

Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI

pod redakcją
Wandy Ronki-Chmielowiec



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Jerzy Handschke, Jan Monkiewicz, Kazimierz Ortyński, Wanda Sułkowska,
Włodzimierz Szkutnik, Tadeusz Szumlicz, Stanisław Wieteska

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl>
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon [http://kangur.uek.krakow.pl/
bazy_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695- 191-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	11
Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Formy zabezpieczenia emerytalnego w wybranych krajach europejskich	13
Teresa H. Bednarczyk: Działalność sektora ubezpieczeniowego a wzrost gospodarczy.....	23
Anna Bera, Dariusz Pauch: Programy edukacyjne jako instrument zwiększania świadomości ubezpieczeniowej w zakresie przestępczości ubezpieczeniowej	31
Jacek Białek: Ocena grupowa w analizie Otwartych Funduszy Emerytalnych.....	40
Sylwia Bożek: Czynności monitorujące i kontrolne w procesie zarządzania ryzykiem w przedsiębiorstwie ubezpieczeniowym	51
Anna Celczyńska: Należności od ubezpieczających z umów ubezpieczenia OC posiadaczy pojazdów mechanicznych.....	60
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problemy kalkulacji kosztów zakładów ubezpieczeń na tle powiązań w grupach finansowych	68
Dominika Cichońska: Rola ubezpieczeń w zarządzaniu ryzykiem w zakładach opieki zdrowotnej.....	78
Krystyna Ciuman: Zakłady ubezpieczeń a inne instytucje pośrednictwa finansowego w Polsce w latach 2005–2009.....	87
Tadeusz Czernik: O pewnym sformułowaniu zagadnienia ruiny	94
Teresa Czerwińska: Uwarunkowania polityki dywidend spółek ubezpieczeniowych.....	106
Robert Dankiewicz: Determinanty rozwoju rynku ubezpieczeń kredytu kupieckiego w Polsce	116
Beata Dubiel: Ubezpieczeniowe aspekty ryzyka ekologicznego	126
Roman Garbicz: Ryzyko starości jako element konstruowania systemów emerytalnych w Unii Europejskiej	135
Waldemar Glabiszewski: Znaczenie innowacji technologicznych w działalności ubezpieczeniowej	146
Łukasz Gwizdała: Możliwości analizy systemów bonus-malus w świetle procesów Markowa.....	156
Magdalena Homa: Kalkulacja składki w inwestycyjnych ubezpieczeniach na życie typu unit-linked	168
Beata Jackowska: Charakterystyka wybranych metod wyrównywania tablic trwania życia – wnioski dla zastosowań aktuarialnych	179

Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Grupowe ubezpieczenia na życie w sektorze MSP	190
Marietta Janowicz-Lomott: Produkty strukturyzowane w formie ubezpieczeń w Polsce.....	201
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: Próba zidentyfikowania czynników mających wpływ na wysokość składki przypisanej brutto w ubezpieczeniach komunikacyjnych w Polsce.....	213
Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Pobłocka: Ocena praktycznych metod szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych	222
Piotr Kania: Specjalistyczne fundusze inwestycyjne otwarte jako forma zewnętrznego zarządzania ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi zakładów ubezpieczeń na życie	232
Robert Kurek: Uprawnienia organów nadzoru w zakresie kontroli wypłacalności – ujęcie w Solvency II.....	241
Jacek Lisowski: Rola biegłego rewidenta w ocenie gospodarki finansowej ubezpieczyciela – unormowania prawne	250
Jerzy Łańcucki: Przesłanki i kierunki zmian w regulacjach dotyczących pośrednictwa ubezpieczeniowego	258
Krzysztof Łyskawa: Zagrożenie równowagi odszkodowania i szkody w obowiązkowych ubezpieczeniach mienia.....	267
Aleksandra Małek: Obowiązki banku jako ubezpieczającego w świetle Rekomendacji Dobrych Praktyk Bancassurance	277
Piotr Manikowski: Rynek ubezpieczeń w Polsce a cykle underwritingowe ..	286
Dorota Maśniak: Ubezpieczyciel jako główne ogniwo transgranicznego systemu ochrony ofiar wypadków drogowych	295
Artur Mikulec: Efektywność systemów emerytalnych krajów UE i EFTA w latach 2005–2008	305
Aniela Mikulska: Małe i średnie przedsiębiorstwa jako odbiorcy usług ubezpieczeniowych	316
Marek Monkiewicz: Jednolity rynek ubezpieczeniowy UE w warunkach globalnego kryzysu finansowego 2007–2009 – pomoc publiczna a wspólnotowe reguły konkurencji	325
Joanna Niżnik: Reforma systemów emerytalnych Ameryki Łacińskiej na przykładzie Chile i Argentyny	335
Magdalena Osak: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia	344
Dorota Ostrowska: Kapitał międzynarodowy a dostęp do produktów ubezpieczeniowych strategicznych dla rozwoju gospodarki polskiej.....	352
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Polisa strukturyzowana jako forma inwestycji alternatywnej na rynku polskim.....	362
Renata Pajewska-Kwaśny: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. I	373

Monika Papież: Analiza przyczynowości na rynku ubezpieczeń życiowych w latach 2003–2010	383
Agnieszka Pawłowska: Ubezpieczenie <i>business interruption</i> w zarządzaniu ryzykiem przerw w działalności gospodarczej	394
Krzysztof Piasecki: Rozmyte zbiory probabilistyczne w rachunku aktuarnym	402
Piotr Pisarewicz: Rola funduszy inwestycyjnych w rozwoju programów emerytalnych w USA	409
Ryszard Pukała: Procesy integracyjne rynków ubezpieczeniowych krajów Europy Środkowej i Wschodniej	416
Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel: Medical savings account as a funding mechanism for health	426
Grażyna Sordyl: Rola i działalność holenderskiego funduszu gwarancyjnego (College voor Zorgverzekeringen CVZ) w obszarze prywatnych ubezpieczeń zdrowotnych	435
Ewa Spigarska: Sprawozdanie finansowe zakładu ubezpieczeń a Międzynarodowe Standardy Sprawozdawczości Finansowej w świetle wprowadzanych zmian	445
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organizacja audytu wewnętrznego w zakładach ubezpieczeń w świetle <i>Solvency II</i> oraz standardów audytu	454
Anna Szkarłat-Koszalka: Instrumenty systemu rachunkowości a kontrola bezpieczeństwa finansowego ubezpieczyciela	463
Tomasz Szkutnik: Funkcje łączące w agregacji ryzyka ubezpieczyciela	472
Włodzimierz Szkutnik: Ryzyko uruchomienia rezerw katastroficznych	483
Anna Szymańska: Czynniki determinujące wybór ubezpieczyciela na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych OC	494
Ilona Tomaszewska: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. II	507
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Świadomość ubezpieczeniowa oraz skłonność do ryzyka studentów	515
Stanisław Wanat: Modelowanie zależności w kontekście agregacji kapitałowych wymogów wypłacalności w <i>Solvency II</i>	525
Stanisław Wieteska: Adaptacja zakładów ubezpieczeń majątkowych do likwidacji skutków efektu cieplarnianego na terenie Polski	537
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statystyczna ocena wpływu przekraczania prędkości na liczbę wypadków drogowych w Polsce	547

Summaries

Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Forms of retirement security in selected European countries	22
Teresa H. Bednarczyk: The activity of insurance sector vs. economic growth.....	30
Anna Bera, Dariusz Pauch: Educational programs as an instrument to increase awareness of the crime of insurance cover	39
Jacek Bialek: Group evaluation of open pension funds	50
Sylvia Bożek: Monitoring and control activities in the risk management process of an insurance company.....	59
Anna Celczyńska: Accounts receivable from motor vehicle owners insured under third party insurance agreements	67
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problems of cost calculation of insurance companies against the background of connections in financial groups .	77
Dominika Cichońska: The role of insurance in risk management in health care facilities	86
Krystyna Ciuman: Insurance companies versus other financial intermediaries in Poland in the years 2005–2009.....	93
Tadeusz Czernik: An alternative formulation of ruin problem.....	105
Teresa Czerwińska: Determinants of the dividend policy in the insurance companies	115
Robert Dankiewicz: Determinants of development of trade credit insurance market in Poland	125
Beata Dubiel: Insurance aspects of ecological risk	134
Roman Garbiec: The risk of old age as the component of constructing the pension systems in the European Union	145
Waldemar Glabiszewski: The importance of technological innovations in the insurance sector.....	155
Łukasz Gwizdała: The capabilities of analyzing bonus-malus systems in the light of Markov processes	167
Magdalena Homa: Correct calculation of net premium in unit-linked investment insurance	178
Beata Jackowska: Characterization of selected methods of the graduation of life tables in the perspective of their actuarial applications	189
Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Group life insurance in the SME sector.....	200
Marietta Janowicz-Lomott: Structured products in the form of insurance in Poland	212
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: An attempt to identify the factors having influence on the gross written premium in motor insurance in Poland	221

Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Poblocka: Evaluation of practical methods of estimation of incurred but not reported reserves in non-life insurance..	231
Piotr Kania: Specialized open-end investment funds as an external management form of investment funds of life insurance companies.....	240
Robert Kurek: Powers of supervision authorities regarding solvency control – Solvency II perspective.....	249
Jacek Lisowski: The role of the auditor in assessing the financial management of the insurer – legal norms	257
Jerzy Łańcucki: Regulations on insurance mediation – stressing premises and directions of change	266
Krzysztof Łyskawa: Threat of compensation balance and damages in compulsory property insurance	276
Aleksandra Malek: Duties of a bank acting as an coverage buying entity in the context of Recommendations on the Bankassurance Activity.....	285
Piotr Manikowski: The insurance market in Poland and underwriting cycles	294
Dorota Maśniak: Insurer as a major link in a cross-border system for protection of victims of road accidents – the role of co-operation of private and public entities.....	304
Artur Mikulec: Effectiveness of pension systems in EU and EFTA countries in the years 2005–2008.....	315
Aniela Mikulska: Small and medium-sized companies as recipients of insurance services	324
Marek Monkiewicz: Single insurance market in the EU and global financial crisis 2007–2009 – public intervention and Community competition rules.....	334
Joanna Niżnik: The reform of pension systems in Latin America. The Chilean and Argentinean models.....	343
Magdalena Osak: Medical savings account as a funding mechanism of health care.....	351
Dorota Ostrowska: The access to the insurance products strategic for the development of Polish economy in reference to the international capital..	361
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Structured policy as a form of alternative investment on Polish market.....	372
Renata Pajewska-Kwaśny: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part I.....	382
Monika Papież: Causality analysis on the life insurance market in the period 2003–2010	393
Agnieszka Pawłowska: Business interruption insurance implementation in risk management for interrupted activities	401
Krzysztof Piasecki: Probabilistic fuzzy sets in the actuarial calculation	408
Piotr Pisarewicz: Mutual funds role in retirement programs' development in the USA.....	415

Ryszard Pukała: Integration processes of insurance markets in Middle and Eastern Europe.....	425
Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia	434
Grażyna Sordyl: The Role and Activity of the Dutch Guarantee Fund (College voor Zorgverzekeringen CVZ) in the area of private health insurance	444
Ewa Spigarska: Financial statement of insurance company vs. International Standards of Financial Reporting in the light of changes.....	453
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organization of internal auditing in insurance companies in the light of Solvency II and audit standards	462
Anna Szkarłat-Koszalka: Instruments of accounting system vs. control of financial security of an insurer.....	471
Tomasz Szkutnik: Copula functions in the aggregation of insurer risk	482
Włodzimierz Szkutnik: The risk of using catastrophic reserves	493
Anna Szymańska: Factors determining the choice of the insurer on the CR automobile insurance market.....	506
Iłona Tomaszewska: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part II	513
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Students' insurance awareness and risk seeking	524
Stanisław Wanat: Modeling of dependencies in the context of the aggregation of solvency capital requirements in Solvency II	536
Stanisław Wieteska: Property insurance companies adaptation process to reduce the impact of greenhouse effect in Poland	546
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statistical analysis of speeding as a factor affecting car accidents in Poland	556

Beata Jackowska

Uniwersytet Gdański

CHARAKTERYSTYKA WYBRANYCH METOD WYRÓWNYWANIA TABLIC TRWANIA ŻYCIA – WNIOSKI DLA ZASTOSOWAŃ AKTUARIALNYCH

Streszczenie: W artykule scharakteryzowano trzy najczęściej stosowane grupy metod wyrównywania tablic trwania życia: metody mechaniczne, metody analityczne oraz metody oparte na splajnach. Celem artykułu jest przedstawienie wad i zalet tych metod oraz wynikających stąd wniosków co do zastosowań aktuarialnych. Dokonano porównania metod pod względem: stopnia wygładzenia, stopnia dopasowania, przydatności do interpolacji i ekstrapolacji, możliwości odwzorowania prawidłowości globalnych i lokalnych. Własności wybranych metod zostały zilustrowane na podstawie danych demograficznych. Dane te posłużyły do zbudowania surowych (niewyrównanych) tablic trwania życia, a następnie wyrównaniu zostały poddane roczne prawdopodobieństwa zgonu.

Słowa kluczowe: wyrównywanie, tablica trwania życia, prawdopodobieństwo zgonu.

1. Wstęp

W ubezpieczeniach na życie do kalkulacji składek netto niezbędne jest przyjęcie założenia o rozkładzie czasu trwania życia w analizowanej populacji. Na podstawie danych konstruuje się tablice trwania życia będące nieparametrycznym modelem wymierania populacji według płci i wieku. Jednakże wartości tablicowe estymowane bezpośrednio na podstawie danych empirycznych charakteryzują się zwykle nieregularnym przebiegiem i wahaniami tym większymi, im mniejsza jest liczebność próby. W celu wyeliminowania nieregularności surowe tablice trwania życia poddaje się wyrównywaniu.

W artykule zaprezentowano trzy najczęściej stosowane grupy metod wyrównywania funkcji tablicowych: metody mechaniczne, metody analityczne oraz metody oparte na splajnach. Celem artykułu jest przedstawienie wad i zalet tych metod istotnych z punktu widzenia zastosowań aktuarialnych. Dokonano porównania procedur wyrównywania pod względem możliwości: wygładzenia, dopasowania, interpolacji ekstrapolacji oraz odwzorowania prawidłowości globalnych i lokalnych.

2. Istota wyrównywania tablic trwania życia

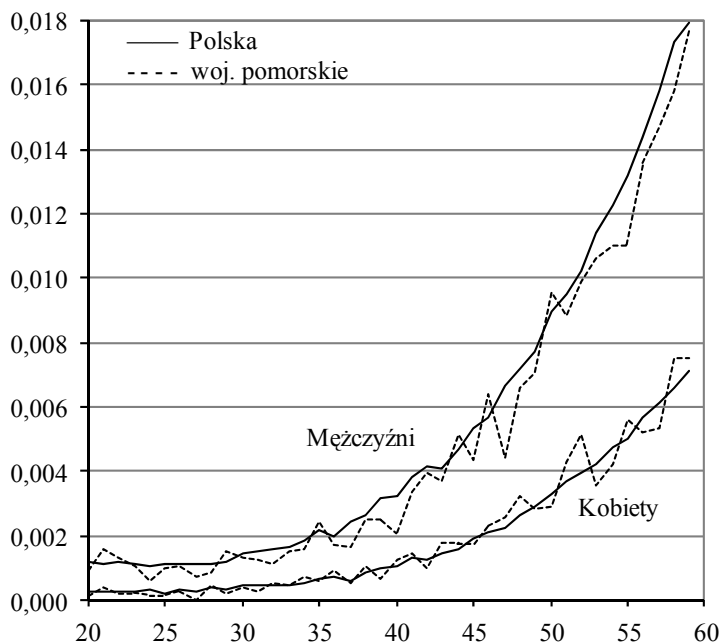
Wyrównywaniu podlegają najczęściej prawdopodobieństwa zgonu lub współczynniki zgonów, na podstawie których wyznacza się pozostałe funkcje tablicowe dla kolejnych wartości wieku x_1, x_2, \dots, x_N . Wyrównywanie polega na zastąpieniu ciągu surowych (niewyrównanych) wartości wybranej funkcji tablicowej y_1, y_2, \dots, y_N przez wartości $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N$, które według subiektywnej opinii badacza charakteryzują się większą regularnością i odzwierciedlają istotę zjawiska. W procesie wyrównywania konieczna jest jednoczesna ocena wygładzenia¹ ciągu otrzymanych wartości i dobroci dopasowania wartości wyrównanych do surowych. Niestety poprawa wygładzenia związana jest zwykle z pogorszeniem dopasowania.

Określenie stopnia gładkości ciągu wyrównanych wartości jest intuicyjne i subiektywnie. Polega na stwierdzeniu, czy wartości te nie zmieniają się zbyt gwałtownie oraz czy nie występują nagłe zmiany kierunku przebiegu wykresu. Pojęcie gładkości jest zapożyczone z matematyki, gdzie funkcją gładką nazywa się funkcję, dla której istnieją ciągłe pochodne wszystkich rzędów. Ponieważ w wyniku wyrównywania otrzymuje się dyskretny ciąg wartości $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N$, analizę pochodnych zastępuje się badaniem ciągu różnic sąsiednich wyrazów $\Delta \hat{y}_i = \hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i$ (różnice rzędu 1), różnic tych różnic $\Delta^2 \hat{y}_i = \Delta \hat{y}_{i+1} - \Delta \hat{y}_i$ (różnice rzędu 2), itd. Do oceny gładkości wykorzystuje się miary oparte na różnicach rzędu najczęściej drugiego lub trzeciego, m.in.: sumę kwadratów różnic, sumę wartości bezwzględnych różnic, przeciętną wartość różnicy dzieloną przez średnią wartość wyrazu.

Jako miarę dopasowania można przyjąć sumę wartości bezwzględnych odchyłeń (lub kwadratów odchyłeń) wartości surowych od wyrównanych, odchylenie standardowe reszt lub odchylenie standardowe reszt przypadające na wartość średnią. Odchylenia nie mogą mieć charakteru systematycznego.

Ocena wygładzenia i dopasowania zależy nie tylko od metody wyrównywania, ale także w znacznym stopniu od nieregularności występujących w zbiorze wartości surowych. Znaczenie wyrównywania jest tym większe, im mniejszy jest zbiór danych, co zaprezentowano na rys. 1 dla populacji mężczyzn i kobiet w Polsce oraz województwie pomorskim. Stosując przedstawione w artykule metody wyrównywania, otrzymano średnie odchylenie wartości surowych od wyrównanych większe w województwie pomorskim niż w Polsce prawie 4-krotnie w przypadku mężczyzn i ponad 6-krotnie w przypadku kobiet.

¹ Wielu autorów zamiennie używa pojęcia wyrównywanie i wygładzanie, lecz jest to podejście upraszczające. W niniejszym podejściu wygładzanie jest cechą wyrównwanego ciągu wartości i ocena stopnia wygładzenia jest obok oceny dopasowania podstawowym kryterium oceny efektów wyrównywania [Fogelson 1931; London 1985].



Rys. 1. Roczne niewyrównane (surowe) prawdopodobieństwa zgonu w Polsce oraz województwie pomorskim w 2009 r.

Źródło: opracowanie własne.

Własności wybranych metod wyrównywania zostały zilustrowane w dalszej części artykułu na przykładzie danych dla województwa pomorskiego. Dane te posłużyły do zbudowania surowych (niewyrównanych) tablic trwania życia² w roku 2009, a następnie wyrównaniu zostały poddane roczne prawdopodobieństwa zgonów mężczyzn i kobiet w wieku 20–59 lat. Przykładowe wyrównane ciągi wartości potraktowano jedynie jako ilustrację efektów wygładzenia i dopasowania scharakteryzowanych metod, pozostawiając badaczowi wybór odpowiedniej metody w zależności od zastosowań praktycznych.

3. Charakterystyka mechanicznych metod wyrównywania

Wyrównywanie mechaniczne polega na tym, że każda z wartości y_1, y_2, \dots, y_N wyrównywana jest oddzielnie za pomocą średniej arytmetycznej nieważonej lub ważonej wyznaczonej z sąsiednich wartości. Procedura wyrównywania mechanicznego polega na kilkukrotnym powtórzeniu działań według wzorów o stałych współ-

² Tablice surowe zbudowano zgodnie z metodologią opisaną w [Trwanie życia w 2009 r., s. 36–37].

czynnikach. Skonstruowanie procedury wyrównywania sprowadza się do wyboru: liczby uśrednianych wartości (zwykle nieparzysta liczba), systemu wag, liczby powtórzeń procedury [London 1985; Wieniecki 1976]. Do metod tych należy metoda średnich ruchomych powtarzana kilkakrotnie oraz metody sumacyjne, w których wzór wyrównawczy można przedstawić jako kombinację liniową kilku różnych formuł dla wielokrotnych metod średnich ruchomych, co pozwala na usunięcie zniekształceń systematycznych powstających przy korzystaniu ze średnich ruchomych.

Wzór na i -tą wyrównywaną wartość można zapisać jako liniową kombinację wyrazu i -tego oraz wyrazów sąsiednich:

$$\hat{y}_i = a_{i-m}y_{i-m} + \dots + a_i y_i + \dots + a_{i+n}y_{i+n}, \quad (1)$$

dla $i = m+1, m+2, \dots, N-n$, gdzie $\sum_{k=-m}^n a_{i+k} = 1$. Stosowane w praktyce procedury wyrównywania mechanicznego prowadzą do wzoru (1) symetrycznego względem składnika środkowego, czyli $m = n$ oraz $a_{i-r} = a_{i+r}$ [London 1985]. Wzór (1) można przedstawić także w postaci sumacyjnej, tzn. jako kombinację liniową sum wielokrotnych: sum pojedynczych $\sum_i^{2k+1} = y_{i-k} + \dots + y_i + \dots + y_{i+k}$, sum podwójnych $\sum_i^{2k+1, 2m+1} = \sum_{i-m}^{2k+1} + \dots + \sum_i^{2k+1} + \dots + \sum_{i+m}^{2k+1}$ itd. Przykładowe procedury wyrównywania mechanicznego przedstawiono za pomocą wzorów sumacyjnych w tab. 1.

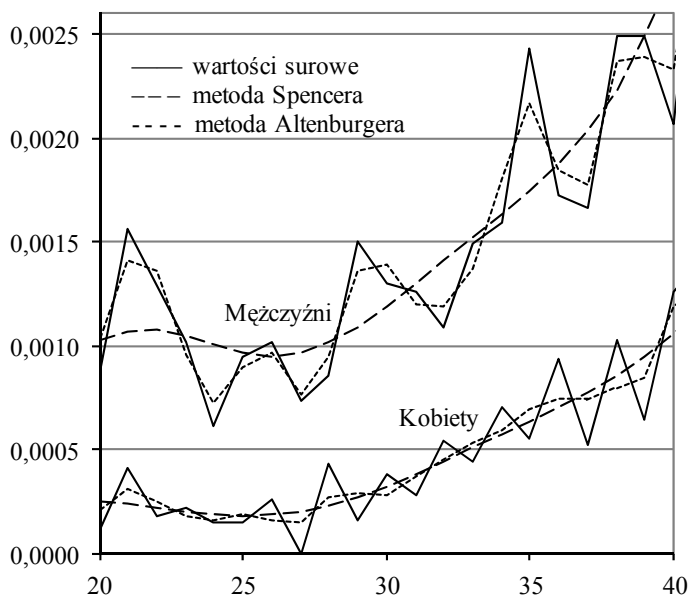
Tabela 1. Wybrane wzory na i -tą wyrównywaną wartość w postaci sumacyjnej

Metoda	Wzór w postaci sumacyjnej	Liczba wyrazów
Wittsteina	$\hat{y}_i = \frac{1}{25} \sum_i^{5,5}$	9
Finlainsona	$\hat{y}_i = \frac{1}{125} \sum_i^{5,5,5}$	13
Woolhouse'a	$\hat{y}_i = \frac{1}{125} \left[10 \sum_i^{5,5,5} - 3 \sum_i^{5,5,3} \right]$	15
Spencera	$\hat{y}_i = \frac{1}{350} \left[\sum_i^{7,5,5,3,3} - \sum_i^{7,7,5,5} \right]$	21
Karupa	$\hat{y}_i = \frac{1}{625} \left[3 \sum_i^{5,5,5,3} - 2 \sum_{i-3}^{5,5,5} - 2 \sum_{i+3}^{5,5,5} \right]$	19
Altenburgera	$\hat{y}_i = \frac{1}{256} \left[100 \sum_i^{2,2} - 20 \sum_i^{2,4} + \sum_i^{4,4} \right]$	7
Kinga	$\hat{y}_i = 0,216 \sum_i^5 - 0,008 \left[\sum_{i-5}^5 + \sum_{i+5}^5 \right]$	15
Minimalna	$\hat{y}_i = \frac{1}{1105} \left[75 \sum_i^{7,7} - 78 \sum_i^{15} - 10 \sum_i^{5,5,5} - 30 \sum_i^3 - 60 y_i \right]$	15

Źródło: opracowanie własne na podstawie: [Fogelson 1931; London 1985; Wieniecki 1976].

Wymienione w tab. 1 procedury zastosowano do wyrównania rocznych prawdopodobieństw zgonów mężczyzn i kobiet w województwie pomorskim w roku 2009. Najlepsze wygładzenie dał 21-wyrazowy wzór Spencera, najgorsze zaś 7-wyrazowy wzór Altenburgera. Natomiast w ocenie dopasowania procedura Spencera zajmowała jedno z ostatnich miejsc, a najlepsza była metoda Altenburgera. Zbyt wierne odtworzenie lokalnych nieregularności oraz niezadowalający efekt wygładzenia w metodzie Altenburgera mogą stać się w tym przypadku powodem odrzucenia tej metody.

Na rys. 2 przedstawiono fragment wyrównywanej funkcji prawdopodobieństwa zgonu dla przedziału wieku od 20 do 40 lat, aby lepiej przybliżyć istotę wyrównywania (por. rys. 1).



Rys. 2. Wybrane mechaniczne metody wyrównywania rocznych prawdopodobieństw zgonu w województwie pomorskim w 2009 r.

Źródło: opracowanie własne na podstawie obliczeń w programie Excel.

Metody mechaniczne charakteryzują się tym, że: nie opierają się na analitycznej postaci funkcji dla całego przebiegu procesu, jednakże i -tą wyrównywaną wartość można przedstawić jako funkcję $2n + 1$ empirycznych wartości $\hat{y}_i = f(y_{i-n}, \dots, y_i, \dots, y_{i+n})$,

1) możliwe jest odwzorowanie lokalnych prawidłowości poprzez odpowiedni wybór procedury wygładzającej (uwzględnienie zbyt dużej liczby wyrazów prowadzi do wyrównania istotnych prawidłowości),

2) stopień gładkości poprawia się wraz ze zwiększaniem liczby uśrednianych wartości i liczby powtórzeń procedury uśredniania, lecz wiąże się to z coraz większą liczbą niewyrównanych wyrazów początkowych i końcowych oraz niwelowaniem lokalnych prawidłowości,

3) dopasowanie wartości wyrównanych do surowych jest lepsze, im mniejsza liczba uśrednianych wartości i im mniejsza liczba powtórzeń procedury,

4) z powodu braku analitycznej postaci funkcji nie pozwalają na interpolację oraz ekstrapolację.

4. Charakterystyka analitycznych metod wyrównywania

Wyrównywanie analityczne polega na znalezieniu funkcji, która możliwie najlepiej opisuje przebieg procesu wymierania w zależności od wieku x jako jedynej zmiennej objaśniającej. Badacz zakłada *a priori* postać analityczną funkcji

$$\hat{y}_i = f(x_i; a_0, a_1, \dots, a_n) \quad (2)$$

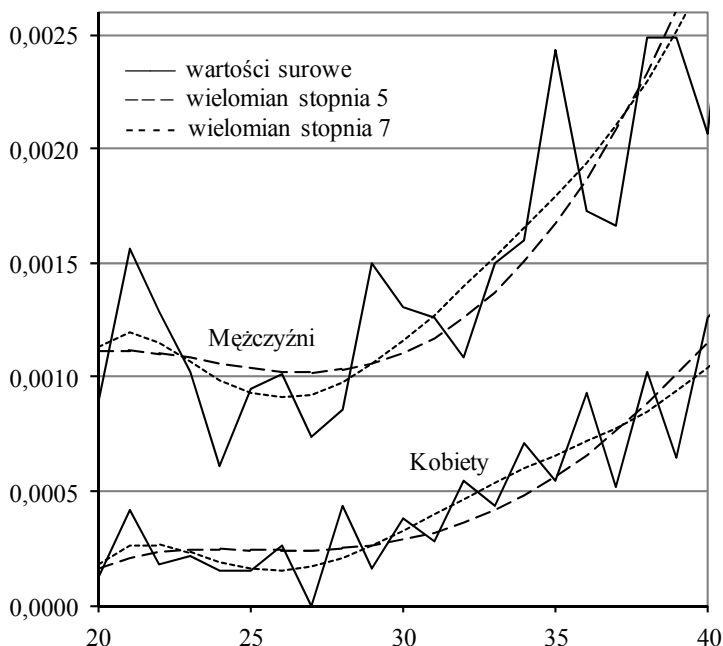
zależną od nieznanymi parametrów a_0, a_1, \dots, a_n . Ograniczeniem metody analitycznej jest narzucenie *a priori* kształtu funkcji. Podejście to sprowadza się więc do sprawdzenia słuszności dokonanego wyboru postaci funkcji na podstawie miar dopasowania. Ze względu na nieliniowy przebieg procesu wymierania parametry funkcji szacuje się najczęściej za pomocą ważonej metody najmniejszych kwadratów bądź metody największej wiarygodności.

Pierwsze znane analityczne prawa wymieralności powstały w związku z kalkulacjami aktuariálnymi. Matematyk A. de Moivre w roku 1725 wykorzystał funkcję intensywności zgonów o wykresie hiperboli do wyznaczenia renty dożywotniej. Model umieralności sformułowany w roku 1825 przez aktuarium B. Gompertza, a następnie zmodyfikowany w roku 1867 przez W. Makehama zakładał wykładniczy wzrost intensywności zgonów wraz z wiekiem. Prawo Gompertza-Makehama jest do tej pory wykorzystywane w naukach aktuariálnych [Bowers i in. 1997]. Jako modele analityczne współczynników zgonu osób dorosłych najczęściej są stosowane funkcje wykładnicze, potęgowe, wielomianowe, logistyczne oraz funkcje złożone, np. wielomianowo-wykładnicze [Tabeau i in. 2001]. Obecnie za jeden z najlepszych modeli umieralności demografowie uznają złożony model Heligmana-Pollarda (1980), w którym prawdopodobieństwo zgonu jest sumą trzech wyrażen opisujących umieralność w przedziałach wieku 0–10, 10–40 oraz 40 i więcej lat.

Zwiększenie dopasowania wartości teoretycznych do empirycznych można osiągnąć, konstruując złożone modele z dużą liczbą parametrów. W praktyce poszukiwane są możliwie najprostsze modele z jak najmniejszą liczbą parametrów, zwłaszcza że do celów aktuariálnych zwykle nie jest konieczne konstruowanie złożonych modeli odwzorowujących proces przeżycia od momentu urodzin do najstarszego obserwowanego wieku [Keyfitz 1982; London 1985; Wieniecki 1976].

W procesie wyrównywania szczególne znaczenie mają funkcje wielomianowe. Wybór wielomianu nie jest związany z poszukiwaniem naturalnego prawa rządzącego

go procesem wymierania, lecz z prawem matematycznym mówiącym, że dowolną funkcję ciągłą określoną na przedziale domkniętym można aproksymować wielomianem. Z tego powodu do ilustracji wyrównywania metodami analitycznymi wybrano wielomiany (rys. 3 prezentuje fragment wyrównywanej funkcji prawdopodobieństwa zgonu). Ponieważ wielomiany są gładkie w sensie matematycznym, więc jedynym kryterium wyboru postaci wielomianu jest dobroć dopasowania. Dla wielomianów stopnia od 5 do 7 otrzymano odchylenie standardowe reszt nieco wyższe niż w przypadku mechanicznej metody Spencera.



Rys. 3. Wybrane analityczne metody wyrównywania rocznych prawdopodobieństw zgonu w województwie pomorskim w 2009 r.

Źródło: opracowanie własne na podstawie obliczeń w programie *Statistica*.

Metody analityczne mają następujące własności:

1) opierają się na przyjętej arbitralnie postaci funkcyjnej zależności między zmiennymi, lecz zwykle postać analityczna funkcji jest trudna do zidentyfikowania,

2) wyrównywanie jest nielokalne, tzn. na poziom jednej wyrównywanej wartości wpływają wszystkie pozostałe, co powoduje, że nawet pojedynczy odstający punkt może znacząco wpłynąć na przebieg całej funkcji,

3) wybór funkcji ciągłej i różniczkowalnej k -krotnie zapewnia określony *a priori* stopień gładkości,

4) dopasowanie wartości wyrównanych do surowych zależy od postaci funkcji: lepsze dopasowanie zwykle łatwiej jest osiągnąć za pomocą złożonej funkcji z dużą liczbą parametrów,

5) dzięki określonej postaci analitycznej funkcji w całej dziedzinie wyrównania możliwa jest interpolacja oraz ekstrapolacja.

5. Charakterystyka metod wyrównywania opartych na splajnach

Metody oparte na splajnach są metodami pośrednimi między metodami mechanicznymi a analitycznymi. Wyrównywanie analityczne skomplikowanego przebiegu zjawiska prowadzi do rozbudowanej funkcji z dużą liczbą parametrów, stąd pomysł, aby krzywą podzielić na mniejsze fragmenty, które można aproksymować prostszymi funkcjami. Fragmenty krzywych łączy się tak, aby zapewnić odpowiedni stopień wygładzenia na połączeniach (stopień gładkości jest więc założony *a priori*). Można to osiągnąć poprzez nałożenie warunków równości pochodnych do określonego rzędu w punktach połączeń. Metody te oparte są najczęściej na aproksymacji wielomianami niskiego stopnia. Funkcję składającą się z gładko sklejonych fragmentów wielomianów nazywa się splajnem (*spline*) lub funkcją sklejaną. Istotą tej metody jest wygładzanie analityczne w podprzedziałach zamiast w całej dziedzinie. W ten sposób wyrównywane wartości zależą, podobnie jak w metodach mechanicznych, od zbioru sąsiednich wartości surowych.

Do wyrównywania wykorzystuje się najchętniej B-splajny (*base spline*) lub P-splajny (*penalized spline*) [Eilers, Currie, Durban 2006; Eilers, Marx 1996]. Efekt wyrównywania B-splajnami zależy od wyboru stopnia wielomianu k (w praktyce zazwyczaj $k = 2$ lub $k = 3$), liczby węzłów (*knots*) i ich położenia (najczęściej stosuje się węzły równoodległe). Węzły $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m$ ($m > k$) dzielą dziedzinę funkcji sklejaną na podprzedziały, w których wyznacza się zbiór splajnow bazowych określonych wzorem rekurencyjnym Mansfielda-de Boora-Coxa:

$$B_j^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [u_j, u_{j+1}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [u_j, u_{j+1}] \end{cases}$$

$$B_j^k(x) = \frac{x - u_j}{u_{j+k} - u_j} B_j^{k-1}(x) + \frac{u_{j+k+1} - x}{u_{j+k+1} - u_{j+1}} B_{j+1}^{k-1}(x) \text{ dla } k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

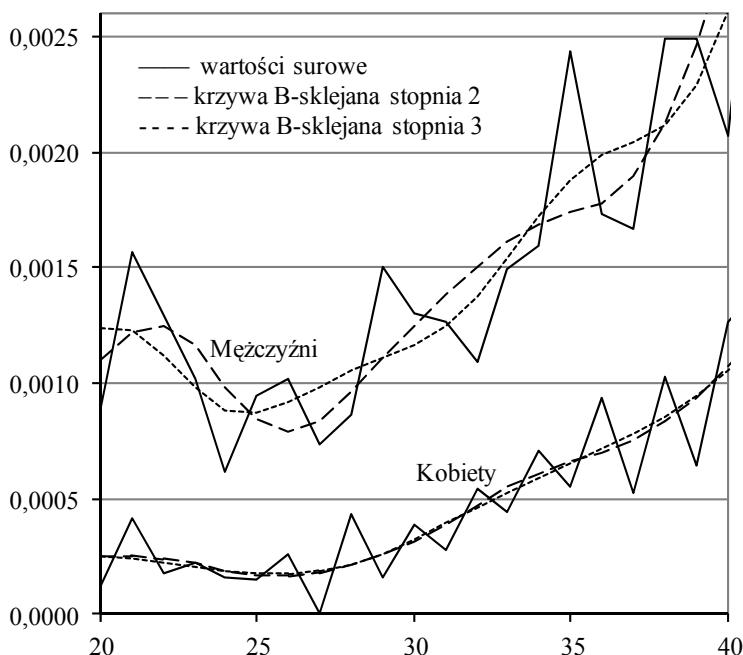
Każdy podprzedział, z wyjątkiem k pierwszych i k ostatnich podprzedziałów, jest pokryty przez $k + 1$ funkcji bazowych [Eilers, Marx 1996]. Liniowa kombinacja funkcji bazowych daje funkcję sklejaną stopnia k , za pomocą której otrzymuje się wyrównane wartości:

$$\hat{y}_i = \sum_{j=0}^{m-k-1} a_j B_j^k(x_i). \quad (4)$$

Parametry a_j otrzymuje się metodą najmniejszych kwadratów.

W przypadku P-splajnów przy wyznaczaniu parametrów a_j konstruuje się funkcję straty (*penalized function*) uwzględniającą różnice ustalonego rzędu między sąsiednimi współczynnikami a_j . Zagadnienie to można rozwiązać, minimalizując funkcję straty, lub przedstawić w postaci uogólnionego modelu regresji, w którym współczynniki wyznacza się metodą największej wiarygodności [Eilers, Currie, Durban 2006].

Na rys. 4 przedstawiono fragment funkcji prawdopodobieństwa zgonu wyrównywanej za pomocą B-splajnów stopnia drugiego i trzeciego z węzłami położonymi w równych odległościach co 4 lata. Ponieważ stopień gładkości został założony *a priori* poprzez wybór stopnia splajnu, więc ocenie podlega jedynie dobroć dopasowania. Dopasowanie splajnów stopnia 2 i 3 okazało się lepsze niż funkcji wielomianowych do stopnia 7 włącznie. W porównaniu z prezentowaną wcześniej metodą mechaniczną Spencera splajn stopnia 2 jest prawie tak samo dobrze dopasowany, natomiast splajn stopnia 3 jest dopasowany nieco lepiej.



Rys. 4. Wyrównywanie splajnami rocznych prawdopodobieństw zgonu w województwie pomorskim w 2009 r.

Źródło: opracowanie własne na podstawie obliczeń w programie R.

Cechy charakterystyczne metod opartych na splajnach:

- 1) postać analityczna funkcji określona jest na podprzedziałach zmiennej niezależnej,
- 2) wyznaczanie funkcji na wielu podprzedziałach pozwala na zachowanie lokalnych prawidłowości,
- 3) stopień gładkości zależy od warunków nałożonych na krzywe w miejscach łączenia,
- 4) dopasowanie jest lepsze, im większa jest liczba podprzedziałów, na których dokonano aproksymacji,
- 5) znajomość postaci funkcji oszacowanej w podprzedziale umożliwia interpolację wewnątrz tego podprzedziału,
- 6) różne postaci funkcji w podprzedziałach nie pozwalają na ekstrapolację poza dziedzinę wyrównywania.

6. Podsumowanie

Scharakteryzowane powyżej trzy grupy metod wyrównywania różnią się pod względem możliwości: wygładzenia, dopasowania, interpolacji i ekstrapolacji oraz odwzorowania prawidłowości globalnych i lokalnych. Wybór metody wyrównywania ma wpływ na wyniki kalkulacji aktuarialnych [Jackowska 2010]. Metody analityczne gwarantują największą gładkość, lecz trudniej uzyskać zadowalające dopasowanie. Natomiast można dobrać metody mechaniczne lub metody oparte na splajnach, niewiele odbiegające gładkością i znacznie lepiej dopasowane, przy czym splajny łączą zaletę metod mechanicznych pozwalającą na zachowanie lokalnych prawidłowości z możliwością uzyskania założonego stopnia gładkości na połączeniach funkcji.

W zastosowaniach praktycznych może pojawić się konieczność interpolacji lub ekstrapolacji. Dane demograficzne pozwalają na oszacowanie dyskretnego ciągu wartości tablicowych dla kolejnych roczników wieku x_1, x_2, \dots, x_N , natomiast dzięki interpolacji można poznać wartości funkcji tablicowej w wieku pośrednim, co może być wykorzystane w kalkulacjach aktuarialnych, w których wiek określany jest z większą dokładnością niż rok, tzw. wiek ułamkowy (*fractional age*) [Bowers i in. 1997]. Zwykle z powodu braku danych lub zbyt małych liczebności dla najstarszych roczników pojawia się konieczność ekstrapolacji wartości tablicowych do przyjętego w kalkulacjach granicznego wieku życia. W metodach analitycznych określa się postać funkcji na całym przedziale $[x_1, x_N]$, więc możliwe jest dokonanie interpolacji oraz ekstrapolacji, natomiast w metodach opartych na splajnach postać funkcyjna określona jest na podprzedziałach dziedziny $[x_1, x_N]$, więc możliwa jest tylko interpolacja. Metody mechaniczne nie są oparte na postaci analitycznej funkcji, zatem nie pozwalają ani na interpolację, ani ekstrapolację.

Zalety metod można łączyć, wyrównując dany ciąg wartości różnymi metodami, np. poszukiwanie modelu analitycznego można poprzedzić wstępnym wyrównaniem

największych odchyłach metodą lokalną lub wykorzystać model analityczny jedynie do ekstrapolacji dla zaawansowanych wiekiem roczników, a dla młodszych roczników zastosować metody lokalne.

Literatura

- Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbitt C. [1997], *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.
- Eilers P., Currie I., Durban M. [2006], *Fast and compact smoothing on large multidimensional grids*, "Computational Statistics & Data Analysis" no. 50.
- Eilers P., Marx B. [1996], *Flexible smoothing with B-splines and penalties (with Discussion)*, "Statistical Science", vol. 11, no. 2.
- Fogelson S. [1931], *O wyrównywaniu szeregów statystycznych ze szczególnym uwzględnieniem rozkładu ludności według wieku*, „Kwartalnik Statystyczny”, t. VIII, z. 3.
- Jackowska B. [2010], *Wpływ wybranych metod wygładzania prawdopodobieństw zgonu na wysokość składek i rezerw netto w ubezpieczeniach na życie*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego nr 106, Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław.
- Keyfitz N. [1982], *Choice of function for mortality analysis: Effective forecasting depends on a minimum parameter representation*, "Theoretical Population Biology", vol. 21.
- London D. [1985], *Graduation: the Revision of Estimates*, ACTEX, Winsted.
- Tabeau E., van den Berg Jeths A., Heathcote Ch. [2001], *Forecasting Mortality in Developed Countries. Insights from a Statistical, Demographic and Epidemiological Perspective*, Kluwer Academic Publishers, New York.
- Trwanie życia w 2009 r.*, Główny Urząd Statystyczny, Warszawa 2010.
- Wieniecki I.G. [1976], *Metody matematyczne w demografii*, PWN, Warszawa.

CHARACTERIZATION OF SELECTED METHODS OF THE GRADUATION OF LIFE TABLES IN THE PERSPECTIVE OF THEIR ACTUARIAL APPLICATIONS

Summary: This paper deals with characteristic features of three most commonly used types of methods of the graduation of life tables: mechanical methods, analytical methods and spline methods. The aims of this paper include discussing their advantages and disadvantages and presenting conclusions concerning their actuarial applications. In the comparison of these methods, we take into consideration the following factors: smoothness, goodness of fit, usefulness for interpolation and extrapolation as well as possibilities of modeling global and local tendencies. The properties of these methods are illustrated with demographic data. The data are used to construct ungraduated life tables, and next, annual death probabilities are graduated.

Keywords: graduation, life table, death probability.