PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 312
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics No. 312

Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka

Redaktor naukowy
Joanna Dębicka

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Dorota Pitulec

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Beata Mazur

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:
www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,
The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon
http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-315-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS nr 312 • 2013
Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka ISSN 1899-3192

Stanisław Heilpern
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ZŁOŻONY PROCES POISSONA Z ZALEŻNYMI OKRESAMI MIĘDZY SZKODAMI I WIELKOŚCIAMI SZKÓD

Streszczenie: Praca dotyczy złożonego procesu Poissona, w którym dopuszcza się zależność okresu między szkodami a sąsiednią szkodą. Struktura zależności jest opisana funkcją łączącą. Rozpatrywane są funkcje łączące Farlie–Gumbela–Morgensterna i Spearmana. Wyprowadzana jest funkcja wyznaczająca momenty zagregowanej szkody oraz wybrane funkcjonały składki ubezpieczeniowej. Szerzej rozważany jest przypadek, gdy szkody mają rozkład wykładniczy.

Słowa kluczowe: złożony proces Poissona, model ryzyka kolektywnego, zależność, funkcja łącząca, składka ubezpieczeniowa.

1. Wstęp

W pracy przedstawiono uogólnienie złożonego procesu Poissona. Uogólnienie to polega na dopuszczeniu możliwości występowania zależności pomiędzy okresem między szkodami a sąsiednią szkodą. Znajdują one zastosowanie w zagadnieniach związanych z teorią kolektywnego ryzyka oraz teorią ruiny, głównie w modelowaniu tzw. szkód katastroficznych, zachodzących np. podczas trzęsień ziemi [Boudreault i in. 2006; Cossette i in. 2008]. Na przykład zaobserwowano występowanie zależności pomiędzy długością okresu między poszczególnymi wstrząsami a wielkością spowodowanych przez wstrząsy szkód. Po dłuższej przerwie zaobserwowane szkody są na ogół większe. Tego typu modele ryzyka były rozpatrywane m.in. w pracach [Albrecher, Boxma 2004; Ambagaspitiya 2009; Boudreault i in. 2006; Cheungi in. 2010; Cossette i in. 2008; Cossette i in. 2010; Heilpern (w druku); Marri, Furman 2012].

Przyjęto, że struktura zależności między wspomnianymi zmiennymi losowymi opisana jest funkcją łączącą (*copula*). Rozpatrzono dwa przypadki: funkcji łączącej Farlie–Gumbela–Morgensterna (FGM) oraz funkcji Spearmana. Pierwszy z nich zbadany był w pracy [Marri, Furman 2012]. W obydwu przypadkach wyznaczono funkcję tworzącą momenty rozkładu zagregowanej szkody oraz podstawowe funkcjonały składki ubezpieczeniowej wykorzystujące tę funkcję. Dokładnie zbadano sytuację, gdy szkody mają rozkład wykładniczy.

Punkt drugi zawiera podstawowe wiadomości dotyczące zależnego złożonego procesu Poissona. Podany jest podstawowy wzór umożliwiający wyznaczenie funkcji tworzącej momenty zagregowanej szkody. Przypadek wykorzystujący funkcję tworzącą FGM omówiony jest w punkcie trzecim. Następny punkt poświęcony jest pojęciu współmonotoniczności, ścisłej, dodatniej zależności, które jest wykorzystane w kolejnym punkcie dotyczącym funkcji łączącej Spearmana.

Obliczenia i przekształcenia wzorów zostały przeprowadzone za pomocą programu Mathematica 7.

2. Zależny złożony proces Poissona

W pracy rozpatrywać będziemy następujący proces [Marri, Furman 2012]:

$$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$$

dla $N_t > 0$, gdzie wielkości szkód $X_n > 0$. Oznaczając symbolem T_n momenty wystąpienia szkód, proces liczący szkody określimy wtedy formułą: $N_t = \sup\{n\colon T_n \leq t\}$ oraz $N_0 = 0$. Momenty szkód wyznaczają nam również okresy między szkodami: $W_n = T_n - T_{n-1}$ dla $n > 1$ oraz $W_1 = T_1$. Zmienną losową S_t możemy interpretować jako zagregowaną sumę szkód, które wystąpiły w okresie $[0, t]$.

Wprowadzimy następujące założenia:

i) okresy między szkodami W_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jak standardowa zmienna W,

ii) zmienna losowa W ma rozkład wykładniczy z dystrybuantą $F_W(w) = 1 - e^{-\lambda w}$,

iii) szkody X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, jak zmienna X z dystrybuantą $F_X(x)$ i funkcją tworzącą momenty $\mathcal{M}_X(h) = E\left(e^{hX}\right) < \infty$ na pewnym zbiorze $A \subset \mathrm{R}$,

iv) wektory zmiennych losowych (W_n, X_n) są niezależne, a struktura zależności zmiennych losowych W i X opisana jest funkcją łączącą (*copula*) $C(u, v)$.

Założenie ii) gwarantuje nam, że proces liczący szkody N_t jest procesem Poissona. Natomiast założenie iv), w odróżnieniu od klasycznego złożonego procesu Poissona, dopuszcza zależność pomiędzy okresem między szkodami W_n a wielkością następnej szkody X_n. Otrzymujemy wtedy zależny kolektywny model ryzyka.

Funkcja łącząca C jest łącznikiem między rozkładem łącznym a rozkładami brzegowymi: [Nelsen 1999; Heilpern 2007]

$$F_{W,X}(w, x) = C(F_W(w), F_X(x)).$$

W przypadku ciągłych zmiennych losowych funkcja łącząca wyznaczona jest jednoznacznie. Niezależności zmiennych losowych odpowiada funkcja łącząca:

$$\Pi(u, v) = uv.$$

Można pokazać [Marri, Furman 2012], że funkcja tworząca momenty $\mathcal{M}_{S_t}(h)$ zagregowanej szkody S_t, gdy struktura zależności między zmiennymi X i W opisana jest funkcją łączącą C, określona jest wzorem:

$$\mathcal{M}_{S_t}(h) = \int_0^\infty \int_0^\infty K(w,x) dF_{W,X}(w,x) = \int_0^\infty \int_0^\infty K(w,x) dC(F_W(w), F_X(x)), \quad (1)$$

gdzie $K(w,x) = E(\exp(h \sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbf{1}\{N_t \geq n\}) \,|W_1 = w, X_1 = x)$, a $\mathbf{1}\{A\}$ jest indykatorem zdarzenia A.

Znając postać funkcji tworzącej momenty zmiennej losowej S_t, możemy w prosty sposób obliczyć momenty tej zmiennej, korzystając ze znanego wzoru [Magiera 2002]:

$$E(S_t^k) = \left. \frac{d^k \mathcal{M}_{S_t}(h)}{dh^k} \right|_{h=0}. \quad (2)$$

Można wtedy wyznaczyć niektóre funkcjonały składki ubezpieczeniowej, takie jak składka netto $E(S_t^k)$, wartości oczekiwanej $(1+a)E(S_t^k)$, wariancji $E(S_t^k) + aV(S_t^k)$, czy odchylenia standardowego $E(S_t^k) + a\sqrt{V(S_t^k)}$.

Ponadto znajomość funkcji tworzącej momenty $\mathcal{M}_{S_t}(h)$ umożliwia wyznaczenie składki Esschera $\phi_h(S_t) = \frac{E(S_t e^{hS_t})}{E(e^{hS_t})}$. Można wtedy skorzystać z równoważnych wzorów [Kaas i in. 1994]

$$\phi_h(S_t) = \frac{\mathcal{M}'_{S_t}(h)}{\mathcal{M}_{S_t}(h)} = \frac{d\ln \mathcal{M}_{S_t}(h)}{dh}. \quad (3)$$

Gdy parametr h dąży do zera, to otrzymujemy składkę netto, czyli $E(S_t) = \phi_0(S_t)$. Natomiast składka wariancji jest równa $\phi_0(S_t) + a\phi'_0(S_t)$ [Kaas i in. 1994].

3. Funkcja łącząca Farlie–Gumbela–Morgensterna

Marri i Furman w pracy dotyczącej zależnego złożonego procesu Poissona [Marri, Furman 2012] wykorzystali funkcję łączącą Farlie–Gumbela–Morgensterna (FGM): $C(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v)$, gdzie $-1 \leq \theta \leq 1$. Funkcja łącząca FGM uwzględnia jedynie słabe zależności. Odpowiadające jej współczynniki korelacji Spearmana przyjmują wtedy wartości od –1/3 do 1/3. Autorzy wyznaczyli funkcję tworzącą momenty zagregowanej szkody $\mathcal{M}_{S_t,\theta}(h)$. Obliczyli transformatę Laplace'a funkcji $G(t) = \mathcal{M}_{S_t,\theta}(h)$, otrzymując

$$G^*(p) = \int_0^\infty e^{-pt} G(t)dt = \frac{2\lambda + p}{p^2 + b_\theta(h)p + c_\theta(h)},$$

gdzie

$$b_\theta(h) = \lambda(3 - \mathcal{M}_X(h) - \theta(\mathcal{M}_X(h) - \mathcal{M}_{X_w}(h))),$$
$$c(h) = 2\lambda^2(1 - \mathcal{M}_X(h))$$

a zmienna losowa X_w ma dystrybuantę równą:

$$F_{X_w}(x) = \frac{E(\mathbf{1}\{X \le x\}w(X))}{E(w(X))}$$

z funkcją wagową $w(x) = 2F_X(x)$. Funkcja tworząca momenty zagregowanej szkody przyjmuje wtedy postać:

$$\mathcal{M}_{S_t,\theta}(h) = \frac{\left(2\lambda + p_{1,\theta}(h)\right)e^{p_{1,\theta}(h)t} - (2\lambda + p_{2,\theta}(h))e^{p_{2,\theta}(h)t}}{p_{1,\theta}(h) - p_{2,\theta}(h)},$$

gdzie $p_{i,\theta}(h)$, $i = 1, 2$, są pierwiastkami równania $p^2 + b_\theta(h)p + c(h) = 0$.

Założymy teraz, że szkody X mają rozkład wykładniczy z dystrybuantą $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$. Wtedy dystrybuanta zmiennej losowej X_w i funkcje tworzące momenty zmiennych X oraz X_w są odpowiednio równe:

$$F_{X_w}(x) = \left(1 - e^{\beta x}\right)^2 e^{-2\beta x},$$

$$\mathcal{M}_X(h) = \frac{\beta}{\beta - h}, \mathcal{M}_{X_w}(h) = 2\beta\left(\frac{1}{\beta - h} - \frac{1}{2\beta - h}\right),$$

gdzie $h < \beta$. Współczynniki równania kwadratowego $p^2 + b_\theta(h)p + c(h) = 0$ wynoszą

$$b_\theta(h) = \lambda\frac{3h^2 + 4\beta^2 + (\theta - 8)\beta h}{h^2 - 3\beta h + 2\beta^2}, c(h) = \frac{2h\lambda^2}{h - \beta}.$$

Wtedy funkcja tworząca momenty zagregowanej szkody jest równa

$$\mathcal{M}_{S_{t,\theta}}(h) =$$
$$= \frac{(b_\theta(h) + d_\theta(h) - 4\lambda)e^{(b_\theta(h)+d_\theta(h))t/2} - (b_\theta(h) - d_\theta(h) - 4\lambda)e^{(b_\theta(h)-d_\theta(h))t/2}}{2d_\theta(h)}$$

gdzie $d_\theta(h) = \sqrt{b_\theta^2(h) - c(h)}$.

Momenty zmiennej losowej $S_{t,\theta}$ można obliczyć, korzystając ze wzoru (2). Wartość oczekiwana zagregowanej szkody jest wtedy równa

$$E(S_{t,\theta}) = \frac{\lambda t}{\beta} - \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{4\beta}\theta.$$

Widzimy, że maleje ona wraz ze wzrostem stopnia zależności wyrażonym przez parametr θ. Zależność ta jest liniowa. Natomiast wariancja zmiennej $S_{t,\theta}$ wynosi:

$$V(S_{t,\theta}) = 2\frac{\lambda t}{\beta^2} - \frac{1 + 2\lambda t + e^{-2\lambda t}(2\lambda t - 1)}{4\beta^2}\theta - \frac{e^{-4t\lambda} + 4e^{-2t\lambda}t\lambda - 1}{16\beta^2}\theta^2$$

i również jest funkcją malejącą parametru θ.

Przykład 1

Niech $\lambda = 1$ oraz $E(X) = 5$, czyli $\beta = 0{,}2$. W tab. 1 przedstawione zostały wartości oczekiwanej zagregowanej szkody $S_{t,\theta}$, jej odchylenia standardowego, składki wariancji dla $a = 0{,}1$ oraz składki Esschera dla $h = 0{,}1$ i różnych wartości parametru θ w okresie jednego roku ($t = 1$). Wartości składki Esschera zostały policzone ze wzoru (3).

Tabela 1. Wartości wybranych charakterystyk i składek dotyczących zagregowanej szkody $S_{t,\theta}$

θ	$E(S_t)$	$s(S_t)$	Składka wariancji	Składka Esschera
–1	6,0808	8,3835	13,10922	30,6093
–0,8	5,8647	8,1312	12,47637	28,3453
–0,6	5,6485	7,8743	11,84902	26,1512
–0,4	5,4323	7,6124	11,22717	24,0282
–0,2	5,2162	7,3448	10,61084	21,9775
0	5	7,0711	10	20
0,2	4,7838	6,7903	9,394669	18,0963
0,4	4,5677	6,5017	8,794842	16,2665
0,6	4,3515	6,2040	8,20052	14,5108
0,8	4,1353	5,8961	7,611702	12,8286
1	3,9192	5,5760	7,028388	11,2194

Źródło: opracowanie własne.

4. Współmonotoniczność

Pojęcie współmonotoniczności będzie wykorzystywane w dalszej części pracy. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathrm{R}^2$ jest współmonotoniczny, jeśli dla każdych (w_1, x_1), $(w_2, x_2) \in A$ zachodzi relacja $w_1 \leq w_2$, $x_1 \leq x_2$ lub $w_1 \geq w_2$, $x_1 \geq x_2$ [Vyncke 2003].

Innymi słowy, jest on jednocześnie niemalejący po każdej współrzędnej. Jest on *chudym* zbiorem, wymiar każdego jego podzbioru nie jest większy od 1. Jego wykresem na płaszczyźnie R^2 jest krzywa, niekoniecznie spójna, bądź punkty.

Zmienne losowe W, X są **współmonotoniczne**, jeśli nośnik $D_{W,X}$ rozkładu łącznego (W, X) jest współmonotoniczny. Nośnikiem rozkładu nazywamy najmniejszy zbiór D spełniający warunek $P((W, X) \in D) = 1$. Można go interpretować jako zbiór wszystkich możliwych wartości wektora (W, X). Można też podać inne, równoważne definicje współmonotonicznych zmiennych losowych. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. [Vyncke 2003] Zmienne losowe W i X są współmonotoniczne wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z równoważnych warunków:

a) Nośnik losowego wektora (W, X) jest współmonotoniczny.

b) Dystrybuanta rozkładu łącznego $F_{W,X}(w, x) = \min\{F_W(w), F_X(x)\}$ dla każdego $w, x \in R$.

c) Wektor (W, X) ma ten sam rozkład jak $\left(\boldsymbol{F_W^{-1}(U)}, \boldsymbol{F_X^{-1}(U)}\right)$, gdzie zmienna U ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$, a $\boldsymbol{F_X^{-1}(u) = \inf\{x\colon F_X(x) \geq u\}}$ jest funkcją odwrotną do dystrybuanty zmiennej X.

d) Istnieje zmienna losowa Z oraz niemalejące funkcje f i g takie, że wektor (W, X) ma ten sam rozkład jak $(f(Z), g(Z))$.

Widzimy, że współmonotoniczność wiąże się ze ścisłą, dodatnią zależnością. Dla ciągłych współmonotonicznych zmiennych losowych W i X zachodzi między nimi zależność funkcyjna:

$$X = l(W) = F_X^{-1}(F_W(W)).$$

Funkcja $l(x)$ tworzy wtedy nośnik łącznego rozkładu tych zmiennych:

$$D_{W,X} = \{(w, l(w)\}.$$

W przypadku dyskretnych zmiennych losowych nośnik jest zbiorem punktów, a w przypadku ogólnym l nie musi być funkcją, wykres nośnika może zawierać pionowe linie lub punkty o tej samej pierwszej współrzędnej.

Przykład 2

i) Zmienne losowe mają rozkład wykładniczy: $F_W(w) = 1 - e^{\lambda w}$, $F_X(x) = 1 - e^{\beta x}$. Wtedy $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-u)$ i $l(w) = \frac{\lambda}{\beta}w$, gdzie $w \geq 0$. Wykresem nośnika jest wtedy linia prosta oraz $F_{W,X}(w, l(w)) = 1 - e^{\lambda w}$.

ii) Zmienne losowe mają rozkład dwupunktowy: $P(W = 0) = p$, $P(W = 1) = 1 - p$ oraz $P(X = 1) = q$, $P(X = 2) = 1 - q$, gdzie $0 < p < q < 1$. Wtedy

$$F_W^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < u \leq p \\ 1 & \text{dla } p < u \leq 1 \end{cases}$$

a łączny rozkład generuje prawdopodobieństwo skupione w trzech punktach: $D_{W,X} = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2)\}$. Pierwszy zachodzi z prawdopodobieństwem p, drugi $q - p$, a trzeci $1 - q$.

iii) Zmienna W ma rozkład wykładniczy z i), a X dwupunktowy z ii). Wtedy nośnik $D_{W,X} = \{(w, l(w)): w \geq 0\}$, gdzie

$$l(w) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq w \leq w_0 \\ 2 & \text{dla } w_0 < w \end{cases}$$

i $w_0 = -\frac{1}{\beta}\ln(1-q)$ oraz $F_{W,X}(w, l(w)) = 1 - e^{\lambda w}$.

Współmonotoniczność można przedstawić, korzystając z pojęcia funkcji łączących. Z twierdzenia 1b wynika, że

$$M(u, v) = \min\{u, v\}$$

jest funkcją łączącą odpowiadającą współmonotoniczności.

Każda funkcja łącząca jest dystrybuantą rozkładu łącznego dwóch zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku [0, 1]. Funkcja łącząca współmonotoniczności, w odróżnieniu od niezależności, która jest dystrybuantą absolutnie ciągłą, posiadającą gęstość, jest dystrybuantą syngularną. Skupiona jest ona na przekątnej kwadratu $[0, 1]^2$, na której ma rozkład jednostajny.

5. Funkcja łącząca Spearmana

Przyjmijmy teraz, że struktura zależności między okresem między szkodami W_n a następną szkodą X_n jest opisana za pomocą funkcji łączącej Spearmana. Funkcja ta jest kombinacją wypukłą dwóch skrajnych funkcji łączących dotyczących niezależności Π i współmonotoniczności M [Hürliman 2004]:

$$C_\alpha(u, v) = (1 - \alpha)\Pi(u, v) + \alpha M(u, v),$$

gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$. Współczynnik α równy współczynnikowi korelacji Spearmana oddaje stopień zależności zmiennych losowych W i X, których struktura zależności opisana jest funkcją łączącą C_α. Jest to zależność zgodna (dodatnia). Dla $\alpha = 0$ otrzymujemy niezależność, a dla $\alpha = 1$ ścisłą, dodatnią zależność. Należy pamiętać, że współczynnik Spearmana, w odróżnieniu od współczynnika korelacji Pearsona, wyznaczony jest jednoznacznie przez funkcję łączącą, nie zależy od rozkładów brzegowych. Funkcja łączącą Spearmana, w odróżnieniu od funkcji FGM, obejmuje całą gamę dodatnich zależności, od niezależności do ścisłej zależności. Umożliwia szerszą analizę zależności charakterystyk związanych ze zagregowaną szkodą S_t od wielkości stopnia zależności między zmiennymi W i X.

W przypadku funkcji łączącej Spearmana C_α funkcja tworząca momenty zagregowanej szkody jest równa [Marri, Furman 2012; Rudin1982]

$$\mathcal{M}_{S_t,\alpha}(h) = 1 - F_W(t) + \int_0^t \int_0^\infty e^{hx}\, \mathcal{M}_{S_{t-w},\alpha}(h) dC_\alpha\big(F_X(x), F_W(w)\big)$$
$$= e^{-\lambda t} + (1-\alpha) \int_0^t \int_0^\infty e^{hx}\, \mathcal{M}_{S_{t-w},\alpha}(h) dC_I\big(F_X(x), F_W(w)\big)$$
$$+ \alpha \int_0^t \int_0^\infty e^{hx}\, \mathcal{M}_{S_{t-w},\alpha}(h) dC_M\big(F_X(x), F_W(w)\big)$$
$$= e^{-\lambda t} + (1-\alpha) I_1(t) + \alpha I_2(t).$$

Pierwsza całka odpowiada niezależności i jest równa

$$I_1(t) = \int_0^t \mathcal{M}_{S_{t-w},\alpha}(h) f_W(w) \left(\int_0^\infty e^{hx} f_X(x) dx \right) dw = \int_0^t \mathcal{M}_{S_{t-w},\alpha}(h) g_I(w) dw,$$

gdzie

$$g_I(w) = f_W(w) \mathcal{M}_X(h).$$

Natomiast druga, gdy zmienne W oraz X są współmonotoniczne, wynosi

$$I_2(t) = \int_0^t e^{hl(w)} \mathcal{M}_{S_{t-w},\alpha}(h) \lambda e^{-\lambda w}\, dw = \int_0^t \mathcal{M}_{S_{t-w},\alpha}(h) g_M(w) dw,$$

gdzie

$$g_M(w) = \lambda e^{hl(w) - \lambda w}$$

powyżej łączny rozkład zmiennych W i X skupiony jest na krzywej $x = l(w)$ i opisany jest dystrybuantą $H(w) = M(F_W(w), F_X(l(w))) = 1 - e^{-\lambda w}$.

Podstawiając, przy ustalonym h, $G(t) = \mathcal{M}_{S_t,\alpha}(h)$ otrzymujemy

$$G(t) = e^{-\lambda t} + (1-\alpha) \int_0^t G(t-w) g_I(w) dw + \alpha \int_0^t G(t-w) g_M(w) dw.$$

Obliczając obustronnie transformatę Laplace'a, mamy

$$G^*(p) = \frac{1}{\lambda + p} + (1-\alpha) G^*(p) g_I^*(p) + \alpha G^*(p) g_M^*(p).$$

Skąd otrzymujemy

$$G^*(p) = \frac{1}{(\lambda + p)\big(1 - (1-\alpha) g_I^*(p) - \alpha g_M^*(p)\big)}, \tag{4}$$

gdzie

$$g_I^*(p) = \frac{\lambda \mathcal{M}_X(h)}{\lambda + p}.$$

Założymy teraz, że szkody X mają rozkład wykładniczy z dystrybuantą $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$. Stosując wzór (4), możemy podać jawną postać funkcji tworzącej momenty zmiennej S_t. W tym przypadku funkcje $l(w)$ (zob. przykład 1(i)), $g_I(w)$, $g_M(w)$ oraz ich transformaty przyjmują postać:

$$l(w) = \frac{\lambda}{\beta} w, g_I(w) = \lambda e^{-\lambda w} \frac{\beta}{\beta - h}, g_M(w) = \lambda e^{-\lambda\left(1-\frac{h}{\beta}\right)w},$$

$$g_I^*(p) = \frac{\lambda\beta}{(\lambda + p)(\beta - h)} \text{ oraz } g_M^*(p) = \frac{\lambda\beta}{\beta p + (\beta - h)\lambda}.$$

Transformata Laplace'a funkcji $G(t)$ jest wtedy równa:

$$G^*(p) = \frac{1}{(p+\lambda)\left(1 - \frac{(1-\alpha)\beta\lambda}{(\beta - h)(p+\lambda)} - \frac{\alpha\beta\lambda}{p\beta + (\beta - h)\lambda}\right)}.$$

Odwracając $G^*(p)$, otrzymujemy jawną postać funkcji tworzącej momenty zmiennej losowej S_t:

$$\mathcal{M}_{S_{t,\alpha}}(h) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}bt\left(h^2 + h(-3+\alpha)\beta + \beta^2 - a\right)}\left(a + ae^{abt} + (1 - e^{abt})(h^2 - h(1+\alpha)\beta + \beta^2)\right)}{2a},$$

gdzie:

$$a = \sqrt{h^4 - 2h^3(1-\alpha)\beta + h^2(3 - (6-\alpha)\alpha)\beta^2 - 2h(1-\alpha)\beta^3 + \beta^4},$$

$$b = \frac{\lambda}{(h-\beta)\beta}.$$

Znając postać funkcji tworzącej zmiennej losowej, możemy wyznaczyć jej momenty, korzystając z (3). Obliczając pochodną $\mathcal{M}_{S_{t,\alpha}}(h)$ oraz podstawiając $h = 0$, otrzymujemy wartość oczekiwaną zagregowanej wartości szkody. Pochodna została policzona za pomocą programu Mathematica 7. Jej postać jest dość skomplikowana, nie zostanie przedstawiona. Natomiast wartość oczekiwana zmiennej $S_{t,\alpha}$ wynosi

$$E(S_{t,\alpha}) = \frac{\lambda t}{\beta} - \alpha\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\beta} = E(S_{t,0}) - \alpha F_W(t)E(X).$$

Widzimy, że wartość oczekiwana maleje wraz ze wzrostem stopnia zależności α. Zależność ta jest liniowa.

W podobny sposób, wykorzystując drugą pochodną $\mathcal{M}_{S_{t,\alpha}}(h)$, wyznaczamy drugi moment zmiennej $S_{t,\alpha}$:

$$E\left(S_{t,\alpha}^2\right) = \frac{2\alpha^2 - 4t\alpha\lambda + t\lambda(2 + t\lambda) - e^{-t\lambda}2\alpha(\alpha - t(1-\alpha)\lambda)}{\beta^2}.$$

Natomiast jej wariancja przyjmuje postać:

$$V\left(S_{t,\alpha}\right) = E\left(S_{t,\alpha}^2\right) - E^2\left(S_{t,\alpha}\right) = V\left(S_{t,0}\right) + \frac{\left(1 - 2\lambda t e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right)\alpha^2 - 2\lambda t\alpha}{\beta^2},$$

gdzie

$$V\left(S_{t,0}\right) = \frac{2\lambda t}{\beta^2}.$$

Widzimy, że wariancja $V\left(S_{t,\alpha}\right)$ jest funkcją kwadratową ze względu na parametr α. W elementarny, ale w żmudny sposób można pokazać, że dla każdego $t > 0$ funkcja ta osiąga minimum dla wartości parametru $\alpha > 1$. Wynika stąd, że wariancja zagregowanej szkody $S_{t,\alpha}$ jest funkcją parametru α malejącą na odcinku [0, 1]. Maleje więc wraz ze wzrostem zależności zmiennych W i X.

Powyższe rozważania możemy wykorzystać do wyznaczenia funkcjonału składki dla procesu $S_{t,\alpha}$. Korzystając ze wzoru (3) oraz z programu Mathematica 7, możemy wyznaczyć wartość składki Esschera. Ponieważ jednak przyjmuje ona w przypadku ogólnym dość skomplikowaną postać, nie zostanie podana.

Przykład 3

Niech $\lambda = 1$ oraz $\beta = 0,2$. W tab. 2 podane są wartości oczekiwane zagregowanej szkody $E(S_{t,\alpha})$ oraz jej odchylenie standardowe $s(S_{t,\alpha})$, składkę wariancji dla $a = 0,1$ oraz składkę Esschera dla $h = 0,1$ oraz różnych wartości stopnia zależności α w okresie jednego roku ($t = 1$).

Tabela 2. Wartości oczekiwane zagregowanej szkody $E(S_{t,\alpha})$ oraz jej odchylenie standardowe $s(S_{t,\alpha})$

α	$E(S_t)$	$s(S_t)$	Składka wariancji	Składka Esschera
0	5	7,0711	10	20
0,1	4,6839	6,7106	9,1872	18,1076
0,2	4,3679	6,3347	8,3808	16,2351
0,3	4,0518	5,9405	7,5808	14,3839
0,4	3,7358	5,5241	6,7873	12,5558
0,5	3,4197	5,0799	6,0003	10,7524
0,6	3,1036	4,6000	5,2197	8,9755
0,7	2,7876	4,0717	4,4455	7,2268
0,8	2,4715	3,4731	3,6778	5,5082
0,9	2,1555	2,7587	2,9165	3,8215
1	1,8394	1,7952	2,1617	1,3693

Źródło: opracowanie własne.

Widzimy, że wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zagregowanej szkody oraz wielkości składek maleją wraz ze wzrostem stopnia zależności między zmiennymi W oraz X.

Literatura

Albrecher H., Boxma O.J., *A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2004, 35, s. 245-254.

Ambagaspitiya R.S., *Ultimate ruin probability in the Sparre Andersen model with dependent claim sizes and claim occurrence times*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2009, 44, s. 464-472.

Boudreault M., Cossette H., Landiault D., Marceau E., *On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes*, „Scandinavian Actuarial Journal” 2006, 5, s. 265-285.

Cheung E.C.K., Landiault D., Willmot G.E., Woo J-K., *Structural properties of Gerber-Shiu functions in dependent Sparre Andersen models*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2010, 46, s. 117-126.

Cossette H., Marceau E., Marri F., *On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern copula*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2008, 43, s. 444-455.

Cossette H., Marceau E., Marri F., *Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence*, „Scandinavian Actuarial Journal” 2010, 3, s. 221-245.

Heilpern S., *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2007.

Heilpern S., *Risk processes with dependent claim size and claim occurrence times*, „Śląski Przegląd Statystyczny” (w druku).

Hürlimann, W., *Multivariate Frechet copulas and conditional value-at-risk*, „International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences” 2004, 7, s. 345-364.

Kaas R., Van Heerwaarden A. E., Goovaerts M. J., *Ordering of Actuarial Risks*, CAIRE, Brussels 1994.

Magiera R., *Modele i metody statystyki matematycznej*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002.

Marri F., Furman E., *Pricing compound Poisson process with the Falie-Gumbel-Morgenstern dependence structure*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2012, 51, s. 151-157.

Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 1999.

Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne,* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2000.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Willey, New York 1999.

Rudin W., *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.

Vyncke D., *Comonotonicity: The perfect dependence. The concept of comonotonicity in Actuarial Science and Finance*, praca doktorska 2003, www.econ.kuleuven.ac.be/public/ndbaa95/ pdfs/VynckePhD.pdf.

COMPOUND POISSON PROCESS WITH DEPENDENT INTERCLAIM TIMES AND CLAIM AMOUNTS

Summary: The paper is devoted to the compound Poisson process when the interclaim times and the neighbouring claim amount may be dependent. The dependent structure is described by the copula. The Farlie-Gumbel-Morgenstern and Spearman copulas are investigated. The moment generating the function of the aggregated claims and the insurance premiums are derived. The case of the exponentially distributed claims are widely studied.

Keywords: compound Poisson process, collective risk model, dependence, copula, insurance premium.