

PRACE NAUKOWE
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 309
RESEARCH PAPERS
of Wrocław University of Economics No. 309

Spółeczno-gospodarcze aspekty statystyki

Redaktorzy naukowi

**Zofia Rusnak
Edyta Mazurek**



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2013

Redaktor Wydawnictwa: Joanna Szynal

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Beata Mazur

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronach:

www.ibuk.pl, www.ebscohost.com,

The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,

a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon

http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa

www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2013

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695-398-4

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	9
Tadeusz Bednarski: Rola Jerzego Sławy-Neymana w kształtowaniu metod statystycznej analizy przyczynowości	11
Filip Borowicz: Ocena możliwości uzupełnienia danych BAEL informacjami ze źródeł administracyjnych w celu dokładniejszej analizy danych o bezrobociu	19
Mariusz Donocik, Bogdan Kisiała, Mirosław Mróz, Beata Detyna, Jerzy Detyna: Przydatność testów nieparametrycznych Kruskala-Wallisa i mediany w długoterminowej ocenie parametrów kruszyw melafirowych	27
Mariusz Donocik, Bogdan Kisiała, Mirosław Mróz, Beata Detyna, Jerzy Detyna: Karty kontrolne w ocenie jakości kruszyw dla budownictwa drogowego.....	42
Czesław Domański: Uwagi o procedurach weryfikacji hipotez z brakującą informacją.....	54
Stanisław Heilpern: Zależne procesy ryzyka.....	62
Artur Lipieta, Barbara Pawelek, Jadwiga Kostrzewska: Badanie struktury wydatków w ramach wspólnej polityki UE z wykorzystaniem analizy korespondencji.....	78
Agnieszka Marciniuk: Dwa sposoby modelowania stopy procentowej w ubezpieczeniach życiowych	90
Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz: Model nieproporcjonalnej intensywności Coxa w analizie bezrobocia	114
Edyta Mazurek: Statystyczna analiza podatku dochodowego od osób fizycznych.....	127
Katarzyna Ostasiewicz: Awersja do nierówności w modelowaniu użytkowania dóbr wspólnych.....	159
Piotr Peternek: Porównanie kart kontrolnych indywidualnych pomiarów uzyskanych z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu lambda oraz krzywych Johnsona	179
Małgorzata Podogrodzka: Starzenie się ludności a płodność w Polsce w latach 1991-2010 – ujęcie regionalne	192
Renata Rasińska, Iwona Nowakowska: Jakość życia studentów w aspekcie znajomości wskaźników zrównoważonego rozwoju	203

Maria Rosienkiewicz, Jerzy Detyna: Analiza efektywności metod wyboru zmiennych objaśniających do budowy modelu regresyjnego	214
Jerzy Śleszyński: National Welfare Index – ocena nowego miernika rozwoju trwałego i zrównoważonego	236
Maria Szmuksta-Zawadzka, Jan Zawadzki: Wykorzystanie oszczędnych modeli harmonicznych w prognozowaniu na podstawie szeregów czasowych o wysokiej częstotliwości w warunkach braku pełnej informacji.....	261
Anna Zięba: O możliwościach wykorzystania metod statystycznych w badaniach nad stresem	278

Summaries

Tadeusz Bednarski: Role of Jerzy Sława-Neyman in statistical inference for causality	18
Filip Borowicz: Assessing the possibility of supplementing the Polish LFS data with register records for more detailed unemployment data analysis.	26
Mariusz Donocik, Bogdan Kisiała, Mirosław Mróz, Beata Detyna, Jerzy Detyna: Usefulness of nonparametric Kruskal-Wallis and median tests in long-term parameters assessment of melaphyre crushed rocks	41
Mariusz Donocik, Bogdan Kisiała, Mirosław Mróz, Beata Detyna, Jerzy Detyna: Control charts in the assessment of aggregates quality for road construction.....	53
Czesław Domański: Some remarks on the procedures of the verification of hypotheses under incomplete information.....	61
Stanisław Heilpern: Dependent risk processes	77
Artur Lipieta, Barbara Pawelek, Jadwiga Kostrzewska: Study of the structure of expenditure under the EU's common policy using correspondence analysis	89
Agnieszka Marciniuk: Two ways of stochastic modelling of interest rate in life insurances	113
Beata Bieszk-Stolorz, Iwona Markowicz: The Cox non-proportional hazards model in the analysis of unemployment.....	126
Edyta Mazurek: Statistical assessment of Personal Income Tax	158
Katarzyna Ostasiewicz: Inequality aversion in modeling the use of common pool resources	178
Piotr Peternek: Comparison of control charts of individual measurements based on general Lambda distribution and Johnson curves.....	191
Małgorzata Podogrodzka: The ageing of the population and fertility in Poland in the years 1991-2010 by voivodeships.....	202
Renata Rasińska, Iwona Nowakowska: Students' life quality in terms of knowledge of sustainable development indicators	213

Maria Rosienkiewicz, Jerzy Detyna: Efficiency analysis of chosen methods of explanatory variables selection within the scope of regression model construction.....	235
Jerzy Śleszyński: <i>National Welfare Index</i> – assessment of a new measure of sustainable development.....	260
Maria Szmuksta-Zawadzka, Jan Zawadzki: The application of harmonic models in forecasting based on high frequency time series in condition of lack of full information.....	277
Anna Zięba: About statistical methods in the study on stress.....	284

Agnieszka Marciniuk

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

DWA SPOSOBY MODELOWANIA STOPY PROCENTOWEJ W UBEZPIECZENIACH ŻYCIOWYCH

Streszczenie: W tradycyjnej literaturze aktuarialnej zakłada się, że stopa procentowa jest stała i taka sama przez wszystkie lata. Jednak stopa procentowa, która będzie zastosowana w przyszłych latach, nie jest oczywiście znana i stała. Dlatego w badaniach naukowych stosowana jest stochastyczna stopa procentowa do obliczeń aktuarialnych. W artykule opisane są dwa sposoby stochastycznego modelowania stopy procentowej: aktuarialny i finansowy, wyróżnione ze względu na zastosowany model stopy procentowej. Zaprezentowane są obliczenia wartości oczekiwanej i wariancji zdyskontowanej wielkości świadczenia uogólnionego przypadku renty życiowej płatnej z dołu m razy w roku. Dokonana jest analiza wpływu stochastycznej stopy procentowej na obliczenia wartości aktuarialnych i matematycznych rezerw netto. Wyniki i wnioski opisane są w ostatniej części artykułu.

Słowa kluczowe: techniczna i krótkoterminowa stopa procentowa, model Vasicka, model Coxa-Ingersolla-Rossa, rezerwy matematyczne, renta życiowa.

1. Wstęp

W literaturze aktuarialnej tradycyjnie stosuje się stałą stopę procentową do obliczania składek, wartości aktuarialnych rent życiowych czy rezerw matematycznych. Nowoczesne badania zmierzają do zastosowania stopy procentowej zmieniającej się w czasie, stopy procentowej określonej jako zmienna losowa lub jako proces stochastyczny. Ze względu na zastosowane modele stóp procentowych oraz sposób obliczeń określonych wielkości aktuarialnych można wyróżnić dwa sposoby modelowania stopy procentowej w ubezpieczeniach: aktuarialny i finansowy. W pierwszym przypadku w tradycyjny sposób jest określona wartość oczekiwana i wariancja zdyskontowanej wielkości świadczenia ubezpieczeniowego, a do obliczeń zastosowana jest techniczna stopa procentowa. W sposobie finansowym świadczenia ubezpieczeniowe potraktowane są jako stochastyczny skumulowany przepływ pieniężny. Zdyskontowana wartość takiego przepływu jest wyceniana przy założeniu, że nie jest możliwy arbitraż. Do obliczeń zastosowane są modele krótkoterminowej stopy procentowej. Tak więc modele aktuarialne są to modele technicznej stopy procentowej, natomiast modele finansowe są to modele krótkoterminowej stopy procentowej.

Celem artykułu jest zaprezentowanie sposobów modelowania stopy procentowej na przykładzie renty życiowej płatnej z dołu w uogólnionym przypadku, gdy renta wypłacana jest m ($m > 0$) razy w roku¹. Wyznaczona jest wtedy wartość oczekiwana i drugi moment zwykły zaktualizowanej wielkości świadczenia renty życiowej. Następnie porównane są przedstawione sposoby modelowania stopy procentowej i dokonana jest analiza wpływu stochastycznej stopy procentowej na wysokość renty życiowej, składek ubezpieczeniowych i rezerw matematycznych.

2. Klasyfikacja modeli stopy procentowej

Stopa procentowa od chwili $t_1 \geq 0$ do chwili t_2 , $t_2 \geq t_1$ jest definiowana jako iloraz różnicy kapitału otrzymanego w chwili t_2 i kapitału zainwestowanego w chwili t_1 do zainwestowanego kapitału w chwili t_1 . Iloraz ten oznacza się symbolem i_{t_1, t_2} i nazywa techniczną stopą procentową. Techniczna stopa procentowa jest określona następującym równaniem (por. [Bowers i in. 1986]):

$$i_{t_1, t_2} = \frac{K_{t_2} - K_{t_1}}{K_{t_1}} = \frac{K_{t_2}}{K_{t_1}} - 1 = v_{t_1, t_2}^{-1} - 1, \quad (1)$$

gdzie K_t jest to wysokość kapitału w chwili t , a v_{t_1, t_2} jest to funkcja dyskontowania z chwili t_2 na chwilę t_1 .

Z powyższej zależności wynika, że można modelować zarówno techniczną stopę procentową, jak i funkcję dyskontowania.

Aby zdefiniować finansowe modele stopy procentowej, niezbędne jest wprowadzenie pojęcia obligacji zerokuponowej. Obligacja jest papierem wartościowym, sprzedawanym z dyskontem. Dochód z tej obligacji jest to różnica wartości nominalnej i ceny sprzedaży. Umownie przyjmuje się, że cena nominalna jest równa jednej jednostce pieniężnej. Oznacza to, że właściciel obligacji zerokuponowej otrzyma jedną jednostkę pieniężną w chwili T . Cena obligacji zerokuponowej z terminem wykupu T w dowolnej chwili t jest oznaczana przez $P_{t, T}$. Jest oczywiste, że (por. [Marciniuk 2007]):

$$P_{t, T} = v_{t, T}$$

W teorii finansów wyróżnia się cztery modele stopy procentowej: terminową stopę procentową, chwilową stopę terminową, natychmiastową stopę terminową i chwilową stopę natychmiastową. W artykule zastosowana jest chwilowa stopa natychmiastowa, nazywana również stopą krótkoterminową. Stopa ta jest określona za pomocą chwilowej stopy terminowej.

¹ W literaturze rozpatrywany jest przypadek, gdy $m = 1$, tzn. wypłata następuje na koniec roku. W rozprawie doktorskiej (por. [Marciniuk 2009]) przypadek ten jest uogólniony na płatności dokonywane częściej niż raz w roku. W artykule, bazującym na wynikach tej pracy przedstawiona jest wersja renty życiowej z odniesieniem do jednorazowej składki netto dla ubezpieczenia na dożycie.

Chwilowa stopa terminowa, w skrócie stopa *forward*, jest definiowana następującym wzorem (por. [Musiała, Rutkowski 1988]):

$$f_{t,T} = -\frac{\partial \ln P_{t,T}}{\partial T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Chwilową stopę natychmiastową oznacza się symbolem r_t i definiuje następująco (por. [Jakubowski i in. 2003]):

$$r_t = f_{t,T}. \quad (2)$$

Wycena zdyskontowanych przepływów pieniężnych opiera się na martyngałowej metodzie wyceny instrumentów pochodnych, tzn. przy braku arbitrażu na rynku finansowym (por. [Jakubowski i in. 2003; Rolski i in. 1995]). Najważniejszym elementem tej wyceny jest znalezienie sprawiedliwej ceny obligacji zerokuponowej, tzn. wycena obligacji dokonana jest przy założeniu braku arbitrażu na rynku. Przypuśćmy, że proces stochastyczny krótkoterminowej stopy procentowej $\{r_t\}_{t \geq 0}$ jest zdefiniowany na przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, \mathbf{P}) , gdzie \mathbf{P} jest fizyczną miarą prawdopodobieństwa na przestrzeni (Ω, F) z historią $F_t \subset F$ dla $t \geq 0$. F oznacza zbiór wszystkich możliwych zdarzeń, natomiast F_t wszystkie zdarzenia do chwili t . Zakłada się, że proces $\{r_t\}_{t \geq 0}$ jest adaptowalny względem filtracji F_t oraz $\int_0^T |r_s| ds < \infty, t \leq T$. Ponadto w celu wyceny obligacji przyjmuje się istnienie miary probabilistycznej \mathbf{Q} równoważnej mierze \mathbf{P} . Cena zerokuponowej obligacji jest sprawiedliwa, jeśli zdyskontowany proces ceny zerokuponowej obligacji jest martyngałem względem miary \mathbf{Q} równoważnej mierze \mathbf{P} . Wtedy cena zerokuponowej obligacji jest określona w sposób jednoznaczny następującym wzorem:

$$P_{t,T} = E^{\mathbf{Q}}(\Lambda_{t,T}^{-1} | F_t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

gdzie

$$\Lambda_{t,T}^{-1} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right). \quad (4)$$

Proces $\{\Lambda_{t,T}^{-1}\}_{t \geq 0}$ nazywany jest procesem dyskontowania. W celu uproszczenia zapisu symbol $\Lambda_{0,t}^{-1}$ zostanie zastąpiony przez symbol $\Lambda_{0,t}^{-1}$.

3. Aktuarialny sposób stochastycznego modelowania stopy procentowej

3.1. Składki netto w ubezpieczeniu rentowym

Rozpatrzmy przypadek uogólniony renty terminowej płatnej przez n lat z dołu m razy w roku² ($m > 0$) w wysokości $\frac{1}{m}$. Zdyskontowana wartość świadczenia rentowego jest oznaczana symbolem $Y(\cdot)$ lub krótko Y . Jeżeli przez $K_x^{(m)}$ ($K_x^{(m)} \in \{0, 1, \dots, m \cdot n, \dots\}$) oznaczy się zmienną losową, określającą dalszy czas trwania życia, mierzony w podokresach roku (por. [Marciniuk 2009]), to zaktualizowaną na moment zerowy wielkość raty renty w k -tym podokresie roku w wysokości 1 jednostki pieniężnej (1 j.p.) określa się następująco:

$$X_k^{(m)} = \begin{cases} v_{0, \frac{k}{m}} & \text{dla } K_x^{(m)} = k, k+1, \dots, \\ 0 & \text{dla } K_x^{(m)} = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases}. \quad (5)$$

Zaktualizowaną wielkość świadczenia rentowego można zapisać w następującej postaci:

$$Y(X_k^{(m)}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} X_k^{(m)}. \quad (6)$$

Składka netto według zasady równoważności jest to wartość oczekiwana zaktualizowanej wielkości świadczenia, czyli Y . Pierwszy moment zwykły Y oblicza się następująco:

$$E(Y(X_k^{(m)})) = E\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} X_k^{(m)}\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} E(X_k^{(m)}).$$

Wartość oczekiwaną wielkości $X_k^{(m)}$ wyznacza się, korzystając z własności warunkowej wartości oczekiwanej następująco:

$$E(X_k^{(m)}) = E\left(E(X_k^{(m)} | K_x^{(m)})\right) = \sum_{t=0}^{\infty} E(X_k^{(m)} | K_x^{(m)} = t) \cdot P(K_x^{(m)} = t).$$

Dla ustalonego $t \in N$ mamy:

$$E(X_k^{(m)} | K_x^{(m)} = t) = \sum_x x \cdot P(X_k^{(m)} = x | K_x^{(m)} = t) = \sum_x x \cdot P(X_k^{(m)} = x) = E(X_k^{(m)}),$$

przy czym przedostatnia równość wynika z niezależności wielkości $K_x^{(m)}$ i $v_{0, \frac{k}{m}}$.

² Symbol m oznacza podział roku na równe części. Podział ten jest umowny, gdyż np. $m = 12$ oznacza, że rok jest dzielony na miesiące, które w rzeczywistości są różnej długości.

Stąd i ze wzoru (5) mamy:

$$\begin{aligned} E\left(X_k^{(m)}\right) &= E\left(E\left(X_k^{(m)} \mid K_x^{(m)}\right)\right) = \sum_{t=0}^{\infty} E\left(X_k^{(m)} \mid K_x^{(m)} = t\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} = t\right) = \\ &= \sum_{t=k}^{\infty} E\left(v_{0, \frac{k}{m}}\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} = t\right) = E\left(v_{0, \frac{k}{m}}\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} \geq k\right). \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = E(Y) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-n} E\left(E\left(X_k^{(m)} \mid K_x^{(m)}\right)\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-n} E\left(v_{0, \frac{k}{m}}\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} \geq k\right). \quad (7)$$

Zauważmy, że pojedyncza rata renty w k -tym podokresie roku w wysokości 1 j.p. jest to po prostu jednorazowa składka netto w przypadku ubezpieczenia na dożycie na k podokresów roku, czyli

$$E\left(v_{0, \frac{k}{m}}\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} \geq k\right) = A_{x:\overline{k}|} \frac{1}{m}. \quad (8)$$

Drugi moment zwykły zaktualizowanej wielkości świadczenia $Y\left(X_k^{(m)}\right)$ oblicza się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} E\left(Y^2\left(X_k^{(m)}\right)\right) &= E\left(\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-n} X_k^{(m)}\right)^2\right) = \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m-n} E\left(\left(X_k^{(m)}\right)^2\right) + \frac{2}{m^2} \sum_{i < j}^{m-n} E\left(X_i^{(m)} \cdot X_j^{(m)}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

Pierwszy ze składników powyższej sumy wyznacza się analogicznie jak pierwszy moment zwykły wielkości $X_k^{(m)}$, korzystając z własności warunkowej wartości oczekiwanej oraz faktu, że wielkości $K_x^{(m)}$ i $v_{0, \frac{k}{m}}$ są niezależne. Stąd mamy:

$$\begin{aligned} E\left(\left(X_k^{(m)}\right)^2\right) &= E\left(E\left(\left(X_k^{(m)}\right)^2 \mid K_x^{(m)}\right)\right) = \sum_{k=1}^{m-n} \sum_{t=0}^{\infty} E\left(\left(X_k^{(m)}\right)^2 \mid K_x^{(m)} = t\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} = t\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-n} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_x x^2 \cdot P\left(X_k^{(m)} = x \mid K_x^{(m)} = t\right)\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} = t\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-n} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_x x^2 \cdot P\left(X_k^{(m)} = x\right)\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} = t\right). \end{aligned}$$

Ponieważ dla ustalonego $t \in N$ mamy:

$$\sum_x x^2 \cdot P\left(X_k^{(m)} = x\right) = \begin{cases} E\left(v_{0, \frac{k}{m}}^2\right) & \text{dla } t = k, k+1, \dots, \\ 0 & \text{dla } t = 0, 1, \dots, k-1, \end{cases}$$

to

$$E\left(\left(X_k^{(m)}\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{m-n} E\left(v_{0, \frac{k}{m}}^2\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} \geq k\right). \quad (10)$$

Zauważmy, że:

$$E\left(v_{0, \frac{k}{m}}^2\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} \geq k\right) = {}^2A_{x:k/m}, \quad (11)$$

gdzie ${}^2A_{x:k/m}$ jest to drugi moment zwykły zdyskontowanego świadczenia w przypadku ubezpieczenia na dożycie na k podokresów roku.

W celu wyznaczenia drugiego ze składników sumy (9) również korzysta się z własności warunkowej wartości oczekiwanej. Zauważmy, że $X_i^{(m)} \cdot X_j^{(m)} \neq 0$ tylko w przypadku, gdy $K_x^{(m)} \geq j > i$. Jeżeli wielkości $K_x^{(m)}$ i $v_{0, \frac{k}{m}}$ są niezależne, to:

$$E\left(X_i^{(m)} \cdot X_j^{(m)}\right) = E\left(E\left(X_i^{(m)} \cdot X_j^{(m)} \mid K_x^{(m)}\right)\right) = E\left(v_{0, \frac{i}{m}} \cdot v_{0, \frac{j}{m}}\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} \geq j\right).$$

Korzystając z powyższego oraz ze wzoru (10), wzór (9) można zapisać następująco

$$\begin{aligned} {}^2a_{x:\overline{n}|} = E\left(Y^2\left(X_k^{(m)}\right)\right) &= \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m-n} E\left(v_{0, \frac{k}{m}}^2\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} \geq k\right) + \\ &+ \frac{2}{m^2} \sum_{i < j}^{m-n} E\left(v_{0, \frac{i}{m}} \cdot v_{0, \frac{j}{m}}\right) \cdot P\left(K_x^{(m)} \geq j\right) \end{aligned} \quad (12)$$

W zależności od przyjętego modelu stopy procentowej wielkości: $E\left(v_{0, \frac{k}{m}}\right)$, $E\left(v_{0, \frac{k}{m}}^2\right)$, $E\left(v_{0, \frac{i}{m}} \cdot v_{0, \frac{j}{m}}\right)$ oblicza się inaczej, co przedstawione zostanie w kolejnym punkcie artykułu.

3.2. Modele technicznej stopy procentowej

Można wyróżnić wiele modeli technicznej stopy procentowej, począwszy od tradycyjnej stałej stopy procentowej, czy stopy zmieniającej się w czasie według określonej funkcji czasu, poprzez stopy procentowe określone jako zmienne losowe, albo proces stochastyczny. Można modelować stopę procentową lub funkcję dyskontowania.

Funkcję dyskontowania definiuje się za pomocą funkcji intensywności oprocentowania δ_{t_1, t_2} następująco (por. [Bellhouse, Panjer 1981]):

$$v_{t_1, t_2} = \exp(\delta_{t_1, t_2}), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2.$$

Funkcja intensywności oprocentowania może być procesem dyskretnym lub ciągłym. W pierwszym przypadku funkcja ta zdefiniowana jest za pomocą następującego wzoru:

$$\delta_{t_1, t_2} = \sum_{t=t_1}^{t_2} \delta_t, \quad = 0, 1,$$

gdzie δ_t oznacza intensywność oprocentowania.

Jeśli $\{\delta_t\}_{t \geq 0}$ jest procesem ciągłym, to funkcja intensywności oprocentowania ma następującą postać:

$$\delta_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta_t dt \quad 0 \leq t_1 \leq t_2.$$

Najbardziej popularnym stochastycznym modelem intensywności oprocentowania jest proces autoregresji rzędu jeden (AR(1)). Proces ten jest zdefiniowany za pomocą zależności rekurencyjnej (por. [Brockwell, Davis 1996]):

$$\delta_t = \mu + \phi(\delta_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

gdzie $\delta_0 \in R, \mu \in R, |\phi| < 1$.

Dodatkowo zakłada się, że $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ oraz że zmienne δ_t i ε_s są niezależne dla $s < t$. Taki proces jest stacjonarny i ma rozkład normalny ze średnią μ i wariancją $\sigma^2 / (1 - \phi^2)$.

Do obliczeń niezbędna jest znajomość wartości $E(v_{0,t}^k)$ oraz $E\left(v_{0,\frac{i}{m}}^k \cdot v_{0,\frac{j}{m}}^k\right)$.

W tym przypadku $E(v_{0,t}^k)$ jest dana za pomocą wzoru (por. [Marciniuk 2004a]):

$$E(v_{0,t}^k) = M_{\delta_{0,t}}(-k) = \exp(-k\mu t + 0,5k^2V(\delta_{0,t})), \quad (14)$$

gdzie (por. [Panjer, Bellhouse 1980]):

$$V(\delta_{0,t}) = \frac{t\sigma^2}{1-\phi^2} + 2 \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \frac{\phi}{1-\phi} \left(t-1 - \phi \frac{1-\phi^{t-1}}{1-\phi} \right), \quad (15)$$

a $M_Y(-k)$ oznacza funkcję tworzącą momenty zmiennej losowej Y w punkcie $-k$.

Wartość oczekiwana iloczynu funkcji dyskontujących jest określona za pomocą następującego wzoru:

$$E\left(v_{0,\frac{i}{m}}^k \cdot v_{0,\frac{j}{m}}^k\right) = M_{\delta_{0,i} + \delta_{0,j}}(-1) = \exp(-(i+j)\mu + 0,5V(\delta_{0,i} + \delta_{0,j})), \quad (16)$$

przy czym (por. [Marciniuk 2004b]):

$$V(\delta_{0,i} + \delta_{0,j}) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}(j+3i) + \frac{2\sigma^2}{1-\phi^2} \frac{\phi}{1-\phi} \left(j+3i-5 - \frac{1}{1-\phi} (5\phi-3+(1-2\phi^i)(1+\phi^{j-i})) \right). \quad (17)$$

Drugim z procesów stosowanych jako model intensywności oprocentowania jest ciągły proces stochastyczny, nazywany procesem Wienera, następującej postaci (por. [Dhaene 2000]):

$$d\delta_t = \sigma dB_t, \quad t \geq 0,$$

gdzie $\delta_t \in R$, $\sigma \geq 0$, natomiast $\{B_t\}_{t \geq 0}$ oznacza standardowy ruch Browna.

Rozwiązaniem powyższego stochastycznego równania różniczkowego jest proces postaci $\delta_t = \delta_0 + \sigma B_t$, o następujących własnościach (por. [Musiel, Rutkowski 1988]):

$$E(\delta_t) = \delta_0, V(\delta_t) = \sigma^2 t, C(\delta_s, \delta_t) = \sigma^2 C(B_s, B_t) = \sigma^2 \cdot \min(s, t).$$

Ponieważ $\{\delta_t\}_{t \geq 0}$ jest procesem gaussowskim, to (por. [Marciniuk 2009]):

$$E(v_{0,t}^k) = M_{\delta_0, t}(-k) = \exp\left(-k\delta_0 t + 0,5k^2 \frac{\sigma^2 t^3}{6}\right). \quad (18)$$

Wzór na $E(v_{0,i} \cdot v_{0,j})$, jako jeden z własnych wyników wyprowadzony w pracy (por. [Marciniuk 2009]), jest następującej postaci:

$$E\left(v_{0, \frac{i}{m}} \cdot v_{0, \frac{j}{m}}\right) = M_{\delta_0, i+\delta_j}(-1) = \exp\left(-(i+j)\delta_0 + 0,5\sigma^2 j\left(i^2 + \frac{1}{3}j^2\right)\right). \quad (19)$$

W artykule rozpatrzone są jedynie te dwa procesy, ale możliwe jest również zastosowanie innych procesów, np. procesu autoregresji rzędu 2 (por. [Brockwell, Davis 1996]), czy procesu Ornsteina-Uhlenbecka (por. [Beekman, Fuelling 1993]).

4. Finansowy sposób stochastycznego modelowania stopy procentowej

4.1. Składki netto w ubezpieczeniu rentowym

W sposobie finansowym świadczenia potraktowane są jako stochastyczny skumulowany przepływ pieniężny (por. [Carriere 1999]). Zdyskontowana na moment zero wartość takich przepływów jest wyceniana przy założeniu, że nie jest możliwy arbitraż, natomiast do dyskontowania stosuje się krótkoterminową stopę procentową.

Przepływ pieniężny (strumień płatności) zdefiniowany jest za pomocą procesu różniczkowego $\{dC_t\}_{t \geq 0}$ z warunkiem początkowym $C_0 \in \mathbb{R}$. Wartość dC_t oznacza wysokość świadczenia, która jest wypłacana w chwili $t \geq 0$.

Strumień płatności renty terminowej płatnej z dołu m razy w roku w wysokości $\frac{1}{m}$ przez n lat w dowolnej chwili $t \geq 0$, stanowiący uogólniony przypadek, jest zdefiniowany następująco:

$$C_t = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} \mathbf{1}_{(t \geq k)} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \quad \text{dla} \quad K_x^{(m)} = 0, 1, 2, \dots, m \cdot n, \dots, \quad (20)$$

gdzie $C_0 = 1$, a $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ oznacza funkcję zero-jedynkową.

W celu obliczenia wartości aktuarialnej netto renty życiowej wszystkie świadczenia dyskontowane są na chwilę zerową za pomocą procesu dyskontowania, określonego wzorem (4). Zdyskontowane przyszłe przepływy pieniężne w chwili $t = 0$ są oznaczane przez D_0 zdefiniowane następująco (por. [Carriere 1999]):

$$D_0 = \int_{(0, \infty)} A_t^{-1} dC_t = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} \frac{A_k^{-1}}{m} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)}. \quad (21)$$

Zaktualizowana wielkość wszystkich przepływów pieniężnych Y_0 jest to suma C_0 i D_0 . Ponieważ $C_0 = 0$, to

$$Y_0 = D_0.$$

Wielkość D_0 zależy od procesu stochastycznego $\{A_t^{-1}\}_{t \geq 0}$ i zmiennej losowej $K_x^{(m)}$ i jest to wielkość losowa. Wartość oczekiwana zdyskontowanych wszystkich przepływów pieniężnych w dowolnej chwili $t \geq 0$, gdy nie jest możliwy arbitraż, jest obliczana z następującego wzoru (por. [Jakubowski i in. 2003]):

$$E^Q(D_t | F_t) = E^Q \left(\int_{(0, \infty)} \Lambda_t \cdot \Lambda_s^{-1} dC_s | F_t \right). \quad (22)$$

Z zasady równoważności wiadomo, że $a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = E^Q(Y_0 | F_0)$, przy czym F_0 oznacza naturalną filtrację. Korzystając z własności wartości oczekiwanej, mamy:

$$a_{x:n}^{(m)} = E^Q(Y_0 | F_0) = E^Q\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} \Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} E^Q\left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0\right).$$

Problem polega na wyznaczeniu $E^Q\left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0\right)$. W tym celu miarę \mathbf{Q} zastępuje się rzeczywistą miarą \mathbf{P} (por. [Lipcer, Szirajew 1981]). Jeśli ρ oznacza gęstość miary \mathbf{Q} względem \mathbf{P} , to:

$$\begin{aligned} E^Q\left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0\right) &= \frac{E^P\left(\rho \Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0\right)}{E^P(\rho | F_0)} = \frac{E^P\left(\rho \Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \middle| F_0\right)}{E^P(\rho | F_0)} E^P\left(\mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0\right) = \\ &= E^Q\left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \middle| F_0\right) \cdot E^P\left(\mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0\right). \end{aligned}$$

Przedostatnia równość wynika z faktu, że $K_x^{(m)}$ oraz $(\rho, \{\Lambda_t^{-1}\}_{t \geq 0})$ są stochastycznie niezależne względem miary \mathbf{P} , natomiast ostatnia z dokonania ponownie zamiany miary z \mathbf{P} na \mathbf{Q} .

Ze wzoru (3) wiadomo, że $P_{0,t} = E^Q(\Lambda_{0,t}^{-1} | F_0) = E^Q(\Lambda_t^{-1} | F_0)$, a ponieważ $E^P(\mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} | F_0) = P(K_x^{(m)} \geq k)$, to wartość aktuarialna renty jest obliczana następująco:

$$a_{x:n}^{(m)} = E^Q(Y_0 | F_0) = E^Q\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} \Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} P_{0, \frac{k}{m}} \cdot P(K_x^{(m)} \geq k). \quad (23)$$

Drugi moment zwykły zdyskontowanych przepływów pieniężnych wyznacza się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} {}^2a_{x:n}^{(m)} &= E^Q(Y_0^2 | F_0) = E^Q\left(\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} \Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)}\right)^2 \middle| F_0\right) = \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m \cdot n} E^Q\left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-2} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0\right) + \frac{2}{m^2} \sum_{i,j}^{m \cdot n} E^Q\left(\Lambda_{\frac{i}{m}}^{-1} \cdot \Lambda_{\frac{j}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq j)} \middle| F_0\right), \quad (24) \end{aligned}$$

przy czym $\mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)}^2 = \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)}$.

Zauważmy, że w drugiej sumie występuje jedynie $\mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq j)}$ zamiast $\mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq j)} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq i)}$, gdyż $\mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq j)} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq i)} = \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq \max(i, j))} = \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq i)}$.

Oba składniki sumy (24) wyznacza się analogicznie jak pierwszy moment zdyskontowanych przepływów pieniężnych renty, korzystając dwukrotnie z zamiany miar \mathbf{Q} i \mathbf{P} . Jeżeli $K_x^{(m)}$ oraz $(\rho, \{\Lambda_t\}_{t \geq 0})$ są stochastycznie niezależne względem miary \mathbf{P} , to:

$$E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-2} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0 \right) = E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-2} \middle| F_0 \right) \cdot E^{\mathbf{P}} \left(\mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0 \right) = E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-2} \middle| F_0 \right) \cdot P(K_x^{(m)} \geq k)$$

oraz

$$\begin{aligned} E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{i}{m}}^{-1} \cdot \Lambda_{\frac{j}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq j)} \middle| F_0 \right) &= E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{i}{m}}^{-1} \cdot \Lambda_{\frac{j}{m}}^{-1} \middle| F_0 \right) \cdot E^{\mathbf{P}} \left(\mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq j)} \middle| F_0 \right) = \\ &= E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{i}{m}}^{-1} \cdot \Lambda_{\frac{j}{m}}^{-1} \middle| F_0 \right) \cdot P(K_x^{(m)} \geq j). \end{aligned}$$

Ostatecznie drugi moment zwykły zdyskontowanych wszystkich przepływów pieniężnych oblicza się ze wzoru postaci:

$$\begin{aligned} {}^2a_{x:n|}^{(m)} &= E^{\mathbf{Q}} \left(Y_0^2 \middle| F_0 \right) = E^{\mathbf{Q}} \left(\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} \Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \right)^2 \middle| F_0 \right) = \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m \cdot n} E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-2} \middle| F_0 \right) \cdot P(K_x^{(m)} \geq k) + \frac{2}{m^2} \sum_{i,j}^{m \cdot n} E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{i}{m}}^{-1} \cdot \Lambda_{\frac{j}{m}}^{-1} \middle| F_0 \right) \cdot P(K_x^{(m)} \geq j), \quad (25) \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

$$A_{x:k/m|}^{\frac{1}{m}} = E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-1} \cdot \mathbf{1}_{(K_x^{(m)} \geq k)} \middle| F_0 \right) = P_{0, \frac{k}{m}} \cdot P(K_x^{(m)} \geq k), \quad (26)$$

$${}^2A_{x:k/m|}^{\frac{1}{m}} = E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{\frac{k}{m}}^{-2} \middle| F_0 \right) \cdot P(K_x^{(m)} \geq k), \quad (27)$$

przy czym dla $k = m \cdot n$ otrzymujemy wzory na jednorazową składkę netto i drugi moment zwykły zaktualizowanego świadczenia ubezpieczeniowego w przypadku ubezpieczenia na dożycie na n lat (ogólnie na k podokresów roku).

W wyprowadzonych powyżej wzorach występuje pierwszy i drugi moment procesu dyskontowania oraz iloczyn dwóch procesów dyskontowania. Ponieważ wielkość $E^{\mathbf{Q}} \left(\Lambda_{0,t}^{-1} \middle| F_0 \right)$ jest równa cenie obligacji zerokuponowej $P_{0,t}$, to teoretycznie wartość aktuarialną renty czy jednorazową składkę netto można wyliczyć na podstawie notowań rynkowych obligacji zerokuponowych. Jednak każdego dnia cena ta może być inna, co w konsekwencji daje inne wartości $a_{x:n|}^{(m)}$ i $A_{x:k/m|}^{\frac{1}{m}}$ dla osób w tym

samym wieku. Ponadto na polskim rynku istnieje niewielka liczba obligacji zerokuponowych. Dlatego proces dyskontowania jest modelowany za pomocą jakiejś stopy procentowej, a następnie za jego pomocą modelowana jest cena obligacji zerokuponowej. Poza tym drugi moment procesu dyskontowania i pierwszy moment zwykły iloczynu dwóch procesów dyskontowania nie są znane i również muszą być modelowane. Cena obligacji zerokuponowej jest określona innym wzorem w zależności od przyjętego modelu krótkoterminowej stopy procentowej. W artykule zastosowane są dwa modele, tj. model Vasicka i model Coxa-Ingersolla-Rossa (CIR), które są krótko opisane w kolejnym punkcie.

4.2. Modele krótkoterminowej stopy procentowej

Modele krótkoterminowej stopy procentowej są określone względem miary \mathbf{Q} , co gwarantuje jednoznaczne wyznaczenie ceny obligacji zerokuponowej (por. [Musiała, Rutkowski 1988]).

Rozważmy przypadek, gdy krótkoterminowa stopa procentowa jest określona następującym procesem Ornsteina-Uhlenbecka (por. [Rolski i in. 1995]):

$$dr_t = -\alpha(r_t - \mu)dt + \sigma dB_t, \quad (28)$$

gdzie $\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0, \alpha > 0$.

Proces $\{B_t\}_{t \geq 0}$ jest to standardowy proces ruchu Browna względem miary \mathbf{Q} . Z twierdzenia Girsanowa wiadomo, że $B_t = B_t^* + \beta t$, gdzie $\{B_t^*\}_{t \geq 0}$ jest to standardowy proces ruchu Browna względem miary \mathbf{P} , $\beta > 0$ oznacza cenę za ryzyko (por. [Vasicek 1997]). Tak zdefiniowany model krótkoterminowej stopy procentowej jest znany jako model Vasicka.

Cena obligacji zerokuponowej w tym przypadku jest dana za pomocą następującej formuły (por. [Musiała, Rutkowski 1988]):

$$P_{t,T} = E^{\mathbf{Q}}\left(\Lambda_{0,t}^{-1} | F_0\right) = \exp\left(-r_t w_{t,T} - \mu(T-t) + \mu w_{t,T} + 0,5\sigma^2 \int_t^T w_{u,T}^2 du\right), \quad (29)$$

gdzie

$$w_{t,T} = \frac{1 - \exp(-\alpha(T-t))}{\alpha}, \quad (30)$$

$$\int_t^T w_{u,T}^2 du = \frac{1}{\alpha^2}(T-t) - \frac{2}{\alpha^3}(1 - \exp(-\alpha(T-t))) + \frac{1}{2\alpha^3}(1 - \exp(-2\alpha(T-t))). \quad (31)$$

Łatwo jest pokazać, że:

$$E^{\mathbf{Q}}\left(\Lambda_{t,T}^{-2} | F_0\right) = \exp\left(-2r_t w_{t,T} - 2\mu(T-t) + 2\mu w_{t,T} + 2\sigma^2 \int_t^T w_{u,T}^2 du\right), \quad (32)$$

gdzie $w_{t,T}$ oraz $\int_t^T w_{u,T}^2 du$ są odpowiednio dane za pomocą wzorów (30) i (31).

Pierwszy moment zwykły iloczynu dwóch procesów dyskontowania jest jednym z wyników rozprawy doktorskiej (por. [Marciniuk 2009]). W celu wyznaczenia tej wielkości korzysta się z faktu, że:

$$\int_t^T r_s ds \Big| F_t \sim N \left(r_t w_{t,T} + \mu(T-t) - \mu w_{t,T}, \sigma \int_t^T w_{u,T}^2 du \right)$$

oraz

$$E^Q \left(\Lambda_s^{-1} \cdot \Lambda_t^{-1} \Big| F_0 \right) = M_{\int_0^s r_u du + \int_0^t r_u du}(-1),$$

gdzie $M_Y(-1)$ oznacza funkcję tworzącą momenty zmiennej Y .

Ostatecznie wielkość $E^Q \left(\Lambda_s^{-1} \cdot \Lambda_t^{-1} \Big| F_0 \right)$ wyznacza się ze wzoru (por. [Marciniuk 2009]):

$$E^Q \left(\Lambda_s^{-1} \cdot \Lambda_t^{-1} \Big| F_0 \right) = \exp \left(-E^Q \left(\int_0^s r_u du + \int_0^t r_u du \Big| F_0 \right) + 0,5V^Q \left(\int_0^s r_u du + \int_0^t r_u du \Big| F_0 \right) \right), \quad (33)$$

gdzie

$$E^Q \left(\int_0^s r_u du + \int_0^t r_u du \Big| F_0 \right) = \frac{(2 - e^{-\alpha t} - e^{-\alpha s})}{\alpha} (r_0 - \mu) + \mu(s+t), \quad (34)$$

$$V^Q \left(\int_0^s r_u du + \int_0^t r_u du \Big| F_0 \right) = \frac{\sigma^2(t+3s)}{\alpha^2} + \frac{2\sigma^2}{\alpha^3} (2e^{-\alpha t} + 2e^{-\alpha s} - 3) + \frac{\sigma^2}{\alpha^3} (1 - e^{-\alpha(t-s)}) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} (e^{-\alpha t} + e^{-\alpha s})^2. \quad (35)$$

W przypadku modelu Vasicka wszystkie wzory mają postać analityczną.

Rozważmy przypadek, gdy krótkoterminowa stopa procentowa jest określona za pomocą stochastycznego równania różniczkowego (por. [Jakubowski i in. 2003]):

$$dr_t = (\mu - \alpha r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dB_t, \quad (36)$$

gdzie $\mu \in R, 0 < \sigma < \alpha, B_t = B_t^* + \int_0^t \sqrt{r_u} du$.

Jak poprzednio proces $\{B_t\}_{t \geq 0}$ jest to standardowy proces ruchu Browna względem miary \mathbf{Q} oraz $\{B_t^*\}_{t \geq 0}$ jest to standardowy proces ruchu Browna względem miary \mathbf{P} . Proces $\{\sqrt{r_t}\}_{t \geq 0}$ jest to cena za ryzyko. Ten model został wprowadzony przez Coxa, Ingersolla i Rossa, dlatego nazywany jest modelem CIR.

Cena obligacji zerokuponowej w tym przypadku jest następująca:

$$P_{i,T} = \exp(-r_t w_{i,T} + m_{i,T}). \quad (37)$$

Funkcje $w_{i,T}$ i $m_{i,T}$ są określone następującymi wzorami:

$$w_{i,T} = \frac{2(\exp(2\gamma(T-t)) - 1)}{2\gamma - \alpha + (2\gamma + \alpha)\exp(2\gamma(T-t))}, \quad (38)$$

$$m_{i,T} = \frac{2\mu}{\sigma^2} \ln \left(\frac{4\gamma(\exp(0,5(2\gamma + \alpha)(T-t)))}{2\gamma - \alpha + (2\gamma + \alpha)\exp(2\gamma(T-t))} \right), \quad (39)$$

gdzie $\gamma = 0,5\sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}$ oraz $t \in [0, T]$.

Nie jest znana w tym przypadku analityczna postać na drugi moment zwykły procesu dyskontowania, a tym bardziej na iloczyn dwóch procesów dyskontowania. Dlatego wartości te są wyznaczone numerycznie. Schemat obliczania (por. [Marciniuk 2009]) polega na numerycznym rozwiązaniu równania (36) metodą aproksymacji rzędu 1,5 (por. [Janicki 1996]), dzieląc odcinek czasowy na n części. Następnie numerycznie przybliża się rozwiązanie całki $\int_r^t r_u du$, $t > s$. Na końcu wyznacza się wartość $\exp\left(-2\int_s^t r_u du\right)$ lub $\exp\left(-\int_0^s r_u du\right) \cdot \exp\left(-\int_0^t r_u du\right)$, powtarzając procedurę k -krotnie oblicza się średnią wartość $\exp\left(-2\int_s^t r_u du\right)$ lub $\exp\left(-\int_0^s r_u du\right) \cdot \exp\left(-\int_0^t r_u du\right)$.

5. Estymacja parametrów modeli

Krótkoterminowa stopa procentowa nie jest bezpośrednio obserwowana na rynku finansowym. Dlatego też jest ona w jakiś sposób szacowana, np. na podstawie stopy WIBOR. Na podstawie bonów skarbowych i obligacji o stałym oprocentowaniu można określić natychmiastową stopę procentową. Znając stopę *forward*, można również wyznaczyć krótkoterminową stopę procentową.

Dla uproszczenia założmy, że znamy krótkoterminową stopę procentową, tzn. mamy dane symulacyjne. Dane te wygenerowane zostały z następującego rozkładu (por. [James, Webber 2000])

$$r_{i+1} \left| r_i \sim N \left(\mu + (r_i - \mu) \cdot \exp(-\alpha(t_{i+1} - t_i)), \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\alpha(t_{i+1} - t_i))}{2\alpha}} \right) \quad (40)$$

Dla $\alpha = 8, \mu = 0,055, \sigma = 0,04, r_0 = 0,05$. Przyjęto, że są to tygodniowe dane, obserwowane przez 20 lat.

Na ich podstawie estymowano parametry modeli krótkoterminowej stopy procentowej. Z uwagi na to, że znane są warunkowe rozkłady dla: procesu Wienera, procesu AR(1) i modelu Vasicka, do estymacji parametrów tych modeli zastosowano metodę największej wiarygodności. W przypadku modelu CIR znana jest również postać funkcji największej wiarygodności (por. [James, Webber 2000]). Funkcja ta zależy od funkcji Bessela, zależnej od estymowanych parametrów. Trudno jest dobrać parametry startowe estymowanych parametrów, które nie powodowałyby zaburzeń funkcji Bessela. Dlatego do estymacji parametrów w przypadku modelu CIR zastosowano uogólnioną metodę momentów (por. [James, Webber 2000]). Estymację wszystkich parametrów przeprowadzono z wykorzystaniem pakietu Solver w programie Excel. Wyniki estymacji są następujące:

– proces AR(1)

$$d\delta_t = 0,05524 + 0,84598(\delta_{t-1} - 0,05524) + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0; 0,009375), \delta_0 = 0,04845,$$

– proces Wienera

$$d\delta_t = 0,0052dB_t, \delta_0 = 0,04845,$$

– model Vasicka

$$dr_t = -8,67(r_t - 0,055)dt + 0,04dB_t,$$

– model CIR

$$dr_t = (0,06218 - 1,1254r_t)dt + 0,32\sqrt{r_t}dB_t.$$

6. Przykłady numeryczne

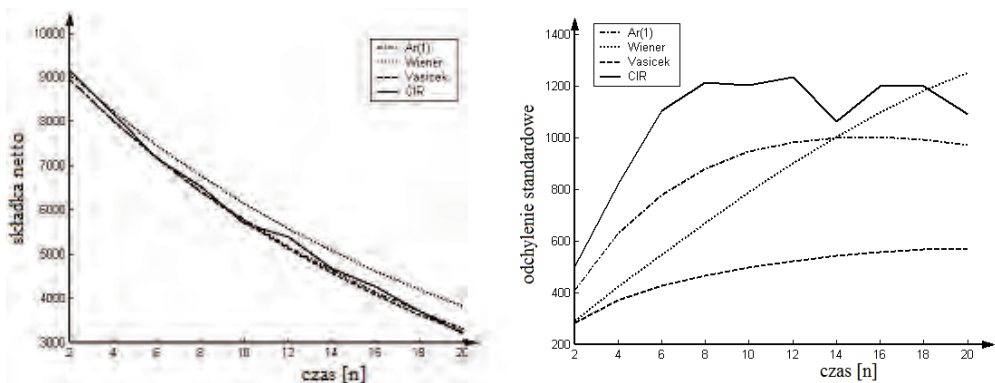
W celu porównania zaprezentowanych modeli i sposobów stochastycznego modelowania stopy procentowej obliczono wartości aktuarialne rent życiowych. Wartości te są sumą jednorazowych składek netto w przypadku ubezpieczenia na dożycie. Dla przykładu obliczono jednorazowe składki netto i odchylenie standardowe zdyskontowanego świadczenia ubezpieczeniowego dla kobiety, która w wieku 30 lat kupuje ubezpieczenie na dożycie na n lat ($n = 2, 4, \dots, 20$). Świadczenie wypłacane jest w wysokości 10 000 zł (por. [Marciniuk 2009]).

W sposobie aktuarialnym jednorazową składkę netto oblicza się ze wzoru (8), natomiast drugi moment zwykły zaktualizowanej wielkości świadczenia ze wzoru (11). Dla przyjętych danych mamy: $10000A_{30:\overline{n}|}^1 = E(v_{0,n}) \cdot P(K_{30} \geq n) = E(v_{0,n}) \cdot {}_n p_{30}$ oraz $(10000)^2 \cdot {}^2A_{30:\overline{n}|}^1 = E(v_{0,n}^2) \cdot {}_n p_{30}$. Prawdopodobieństwo ${}_n p_{30}$ jest obliczone na podstawie Polskich Tablic Trwania Życia z 2000 roku (por. [Ostasiewicz 2003]). Odchylenie standardowe zaktualizowanej wielkości świadczenia Z , jako pierwiastek z wariancji Z , jest obliczane ze wzoru: $10000\sigma(Z) = 10000\sqrt{V(Z)} =$

$= 10000 \sqrt{{}^2A_{30:n}^{-1} - (A_{30:n}^{-1})^2}$. Wartość $E(v_{0,t}^k)$, dla $k = 1, 2$ jest zadana wzorem (14) w przypadku procesu AR(1) i wzorem (18) w przypadku procesu Wienera. W sposobie finansowym wielkości $A_{x:n}^{-1}$ i ${}^2A_{x:n}^{-1}$ są obliczane odpowiednio ze wzorów (26) i (27). W przypadku modelu Vasicka $P_{t,T}$ i $E^Q(\Lambda_{t,T}^{-2} | F_t)$ są dane wzorami (29) i (32). W modelu CIR cena $P_{t,T}$ jest określona wzorem (37), natomiast wielkość $E^Q(\Lambda_{t,T}^{-2} | F_t)$ jest obliczona numerycznie za pomocą własnego programu według schematu podanego w punkcie 4.2. Odcinek czasowy podzielono na $500n$ części i zastosowano 200 powtórzeń do generowania trajektorii procesu.

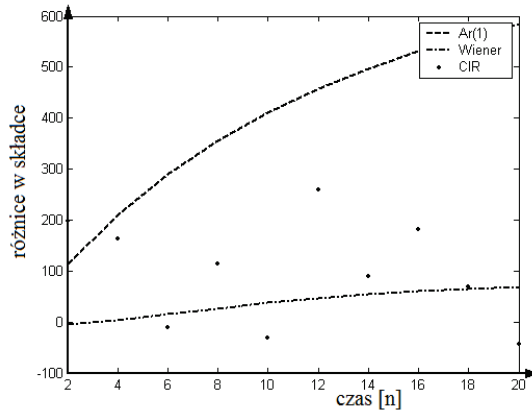
Wysokość jednorazowej składki netto i odchylenia standardowego zdyskontowanego świadczenia przedstawione są na rys. 1. Wartości jednorazowych składek netto są najniższe w przypadku modelu Vasicka, dlatego na rys. 2 przedstawiono różnice między jednorazowymi składkami netto względem tej najniższej składki.

Najniższe składki są w przypadku modelu Vasicka. Podobnej wysokości jest składka w przypadku procesu AR(1). Różnice są małe dla małych n . Dla większych n różnice są rzędu 10-30 zł, przy składce równej około 3500 zł. Składka w przypadku procesu Wienera jest zdecydowanie wyższa, a różnice rosną wraz ze wzrostem n od 120 zł do 580 zł. Składka w przypadku modelu CIR jest obliczona numerycznie, dlatego składki nie są przedstawione jako funkcja ciągła na rys. 2. Różnice pomiędzy składkami wynoszą od 100 do 200 zł.



Rys. 1. Jednorazowa składka netto i odchylenie standardowe zdyskontowanej wielkości świadczenia Z
Źródło: [Marciniuk 2009].

Odchylenie standardowe zdyskontowanej wartości świadczenia w przypadku modelu CIR jest obliczone numerycznie i jest ono najwyższe. W przypadku procesu Wienera odchylenie standardowe Z jest większe niż $\sigma(Z)$ w przypadku procesu AR(1) dla $n \geq 18$. Najmniejsze $\sigma(Z)$ jest w przypadku modelu Vasicka. Wyniki dla procesu AR(1) i modelu Vasicka są podobne, jednakże wartości $\sigma(Z)$ w pierwszym przypadku są nieco wyższe. Zauważmy, że proces autoregresji rzędu jeden jest dys-



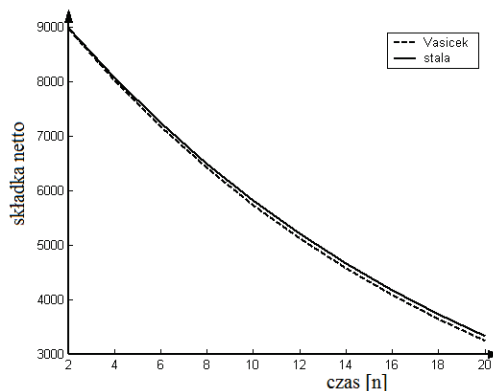
Rys. 2. Różnice między jednorazowymi składkami netto względem składki w przypadku modelu Vasicka
Źródło: [Marciniuk 2009].

kretną wersją procesu Ornsteina-Uhlenbecka. Proces opisujący model Vasicka jest także procesem Ornsteina-Uhlenbecka. Wynika stąd, że nie jest konieczne użycie ciągłych procesów jako modeli krótkoterminowej stopy procentowej. Jednakże nie zawsze proces ciągły ma swoją wersję z czasem dyskretnym.

Warto też zwrócić uwagę na fakt, że składka netto i odchylenie standardowe zdyskontowanej wielkości świadczenia, obliczone przy założeniu, że stała stopa procentowa jest równa długoterminowej stopie procentowej, dla modelu Vasicka, są prawie takie same jak składka netto i odchylenie standardowe Z dla modelu Vasicka. Ta długoterminowa stopa procentowa jest określona następująco (por. [Yao 1999]):

$$\mu = \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} = 5,4999\% .$$

Składki w obu przypadkach zaprezentowane są na rys. 3.



Rys. 3. Porównanie jednorazowej składki netto dla stałej długoterminowej stopy procentowej i krótkoterminowej stopy w modelu Vasicka

Źródło: [Marciniuk 2009].

W przypadku modelu CIR, długoterminowa stopa procentowa jest równa $\frac{2\mu}{\alpha + \sqrt{\sigma^2 + \alpha^2}} = 5,42\%$, a więc jest podobnej wysokości, co w przypadku modelu Vasicka.

Przypuśćmy, że 30-letnia kobieta pobiera raz w roku rentę życiową płatną z góry przez n lat $n = (4, 8, \dots, 20)$. W punktach 3.1 i 4.1 niniejszego artykułu określono wartości aktuarialne i drugi moment zwykły zaktualizowanego świadczenia renty płatnej z dołu. Zauważmy, że:

$$Y^g(X_k^{(m)}, m \cdot n) = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} X_k^{(m)} = \frac{1}{m} + Y(X_k^{(m)}, m \cdot n - 1),$$

gdzie $Y^g(X_k^{(m)}, m \cdot n)$ oznacza zaktualizowaną wielkość świadczenia renty płatnej z góry przez $m \cdot n$ podokresów roku, natomiast $Y(X_k^{(m)}, m \cdot n - 1)$ oznacza zaktualizowaną wielkość świadczenia renty płatnej z dołu przez $m \cdot n - 1$ podokresów roku.

Oznacza to, że wzory na wartość aktuarialną renty płatnej z góry różnią się jedynie tym, że występuje pierwsza rata, płatna w chwili zerowej w wysokości $\frac{1}{m}$, a ostatnia rata nie jest wypłacana na koniec, tylko na początku podokresu roku $m \cdot n$. Wartość aktuarialna renty płatnej z góry przez n lat m razy w roku określona jest następująco:

$$\ddot{a}_{x:n}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n - 1} E\left(v_{0, \frac{k}{m}}\right) \cdot P(K_x^{(m)} \geq k) = \frac{1}{m} + a_{x: \frac{n \cdot m - 1}{m}}.$$

Zauważmy też, że:

$$V\left(Y^g(X_k^{(m)}, m \cdot n)\right) = V\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \cdot n} X_k^{(m)}\right) = V\left(Y(X_k^{(m)}, m \cdot n - 1)\right).$$

Oznacza to, że chcąc obliczyć wartość aktuarialną lub wariancję zaktualizowanego świadczenia renty życiowej płatnej z góry wystarczy skorzystać z odpowiednich wielkości dla renty płatnej z dołu. Analogicznie jest w przypadku finansowego modelowania stopy procentowej w ubezpieczeniu renty życiowej.

Wartość aktuarialna renty życiowej, jest najmniejsza w przypadku modelu Vasicka (najniższa składka w przypadku ubezpieczenia na dożycie), dlatego w tab. 1 przedstawiona jest ta wartość dla renty pobieranej m razy w roku przez n lat tylko dla tego modelu. Prawdopodobieństwa $P(K_x^{(m)} \geq k) = {}_{k/m}p_x$ obliczono przy założeniu jednostajnego rozkładu śmierci w ciągu roku na podstawie Polskich Tablic Trwania Życia z 2000 roku (por. [Ostasiewicz 2003]) ze wzoru (por. [Marciniuk 2004a]):

$${}_{k/m}p_x = P(K_x^{(m)} \geq k) = {}_{[k/m]}p_x \cdot (1 - (t \div m)) \cdot (1 - p_{x+[k/m]}),$$

gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a , natomiast $(a \div b)$ oznacza część ułamkową z dzielenia liczb a i b .

Tabela 1. Wartość aktuarialna renty życiowej w przypadku modelu Vasicka

n	$m = 1$ (rocznie)	$m = 2$ (półrocznie)	$m = 4$ (kwartalnie)	$m = 12$ (miesięcznie)	$m = 365$ (dziennie)	$m = 8760$ (godzinnie)
2	1,947	1,920	1,907	1,898	1,894	1,894
4	3,689	3,639	3,614	3,598	3,590	3,589
6	5,249	5,177	5,141	5,118	5,106	5,106
8	6,644	6,553	6,508	6,478	6,463	6,463
10	7,891	7,783	7,729	7,694	7,676	7,676
12	9,006	8,882	8,821	8,780	8,761	8,760
14	10,002	9,864	9,796	9,751	9,729	9,728
16	10,891	10,740	10,666	10,616	10,593	10,592
18	11,683	11,522	11,442	11,388	11,363	11,362
20	12,389	12,217	12,132	12,076	12,048	12,047

Źródło: [Marciniuk 2009].

Wartość aktuarialna maleje, gdy rośnie m . Różnice te nie są jednak znaczące. Wraz ze wzrostem n różnice w wartościach aktuarialnych są większe. Ponadto wraz ze wzrostem podziału roku, różnice w wartościach aktuarialnych zanikają. Wartość aktuarialna dla $m = 1$ jest większa niż dla $m = 365$ o około 2,8%. Różnice między wartościami dla $m = 12$ i $m = 365$ wynoszą około 0,46%. Dla $m = 365$ i $m = 8760$ różnice te są bardzo małe – około 0,22%. Dlatego nie ma potrzeby wypłacania renty życiowej częściej niż raz w miesiącu.

7. Matematyczne rezerwy netto

Znając wielkość jednorazowych składek i wartości aktuarialnych netto rent życiowych można obliczyć matematyczne rezerwy netto. Wartość polisy ubezpieczeniowej w czasie, czy też zobowiązania, określające wielkość środków, jakie ubezpieczyciel powinien posiadać w danej chwili, są to właśnie rezerwy matematyczne. Do ich obliczenia niezbędna jest znajomość okresowej składki netto. Ratalną składkę netto w przypadku ubezpieczenia na dożycie na n lat określa się ze wzoru (por. [Bowers i in. 1986]):

$$P_{x:n}^{1(m)} = \frac{A_{x:n}^1}{\ddot{a}_{x:n}^{(m)}}.$$

Dla przykładu załóżmy, że kobieta w wieku 30 lat kupuje ubezpieczenie na dożycie na $n = 10$ lub $n = 20$ lat i płaci składkę m ($m = 1, 2, 4, 12, 365$) razy w roku, by jeżeli dożyje, otrzymać świadczenie w wysokości 10 000 zł. Wartość roczna okresowych składek netto dla wszystkich modeli przedstawiona jest w tab. 2.

Tabela 2. Wartość roczna okresowych składek dla wszystkich modeli

Model	$m = 1$ (rocznie)	$m = 2$ (półrocznie)	$m = 4$ (kwartalnie)	$m = 12$ (miesięcznie)	$m = 365$ (dziennie)
$n = 10$					
AR(1)	730,19	740,25	745,34	748,76	-
Wiener	757,81	767,05	771,72	774,86	776,39
Vasicek	726,34	736,42	741,53	744,97	746,64
CIR	897,59	902,62	905,10	906,73	907,53
$n = 20$					
AR(1)	265,03	268,69	270,55	271,80	-
Wiener	291,25	294,78	296,56	297,76	298,34
Vasicek	260,90	264,57	266,42	267,67	268,28
CIR	403,01	405,15	406,22	406,93	407,27

Źródło: [Marciniuk 2009].

W tabeli 2 dzienna składka dla procesu AR(1) nie jest obliczona, ponieważ dane, na podstawie których estymowane były parametry, są tygodniowymi danymi (maksymalnie dla $m = 52$). Z tej tabeli wynika, że najwyższa składka jest w przypadku modelu CIR. Różnice w wysokości składki są znaczące, np. dla $n = 20$ jest to ponad 50%. Najmniejsza składka jest w przypadku modelu Vasicka. Składka dla procesu AR(1) jest porównywalnej wysokości. W przypadku procesu Wienera składki są nieco wyższe.

W tabeli 3 przedstawiono wartości roczne okresowych składek netto dla modelu Vasicka dla $n = 2, 4, \dots, 20$.

Tabela 3. Wartość roczna okresowych składek dla modelu Vasicka

n	$m = 1$ (rocznie)	$m = 2$ (półrocznie)	$m = 4$ (kwartalnie)	$m = 12$ (miesięcznie)	$m = 365$ (dziennie)	$m = 1$ (rocznie)
2	4600,40	4663,40	4695,43	4716,95	4727,66	4727,91
4	2172,12	2202,08	2217,32	2227,55	2232,51	2232,64
6	1365,95	1384,84	1394,43	1400,86	1403,98	1404,09
8	965,11	978,48	985,26	989,82	992,05	992,11
10	726,34	736,42	741,53	744,98	746,64	746,69
12	568,54	576,45	580,47	583,16	584,47	584,51
14	456,97	463,34	466,57	468,74	469,79	469,83
16	374,28	379,50	382,16	383,94	384,80	384,83
18	310,85	315,20	317,41	318,89	319,61	319,64
20	260,91	264,57	266,42	267,67	268,28	268,30

Źródło: [Marciniuk 2009].

Z tabeli 3 wynika, że wraz ze wzrostem m rośnie wartość składki. Na przykład półroczna składka jest wyższa o około 1,37%-1,4% od składki rocznej. Dzienna składka jest wyższa od rocznej o około 2,77%-2,83% (różnica jest dwukrotna). Wraz ze wzrostem okresu ubezpieczenia różnice między składkami także rosną. Wraz ze wzrostem podziału roku, różnice w wartościach składek są coraz mniejsze. Dienne składki są wyższe niż miesięczne o około 0,22%. Różnice między godzinną a dzienną składką wynoszą około 0,007% i nie są znaczące. Dlatego nie ma sensu płacić składki częściej niż każdego dnia. Taka częstotliwość nie jest praktykowana, dlatego najbardziej sensowną składką jest składka miesięczna.

Ponieważ składka jest najniższa w przypadku modelu Vasicka, matematyczne rezerwy netto obliczone są tylko w tym przypadku. Za pomocą następującego wzoru oblicza się matematyczne rezerwy netto w chwili $t \geq 0$ w przypadku finansowego modelowania stopy procentowej w ubezpieczeniach (por. [Carriere 2004; Marciniuk 2009]):

$${}_tV_{x:\overline{n}|}^{1(m)} = P_{t,n} \cdot {}_{n-t}P_{x+t} - \frac{P_{x:\overline{n}|}^{1(m)}}{m} \sum_{k=\lceil m \cdot t \rceil}^{m \cdot n - 1} P_{\frac{k}{m}}^{\frac{k}{m}} \frac{{}_kP_x}{t P_x}, \quad 0 < t \leq n,$$

$${}_0V_{x:\overline{n}|}^{1(m)} = 0,$$

gdzie $\lceil m \cdot t \rceil$ jest to sufit (część całkowita górna) z liczby $m \cdot t$.

Tabela 4. Matematyczne rezerwy netto w przypadku modelu Vasicka

t	traj. 1	traj. 2	traj. 3	traj. 4	1000 trajektorii	$i = 5,4898\%$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	768,02	767,61	766,82	767,96	767,24	773,26
2	1583,12	1577,00	1582,28	1577,09	1578,85	1589,47
3	2436,35	2438,85	2434,29	2433,93	2436,69	2451,07
4	3342,58	3334,04	3336,56	3340,66	3343,95	3360,70
5	4309,44	4303,81	4306,91	4295,87	4302,99	4321,18
6	5309,51	5316,72	5311,74	5313,01	5317,47	5335,50
7	6381,17	6382,14	6380,66	6381,16	6390,42	6406,88
8	7526,29	7525,40	7540,53	7536,94	7526,27	7538,85
9	8724,25	8728,68	8742,78	8727,89	8727,80	8735,22
10	10 000,00	10 000,00	10 000,00	10 000,00	10 000,00	10 000,00

Źródło: [Marciniuk 2009].

Przypuśćmy dla przykładu, że 30-letnia kobieta kupuje ubezpieczenie na dożycie na 10 lat, a świadczenie wypłacane jest w wysokości 10 000 zł. Kobieta ta płaci roczną składkę w wysokości 726,34 zł (tab. 3). Rezerwy w chwili 0 są równe 0.

Pozostałe rezerwy zależą od ceny obligacji zerokuponowej $P_{t,10}$. Ta cena jest znana tylko dla $t = 0$ i $t = 10$. Dla pozostałych $t > 0$ cena jest procesem stochastycznym, zależnym od krótkoterminowej stopy procentowej w chwili t . Rezerwy są więc także procesem stochastycznym. Dlatego można jedynie określić ich wielkość dla różnych trajektorii procesu krótkoterminowej stopy procentowej, co jest przedstawione w tab. 4. Średnie rezerwy obliczone są dla 1000 trajektorii. Cena zerokuponowej obligacji jest wyznaczona ze wzoru (29). Ponadto w tabeli przedstawiono rezerwy obliczone przy założeniu stałej stopy procentowej, równej długoterminowej stopie procentowej w modelu Vasicka.

Trajektorie generowane są przy użyciu wzoru (40). Rezerwy dla różnych trajektorii są prawie takie same. Czasami są one o kilka złotych wyższe lub niższe. Średnie rezerwy dla modelu Vasicka są podobnej wysokości jak rezerwy z poszczególnych trajektorii. Ponadto są one podobnej wysokości jak rezerwy wyznaczone przy stałej długoterminowej stopie procentowej równej 5,499%.

8. Podsumowanie

W celu ilustracji i porównania dwóch sposobów modelowania stopy procentowej w ubezpieczeniach zastosowano dane symulacyjne. Do obliczenia wielkości aktuarialnych zastosowano proces autoregresji rzędu jeden, proces Wienera, model Vasicka i model Coxa-Ingersolla-Rossa. W sposobie finansowym niezbędna jest znajomość ceny obligacji zerokuponowej, a ponieważ na rynku polskim nie ma odpowiedniej liczby takich obligacji, to ich cenę modelowano za pomocą krótkoterminowej stopy procentowej.

Większość wniosków została podana podczas analizy wyników, uzyskanych z przykładów numerycznych. Podsumowując, najlepszym, z przedstawionych modeli stopy procentowej okazał się model Vasicka. Podobne wyniki uzyskano dla procesu AR(1). Najgorsze wyniki otrzymano dla modelu CIR. Estymacji parametrów tego modelu dokonano przy użyciu innej niż dla pozostałych modeli metody estymacji. Proces opisujący ten model, charakteryzuje się rozkładem niecentralnym w przeciwieństwie do pozostałych modeli. Ponadto większość obliczeń w tym przypadku wykonano numerycznie. Wszystko to mogło mieć wpływ na ogólne wnioski.

W przypadku modelu Vasicka wielkości aktuarialne mogą być liczone dla każdego $t \geq 0$. Jednakże podział roku na więcej niż 12 części nie powoduje znacznego wzrostu składki. Nie ma sensu opłacanie składki czy wypłacanie świadczeń częściej niż raz w miesiącu. Dlatego używanie ciągłych modeli stopy procentowej nie jest konieczne. W przypadku modelu CIR czy procesu Wienera składki są wyższe. Teoretycznie firma ubezpieczeniowa mogłaby wybrać te modele, jednak odchylenie standardowe zdyskontowanej wartości świadczenia jest także w tych przypadkach wyższe, co zwiększa ryzyko ponoszenia większej straty przez ubezpieczyciela.

Poprawne wyznaczenie rezerw jest ważnym elementem działalności ubezpieczeniowej. Ubezpieczyciel musi zagwarantować sobie i klientom wypłacalność.

W przypadku stochastycznego modelowania stopy procentowej rezerwy są także stochastyczne i mogą być obliczone jedynie jako wartości średnie. W przypadku modelu Vasicka średnie wielkości rezerw są porównywalne do wielkości rezerw z poszczególnych trajektorii procesu. Nie w każdym przypadku tak musi być.

Ważnym wnioskiem jest to, że jeżeli składka i rezerwy netto są wyliczone przy założeniu stałej stopy procentowej, to stopa ta powinna się równać długoterminowej stopie procentowej, obliczonej dla modelu stochastycznego stopy procentowej.

W finansowym sposobie stochastycznego modelowania stopy procentowej można uzyskać ceny obligacji zerokuponowej z rynku. Jest to zaleta. Ale składka dla tej samej osoby może być inna każdego dnia. Ponadto nie ma zbyt dużo takich obligacji na polskim rynku. Dlatego cena obligacji jest modelowana. Natomiast chcąc obliczyć odchylenie standardowe zaktualizowanej wielkości świadczenia i tak trzeba modelować drugi moment procesu dyskontowania.

Jest wiele zalet i wad stochastycznego modelowania stopy procentowej. Jednak takie modelowanie jest godne uwagi, gdyż przybliża do rzeczywistości.

Niektóre wzory, a także wyniki numeryczne w tym artykule pochodzą z rozprawy doktorskiej autora artykułu (por. [Marciniuk 2009]) i nie były jeszcze publikowane w postaci artykułów.

Literatura

- Beekman J. A., Fuelling C. P., *One approach to dual randomness in life insurance*, "Scandinavian Actuarial Journal" 1993, nr 2, ss. 173-182.
- Bellhouse D. R., Panjer H. H., *Stochastic modelling of interest rates with applications to life contingencies – part II*, "Journal of Risk & Insurance" 1981, nr 48, ss. 628-637.
- Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., Nesbit C. J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois 1986.
- Brockwell P. J., Davis R. A., *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer-Verlag, New York 1996.
- Carriere J. F., *No arbitrage pricing for life insurance and annuities*, "Economics Letters" 1999, 64, ss. 339-342.
- Carriere J. F., *Martingale valuation of cash flows for insurance and interest models*, "North American Actuarial Journal" 2004, nr 3, vol. 8, ss. 1-16.
- Dhaene J., *Stochastic interest rates and autoregressive integrated moving average process*, "Astin Bulletin" 2000, nr 1, vol. 30, ss. 123-140.
- Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł., *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa 2003.
- James J., Webber N., *Interest rate modelling*, John Wiley & Sons, New York 2000.
- Janicki A., *Numerical and Statistical Approximation of Stochastic Differential Equation with Non-Gaussian Measures*, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1996.
- Lipcer R. Sz., Szirjajew A. N., *Statystyka procesów stochastycznych. Filtracja nieliniowa i zagadnienie pokrewne*, PWN, Warszawa 1981.
- Marciniuk A., *Składki ubezpieczeń na życie ze świadczeniem płatnym na koniec podokresu roku śmierci ubezpieczonego*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Zastosowania statystyki i matematyki w ekonomii*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2004a, ss. 141-159.

- Marciniuk A., *Składki ze stochastyczną stopą procentową*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Składki w wybranych typach ubezpieczeń życiowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2004b, ss. 80-123.
- Marciniuk A., *Wartość przepływów pieniężnych w ubezpieczeniach życiowych*, Prace Naukowe nr 1163, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2007, ss. 188-207.
- Marciniuk A., *Modele stóp procentowych i ich zastosowania w ubezpieczeniach – praca doktorska*, Uniwersytet Ekonomiczny, Wrocław 2009.
- Musiela M., Rutkowski M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, Berlin 1988.
- Ostasiewicz S., *Składki w wybranych typach ubezpieczeń życiowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2003.
- Panjer H. H., Bellhouse D. R., *Stochastic modelling of interest rates with application to life contingencies*, "The Journal of Risk and Insurance" 1980, nr 1, vol. 47, ss. 91-110.
- Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic processes for insurance and finance*, John Wiley & Sons, New York 1995.
- Vasicek O., *An equilibrium characterization of the term structure*, "Journal of Financial Economics" 1997, nr 5, ss. 177-188.
- Yao Y., *Term structure models: A perspective from the long rate*, "North American Actuarial Journal" 1999, nr 3, vol. 3, ss. 122-138.

TWO WAYS OF STOCHASTIC MODELLING OF INTEREST RATE IN LIFE INSURANCES

Summary: In the traditional actuarial literature, to make it simple, it is assumed that the rate of interest is fixed and the same throughout the years. However, the interest rate that will apply in the future years is, of course, neither known nor constant. Therefore, the stochastic interest rate to the actuarial calculations is applied in the research. Two ways of stochastic modelling of interest rate: actuarial and financial are described in the article. The actuarial and financial ways of modelling of interest rate are distinguished according to applying the interest rate model. The actuarial calculations are presented in the case of the generalized life annuity payable m times a year at the end of each m -th of the year. In the actuarial way the expected value and the variance of the discount value of benefit payment are determined in a traditional way, and the technical stochastic interest rate models are applied to the calculations. In the financial way benefit payments are treated as a stochastic cumulative cash flow. The discount value of these cash flows is valued under the assumption that arbitrage is not possible. To the actuarial calculations the models of short-term rate are applied. In the article four stochastic processes are used as interest rate models in life insurances. The analysis of the influence of stochastic interest rate on calculating net premiums, actuarial values of life annuities and net mathematical reserves is done. The results and conclusions are described in the last part of the article.

Keywords: technical interest rate, short-term rate, Vasicek model, Cox-Ingersoll-Ross model, mathematical reserve, life annuity.