

PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 312

RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics No. 312

Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

Redaktor naukowy
Joanna Dębicka



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Dorota Pitulec

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Beata Mazur

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,

The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa

www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2013

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-315-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	7
Wojciech Bijak , Ubezpieczenia na życie jako niejednorodne łańcuchy Markowa.....	9
Joanna Dębicka , Wpływ zmian parametrów tablic trwania życia w krajach Unii Europejskiej na wielkości aktuarialne	29
Kamil Gala , Analiza ubezpieczeń dla wielu osób z wykorzystaniem funkcji copula.....	50
Stanisław Heilpern , Złożony proces Poissona z zależnymi okresami między szkodami i wielkościami szkód	67
Magdalena Homa , Rozkład wypłaty w ubezpieczeniu na życie z funduszem kapitałowym a ryzyko finansowe	78
Helena Jasiulewicz , Uogólnienie klasycznego procesu nadwyżki finansowej w czasie dyskretnym.....	88
Agnieszka Marciniuk , Długowieczność i instrumenty finansowe związane z długowiecznością	100
Daniel Sobiecki , Dwustopniowe modelowanie składki za ubezpieczenie komunikacyjne OC	116

Summaries

Wojciech Bijak , Non-homogenous Markov chain models for life insurance..	28
Joanna Dębicka , Varying parameters of life tables in the European Union: influence on actuarial amounts	47
Kamil Gala , Analysis of multiple life insurance using copulas.....	66
Stanisław Heilpern , Compound Poisson process with dependent interclaim times and claim amounts	77
Magdalena Homa , Distribution of the payments in the unit-linked life insurance and financial risk	87
Helena Jasiulewicz , Generalization of a classical process of a financial surplus process in discrete time	99
Agnieszka Marciniuk , Longevity and financial instrument related to longevity	115
Daniel Sobiecki , Two-stage premium modelling in MTPL	134

Kamil Gala

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

ANALIZA UBEZPIECZEŃ DLA WIELU OSÓB Z WYKORZYSTANIEM FUNKCJI COPULA

Streszczenie: W pracy przedstawiamy podejście do analizy ubezpieczeń dla wielu osób oparte na niejednorodnych łańcuchach Markowa z czasem dyskretnym. Formułujemy model probabilistyczny i opisujemy, jak obliczyć prawdopodobieństwa przejścia w przypadku, gdy czasy dalszego trwania życia ubezpieczonych nie są niezależne, wykorzystując do tego celu funkcje copula. Pokazujemy, jak wyznaczyć jednorazową składkę netto i matematyczną rezerwę składki. Ilustrację do rozważań teoretycznych stanowi przykład obliczeniowy, który pokazuje, że uchylenie założenia o niezależności może mieć istotny wpływ na wysokość składki pobieranej przez ubezpieczyciela, a w szczególności może prowadzić do niedoszacowania ponoszonego ryzyka.

Słowa kluczowe: ubezpieczenie dla wielu osób, niejednorodny łańcuch Markowa, copula, zależność.

1. Wstęp

Ubezpieczenia dla wielu osób stanowią rozszerzenie ubezpieczeń indywidualnych na wypadek, gdy umowa ubezpieczenia zawierana jest z grupą osób rozumianą jako całość. W tego rodzaju kontrakcie przepływy finansowe (składki, wypłacone świadczenia i różnego rodzaju koszty) zależą od sposobu wymierania danej grupy. Tradycyjne podejście do aktuarialnej analizy takich ubezpieczeń oparte jest na założeniu o niezależności długości życia poszczególnych ubezpieczonych [Denuit, Cornet 1999]. Założenie to znacznie upraszcza obliczenia, jednakże w wielu przypadkach nie przystaje do rzeczywistości, a w literaturze aktuarialnej można znaleźć liczne argumenty za tym przemawiające. Na przykład Denuit, Dhaene, Le Bailly de Tillegem i Teghem [2001] wskazują, że śmierć żony prowadzi do wzrostu śmiertelności wśród wdowców, co określają jako „syndrom złamanego serca”. Z kolei Dhaene, Vanneste i Wolthuis [2000] zwracają uwagę, że ubezpieczeni mogą być w mniejszym lub większym stopniu narażeni na te same czynniki ryzyka (np. osoby, które razem mieszkają lub pracują). Wreszcie Norberg [1989] sugeruje, że do ubezpieczonej grupy mogą przystępować osoby w pewnym sensie podobne, przez co nie można ich traktować jako całkiem niezależne jednostki.

W niniejszej pracy prezentowane jest podejście do analizy ubezpieczeń dla wielu osób oparte na niejednorodnych łańcuchach Markowa z czasem dyskretnym. Dopuszczamy przy tym możliwość występowania zależności między długością życia ubezpieczonych, specyfikując łączny rozkład tych wielkości za pomocą funkcji copula. Celem pracy jest zbadanie, w jaki sposób składka w umowie ubezpieczenia zależy od przyjętej struktury zależności.

2. Ubezpieczenie dla wielu osób jako niejednorodny łańcuch Markowa

W dalszym toku pracy będziemy rozważać umowę ubezpieczenia na życie zawartą z grupą m osób w wieku x_1, \dots, x_m . Zgodnie z przyjętą w literaturze notacją przez (x) będziemy oznaczać osobę w wieku x . Dla każdego z ubezpieczonych będziemy wyróżniać dwa stany elementarne – życie i zgon. Stan ubezpieczonej grupy możemy wtedy opisać poprzez podanie stanów elementarnych, w których znajdują się jej członkowie. Prowadzi to do l -elementowej przestrzeni stanów S , gdzie $l = 2^m$. Jej elementy możemy utożsamiać np. z ciągami o długości m , w których na i -tym miejscu pojawia się 1, gdy i -ta osoba żyje, i 0 w przeciwnym wypadku. Zakładamy przy tym, że prawdopodobieństwo znalezienia się w określonym stanie w momencie n zależy tylko od tego, w jakim stanie grupa znajdowała się w momencie $n - 1$, nie zależy natomiast od stanu grupy we wcześniejszych okresach. Prowadzi to do probabilistycznego opisu procesu życia grupy za pomocą łańcucha Markowa, który definiujemy następująco:

Definicja 2.1. Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ o wartościach w przeliczalnym zbiorze S (przestrzeni stanów) nazywamy **łańcuchem Markowa** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego ciągu $s_0, s_1, \dots, s_n \in S$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_1 = s_1, X_0 = s_0) = \mathbb{P}(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1})$$

jeśli tylko $\mathbb{P}(X_{n-1} = s_{n-1}, \dots, X_1 = s_1, X_0 = s_0) > 0$.

Występujące w powyższej definicji prawdopodobieństwa warunkowe nazywamy prawdopodobieństwami przejścia i oznaczamy $p_{s_{n-1}s_n}(n)$. Macierz utworzoną z tych prawdopodobieństw, $P_n = [p_{s_{n-1}s_n}(n)]_{s_{n-1}, s_n \in S}$, nazywamy macierzą prawdopodobieństw przejścia w momencie n . Jeśli macierz P_n jest taka sama dla każdego $n = 1, 2, \dots$, to łańcuch Markowa nazywamy jednorodnym, w przeciwnym razie mówimy o łańcuchu niejednorodnym. W przypadku ubezpieczeń na życie właściwszym narzędziem opisu wydają się niejednorodne łańcuchy Markowa, ponieważ prawdopodobieństwa przejścia zależą ściśle od umieralności, która z kolei zmienia się wraz z wiekiem. Oprócz prawdopodobieństw przejścia interesują nas również rozkłady bezwarunkowe łańcucha w momencie n , tzn. miara probabilistyczna na S dana wzorem $d_{n,s} = \mathbb{P}(X_n = s)$ dla $s \in S$ i $n = 0, 1, 2, \dots$

Zauważmy, że proces stanu grupy ma specyficzną strukturę – możliwe są tylko niektóre przejścia między stanami, a w szczególności nie ma możliwości powrotu do stanu raz opuszczonego. W związku z tym proces $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ można określić jako hierarchiczny łańcuch Markowa [Wolthuis 2003]. Dla takiego łańcucha można przestrzeń stanów uporządkować tak, aby macierze przejścia były górnotrójkątne, z zerami poniżej głównej przekątnej, co upraszcza część obliczeń.

W dalszej części pracy przedstawimy metodę wyznaczenia rozkładów bezwarunkowych i prawdopodobieństw przejścia w oparciu o funkcje copula. Będziemy przy tym zakładać, że trwanie życia ubezpieczonych jest opisane rozkładem ciągłym. Po pierwsze, gwarantuje to jednoznaczność funkcji copula opisującej łączny rozkład, a po drugie, pozwala zastępować w odpowiednich wzorach nierówności ostre nieostryimi i na odwrót.

Obok procesu opisującego stan grupy drugim istotnym aspektem prezentowanego modelu są przepływy pieniężne wynikające z umowy ubezpieczenia, takie jak opłacane składki, wypłacane świadczenia czy ponoszone koszty. Będziemy zakładać, że przepływy te związane są z pobytem łańcucha w danym stanie lub określonymi przejściami. W tym ujęciu możemy patrzeć na umowę ubezpieczenia jak na łańcuch Markowa z wypłatami [Decewicz 2011]. Świadczenia wynikające z umowy będziemy opisywać przez ciąg $(W_n)_{n=1}^{\infty} = (b_{n-1}, R_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie b_n jest l -wymiarowym (wierszowym) wektorem świadczeń wypłacanych w momencie n w związku z pobytem łańcucha w określonym stanie, natomiast R_n jest macierzą wymiaru $l \times l$ zawierającą świadczenia odpowiadające przejściom między stanami zgodnie z macierzą P_n . Przyjmujemy, że ubezpieczenie jest jednoznacznie wyznaczone przez ciąg $(W_n)_{n=1}^{\infty}$. W zależności od postaci tego ciągu możemy otrzymać szeroką gamę kontraktów, w tym popularne w literaturze umowy odpowiadające statusowi wspólnego życia oraz statusowi ostatniego przeżywającego, także w wersjach terminowych i odroczonech.

3. Funkcje copula w analizie zależności

Funkcje copula, nazywane również funkcjami łączącymi [Heilpern 2007], stanowią wygodne narzędzie do konstrukcji wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa. Siłą tego podejścia polega na tym, że specyfikację modelu łącznego możemy rozpocząć od wyboru rozkładów brzegowych, a następnie za pomocą odpowiednio dobranej funkcji połączyć je ze sobą w dystrybuantę rozkładu wielowymiarowego. Jest to szczególnie użyteczne w ubezpieczeniach na życie, ponieważ do modelowania czasu trwania życia wykorzystuje się często rozkłady o dość złożonej postaci (jak np. modele Gompertza i Makehama), a także modele nieparametryczne oparte na tablicach trwania życia.

Rozpoczniemy od definicji funkcji copula [McNeil i in. 2005]:

Definicja 3.1. n -wymiarową funkcją copula (w skrócie: copulą) nazywamy dystrybuantę n -wymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa na $[0,1]^n$ o jednostajnych rozkładach brzegowych.

Z powyższej definicji wynika, że w szczególności dystrybuanty k -wymiarowych rozkładów brzegowych ($2 \leq k < n$) są k -wymiarowymi funkcjami copula. Rolę copuli w modelowaniu wielowymiarowym przedstawia następujące twierdzenie, będące podstawowym wynikiem teorii funkcji copula [Nelsen 2006]:

Twierdzenie 3.1. (Sklar) Niech H będzie dystrybuantą łącznego rozkładu prawdopodobieństwa z rozkładami brzegowymi danymi dystrybuantami F_i , $i = 1, \dots, n$. Istnieje wtedy funkcja copula C taka, że dla każdego $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Jeśli funkcje F_i są ciągłe, to C jest wyznaczona jednoznacznie; w przeciwnym wypadku jest określona jednoznacznie na $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_n$, gdzie $\text{Ran}F$ oznacza zbiór wartości funkcji F . W drugą stronę, jeśli C jest funkcją copula oraz F_i są dystrybuantami, to funkcja H zdefiniowana powyższym wzorem jest dystrybuantą n -wymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa z rozkładami brzegowymi danymi funkcjami F_1, \dots, F_n .

Twierdzenie Sklara wskazuje, że dystrybuantę wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa można rozłożyć na dystrybuanty rozkładów brzegowych oraz funkcję copula C , którą możemy interpretować jako strukturę zależności między współrzędnymi wektora losowego. Z punktu widzenia zastosowań w statystyce szczególnie ważna jest druga część twierdzenia Sklara, która mówi, że za pomocą funkcji copula możemy skonstruować wielowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa o dowolnych rozkładach brzegowych. W dalszej części pracy wykorzystamy tę własność do zbadania, jak uchylenie założenia o niezależności długości życia ubezpieczonych wpływa na składkę netto. W tym celu będziemy analizować różne struktury zależności przy ustalonych rozkładach długości życia ubezpieczonych.

Podamy teraz najważniejsze przykłady funkcji copula:

1. Niezależność

$$\Pi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i.$$

Jest to funkcja copula odpowiadająca sytuacji, gdy poszczególne współrzędne wektora losowego są wzajemnie niezależne.

2. Ograniczenia Fréchet–Hoeffdinga

Można pokazać, że dla dowolnej funkcji copula spełnione są nierówności

$$W(x_1, \dots, x_n) \leq C(x_1, \dots, x_n) \leq M(x_1, \dots, x_n),$$

gdzie $M(x_1, \dots, x_n) = \min \{x_1, \dots, x_n\}$ oraz $W(x_1, \dots, x_n) = \max \{\sum_{i=1}^n x_i - n + 1, 0\}$. Funkcja M nazywana jest górnym ograniczeniem Fréchet–Hoeffdinga i sama jest n -wymiarową funkcją copula. Natomiast funkcja W jest copulą tylko dla $n = 2$.

3. Archimedesowe funkcje copula

Archimedesową funkcją copula nazywamy funkcję postaci [Nelsen 2006]:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)),$$

gdzie $\varphi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ jest ciągłą, ściśle malejącą funkcją taką, że $\varphi(0) = \infty$ oraz $\varphi(1) = 0$, a także zachodzi $(-1)^k (\varphi^{-1})^{(k)}(t) \geq 0$ dla każdego $t > 0$ i $k = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $f^{(k)}$ oznacza k -tą pochodną funkcji f . Funkcję φ nazywamy generatorem (addytywnym) funkcji copula, a o funkcji φ^{-1} spełniającej podany warunek mówimy, że jest całkowicie monotoniczna. Archimedesowe funkcje copula są relatywnie proste z punktu widzenia obliczeń i symulacji.

Warto również wspomnieć o związkach funkcji copula z miarami zależności. Okazuje się, że popularne miary, takie jak τ -Kendalla i ρ -Spearmana, zależą wyłącznie od funkcji copula odpowiadającej analizowanej parze zmiennych losowych. Wyłącznie od funkcji copula zależy również współczynnik zależności w górnym ogonie rozkładu zdefiniowany wzorem $\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(u) | X > F_X^{-1}(u))$ oraz współczynnik zależności w dolnym ogonie rozkładu dany wzorem $\lambda_D = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(Y < F_Y^{-1}(u) | X < F_X^{-1}(u))$ [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001]. Dlatego też można próbować uzależnić wybór copuli do analizy na podstawie specyfiki struktury zależności przez nią reprezentowanej – np. do opisu grupy młodych mężczyzn możemy chcieć wykorzystać copulę reprezentującą zależność w dolnym ogonie, natomiast dla grupy osób starszych (np. przy produktach emerytalnych) wykorzystać funkcję copula uwzględniającą zależność w górnym ogonie.

W dalszej części pracy wykorzystamy dwuwymiarową funkcję copula Claytona daną wzorem $C(u, v) = \max \{(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0\}$ dla $0 < \theta < \infty$ oraz copulę Gumbela daną wzorem $C(u, v) = \exp(-((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta})$ dla $1 \leq \theta < \infty$. Funkcje te należą do rodziny Archimedesowych funkcji copula i dla nich istnieje prosty związek między wartością parametru oraz współczynnikiem τ -Kendalla odpowiadającym reprezentowanej przez nie strukturze zależności – dla copuli Claytona zachodzi $\tau_C = \frac{\theta_C}{\theta_C + 2}$, natomiast dla copuli Gumbela mamy $\tau_G = \frac{\theta_G - 1}{\theta_G}$. Pozwala to na uzyskanie porównywalnych wyników poprzez wyzna-

czanie interesujących nas wielkości dla ustalonych wartości współczynnika τ . Copula Claytona reprezentuje zależność w dolnym ogonie rozkładu, natomiast copula Gumbela – w górnym.

4. Wykorzystanie funkcji copula do obliczania prawdopodobieństw przejścia

W tej części pracy pokażemy, jak można wykorzystać funkcje copula do obliczenia prawdopodobieństw przejścia rozważanego łańcucha Markowa i wyznaczenia rozkładów bezwarunkowych. Przyjmujemy przy tym założenie, że zależność wprowadzamy między długością życia ubezpieczonych liczoną od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia, modelowaną za pomocą zmiennych losowych $T(x_1), \dots, T(x_m)$ określonych na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Odpowiada to oczekiwaniu, że pewna forma zależności powstaje dopiero w momencie zawarcia tej umowy, np. w ubezpieczeniu pracowniczym. Jednakże nic nie stoi na przeszkodzie, żeby rozważać także modele, w których zależność wprowadzamy między zmiennymi T_1, \dots, T_m , czyli całkowitą długością życia poszczególnych ubezpieczonych (co może być bardziej realistyczne np. w ubezpieczeniu posagowym). W tym przypadku rozkład łączny długości dalszego życia ubezpieczonych będzie wyznaczany jako rozkład warunkowy pod warunkiem dożycia grupy do momentu zawarcia umowy ubezpieczenia.

Rozkłady bezwarunkowe

Do wyznaczenia rozkładu bezwarunkowego łańcucha (X_n) w chwili $n = 0, 1, \dots$ potrzebne nam są wartości prawdopodobieństw $d_{n,s} = \mathbb{P}(X_n = s)$, gdzie $s \in S$. Zdarzenia postaci $\{X_n = s\}$ stanowią część wspólną zdarzeń postaci $\{T(x_j) < n\}$ lub $\{T(x_j) \geq n\}$. Przy założeniu niezależności zmiennych $T(x_1), \dots, T(x_m)$ mogliśmy obliczyć $d_{n,s}$ jako iloczyn prawdopodobieństw odpowiednich zdarzeń na podstawie tylko rozkładów brzegowych. Jeśli uchylimy to założenie, rachunki stają się bardziej skomplikowane i konieczne jest przedstawienie rozważanego zdarzenia za pomocą zbiorów będących iloczynem zdarzeń postaci $\{T(x_j) < n\}$. Możemy wtedy dla $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ obliczyć prawdopodobieństwo takich zdarzeń jako wartość dystrybuanty k -wymiarowego rozkładu brzegowego na mocy zależności

$$\mathbb{P}(T(x_{i_1}) \leq t_{i_1}, \dots, T(x_{i_k}) \leq t_{i_k}) = C_{i_1, \dots, i_k}(F_{i_1}(t_{i_1}), \dots, F_{i_k}(t_{i_k})),$$

gdzie C_{i_1, \dots, i_k} jest k -wymiarową funkcją copula odpowiadającą rozkładowi brzegowemu wektora $(T(x_{i_1}), \dots, T(x_{i_k}))$, wyznaczoną z warunku $C_{i_1, \dots, i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \lim_{x_i \rightarrow 1^-} C(x_1, \dots, x_n)$ dla $i \notin I$.

Pokażemy teraz, jak można uzyskać reprezentację zdarzeń $\{X_n = s\}$, o której mowa w poprzednim akapicie. Dla ustalonego stanu $s \in S$ określimy indeksy osób, które żyją w tym stanie (oznaczając zbiór tych indeksów przez \mathcal{P}) oraz indeksy

pozostałych osób (zbiór \mathcal{Q}). Możemy wtedy zapisać zdarzenie $\{X_n = s\}$ jako $\bigcap_{i \in \mathcal{P}} \{T(x_i) \geq n\} \cap \bigcap_{i \in \mathcal{Q}} \{T(x_i) < n\}$. Przez \mathcal{A} oznaczymy zbiór postaci $\bigcap A_i$, gdzie zbiory A_i należą do klasy zbiorów będących przeciwobrazami półprostych lub odcinków przy zmiennej losowej $T(x_i)$. Zbiory tej postaci będziemy nazywać iloczynowymi. Dla takiego zbioru \mathcal{A} zdefiniujemy operator Δ_i wzorem

$$\Delta_i(\mathcal{A}) = \left(A_1 \cap \dots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \dots \cap A_q \right) \setminus \left(A_1 \cap \dots \cap A_{i-1} \cap A'_i \cap A_{i+1} \cap \dots \cap A_q \right),$$

gdzie A'_i oznacza dopełnienie zbioru A_i . Jeśli $\mathcal{A} = A_i$, to kładziemy $\Delta_i(\mathcal{A}) = \Omega \setminus A'_i$. Ponadto, jeśli \mathcal{B} jest w postaci $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2$, gdzie \mathcal{A}_i są zbiorami iloczynowymi, to definiujemy $\Delta_i(\mathcal{B}) = (\Delta_i(\mathcal{A}_1)) \setminus (\Delta_i(\mathcal{A}_2))$. Wreszcie zdefiniujemy $\Delta_{i \in \{i_1, \dots, i_n\}}(\mathcal{A}) = \Delta_{i_n} \left(\dots \Delta_{i_2} \left(\Delta_{i_1}(\mathcal{A}) \right) \right)$. Operację tę należy rozumieć w ten sposób, że za pomocą operatora Δ_i przekształcamy kolejno zbiory iloczynowe pojawiające się w reprezentacji zbioru \mathcal{A} – po pierwszym przekształceniu mamy różnicę dwóch takich zbiorów, po drugim – czterech itd. Warto podkreślić, że nie przekształcamy samego zbioru, a tylko jego reprezentację. Jeśli teraz weźmiemy $\mathcal{A} = \{X_n = s\} = \bigcap_{i \in \mathcal{P}} \{T(x_i) \geq n\} \cap \bigcap_{i \in \mathcal{Q}} \{T(x_i) < n\}$, to przy powyższych oznaczeniach zachodzi

$$\{X_n = s\} = \Delta_{i \in \mathcal{P}}(\mathcal{A}).$$

Zauważmy, że za pomocą operatora Δ_i przedstawiamy zbiór iloczynowy jako różnicę dwóch zbiorów iloczynowych, z których drugi jest podzbiorem pierwszego. W związku z tym dla $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2$ mamy $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_1) - \mathbb{P}(\mathcal{A}_2)$. Ponieważ uzyskaliśmy już reprezentację zbioru $\{X_n = s\}$ poprzez różnice zbiorów będących iloczynami zdarzeń postaci $\{T(x_j) < n\}$, możemy obliczyć prawdopodobieństwo $d_{n,s}$, obliczając prawdopodobieństwa tych iloczynów za pomocą funkcji copula i zastępując różnice zbiorów różnicami prawdopodobieństw.

Prawdopodobieństwa przejścia

Chcemy teraz wyznaczyć prawdopodobieństwa $p_{s_{n-1}s_n}(n)$. Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego mamy $p_{s_{n-1}s_n}(n) = \frac{\mathbb{P}(X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1})}{\mathbb{P}(X_{n-1} = s_{n-1})}$. Wartości prawdopodobieństw w mianowniku odpowiadają rozkładowi bezwarunkowym, które już potrafimy wyznaczyć. Aby obliczyć prawdopodobieństwa występujące w liczniku, zauważamy, że zdarzenia postaci $\{X_n = s_i, X_{n-1} = s_j\}$ można zapisać jako część wspólną zdarzeń postaci $\{T(x_j) < n - 1\}$, $\{T(x_j) \geq n\}$ lub $\{n - 1 \leq T(x_j) < n\}$. Te ostatnie możemy z kolei przedstawić za pomocą zdarzeń postaci $\{T(x_j) < n - 1\}$ lub $\{T(x_j) < n\}$ i obliczyć ich prawdopodobieństwa korzystając ponownie z twierdzenia Sklára.

Ustalmy więc stany s_n oraz s_{n-1} oraz tak jak wcześniej oznaczmy przez \mathcal{P} zbiór indeksów osób, dla których $\{T(x_j) \geq n\}$, przez \mathcal{Q} zbiór indeksów, którym odpowiadają zdarzenia $\{T(x_j) < n - 1\}$, oraz przez \mathcal{R} zbiór indeksów, dla których $n - 1 \leq T(x_j) < n$. Dla $j \in \mathcal{R}$ i zbioru postaci $\mathcal{A} = A_1 \cap \dots \cap A_{j-1} \cap \{k - 1 \leq T(x_j) < k\} \cap A_{j+1} \cap \dots \cap A_q$ rozszerzmy definicję operatora Δ_j wzorem

$$\Delta_j(\mathcal{A}) = (A_1 \cap \dots \cap A_{j-1} \cap \{T(x_j) < n\} \cap A_{j+1} \cap \dots \cap A_q) \setminus (A_1 \cap \dots \cap A_{j-1} \cap \{T(x_j) < n - 1\} \cap A_{j+1} \cap \dots \cap A_q).$$

Dla indeksów ze zbioru \mathcal{P} definicja operatora Δ pozostaje bez zmian, w szczególności nie zmienia się jego definicja dla zdarzeń w postaci różnicy iloczynów zbiorów iloczynowych. Zauważmy, że wyznaczając $\Delta_j(\mathcal{A})$ dla kolejnych $j \in \mathcal{R}$, sprowadzamy ostatecznie zbiór \mathcal{A} do postaci, jaką operowaliśmy przy obliczaniu rozkładów bezwarunkowych. Przy przyjętych oznaczeniach, biorąc $\mathcal{A} = \{X_n = s_i, X_{n-1} = s_j\} = \bigcap_{i \in \mathcal{P}} \{T(x_i) \geq n\} \cap \bigcap_{i \in \mathcal{Q}} \{T(x_i) < n - 1\} \cap \bigcap_{i \in \mathcal{R}} \{n - 1 \leq T(x_i) < n\}$, możemy więc zapisać

$$\{X_n = s_i, X_{n-1} = s_j\} = \Delta_{i \in \mathcal{P}}(\Delta_{i \in \mathcal{R}}(\mathcal{A})).$$

Dalej postępujemy analogicznie jak przy rozkładach bezwarunkowych – obliczamy prawdopodobieństwa zdarzeń występujących w reprezentacji zbioru $\{X_n = s_i, X_{n-1} = s_j\}$ za pomocą funkcji copula, a następnie zastępujemy różnice zbiorów różnicami prawdopodobieństw.

Zilustrujemy opisywane postępowanie przykładem.

Przykład

Rozważmy przypadek $m = 2$. Oznaczmy ubezpieczonych przez (x) i (y) oraz niech F_x i F_y będą ściśle rosnącymi dystrybuantami rozkładów zmiennych $T(x)$ i $T(y)$ odpowiednio. Przez (X_k) oznaczmy proces życia pary $((x), (y))$ i przyjmijmy $X_0 = (11)$. Niech C będzie funkcją copula odpowiadającą łącznemu rozkładowi wektora $(T(x), T(y))$. W tym przypadku przestrzeń stanów jest czteroelementowa – $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} = \{(11), (10), (01), (00)\}$. Pokażemy, jak obliczyć $p_{s_1, s_2}(k)$.

Z definicji $p_{s_1, s_2}(k) = \mathbb{P}(X_k = s_2 | X_{k-1} = s_1) = \frac{\mathbb{P}(X_k = s_2, X_{k-1} = s_1)}{\mathbb{P}(X_{k-1} = s_1)}$. Najpierw obliczymy $\mathbb{P}(X_{k-1} = s_1)$. Mamy $\mathcal{A} = \{X_{k-1} = s_1\} = \{T(x) \geq k - 1, T(y) \geq k - 1\}$. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ i $\mathcal{Q} = \emptyset$. Mamy $\Delta_2(\mathcal{A}) = \{T(x) \geq k - 1\} \setminus \{T(x) \geq k - 1, T(y) < k - 1\} = \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2$. Dalej, $\Delta_1(\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2) = \Delta_1(\mathcal{A}_1) \setminus \Delta_1(\mathcal{A}_2) = (\Omega \setminus \{T(x) < k - 1\}) \setminus (\{T(y) < k - 1\} \setminus \{T(x) < k - 1, T(y) < k - 1\})$. Przedstawiliśmy zatem wyjściowe zdarzenie za pomocą

operacji na zdarzeniach, których prawdopodobieństwo można obliczyć za pomocą funkcji copula. Mamy więc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k-1} = s_1) &= \mathbb{P}((\Omega \setminus \{T(x) < k-1\}) \setminus (\{T(y) < k-1\} \setminus \\ &\setminus \{T(x) < k-1, T(y) < k-1\})) = (\mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(\{T(x) < k-1\}) \\ &- (\mathbb{P}(\{T(y) < k-1\}) - \mathbb{P}(\{T(x) < k-1, T(y) < k-1\}))) = \\ &= (1 - F_x(k-1)) - (F_y(k-1) - F_{(x,y)}(k-1, k-1)) = \\ &= 1 - F_x(k-1) - F_y(k-1) + C(F_x(k-1), F_y(k-1)). \end{aligned}$$

Weźmy teraz $\mathcal{A} = \{X_k = s_2, X_{k-1} = s_1\}$. Zapisując \mathcal{A} w terminach zmiennych $T(x)$ i $T(y)$, mamy $\mathcal{A} = \{T(x) \geq k, T(y) < k, T(x) \geq k-1, T(y) \geq k-1\} = \{T(x) \geq k, k-1 \leq T(y) < k\}$. W tym przypadku $\mathcal{P} = \{1\}$, $\mathcal{Q} = \emptyset$ i $\mathcal{R} = \{2\}$. Mamy zatem

$$\Delta_{i \in \mathcal{R}}(\mathcal{A}) = \Delta_2(\mathcal{A}) = \{T(x) \geq k, T(y) < k\} \setminus \{T(x) \geq k, T(y) < k-1\} = \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2$$

Teraz $\Delta_{\Delta_{i \in \mathcal{P}}}(\Delta_{i \in \mathcal{R}}(\mathcal{A})) = \Delta_1(\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2) = \Delta_1(\mathcal{A}_1) \setminus \Delta_1(\mathcal{A}_2)$. Wynika stąd, że $\{X_k = s_2, X_{k-1} = s_1\} = (\{T(y) < k\} \setminus \{T(x) < k, T(y) < k\}) \setminus (\{T(y) < k-1\} \setminus \{T(x) < k, T(y) < k-1\})$. Ponownie przedstawiliśmy wyjściowy zbiór za pomocą zdarzeń, których prawdopodobieństwo wyraża się przez odpowiednie dystrybuanty. Obliczamy stąd

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_k = s_2, X_{k-1} = s_1) &= (\mathbb{P}(T(y) < k) - \mathbb{P}(T(x) < k, T(y) < k)) - \\ &- (\mathbb{P}(T(y) < k-1) - \mathbb{P}(T(x) < k, T(y) < k-1)) = \\ &= F_y(k) - C(F_x(k), F_y(k)) - F_y(k-1) + C(F_x(k), F_y(k-1)). \end{aligned}$$

$$\text{Ostatecznie } p_{s_1, s_2}(k) = \frac{F_y(k) - C(F_x(k), F_y(k)) - F_y(k-1) + C(F_x(k), F_y(k-1))}{1 - F_x(k-1) - F_y(k-1) + C(F_x(k-1), F_y(k-1))}.$$

Dla pozostałych przejść między stanami postępujemy analogicznie. Tak jak wspominaliśmy, przy przyjętych założeniach odnośnie do stanów elementarnych (życie/zgon) część przejść będzie niemożliwa i ich prawdopodobieństwo będzie równe 0.

5. Składka netto i rezerwa składki

5.1. Składka netto

Znając probabilistyczną charakterystykę procesu wymierania ubezpieczonej grupy, jesteśmy w stanie wycenić umowę ubezpieczenia. Będziemy się opierać na zasadzie równoważności, tzn. wartość aktuarialna przyszłych składek musi być równa wartości aktuarialnej przyszłych świadczeń. Jednorazową składkę netto możemy obliczyć jako wartość oczekiwaną zdyskontowanych przyszłych świadczeń według wzoru

$$JSN = \sum_{k=0}^{\infty} \langle d_k, b_k \rangle \cdot DF(0, k) + \sum_{k=1}^{\infty} d_{k-1} \cdot (P_k \circ R_k) \cdot \iota \cdot DF(0, k),$$

gdzie \langle, \rangle oznacza standardowy iloczyn skalarny wektorów, $DF(0, k)$ jest czynnikiem dyskontującym przepływy pieniężne z chwili k do chwili 0 (typowo zakładamy, że $DF(0, k) = \frac{1}{(1+r)^k} = v^k$ dla technicznej stopy procentowej r), ι jest kolumnowym l -wymiarowym wektorem złożonym z jedynek, a \circ oznacza iloczyn Hadamarda macierzy, tj. działanie na macierzach tego samego wymiaru $n_1 \times n_2$ określone wzorem $P \circ R = [p_{ij} \cdot r_{ij}]_{1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2}$.

Składka netto może być również płacona w formie renty życiowej. Załóżmy, że składka jest płacona na początku odpowiedniego okresu (np. miesiąca lub kwartału), a pierwsza płatność następuje w momencie zawierania umowy. Oznaczmy przez $(\pi_k)_{k=0}^{\infty}$ (wektorowy) ciąg składek, przy czym $\pi_k^{(s)}$ oznacza składkę płaconą w momencie k , gdy łańcuch znajduje się w stanie s . Z zasady równoważności wynika, że ciąg $(\pi_k)_{k=0}^{\infty}$ musi spełniać zależność

$$JSN = \sum_{k=0}^{\infty} \langle d_k, \pi_k \rangle \cdot DF(0, k).$$

Warto zwrócić uwagę, że stan osób płacących składkę można modelować oddzielnym łańcuchem Markowa, niemniej jednak można włączyć te osoby do podstawowego łańcucha, nawet jeśli nie są one ubezpieczonymi. Pozwala to uwzględnić ewentualne zależności między życiem ubezpieczonych i ubezpieczających.

5.2. Matematyczna rezerwa składki netto

Matematyczną rezerwę składki netto definiujemy analogicznie jak w przypadku ubezpieczeń indywidualnych jako różnicę między wartością oczekiwaną zdyskontowanych przyszłych świadczeń i wartością oczekiwaną zdyskontowanych przyszłych składek. W przypadku ubezpieczenia modelowanego jako łańcuch Markowa wielkość tej rezerwy będzie zależeć od stanu, w którym znalazł się łańcuch. Ozna-

czając przez ${}_kV^{(s)}$ wartość rezerwy na początku okresu k , jeśli łańcuch znajduje się w tym momencie w stanie s , możemy napisać

$$\begin{aligned} {}_kV^{(s)} &= e_s b_k^T + \sum_{l=1}^{\infty} e_s P_k \dots P_{k+l-1} b_{k+l}^T v^l + e_s (P_k \circ R_k) l \cdot v \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} (e_s P_k \dots P_{k+l-1}) (P_{k+l} \circ R_{k+l}) l \cdot v^{l+1} - e_s \pi_k^T \\ &\quad - \sum_{l=1}^{\infty} e_s P_k \dots P_{k+l-1} \pi_{k+l}^T v^l, \end{aligned}$$

gdzie e_s oznacza s -ty (wierszowy) wersor w \mathbb{R}^l . Powyższy wzór może jednak nie być szczególnie praktyczny w obliczeniach komputerowych, zwłaszcza w wielu wymiarach, ze względu na wielokrotne mnożenie macierzy. Można jednak pokazać, że zachodzi rekurencyjna zależność

$${}_kV^{(s)} + e_s \pi_k^T = e_s b_k^T + DF(k, k+1) \cdot \left(\sum_{r \in S} p_{sr}(k+1) {}_{k+1}V^{(r)} + e_s (P_k \circ R_k) l \right),$$

będąca uogólnieniem znanej formuły rekurencyjnej dla rezerwy matematycznej netto w ubezpieczeniach indywidualnych.

6. Wyniki analizy

W tym rozdziale przedstawimy przykład numeryczny stanowiący praktyczne zastosowanie wcześniejszych rozważań. Interesować nas będzie, jak uchylenie założenia o niezależności trwania życia ubezpieczonych wpływa na wysokość jednorazowej składki netto (JSN).

Rozważymy przypadek $m = 2$. Przyjmiemy długość okresu równą miesiąc, a jako rozkłady brzegowe wykorzystamy rozkłady z tablic trwania życia publikowanych przez Główny Urząd Statystyczny, uzupełnione o założenie jednostajnej umieralności w ciągu roku (UDD – *Uniform Distribution of Deaths*). Będziemy rozważać ubezpieczenia w wersji dla 30-letniego mężczyzny i 25-letniej kobiety (wariant 30/25) oraz dla 65-letniego mężczyzny i 60-letniej kobiety (wariant 65/60). Będziemy badać zależność między JSN i τ -Kendalla, opierając się na opisywanych wcześniej copulach Clayтона i Gumbela.

Rozpocniemy od popularnych w literaturze ubezpieczeń na wypadek śmierci – ubezpieczenia dla statusu wspólnego życia (*joint life status*) i statusu ostatniego żyjącego (*lastsurvivor status*). Jeśli założymy wysokość świadczenia równą 1, to ubezpieczeniom tym odpowiadają następujące macierze wypłat:

$$R_1(n) = R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2(n) = R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie R_1 odnosi się do statusu wspólnego życia, a R_2 do statusu ostatniego żyjącego. Jednorazowe składki netto za te ubezpieczenia przy założeniu niezależności oraz dla copuli Claytona i Gumbela w zależności od τ -Kendalla przedstawia tab. 1. Dla większej przejrzystości przyjęto wysokość świadczenia równą 1000. Uzyskane wyniki wskazują, że JSN w ubezpieczeniu dla statusu wspólnego życia jest malejącą funkcją współczynnika τ -Kendalla, natomiast JSN dla statusu ostatniego żyjącego – rosnącą.

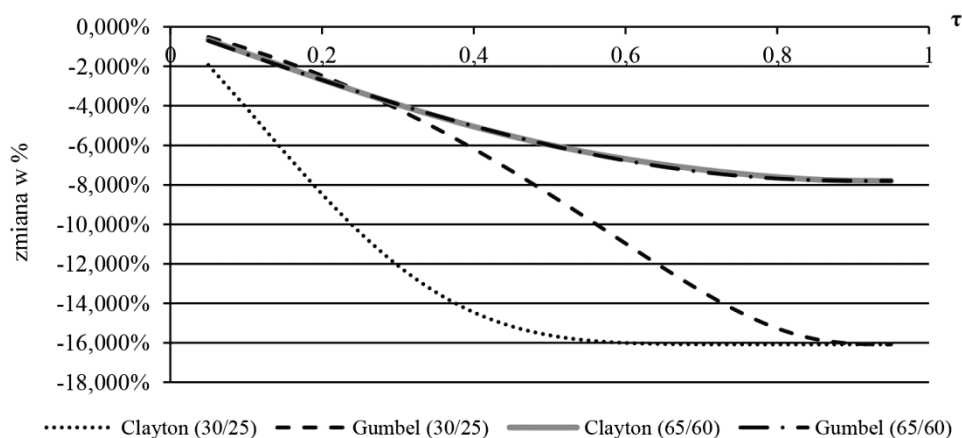
Tabela 1. Jednorazowe składki netto dla rozważanych ubezpieczeń na wypadek śmierci

Produkt	Status wspólnego życia				Status ostatniego żyjącego			
Wariant	30/25		65/60		30/25		65/60	
Niezależność	105,3035746		650,9169006		3,04240901		330,7431523	
τ	Clayton	Gumbel	Clayton	Gumbel	Clayton	Gumbel	Clayton	Gumbel
0,05	103,271	104,764	646,613	646,379	5,075	3,582	335,047	335,282
0,1	100,990	104,153	642,222	641,936	7,356	4,193	339,438	339,724
0,15	98,642	103,466	637,825	637,604	9,704	4,880	343,835	344,056
0,2	96,380	102,700	633,494	633,398	11,966	5,646	348,166	348,262
0,25	94,328	101,850	629,294	629,334	14,018	6,496	352,366	352,326
0,3	92,570	100,916	625,282	625,433	15,776	7,430	356,378	356,227
0,35	91,151	99,897	621,511	621,716	17,195	8,449	360,149	359,944
0,4	90,080	98,794	618,023	618,209	18,266	9,552	363,637	363,451
0,45	89,331	97,615	614,852	614,938	19,015	10,731	366,808	366,722
0,5	88,854	96,369	612,017	611,929	19,492	11,977	369,644	369,731
0,55	88,581	95,073	609,521	609,213	19,765	13,273	372,139	372,447
0,6	88,446	93,753	607,351	606,817	19,900	14,593	374,309	374,843
0,65	88,390	92,445	605,480	604,769	19,956	15,901	376,180	376,891
0,7	88,372	91,204	603,873	603,092	19,974	17,142	377,787	378,568
0,75	88,368	90,100	602,506	601,803	19,978	18,246	379,154	379,857
0,8	88,368	89,222	601,390	600,908	19,978	19,124	380,270	380,752
0,85	88,368	88,651	600,592	600,389	19,978	19,695	381,068	381,271
0,9	88,368	88,408	600,204	600,179	19,978	19,938	381,456	381,481
0,95	88,368	88,368	600,143	600,144	19,978	19,978	381,517	381,516

Źródło: opracowanie własne.

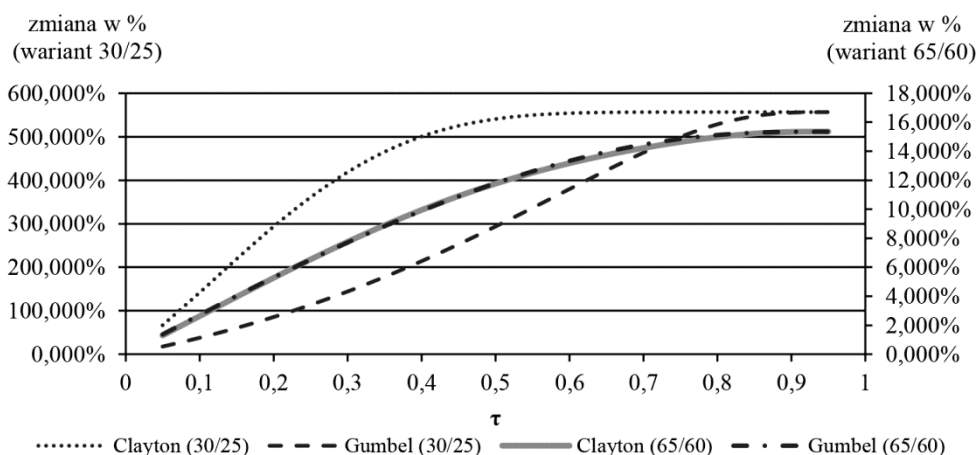
Względna zmiana JSN w porównaniu z założeniem o niezależności dla statusu wspólnego życia dla różnych wartości współczynnika τ przedstawiona jest na rys. 1.

Widzimy, że dla wariantu 30/25 reakcja JSN na zmianę siły zależności jest większa niż w wariantcie 65/60 i sięga nawet -16% . Jednak w obu przypadkach wprowadzenie zależności powoduje spadek JSN, co oznacza, że kalkulując składkę z założeniem o niezależności, ubezpieczyciel zachowuje pewien dodatkowy margines bezpieczeństwa. Analogiczny wykres dla statusu ostatniego żyjącego przedstawia rys. 2.



Rys. 1. Względne różnice w składce dla statusu wspólnego życia

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Względne różnice w składce dla statusu ostatniego żyjącego

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku statusu ostatniego żyjącego wnioski są przeciwne – wprowadzenie zależności powoduje wzrost JSN. W wariantcie 65/60 wzrost ten sięga ok. 16%, a w wariantcie 30/25 jest bardzo spektakularny i sięga kilkuset procent. W tym przypadku obliczanie składki w oparciu o założenie o niezależności prowadzi do niedoszacowania ryzyka, co może negatywnie odbić się na wyniku technicznym ubezpieczyciela.

Wspólną cechą obu powyższych analiz jest to, że dla młodszych ubezpieczonych różnica w składce jest zauważalnie większa dla copuli Claytona. Z kolei dla

starszych ubezpieczonych różnice są niewielkie. Może to wynikać z faktu, że copula Claytona reprezentuje silniejszą zależność w dolnym ogonie rozkładu, a w wariancie 30/25 indywidualne prawdopodobieństwa zgonu są małe, więc efekt ten może się ujawnić. Z kolei dla osób starszych prawdopodobieństwa zgonu są większe i tego efektu nie obserwujemy, ponieważ współczynniki zależności w ogonach definiujemy jako granice odpowiednich prawdopodobieństw i w tym przypadku nie zbliżamy się do tych granic.

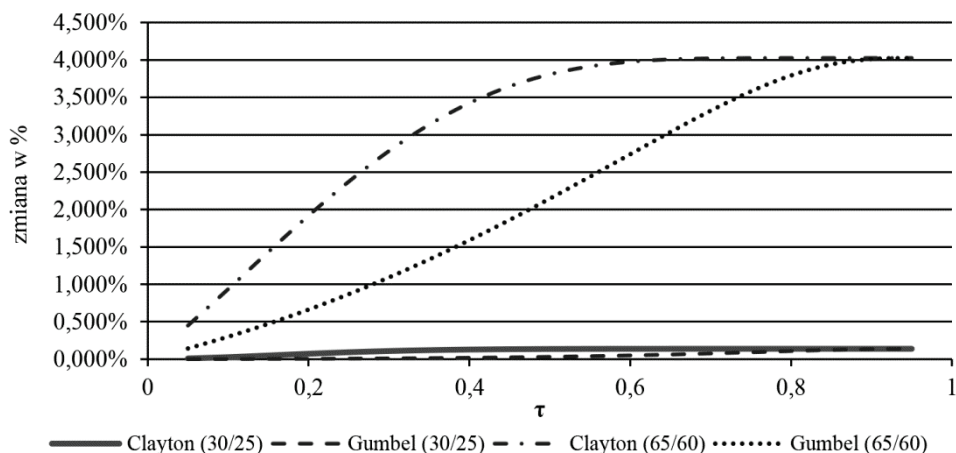
Zajmiemy się teraz ubezpieczeniami rentowymi. Rozważymy 10-letnią i 30-letnią rentę zyciową odpowiadającą statusowi wspólnego życia. Rentę taką możemy reprezentować ciągiem wektorów $b_k = (1,0,0,0)$ dla $k = 0,1,2,\dots,N-1$, gdzie N jest liczbą płatności renty. Wyniki obliczeń przedstawia tab. 2.

Tabela 2. Jednorazowe składki netto dla rozważanych ubezpieczeń rentowych

Produkt	Status wspólnego życia – renta (T = 10 lat)				Status wspólnego życia – renta (T = 30 lat)			
Wariant	30/25		65/60		30/25		65/60	
Niezależność	100,7663201		84,73227787		214,0375394		120,3644224	
τ	Clayton	Gumbel	Clayton	Gumbel	Clayton	Gumbel	Clayton	Gumbel
0,05	100,7750	100,7670	85,1127	84,8526	214,2174	214,0742	121,7330	121,3630
0,1	100,7924	100,7679	85,5248	84,9859	214,4458	214,1172	123,1225	122,3694
0,15	100,8150	100,7691	85,9463	85,1326	214,6950	214,1674	124,5039	123,3801
0,2	100,8383	100,7708	86,3578	85,2934	214,9394	214,2255	125,8511	124,3915
0,25	100,8589	100,7729	86,7433	85,4684	215,1595	214,2923	127,1403	125,3987
0,3	100,8753	100,7757	87,0900	85,6579	215,3433	214,3686	128,3500	126,3962
0,35	100,8872	100,7793	87,3886	85,8617	215,4862	214,4550	129,4607	127,3774
0,4	100,8951	100,7839	87,6333	86,0793	215,5892	214,5522	130,4560	128,3342
0,45	100,9000	100,7897	87,8226	86,3095	215,6576	214,6603	131,3229	129,2575
0,5	100,9027	100,7968	87,9589	86,5506	215,6989	214,7792	132,0532	130,1362
0,55	100,9041	100,8055	88,0487	86,8000	215,7212	214,9084	132,6447	130,9576
0,6	100,9047	100,8160	88,1016	87,0535	215,7316	215,0462	133,1022	131,7074
0,65	100,9049	100,8284	88,1285	87,3051	215,7357	215,1898	133,4373	132,3696
0,7	100,9049	100,8427	88,1395	87,5463	215,7369	215,3343	133,6672	132,9279
0,75	100,9049	100,8585	88,1429	87,7651	215,7371	215,4722	133,8126	133,3671
0,8	100,9049	100,8749	88,1435	87,9459	215,7371	215,5925	133,8944	133,6769
0,85	100,9049	100,8902	88,1435	88,0714	215,7371	215,6812	133,9318	133,8578
0,9	100,9049	100,9011	88,1435	88,1316	215,7371	215,7272	133,9426	133,9309
0,95	100,9049	100,9048	88,1435	88,1434	215,7371	215,7370	133,9436	133,9434

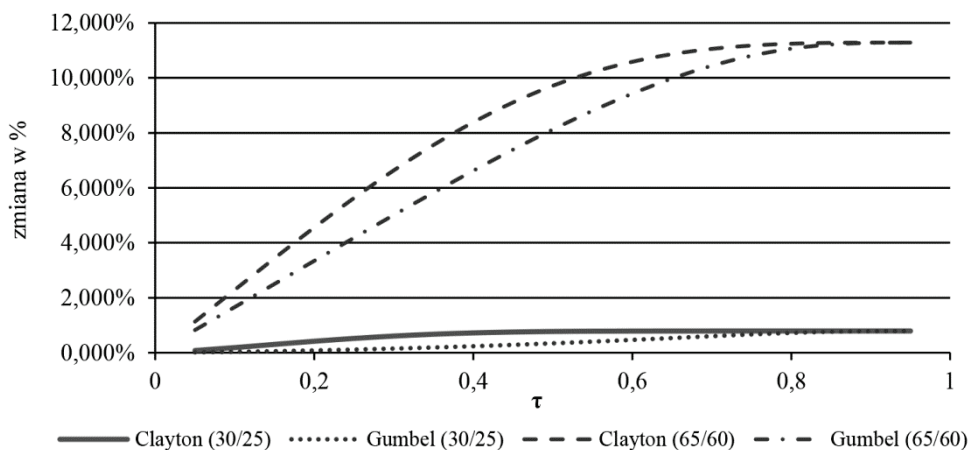
Źródło: opracowanie własne.

Widzimy, że we wszystkich wariantach wprowadzenie zależności powoduje wzrost wartości aktuarialnej rozważanych rent. Względną zmianę dla obydwu rent przedstawiają rys. 3 i 4.



Rys. 3. Względne różnice w składce dla 10-letniej renty dla statusu wspólnego życia

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Względne różnice w składce dla 30-letniej renty dla statusu wspólnego życia

Źródło: opracowanie własne.

We wszystkich rozważanych przypadkach JSN dla renty odpowiadającej statusowi wspólnego życia jest rosnącą funkcją współczynnika τ , a ponadto silniejszą reakcję obserwujemy dla wariantu 30/25, przy czym jest ona mniejsza niż w przypadku ubezpieczeń na wypadek śmierci. Tak jak wcześniej składka szybciej rośnie dla copuli Clayтона. Ponieważ renta jest warta tym więcej, im dłużej jest płacona, spodziewalibyśmy się wyraźniejszego efektu dla funkcji copula reprezentującej zależność w górnym ogonie, czyli copuli Gumbela. Jednakże w tym przypadku prawdopodobieństwa zgonu są przypuszczalnie zbyt małe, aby efekt ten mógł się

ujawnić. Niemniej jednak widzimy, że w ubezpieczeniach ze składką regularną struktura zależności może wpływać na wysokość składki zarówno poprzez JSN, jak i wartość renty jednostkowej. Oddziaływania te mogą się przy tym wzajemnie znosić bądź wzmacniać, w związku z czym ostateczny wynik może jeszcze bardziej różnić się od wyniku uzyskanego na podstawie założenia o niezależności.

7. Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiliśmy podejście do analizy ubezpieczeń dla wielu osób oparte na niejednorodnych łańcuchach Markowa. Zaprezentowaliśmy podstawowe informacje o funkcjach copula i pokazaliśmy, jak mogą być one wykorzystane do obliczenia prawdopodobieństw przejścia w przypadku, gdy czasy dalszego trwania życia ubezpieczonych nie są niezależne. Rozważania zakończyliśmy przedstawieniem wyników obliczeń i wskazaniem, że struktura zależności może mieć istotny wpływ na obliczoną składkę, a w szczególności nieuzasadnione przyjęcie założenia o niezależności może prowadzić do niedoszacowania rzeczywistego ryzyka związanego z umową ubezpieczenia.

Literatura

- Decewicz A., *Probabilistyczne modele badań operacyjnych*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2011.
- Denuit M., Cornet A., *Multiple premium calculation with dependent future lifetimes*, "Journal of Actuarial Practice" 1999, vol. 7.
- Denuit M., Dhaene J., Le Bailly de Tillegem C., Teghem S., *Measuring the impact of a dependence among insured lifelengths*, "Belgian Actuarial Bulletin" 2001.
- Dhaene J., Vanneste M., Wolthuis H., *A note on dependencies in multiple life statuses*, "Bulletin of the Swiss Association of Actuaries" 2000.
- Embrechts P., Lindskog F., McNeil A., *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, [w:] *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, ed. S. Rachev, Elsevier, 2001.
- Heilpern S., *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2007.
- McNeil A.J., Frey R., Embrechts P., *Quantitative Risk Management – Concepts, Techniques and Tools*, Preston University Press 2005.
- Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer 2006.
- Norberg R., *Actuarial analysis of dependent lives*, "Bulletin of the Swiss Association of Actuaries" 1989.
- Wolthuis H., *Life insurance mathematics (The Markovian model)*, second edition, Instituut voor Actuarie en Econometrie, Amsterdam 2003.

ANALYSIS OF MULTIPLE LIFE INSURANCE USING COPULAS

Summary: In our paper we present an approach to the analysis of multiple life insurance based on discrete-time heterogeneous Markov chains. We formulate the probabilistic model and we show how to calculate transition probabilities in the case when remaining lifetimes of the insured are not independent. To this end we use copulas. Furthermore, we present formulas for net single premium and net premium reserve. We conclude with a numeric example which shows that the introduction of dependence structure may affect the premium charged by the insurer and in particular it may lead to the underestimation of incurred risk.

Keywords: multiple life insurance, Markov chain, copula, dependence.