika bezpieczeństwa, stosując zasadę kwantyla rozkładu sumy roszczeń w portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych. Określenie rozkładu sumy roszczeń możliwe jest m.in. przez aproksymację pewnymi rozkładami teoretycznymi lub przez zastosowanie metod symulacyjnych. Wyniki analiz wielkości współczynników bezpieczeństwa wyznaczonych w oparciu o aproksymację rozkładu sumy roszczeń zaprezentowano w pracy.

**Słowa kluczowe:** współczynnik bezpieczeństwa, kwantyl, metoda bootstrapowa.

### 1. Wstęp

Wielkość składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych wyznacza się według różnych zasad, m.in. zasady wartości oczekiwanej, wariancji, odchylenia standardowego czy też maksymalnej możliwej straty albo użyteczności zerowej. W przypadku trzech pierwszych zasad pojawia się problem ustalenia wartości współczynnika bezpieczeństwa. Współczynnik bezpieczeństwa powinien być określony na takim poziomie, aby zapewnił bezpieczeństwo zakładowi ubezpieczeń, a jednocześnie pozwolił na ustalenie „atrakcyjnej” dla klientów wysokości składki ubezpieczeniowej [Kowalczyk i in. 2006].

Jednym z podejść jest określenie składki na takim poziomie, aby prawdopodobieństwo poniesienia straty na danym portfelu w ciągu kolejnego okresu nie przekroczyło ustalonej z góry wartości. Oznacza to, że składka dla portfela ryzyka ustalana jest na poziomie wybranego kwantyla łącznej sumy roszczeń w portfelu. W tym przypadku konieczna jest znajomość rozkładu sumy roszczeń, zależnego od rozkładu wysokości indywidualnych roszczeń oraz rozkładu liczby szkód w portfelu. Znalezienie tego rozkładu możliwe jest za pomocą metod analitycznych opartych



na splotach, metod rekurencyjnych, aproksymacyjnych czy też symulacyjnych. Dla dużych portfeli i niezbyt dużej asymetrii rozkładu wysokości szkód możliwa jest aproksymacja łącznej sumy szkód przesuniętym rozkładem gamma z zastosowaniem różnych formuł przybliżeń, pozwalająca wyznaczyć kwantyle odpowiednich rzędów [Otto 2004]. Określenie rozkładu sumy roszczeń możliwe jest również przy zastosowaniu metod symulacyjnych, w szczególności za pomocą proponowanej metody bootstrapowej. W tym przypadku wartość kwantyla rozkładu sumy roszczeń ustalonego rzędu określa wielkość składki dla całego portfela.

Dekompozycja składki ustalonej dla całego portfela na składki indywidualne oraz rozdzielanie współczynnika bezpieczeństwa na poszczególne jednostki ryzyka możliwe są po uwzględnieniu wariacji rozkładów wypłat indywidualnych w portfelu.

W pracy zaprezentowano wyniki analiz wielkości wybranych współczynników bezpieczeństwa otrzymanych przez aproksymację rozkładu sumy roszczeń przesuniętym rozkładem gamma. Ponadto przedstawiono propozycję wykorzystania metody bootstrapowej do aproksymacji rozkładu sumy roszczeń i wyznaczenia wielkości składki dla całego portfela. Badania symulacyjne, przeprowadzone dla wybranych rozkładów wielkości indywidualnych wypłat charakterystycznych dla portfela ubezpieczeń komunikacyjnych, pozwoliły porównać wielkości składek ustalone metodą bootstrapową i metodami wykorzystującymi aproksymację przesuniętym rozkładem gamma.

## 2. Wybrane metody kalkulacji składki ubezpieczeniowej

W ubezpieczeniach majątkowych, w tym również komunikacyjnych, podstawą obliczania składki jest oszacowanie składki netto na podstawie przewidywanej liczby roszczeń ( $N$ ) i wielkości roszczeń ( $X$ ), czyli na podstawie pomiaru ryzyka ubezpieczeniowego.

W literaturze prezentowanych jest wiele metod wyznaczania wielkości składki netto  $\Pi(X)$ . Należą do nich metody zawierające, w formule określającej wysokość składki netto, współczynnik bezpieczeństwa, zwany również narzutem bezpieczeństwa. Do metod takich należą [Kowalczyk i in. 2006; Szymańska 2012]:

- zasada wartości oczekiwanej:

$$\Pi(X) = E(X) + Q \cdot E(X), \quad (1)$$

- zasada wariacji:

$$\Pi(X) = E(X) + Q \cdot D^2(X), \quad (2)$$

- zasada odchylenia standardowego:

$$\Pi(X) = E(X) + Q \cdot D(X), \quad (3)$$

gdzie:  $E(X)$  – wartość oczekiwana,

- $D^2(X)$  – wariancja,  
 $D(X)$  – odchylenie standardowe zmiennej losowej  $X$ ,  
 $Q$  – współczynnik bezpieczeństwa.

Współczynnik bezpieczeństwa musi być ustalony na pierwszym etapie kalkulacji składki. Na wysokość współczynnika bezpieczeństwa mają wpływ: struktura portfela, rodzaj polis, a także siła kapitałowa zakładu ubezpieczeń i związana z nią awersja do ryzyka.

Wielkość współczynnika dla danego portfela może być ustalana na podstawie odpowiedniego kwantyla rozkładu sumy odszkodowań w portfelu albo w oparciu o teorię ruiny.

### 3. Wybrane metody wyznaczania współczynnika bezpieczeństwa, wykorzystujące kwantyl rozkładu sumy roszczeń

W ubezpieczeniach majątkowych ryzyko ubezpieczeniowe jest mierzone dla całych portfeli, a całkowita suma roszczeń powstałych w portfelu w analizowanym okresie wynosi:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N, \quad (4)$$

gdzie:  $N$  – zmienna losowa określająca liczbę roszczeń,  
 $X_1, X_2, \dots$  – niezależne zmienne losowe oznaczające wartości kolejnych wypłat.

Wielkość składki  $\Pi(S)$  ustala się na takim poziomie, aby prawdopodobieństwo poniesienia straty na danym portfelu w kolejnym okresie nie przekroczyło ustalonej wartości  $\varepsilon \in (0, 1)$ , czyli

$$P(S > \Pi(S)) \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Z definicji kwantyla wynika, że składka dla portfela ustalana jest na poziomie kwantyla rozkładu zmiennej  $S$  rzędu  $1 - \varepsilon$ :

$$F(\Pi(S)) \geq 1 - \varepsilon, \quad (6)$$

gdzie  $F$  jest dystrybuantą zmiennej losowej  $S$ .

Rozkład zmiennej losowej  $S$  zależy zarówno od rozkładu zmiennej losowej  $N$ , jak i rozkładu zmiennych losowych  $X_i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, N$ , dlatego analityczne wyznaczenie dystrybuanty  $F$  jest często trudne, a czasami niemożliwe. W tych przypadkach mają zastosowanie metody aproksymacyjne i symulacyjne.

Wśród metod aproksymacji rozkładu sumy szkód rozważa się aproksymacje rozkładem normalnym lub przesuniętym rozkładem gamma.

Aproksymacja rozkładem normalnym dopuszczalna jest dla dużych portfeli i niezbyt dużej asymetrii rozkładu, tzn. gdy współczynnik asymetrii  $\gamma_S$  jest mniej-

szy niż 0,1. W wyniku aproksymacji rozkładem normalnym otrzymujemy wielkość składki  $\Pi(S)$  dla całego portfela wyrażoną wzorem:

$$\Pi(S) \approx E(S) + u_\varepsilon D(S), \quad (7)$$

gdzie:  $E(S)$  – wartość oczekiwana zmiennej  $S$ ,

$D(S)$  – odchylenie standardowe zmiennej  $S$ ,

$u_\varepsilon$  – kwantyl rzędu  $1 - \varepsilon$  zmiennej losowej o rozkładzie normalnym standaryzowanym.

Składka otrzymana w ten sposób jest składką ustaloną według zasady odchylenia standardowego. Narzut bezpieczeństwa jest równy kwantylowi zmiennej losowej o rozkładzie normalnym standaryzowanym i zależy wyłącznie od ustalonej wartości  $\varepsilon$ , czyli wartości, której nie może przekroczyć prawdopodobieństwo poniesienia straty w portfelu. Zwykle przyjmuje się  $\varepsilon \in (0,001; 0,1)$ , zatem  $Q = u_\varepsilon \in (1,28; 3,09)$ .

Jeśli współczynnik asymetrii rozkładu sumy roszczeń spełnia nierówność  $0,1 \leq \gamma_s < 1$ , możliwa jest aproksymacja przesuniętym rozkładem gamma, ale dodatkowo powinien być spełniony warunek:  $\frac{\gamma_{2,S}}{\gamma_s^2} \approx 1,5$  [Daykin i in. 1994]. Parametry przesuniętego rozkładu gamma o dystrybuancie  $G(x, \alpha, \beta, x_0) = F(x - x_0, \alpha, \beta)$ , gdzie  $F(x - x_0, \alpha, \beta)$  jest dystrybuantą rozkładu gamma, mają postaci:

$$\alpha = \frac{4}{\gamma_s^2}, \quad \beta = \frac{2}{\gamma_s D(S)}, \quad x_0 = E(S) - 2 \frac{D(S)}{\gamma_s}, \quad (8)$$

$\gamma_s$  zaś jest współczynnikiem asymetrii wyrażonym wzorem:

$$\gamma_s = \frac{E(S - E(S))^3}{D^3(S)}. \quad (9)$$

Pakiety statystyczne i matematyczne zawierają funkcję odwrotną do dystrybuanty przesuniętego rozkładu gamma i pozwalają określić składkę  $\Pi(S)$ . Numeryczne wyznaczenie funkcji odwrotnej albo przybliżenie jej wartości umożliwiają zapisanie składki w postaci wzoru, w którym wyszczególniony jest współczynnik bezpieczeństwa związany z ustalonym prawdopodobieństwem  $\varepsilon$  poniesienia straty w portfelu.

Stosując różne formuły aproksymacyjne, otrzymujemy różne postaci składki łącznej sumy odszkodowań [Burnecki, Nowicka-Zagrajek 2006], m.in.:

– dla formuły WH1 (Wilsona-Hilferty'ego):

$$\Pi(S) \approx E(S) + \left( \sqrt{\alpha} \left( \left( 1 - \frac{1}{9\alpha} + \frac{u_\varepsilon}{3\sqrt{\alpha}} \right)^3 - 1 \right) \right) D(S), \quad (10)$$

– dla WH2 (Wilsona-Hilferty'ego):

$$\Pi(S) \approx E(S) + \left( u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \gamma_S + \frac{u_\varepsilon^3 - 6u_\varepsilon}{108} \gamma_S^2 \right) D(S), \quad (11)$$

– dla FC1 (Fishera-Cornisha):

$$\Pi(S) \approx E(S) + \left( u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \gamma_S \right) D(S), \quad (12)$$

– dla FC2 (Fishera-Cornisha):

$$\Pi(S) \approx E(S) + \left( u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \gamma_S + \frac{u_\varepsilon^3 - 7u_\varepsilon}{144} \gamma_S^2 \right) D(S). \quad (13)$$

Zatem współczynniki (narzuty) bezpieczeństwa wyrażają się wzorami:

– WH1(Wilsona-Hilferty'ego):

$$Q_{WH1} = \frac{2}{\gamma_S} \left( \left( 1 - \frac{\gamma_S^2}{36} + \frac{u_\varepsilon \gamma_S}{6} \right)^3 - 1 \right), \quad (14)$$

– WH2(Wilsona-Hilferty'ego):

$$Q_{WH2} = u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \gamma_S + \frac{u_\varepsilon^3 - 6u_\varepsilon}{108} \gamma_S^2, \quad (15)$$

– FC1 (Fishera-Cornisha):

$$Q_{FC1} = u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \gamma_S, \quad (16)$$

– FC2 (Fishera-Cornisha):

$$Q_{FC2} = u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \gamma_S + \frac{u_\varepsilon^3 - 7u_\varepsilon}{144} \gamma_S^2. \quad (17)$$

W tabelach 1–3 przedstawione zostały wartości współczynników bezpieczeństwa dla ustalonych prawdopodobieństw  $\varepsilon$  oraz wybranych współczynników asymetrii. Stosując formuły określone wzorami (14)–(17), otrzymano zbliżone wartości narzutu bezpieczeństwa w przypadkach gdy rozkłady sumy roszczeń charakteryzował ten sam współczynnik asymetrii. Tylko wartość współczynnika wyznaczonego w oparciu o formułę FC1 nieznacznie odbiega od pozostałych wartości, przy czym im większa jest asymetria zmiennej  $S$ , tym większa jest ta różnica. Ponadto widoczna jest zależność wielkości narzutu bezpieczeństwa od współczynnika skośności. Im większa jest asymetria, tym większy współczynnik bezpieczeństwa otrzymujemy.

**Tabela 1.** Współczynniki bezpieczeństwa dla  $\varepsilon = 0,1$  i aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma dla rozkładów sumy szkód o wybranych współczynnikach skośności

Formuła \ $\gamma_s$	0,2	0,40	0,60	0,80	1,00
WH1	1,29919	1,31412	1,32472	1,33091	1,33270
WH2	1,29921	1,31429	1,32523	1,33204	1,33471
FC1	1,30128	1,32256	1,34384	1,36512	1,38640
FC2	1,29937	1,31493	1,32668	1,33462	1,33874

Źródło: obliczenia własne.

**Tabela 2.** Współczynniki bezpieczeństwa dla  $\varepsilon = 0,5$  i aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma dla rozkładów sumy szkód o wybranych współczynnikach skośności

Formuła \ $\gamma_s$	0,2	0,40	0,60	0,80	1,00
WH1	1,69425	1,74413	1,78933	1,82961	1,86473
WH2	1,69431	1,74460	1,79086	1,83311	1,87133
FC1	1,69632	1,75264	1,80896	1,86528	1,92160
FC2	1,69436	1,74479	1,79129	1,83386	1,87251

Źródło: obliczenia własne.

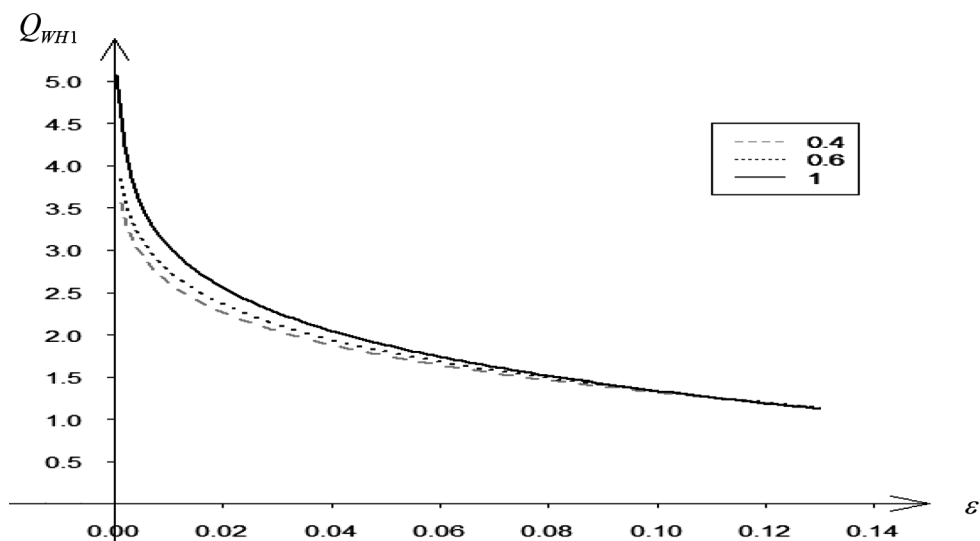
**Tabela 3.** Współczynniki bezpieczeństwa dla  $\varepsilon = 0,001$  i aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma dla rozkładów sumy szkód o wybranych współczynnikach skośności

Formuła \ $\gamma_s$	0,2	0,40	0,60	0,80	1,00
WH1	3,37868	3,67364	3,97311	4,27542	4,57897
WH2	3,37900	3,67612	3,98136	4,29472	4,61620
FC1	3,37494	3,65987	3,94481	4,22975	4,51468
FC2	3,37712	3,66862	3,96449	4,26474	4,56936

Źródło: obliczenia własne.

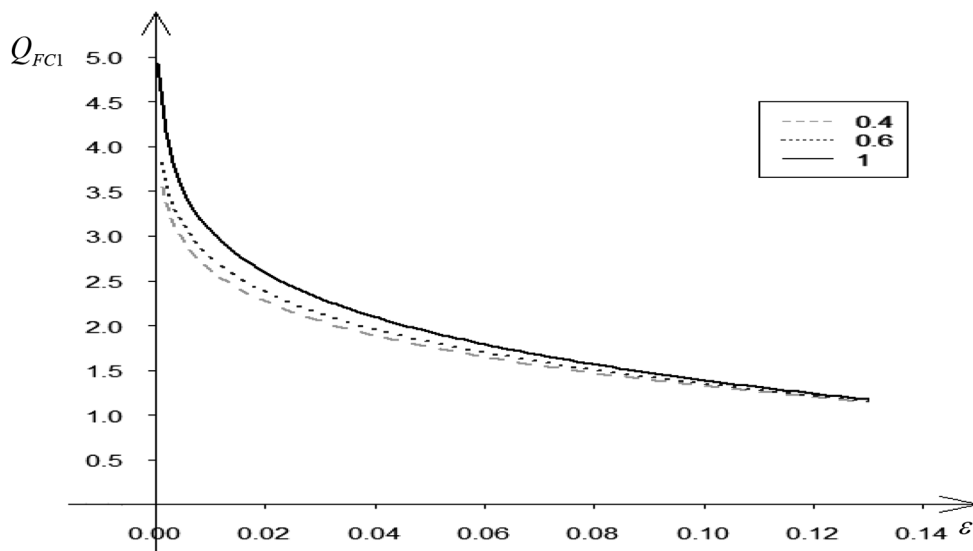
Rysunki 1 i 2 prezentują zależności wielkości narzutów bezpieczeństwa wyznaczonych w oparciu o formuły WH1 i FC1 od  $\varepsilon$ , dla wybranych współczynników asymetrii rozkładu sumy roszczeń.

Okazuje się, że większy wpływ na wielkość narzutu bezpieczeństwa ma współczynnik asymetrii przy mniejszych ustalonych wartościach  $\varepsilon$ . Dla dużych wartości  $\varepsilon$  (ok. 0,1) nie zaobserwowano znaczących różnic między wartościami obliczonych współczynników bezpieczeństwa. Podobne rezultaty otrzymano dla współczynników bezpieczeństwa wyznaczonych w oparciu o formuły aproksymacyjne WH2 i FC2.



Rys. 1. Zależność współczynnika  $Q_{WH1}$  od wartości  $\epsilon$  dla wybranych współczynników asymetrii rozkładu sumy roszczeń

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Zależność współczynnika  $Q_{FC1}$  od wartości  $\epsilon$  dla wybranych współczynników asymetrii rozkładu sumy roszczeń

Źródło: opracowanie własne.

Przy znajomości rozkładu pojedynczych roszczeń, współczynnik asymetrii rozkładu sumy roszczeń, wykorzystywany do określania narzutu bezpieczeństwa, można wyznaczyć ze wzoru:

$$\gamma_S = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i D^3(X_i)}{\left(\sum_{i=1}^n D^2(X_i)\right)^{3/2}}, \quad (18)$$

gdzie:  $\gamma_i$  – współczynnik asymetrii rozkładu zmiennej  $X_i$ , dla  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  
 $X_1, X_2, \dots$  – niezależne zmienne losowe.

Jeżeli ponadto, zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mają jednakowe rozkłady, to współczynnik asymetrii rozkładu sumy wypłat  $S$  przybiera postać:

$$\gamma_S = \frac{\gamma}{\sqrt{n}}, \quad (19)$$

gdzie:  $\gamma$  – współczynnik asymetrii rozkładu zmiennych  $X_1, X_2, \dots$

Powyższe wzory i analiza wielkości współczynników bezpieczeństwa dotyczyły składki dla całego portfela. Istotnym zagadnieniem dla ubezpieczyciela jest określenie składek indywidualnych dla polis.

Jeśli ryzyka w portfelu mają jednakowe odchylenia standardowe ( $D(X_i) = D(X)$  dla  $i = 1, \dots, n$ ), to narzut bezpieczeństwa jest równo rozdzielany i wynosi:

$$Q_{ind} = \frac{Q}{\sqrt{n}}, \quad (20)$$

natomiast składkę indywidualną wyznacza się ze wzoru:

$$\Pi(X) = E(X) + Q_{ind}D(X). \quad (21)$$

Jeśli w portfelu ryzyka  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mają różne wariancje, to

$$\Pi(X_i) = E(X_i) + Q_{ind}^{(i)}D(X_i), \quad (22)$$

gdzie:

$$Q_{ind}^{(i)} = Q \frac{D(X_i)}{D(S)}. \quad (23)$$

#### 4. Bootstrapowa metoda aproksymacji rozkładu sumy roszczeń i kalkulacji wielkości składki

Metody bootstrapowe, zwane również metodami sznurowadłowymi, należą do metod symulacyjnych i są stosowane m.in. do aproksymacji rozkładów zmiennych losowych [Efron, Tibshirani 1993]. Wykorzystując metodę bootstrapową, można wyznaczyć rozkład sumy roszczeń, a następnie odpowiedni kwantyl tego rozkładu.

Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych określających wielkości indywidualnych wypłat w danym okresie. Z ciągu wartości zmiennych  $X_1, \dots, X_n$  losujemy  $K$  razy ze zwracaniem  $n$  wartości i obliczamy sumę wypłat. W ten sposób otrzymujemy  $K$  (np.  $K = 1000$ ) wartości zmiennych  $S_1^*, S_2^*, \dots, S_K^*$ , które pozwalają aproksymować rozkład sumy roszczeń w portfelu w danym okresie.

W celu porównania wyników uzyskanych przy zastosowaniu metody bootstrapowej z wynikami otrzymanymi poprzez aproksymację przesuniętym rozkładem gamma generowano liczbę wypłat z rozkładu Poissona, a wartości zmiennej określającej wielkość wypłat z rozkładów charakterystycznych dla wypłat z tytułu ubezpieczeń komunikacyjnych OC, czyli rozkładu gamma i logarytmiczno-normalnego. Parametry rozkładów wysokości wypłat dobrane zostały tak, aby ich wartości oczekiwane były równe 4 (tys.), a odchylenia standardowe 6 (tys.). Wartości tych parametrów ustalono na podstawie analizy rzeczywistych danych towarzystwa ubezpieczeniowego funkcjonującego na polskim rynku ubezpieczeniowym, którego nazwa ze względu na poufność danych nie została w pracy podana.

Rysunki 3 i 4 przedstawiają rozkłady wysokości sumy roszczeń uzyskane w oparciu o 1000 prób bootstrapowych. W obydwu przypadkach weryfikacja hipotez o normalności zmiennej losowej  $S$ , testem zgodności  $\chi^2$ , została odrzucona ( $\chi_1^2 = 59,456$ ,  $\chi_2^2 = 32,005$ ).

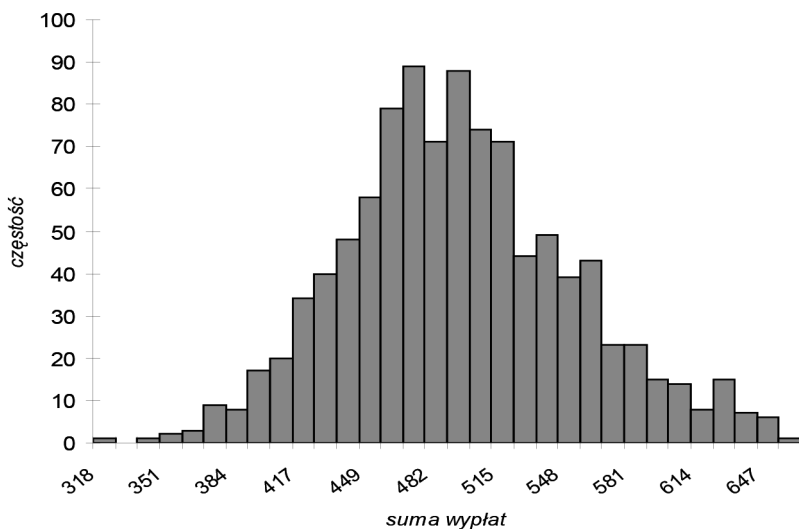
Aproksymacja rozkładów metodą bootstrapową pozwoliła określić kwantyle odpowiednich rzędów i ustalić składki dla całego portfela.

Tabele 4. i 5 zawierają wartości składek  $\Pi(S)$  wyznaczone różnymi metodami aproksymacyjnymi dla różnych wielkości  $\varepsilon$  w dwóch przypadkach: gdy rozkład wielkości szkód charakteryzował się rozkładem gamma oraz rozkładem logarytmiczno-normalnym.

Zastosowanie metody bootstrapowej do aproksymacji rozkładu sumy szkód i wyznaczenie kwantyla odpowiedniego rzędu spowodowało uzyskanie nieznacznie niższych składek w stosunku do wysokości składek wyznaczonych w oparciu o aproksymację przesuniętym rozkładem gamma. Różnica ta stanowiła ok. 2,5–3% wartości składki uzyskanej przy zastosowaniu przesuniętego rozkładu gamma.

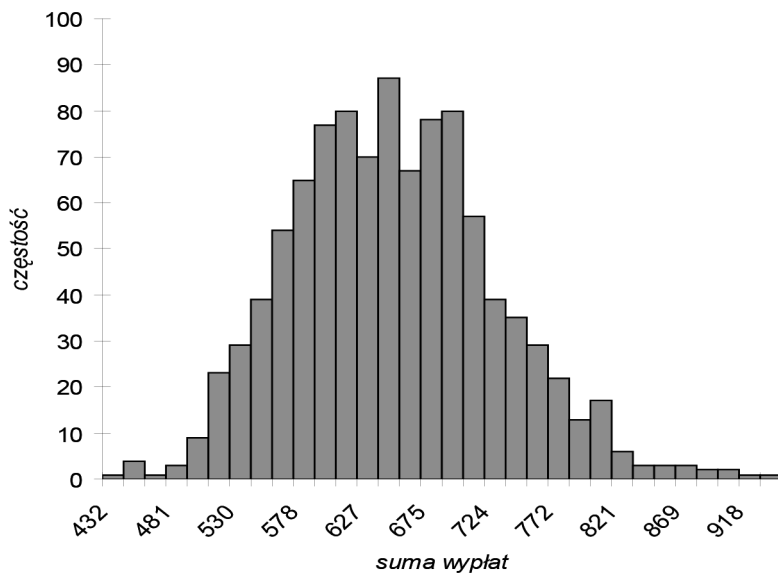
Metoda bootstrapowa pozwala określić wielkość składki dla całego portfela zawierającą narzut bezpieczeństwa, w oparciu o którą można wyznaczyć składki indywidualne. Metodę tę można stosować w przypadku, gdy rozkład indywidualnych roszczeń jest nieznan, gdyż jest to metoda nieparametryczna, niewymagająca żadnych założeń o rozkładach zmiennych losowych. Może być również stosowana w przypadkach, gdy asymetria rozkładu sumy roszczeń jest większa niż 1.





**Rys. 3.** Rozkład sumy roszczeń, gdy indywidualne wielkości wypłat charakteryzuje rozkład gamma

Źródło: opracowanie własne.



**Rys. 4.** Rozkład sumy roszczeń, gdy indywidualne wielkości wypłat charakteryzuje rozkład logarytmiczno-normalny

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 4.** Wartości składki  $\Pi(S)$  dla różnych metod aproksymacji, gdy wysokość szkód ma rozkład gamma

$\varepsilon$	Metoda				
	WH1	WH2	FC1	FC2	bootstrap
0,1	576,7097	576,7117	576,8825	576,7253	562,14
0,05	604,076	604,0814	604,2467	604,0855	591,23
0,001	719,9422	719,9701	719,6361	719,8157	645,88

Źródło: opracowanie własne.

**Tabela 5.** Wartości składki  $\Pi(S)$  dla różnych metod aproksymacji, gdy wysokość szkód ma rozkład logarytmiczno-normalny

$\varepsilon$	Metoda				
	WH1	WH2	FC1	FC2	bootstrap
0,1	763,7368	763,7443	764,2281	763,7818	741,251
0,05	803,0504	803,0729	803,5427	803,0833	772,293
0,001	973,697	973,8123	955,0467	973,3735	906,925

Źródło: opracowanie własne.

Poza analizą symulacyjną przedstawionych metod aproksymacji sumy roszczeń, zaprezentowane metody zastosowano do danych rzeczywistych.

Obliczenia wykonano w oparciu o dane dotyczące 5000 wylosowanych w sposób niezależny polis OC pochodzących z rozważanego towarzystwa ubezpieczeniowego, przy czym ze 151 polis wypłacono odszkodowania. Współczynnik asymetrii rozkładu sumy wypłat wynosił 0,4. Wyznaczone współczynniki bezpieczeństwa dla sumy wypłat w portfelu, dla  $\varepsilon = 0,05$ , wynosiły:  $Q_{WH1} = 1,74413$ ,  $Q_{WH2} = 1,74460$ ,  $Q_{FC1} = 1,75264$ ,  $Q_{FC2} = 1,74479$ , oraz  $Q_{boot} = 1,7205$ , a obliczone wielkości składek dla całego portfela, podobnie jak w poprzednich przypadkach, różniły się nieznacznie. Najniższą wartość uzyskano przy aproksymacji sumy roszczeń metodą bootstrapową, ale różniła się ona od pozostałych o ok. 3,1% ich wartości.

## 5. Uwagi końcowe

Dla towarzystwa ubezpieczeniowego ustalenie narzutu bezpieczeństwa przy kalkulacji składki jest bardzo istotne. Zbyt niska jego wartość wiąże się z dużym ryzykiem, a zbyt wysoka może spowodować, że wielkość składki staje się mało atrakcyjna dla ubezpieczającego.

Współczynnik bezpieczeństwa określa się albo na podstawie kwantyla rozkładu sumy roszczeń, przy założeniu, że prawdopodobieństwa poniesienia straty na danym portfelu w ciągu kolejnego okresu nie może przekroczyć ustalonej wartości, albo na

podstawie teorii ruiny. W pracy rozważano pierwsze z podejść, w którym niezbędna jest znajomość rozkładu sumy roszczeń.

Rozważania dotyczące wielkości narzutów bezpieczeństwa otrzymanych przez aproksymacje sumy roszczeń przesuniętym rozkładem gamma pozwoliły sformułować wnioski o zależnościach między ich wartościami a asymetrią rozkładu oraz ustalonym maksymalnym prawdopodobieństwem poniesienia straty na portfelu.

W pracy zaproponowano również zastosowanie metody bootstrapowej do szacowania wielkości składki dla całego portfela. Analiza porównawcza wyników otrzymanych z zastosowaniem aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma oraz metody bootstrapowej pozwoliła stwierdzić, że w rozważanych przypadkach wysokości składek dla wygenerowanych portfeli były zbliżone. Analogiczne wyniki uzyskano dla danych rzeczywistych, chociaż w pracy, ze względu na poufność danych towarzystwa ubezpieczeniowego, przedstawiono wyłącznie obliczone współczynniki bezpieczeństwa, a nie zaprezentowano ustalonych wysokości składek dla portfela.

## Literatura

- Burnecki K., Nowicka-Zagrajek J., 2006, *Składka kwantylowa w modelu ryzyka kolektywnego a dane szkodowe z obcięciem dolnym*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1108.
- Daykin C.D., Penttikäinen T., Pesonen E., 1994, *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London.
- Efron B., Tibshirani R.J., 1993, *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, New York.
- Kowalczyk P., Poprawska E., Ronka-Chmielowiec W., 2006, *Metody aktuarialne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Otto W., 2004, *Ubezpieczenia majątkowe. Cz. 1: Teoria ryzyka*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Szymańska A., 2012, *Wyznaczanie składki netto na podstawie próby dla różnych wielkości szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych*, Acta Universitatis Lodzianis, Folia Oeconomica 274, Łódź.

### **DETERMINATION OF THE SAFETY FACTOR BASED ON QUANTILE OF THE SUM OF CLAIMS DISTRIBUTION IN THE PORTFOLIO OF AUTOMOBILE INSURANCE**

**Summary:** The insurer calculates the premium to the portfolio by increasing the minimum net premium by the value of the safety factor. The safety factor is the secret of each insurance company. The paper presents methods for determining the safety factor, using the principle of total claims distribution quantile of portfolio insurance. Determining the distribution of the sums of claims is possible among others through approximations with certain theoretical distributions or by applying simulation methods. The results of the analysis of the size of safety factors determined by total claims distribution approximations are presented in the paper.

**Keywords:** Safety factor, quantile, bootstrap method.