

PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 371

**Inwestycje finansowe i ubezpieczenia –
tendencje światowe a rynek polski**

Redaktorzy naukowi

Krzysztof Jajuga

Wanda Ronka-Chmielowiec



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2014

Redakcja wydawnicza: Jadwiga Marcinek
Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz
Korekta: Barbara Cibis
Łamanie: Małgorzata Czupryńska
Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa
www.pracnaukowe.ue.wroc.pl
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2014

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-411-0

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
tel./fax 71 36 80 602; e-mail: econbook@ue.wroc.pl
www.ksiegarnia.ue.wroc.pl

Druk i oprawa: TOTEM

Spis treści

Wstęp	9
Waldemar Aspadarec: Wyniki inwestycyjne funduszy hedge po doświadczeniach kryzysu finansowego	11
Aleksandra Baszczyńska: Metoda jądrowa w analizie finansowych szeregów czasowych.....	23
Katarzyna Byrka-Kita, Mateusz Czerwiński, Agnieszka Perepeczo: Reakcja akcjonariuszy na sprzedaż znaczących pakietów akcji.....	32
Katarzyna Byrka-Kita, Dominik Rozkrut: Ryzyko jako determinanta premii z tytułu kontroli – empiryczna weryfikacja.....	43
Iwona Chomiak-Orsa, Piotr Staszkiwicz: Reduced form of the standard approach for operational risk for economic capital assessment	54
Tadeusz Czernik: Efekt histerezy – wycena opcji i implikowana zmienność	65
Tadeusz Czernik, Daniel Iskra: Modyfikacja geometrycznego ruchu Browna oparta na czasie przebywania. Wycena instrumentów pochodnych, implikowana zmienność – badania symulacyjne.....	75
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Efektywność inwestycji funduszy emerytalnych w Polsce – wybrane problemy.....	88
Monika Hadaś-Dyduch: Produkty strukturyzowane – ujęcie algorytmiczne zysku z uwzględnieniem oddziaływania wskaźników rynku finansowego	101
Magdalena Homa: Wpływ strategii inwestycyjnej ubezpieczonego na rozkład wartości portfela ubezpieczeniowego w UFK.....	112
Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa: Kształtowanie indeksowych ubezpieczeń upraw oparte na indywidualizmie w postrzeganiu ryzyka przez gospodarstwa rolne w Polsce	123
Łukasz Jasiński: Innowacje produktowe w ubezpieczeniach zdrowotnych w Polsce.....	137
Lidia Karbownik: Determinanty zagrożenia finansowego przedsiębiorstw sektora TSL w Polsce.....	149
Tomasz Karczyński, Edward Radośniński: Ocena relacji pomiędzy trendami giełd światowych a trendami giełd Europy Środkowowschodniej na przykładzie warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych	165
Krzysztof Kowalke: Efektywność informacyjna Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie	177
Mieczysław Kowerski: Uwagi dotyczące sposobu liczenia stopy wypłaty dywidendy.....	188

Robert Kurek: Systemy informacyjne nadzoru ubezpieczeniowego.....	203
Agnieszka Majewska: Porównanie strategii zabezpieczających portfel akcji z wykorzystaniem kontraktów <i>futures</i> na WIG20 w okresach spadków i wzrostów cen	213
Tomasz Miziołek: Ocena efektywności zarządzania funduszami ETF posiadającymi ekspozycję na polski rynek akcji	224
Joanna Olbryś: Efekt przedziałowy parametru ryzyka systematycznego na GPW w Warszawie SA	236
Andrzej Paliński: Wykorzystanie wartości likwidacyjnej aktywów kredytobiorcy i metody Monte Carlo do wyznaczenia oprocentowania kredytu bankowego.....	245
Jarosław Pawłowski: Zarządzanie ryzykiem pogodowym – przykład wykorzystania pogodowego instrumentu pochodnego przez producenta piwa w Polsce.....	255
Dorota Pekasiewicz: Wybrane testy zgodności dotyczące rozkładów statystyk ekstremalnych i ich zastosowanie w analizach finansowych.....	268
Marcin Salamaga: Efektywność krótkoterminowych inwestycji w złoto	278
Anna Sroczyńska-Baron: Analiza wysokości progu oferty obowiązkowej przy przejściach spółek w oparciu o teorię gier kooperacyjnych	289
Waldemar Tarczyński: Ocena różnych wariantów fundamentalnego portfela papierów wartościowych	298
Magdalena Ulrichs: Zmiany strukturalne na polskim rynku finansowym a sfera realna gospodarki – analiza empiryczna	310
Stanisław Wanat: Efekt dywersyfikacji ryzyka w Solvency II w świetle wyników ilościowego badania wpływu QIS5	320
Ryszard Węgrzyn: Ocena trafności prognoz zmienności indeksu WIG20 konstruowanych na podstawie wybranych modeli klasy GARCH oraz rynkowej zmienności implikowanej.....	331
Stanisław Wieteska: Wybuch jako element ryzyka w ubezpieczeniach od ognia i innych zdarzeń losowych.....	344
Marcelina Więckowska: Obligacje w zarządzaniu ryzykiem katastroficznym	359
Piotr Wybieralski: Zastosowanie wybranych instrumentów pochodnych w warunkach ograniczonej dostępności limitów skarbowych na walutowym rynku pozagieldowym	371
Dariusz Zarzecki: Koszt kapitału, płynność i ryzyko – analiza sektorowa na rynku amerykańskim	383

Summaries

Waldemar Aspadarec: Investment performance of hedge funds after the financial crisis	22
Aleksandra Baszczyńska: Kernel method in the analysis of financial time series	31
Katarzyna Byrka-Kita, Mateusz Czerwiński, Agnieszka Perepeczo: Market reactions to transfer of control within block trades in public companies – empirical evidence	42
Katarzyna Byrka-Kita, Dominik Rozkrut: Risk as a determinant of control premium – empirical evidence.....	53
Iwona Chomiak-Orsa, Piotr Staszkiwicz: Zredukowana forma metody standardowej do oceny kapitału ekonomicznego	64
Tadeusz Czernik: Hysteretic-like effect – derivative pricing and implied volatility	74
Tadeusz Czernik, Daniel Iskra: Modified geometric Brownian motion – occupation time approach. Derivative pricing, implied volatility – simulations.....	87
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Pension funds performance in Poland – selected problems	100
Monika Hadaś-Dyduch: Valuation of structured product according to algorithmic interaction with regard to the financial market	110
Magdalena Homa: Effect of investment strategy for the distribution of the portfolio value in unit-linked insurance.....	121
Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa: Individualism in risk perception by farms in Poland and in the development of insurance products	136
Łukasz Jasiński: Product innovations in health insurances in Poland.....	148
Lidia Karbownik: Determinants of financial threat of the enterprises from transport, forwarding and logistic sector in Poland	164
Tomasz Karczyński, Edward Radosiński: Assessment of relation between global and Central Europe stock market trends on the example of the Warsaw Stock Exchange	176
Krzysztof Kowalke: Effectiveness of information on the Warsaw Stock Exchange	187
Mieczysław Kowerski: Some remarks on the calculation of the dividend payout ratio	202
Robert Kurek: Information systems of insurance supervision	212
Agnieszka Majewska: Comparison of hedging using futures on WIG20 in periods of price increases and decreases	223
Tomasz Miziolek: Evaluation of the effectiveness of management exchange-traded funds having exposure on the Polish equity market	235

Joanna Olbryś: Intervalling effect bias in beta: empirical results in the Warsaw Stock Exchange	244
Andrzej Paliński: Bank loan pricing with use the of the Monte Carlo method and the liquidation value of borrower's assets.....	254
Jarosław Pawłowski: Weather risk management – example of using weather derivative by a producer of beer in Poland	267
Dorota Pekasiewicz: Selected tests of goodness of extreme distributions and their application in financial analyses.....	277
Marcin Salamaga: The effectiveness of short-term investment in gold	288
Anna Sroczyńska-Baron: The analysis of the limit of obligatory offer based on the theory of cooperative games	297
Waldemar Tarczyński: Assessment of different variants of fundamental portfolio of securities	309
Magdalena Ulrichs: Structural changes on the Polish financial market and the real economy – an empirical analysis	319
Stanisław Wanat: The diversification effect in Solvency II in the light of the fifth quantitative impact study	330
Ryszard Węgrzyn: Assessment of the forecasts accuracy of the WIG20 index volatility constructed on the basis of selected models of the GARCH class and market implied volatility.....	343
Stanisław Wieteska: Explosion as an element of risk in insurance from fire and other random events.....	358
Marcelina Więckowska: Bonds for catastrophe risk management.....	370
Piotr Wybieralski: The application of selected currency derivatives in terms of constrained amounts of treasury limits in the OTC market.....	382
Dariusz Zarzecki: Cost of capital, liquidity and risk – sectoral analysis on the American capital market.....	411

Tadeusz Czernik

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

e-mail: tadeusz.czernik@ue.katowice.pl

EFEKT HISTEREZY – WYCENA OPCJI I IMPLIKOWANA ZMIENNOŚĆ

Streszczenie: W pracy zaprezentowano jeden z procesów stochastycznych należący do nowej klasy procesów histeretycznych. Atrakcyjną własnością wprowadzonej klasy procesów jest fakt, iż histeretyczna modyfikacja standardowego procesu (w zaprezentowanej postaci) nie wprowadza dodatkowego czynnika losowego. W omówionym przypadku wydaje się, że rodzina powierzchni implikowanej zmienności jest na tyle bogata, że możliwe będzie jej praktyczne wykorzystanie.

Słowa kluczowe: instrumenty pochodne, wycena, histereza, implikowana zmienność.

DOI: 10.15611/pn.2014.371.06

1. Wstęp

Badania empiryczne prowadzone przed Czarnym Poniedziałkiem 19 października 1987 r. nie wykazywały istotnych odstępstw założeń teoretycznych modelu Blacka–Scholesa (stała wartość implikowanej zmienności) [Black, Scholes 1973] od realiów rynkowych. Począwszy od tej daty, obserwowana jest zależność implikowanej zmienności zarówno od ceny wykonania, jak i czasu do wykonania. Wydarzenia te zapoczątkowały nowy kierunek badań: modelowanie implikowanej zmienności. Zdaniem autora mamy tutaj do czynienia z sytuacją paradoksalną: modelowana jest wielkość, która wynika z błędnego założenia. Należy bowiem pamiętać, iż implikowana zmienność (rozumiana jako rozwiązanie równania: cena teoretyczna obliczona z modelu Blacka–Scholesa = cena empiryczna) jest niczym innym, jak niewłaściwą wartością, która po podstawieniu do nieadekwatnego modelu da w rezultacie poprawną cenę. Oznacza to, że modelowana jest wielkość wywodząca się z błędnego założenia stałej wartości zmienności σ . Bardziej poprawne byłoby położenie nacisku na zgodność cen teoretycznych i empirycznych, a nie na odwzorowanie empirycznej powierzchni implikowanej zmienności. Własność odwzorowywania powierzchni implikowanej zmienności powinna być jedynie (o ile w ogóle) skutkiem ubocznym

przeprowadzonego rozumowania skutkującego realistycznym modelem wyceny. W dziedzinie badań implikowanej zmienności wyróżnić można cztery główne nurty: modele lokalnej zmienności, modele stochastycznej zmienności, modele skokowo-dyfuzyjne [Ekstrand 2011; Zhu 2010], oraz parametryczne bądź nieparametryczne modele powierzchni implikowanej zmienności [Homescu 2011]. Ostatnia z nich, pomimo potencjału objaśniającego, ma charakter *stricte* symptomatyczny.

Jednakże mimo przedstawionej wyżej logicznej luki implikowana zmienność posiada ugruntowaną pozycję w praktyce i nauce. Biorąc pod uwagę powyższe, autor pracy zaprezentuje nową klasę modeli dynamiki cen instrumentów bazowych opartą na mechanizmie histerezy. Wykaże także, iż zaproponowany model posiada bogatą rodzinę powierzchni implikowanej zmienności i tym samym potencjał aplikacyjny (sic).

2. Model dynamiki cen akcji – efekt histerezy

Klasycznym modelem ewolucji cen instrumentów bazowych jest geometryczny ruch Browna [Hull 2009]:

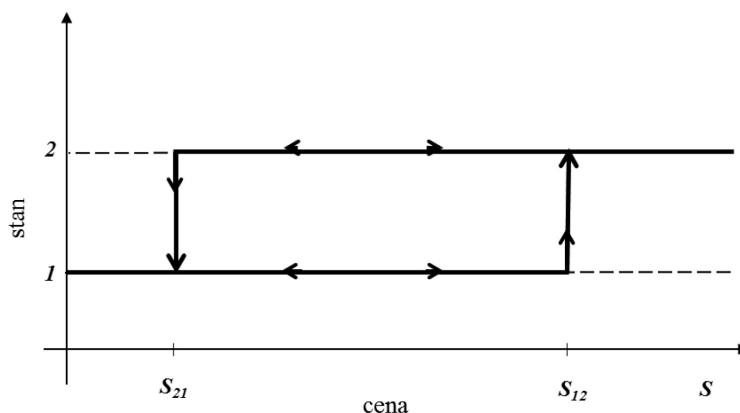
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1)$$

gdzie: S_t – cena akcji w chwili t ; μ – współczynnik dryfu (analogon intensywności oprocentowania w kapitalizacji ciągłej); σ – zmienność; W_t – proces Wienera.

Można wykazać, że w przypadku gdy cena instrumentu bazowego ewoluuje zgodnie z równaniem (1), powierzchnia implikowanej zmienności powinna być płaska. Jak już wspomniano wyżej (patrz też: [Hull 2009]) badania empiryczne wskazują na istotną zależność implikowanej zmienności od ceny wykonania i czasu do daty wykonania (efekt uśmiechu zmienności).

W literaturze przedmiotu występuje wiele modeli odzwierciedlających efekt uśmiechu zmienności [Hull, White 1987; Heath, Platen 2002; Merton 1976, Fengler 2012]. Jak zostanie to pokazane w dalszej części, zaproponowany przez autora model dynamiki cen, mimo że można go zaliczyć do rodziny modeli przełącznikowych [Mao, Yuan 2006], zachowuje własność zupełności rynku.

Rozważony w dalszej części pracy model opiera się na efekcie histerezy. Rysunek 1. przedstawia schemat przełączania pomiędzy stanami „1” i „2”, w których cena jest geometrycznym ruchem Browna. Przejście ze stanu „1” do stanu „2” nastąpi z prawdopodobieństwem 1, jeżeli tylko cena akcji będzie równa S_{12} (indeks „12” oznacza, że w danym punkcie nastąpi przejście ze stanu „1” do stanu „2”; znaczenie indeksu „21” jest analogiczne). Natomiast jeżeli układ jest w stanie „2”, przejście do stanu „1” nastąpi z prawdopodobieństwem 1, gdy cena akcji będzie równa S_{21} . Warto podkreślić, że układ nie może być w stanie „1” z ceną akcji większą lub równą S_{12} . Analogicznie, układ nie może być w stanie „2” z ceną akcji mniejszą lub równą S_{21} (w każdym ze stanów realizację procesu cen są ciągle z prawdopodobieństwem 1).



Rys. 1. Efekt histerezy

Źródło: opracowanie własne.

Równanie ewolucji ceny ma w tym przypadku postać:

$$dS_t = [\mu_i + \zeta_t(\mu_2 - \mu_1)]S_t dt + [\sigma_i + \zeta_t(\sigma_2 - \sigma_1)]S_t dW_t, \quad (2)$$

gdzie: $i \in \{1, 2\}$ – stany rynku; μ_i – dryf w i -tym stanie; σ_i – zmienność i -tym stanie; $\zeta_t = 0$ jeżeli układ jest w stanie „1”; $\zeta_t = 1$ jeżeli układ jest w stanie „2”.

Równanie stochastyczne (2) musimy uzupełnić o warunek początkowy (S_0, ζ_0) , gdzie S_0 jest aktualną ceną akcji a ζ_0 aktualnym stanem układu. Łatwo można zauważyć, że proces cen akcji nie jest procesem Markowa, natomiast dwuwymiarowy proces (S_t, ζ_t) jest procesem Markowa. Wydawać by się mogło, że rynek w rozpatrywanym modelu nie jest zupełny, ponieważ moment czasu, w którym następuje zmiana stanu, jest losowy (rozpatrywane w literaturze modele przełącznikowe skutkują niezupełnością rynku). Jednakże zaprezentowany model nie wprowadza dodatkowego procesu przeskoku pomiędzy stanami. Zmiany stanu są całkowicie determinowane ceną akcji S_t : zmiana stanu nastąpi z prawdopodobieństwem jeden, jeżeli tylko spełnione są odpowiednie warunki (patrz wyżej) i z prawdopodobieństwem zero w pozostałych przypadkach. Zaproponowany przez autora model można traktować jako graniczny przypadek klasycznego modelu przełącznikowego (*Markov switching models*) z niejednorodną w przestrzeni cen intensywnością zmiany stanu:

$$\lambda_{12}(S) = \lim_{\lambda' \rightarrow +\infty} \lambda' 1_{S \geq S_{12}} \quad (3)$$

$$\lambda_{21}(S) = \lim_{\lambda' \rightarrow +\infty} \lambda' 1_{S \leq S_{21}}. \quad (4)$$

Dla każdej skończonej wartości λ' model rynku jest niepełny. Przypadek graniczny ($\lambda' \rightarrow +\infty$) opisuje hysteretyczny mechanizm przełączania i skutkuje zupełnością rynku. Podobnie w przypadku przełącznikowego procesu Markowa z jednorodną intensywnością przejścia, graniczny przypadek $\lambda_{12}, \lambda_{21} \rightarrow +\infty$ opisuje mieszaninę geometrycznych ruchów Browna oraz skutkuje zupełnością rynku.

Warto również zauważyć, że w przypadku gdy $S_{12} = S_{21} = S'$ otrzymujemy model o nieciągłej zmienności:

$$\sigma(S) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{gdy } S \leq S' \\ \sigma_2 & \text{gdy } S > S' \end{cases}, \quad (5)$$

gdzie S' jest punktem nieciągłości (może być także punktem nieciągłości współczynnika dryfu). W punkcie S' możemy założyć, że zmienność jest lewo- lub prawostronnie ciągła. W powyższym przypadku (5) zaproponowany model należy zaliczyć do modeli z lokalną zmiennością. Ponadto, dobierając odpowiednio parametry równania (2), można otrzymać proces losowy powracający do średniej. Własność ta sprawia, iż zaproponowany model stanowi atrakcyjną alternatywę dla klasycznych modeli struktury terminowej stóp procentowych [Andersen, Piterbarg 2010]. Należy również podkreślić, że model z histerezą stanowi uogólnienie modeli z rodziny typu Threshold.

Dyskusji wymaga również kwestia istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania (2). Proces będący rozwiązaniem równania (2) jest geometrycznym ruchem Browna do momentu osiągnięcia punktu zmiany stanu (moment zatrzymania, *stopping time*). Następnie proces startuje w nowym stanie z ceną równą cenie, dla której nastąpiła zmiana stanu, i ponownie jest geometrycznym ruchem Browna do kolejnego momentu zatrzymania, itd. Stąd można wywnioskować, że równanie (2) posiada silne i jednoznaczne rozwiązanie (uporządkowany ciąg rozwiązań).

Analogicznych rozważań nie można zastosować w odniesieniu do równania z nieciągłą zmiennością (5). W modelu tym przełączanie między stanami (*stopping times*) występują z nieskończoną częstością. Ponadto klasyczne twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych [Oksendal 2010] nie mają tu zastosowania, gdyż współczynniki równania nie są lipschitzowskie. W pracy [Krylov 1969] wykazano, że jeżeli współczynniki równania są ograniczone i współczynnik zmienności jest większy od zera, to równanie posiada jedynie słabe rozwiązanie.

3. Wycena opcji – implikowana zmienność

Problem wyceny instrumentów pochodnych na hysteretycznych rynkach nie był do tej pory rozważany w literaturze przedmiotu. W rozwiązaniu zagadnienia wyceny

wykorzystamy własność zupełności rynku. W tym przypadku (czynimy standardowe założenie o istnieniu instrumentu pozbawionego ryzyka o stopie oprocentowania r) istnieje jedyna martyngałowa miara, dla której cena opcji dana jest wzorem (ograniczamy się do wyceny waniliowych opcji europejskich):

$$V = e^{-rt} E^* [Payoff(S_t, K)], \quad (6)$$

gdzie: V – wartość opcji; t – czas do wykonania; K – cena wykonania; $Payoff(S_t, K)$ – wypłata z opcji; E^* – symbol wartości oczekiwanej w świecie neutralnym wobec ryzyka (w celu obliczenia wartości oczekiwanej stosujemy miarę martyngałową).

Należy podkreślić, że stochastyczne równanie różniczkowe (2) posiada nieeksplozywne rozwiązanie. Stąd wynika poprawność wzoru (6) na wycenę instrumentu pochodnego [Lewis 2000; Sin 1998].

Zastosowaną we wzorze (6) miarę martyngałową (jądro wyceny) możemy otrzymać, rozwiązując odpowiedni układ cząstkowych równań różniczkowych. Zagadnienie to nie było rozpatrywane do tej pory w literaturze. Innym podejściem jest zastosowanie metod numerycznego rozwiązywania równania:

$$dS_t = rS_t dt + [\sigma_1 + \zeta_t(\sigma_2 - \sigma_1)] S_t dW_t^*, \quad (7)$$

gdzie: r – stopa oprocentowania instrumentu wolnego od ryzyka; W_t^* – proces Wienera względem miary neutralnej wobec ryzyka.

Kolejnym podejściem jest uogólnienie równania Blacka–Scholesa. Problem uogólnienia równania Blacka–Scholesa oraz wyprowadzenie i rozwiązanie odpowiedniego układu równań na jądro wyceny będzie stanowiło tematykę dalszych badań autora. W pracy zastosowano jedynie symulacyjne techniki wyceny opcji.

W celu oszacowania rozwiązania równania (7) zastosowano algorytm Eulera–Maruyamy [Platen, Bruti-Liberati 2010]. Ponadto zastosowano jedną z technik redukcji wariancji (metodę zmiennej kontrolnej) [Kroese et al. 2011]:

$$\widehat{V}_{sym} = \frac{e^{-rt}}{N} \sum_{i=1}^N [Payoff(S_{t_i}, K) + a(S_{t_i} - S_0 e^{rt})]. \quad (8)$$

Współczynnik a dobrano w taki sposób, aby wariancja estymatora ceny opcji \widehat{V} była minimalna:

$$a = -\frac{\text{cov}(Payoff, S_t)}{D^2(S_t)}. \quad (9)$$

Ponieważ nie dysponujemy wartościami teoretycznymi kowariancji wypłaty z opcji i ceny akcji oraz wariancji ceny akcji w dniu wykonania opcji, zastąpiono je wartościami oszacowanymi na podstawie wstępnej próby. W zależności od wartości

parametrów modelu odchylenie standardowe estymatora zostało zredukowano od kilku do kilkunastu razy. W przeprowadzonych symulacjach założono następujące parametry modelu:

$S_0 = 1$ – początkowa cena akcji (w tym przypadku cenę wykonania można rozumieć jako *moneyness* K / S_0),

$r = 0.1$ – stopa wolna od ryzyka,

$\Delta t^* = T/4000$ – długość odcinka czasu dyskretyzacji stochastycznego równania różniczkowego (7); T jest czasem do wykonania opcji.

W pracy nie przedstawiono rezultatów wyceny, gdyż głównym celem pracy jest modelowanie powierzchni implikowanej zmienności. Ponadto ograniczono się do implikowanej zmienności obliczanej na podstawie oszacowanej symulacyjnie ceny europejskiej opcji kupna.

Implikowana zmienność jest rozwiązaniem równania:

$$V_{BS} = \hat{V}_{sym} \quad (10)$$

gdzie: \hat{V}_{sym} – otrzymane drogą symulacji oszacowanie ceny opcji *call*,

$V_{BS} = N(d_1)S_0 - Ke^{-rt}N(d_2)$ – teoretyczna cena opcji *call* w modelu Blacka–Scholesa,

$N(x)$ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_{imp}^2\right)t}{\sigma_{imp}\sqrt{t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{imp}\sqrt{t}.$$

Ponadto, stosując aproksymację delta [Casella, Berger 2001], oszacowano błąd estymatora implikowanej zmienności (oszacowanie nie uwzględnia błędów numerycznych zastosowanej procedury do rozwiązywania równania (10); w znaczącej liczbie przypadków błędy te są znacznie mniejsze od błędów statystycznych):

$$S_{\sigma_{imp}} \approx \frac{S_{\hat{V}_{sym}}}{\frac{\partial V_{BS}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma_{imp}}} = \frac{S_{\hat{V}_{sym}}}{Vega \Big|_{\sigma_{imp}}} \quad (11)$$

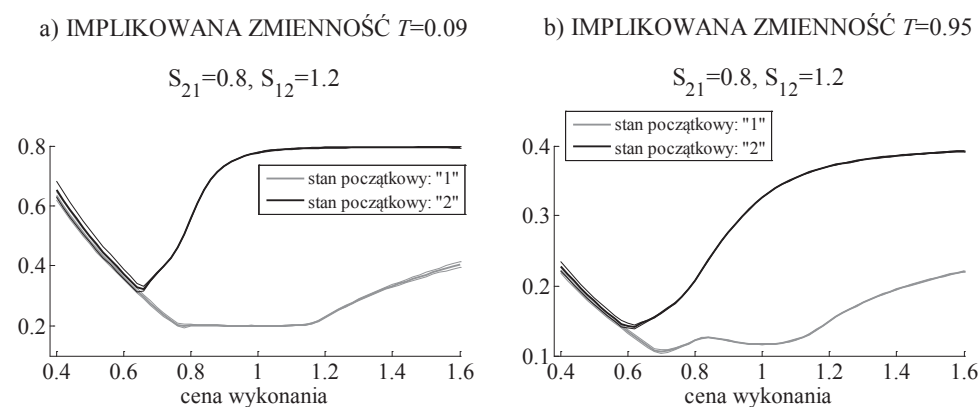
gdzie: $S_{\sigma_{imp}}$ – błąd oszacowania implikowanej zmienności; $S_{\hat{V}_{sym}}$ – błąd oszacowania ceny opcji *call*.

W mianowniku powyższego wyrażenia nie występuje symbol wartości bezwzględnej, gdyż *Vega* opcji *call* jest dodatnia.

4. Dyskusja wyników

Z uwagi na ograniczoną objętość pracy zaprezentowane zostaną wyniki jedynie dla wybranych kombinacji zbioru parametrów. Ceny opcji szacowane były na podstawie 400 000 wygenerowanych realizacji.

Rysunek 2. przedstawia krzywe implikowanej zmienności w zależności zarówno od ceny wykonania, jak i od stanu początkowego. Ponadto naniesiono uproszczone przedziałowe oszacowanie ceny opcji $\sigma_{imp} \pm S_{\sigma_{imp}}$, jednak z uwagi na niewielkie wartości błędu $S_{\sigma_{imp}}$ trzy linie: oszacowanie punktowe oraz granice przedziału są praktycznie nierozróżnialne.



Rys. 2. Przykłady krzywej implikowanej zmienności. W części „a” zmienność w stanach „1” i „2” wynosiła odpowiednio 0.2 i 0.8. W przypadku „b”: 0.1 i 0.4

Źródło: opracowanie własne.

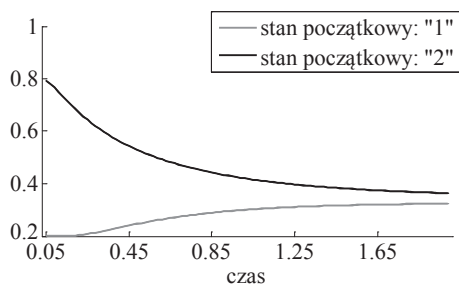
Z rysunku 2. wynika, że krzywa implikowanej zmienności nie jest płaska – jest niemonotoniczną funkcją ceny wykonania. Ponadto różnica pomiędzy stanami „1” i „2” jest bardzo wyraźna. Jedynie w przypadku opcji *in-the-money* różnica ta ulega zatarciu. Kształt krzywych implikowanej zmienności przypomina literę U (efekt ten byłby lepiej widoczny w przypadku cen wykonania wyrażonych w skali logarytmicznej). Podobne krzywe implikowanej zmienności są obserwowane na rynkach instrumentów pochodnych.

Rysunek 3. przedstawia zależność implikowanej od czasu do wykonania. Podobnie jak wyżej naniesiono granice oszacowania przedziałowego. Z rysunku 3. wynika, że rodzina krzywych implikowanej zmienności odtwarzanych przez zaproponowany model jest bogata. Obserwujemy dodatnią, ujemną, jak również niemonotoniczną zależność implikowanej zmienności od czasu do wykonania.

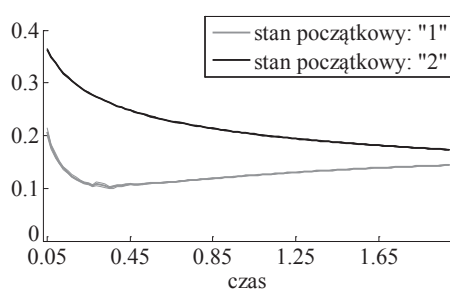
Rysunek 4. przedstawia dwuwymiarową zależność (powierzchnię implikowanej zmienności) implikowanej zmienności od ceny wykonania i czasu do wykonania.

a) IMPLIKOWANA ZMIENNOŚĆ $K = 0.96$

$$S_{21} = 0.8, S_{12} = 1.2$$

b) IMPLIKOWANA ZMIENNOŚĆ $K = 0.8$

$$S_{21} = 0.8, S_{12} = 1.2$$

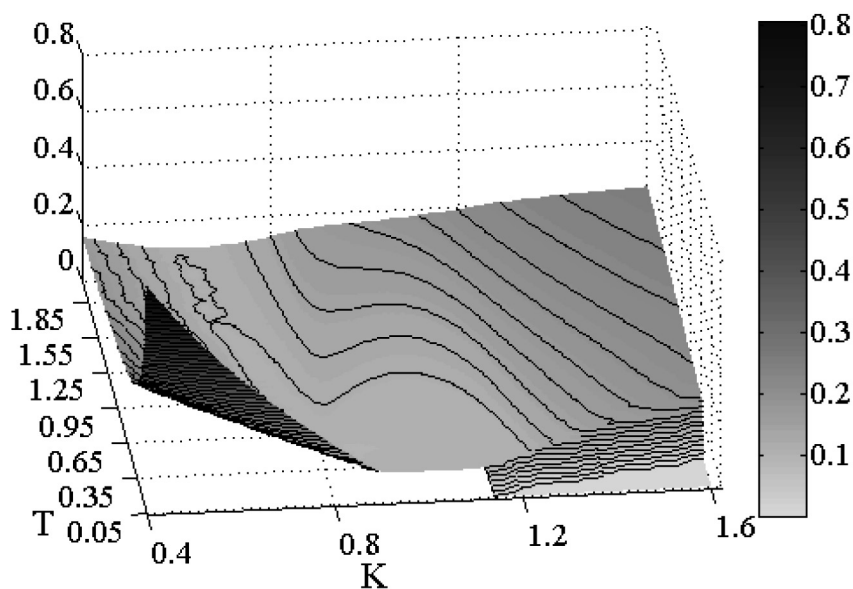


Rys. 3. Przykłady krzywej implikowanej zmienności. W części „a” zmienność w stanach „1” i „2” wynosiła odpowiednio 0.2 i 0.8. W przypadku „b”: 0.1 i 0.4

Źródło: opracowanie własne.

Zmienność w stanach „1” i „2” wynosi odpowiednio 0.1 i 0.4.

Stan początkowy: „1”.



Rys. 4. Powierzchnia implikowanej zmienności

Źródło: opracowanie własne.

Obserwując kształt poziomic, możemy zauważyć, że kształt powierzchni implikowanej zmienności jest dość skomplikowany. W pewnym zakresie czasu do wykonania kształt krzywej implikowanej zmienności przypomina literę U z jednym minimum, w innym z dwoma minimami lokalnymi (patrz też rys. 2b). W przypadku bardzo krótkich czasów do wykonania wydaje się, że implikowana zmienność jest malejącą funkcją ceny wykonania. Ponieważ w krótkim horyzoncie czasu prawdopodobieństwo przekroczenia ceny wykonania większej od 1.2 jest mało prawdopodobne, należy ostrożnie podchodzić do interpretacji wyniku. Zasadne byłoby zwiększenie liczby generowanych realizacji lub/i zastosowanie technik redukcji wariancji dla przypadku zdarzeń rzadkich (*rare event*) [Bucklew 2004]. Podobnie w pewnych zakresach ceny wykonania krzywa implikowanej zmienności może być malejącą, rosnącą i niemonotoniczną funkcją czasu do wykonania. Z uwagi na ograniczoną objętość nie prezentujemy innych kształtów powierzchni implikowanej zmienności.

Z powyższego wynika, że rodzina powierzchni implikowanej zmienności generowana przez zaproponowany model jest na tyle bogata, że potencjalnie może pozwolić na praktyczne zastosowanie nowej klasy procesów stochastycznych w modelowaniu instrumentów pochodnych.

5. Podsumowanie

W pracy zaprezentowano jeden z procesów stochastycznych należący do nowej klasy procesów hysteretycznych. Atrakcyjną własnością wprowadzonej klasy procesów jest fakt, iż hysteretyczna modyfikacja standardowego procesu (w zaprezentowanej postaci) nie wprowadza dodatkowego czynnika losowego. W omówionym przypadku wydaje się, że rodzina powierzchni implikowanej zmienności jest na tyle bogata, że możliwe będzie jej praktyczne wykorzystanie. Wymaga to jednak dalszych badań. Należy także podkreślić, że procesy z hysteretyczną modyfikacją mogą być również wykorzystane w procesie zarządzania ryzykiem (analiza portfelowa, strukturalne modele ryzyka kredytowego etc.).

Literatura

- Andersen L.B.G., Piterbarg V.V., *Interest rate modeling*, Atlantic Financial Press 2010, vol. I-III.
- Black F., Scholes M., 1973, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, no. 81 (3), p. 637-654.
- Bucklew J., 2004, *Introduction to rare event simulation*, Springer, New York.
- Casella G., Berger R.L., 2001, *Statistical inference*, Cengage Learning, New Delhi.
- Ekstrand Ch., 2011, *Financial derivatives modeling*, Springer, Berlin.
- Fengler M.R., 2012, *Option data and modeling BSM implied volatility*, [w:] *In Handbook of computational finance*, Springer, Berlin.
- Heath D., Platen E., 2002, *Consistent pricing and hedging for a modified constant elasticity of variance model*, Quantitative Finance, vol. 2, issue 6, p. 459-467.

- Homescu C., 2011, *Implied Volatility Surface: Construction Methodologies and Characteristics*, <http://arxiv.org/pdf/1107.1834.pdf>.
- Hull J.C., 2009, *Options, futures and other derivatives*, Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- Hull J., White A., 1987, *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, *The Journal of Finance*, June, no. 42 (2), p. 281–300.
- Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I., 2011, *Handbook of Monte Carlo methods*, Wiley, New Jersey.
- Krylov N.V., 1969, *On Ito's stochastic differential equation*, *Theory of Probability and Its Applications*, vol. 14, no. 2, p. 330-336.
- Lewis A.L., 2000, *Option valuation under stochastic volatility. With Mathematica code*, Finance Press.
- Mao X., Yuan Ch., 2006, *Stochastic differential equations with markovian switching*, Imperial College Press, London.
- Merton R.C., 1973, *Theory of Rational Option Pricing*, *Bell Journal of Economics and Management Science*, no. 4 (1), p. 141-183.
- Merton R.C., 1976, *Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous*, *Journal of Financial Economics*, no. 3, p. 125-144.
- Oksendal B., 2010, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer.
- Platen E., Bruti-Liberati N., 2010, *Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance*, Springer.
- Sin C., 1998, *Complications with stochastic volatility models*, *Advances in Applied Probability*, vol. 30, no. 1, p. 256-268.
- Zhu J., 2010, *Applications of Fourier transform to smile modeling. Theory and implementation*, Springer, Berlin.

HYSTERETIC-LIKE EFFECT – DERIVATIVE PRICING AND IMPLIED VOLATILITY

Summary: The paper presents one of the stochastic processes belonging to a new class of hysteretic-like processes. An attractive property of the class of processes introduced is that the hysteretic modification of the standard process does not introduce additional random factor. This results in the market completeness. It also allows to mimic a wealthy family of implied volatility surfaces.

Keywords: derivative instruments, pricing, hysteresis, implied volatility.