

# Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI

pod redakcją  
**Wandy Ronki-Chmielowiec**



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2011

Recenzenci: Jerzy Handschke, Jan Monkiewicz, Kazimierz Ortyński, Wanda Sułkowska,  
Włodzimierz Szkutnik, Tadeusz Szumlicz, Stanisław Wieteska

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie [www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl)

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych  
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl>  
oraz w The Central and Eastern European Online Library [www.ceeol.com](http://www.ceeol.com),  
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon [http://kangur.uek.krakow.pl/  
bazy\\_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się  
na stronie internetowej Wydawnictwa  
[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie  
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2011

**ISSN 1899-3192**

**ISBN 978-83-7695- 191-1**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	11
<b>Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik:</b> Formy zabezpieczenia emerytalnego w wybranych krajach europejskich .....	13
<b>Teresa H. Bednarczyk:</b> Działalność sektora ubezpieczeniowego a wzrost gospodarczy.....	23
<b>Anna Bera, Dariusz Pauch:</b> Programy edukacyjne jako instrument zwiększania świadomości ubezpieczeniowej w zakresie przestępczości ubezpieczeniowej .....	31
<b>Jacek Białek:</b> Ocena grupowa w analizie Otwartych Funduszy Emerytalnych.....	40
<b>Sylwia Bożek:</b> Czynności monitorujące i kontrolne w procesie zarządzania ryzykiem w przedsiębiorstwie ubezpieczeniowym .....	51
<b>Anna Celczyńska:</b> Należności od ubezpieczających z umów ubezpieczenia OC posiadaczy pojazdów mechanicznych.....	60
<b>Magdalena Chmielowiec-Lewczuk:</b> Problemy kalkulacji kosztów zakładów ubezpieczeń na tle powiązań w grupach finansowych .....	68
<b>Dominika Cichońska:</b> Rola ubezpieczeń w zarządzaniu ryzykiem w zakładach opieki zdrowotnej.....	78
<b>Krystyna Ciuman:</b> Zakłady ubezpieczeń a inne instytucje pośrednictwa finansowego w Polsce w latach 2005–2009.....	87
<b>Tadeusz Czernik:</b> O pewnym sformułowaniu zagadnienia ruiny .....	94
<b>Teresa Czerwińska:</b> Uwarunkowania polityki dywidend spółek ubezpieczeniowych.....	106
<b>Robert Dankiewicz:</b> Determinanty rozwoju rynku ubezpieczeń kredytu kupieckiego w Polsce .....	116
<b>Beata Dubiel:</b> Ubezpieczeniowe aspekty ryzyka ekologicznego .....	126
<b>Roman Garbicz:</b> Ryzyko starości jako element konstruowania systemów emerytalnych w Unii Europejskiej .....	135
<b>Waldemar Glabiszewski:</b> Znaczenie innowacji technologicznych w działalności ubezpieczeniowej .....	146
<b>Łukasz Gwizdała:</b> Możliwości analizy systemów bonus-malus w świetle procesów Markowa.....	156
<b>Magdalena Homa:</b> Kalkulacja składki w inwestycyjnych ubezpieczeniach na życie typu unit-linked .....	168
<b>Beata Jackowska:</b> Charakterystyka wybranych metod wyrównywania tablic trwania życia – wnioski dla zastosowań aktuarialnych .....	179

<b>Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka:</b> Grupowe ubezpieczenia na życie w sektorze MSP .....	190
<b>Marietta Janowicz-Lomott:</b> Produkty strukturyzowane w formie ubezpieczeń w Polsce.....	201
<b>Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska:</b> Próba zidentyfikowania czynników mających wpływ na wysokość składki przypisanej brutto w ubezpieczeniach komunikacyjnych w Polsce.....	213
<b>Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Pobłocka:</b> Ocena praktycznych metod szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych .....	222
<b>Piotr Kania:</b> Specjalistyczne fundusze inwestycyjne otwarte jako forma zewnętrznego zarządzania ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi zakładów ubezpieczeń na życie .....	232
<b>Robert Kurek:</b> Uprawnienia organów nadzoru w zakresie kontroli wypłacalności – ujęcie w Solvency II.....	241
<b>Jacek Lisowski:</b> Rola biegłego rewidenta w ocenie gospodarki finansowej ubezpieczyciela – unormowania prawne .....	250
<b>Jerzy Łańcucki:</b> Przesłanki i kierunki zmian w regulacjach dotyczących pośrednictwa ubezpieczeniowego .....	258
<b>Krzysztof Łyskawa:</b> Zagrożenie równowagi odszkodowania i szkody w obowiązkowych ubezpieczeniach mienia.....	267
<b>Aleksandra Małek:</b> Obowiązki banku jako ubezpieczającego w świetle Rekomendacji Dobrych Praktyk Bancassurance .....	277
<b>Piotr Manikowski:</b> Rynek ubezpieczeń w Polsce a cykle underwritingowe ..	286
<b>Dorota Maśniak:</b> Ubezpieczyciel jako główne ogniwo transgranicznego systemu ochrony ofiar wypadków drogowych .....	295
<b>Artur Mikulec:</b> Efektywność systemów emerytalnych krajów UE i EFTA w latach 2005–2008 .....	305
<b>Aniela Mikulska:</b> Małe i średnie przedsiębiorstwa jako odbiorcy usług ubezpieczeniowych .....	316
<b>Marek Monkiewicz:</b> Jednolity rynek ubezpieczeniowy UE w warunkach globalnego kryzysu finansowego 2007–2009 – pomoc publiczna a wspólnotowe reguły konkurencji .....	325
<b>Joanna Niżnik:</b> Reforma systemów emerytalnych Ameryki Łacińskiej na przykładzie Chile i Argentyny .....	335
<b>Magdalena Osak:</b> Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia .....	344
<b>Dorota Ostrowska:</b> Kapitał międzynarodowy a dostęp do produktów ubezpieczeniowych strategicznych dla rozwoju gospodarki polskiej.....	352
<b>Anna Ostrowska-Dankiewicz:</b> Polisa strukturyzowana jako forma inwestycji alternatywnej na rynku polskim.....	362
<b>Renata Pajewska-Kwaśny:</b> Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. I .....	373

<b>Monika Papież:</b> Analiza przyczynowości na rynku ubezpieczeń życiowych w latach 2003–2010 .....	383
<b>Agnieszka Pawłowska:</b> Ubezpieczenie <i>business interruption</i> w zarządzaniu ryzykiem przerw w działalności gospodarczej .....	394
<b>Krzysztof Piasecki:</b> Rozmyte zbiory probabilistyczne w rachunku aktuarnym .....	402
<b>Piotr Pisarewicz:</b> Rola funduszy inwestycyjnych w rozwoju programów emerytalnych w USA .....	409
<b>Ryszard Pukała:</b> Procesy integracyjne rynków ubezpieczeniowych krajów Europy Środkowej i Wschodniej .....	416
<b>Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel:</b> Medical savings account as a funding mechanism for health .....	426
<b>Grażyna Sordyl:</b> Rola i działalność holenderskiego funduszu gwarancyjnego (College voor Zorgverzekeringen CVZ) w obszarze prywatnych ubezpieczeń zdrowotnych .....	435
<b>Ewa Spigarska:</b> Sprawozdanie finansowe zakładu ubezpieczeń a Międzynarodowe Standardy Sprawozdawczości Finansowej w świetle wprowadzanych zmian .....	445
<b>Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska:</b> Organizacja audytu wewnętrznego w zakładach ubezpieczeń w świetle <i>Solvency II</i> oraz standardów audytu .....	454
<b>Anna Szkarłat-Koszalka:</b> Instrumenty systemu rachunkowości a kontrola bezpieczeństwa finansowego ubezpieczyciela .....	463
<b>Tomasz Szkutnik:</b> Funkcje łączące w agregacji ryzyka ubezpieczyciela .....	472
<b>Włodzimierz Szkutnik:</b> Ryzyko uruchomienia rezerw katastroficznych .....	483
<b>Anna Szymańska:</b> Czynniki determinujące wybór ubezpieczyciela na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych OC .....	494
<b>Ilona Tomaszewska:</b> Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. II .....	507
<b>Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz:</b> Świadomość ubezpieczeniowa oraz skłonność do ryzyka studentów .....	515
<b>Stanisław Wanat:</b> Modelowanie zależności w kontekście agregacji kapitałowych wymogów wypłacalności w <i>Solvency II</i> .....	525
<b>Stanisław Wieteska:</b> Adaptacja zakładów ubezpieczeń majątkowych do likwidacji skutków efektu cieplarnianego na terenie Polski .....	537
<b>Ewa Wycinka, Mirosław Szreder:</b> Statystyczna ocena wpływu przekraczania prędkości na liczbę wypadków drogowych w Polsce .....	547

## Summaries

<b>Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik:</b> Forms of retirement security in selected European countries .....	22
<b>Teresa H. Bednarczyk:</b> The activity of insurance sector vs. economic growth.....	30
<b>Anna Bera, Dariusz Pauch:</b> Educational programs as an instrument to increase awareness of the crime of insurance cover .....	39
<b>Jacek Bialek:</b> Group evaluation of open pension funds .....	50
<b>Sylvia Bożek:</b> Monitoring and control activities in the risk management process of an insurance company.....	59
<b>Anna Celczyńska:</b> Accounts receivable from motor vehicle owners insured under third party insurance agreements .....	67
<b>Magdalena Chmielowiec-Lewczuk:</b> Problems of cost calculation of insurance companies against the background of connections in financial groups .	77
<b>Dominika Cichońska:</b> The role of insurance in risk management in health care facilities .....	86
<b>Krystyna Ciuman:</b> Insurance companies versus other financial intermediaries in Poland in the years 2005–2009.....	93
<b>Tadeusz Czernik:</b> An alternative formulation of ruin problem.....	105
<b>Teresa Czerwińska:</b> Determinants of the dividend policy in the insurance companies .....	115
<b>Robert Dankiewicz:</b> Determinants of development of trade credit insurance market in Poland .....	125
<b>Beata Dubiel:</b> Insurance aspects of ecological risk .....	134
<b>Roman Garbiec:</b> The risk of old age as the component of constructing the pension systems in the European Union .....	145
<b>Waldemar Glabiszewski:</b> The importance of technological innovations in the insurance sector.....	155
<b>Łukasz Gwizdała:</b> The capabilities of analyzing bonus-malus systems in the light of Markov processes .....	167
<b>Magdalena Homa:</b> Correct calculation of net premium in unit-linked investment insurance .....	178
<b>Beata Jackowska:</b> Characterization of selected methods of the graduation of life tables in the perspective of their actuarial applications .....	189
<b>Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka:</b> Group life insurance in the SME sector.....	200
<b>Marietta Janowicz-Lomott:</b> Structured products in the form of insurance in Poland .....	212
<b>Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska:</b> An attempt to identify the factors having influence on the gross written premium in motor insurance in Poland .....	221

<b>Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Poblocka:</b> Evaluation of practical methods of estimation of incurred but not reported reserves in non-life insurance..	231
<b>Piotr Kania:</b> Specialized open-end investment funds as an external management form of investment funds of life insurance companies.....	240
<b>Robert Kurek:</b> Powers of supervision authorities regarding solvency control – Solvency II perspective.....	249
<b>Jacek Lisowski:</b> The role of the auditor in assessing the financial management of the insurer – legal norms .....	257
<b>Jerzy Łańcucki:</b> Regulations on insurance mediation – stressing premises and directions of change .....	266
<b>Krzysztof Łyskawa:</b> Threat of compensation balance and damages in compulsory property insurance .....	276
<b>Aleksandra Malek:</b> Duties of a bank acting as an coverage buying entity in the context of Recommendations on the Bankassurance Activity.....	285
<b>Piotr Manikowski:</b> The insurance market in Poland and underwriting cycles	294
<b>Dorota Maśniak:</b> Insurer as a major link in a cross-border system for protection of victims of road accidents – the role of co-operation of private and public entities.....	304
<b>Artur Mikulec:</b> Effectiveness of pension systems in EU and EFTA countries in the years 2005–2008.....	315
<b>Aniela Mikulska:</b> Small and medium-sized companies as recipients of insurance services .....	324
<b>Marek Monkiewicz:</b> Single insurance market in the EU and global financial crisis 2007–2009 – public intervention and Community competition rules.....	334
<b>Joanna Niżnik:</b> The reform of pension systems in Latin America. The Chilean and Argentinean models.....	343
<b>Magdalena Osak:</b> Medical savings account as a funding mechanism of health care.....	351
<b>Dorota Ostrowska:</b> The access to the insurance products strategic for the development of Polish economy in reference to the international capital..	361
<b>Anna Ostrowska-Dankiewicz:</b> Structured policy as a form of alternative investment on Polish market.....	372
<b>Renata Pajewska-Kwaśny:</b> Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part I.....	382
<b>Monika Papież:</b> Causality analysis on the life insurance market in the period 2003–2010 .....	393
<b>Agnieszka Pawłowska:</b> Business interruption insurance implementation in risk management for interrupted activities .....	401
<b>Krzysztof Piasecki:</b> Probabilistic fuzzy sets in the actuarial calculation .....	408
<b>Piotr Pisarewicz:</b> Mutual funds role in retirement programs' development in the USA.....	415

<b>Ryszard Pukała:</b> Integration processes of insurance markets in Middle and Eastern Europe.....	425
<b>Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel:</b> Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia .....	434
<b>Grażyna Sordyl:</b> The Role and Activity of the Dutch Guarantee Fund (College voor Zorgverzekeringen CVZ) in the area of private health insurance .....	444
<b>Ewa Spigarska:</b> Financial statement of insurance company vs. International Standards of Financial Reporting in the light of changes.....	453
<b>Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska:</b> Organization of internal auditing in insurance companies in the light of Solvency II and audit standards .....	462
<b>Anna Szkarłat-Koszalka:</b> Instruments of accounting system vs. control of financial security of an insurer.....	471
<b>Tomasz Szkutnik:</b> Copula functions in the aggregation of insurer risk .....	482
<b>Włodzimierz Szkutnik:</b> The risk of using catastrophic reserves .....	493
<b>Anna Szymańska:</b> Factors determining the choice of the insurer on the CR automobile insurance market.....	506
<b>Iłona Tomaszewska:</b> Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part II .....	513
<b>Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz:</b> Students' insurance awareness and risk seeking .....	524
<b>Stanisław Wanat:</b> Modeling of dependencies in the context of the aggregation of solvency capital requirements in Solvency II .....	536
<b>Stanisław Wieteska:</b> Property insurance companies adaptation process to reduce the impact of greenhouse effect in Poland .....	546
<b>Ewa Wycinka, Mirosław Szreder:</b> Statistical analysis of speeding as a factor affecting car accidents in Poland .....	556



**Łukasz Gwizdała**

Uniwersytet Gdański

---

## MOŻLIWOŚCI ANALIZY SYSTEMÓW BONUS-MALUS W ŚWIETLE PROCESÓW MARKOWA

---

**Streszczenie:** W artykule podjęto problem analizy surowości systemów bonus-malus stosowanych w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Skonstruowano cząstkowe mierników surowości w oparciu o analizę przykładowego systemu bonus-malus w świetle teorii procesów Markowa. W tym celu obliczono odpowiednie charakterystyki procesu Markowa. Ich analiza pozwoliła na wyprowadzenie trzech cząstkowych mierników oceny systemów bonus-malus: stosunek ogólnej oczekiwanej wartości zwyżek do ogólnej oczekiwanej wartości zniżek, wartość oczekiwana czasu upływającego od momentu wejścia ubezpieczonego do  $i$ -tej klasy taryfikacyjnej, do przejścia do klasy  $j$ -tej po raz pierwszy oraz średni względny przyrost prawdopodobieństwa pozostania lub powrotu do klasy ze zwyżką ubezpieczonego wylosowanego ze strefy malus systemu, przy wydłużeniu całkowitego czasu przebywania w systemie o rok.

**Słowa kluczowe:** bonus-malus, mierniki, surowość, proces Markowa.

### 1. Wstęp

System bonus-malus (SBM) to systemem zniżek i zwyżek powszechnie stosowany w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Wprowadzenie systemów bonus-malus ma na celu zróżnicowanie składki w zależności od ryzyka kierowców, utożsamianego w tym przypadku z liczbą szkód generowanych w ustalonym okresie. Kierowcy wykazujący się bezwypadkową jazdą nagradzani są zniżkami (bonusami), a ci, którzy zgłaszają roszczenia w związku z zaistniałą szkodą, karani są zwyżkami (malusami) składki. Tym samym ubezpieczeni w ustalonych interwałach czasowych przemieszczają się pomiędzy tzw. klasami taryfowymi systemu, którym przyporządkowano odpowiednie bonusy/malusy.

Z istoty SBM wynika, że mogą one przybrać bardziej lub mniej rygorystyczną formę. W niektórych kary są relatywnie łagodniejsze przy jednoczesnych wysokich i łatwych do uzyskania zniżkach, w innych zaś przeciwnie. Zadanie, którego podejmują się zakłady ubezpieczeń, polega na utworzeniu takiego systemu, który byłby korzystny zarówno dla ubezpieczyciela, jak i ubezpieczonego. Pomocne mogą okazać się tu miary pozwalające na analizę systemów bonus-malus w różnych aspek-

tach. Propozycje w tej dziedzinie zostały przedstawione przez J. Lemaire'a. Należą do nich: względny stacjonarny przeciętny poziom składki, współczynnik zmienności oraz elastyczność [Lemaire 1995]. W niniejszym opracowaniu podjęta zostanie próba konstrukcji innych tego typu wskaźników na podstawie analizy SBM w świetle teorii procesów Markowa.

## 2. Opis analizowanego systemu bonus-malus

W opracowaniu poddany zostanie analizie przykładowy SBM jednej z firm ubezpieczeniowych. Przedstawia go tab. 1.

**Tabela 1.** Analizowany SBM

Klasa	Procent składki podst.	Okres bezszkodowego przebiegu ubezpieczenia (klasa początkowa: 3)	Przemieszczenie w klasach po jednej szkodzie, za którą wypłacono ubezpieczenie
1B	200	–	1B
1A	150	–	1B
1	130	–	1B
2	115	–	1A
3	100	–	1
4	90	1 rok	2
5	80	2 lata	3
6	75	3 lata	4
7	70	4 lata	5
8	60	5 lat	6
9	50	6 lat	7
10	45	7 lat	8
11	40	8 lat	9

Źródło: opracowanie własne na podstawie OWU firmy ubezpieczeniowej 'X'.

System ów posiada trzynaście klas, w tym cztery klasy malus oraz osiem bonusowych – klasa trzecia jest klasą o podstawowym wymiarze składki. Po roku bezszkodowej jazdy ubezpieczony przechodzi do kolejnej, wyższej klasy taryfowej, a za każdą spowodowaną w tym okresie szkodę przesuwa się o dwie klasy niżej. Zatem, poczynając od klasy podstawowej, po ośmiu bezwypadkowych latach kierowca uzyska maksymalną zniżkę. Warto zwrócić uwagę, że przedstawiony SBM dopuszcza możliwość spadku z klasy najwyższej do najniższej w ciągu jednego tylko roku – przy zajściu sześciu lub więcej szkód.

Podstawową kwestią przy analizie systemów bonus-malus jest określenie prawdopodobieństwa pojawienia się 0,1,2, ...,  $n$  szkód w ciągu roku dla pojedynczego ubezpieczonego. Do aproksymacji rozkładu liczby roszczeń często wykorzystuje się rozkład Poissona, gdzie  $\lambda$  to współczynnik szkodowości.

Kłopotliwym problemem jest to, że współczynnik szkodowości może być inny dla każdego ubezpieczonego, a przecież on ostatecznie determinuje rozkład prawdo-

podobieństwa omawianej zmiennej losowej. Dlatego w opracowaniu tym przyjęte zostanie założenie, że każdy ubezpieczony charakteryzuje się takim samym poziomem szkodowości. Ponadto sam współczynnik szkodowości  $\lambda$  często traktowany jest jako zmienna losowa, którą analizuje się na podstawie informacji *a priori* oraz próbkowych (zob. [Pobłocka, Szreder 2005]), co stanowi dość złożony problem, niebędący jednak przedmiotem opracowania, dlatego też szkodowość będzie wyrażona w najprostszy sposób jako iloraz liczby zgłoszonych szkód i liczby wykupionych polis OC w oparciu o dane dla całego kraju (Polski). Do obliczeń wykorzystany zostanie współczynnik szkodowości  $\lambda = 0,0552$  z roku 2009 [*Ubezpieczenia komunikacyjne...* 2010]. W systemach bonus-malus znaczenie ma prawdopodobieństwo wystąpienia szkód w ciągu jednego roku, zatem:

$$P_x = \frac{(0,0552)^x}{x!} e^{-0,0552}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

W obliczu reguł rządzących analizowanym SBM należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa przyjmie sześć następujących wartości: '0', '1', '2', '3', '4', '5' oraz '6 i więcej'.

**Tabela 2.** Rozkład prawdopodobieństwa liczby zgłoszonych roszczeń w ciągu roku (przy założeniu rozkładu Poissona z  $\lambda = 0,0552$ )

Liczba roszczeń	Prawdopodobieństwo
0	0,9463
1	0,0523
2	0,0014
3	$2,653 \times 10^{-5}$
4	$3,661 \times 10^{-7}$
5	$4,042 \times 10^{-9}$
6 i więcej	$3,747 \times 10^{-11}$

Źródło: opracowanie własne.

Rozważane prawdopodobieństwa prezentuje tab. 2. Ich znajomość umożliwi obliczenie wartości podstawowych parametrów procesu Markowa charakterystycznych dla analizowanego SBM.

### 3. System bonus-malus w ujęciu procesów Markowa

W pierwszej kolejności poczynione zostaną następujące założenia upraszczające obliczenia: system jest jednorodny w czasie, tzn. prawdopodobieństwa przejścia ubezpieczonego z klasy taryfowej  $i$  do  $j$  są identyczne w każdym kolejnym kroku (roku funkcjonowania systemu); każdy ubezpieczony przystępujący do systemu rozpoczyna od klasy ze stawką podstawową (trzeciej). Drugie z założeń pozwala bezpośrednio określić wektor prawdopodobieństw stanu początkowego  $q_i(0)$ :

$$q_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 1B \\ 0 & \text{dla } i = 1A \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{dla } i = 3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \text{dla } i = 10 \\ 0 & \text{dla } i = 11 \end{cases}, \quad (2)$$

gdzie:  $i$  to numer klasy taryfowej.

Pierwsze z założeń znacząco ułatwia skonstruowanie macierzy prawdopodobieństw przejścia  $\Pi$ , bazując na rozkładzie prawdopodobieństwa liczby zgłoszonych roszczeń w ciągu roku (tab. 2):

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0,0537 & 0,9463 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0537 & 0 & 0,9463 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0537 & 0 & 0 & 0,9463 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0015 & 0,0522 & 0 & 0 & 0,9463 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0015 & 0 & 0,0522 & 0 & 0 & 0,9463 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,69 \times 10^{-5} & 0,0014 & 0 & 0,0522 & 0 & 0 & 0,9463 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,69 \times 10^{-5} & 0 & 0,0014 & 0 & 0,0522 & 0 & 0 & 0,9463 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,70 \times 10^{-7} & 2,65 \times 10^{-5} & 0 & 0,0014 & 0 & 0,0522 & 0 & 0 & 0,9463 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,70 \times 10^{-7} & 0 & 2,65 \times 10^{-5} & 0 & 0,0014 & 0 & 0,0522 & 0 & 0 & 0,9463 & 0 & 0 & 0 \\ 4,08 \times 10^{-9} & 3,66 \times 10^{-7} & 0 & 2,65 \times 10^{-5} & 0 & 0,0014 & 0 & 0,0522 & 0 & 0 & 0,9463 & 0 & 0 \\ 4,08 \times 10^{-9} & 0 & 3,66 \times 10^{-7} & 0 & 2,65 \times 10^{-5} & 0 & 0,0014 & 0 & 0,0522 & 0 & 0 & 0,9463 & 0 \\ 3,75 \times 10^{-11} & 4,04 \times 10^{-9} & 0 & 3,66 \times 10^{-7} & 0 & 2,65 \times 10^{-5} & 0 & 0,0014 & 0 & 0,0522 & 0 & 0 & 0,9463 \\ 3,75 \times 10^{-11} & 0 & 4,04 \times 10^{-9} & 0 & 3,66 \times 10^{-7} & 0 & 2,65 \times 10^{-5} & 0 & 0,0014 & 0 & 0,0522 & 0 & 0,9463 \end{bmatrix}$$

gdzie:  $i = 1B, 1A, 1, 2, \dots, 10, 11; j = 1B, 1A, 1, 2, \dots, 10, 11$ .

Przykładowo: macierz przejścia wskazuje, że prawdopodobieństwo przemieszczenia polisy z klasy 2 do 3 w ciągu roku wynosi 0,0522. Prawdopodobieństwa sumują się do jedności w wierszach, gdyż w macierzy ujęte zostały wszystkie istniejące klasy taryfikacyjne, a polisa po roku musi przejść do jednej z nich. Zależność ta nie jest idealnie spełniona w prezentowanej macierzy ze względu na zaokrąglone wartości prawdopodobieństw, aczkolwiek w obliczeniach, których wyniki pojawiają się w dalszej części, wykorzystano wartości dokładne. Dzięki macierzy prawdopodobieństw przejścia otrzymać można prawdopodobieństwa przejścia z klasy do klasy w  $m$  krokach/latach wg następującej formuły:  $\Pi^{(m)} = \Pi^{(m-1)}\Pi$ . Wówczas macierz  $\Pi^{(m)}$  zawiera zestaw prawdopodobieństw  $p_{ij}^{(m)}$  dla wszystkich par klas.

Z punktu widzenia konstrukcji cząstkowych mierników oceny SBM jedną z podstawowych kwestii jest wyznaczenie prawdopodobieństw stanu równowagi  $q_i^*$ .

W przypadku analizowanego systemu sprowadza się to do rozwiązania następującego układu równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{1B}^* = q_{1B}^* p_{1B,1B} + q_{1A}^* p_{1A,1B} + q_1^* p_{1,1B} + q_2^* p_{2,1B} + \dots + q_{10}^* p_{10,1B} + q_{11}^* p_{11,1B} \\ q_{1A}^* = q_{1B}^* p_{1B,1A} + q_{1A}^* p_{1A,1A} + q_1^* p_{1,1A} + q_2^* p_{2,1A} + \dots + q_{10}^* p_{10,1A} + q_{11}^* p_{11,1A} \\ q_1^* = q_{1B}^* p_{1B,1} + q_{1A}^* p_{1A,1} + q_1^* p_{11} + q_2^* p_{21} + \dots + q_{10}^* p_{10,1} + q_{11}^* p_{11,1} \\ q_2^* = q_{1B}^* p_{1B,2} + q_{1A}^* p_{1A,2} + q_1^* p_{12} + q_2^* p_{22} + \dots + q_{10}^* p_{10,2} + q_{11}^* p_{11,2} \\ \vdots \\ q_{10}^* = q_{1B}^* p_{1B,10} + q_{1A}^* p_{1A,10} + q_1^* p_{1,10} + q_2^* p_{2,10} + \dots + q_{10}^* p_{10,10} + q_{11}^* p_{11,10} \\ q_{11}^* = q_{1B}^* p_{1B,11} + q_{1A}^* p_{1A,11} + q_1^* p_{1,11} + q_2^* p_{2,11} + \dots + q_{10}^* p_{10,11} + q_{11}^* p_{11,11} \\ 1 = q_{1B}^* + q_{1A}^* + q_1^* + q_2^* + \dots + q_{10}^* + q_{11}^* \end{array} \right. , \quad (3)$$

Jest to układ czternastu równań z trzynastoma niewiadomymi, który rozwiązano z wykorzystaniem pseudoinwersji Moore'a-Penrose'a (zob. [Gill 2011; Harville 2008]), co ostatecznie wskazuje na wartości prawdopodobieństw stanu równowagi (tab. 3), a tym samym na rozkład ergodyczny, do którego system dąży. Rozkład ten charakteryzuje się przeważnie tym, że po odpowiednio długim czasie większość ubezpieczonych znajdzie się w najkorzystniejszych klasach systemu [Cieślik 2010].

**Tabela 3.** Prawdopodobieństwa równowagi

Numer klasy $i$	$q_i^*$
1B	$3,85524 \times 10^{-7}$
1A	$1,06785 \times 10^{-6}$
1	$3,98575 \times 10^{-6}$
2	$1,02916 \times 10^{-5}$
3	$4,17523 \times 10^{-5}$
4	$9,67554 \times 10^{-5}$
5	0,000445496
6	0,000871111
7	0,004865063
8	0,007222406
9	0,052975993
10	0,050130963
11	0,88333473
Razem:	1

Źródło: opracowanie własne.

Interpretując przykładowo powyższe wyniki, można stwierdzić, że gdy SBM funkcjonuje przez dostatecznie długi czas, to prawdopodobieństwo, że wylosowana polisa znajduje się w klasie 11, wynosi 0,88. W innym ujęciu powiedzieć można, że

w długim okresie ubezpieczeni przebywają w klasie 11 przeciętnie przez 88% lat obserwacji systemu.

#### 4. Wyprowadzenie cząstkowych mierników oceny systemu bonus-malus

Wyprowadzone macierze przejścia w  $m$  latach wg formuły  $\Pi^{(m)} = \Pi^{(m-1)}\Pi$  oraz prawdopodobieństwa stanu równowagi posłużą do wyznaczenia cząstkowych mierników oceny SBM.

Jakkolwiek, w pewnych warunkach, sama analiza rozkładu prawdopodobieństw równowagi mogłaby posłużyć do oceny systemu, to nie daje ona podstaw do porównań pomiędzy różnymi systemami: niejednokrotnie różnią się one między sobą liczbą klas taryfowych oraz wartością przyznawanych bonus i malusów. Wpływ tych dwóch czynników należałoby uwzględnić.

W pierwszym kroku zatem obliczone zostaną oczekiwane wartości uzyskanych zniżek/zwyżek składki w poszczególnych klasach taryfowych w oparciu o prawdopodobieństwa stanu równowagi. Otrzymane wartości oczekiwane odnieść się będą do systemu w wymiarze długookresowym wg następujących formuł:

$$E_i^m(t_i) = t_i \cdot q_i^* \quad E_i^b(t_i) = t_i \cdot q_i^*, \quad (4)$$

gdzie:  $E_i^m(t_i)$  – oczekiwana wartość wyżki w  $i$ -tej klasie malus;

$E_i^b(t_i)$  – oczekiwana wartość zniżki w  $i$ -tej klasie bonus;

$q_i^*$  – prawdopodobieństwo równowagi dla  $i$ -tej klasy;

$t_i$  – wartość wyżki lub zniżki w  $i$ -tej klasie taryfikacyjnej<sup>1</sup>;

$i = 1B, 1A, 1, 2$  (dla klas malus);

$i = 4, 5, 6, \dots, 10, 11$  (dla klas bonus).

Tabela 4 wskazuje na oczekiwane wartości dla poszczególnych klas taryfikacyjnych (klasa podstawowa została pominięta). W ten sposób uwzględniona została cecha systemu, jaką są stawki taryfikacyjne w klasach.

**Tabela 4.** Oczekiwane wartości uzyskanych wyżek/zniżek w klasach bonus-malus

Klasa taryfikacyjna – $i$	Zwyżka/zniżka $t$ w klasie	$E_i^m(t_i)$	$E_i^b(t_i)$
1	2	3	4
1B	1	$3,85524 \times 10^{-7}$	–
1A	0,5	$5,33927 \times 10^{-7}$	–
1	0,3	$1,19573 \times 10^{-6}$	–
2	0,15	$1,54374 \times 10^{-6}$	–
4	0,1	–	$9,67554 \times 10^{-6}$

<sup>1</sup> Przy wyznaczaniu wartości wyżki/zniżki  $t_i$  w klasach przyjmuje się założenie, że stawka podstawowa jest jednostkowa.

Tabela 4. cd.

1	2	3	4
5	0,2	–	$8,90993 \times 10^{-5}$
6	0,25	–	0,000217778
7	0,3	–	0,001459519
8	0,4	–	0,002888962
9	0,5	–	0,026487996
10	0,55	–	0,02757203
11	0,6	–	0,530000838

Źródło: opracowanie własne.

Pozostała jeszcze do rozwiązania kwestia liczby klas w systemie. Doprowadzić do tego można poprzez zsumowanie otrzymanych oczekiwanych wartości w obrębie klas malus, a także w obrębie klas bonus. Wówczas uzyskane zostaną: ogólna oczekiwana wartość zwyżek dla klas malus, jako:

$$E^m(t) = \sum_{i=1B}^2 E_i^m(t_i), \quad (5)$$

gdzie:  $E^m(t)$  – ogólna oczekiwana wartość zwyżek;

$E_i^m(t_i)$  – oczekiwana wartość zwyżki w  $i$ -tej klasie malus;

i ogólna oczekiwana wartość zniżek dla klas bonus, jako:

$$E^b(t) = \sum_{i=4}^{11} E_i^b(t_i), \quad (6)$$

gdzie:  $E^b(t)$  – ogólna oczekiwana wartość zniżek;

$E_i^b(t_i)$  – oczekiwana wartość zniżki w  $i$ -tej klasie bonus.

W rozważanym przypadku wartości te będą kształtowały się następująco:  $E^m(t) = 3,65891 \times 10^{-6}$ ;  $E^b(t) = 0,588725898$ . Obliczenie wielkości stosunkowej tych dwóch parametrów  $\frac{E^m(t)}{E^b(t)} = 6,21497 \times 10^{-6}$  pozwoli na ocenę surowości SBM,

ponieważ w im większym stopniu zwyżki stawki pokrywają zniżki, tym system uchodzi za bardziej rygorystyczny. Warto zwrócić uwagę, że tak skonstruowany miernik ujmuje dwa aspekty, którymi mogą się różnić systemy bonus-malus: liczbę klas i wartość zwyżek/zniżek stawki podstawowej. Przykładowo: podniesienie zwyżek, przy pozostałych warunkach niezmiennych, zwiększy wartość miernika, podobnie jak, również przy niezmiennych pozostałych warunkach, likwidacja niektórych klas bonusowych.

Kolejnym cząstkowym miernikiem oceny SBM będzie wartość oczekiwana zmiennej losowej  $T$ , oznaczającej czas, jaki upływa od momentu wejścia ubezpie-

czonę do  $i$ -tej klasy taryfikacyjnej do przejścia do klasy  $j$ -tej po raz pierwszy. Zadanie zatem sprowadza się do wyznaczenia rozkładu tej zmiennej. Klasę  $i$ -tą oraz  $j$ -tą można dowolnie wybrać. W opracowaniu rozważona zostanie sytuacja, w której  $T$  to czas od wejścia do maksymalnej klasy malus (1B) do pierwszego przejścia do klasy podstawowej (3).

Rozkład zmiennej losowej  $T$  zostanie wyznaczony z wykorzystaniem prawdopodobieństw  $p_{ij}^m$ , gdzie  $i = 1B$ , a  $j = 3$ , zawartych w macierzach przejścia w  $m$  latach  $\Pi^{(m)}$ . Przy czym macierze przejścia  $\Pi^{(m)}$  trzeba zmodyfikować tak, aby docelowa klasa taryfikacyjna była klasą pochłaniającą. Ze skonstruowanych w ten sposób macierzy przejścia odczytać można prawdopodobieństwa przejścia z klasy uznanej za początkową do docelowej w przeciągu  $m$  lat, które interpretuje się jako wartości dystrybuanty czasu do pierwszego wejścia w stan docelowy, czyli:

$$F_T(m) = P[T \leq m] = p_{1B,3}^{(m)}. \quad (7)$$

Poprzez odejmowanie kolejnych wartości dystrybuant uzyskany zostanie rozkład prawdopodobieństwa  $p_T(m)$  zmiennej losowej  $T$ . Rozważono dość długi, 25-letni okres funkcjonowania SBM. Wyniki obliczeń, łącznie z szukaną wartością oczekiwaną zmiennej losowej  $E(T)$ , zaprezentowano w tab. 5.

**Tabela 5.** Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $T$

$T$			
$m$	$F_T(m)$	$p_T(m)$	$m \cdot p_T(m)$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0,801877	0,801877	3,207508
5	0,844941	0,043064	0,215321
6	0,888005	0,043064	0,258385
⋮	⋮	⋮	⋮
24	0,9999995	4,43E-07	1,06E-05
25	0,9999998	2,26E-07	5,65E-06
$E(T_2)$		4,542313	

Źródło: opracowanie własne.

Interpretacja otrzymanej w tab. 5 wartości oczekiwanej brzmi następująco: ubezpieczonemu, który znalazł się w klasie z maksymalną zwyżką, powrót do klasy podstawowej zajmuje przeciętnie 4,5 roku, czyli o 0,5 roku dłużej, niż wynosi czas najkrótszy (4 lata).

Uogólniając, im wyższa wartość oczekiwana rozważanych zmiennych losowych, tym SBM jest bardziej rygorystyczny dla ubezpieczonych. W interpretacji  $E(T)$  spe-



cialnie pominięto informacje o 25-letnim okresie funkcjonowania systemu, gdyż dystrybuanta dla roku 25 jest bardzo bliska jedności, stąd obliczanie szeregu kolejnych prawdopodobieństw  $p_T(m)$  nie przyczynia się istotnie do zmiany wartości oczekiwanej zmiennej losowej  $T$ .

Ostatni cząstkowy miernik oceny SBM pozwoli odpowiedzieć na pytanie: o ile przeciętnie zmieni się prawdopodobieństwo pozostania lub powrotu do klasy ze zwykłą stawki ubezpieczonego wylosowanego z strefy malus systemu, jeśli jego całkowity czas przebywania w systemie wydłużony zostałby o rok.

Należy zatem poznać prawdopodobieństwo tego, że polisa znajdująca się w konkretnej klasie malus pozostanie w niej lub przejdzie do innej klasy malus w ciągu  $m$  lat. W efekcie, dla kolejnych coraz dłuższych okresów, otrzymane zostaną pewne wartości prawdopodobieństwa dla każdej klasy malus. Niech będą one oznaczone przez:

$$p_i^{(m)} = \sum_j p_{ij}^{(m)}, \quad (8)$$

gdzie:  $p_i^{(m)}$  – prawdopodobieństwo, że polisa z  $i$ -tej klasy malus w niej pozostanie lub przejdzie do innej klasy malus w ciągu  $m$  lat;

$i$  – numer rozważanej klasy malus;

$j$  – kolejne numery istniejących klas malus, w tym  $j = i$ .

Jednakże, z punktu widzenia postawionego problemu, bardziej interesujące jest prawdopodobieństwo łączne dla wszystkich klas malus. Jeśli ubezpieczeni rozkładaliby się równomiernie pomiędzy klasy malusowe, wówczas wystarczyłoby zsumowanie prawdopodobieństw  $p_i^{(m)}$  po  $i$ , a następnie podzielenie otrzymanej wartości przez liczbę klas malus. Aczkolwiek wiadomo, z rozkładu prawdopodobieństw stanu równowagi, że w długim okresie ubezpieczeni nie są równomiernie rozdzielni pomiędzy klasy malusowe. Informacja ta zostanie wykorzystana do utworzenia wag dla odpowiednich klas malus, w oparciu o prawdopodobieństwa równowagi, wg następującej formuły:

$$W_i = \frac{q_i^*}{\sum_j q_j^*}, \quad (9)$$

gdzie:  $W_i$  – waga dla  $i$ -tej klasy malus;

$i$  – numer  $i$ -tej klasy malus;

$j$  – numery kolejnych klas malus, w tym  $j = i$ .

Ostatecznie prawdopodobieństwo, że ubezpieczony po  $m$  latach wciąż będzie w strefie malus lub do niej powróci, wyrażone będzie przez:

$$p_{ml}^{(m)} = \sum_i \sum_j W_i p_{ij}^{(m)}, \quad (10)$$

gdzie:  $p_{ml}^{(m)}$  – prawdopodobieństwo, że ubezpieczony po  $m$  latach wciąż będzie w strefie malus lub do niej powróci;

$i$  – numer  $i$ -tej klasy malus;

$j$  – numery kolejnych klas malus, w tym  $j = i$ .

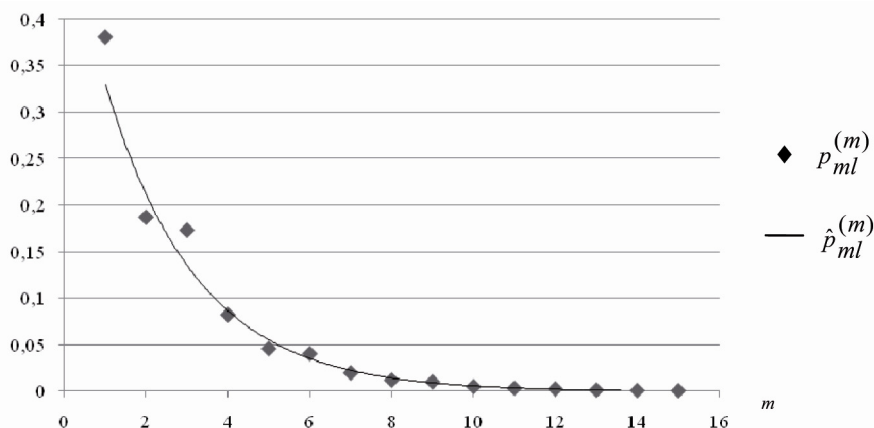
**Tabela 6.** Prawdopodobieństwa pozostania lub powrotu ubezpieczonego do klas malus w  $m$  latach

$m$	$p_{ml}^{(m)}$
1	0,3809
2	0,187258
3	0,173382
4	0,082288
5	0,046057
6	0,040598
7	0,019949
8	0,012212
9	0,010292
10	0,005228
11	0,003402
12	0,002751
13	0,001444
14	0,000981
15	0,000767

Źródło: opracowanie własne.

Obliczone wartości prawdopodobieństw  $p_{ml}^{(m)}$  dla  $m = 1, \dots, 15$  przedstawia tab. 6. Zaobserwować można, że z roku na rok maleją one w tempie wykładniczym, co potwierdza wykres otrzymanych wyników (wykres 1). Stąd też zmiany prawdopodobieństw zostaną opisane wykładniczą funkcją regresji, która wyznaczona będzie metodą najmniejszych kwadratów. Wybrano funkcję o postaci wykładniczej także wobec dogodności w interpretacji jej współczynnika regresji w odniesieniu do postawionego problemu.

Graficzną postać funkcji wykładniczej zawiera powyższy wykres, jest ona dana przez równość:  $\hat{p}_{ml}^{(m)} = 0,515562 \times 0,639734^m$ , a jej współczynnik determinacji o wartości  $\sim 0,99$  świadczy o dobrym dopasowaniu do rzeczywistych wartości  $p_{ml}^{(m)}$ . Współczynnik regresji (0,639734) informuje, że dla ubezpieczonego wylosowanego ze strefy malus systemu prawdopodobieństwo pozostania lub powrotu do tej strefy zmaleje przeciętnie o 36,027% przy wydłużeniu o rok okresu przebywania w SBM.



**Rys. 1.** Prawdopodobieństwa pozostania lub powrotu ubezpieczonego do klas malus w  $m$  latach

Źródło: opracowanie własne.

Naturalnie, w przypadku większości SBM mowa będzie o przeciętnym zmniejszeniu się wartości prawdopodobieństwa, tzn.  $(b - 1) \times 100\%$  będzie mniejsze od zera. Stąd system określić można jako bardziej rygorystyczny, im większy będzie średni przyrost względny dla oszacowanej funkcji regresji. Uogólniając, miernik ten pozwala ustalić, w jakim stopniu klasy malus systemu są zdolne do utrzymywania i do przyciągania ubezpieczonych, a ściślej – w jakim tempie tę zdolność tracą.

## 5. Zakończenie

Skonstruowano trzy cząstkowe mierniki oceny SBM określone jako: stosunek oczekiwanych wartości zniżek i zwyżek w klasach taryfikacyjnych, wartość oczekiwana czasu przejścia po raz pierwszy z klasy  $i$ -tej do  $j$ -tej oraz średni względny przyrost prawdopodobieństwa pozostania lub powrotu ubezpieczonego do strefy malus systemu. Pierwszy z tych wskaźników ujmuje system w aspekcie długookresowym, pozostałe można kształtować dowolnie – w zależności od obranej długości funkcjonowania systemu. Omawiane mierniki można wyznaczyć przy osłabionych założeniach dotyczących systemu, np. przy zniesieniu założenia dotyczącego jednorodności procesu Markowa lub rezygnacji z rozkładu Poissona na rzecz innego opisującego rozkład liczby roszczeń w ciągu roku, nie zmienia to jednak ich istoty.

Kontynuując rozważania odnośnie do wyprowadzonych cząstkowych mierników oceny SBM, należałoby sprawdzić relacje, jakie zachodzą pomiędzy nimi. W szczególności w zakresie korelacji poprzez badanie ich zachowania dla wielu różnych systemów. Jednokierunkowe zmiany współczynników znacząco podniosłyby ich

wartość w kontekście możliwości utworzenia ogólnego indeksu surowości systemu na podstawie analizy głównych składowych.

## Literatura

- Balicki A. [2003], *Indeks surowości systemu bonus-malus w ubezpieczeniach komunikacyjnych*, „Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego” nr 1/2003, Fundacja Rozwoju Uniwersytetu Gdańskiego, Sopot.
- Benjamin J.R., Cornell C.A. [1997], *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Cieślak B. [2010], *Wybrane podejścia do modelowania systemów bonus-malus i ich współistnienia na rynku*, Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych, z. 21/2010, SGH, Warszawa.
- Gill J., *What is the generalized inverse of a matrix?*, <http://artsci.wustl.edu/~jgill/papers/ginv.pdf> [15.03.2011].
- Harville D.A. [2008], *Matrix algebra from statistician's perspective*, Springer, New York.
- Lemaire J. [1995], *Bonus-malus system in automobile insurance*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Pobłocka A., Szreder M. [2005], *Bayesowska aktualizacja rozkładu liczby odszkodowań w ubezpieczeniach komunikacyjnych*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1088, Wyd. AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- Ubezpieczenia komunikacyjne w latach 2005–2009. Wspólny raport Urzędu Komisji Nadzoru Finansowego (UKNF) i Ubezpieczeniowego Funduszu Gwarancyjnego (UFG)*, Komisja Nadzoru Finansowego, 3 sierpnia 2010, [http://www.knf.gov.pl/Images/Ubezpieczenia\\_komunikacyjne\\_KNF\\_UFG\\_tcm75-23579.pdf](http://www.knf.gov.pl/Images/Ubezpieczenia_komunikacyjne_KNF_UFG_tcm75-23579.pdf) [6.01.2011].

## THE CAPABILITIES OF ANALYZING BONUS-MALUS SYSTEMS IN THE LIGHT OF MARKOV PROCESSES

**Summary:** The evaluation of bonus-malus system toughness can be accomplished with properly constructed indicators. Basing on Markov process theory, the attempt to construct such partial indicators was made. Accordingly, appropriate Markov process characteristics were calculated for the chosen bonus-malus system. Their analysis led to the derivation of three partial bonus-malus system indicators: the overall expected value of bonuses to overall expected value of maluses ratio, the expected value of time that elapsed from the moment an insured entered the tariff class  $i$  to the moment of passing to the tariff class  $j$  for the first time and the average relative growth of probability that a randomly chosen insured from malus area would stay or return to a malus tariff class when total time spent in the system increases by one year.

**Keywords:** bonus-malus, indicator, toughness, Markov process.