

PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 371

**Inwestycje finansowe i ubezpieczenia –
tendencje światowe a rynek polski**

Redaktorzy naukowci

Krzysztof Jajuga

Wanda Ronka-Chmielowiec



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2014

Redakcja wydawnicza: Jadwiga Marcinek
Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz
Korekta: Barbara Cibis
Łamanie: Małgorzata Czupryńska
Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronie internetowej Wydawnictwa
www.pracnaukowe.ue.wroc.pl
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2014

ISSN 1899-3192
ISBN 978-83-7695-411-0

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
tel./fax 71 36 80 602; e-mail: econbook@ue.wroc.pl
www.ksiegarnia.ue.wroc.pl

Druk i oprawa: TOTEM

Spis treści

Wstęp	9
Waldemar Aspadarec: Wyniki inwestycyjne funduszy hedge po doświadczeniach kryzysu finansowego	11
Aleksandra Baszczyńska: Metoda jądrowa w analizie finansowych szeregów czasowych.....	23
Katarzyna Byrka-Kita, Mateusz Czerwiński, Agnieszka Perepeczo: Reakcja akcjonariuszy na sprzedaż znaczących pakietów akcji.....	32
Katarzyna Byrka-Kita, Dominik Rozkrut: Ryzyko jako determinanta premii z tytułu kontroli – empiryczna weryfikacja.....	43
Iwona Chomiak-Orsa, Piotr Staszkiwicz: Reduced form of the standard approach for operational risk for economic capital assessment	54
Tadeusz Czernik: Efekt histerezy – wycena opcji i implikowana zmienność	65
Tadeusz Czernik, Daniel Iskra: Modyfikacja geometrycznego ruchu Browna oparta na czasie przebywania. Wycena instrumentów pochodnych, implikowana zmienność – badania symulacyjne.....	75
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Efektywność inwestycji funduszy emerytalnych w Polsce – wybrane problemy.....	88
Monika Hadaś-Dyduch: Produkty strukturyzowane – ujęcie algorytmiczne zysku z uwzględnieniem oddziaływania wskaźników rynku finansowego	101
Magdalena Homa: Wpływ strategii inwestycyjnej ubezpieczonego na rozkład wartości portfela ubezpieczeniowego w UFK.....	112
Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa: Kształtowanie indeksowych ubezpieczeń upraw oparte na indywidualizmie w postrzeganiu ryzyka przez gospodarstwa rolne w Polsce	123
Łukasz Jasiński: Innowacje produktowe w ubezpieczeniach zdrowotnych w Polsce.....	137
Lidia Karbownik: Determinanty zagrożenia finansowego przedsiębiorstw sektora TSL w Polsce.....	149
Tomasz Karczyński, Edward Radośniński: Ocena relacji pomiędzy trendami giełd światowych a trendami giełd Europy Środkowowschodniej na przykładzie warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych	165
Krzysztof Kowalke: Efektywność informacyjna Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie	177
Mieczysław Kowerski: Uwagi dotyczące sposobu liczenia stopy wypłaty dywidendy.....	188

Robert Kurek: Systemy informacyjne nadzoru ubezpieczeniowego.....	203
Agnieszka Majewska: Porównanie strategii zabezpieczających portfel akcji z wykorzystaniem kontraktów <i>futures</i> na WIG20 w okresach spadków i wzrostów cen	213
Tomasz Miziołek: Ocena efektywności zarządzania funduszami ETF posiadającymi ekspozycję na polski rynek akcji	224
Joanna Olbryś: Efekt przedziałowy parametru ryzyka systematycznego na GPW w Warszawie SA	236
Andrzej Paliński: Wykorzystanie wartości likwidacyjnej aktywów kredytobiorcy i metody Monte Carlo do wyznaczenia oprocentowania kredytu bankowego.....	245
Jarosław Pawłowski: Zarządzanie ryzykiem pogodowym – przykład wykorzystania pogodowego instrumentu pochodnego przez producenta piwa w Polsce.....	255
Dorota Pekasiewicz: Wybrane testy zgodności dotyczące rozkładów statystyk ekstremalnych i ich zastosowanie w analizach finansowych.....	268
Marcin Salamaga: Efektywność krótkoterminowych inwestycji w złoto	278
Anna Sroczyńska-Baron: Analiza wysokości progu oferty obowiązkowej przy przejściach spółek w oparciu o teorię gier kooperacyjnych	289
Waldemar Tarczyński: Ocena różnych wariantów fundamentalnego portfela papierów wartościowych	298
Magdalena Ulrichs: Zmiany strukturalne na polskim rynku finansowym a sfera realna gospodarki – analiza empiryczna	310
Stanisław Wanat: Efekt dywersyfikacji ryzyka w Solvency II w świetle wyników ilościowego badania wpływu QIS5	320
Ryszard Węgrzyn: Ocena trafności prognoz zmienności indeksu WIG20 konstruowanych na podstawie wybranych modeli klasy GARCH oraz rynkowej zmienności implikowanej.....	331
Stanisław Wieteska: Wybuch jako element ryzyka w ubezpieczeniach od ognia i innych zdarzeń losowych.....	344
Marcelina Więckowska: Obligacje w zarządzaniu ryzykiem katastroficznym	359
Piotr Wybieralski: Zastosowanie wybranych instrumentów pochodnych w warunkach ograniczonej dostępności limitów skarbowych na walutowym rynku pozagieldowym	371
Dariusz Zarzecki: Koszt kapitału, płynność i ryzyko – analiza sektorowa na rynku amerykańskim	383

Summaries

Waldemar Aspadarec: Investment performance of hedge funds after the financial crisis	22
Aleksandra Baszczyńska: Kernel method in the analysis of financial time series	31
Katarzyna Byrka-Kita, Mateusz Czerwiński, Agnieszka Perepeczo: Market reactions to transfer of control within block trades in public companies – empirical evidence	42
Katarzyna Byrka-Kita, Dominik Rozkrut: Risk as a determinant of control premium – empirical evidence.....	53
Iwona Chomiak-Orsa, Piotr Staszkiwicz: Zredukowana forma metody standardowej do oceny kapitału ekonomicznego	64
Tadeusz Czernik: Hysteretic-like effect – derivative pricing and implied volatility	74
Tadeusz Czernik, Daniel Iskra: Modified geometric Brownian motion – occupation time approach. Derivative pricing, implied volatility – simulations.....	87
Magdalena Frasyniuk-Pietrzyk, Radosław Pietrzyk: Pension funds performance in Poland – selected problems	100
Monika Hadaś-Dyduch: Valuation of structured product according to algorithmic interaction with regard to the financial market	110
Magdalena Homa: Effect of investment strategy for the distribution of the portfolio value in unit-linked insurance.....	121
Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa: Individualism in risk perception by farms in Poland and in the development of insurance products	136
Łukasz Jasiński: Product innovations in health insurances in Poland.....	148
Lidia Karbownik: Determinants of financial threat of the enterprises from transport, forwarding and logistic sector in Poland	164
Tomasz Karczyński, Edward Radościński: Assessment of relation between global and Central Europe stock market trends on the example of the Warsaw Stock Exchange	176
Krzysztof Kowalke: Effectiveness of information on the Warsaw Stock Exchange	187
Mieczysław Kowerski: Some remarks on the calculation of the dividend payout ratio	202
Robert Kurek: Information systems of insurance supervision	212
Agnieszka Majewska: Comparison of hedging using futures on WIG20 in periods of price increases and decreases	223
Tomasz Miziolek: Evaluation of the effectiveness of management exchange-traded funds having exposure on the Polish equity market	235

Joanna Olbryś: Intervalling effect bias in beta: empirical results in the Warsaw Stock Exchange	244
Andrzej Paliński: Bank loan pricing with use the of the Monte Carlo method and the liquidation value of borrower's assets.....	254
Jarosław Pawłowski: Weather risk management – example of using weather derivative by a producer of beer in Poland	267
Dorota Pekasiewicz: Selected tests of goodness of extreme distributions and their application in financial analyses.....	277
Marcin Salamaga: The effectiveness of short-term investment in gold	288
Anna Sroczyńska-Baron: The analysis of the limit of obligatory offer based on the theory of cooperative games	297
Waldemar Tarczyński: Assessment of different variants of fundamental portfolio of securities.....	309
Magdalena Ulrichs: Structural changes on the Polish financial market and the real economy – an empirical analysis	319
Stanisław Wanat: The diversification effect in Solvency II in the light of the fifth quantitative impact study	330
Ryszard Węgrzyn: Assessment of the forecasts accuracy of the WIG20 index volatility constructed on the basis of selected models of the GARCH class and market implied volatility.....	343
Stanisław Wieteska: Explosion as an element of risk in insurance from fire and other random events.....	358
Marcelina Więckowska: Bonds for catastrophe risk management.....	370
Piotr Wybieralski: The application of selected currency derivatives in terms of constrained amounts of treasury limits in the OTC market.....	382
Dariusz Zarzecki: Cost of capital, liquidity and risk – sectoral analysis on the American capital market.....	411

Tadeusz Czernik, Daniel Iskra

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

e-mails: tadeusz.czernik@ue.katowice.pl; daniel.iskra@ue.katowice.pl

MODYFIKACJA GEOMETRYCZNEGO RUCHU BROWNA OPARTA NA CZASIE PRZEBYWANIA. WYCENA INSTRUMENTÓW POCHODNYCH, IMPLIKOWANA ZMIENNOŚĆ – BADANIA SYMULACYJNE

Streszczenie: W pracy zaprezentowano nowy model ewolucji cen akcji. Wykorzystuje on funkcjonały geometrycznego ruchu Browna oparte na okienkowym czasie przebywania. Model ten zachowuje zupełność rynku oraz wprowadza zależność ceny derywatu i tym samym implikowanej zmienności od historycznych cen akcji. Ponadto pozwala na odtworzenie bogatej rodziny powierzchni implikowanej zmienności.

Słowa kluczowe: instrumenty pochodne, wycena, implikowana zmienność, procesy stochastyczne.

DOI: 10.15611/pn.2014.371.07

1. Wstęp

Problematyka wyceny instrumentów pochodnych należy do dynamicznie rozwijającego się działu zajmującego się rynkami kapitałowymi. Przełomowe prace Blacka i Scholesa [1973] oraz Mertona [1973] wytyczyły kierunek badań w następnych dziesięcioleciach. Jedno z głównych założeń pierwszych modeli wyceny to stała wartość zmienności σ w geometrycznym ruchu Browna. Do roku 1987 nie obserwowano istotnego odstępstwa od powyższego założenia, jednak począwszy od gwałtownych spadków 19 października 1987 (Czarny Poniedziałek) uśmiech zmienności (*volatilitysmile*) stał się wyraźnie widoczny.

Wspomniane wyżej wydarzenia zapoczątkowały intensywne badania nad modelami wyceny, których pożądaną cechą jest odwzorowanie powierzchni implikowanej zmienności. Poniższa praca przedstawia opartą na czasie przebywania modyfikację geometrycznego ruchu Browna, generującą nietrywialny kształt powierzchni implikowanej zmienności. Zaprezentowane rozważania mają charakter teoretyczny, a wprowadzone w symulacjach parametry zostały przyjęte w sposób arbitralny w celu

wyeksponowania własności powierzchni implikowanej zmienności. Problematyka kalibracji zaproponowanego modelu nie stanowi celu opracowania.

2. Model Blacka–Scholesa–Mertona

Problematyka wyceny instrumentów jest obecna w literaturze przedmiotu już od przeszło stu lat. Pierwsza praca poświęcona stochastycznemu modelowaniu cen akcji oraz wycenie opcji pochodzi z roku 1900 [Bachelier 1900]; jej autor modelował ceny akcji za pomocą arytmetycznego ruchu Browna. Black i Scholes [1973] i Merton [1973] w swych pracach modelowali ceny akcji przy użyciu geometrycznego ruchu Browna (wszystkie rozważane w pracy stochastyczne równania różniczkowe będą rozumiane w sensie Ito) [Oksendal 2010]:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1)$$

gdzie: S_t – cena akcji w chwili t ; μ – współczynnik dryfu (analogon intensywności oprocentowania w kapitalizacji ciągłej); σ – zmienność; W_t – proces Wienera.

Autorzy modelu BSM (Blacka–Scholesa–Mertona) korzystając z liniowej zależności infinitezmalnych przyrostów ceny akcji i instrumentu pochodnego, skonstruowali portfel pozbawiony ryzyka. Naturalną konsekwencją istnienia portfela pozbawionego ryzyka oraz założenia braku arbitrażu jest formuła wyceny europejskiego derywatu [Hull 2009]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (2)$$

gdzie V jest ceną instrumentu pochodnego.

Śród wielu założeń modelu BSM warto wymienić założenie $\sigma = const$ (dopuszcza się także deterministyczną zależność zmienności od czasu [Wilmott 2006]). Gdyby powyższe założenie było spełnione, rozwiązanie równania:

$$V_{BSM}(\sigma_{imp}) = V_{emp}, \quad (3)$$

gdzie: V_{BSM} – cena teoretyczna (rozwiązanie równania (2)); V_{emp} – rynkowa cena instrumentu pochodnego; σ_{imp} – implikowana zmienność,

ze względu na zmienność (zmienność implikowana) powinno być niezależne od ceny wykonania opcji oraz od czasu do wykonania. O ile do roku 1987 (Czarny Poniedziałek) rynek nie wykazywał istotnych odstępstw od powyższej własności, to po roku 1987 sytuacja zmieniła się diametralnie [Hull 2009]. Obecnie obserwuje się zależność implikowanej zmienności zarówno od ceny wykonania i czasu do wykonania, jak również rodzaju instrumentu pochodnego.

W literaturze przedmiotu funkcjonują cztery główne nurty modelowania zjawiska uśmiechu zmienności:

- modele stochastycznej zmienności [Hull, White 1987],
- modele lokalnej zmienności [Heath, Platen 2002],
- modele dyfuzyjno-skokowe [Merton 1976],
- parametryczne i nieparametryczne modele implikowanej zmienności [Fengler 2012].

W poniższej pracy zmienność jest zależna od historycznych cen akcji. Oryginalnym wkładem autorów jest wprowadzenie przełączania pomiędzy stanami, które determinowane jest wartością odsetka czasu przebywania ceny akcji w wybranym obszarze i odcinku czasu.

3. Czas przebywania

Czas przebywania (*occupation time*) $OT_t(A)$ procesu X_t w obszarze A_t definiowany jest następująco [Darling, Kac 1957; Czernik 2013; Bayraktar, Young 2010]:

$$OT_t(A) = \int_0^t 1_{A_s}(X_s) ds, \quad (4)$$

gdzie: $1_{A_t}(X_t) = \begin{cases} 1 & X_t \in A_t \\ 0 & X_t \notin A_t \end{cases}$ – funkcja charakterystyczna zbioru; A_t – obszar, dla

którego wyznaczamy czas przebywania procesu X_t ; kształt obszaru może być niezmienny lub zależeć od czasu (deterministycznie lub losowo).

Odsetek czasu przebywania (*relative occupation time*) definiujemy jako stosunek czasu przebywania do długości odcinka czasu:

$$ROT_t(A) = \frac{OT_t(A)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{A_s}(X_s) ds. \quad (5)$$

Warto podkreślić, że o ile czas przebywania jest niemalejącym procesem losowym, to odsetek czasu przebywania jest niemonotonicznym procesem losowym o wartości początkowej zależnej od tego, czy początkowa wartość procesu należy do obszaru A_t :

$$ROT_t(A) = \begin{cases} 0 & X_0 \notin A_0 \\ 1 & X_0 \in A_0 \end{cases}. \quad (6)$$

W poniższej pracy wykorzystano okienkowy odsetek czasu przebywania (*windowed relative occupation time*):

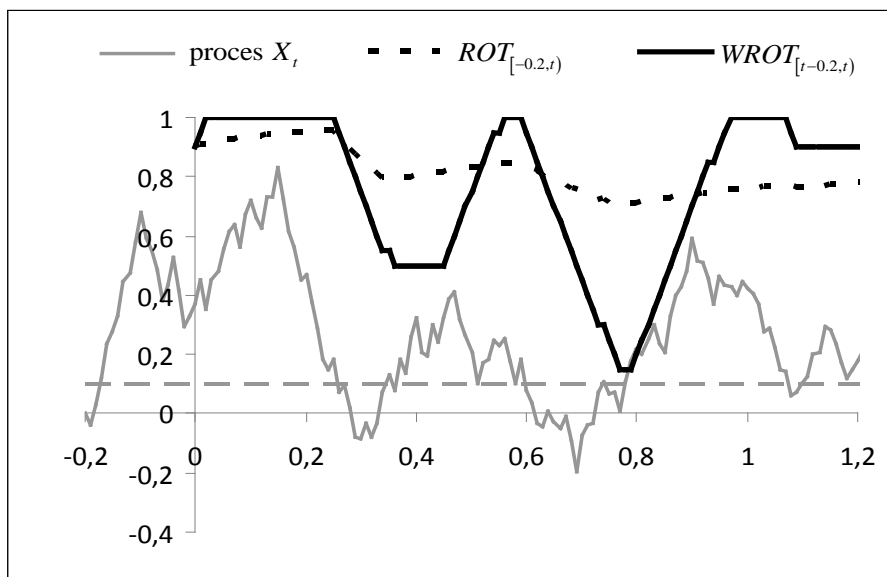
$$WROT_t(A) = \frac{WOT_t(A)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t 1_{A_t}(X_s) ds \in [0,1], \quad (7)$$

gdzie τ jest długością okna czasowego.

Stochastyczne równanie różniczkowe, którego rozwiązaniem jest okienkowy odsetek czasu przebywania, jest nieautonomicznym równaniem z opóźnionym współczynnikiem:

$$d[WROT_t(A)] = \frac{1}{\tau} (1_{A_t}(X_t) - 1_{A_{t-\tau}}(X_{t-\tau})) dt. \quad (8)$$

Z postaci równania (8) wynika, że okienkowy odsetek czasu przebywania (również okienkowy czas przebywania) nie jest proces Markowa. Ponadto warunek początkowy dla równania (8) musi zawierać historię procesu X_t w przedziale $[-\tau, 0]$.



Rys. 1. Przykładowa realizacja procesu X_t oraz jego wybranych funkcjonałów w obszarze

$$A_t \in [0,1, \infty)$$

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 1 przedstawia przykładowe realizacje procesu X_t , odsetka czasu przebywania ROT_t (naliczanie odsetka rozpoczęto od momentu $t = -0,2$) oraz okienko-

wego odsetka czasu przebywania $WROT_t$ z długością okienka $\tau = 0.2$ i ustalonej historii procesu $\{X_t : t \in [-0.2, 0]\}$. Obszar A_t jest przedziałem $[0.1, +\infty)$.

4. Model ewolucji ceny akcji

Klasycznym modelem ceny akcji S_t jest proces zwany w literaturze geometrycznym ruchem Browna. Proces ten jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (9)$$

gdzie: μ – dryf; σ – zmienność; W_t – proces Wienera.

Niestety, geometryczny ruch Browna nie jest realistycznym modelem co najmniej z dwóch powodów: empiryczne rozkłady logarytmicznej stopy zwrotu nie pochodzą z rozkładu normalnego oraz teoretyczne ceny derywatów przewidują płaską powierzchnię implikowanej zmienności. W literaturze funkcjonuje wiele alternatywnych modeli ewolucji cen akcji, które w lepszy lub gorszy sposób modelują powierzchnię implikowanej zmienności.

Zaproponowany przez autorów model ewolucji można zaliczyć do modeli przełącznikowych, jednak spośród innych modeli z tej grupy wyróżnia go własność zupełności rynku:

$$dS_t = [\mu_0 + \zeta_t (\mu_1 - \mu_0)] S_t dt + [\sigma_0 + \zeta_t (\sigma_1 - \sigma_0)] S_t dW_t, \quad (10)$$

gdzie: $i \in \{0, 1\}$ – stany rynku; μ_i, σ_i – odpowiednio dryf i zmienność,

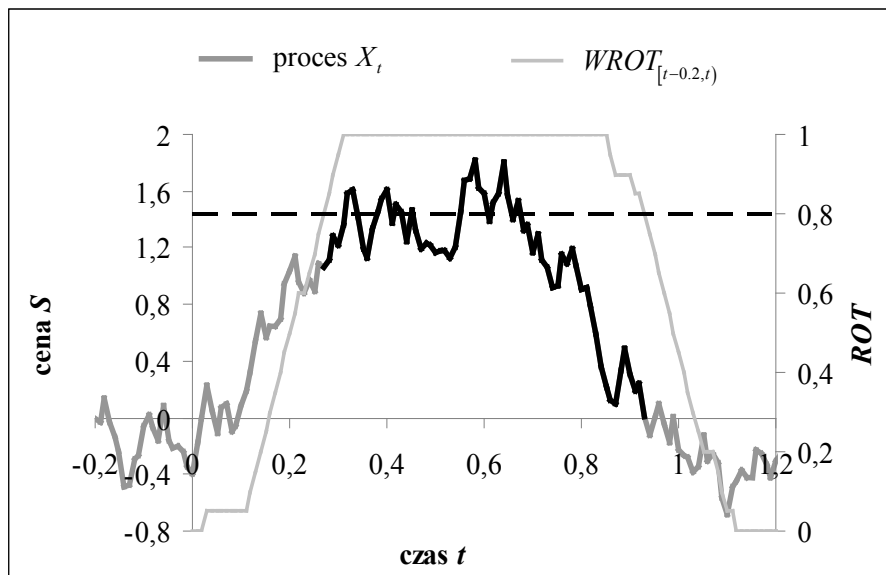
$$\zeta_t = \begin{cases} 0 & WROT_t(A) \leq w \\ 1 & WROT_t(A) > w \end{cases}$$

w – ustalona wartość okienkowego odsetka czasu przebywania.

W powyższym modelu stan rynku przełącza się między stanami „0” i „1”. W każdym ze stanów ceny są geometrycznym ruchem Browna (do kolejnego momentu przełączenia). Przełączenie następuje, gdy wartość okienkowego odsetka czasu przebywania przekroczy (spadnie poniżej) określonej wartości w . Innymi słowy, jeżeli proces ceny akcji „zbyt” długo (krótko) przebywa w określonym obszarze, następuje przełączenie stochastycznej ewolucji. Własność ta pozwala np. na uzyskanie procesu powracającego do średniej.

Rysunek 2 przedstawia przykładową realizację procesu X_t oraz okienkowego odsetka czasu przebywania. Obszar naliczania okienkowego odsetka czasu przebywania jest przedziałem $[0.2, +\infty)$, natomiast poziom przełączania $w = 0.8$ (prawa pio-

nowa oś). Jasnym kolorem oznaczono tę część realizacji procesu losowego X_t dla której rynek był w stanie „0”. Ciemniejszy kolor oznacza, że rynek jest w stanie „1”.



Rys. 2. Przykładowy wykres przejścia między stanami dla okienkowego odsetka czasu przebywania 0.8 w obszarze $A_t \in [0.2, \infty)$ oraz oknie czasowym $\tau = 0.2$

Źródło: opracowanie własne.

Należy podkreślić, że co prawda moment przełączenia jest losowy, to zaproponowana dynamika nie wprowadza dodatkowego czynnika (procesu) losowego. Przełączenie jest w pełni determinowane przez aktualną wartość okienkowego odsetka czasu przebywania, który z kolei jest funkcjonalem ceny akcji (historycznych cen akcji). Na tej podstawie możemy stwierdzić, że własność zupełności rynku jest zachowana.

5. Wycena opcji oraz implikowana zmienność

Problem analitycznego wyznaczenia ceny opcji europejskiej jest w tym przypadku trudny, gdyż równanie wyceny będzie równaniem różniczkowo-całkowym (proces ceny akcji jest procesem z pamięcią). Z tego powodu w celu znalezienia ceny europejskiej opcji *call* na akcję, której cena ewoluuje zgodnie z równaniem (10), zastosujemy podejście symulacyjne. Ewolucja ceny akcji w świecie neutralnym wobec ryzyka dana jest wzorem:

$$dS_t = rS_t dt + [\sigma_0 + \zeta_t (\sigma_1 - \sigma_0)] S_t dW_t^*, \quad (11)$$

gdzie: r – stopa oprocentowania instrumentu wolnego od ryzyka; W_t^* – proces Wienera względem miary neutralnej wobec ryzyka.

Równanie (11) nie jest równaniem autonomicznym. Należy je uzupełnić o równanie:

$$\zeta_t = \begin{cases} 0 & WROT_t(A) \leq w \\ 1 & WROT_t(A) > w \end{cases} \quad (12)$$

oraz równanie

$$WROT_t(A) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t 1_{A_x}(S_x) dx. \quad (13)$$

Cena opcji o wypłacie $Payoff(S_t, K)$ dana jest wzorem:

$$V = e^{-rt} E^* [Payoff(S_t, K)], \quad (14)$$

gdzie E^* oznacza wartość oczekiwaną względem miary neutralnej wobec ryzyka.

Ponieważ analityczna postać miary neutralnej wobec ryzyka nie jest znana, cenę daną wzorem (14) oszacowano za pomocą symulacji Monte Carlo. W celu zwiększenia dokładności oszacowania zastosowano jedną z technik redukcji wariancji – metodę zmiennej kontrolnej:

$$\hat{V} = e^{-rt} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Payoff(S_{it}, K) + a(S_{it} - S_0 e^{rt})]. \quad (15)$$

Współczynnik a dobrano w taki sposób, aby wariancja estymatora ceny była minimalna [Kroese et al. 2011]:

$$a = -\frac{\text{cov}(Payoff, S_t)}{D^2(S_t)}. \quad (16)$$

Ponieważ nie dysponujemy wartościami teoretycznymi kowariancji wypłaty z opcji i ceny akcji oraz wariancji ceny akcji w dniu wykonania opcji, zastąpimy je wartościami oszacowanymi na podstawie próby. W przeprowadzonych symulacjach otrzymano redukcję odchylenia standardowego ceny opcji na poziomie od 1 do kilkunastu razy (w zależności od parametrów modelu: zmienności w stanach „0” i „1”, ceny wykonania, daty wykonania oraz historycznych cen akcji).

W celu egzemplifikacji własności powierzchni implikowanej zmienności wygenerowanej przez zaproponowany model przyjęto następujące wartości parametrów modelu:

$S_0 = 1$ – początkowa cena akcji (w tym przypadku cenę wykonania można rozumieć jako *moneyness* K / S_0);

$\sigma_0 = 0.4$ – zmienność w stanie „0”;

$\sigma_1 = 0.2$ – zmienność w stanie „1”;

$r = 0.1$ – stopa wolna od ryzyka;

$\Delta t^* = T / 4000$ – długość odcinka czasu dyskretyzacji stochastycznego równania różniczkowego (11); w celu jego rozwiązania zastosowano algorytm Eulera; T jest czasem do wykonania opcji;

$\tau = 0.25$ – rozpiętość okna czasowego w kalkulacji *WROT*; obszar naliczania czasu przebywania oraz poziom przełączania ewolucji są różne w różnych symulacjach i zostały wyspecyfikowane pod rysunkami.

Ceny wykonania (alternatywnie *moneyness*) mieściły się w przedziale od 0.4 do 1.6, natomiast czas do wykonania opcji w przedziale od 0.2 do 1.8 jednostki czasu (np. roku; należy pamiętać, o tym że parametry r oraz σ_i są adekwatne do jednostki czasu). Ponadto w przeprowadzonych symulacjach wygenerowano historyczną realizację ceny akcji w taki sposób, aby okienkowy odsetek czasu przebywania w obszarze wynosił 0.3. Kształt obszaru opisano szczegółowo w wybranych rysunkach. W pracy nie przedstawiono rezultatów wyceny, gdyż głównym jej celem jest modelowanie powierzchni implikowanej zmienności.

W celu otrzymania implikowanej zmienności rozwiązano numerycznie równanie:

$$V_{BS} = V_{sym}, \quad (17)$$

gdzie: V_{sym} – otrzymane drogą symulacji oszacowanie ceny opcji *call*;

$V_{BS} = N(d_1)S_0 - Ke^{-rt}N(d_2)$ – teoretyczna cena opcji *call* w modelu Blacka–Scholesa; $N(x)$ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_{imp}^2\right)t}{\sigma_{imp}\sqrt{t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{imp}\sqrt{t}.$$

Ponadto oszacowano błąd estymacji implikowanej zmienności. W tym celu zastosowano aproksymację delta [Casella, Berger 2001] (oszacowanie nie uwzględnia błędów numerycznych zastosowanej procedury do rozwiązywania równania (17);

w znaczącej liczby przypadków błędy te są znacznie mniejsze od błędów statystycznych):

$$S_{\sigma_{imp}} \approx \frac{S_{V_{sym}}}{\left. \frac{\partial V_{BS}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_{imp}}}, \quad (18)$$

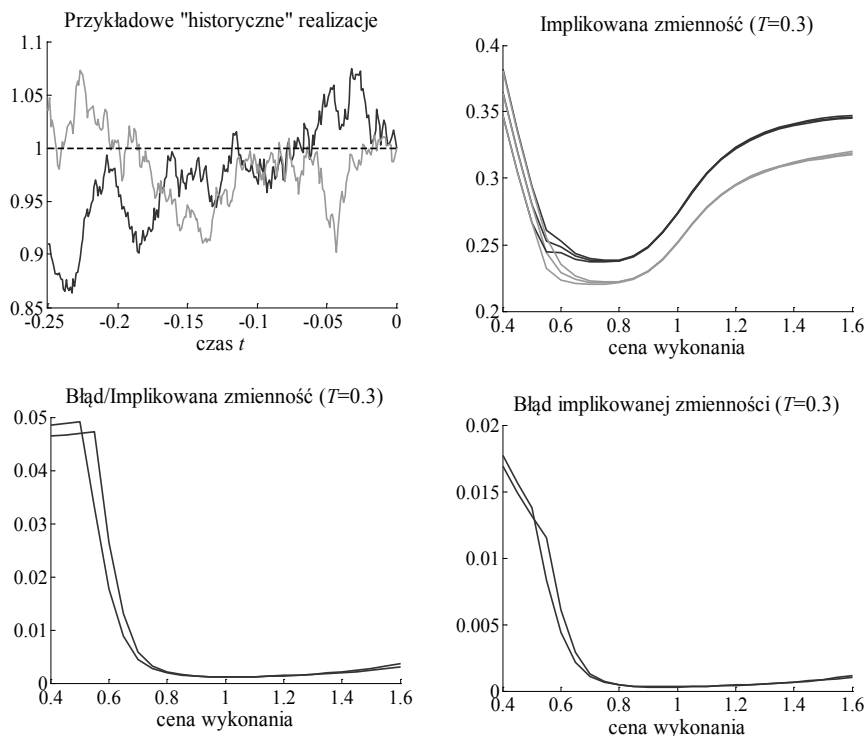
gdzie: $S_{\sigma_{imp}}$ – błąd oszacowania implikowanej zmienności; $S_{V_{sym}}$ – błąd oszacowania ceny opcji *call*.

6. Dyskusja wyników

Rysunek 3 przedstawia dwie historyczne realizacje. Każda z wygenerowanych historycznych realizacji posiada okienkowy odsetek czasu przebywania w obszarze $[1, +\infty)$ równy 0.3 oraz wartość $S_0 = 1$. Na kolejnym subrysunku widzimy dwa wykresy implikowanej zmienności – każdy dla odpowiedniej realizacji historycznej. Ponadto naniesiono uproszczone (naiwne) przedziały ufności (oszacowana implikowana zmienność \pm błąd jej oszacowania).

Jak widać, implikowana zmienność zależy nie tylko od ceny wykonania (krzywa implikowanej zmienności nie jest płaska), ale także od kształtu historycznej realizacji. Kształty krzywych odzwierciedlają typowe cechy krzywych implikowanych zmienności: implikowana zmienność jest większa dla opcji głęboko ITM (*in the money*) oraz głęboko OTM (*out of the money*). Na pozostałych dwóch podrysunkach zaprezentowano wykresy błędu oszacowania implikowanej zmienności oraz jego stosunek do implikowanej zmienności. Można zauważyć, że błąd oszacowania jest największy w przypadku opcji głęboko ITM. Efekt ten można wytłumaczyć faktem, iż w przypadku głęboko ITM prawdopodobieństwo zerowej wypłaty z opcji jest bardzo małe. W symulacjach występuje niewiele przypadków zerowych wypłat (*rare event*). W niektórych przypadkach równanie (17) nie posiadało rozwiązania (przypadki opcji głęboko ITM). Przyczyna tego efektu jest identyczna jak wspomniana wyżej. W celu dokładniejszego oszacowania ceny opcji (i tym samym implikowanej zmienności) można zwiększyć liczbę wygenerowanych realizacji lub zastosować techniki redukcji wariancji typowe dla zagadnień typu *rare event* (zdarzenia rzadkie) [Bucklew 2004]. Dodatkową przyczyną mogą być błędy numeryczne (dystrybuanta rozkładu normalnego jest aproksymowana przez oprogramowanie komputerowe).

Ponadto można przypuszczać, że podobne zachowanie błędu oszacowania wystąpi także w przypadku opcji głęboko OTM. Na rysunku nie jest to widoczne (w rzeczywistości rozważane opcje nie są w takim samym nasileniu OTM, jak w ITM). Należy pamiętać, że zakres potencjalnych cen wykonania (także cen akcji) nie jest symetryczny względem wartości 1 (ceny są dodatnie). Bardziej adekwatną skalą cen wykonania byłaby skala logarytmiczna.



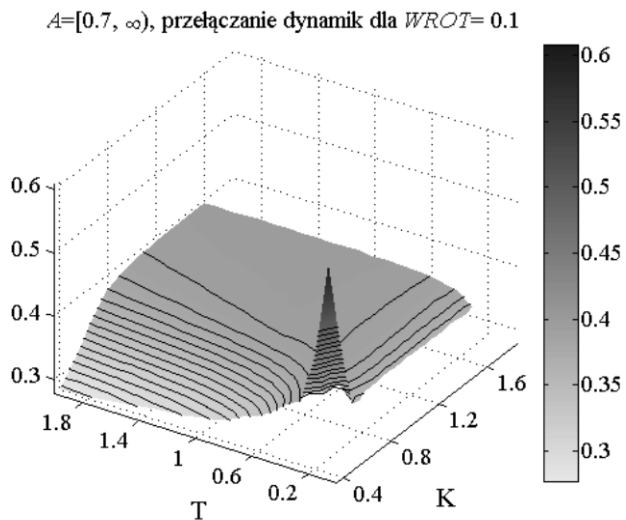
Rys. 3. Przykładowe realizacje historyczne, implikowane zmienności oraz ich błędy w przypadku wyznaczania odsetka czasu przebywania w obszarze $A_t \in [1, \infty)$, poziom przełączenia $w = 0.3$

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4 przedstawia powierzchnię implikowanej zmienności dla dynamiki z poziomem przełączenia $w = 0.1$, początkowej wartości okienkowego odsetka czasu przebywania 0.3, obszarem naliczania odsetka $[0.7, +\infty)$ oraz wybraną realizacją historyczną. Jak widać, kształt powierzchni implikowanej zmienności nie jest trywialny.

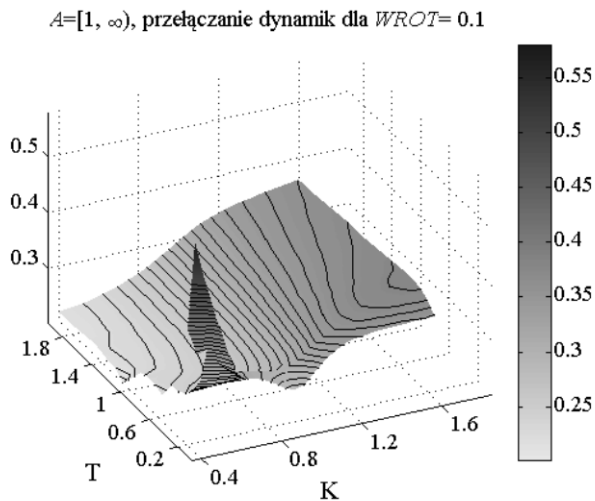
Podobnie na rysunku 5 widzimy nietrywialną zależność implikowanej zmienności od zmiennych (K, T) . W pewnych zakresach parametrów (K, T) implikowana zmienność jest niemonotoniczną funkcją zarówno ceny wykonania, jak i czasu do wykonania.

Warto zauważyć, że zaprezentowane powierzchnie nie są kompletne w rozważanym obszarze $(0.4, 1.6) \times (0.2, 1.8)$. Braki występują w okolicy krótkich czasów do wykonania i opcji głęboko ITM. Braki te oznaczają, że równanie (17) nie posiadało rozwiązania. Przyczyną tego jest efekt omówiony wcześniej, ponadto dochodzi kwestia krótkiego czasu do wykonania (bardzo małe prawdopodobieństwo zerowej wypłaty z opcji).



Rys. 4. Powierzchnia implikowanej zmienności w przypadku wyznaczenia odsetka czasu przebywania w obszarze $A_t \in [0.7, \infty)$, poziom przełączenia $w = 0.1$. „Historyczne” realizacje do czasu $t = 0$ wygenerowano z odsetkiem czasu przebywania w oknie równym 0,3

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Powierzchnia implikowanej zmienności w przypadku wyznaczenia odsetka czasu przebywania w obszarze $A_t \in [1, \infty)$, poziom przełączenia $w = 0.1$. „Historyczne” realizacje do czasu $t = 0$ wygenerowano z odsetkiem czasu przebywania w oknie równym 0,3

Źródło: opracowanie własne.

Z uwagi na ograniczoną objętość pracy pominięto przypadki innych kształtów powierzchni implikowanej zmienności. Niemniej jednak należy podkreślić, że bogata rodzina powierzchni implikowanej zmienności oraz jej zależność od historycznych notowań stanowi atrakcyjną alternatywę do spotykanych w literaturze modeli.

7. Podsumowanie

W pracy zaprezentowano nowy model ewolucji cen akcji. Wykorzystuje on funkcjonalną geometrycznego ruchu Browna oparte na okienkowym czasie przebywania. Model ten zachowuje zupełność rynku oraz wprowadza zależność ceny derywatu i tym samym implikowanej zmienności od historycznych cen akcji. Z przeprowadzonych symulacji wynika, że pozwala on na odtworzenie bogatej rodziny powierzchni implikowanej zmienności i tym samym potencjalnie może być zastosowany w praktyce inwestycyjnej. Dalszych analiz wymaga przeprowadzenie empirycznych badań z wykorzystaniem rynkowych cen akcji oraz opcji (kalibracja modelu).

Literatura

- Bachelier L., 1900, *Theorie de la Speculation*, Paris.
- Bayraktar E., Young V.R., 2010, *Optimal investment strategy to minimize occupation time*, Ann Oper Res, no. 176, p. 389-408.
- Black F., Scholes M., 1973, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, no. 81 (3), p. 637-654.
- Bucklew J., 2004, *Introduction to rare event simulation*, Springer.
- Casella G., Berger R.L., 2001, *Statistical inference*, Cengage Learning.
- Czernik T., 2013, *Czas przebywania – potencjalne zastosowania. Geometryczny ruch Browna*, PTE, Katowice.
- Darling D.A., Kac M., 1957, *On occupation times for Markoff processes*, Transactions of AMS, no. 84, p. 444-458.
- Fengler M.R., 2012, *Option data and modeling BSM implied volatility*, In Handbook of computational finance, Springer.
- Heath D., Platen E., 2002, *Consistent pricing and hedging for a modified constant elasticity of variance model*, Quant. Financ., no. 2, p. 459-467.
- Hull J.C., 2009, *Options, futures and other derivatives*, Pearson Prentice Hal.
- Hull J., White A., 1987, *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, The Journal of Finance, no. 42 (2), p. 281-300.
- Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I., 2011, *Handbook of Monte Carlo methods*, Wiley.
- Merton R.C., 1973, *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, no. 4 (1), p. 141-183.
- Merton R.C., 1976, *Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous*, Journal of Financial Economics, no. 3, p. 125-144.
- Oksendal B., 2010, *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*, Springer.
- Wilmott P., 2006, *Paul Wilmott on quantitative finance*, vol. I-III, Wiley.

MODIFIED GEOMETRIC BROWNIAN MOTION – OCCUPATION TIME APPROACH. DERIVATIVE PRICING, IMPLIED VOLATILITY – SIMULATIONS

Summary: The paper presents a new model for the evolution of stock prices. The proposed model uses geometric Brownian motion functionals based on windowed relative occupation time. The model preserves market completeness and introduces a dependency of derivative prices and thus implied volatility from historical stock prices. It also allows to reproduce a rich family of implied volatility surfaces.

Keywords: derivative instruments, pricing, implied volatility, stochastic processes.