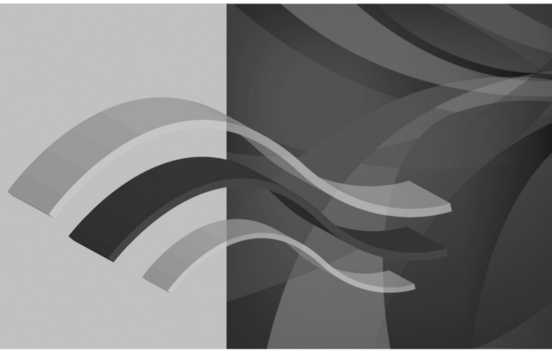
**PRACE NAUKOWE**
Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
**RESEARCH PAPERS**
of Wrocław University of Economics

**228**

# Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI



pod redakcją
**Wandy Ronki-Chmielowiec**

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Jerzy Handschke, Jan Monkiewicz, Kazimierz Ortyński, Wanda Sułkowska,
Włodzimierz Szkutnik, Tadeusz Szumlicz, Stanisław Wieteska

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities http://cejsh.icm.edu.pl
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl



**ISSN 1899-3192**
**ISBN 978-83-7695- 191-1**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

## Spis treści

## Summaries

PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 228
RESEARCH PAPERS OF WROCŁAW UNIVERSITY OF ECONOMICS

Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku ISSN 1899-3192

**Tadeusz Czernik**
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# O PEWNYM SFORMUŁOWANIU ZAGADNIENIA RUINY

**Streszczenie:** Wszelkim rodzajom aktywności człowieka towarzyszy ryzyko, jednak działalność ubezpieczeniowa wyróżnia się spośród pozostałych tym, że jej przedmiotem jest ryzyko jako takie. W pracy przedstawiono alternatywne sformułowanie zagadnienia ruiny. Podejście to nie wymaga zawansowanego aparatu analizy stochastycznej, jednak intensywnie korzysta z teorii funkcji uogólnionych.

**Słowa kluczowe:** teoria ruiny, proces Poissona, funkcje uogólnione

## 1. Wstęp

Wszelkim rodzajom aktywności człowieka towarzyszy ryzyko, jednak działalność ubezpieczeniowa wyróżnia się spośród pozostałych tym, że jej przedmiotem jest ryzyko jako takie. Zakład ubezpieczeń „skupuje" ryzyko i wykorzystując narzędzia analizy statystycznej/stochastycznej, nim zarządza. Jednym z największych zagrożeń systemu ubezpieczeniowego jest utrata płynności przez choć jednego z jego członków. Jedną z miar ryzyka utraty płynności jest prawdopodobieństwo ruiny (wraz z wielkościami pochodnymi: oczekiwany moment wystąpienia ruiny, wartość nadwyżki w momencie wystąpienia ruiny itp.) [Asmussen, Albrecher 2010; Rolski i in. 1999; Dickson, 2005]. W pracy tej zaproponowano alternatywne sformułowanie zagadnienia ruiny.

## 2. Dynamika nadwyżki ubezpieczeniowej

Rozważmy najprostszy model dynamiki nadwyżki ubezpieczeniowej:

$$dU(t) = cdt - dS(t), \tag{1}$$

gdzie: $U(t)$ – proces nadwyżki ubezpieczeniowej,
$c$ – stałe w czasie natężenie napływu składki ubezpieczeniowej,
$t$ – czas,
$S(t)$ – proces szkód.

Ponieważ równanie (1) jest stochastycznym równaniem różniczkowym [Oksendal 2003; Hanson 2007], należy do niego dołączyć tzw. warunek początkowy: wartość nadwyżki w chwili $t = 0$ wynosi $U(0) = u$. Proces szkód $S(t)$ najczęściej modelowany jest złożonym procesem Poissona:

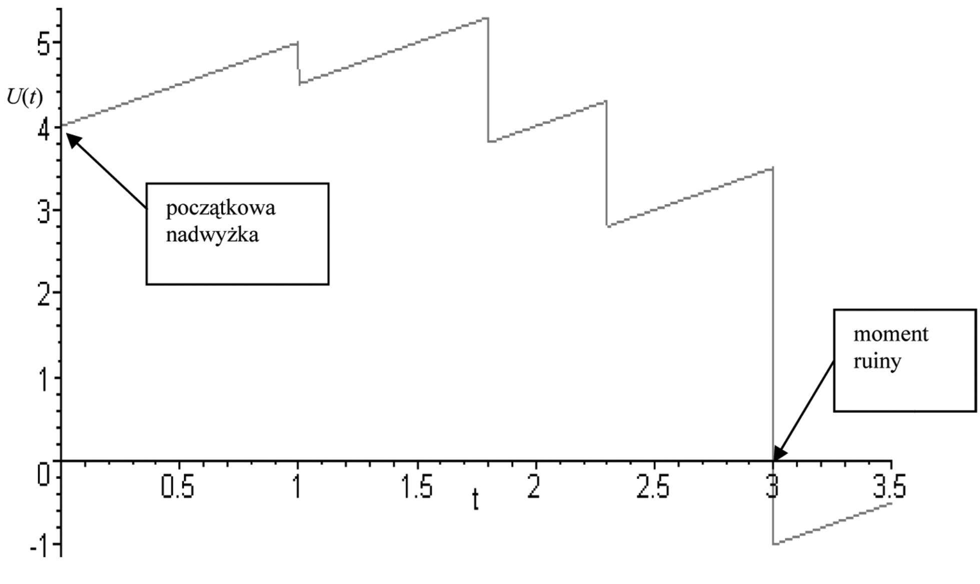
$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \theta(t - T_i), \tag{2}$$

gdzie: $N(t)$ – zliczający proces Poissona (reprezentuje losową liczbę szkód odnotowanych do czasu $t$),
$T_i$ – losowy moment wystąpienia $i$-tej szkody,
$X_i$ – losowa wartość $i$-tej szkody,
$\theta(.)$ – funkcja schodkowa (funkcja Heavisidea) $\theta(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \geq 0 \\ 0 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$

(UWAGA: w poniższej pracy występować będą funkcje schodkowe o różnych nośnikach).

W najprostszym modelu dodatkowo zakłada się niezależność momentów wystąpienia szkody $T_i$ oraz wartości szkody $X_i$ oraz jednorodność w czasie procesu Poissona.

Rysunek 1 przedstawia przykładową realizację procesu nadwyżki ubezpieczeniowej $U(t)$.




**Rys. 1.** Przykładowa realizacja procesu nadwyżki ubezpieczeniowej ($c = 1$, $u = 4$)

## 3. Zagadnienie ruiny

Ruinę zwykle definiuje się jako zdarzenie, w którym wartość nadwyżki po raz pierwszy spadła poniżej wartości zero. Wynika stąd, że zagadnienie ruiny należy do szerszej klasy zagadnień zwanych zagadnieniami pierwszego przejścia lub pierwszego wyjścia [Redner 2001; Schuss 1989].

Moment czasu, w którym nadwyżka spadła po raz pierwszy poniżej poziomu zerowego, definiujemy (moment wystąpienia ruiny):

$$T = \inf_{t \in (0,+\infty)} \left( t : U(t) < 0 \right). \tag{3}$$

Ponieważ proces nadwyżki jest procesem losowym, moment wystąpienia ruiny jest wielkością losową (zmienną losową, lecz nie jest procesem losowym). Tak zdefiniowany moment wystąpienia ruiny często jest tzw. ułomną zmienną losową tzn. $P(T < +\infty) < 1$. W celu usunięcia tej „wady" można zdefiniować moment wystąpienia ruiny następująco:

$$T = \begin{cases} \inf\limits_{t \in (0,+\infty)} \left( t : U(t) < 0 \right) \\ +\infty \quad \forall t \geq 0 : U(t) \geq 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Po zastosowaniu powyższej procedury uzwarcenia zmienna $T$ należy do $(0,+\infty]$. Wtedy nadal może być $P(T < +\infty) < 1$, lecz $P(T \leq +\infty) = 1$.

Prawdopodobieństwo wystąpienia ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu (*probability of the ultimate ruin*) definiujemy:

$$\psi(u) = P\left( \exists t \geq 0 : U(t) < 0 \right) \tag{5}$$

lub

$$\psi(u) = P(T < +\infty). \tag{6}$$

Zapis $\psi(u)$ podkreśla zależność prawdopodobieństwa ruiny od początkowej nadwyżki ubezpieczeniowej (prawdopodobieństwo wystąpienia ruiny definiuje się jako prawdopodobieństwo warunkowe, gdzie warunkiem jest początkowa wartość nadwyżki – w poniższej pracy nie będziemy stosowali tej notacji, gdyż przypadek ujemnej wartości nadwyżki jest trywialny, a zależność od wartości początkowej oczywista).

Wielkością ściśle związaną z prawdopodobieństwem ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu jest prawdopodobieństwo przetrwania (*probability of the ultimate survival*) [Panjer, Willmot 1992]:

$$\phi(u) = P\left( \forall t \geq 0 : U(t) \geq 0 \right) = P(T = +\infty). \tag{7}$$

Ponieważ są tylko dwie możliwości: wystąpienie ruiny bądź jej brak, zachodzi związek:

$$\phi(u) + \psi(u) = 1. \tag{8}$$

Analogicznie definiujemy prawdopodobieństwo ruiny w skończonym czasie $t$:

$$\psi(u,t) = P\left(\exists s \in (0,t) : U(s) < 0\right) = P(T < t) \tag{9}$$

oraz prawdopodobieństwa przetrwania w skończonym czasie $t$:

$$\phi(u,t) = P\left(\forall s \in (0,t) : U(s) \geq 0\right) = P(T \geq t) \tag{10}$$

(ponieważ zmienna losowa $T$ jest dla skończonych wartości czasu ciągłą zmienną losową, można zapisać $\phi(u) = P\left(\forall s \in (0,t) : U(s) \geq 0\right) = P(T > t)$).

W pracy [Rolski i in. 1999] można znaleźć wyprowadzone (korzystając z techniki warunkowania) równania na prawdopodobieństwo przetrwania w nieskończonym horyzoncie czasu:

$$c\varphi(u)' = \lambda\varphi(u) - \lambda\int_0^u \varphi(u-x)dF_X(x) \tag{11}$$

oraz w skończonym horyzoncie czasu [Panjer, Willmot 1992]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(u,t) = c\frac{\partial}{\partial u}\phi(u,t) - \lambda\phi(u,t) + \lambda\int_0^u \phi(u-x,t)\,dF_X(x). \tag{12}$$

gdzie: $\lambda = const > 0$ – intensywność procesu Poissona,

$F_X(x)$ – dystrybuanta wartości pojedynczej szkody (nośnikiem gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$ pojedynczej szkody jest $x \in (0,+\infty)$).

W pracy [Asmussen, Albrecher 2010] można znaleźć analityczne rozwiązanie równania (12) w przypadku wykładniczego rozkładu wartości szkód.

Należy podkreślić, że $\psi(u,t) = 1 - \phi(u,t)$ jest dystrybuantą momentu wystąpienia ruiny (ściśle mówiąc, należy dołączyć skok $P(T = +\infty) = \lim_{t\to+\infty}\left[1 - \psi(u,t)\right] = 1 - \psi(u)$). Widać stąd, że dystrybuanta warunkowa $F_T(t / T < +\infty) = P(T < t / T < +\infty)$ dana jest wzorem:

$$F_T\left(t/T<+\infty\right)=\frac{\psi\left(u,t\right)}{\psi\left(u\right)} \tag{13}$$

(dystrybuanta warunkowa nie jest ułomna).

Poniżej przedstawione zostanie alternatywne sformułowanie zagadnienia ruiny. Analogiczną metodę zastosowano w przypadku procesów generowanych procesem Wienera [Czernik 2010]. W podejściu tym prawdopodobieństwo ruiny (oraz wielkości związane z zagadnieniem ruiny) jest wielkością wtórną w stosunku do rozkładów prawdopodobieństwa procesu nadwyżki o zmodyfikowanym równaniu ewolucji:

$$dU=c\left(U\right)dt-d\widehat{S}(t), \tag{14}$$

gdzie: $c\left(U\right)=c\theta_0\left(U\right)$ – przestrzennie niejednorodne natężenie napływu składki $c>0$,

$\widehat{S}(t)$ – przestrzennie niejednorodny proces Poissona: $\lambda\left(U\right)=\lambda\theta_0\left(U\right)$ oraz $\lambda>0$,

$\theta_0\left(U\right)=\begin{cases}0 \text{ dla } U<0\\ 1 \text{ dla } U\geq 0\end{cases}$ – funkcja schodkowa.

Z powyższego widać, że jeżeli wartość procesu nadwyżki spadnie poniżej zera, proces jest zatrzymywany – składki nie spływają oraz nie pojawiają się szkody. W pracy [Rolski i in. 1999] można znaleźć podobną technikę, występują jednak zasadnicze różnice. W zaproponowanej w powyższej pracy technice dokonuje się tzw. *killingu*, tzn. proces jest przerzucany do sztucznego stanu (*cemetery state*) niepamiętającego wartości nadwyżki w chwili ruiny. Ponadto autorzy przeprowadzają rozważania (skądinąd bardzo pomysłowe) natury probabilistycznej, w poniższej pracy większość rozważań przeprowadzanych będzie na równaniach różniczkowo-całkowych w przestrzeni funkcji uogólnionych (teoriomiarowe rozszerzenie dystrybucji Schwartza). Stąd rozważania powinny być łatwo przenoszone na inne zagadnienia, w których znane jest równanie ewolucji gęstości prawdopodobieństwa wartości procesu i nie jest wymagana znajomość zaawansowanych twierdzeń analizy stochastycznej.

Załóżmy, że ewolucja zmodyfikowanego procesu nadwyżki dana jest wzorem (14). Wtedy ewolucja gęstości prawdopodobieństwa wartości nadwyżki $p(U, t)$ opisana jest prospektywnym równaniem Kołmogorowa dane jest wyrażeniem [Hanson 2007]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}p\left(U,t\right)=&-\frac{\partial}{\partial U}\left[c\left(U\right)p\left(U,t\right)\right]-\lambda\left(U\right)p\left(U,t\right)+\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\left(U+x\right)p\left(U+x,t\right)f_X\left(x\right)dx\end{aligned} \tag{15}$$

z warunkiem początkowym $p\left(U,0\right)=\delta\left(U-u\right)$, gdzie:

$u \geq 0$ – początkowa wartość nadwyżki,

$\delta(U-u)$ – delta Diraca (miara atomowa) z nośnikiem w punkcie $u$.

Ponieważ ograniczamy się do szkód o wartości dodatniej, rozkład szkody posiada nośnik ograniczony do zbioru liczb dodatnich. Stąd równanie (15) można zapisać:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}p(U,t) = -\frac{\partial}{\partial U}\left[c(U)p(U,t)\right] - \lambda(U)p(U,t) + \\ + \int_0^{+\infty} \lambda(U+x)p(U+x,t)f_X(x)dx.\end{aligned} \tag{16}$$

W celu otrzymania wielkości interesujących z punktu widzenia teorii ruiny dokonamy dekompozycji gęstości prawdopodobieństwa $p(U, t)$ (zaprezentowana tu dekompozycja stanowi uogólnienie dekompozycji zastosowanej w [Czernik, Łuczka 2000]):

$$p(U,t) = p_-(U,t)\theta_-(U) + p_0(U,t)\theta_0(U) + \alpha(t)\delta\left(U - U^*(t)\right), \tag{17}$$

gdzie: $\theta_-(U) = \begin{cases} 1 \text{ dla } U < 0 \\ 0 \text{ dla } U \geq 0 \end{cases}$ – funkcja schodkowa o nośniku na zbiorze liczb ujemnych,

$U^*(t)$ – nośnik atomowej składowej gęstości $p(U, t)$ taki, że $U^*(0) = u$ (prawdopodobieństwo, że w skończonym czasie nie pojawi się szkoda, jest większe od zera).

Podstawiając (17) do równania (16), otrzymamy iloczyny:

$$c(U)p(U,t) = cp_0(U,t)\theta_0(U) + c\alpha(t)\theta_0\left(U^*(t)\right)\delta\left(U - U^*(t)\right), \tag{18}$$

$$\lambda(U)p(U,t) = \lambda p_0(U,t)\theta_0(U) + \lambda\alpha(t)\theta_0\left(U^*(t)\right)\delta\left(U - U^*(t)\right), \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\lambda(U+x)p(U+x,t) = \lambda p_0(U+x,t)\theta_0(U+x) + \\ +\lambda\alpha(t)\theta_0\left(U^*(t)\right)\delta\left(U+x-U^*(t)\right).\end{aligned} \tag{20}$$

W powyższych iloczynach pojawiły iloczyny funkcji nieciągłych oraz delty Diraca. Klasyczna teoria dystrybucji Schwartza nie dopuszcza istnienia takich iloczynów. Jednak, zakładając, że wchodzące w skład iloczynu funkcje są funkcjami o lokalnie ograniczonym wahaniu [Wyderka 1994], można udowodnić, że iloczyny (18), (19) i (20) są wykonalne/istnieją.

Ponadto obliczając pochodną iloczynu (18), otrzymamy:

$$\frac{\partial}{\partial U}\left[c(U)p(U,t)\right]=c\theta_0(U)\frac{\partial}{\partial U}p_0(U,t)+cp_0(0,t)\delta(U)+ \\ +c\alpha(t)\theta_0\left(U^*(t)\right)\frac{\partial}{\partial U}\delta\left(U-U^*(t)\right). \tag{21}$$

Ponadto całka $\int\limits_0^{+\infty}\lambda(U+x)p(U+x,t)f_X(x)dx$ przyjmie postać:

$$\int\limits_0^{+\infty}\lambda(U+x)p(U+x,t)f_X(x)dx=\lambda\int\limits_{\max(0,-U)}^{+\infty}p_0(U+x,t)f_X(x)dx+ \\ +\lambda\alpha(t)\theta_0\left(U^*(t)\right)\theta_0\left(U^*(t)-U\right)f_X\left(U^*(t)-U\right) \tag{22}$$

lub

$$\int\limits_0^{+\infty}\lambda(U+x)p(U+x,t)f_X(x)dx=\lambda\theta_0(U)\int\limits_0^{+\infty}p_0(U+x,t)f_X(x)dx+ \\ +\lambda\theta_-(U)\int\limits_{-U}^{+\infty}p_0(U+x,t)f_X(x)dx+ \\ +\lambda\alpha(t)\theta_0\left(U^*(t)\right)\theta_0\left(U^*(t)-U\right)f_X\left(U^*(t)-U\right). \tag{23}$$

Konieczne jest również obliczenie pochodnej $\frac{\partial}{\partial t}p(U,t)$:

$$\dot{p}(U,t)=\dot{p}_-(U,t)\theta_-(U)+\dot{p}_0(U,t)\theta_0(U)+ \\ +\dot{\alpha}(t)\delta\left(U-U^*(t)\right)+\alpha(t)\dot{\delta}\left(U-U^*(t)\right). \tag{24}$$

gdzie kropka nad symbolem oznacza pochodną ze względu na czas $t$.

Korzystając z faktu, iż $\dot{\delta}\left(U-U^*(t)\right)=-\dot{U}^*(t)\frac{\partial}{\partial U}\delta\left(U-U^*(t)\right)$, wyrażenie (24) może być zapisane w postaci:

$$\dot{p}(U,t)=\dot{p}_-(U,t)\theta_-(U)+\dot{p}_0(U,t)\theta_0(U)+ \\ +\dot{\alpha}(t)\delta\left(U-U^*(t)\right)-\alpha(t)\dot{U}^*(t)\frac{\partial}{\partial U}\delta\left(U-U^*(t)\right). \tag{25}$$

Podstawiając obliczone wyrażenia do równania (16), otrzymamy:

$$\begin{gathered}\dot{p}_{-}(U,t)\theta_{-}(U)+\dot{p}_0(U,t)\theta_0(U)+\\+\dot{\alpha}(t)\delta\big(U-U^*(t)\big)-\alpha(t)\dot{U}^*(t)\frac{\partial}{\partial U}\delta\big(U-U^*(t)\big)=\\=-c\theta_0(U)\frac{\partial}{\partial U}p_0(U,t)-cp_0(0,t)\delta(U)-c\alpha(t)\theta_0\big(U^*(t)\big)\frac{\partial}{\partial U}\delta\big(U-U^*(t)\big)-\\-\lambda p_0(U,t)\theta_0(U)-\lambda\alpha(t)\theta_0\big(U^*(t)\big)\delta\big(U-U^*(t)\big)+\\+\lambda\theta_0(U)\int_0^{+\infty}p_0(U+x,t)f_X(x)dx+\lambda\theta_{-}(U)\int_{-U}^{+\infty}p_0(U+x,t)f_X(x)dx+\\+\lambda\alpha(t)\theta_0\big(U^*(t)\big)\theta_0\big(U^*(t)-U\big)f_X\big(U^*(t)-U\big).\end{gathered}\tag{26}$$

Ponieważ równanie (26) ma postać $g(x)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\delta^{(i)}\left(x-x_j\right)=0,$ możemy skorzystać z twierdzenia [Kecs, Teodorescu 1974], które mówi, że jeżeli $g(x)$ jest lokalnie całkowalna, to powyższe równanie jest równoważne układowi:

$$\begin{cases} g(x)=0 \\ \beta_{ij}=0 \quad i=0,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m \end{cases}.\tag{27}$$

Grupując wyrażenia w (26), otrzymamy następujący układ warunków:

$$\alpha(t)\left[\dot{U}^*(t)-c\theta_0\big(U^*(t)\big)\right]=0,\tag{28}$$

$$p_0(0,t)=0,\tag{29}$$

$$\dot{\alpha}(t)=-\lambda\alpha(t)\theta_0\big(U^*(t)\big),\tag{30}$$

$$\begin{gathered}\dot{p}_0(U,t)=-c\frac{\partial}{\partial U}p_0(U,t)-\lambda p_0(U,t)+\\+\lambda\int_0^{+\infty}p_0(U+x,t)f_X(x)dx+\\+\lambda\alpha(t)\theta_0\big(U^*(t)\big)\theta_0\big(U^*(t)-U\big)f_X\big(U^*(t)-U\big),\end{gathered}\tag{31}$$

dla $U\geq 0$, oraz

$$\begin{gathered}\dot{p}_{-}(U,t)=\lambda\int_{-U}^{+\infty}p_0(U+x,t)f_X(x)dx+\\+\lambda\alpha(t)\theta_0\big(U^*(t)\big)\theta_0\big(U^*(t)-U\big)f_X\big(U^*(t)-U\big),\end{gathered}\tag{32}$$

dla $U<0$.

Korzystając z warunku początkowego $p(U,0)=\delta(U-u)$ oraz $U^*(0)=u$, stwierdzamy, że $\alpha(0)=1$ (z (30) wynika również, że $\alpha(t)>0)$. Ponadto można łatwo wykazać (korzystając z (28) oraz $\alpha(t)>0)$), że $U^*(t)=ct+u$. Wynik ten był przewidywalny, gdyż z dodatnim prawdopodobieństwem w skończonym horyzoncie czasu nie pojawi sie ani jedna szkoda, a ponieważ napływają składki, nośnik delty Diraca przemieszcza się zgodnie ze wzorem $U^*(t)=ct+u$.

Warunek $p_0(0,t)=0$ może się wydawać dziwny, gdyż z dodatnim prawdopodobieństwem na skutek pojawiających się szkód wartość nadwyżki może zmaleć do zera. Jednakże, na skutek ciągłego napływu składki, wartość nadwyżki będzie oddalała się od zera.

Z warunku (30) wynika także:

$$P\left(U=U^*(t)\right)=P\left(N(t)=0\right)=\alpha(t)=e^{-\lambda t}. \tag{33}$$

Rezultat ten jest oczywisty, ponieważ $e^{-\lambda t}$ jest prawdopodobieństwem, że do czasu $t$ nie pojawiła się żadna szkoda (amplituda miary atomowej skoncentrowanej w punkcie $U^*(t)=ct+u$.

Korzystając z powyższych rezultatów, możemy równania (31) i (32) zapisać w postaci:

$$\begin{gathered}\dot{p}_0(U,t)=-c\frac{\partial}{\partial U}p_0(U,t)-\lambda p_0(U,t)+\\+\lambda\int_0^{+\infty}p_0(U+x,t)f_X(x)dx+\lambda e^{-\lambda t}\theta_0(ct+u-U)f_X(ct+u-U),\end{gathered} \tag{34}$$

dla $U\geq 0$, oraz

$$\dot{p}_-(U,t)=\lambda\int_{-U}^{+\infty}p_0(U+x,t)f_X(x)dx+\lambda e^{-\lambda t}f_X(ct+u-U), \tag{35}$$

dla $U<0$.

Z warunku początkowego $p(U,0)=\delta(U-u)$ oraz faktu, iż funkcje $p_0(U,t)$ i $p_-(U,t)$ są funkcjami o lokalnie ograniczonym wahaniu, wynika, że:

$$p_0(U,0)=p_-(U,0)=0. \tag{36}$$

Całkując równanie (34) w granicach od $U^*(t)=ct+u$ do $+\infty$, otrzymamy (korzystając z tożsamości:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{g(t)}^{h(t)} f(x,t)dx = \int\limits_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx + f(h(t),t)\dot{h}(t) - f(g(t),t)\dot{g}(t)):$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U,t)\,dU = -\lambda \int\limits_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U,t)\,dU + +\lambda \int\limits_0^{+\infty}\left[\int\limits_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U+x,t)\,dU\right] f_X(x)\,dx \tag{37}$$

i dalej znajdujemy

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U,t)\,dU \le 0. \tag{38}$$

Wynika stąd, że $\int\limits_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U,t)\,dU = 0$, czyli $p_0(U,t) = 0$ dla $U > U^*(t) = ct + u.$

Nośnikiem funkcji $p_0(U,t)$ w chwili $t$ jest przedział $\left[0, U^*(t)\right)$. Wniosek ten jest również oczywisty, gdyż założyliśmy, że szkody są zmiennymi losowymi o wartościach dodatnich.

Rodzi się pytanie: jaka jest interpretacja gęstości $p_0(U,t)$ oraz $p_-(U,t)$.

Wielkość $p_0(U,t)dU$ jest prawdopodobieństwem, że $U \in (U, U + dU)$ i nie doszło jeszcze do ruiny (należy pamiętać, że nośnikiem jest przedział $\left[0, U^*(t)\right)$ ) i pojawiła się co najmniej jedna szkoda:

$$p_0(U,t)\,dU = P\left(U \in dU, T > t, N(t) \ge 1\right). \tag{39}$$

Wynika stąd, że $P\left(T > t, N(t) \ge 1\right) = \int\limits_0^{U^*(t)} p_0(U,t)\,dU$ oraz, że $\int\limits_0^{U^*(t)} p_0(U,t)\,dU + \alpha(t)$ jest prawdopodobieństwem, że w horyzoncie czasu $t$ nie dojdzie do ruiny (prawdopodobieństwo przetrwania), czyli:

$$\phi(u,t) = \int\limits_0^{U^*(t)} p_0(U,t)\,dU + \alpha(t). \tag{40}$$

Korzystając z faktu, że wielkość $P\left(U \in dU, T > t\right)$ dana jest wzorem $\left[p_0\left(U,t\right) + \alpha\left(t\right)\delta\left(U - U^*\left(t\right)\right)\right]dU$, możemy zapisać:

$$P\left(U \in dU / T > t\right) = \frac{p_0\left(U,t\right) + \alpha\left(t\right)\delta\left(U - U^*\left(t\right)\right)}{\phi\left(u,t\right)} dU. \tag{41}$$

Wielkość $p_-\left(U,t\right)dU$ jest prawdopodobieństwem, że $U \in \left(U, U + dU\right)$ i doszło do ruiny, czyli (pamiętając, że $U < 0$):

$$p_-\left(U,t\right)dU = P\left(U \in dU, T \le t\right). \tag{42}$$

Jasne jest również, że $\int_{-\infty}^{0} p_-\left(U,t\right)dU$ jest prawdopodobieństwem, że w horyzoncie czasu $t$ dojdzie do ruiny (prawdopodobieństwo ruiny $\psi\left(u,t\right)$). Całkując równanie (35) od minus nieskończoności do zera, możemy wywnioskować, iż (ułomna) gęstość prawdopodobieństwa zmiennej $T$ dana jest wzorem:

$$P\left(T \in dt\right) = \left\{\lambda \int_{0}^{U^*(t)} p_0\left(x,t\right)\left[1 - F_X\left(x\right)\right]dx + \lambda e^{-\lambda t}\left[1 - F_X\left(U^*\left(t\right)\right)\right]\right\}dt. \tag{43}$$

Ponadto z (41) oraz (35) wynika, że:

$$P\left(T \in \left(t, t_1\right) / T > t\right) = \frac{\int_{-\infty}^{0}\left[p_-\left(U,t_1\right) - p_-\left(U,t\right)\right]dU}{\phi\left(u,t\right)}. \tag{44}$$

Ponieważ zachodzi (34), (35) oraz:

$$\int_{0}^{U^*(t)} p_0\left(U,t\right)dU + \alpha\left(t\right) + \int_{-\infty}^{0} p_-\left(U,t\right)dU = 1 \tag{45}$$

wiele ze związków wyrażonych za pomocą $p_0\left(U,t\right)$ można wyrazić alternatywnie za pomocą $p_-\left(U,t\right)$ i *vice versa*.

Z uwagi na ograniczoną objętość pracy nie przedstawiono wielu innych charakterystyk i ich zależności od gęstości $p_0\left(U,t\right)$ i $p_-\left(U,t\right)$ (np. deficyt w momencie ruiny, warunkowy deficyt w momencie ruiny).

## 4. Podsumowanie

Zaprezentowane podejście (modyfikacja stochastycznego równania różniczkowego) do zagadnienia ruiny stanowi ciekawą alternatywę dla klasycznych probabilistycznych sformułowań. Znając rozwiązanie analityczne/numeryczne równań (34) i (35), pozostałe wielkości charakteryzujące ewolucję nadwyżki można już łatwo obliczyć. Przedstawione rozważania można uogólnić na bardziej realistyczną dynamikę nadwyżki: przestrzennie niejednorodne natężenie napływu składki, uwzględnienie reasekuracji, ryzyka zależne itp.. Ponadto zaproponowana metoda pozwala na odseparowanie prawdopodobieństwa poniesienia straty, której bezpośrednią przyczyną było ryzyko inwestycyjne bądź szkoda natury ubezpieczeniowej.

## Literatura

Asmussen S., Albrecher H. [2010], *Ruin probabilities*, World Scientific.

Czernik T. [2010], *First Passage Phenomena from the new perspective and the Generalized Maximal Loss*, zaprezentowany na 1st Summer School, Quantitative Methods for Economic, Agricultural-Food and Environmental Sciences, Alcantara Park.

Czernik T., Łuczka J. [2000], *Rectified steady flow induced by white shot noise: diffusive and non-diffusive regimes*, Annalen der Physik, vol. 9, no. 9–10.

Dickson D.C.M. [2005], *Insurance, risk and ruin*, Cambridge University Press.

Hanson F.B. [2007], *Applied stochastic processes and control for jump-diffusions. Modeling, analysis, and computation*, SIAM.

Kecs W., Teodorescu P.P. [1974], *Applications of the theory of distributions in mechanics*, Editura Academiei Romane and Abacus Press.

Oksendal B. [2003], *Stochastic differential equations. An introduction with applications*, Springer.

Panjer H.H., Willmot G.E. [1992], *Insurance risk models*, Society of Actuaries.

Redner S. [2001], *A guide to First-Passage processes*, Cambridge University Press.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. [1999], *Stochastic processes for insurance and finance*, Wiley.

Schuss Z. [1989], *Teoria i zastosowania stochastycznych równań różniczkowych*, PWN, Warszawa.

Wyderka Z. [1994], *Linear differential equations with measures as coefficients and control theory*, University of Silesia, Katowice.

### AN ALTERNATIVE FORMULATION OF RUIN PROBLEM

**Summary:** All kinds of human activity is accompanied by the risk, but the insurance business stands out from the rest of the fact that its subject is a risk itself. The paper presents an alternative formulation of the ruin problem. This approach does not require an advanced stochastic analysis, but the intensive use of the theory of generalized functions.

**Keywords:** ruin theory, Poisson process, generalized functions.