

# Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI

pod redakcją  
**Wandy Ronki-Chmielowiec**



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2011

Recenzenci: Jerzy Handschke, Jan Monkiewicz, Kazimierz Ortyński, Wanda Sułkowska,  
Włodzimierz Szkutnik, Tadeusz Szumlicz, Stanisław Wieteska

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie [www.ibuk.pl](http://www.ibuk.pl)

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych  
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl>  
oraz w The Central and Eastern European Online Library [www.ceeol.com](http://www.ceeol.com),  
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon [http://kangur.uek.krakow.pl/  
bazy\\_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się  
na stronie internetowej Wydawnictwa  
[www.wydawnictwo.ue.wroc.pl](http://www.wydawnictwo.ue.wroc.pl)

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie  
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
Wrocław 2011

**ISSN 1899-3192**

**ISBN 978-83-7695- 191-1**

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	11
<b>Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik:</b> Formy zabezpieczenia emerytalnego w wybranych krajach europejskich .....	13
<b>Teresa H. Bednarczyk:</b> Działalność sektora ubezpieczeniowego a wzrost gospodarczy.....	23
<b>Anna Bera, Dariusz Pauch:</b> Programy edukacyjne jako instrument zwiększania świadomości ubezpieczeniowej w zakresie przestępczości ubezpieczeniowej .....	31
<b>Jacek Białek:</b> Ocena grupowa w analizie Otwartych Funduszy Emerytalnych.....	40
<b>Sylwia Bożek:</b> Czynności monitorujące i kontrolne w procesie zarządzania ryzykiem w przedsiębiorstwie ubezpieczeniowym .....	51
<b>Anna Celczyńska:</b> Należności od ubezpieczających z umów ubezpieczenia OC posiadaczy pojazdów mechanicznych.....	60
<b>Magdalena Chmielowiec-Lewczuk:</b> Problemy kalkulacji kosztów zakładów ubezpieczeń na tle powiązań w grupach finansowych .....	68
<b>Dominika Cichońska:</b> Rola ubezpieczeń w zarządzaniu ryzykiem w zakładach opieki zdrowotnej.....	78
<b>Krystyna Ciuman:</b> Zakłady ubezpieczeń a inne instytucje pośrednictwa finansowego w Polsce w latach 2005–2009.....	87
<b>Tadeusz Czernik:</b> O pewnym sformułowaniu zagadnienia ruiny .....	94
<b>Teresa Czerwińska:</b> Uwarunkowania polityki dywidend spółek ubezpieczeniowych.....	106
<b>Robert Dankiewicz:</b> Determinanty rozwoju rynku ubezpieczeń kredytu kupieckiego w Polsce .....	116
<b>Beata Dubiel:</b> Ubezpieczeniowe aspekty ryzyka ekologicznego .....	126
<b>Roman Garbicz:</b> Ryzyko starości jako element konstruowania systemów emerytalnych w Unii Europejskiej .....	135
<b>Waldemar Glabiszewski:</b> Znaczenie innowacji technologicznych w działalności ubezpieczeniowej .....	146
<b>Łukasz Gwizdała:</b> Możliwości analizy systemów bonus-malus w świetle procesów Markowa.....	156
<b>Magdalena Homa:</b> Kalkulacja składki w inwestycyjnych ubezpieczeniach na życie typu unit-linked .....	168
<b>Beata Jackowska:</b> Charakterystyka wybranych metod wyrównywania tablic trwania życia – wnioski dla zastosowań aktuarialnych .....	179

<b>Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka:</b> Grupowe ubezpieczenia na życie w sektorze MSP .....	190
<b>Marietta Janowicz-Lomott:</b> Produkty strukturyzowane w formie ubezpieczeń w Polsce.....	201
<b>Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska:</b> Próba zidentyfikowania czynników mających wpływ na wysokość składki przypisanej brutto w ubezpieczeniach komunikacyjnych w Polsce.....	213
<b>Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Pobłocka:</b> Ocena praktycznych metod szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych .....	222
<b>Piotr Kania:</b> Specjalistyczne fundusze inwestycyjne otwarte jako forma zewnętrznego zarządzania ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi zakładów ubezpieczeń na życie .....	232
<b>Robert Kurek:</b> Uprawnienia organów nadzoru w zakresie kontroli wypłacalności – ujęcie w Solvency II.....	241
<b>Jacek Lisowski:</b> Rola biegłego rewidenta w ocenie gospodarki finansowej ubezpieczyciela – unormowania prawne .....	250
<b>Jerzy Łańcucki:</b> Przesłanki i kierunki zmian w regulacjach dotyczących pośrednictwa ubezpieczeniowego .....	258
<b>Krzysztof Łyskawa:</b> Zagrożenie równowagi odszkodowania i szkody w obowiązkowych ubezpieczeniach mienia.....	267
<b>Aleksandra Małek:</b> Obowiązki banku jako ubezpieczającego w świetle Rekomendacji Dobrych Praktyk Bancassurance .....	277
<b>Piotr Manikowski:</b> Rynek ubezpieczeń w Polsce a cykle underwritingowe ..	286
<b>Dorota Maśniak:</b> Ubezpieczyciel jako główne ogniwo transgranicznego systemu ochrony ofiar wypadków drogowych .....	295
<b>Artur Mikulec:</b> Efektywność systemów emerytalnych krajów UE i EFTA w latach 2005–2008 .....	305
<b>Aniela Mikulska:</b> Małe i średnie przedsiębiorstwa jako odbiorcy usług ubezpieczeniowych .....	316
<b>Marek Monkiewicz:</b> Jednolity rynek ubezpieczeniowy UE w warunkach globalnego kryzysu finansowego 2007–2009 – pomoc publiczna a wspólnotowe reguły konkurencji .....	325
<b>Joanna Niżnik:</b> Reforma systemów emerytalnych Ameryki Łacińskiej na przykładzie Chile i Argentyny .....	335
<b>Magdalena Osak:</b> Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia .....	344
<b>Dorota Ostrowska:</b> Kapitał międzynarodowy a dostęp do produktów ubezpieczeniowych strategicznych dla rozwoju gospodarki polskiej.....	352
<b>Anna Ostrowska-Dankiewicz:</b> Polisa strukturyzowana jako forma inwestycji alternatywnej na rynku polskim.....	362
<b>Renata Pajewska-Kwaśny:</b> Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. I .....	373

<b>Monika Papież:</b> Analiza przyczynowości na rynku ubezpieczeń życiowych w latach 2003–2010 .....	383
<b>Agnieszka Pawłowska:</b> Ubezpieczenie <i>business interruption</i> w zarządzaniu ryzykiem przerw w działalności gospodarczej .....	394
<b>Krzysztof Piasecki:</b> Rozmyte zbiory probabilistyczne w rachunku aktuarnym .....	402
<b>Piotr Pisarewicz:</b> Rola funduszy inwestycyjnych w rozwoju programów emerytalnych w USA .....	409
<b>Ryszard Pukała:</b> Procesy integracyjne rynków ubezpieczeniowych krajów Europy Środkowej i Wschodniej .....	416
<b>Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel:</b> Medical savings account as a funding mechanism for health .....	426
<b>Grażyna Sordyl:</b> Rola i działalność holenderskiego funduszu gwarancyjnego (College voor Zorgverzekeringen CVZ) w obszarze prywatnych ubezpieczeń zdrowotnych .....	435
<b>Ewa Spigarska:</b> Sprawozdanie finansowe zakładu ubezpieczeń a Międzynarodowe Standardy Sprawozdawczości Finansowej w świetle wprowadzanych zmian .....	445
<b>Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska:</b> Organizacja audytu wewnętrznego w zakładach ubezpieczeń w świetle <i>Solvency II</i> oraz standardów audytu .....	454
<b>Anna Szkarłat-Koszalka:</b> Instrumenty systemu rachunkowości a kontrola bezpieczeństwa finansowego ubezpieczyciela .....	463
<b>Tomasz Szkutnik:</b> Funkcje łączące w agregacji ryzyka ubezpieczyciela .....	472
<b>Włodzimierz Szkutnik:</b> Ryzyko uruchomienia rezerw katastroficznych .....	483
<b>Anna Szymańska:</b> Czynniki determinujące wybór ubezpieczyciela na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych OC .....	494
<b>Ilona Tomaszewska:</b> Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. II .....	507
<b>Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz:</b> Świadomość ubezpieczeniowa oraz skłonność do ryzyka studentów .....	515
<b>Stanisław Wanat:</b> Modelowanie zależności w kontekście agregacji kapitałowych wymogów wypłacalności w <i>Solvency II</i> .....	525
<b>Stanisław Wieteska:</b> Adaptacja zakładów ubezpieczeń majątkowych do likwidacji skutków efektu cieplarnianego na terenie Polski .....	537
<b>Ewa Wycinka, Mirosław Szreder:</b> Statystyczna ocena wpływu przekraczania prędkości na liczbę wypadków drogowych w Polsce .....	547

## Summaries

<b>Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik:</b> Forms of retirement security in selected European countries .....	22
<b>Teresa H. Bednarczyk:</b> The activity of insurance sector vs. economic growth.....	30
<b>Anna Bera, Dariusz Pauch:</b> Educational programs as an instrument to increase awareness of the crime of insurance cover .....	39
<b>Jacek Bialek:</b> Group evaluation of open pension funds .....	50
<b>Sylvia Bożek:</b> Monitoring and control activities in the risk management process of an insurance company.....	59
<b>Anna Celczyńska:</b> Accounts receivable from motor vehicle owners insured under third party insurance agreements .....	67
<b>Magdalena Chmielowiec-Lewczuk:</b> Problems of cost calculation of insurance companies against the background of connections in financial groups .	77
<b>Dominika Cichońska:</b> The role of insurance in risk management in health care facilities .....	86
<b>Krystyna Ciuman:</b> Insurance companies versus other financial intermediaries in Poland in the years 2005–2009.....	93
<b>Tadeusz Czernik:</b> An alternative formulation of ruin problem.....	105
<b>Teresa Czerwińska:</b> Determinants of the dividend policy in the insurance companies .....	115
<b>Robert Dankiewicz:</b> Determinants of development of trade credit insurance market in Poland .....	125
<b>Beata Dubiel:</b> Insurance aspects of ecological risk .....	134
<b>Roman Garbiec:</b> The risk of old age as the component of constructing the pension systems in the European Union .....	145
<b>Waldemar Glabiszewski:</b> The importance of technological innovations in the insurance sector.....	155
<b>Łukasz Gwizdała:</b> The capabilities of analyzing bonus-malus systems in the light of Markov processes .....	167
<b>Magdalena Homa:</b> Correct calculation of net premium in unit-linked investment insurance .....	178
<b>Beata Jackowska:</b> Characterization of selected methods of the graduation of life tables in the perspective of their actuarial applications .....	189
<b>Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka:</b> Group life insurance in the SME sector.....	200
<b>Marietta Janowicz-Lomott:</b> Structured products in the form of insurance in Poland .....	212
<b>Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska:</b> An attempt to identify the factors having influence on the gross written premium in motor insurance in Poland .....	221

<b>Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Poblocka:</b> Evaluation of practical methods of estimation of incurred but not reported reserves in non-life insurance..	231
<b>Piotr Kania:</b> Specialized open-end investment funds as an external management form of investment funds of life insurance companies.....	240
<b>Robert Kurek:</b> Powers of supervision authorities regarding solvency control – Solvency II perspective.....	249
<b>Jacek Lisowski:</b> The role of the auditor in assessing the financial management of the insurer – legal norms .....	257
<b>Jerzy Łańcucki:</b> Regulations on insurance mediation – stressing premises and directions of change .....	266
<b>Krzysztof Łyskawa:</b> Threat of compensation balance and damages in compulsory property insurance .....	276
<b>Aleksandra Malek:</b> Duties of a bank acting as an coverage buying entity in the context of Recommendations on the Bankassurance Activity.....	285
<b>Piotr Manikowski:</b> The insurance market in Poland and underwriting cycles	294
<b>Dorota Maśniak:</b> Insurer as a major link in a cross-border system for protection of victims of road accidents – the role of co-operation of private and public entities.....	304
<b>Artur Mikulec:</b> Effectiveness of pension systems in EU and EFTA countries in the years 2005–2008.....	315
<b>Aniela Mikulska:</b> Small and medium-sized companies as recipients of insurance services .....	324
<b>Marek Monkiewicz:</b> Single insurance market in the EU and global financial crisis 2007–2009 – public intervention and Community competition rules.....	334
<b>Joanna Niżnik:</b> The reform of pension systems in Latin America. The Chilean and Argentinean models.....	343
<b>Magdalena Osak:</b> Medical savings account as a funding mechanism of health care.....	351
<b>Dorota Ostrowska:</b> The access to the insurance products strategic for the development of Polish economy in reference to the international capital..	361
<b>Anna Ostrowska-Dankiewicz:</b> Structured policy as a form of alternative investment on Polish market.....	372
<b>Renata Pajewska-Kwaśny:</b> Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part I.....	382
<b>Monika Papież:</b> Causality analysis on the life insurance market in the period 2003–2010 .....	393
<b>Agnieszka Pawłowska:</b> Business interruption insurance implementation in risk management for interrupted activities .....	401
<b>Krzysztof Piasecki:</b> Probabilistic fuzzy sets in the actuarial calculation .....	408
<b>Piotr Pisarewicz:</b> Mutual funds role in retirement programs' development in the USA.....	415

<b>Ryszard Pukała:</b> Integration processes of insurance markets in Middle and Eastern Europe.....	425
<b>Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel:</b> Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia .....	434
<b>Grażyna Sordyl:</b> The Role and Activity of the Dutch Guarantee Fund (College voor Zorgverzekeringen CVZ) in the area of private health insurance .....	444
<b>Ewa Spigarska:</b> Financial statement of insurance company vs. International Standards of Financial Reporting in the light of changes.....	453
<b>Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska:</b> Organization of internal auditing in insurance companies in the light of Solvency II and audit standards .....	462
<b>Anna Szkarłat-Koszalka:</b> Instruments of accounting system vs. control of financial security of an insurer.....	471
<b>Tomasz Szkutnik:</b> Copula functions in the aggregation of insurer risk .....	482
<b>Włodzimierz Szkutnik:</b> The risk of using catastrophic reserves .....	493
<b>Anna Szymańska:</b> Factors determining the choice of the insurer on the CR automobile insurance market.....	506
<b>Iłona Tomaszewska:</b> Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part II .....	513
<b>Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz:</b> Students’ insurance awareness and risk seeking .....	524
<b>Stanisław Wanat:</b> Modeling of dependencies in the context of the aggregation of solvency capital requirements in Solvency II .....	536
<b>Stanisław Wieteska:</b> Property insurance companies adaptation process to reduce the impact of greenhouse effect in Poland .....	546
<b>Ewa Wycinka, Mirosław Szreder:</b> Statistical analysis of speeding as a factor affecting car accidents in Poland .....	556



**Tomasz Szkutnik**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

---

## FUNKCJE ŁĄCZĄCE W AGREGACJI RYZYKA UBEZPIECZYCIELA

---

**Streszczenie:** W artykule został poruszony problem związany z agregacją ryzyka w przypadku, gdy czynniki, które się na nie składają, cechują się niejednorodnością rozkładów brzegowych. Dodatkowo zostało przyjęte, że struktura zależności pomiędzy czynnikami ryzyka da się opisać za pomocą funkcji łączących, ale dostępna jest tylko częściowa informacja pozwalająca wyznaczyć pewne granice dla miary Value-at-Risk. Do rozwiązania hipotetycznego problemu, w którym parametry odpowiednich rozkładów zostały ustalone z góry, zastosowano algorytm Williamsona i Downsona pozwalający na znalezienie przybliżonego rozwiązania.

**Słowa kluczowe:** funkcje łączące, agregacja ryzyka, algorytm Williamsona i Downsona.

### 1. Wstęp

Problem agregacji ryzyka jest jedną z konsekwencji funkcji pełnionej przez zakłady ubezpieczeń. Podejmowanie zobowiązań w postaci transferu ryzyka i zarządzanie nim łączy się nierozdzielnie z problemem agregacji ryzyka i wyznaczania wielkości kapitału, jakim należy dysponować, by móc się zabezpieczyć przed jego następstwami i zachować stabilność oraz ciągłość działalności. Sprowadza się to do budowy modelu, na podstawie którego będzie możliwe określenie wielkości ponoszonego ryzyka dla łącznego portfela i tym samym efektywne zarządzanie nim. Poziom ekspozycji na ryzyko ustalany jest na podstawie odpowiednich miar ryzyka. W artykule miarą taką będzie miara Value-at-Risk (*VaR*). By móc określić wielkości miary *VaR* adekwatnie do profilu działalności, należy uwzględnić szereg informacji. Są one potrzebne do wyznaczenia postaci rozkładów brzegowych poszczególnych czynników ryzyka, możliwych zależności pomiędzy nimi, z niejednokrotnym uwzględnieniem faktu, że wiedza o tych zależnościach nie jest pełna. Te trzy zasadnicze kwestie zostały poruszone w niniejszym artykule, a zagadnienie zależności pomiędzy czynnikami agregowanego ryzyka i rozpatrzenie przypadku niepełnej informacji o ich strukturze jest jego głównym tematem. W tym kontekście w części empirycznej rozpatrzono warianty scenariuszy, w których zakłada się hipotetyczne rozkłady prawdopodobieństwa dla

agregowanych ryzyk. Dzięki temu można zaobserwować wpływ informacji o zależnościach na granice zmienności miary  $VaR$ .

## 2. Miara Value-at-Risk

Jak wiadomo, miara  $VaR$  ma pewne ograniczenia związane z interpretacją i zakresem stosowalności. Miarę  $VaR$  stosuje się do określenia wielkości ponoszonego ryzyka na różnych szczeblach działalności. Wielkości ryzyka, na które jest narażona konkretna jednostka, określonego za pomocą miary  $VaR$ , lub inaczej wielkość straty, jaka może zajść w określonym horyzoncie czasu, szacowana jest przy założonym poziomie tolerancji  $\alpha \in (0;1)$ , gdzie wielkość  $VaR$  to kwantyl rzędu  $\alpha$  dla rozkładu  $F_L$  pewnej zmiennej losowej, co można zapisać jako [Embrechts i in. 2003, s. 147]:

$$VaR_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha) = \inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}. \quad (1)$$

Miara  $VaR$  nie określa maksymalnej straty, jaka może zajść powyżej założonego poziomu  $\alpha$ , co ogranicza możliwości jej interpretacji. W odniesieniu do zakresu stosowalności należy nadmienić, że w ogólnym przypadku miara  $VaR$  nie jest koherentną miarą ryzyka [Chernobai i in. 2007, s. 234], co ma znaczenie w przypadku jej agregacji.

## 3. Agregacja miary $VaR$

Niech zmienne losowe  $X_i$  dla  $i \in 1, \dots, n$  będą czynnikami ryzyka wchodzącymi w skład łącznej pozycji, dla której należy wyznaczyć wielkość ryzyka na podstawie miary  $VaR$ . W tym przypadku łączna pozycja może oznaczać określony portfel ubezpieczeń, linię biznesową czy zakład ubezpieczeń jako całość. Agregacja ryzyka w tym przypadku polega na wyznaczeniu wielkości  $VaR$  dla zagregowanej pozycji  $S = X_1 + \dots + X_n$ , czyli wyznaczeniu wielkości  $VaR_\alpha(X_1 + \dots + X_n)$ . W sytuacji gdy znany jest rozkład,  $F_{X_1 + \dots + X_n}$  kwantyfikacja miary  $VaR$  jest jedynie problemem numerycznym związanym z wyznaczeniem wielkości kwantyla określonego rozkładu [Embrechts i in. 2003, s. 146].

W procesie agregacji, zdefiniowanym powyżej, istotne znaczenie mają dwie kwestie. Pierwsza odnosi się do indywidualnego charakteru każdego z poszczególnych czynników ryzyka określonych poprzez rozkład statystyczny. Druga kwestia skupia się na zagadnieniu zależności pomiędzy poszczególnymi czynnikami ryzyka i postaci łącznej wielowymiarowej dystrybuanty. W praktyce często okazuje się, że rozkłady czynników ryzyka są niejednorodne, tzn. nie należą do tej samej rodziny rozkładów statystycznych, oraz dodatkowo struktura zależności pomiędzy czynnikami ryzyka nie ma charakteru liniowego. Powyższe uwarunkowania nie pozwalają na zastosowanie popularnego podejścia zakładającego wielowymiarowy rozkład normalny rozpatrywanych ryzyk.

Jednym z najprostszych rozwiązań zagadnienia niejednorodności agregowanych czynników ryzyka jest wyznaczenie łącznej wielkości  $VaR$  jako sumy wielkości  $VaR_i$  dla poszczególnych czynników ryzyka. W takim przypadku poszczególne wielkości  $VaR_i$  wyznaczone są oddzielnie. Proces sumowania poszczególnych wielkości  $VaR_i$  dodatkowo zakłada idealną zależność pomiędzy tymi wielkościami. Przy sumowaniu poszczególnych wielkości  $VaR_i$  założenie, w którym strata (przy założeniu, że rozkłady czynników ryzyka są rozkładami strat) zajdzie jednocześnie w każdym z rozważanych czynników ryzyka, wydawać się może zbyt rygorystyczne. W tym przypadku ewentualny efekt dywersyfikacji jest całkowicie pomijany. Z uwagi na wspomniany wcześniej fakt, że miara  $VaR$  nie jest koherentną miarą ryzyka, w szczególności nie spełnia ona warunku subaddytywności, oraz przy uwzględnieniu zależności o charakterze nieliniowym pomiędzy rozważanymi czynnikami ryzyka może się okazać, że wyznaczona wielkość  $VaR$  w standardowy sposób będzie błędnie oszacowana, a rzeczywista ekspozycja na ryzyko w tym przypadku pozostanie nieznaną.

Jednym z rozwiązań uwzględniających jednocześnie heterogeniczność rozkładów brzegowych oraz nieliniowy charakter zależności dla przypadku wielowymiarowego jest zastosowanie funkcji łączących.

#### 4. Funkcje łączące

W przypadku wielowymiarowych zmiennych losowych problem zależności jest całkowicie uzależniony od postaci dystrybuanty łącznej zmiennej losowej  $F(x_1, \dots, x_n)$  (w artykule został rozpatrzony przypadek jedynie dwóch czynników ryzyka).

Funkcje łączące to wielowymiarowe dystrybuanty o jednostajnych rozkładach brzegowych. Pozwalają rozdzielić charakter zależności pomiędzy zmiennymi losowymi, tu  $X_i$ , gdzie  $i \in \{1, 2\}$ , odpowiednio od ich rozkładów brzegowych  $F_i$  [Piontek, Papla, s. 3]. Ponadto dzięki funkcjom łączącym możliwe jest rozważenie różnych scenariuszy zależności o odmiennych własnościach dla tych samych zmiennych losowych  $X_i$ .

Definicja 1. Funkcją łączącą  $C : [0; 1]^2 \rightarrow [0; 1]$  to funkcja o wartościach:

1. Dla dowolnego  $u, v \in [0; 1]$ ;  $C(u, 0) = 0 = C(0, v)$  i  $C(u, 1) = u$ ,  $C(1, v) = v$ .

2. Dla dowolnych  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0; 1]$  takich, że  $u_1 \leq u_2$  oraz  $v_1 \leq v_2$  zachodzi  $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$ .

Jednym z zasadniczych twierdzeń w tym przypadku jest twierdzenie Sklara.

Twierdzenie 1 (Sklar). Niech  $X_1, X_2$  będą zmiennymi losowymi o łącznej dwuwymiarowej dystrybuancie  $F$  oraz dystrybuantach brzegowych  $F_1, F_2$ . Wtedy istnieje taka funkcja łącząca  $C$ , że:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)), \quad (2)$$

gdy dystrybuanty  $F_1, F_2$  są ciągłe, to  $C$  jest jednoznacznie określona.

Istnieje wiele funkcji łączących, mogących opisywać wachlarz struktur zależności o odmiennych własnościach. W artykule zostały rozpatrzone funkcje łączące należące do rodziny archimedesowskich funkcji łączących, takie jak funkcja łącząca iloczynowa, Gumbela oraz Clayтона. Można je wyrazić za pomocą ogólnego wzoru:

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)), \quad (3)$$

gdzie funkcja  $\varphi: [0; 1] \rightarrow [0; \infty]$  jest ciągła, ściśle malejąca, taka że  $\varphi^{-1}(\cdot)$  jest monotoniczna oraz spełnia warunki  $\varphi(0) = \infty, \varphi(1) = 0$ . Funkcja  $\varphi(\cdot)$  jest generatorem dla danej funkcji łączącej  $C$ .

Dla jednoparametrycznych funkcji łączących, jakimi są funkcja łącząca Gumbela i Clayтона, siła zależności pomiędzy zmiennymi losowymi  $X_1, X_2$  może być modelowana na podstawie wartości określonego parametru związanego z rozpatrywaną funkcją  $C$  oznaczonego jako  $\theta$ . Można pokazać, że zachodzi związek pomiędzy funkcjami łączącymi a miarami asocjacji, np. współczynnikiem  $\tau$ -Kendalla (ozn.  $\tau_K$ ) [Klugman i in. 2008, s. 166].

W rozważaniach nad zależnymi zmiennymi losowymi w zagadnieniach ryzyka ubezpieczeniowego istotne jest zdefiniowanie własności zależności w ogonie łącznego rozkładu. Rozróżnia się zależność górną i dolną, gdzie współczynnik zależności górnej można zdefiniować jako [Klugman i in. 2008, s. 165]:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P(X_1 > F_1^{-1}(u) | X_2 > F_2^{-1}(u)). \quad (4)$$

Wielkość  $\lambda_U$  określa prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia ekstremalnego dla zmiennej  $X_1$  w przypadku, gdy zaszło zdarzenie ekstremalne dla  $X_2$ . Pojęcie „ekstremalne” związane jest z wielkością kwantyla dla odpowiedniego rozkładu zmiennej losowej  $X_1$  oraz  $X_2$ <sup>1</sup>. Jeśli wielkości  $\lambda_U = 0$  lub  $\lambda_U = 0$ , to stwierdza się brak zależności tego typu. Indeks zależności górnej oraz dolnej może służyć do porównania własności funkcji łączących  $C$ . Na potrzeby artykułu istotne jest zdefiniowanie kolejnych pojęć, takich jak funkcja dualna oraz funkcja łącząca przeżycia.

Definicja 2. Niech zmienne losowe  $U_1, U_2$  mają jednostajne rozkłady, z funkcją łączącą postaci  $C$ . Funkcja dualna  $C^d$  do funkcji łączącej  $C$  wyraża się wzorem:

$$C^d(u_1, u_2) = P((U_1 \leq u_1) \cup (U_2 \leq u_2)). \quad (5)$$

Funkcja łącząca przeżycia  $\bar{C}$  to dystrybuanta dla zmiennych losowych  $(1 - U_1, 1 - U_2)$ .

<sup>1</sup> Dolny współczynnik zależności w ogonie rozkładu to  $\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P(U_1 \leq u | U_2 \leq u)$ .

Definicja 3. Niech zmienne losowe  $X_1, X_2$  mają łączną dystrybuantę  $F$ , rozkłady brzegowe  $F_1, F_2$  oraz funkcję łączącą  $C$ , to:

$$C^d(F_1(x_1), F_2(x_2)) = P((X_1 \leq x_1) \cup (X_2 \leq x_2)), \quad (6)$$

$$\bar{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)) = \bar{F}(x_1, x_2), \quad (7)$$

gdzie:  $\bar{F}_i(x_i) = 1 - F_i(x_i)$  oraz  $\bar{F}(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$ .

Ważną własność funkcji łączących jest związana z granicami Frecheta, wyznaczającymi minimalną  $C_L$  oraz maksymalną  $C_U$  granicę, pomiędzy którymi znajduje się dowolna funkcja  $C$ . Można to zapisać jako  $C_L \leq C \leq C_U$ . Górna granica odpowiada idealnej zależności dodatniej, a dolna granica idealnej zależności ujemnej pomiędzy zmiennymi losowymi  $U_1, U_2$  [Klugman i in. 2008, s. 167].

$$C_L(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0), \quad (8)$$

$$C_U(u_1, u_2) = \min(u_1; u_2). \quad (9)$$

Pierwszym przykładem funkcji łączącej z generatorem  $\varphi(u) = -\ln(u)$  jest iloczynowa funkcja połączeń postaci:

$$C_I(u_1, u_2) = u_1 u_2. \quad (10)$$

Funkcja ta nie posiada parametru, który byłby odpowiedzialny za modelowanie zależności. Wyznaczona dla niej wielkość współczynnika  $\tau_K$  wynosi zero [Klugman i in. 2008, s. 167]. Nazywana jest iloczynową lub niezależną funkcją łączącą. Dla niezależnych zmiennych losowych  $X_1, X_2$  o rozkładach odpowiednio  $F_1, F_2$  łączna dwuwymiarowa dystrybuanta dana jest jako iloczyn  $F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ . Indeksy zależności w ogonach zdefiniowane jako wielkości  $\lambda_L, \lambda_U$  wynoszą zero.

W przypadku jednoparametrycznych funkcji łączących z rodziny archimedesowskiej wybrane zostały funkcje o odmiennych własnościach w ogonach rozkładów. Funkcja łącząca Gumbela, z generatorem  $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$ , wyraża się wzorem:

$$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left\{-\left(\left(-\ln u_1\right)^{1/\theta} + \left(-\ln u_2\right)^{1/\theta}\right)^\theta\right\}. \quad (11)$$

Parametr  $0 < \theta \leq 1$  odpowiedzialny jest za stopień zależności. Funkcja łącząca Gumbela cechuje się zależnością w górnym ogonie  $\lambda_U \neq 0$ . Współczynnik  $\tau_K = 1 - \theta$ .

Funkcja łącząca Claytona, z generatorem  $\varphi(t) = t^{-\theta} - 1$ , wyraża się wzorem:

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, u_2) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}. \quad (12)$$

Parametr  $\theta > 0$  odpowiedzialny jest za stopień zależności. Tu funkcja łącząca wykazuje zależność w dolnym ogonie rozkładu  $\lambda_L \neq 0$ . Dla tej funkcji współczynnik  $\tau_K = \theta/(\theta + 2)$ .

## 5. Granice dla Value-at-Risk

Wyznaczenie granic dla rozkładu  $F_S$ , sumy  $S = X_1 + X_2$  zmiennych losowych  $X_1, X_2$ . zostanie w tej części szczegółowo zdefiniowane. Przyjmując, że dla czynników ryzyka  $X_1, X_2$  o dystrybuantach odpowiednio  $F_1, F_2$  można wyznaczyć dystrybuanty  $F_{\min}$  oraz  $F_{\max}$ , takie że [Denuit i in. 1999, s. 87]:

$$F_{\min}(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max \{F_1^-(x) + F_2^-(s-x) - 1, 0\}, \quad (13)$$

$$F_{\max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min \{F_1(x) + F_2(s-x), 1\}, \quad (14)$$

gdzie:  $F_i^-(x) = P(X_i < x)$ , to dla zmiennej losowej  $S$  można zapisać, że  $F_{\min}(s) \leq P(S \leq s) \leq F_{\max}(s)$ . Przypadki, w których wielkości  $F_{\min}$  i  $F_{\max}$  mogą zostać wyznaczone analitycznie, wymagają, by rozkłady zmiennych losowych  $X_1, X_2$  należały do tej samej rodziny rozkładów, np. zmienne  $X_1, X_2$  o rozkładach normalnych, Cauchy'ego itd. (stwierdzenie to nie jest prawdziwe dla wszystkich rozkładów, np. dla rozkładu Pareto i wykładniczego możliwość znalezienia analitycznego rozwiązania dla wielkości (13) oraz (14) uzależniona jest od przyjętych wartości parametrów tych rozkładów).

W sytuacji gdy rozkłady dwóch rozpatrywanych czynników ryzyka  $X_1, X_2$  nie należą do tej samej rodziny, wtedy szacując wielkości  $F_{\min}$  i  $F_{\max}$ , można skorzystać z algorytmu zaproponowanego przez Williamsona i Downsona. Problem ten jest dobrze zdefiniowany w pracach [Cherubini i in. 2006, s. 85] oraz [Denuit i in. 1999, s. 91], a aproksymowane granice są najlepsze w sensie stochastycznej dominacji.

Williamson i Downson zakładają, że zmienne losowe  $X_1, X_2$  są stochastycznie zależne, a ich łączna dystrybuanta  $F(x_1, x_2)$  jest nieznaną oraz spełnia warunek dodatniej kwadratowej zależności postaci  $F(x_1, x_2) \geq F_1(x_1)F_2(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Podają oni algorytm wyznaczania granic danych wzorami (15) i (16). Ograniczając nieznaną łączną dystrybuantę  $F(x_1, x_2)$  od dołu pewną łączną dystrybuantą postaci  $F_*$ , grani-

ce dane wzorami (13) oraz (14) mogą być zmniejszone. Przy założeniu, że istnieje pewna niepełna informacja odnośnie do zależności, można wyznaczyć nowe granice spełniające warunek  $F_{*min}(s) \leq P(S \leq s) \leq F_{*max}(s)$ , które przyjmują postać:

$$F_{*min}(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F_*(x, s-x)\}, \quad (15)$$

$$F_{*max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_1(x) + F_2(s-x) - F_*(x, s-x)\}, \quad (16)$$

gdzie:  $s \in \mathbb{R}$

W algorytmie Williamsona i Downsona przy wyznaczaniu wielkości (15) i (16) korzysta się z własności wynikającej z twierdzenia Sklára i rozpatruje problem na płaszczyźnie funkcji łączących. Dla ciągłych dystrybuant brzegowych  $F_1, F_2$ , korzystając ze wzoru (2), mamy  $C_*(u_1, u_2) = F_*\{F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)\}$ . W tym przypadku można nieznaną funkcję  $C(u_1, u_2)$  związaną z dystrybuantą  $F(x_1, x_2)$  ograniczyć od dołu funkcją łączącą  $C_*(u_1, u_2)$  związaną z dystrybuantą  $F_*(x_1, x_2)$ . Przybliżając wielkości nieznanymi granic, korzysta się z zagadnienia dualności Franka i Schweizera [Embrechts i in. 2003, s. 147], co daje możliwość wyznaczenia odpowiednio wielkości dla  $F_{*min}^{-1}$  oraz  $F_{*max}^{-1}$  jako:

$$F_{*min}^{-1}(\alpha) = \inf_{C_*(u_1, u_2) = \alpha} \{F_1^{-1}(u_1) + F_2^{-1}(u_2)\}, \quad (17)$$

$$F_{*max}^{-1}(\alpha) = \sup_{C_*^d(u_1, u_2) = \alpha} \{F_1^{-1}(u_1) + F_2^{-1}(u_2)\}. \quad (18)$$

W swym algorytmie Williamson i Downson przyjęli, że funkcje łączące  $C_*(u_1, u_2) = \alpha$  oraz  $C_*^d(u_1, u_2) = \alpha$  (wzory (17) i (18)) będą dyskretyzowane dla zadanych wielkości  $\alpha = r/N$ . W tym przypadku sprowadza się to do wyznaczenia odpowiednio minimum i maksimum ze skończonego zbioru wartości i da się zapisać za pomocą uproszczonych wzorów postaci:

$$\hat{F}_{*min}^{-1}(r/N) = \min_{r \leq l \leq N} \{F_1^{-1}(l/N) + F_2^{-1}(v_{r,l})\}, \quad (19)$$

$$\hat{F}_{*max}^{-1}(r/N) = \max_{0 \leq l \leq r} \{F_1^{-1}(l/N) + F_2^{-1}(v_{r,l}^*)\}, \quad (20)$$

gdzie odpowiednie wielkości  $v_{r,l}$  oraz  $v_{r,l}^*$  są rozwiązaniami równań  $C_*(l/N, v_{r,l}) = r/N$  oraz  $C_*^d(l/N, v_{r,l}^*) = r/N$  dla zadanych wielkości  $r$  oraz  $N$ .

Warto nadmienić, że przyjęte ograniczenie  $C_*$  we wzorach (17) i (18) nie musi być takie samo w każdym z przypadków. Znaczy to, że można ograniczyć nieznaną

funkcję łączącą, zadając odmienne warunki dla  $F_{*min}^{-1}$  oraz  $F_{*max}^{-1}$ . W tym celu należy przyjąć warunki postaci  $C \geq C_{*0}$  oraz  $C^d \leq C_{*1}^d$  odpowiednio dla minimum i maksimum.

Dla rozważanych funkcji łączących z rodziny archimedesowej, danej ogólnym wzorem postaci (3) z funkcją generującą  $\varphi(\cdot)$ , wielkości  $v_{r,l}$  są rozwiązaniem równania:

$$v_{r,l} = \varphi^{-1}(\varphi(r/N) - \varphi(l/N)). \quad (21)$$

W przypadku poszukiwania wielkości  $v_{r,l}^*$  bezpośrednie rozwiązanie nie jest możliwe, w tym przypadku bowiem, korzystając z definicji funkcji dualnej i wzoru (6), wykazuje się, że konieczne jest rozwiązanie równania postaci:

$$\varphi(v_{r,l}^*) + \varphi(l/N) - \varphi(v_{r,l}^* + l/N - r/N) = 0. \quad (22)$$

W najprostszym przypadku w ograniczeniu górnym funkcji  $C^d$  warunek postaci  $C^d \leq C_{*1}^d$  można wprowadzić zamiennie, ograniczając funkcję łączącą przeżycia  $\bar{C}$ . Korzysta się tu z własności  $C^d(u_1, u_2) = 1 - \bar{C}(1 - u_1, 1 - u_2)$ , będącej konsekwencją wzorów (6) i (7). Warunek  $C^d \leq C_{*1}^d$  można w tym przypadku zapisać w równoważnej postaci jako  $\bar{C} \geq \bar{C}_{*1}$ , gdzie  $\bar{C}_{*1}$  wyznacza się z równości  $1 - \bar{C}_{*1}(1 - l/N, 1 - v_{r,l}^*) = r/N$ . Wtedy wielkość  $v_{r,l}^*$  będzie wyznaczona jednoznacznie w postaci:

$$v_{r,l}^* = 1 - \varphi^{-1}(\varphi(1 - r/N) - \varphi(1 - l/N)). \quad (23)$$

## 6. Warianty scenariuszy zależności przy cząstkowej informacji

Podstawowym celem badania jest przeanalizowanie możliwego oddziaływania cząstkowych informacji o strukturze zależności zdefiniowanej na płaszczyźnie funkcji łączących na wielkości miary ryzyka  $Var$ . Problem został rozpatrzony przy założeniu niejednorodności rozkładów brzegowych poszczególnych czynników ryzyka oraz dostępnej częściowej informacji o strukturze między nimi, dla pewnych wielkości poziomu tolerancji  $\alpha$ .

W badaniu zostały założone hipotetyczne rozkłady brzegowe dla czynników ryzyka  $X_1, X_2$ , odpowiednio dla  $X_1$  – rozkład Weibulla  $Wbl(1,2;2)$ , a dla  $X_2$  – rozkład wykładniczy  $Exp(3)$ , oraz różne scenariusze zależności stanowiące możliwe przypadki w analizie ryzyka ubezpieczeniowego. Odpowiednia funkcja łącząca  $C_*$  ograniczająca nieznaną funkcję  $C$  została określona oddzielnie dla kryteriów danych

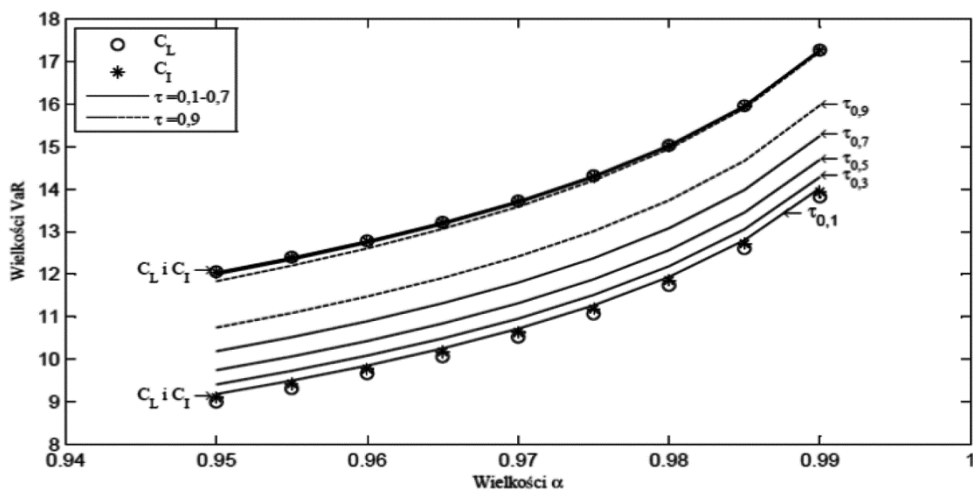


wzorami (17) i (18), tak jak wcześniej funkcja  $C_{*0}$ ; dla kryterium minimum oraz  $C_{*1}$ ; dla kryterium maksimum.

Przyjęto trzy scenariusze zależności:

1.  $C_{*0} = C_{*1} = C_L$ .
2.  $C_{*0} = C_{*1} = C_I$ .
3.  $C_{*0} = C_{\theta(CI)}^{Cl}$ ;  $\bar{C}_{*1} = C_{\theta(Gu)}^{Gu}$ .

Można pokazać, że w przypadku scenariuszy (1) oraz (2) odpowiednie funkcje  $C_{*0}$  oraz  $C_{*1}$  są sobie równe [Cherubini i in. 2006, s. 77]. Dla scenariusza (1) wielkości parametrów  $\theta(\cdot)$  dla poszczególnych funkcji łączących mają takie same wartości dla miary  $\tau$ -Kendalla, co oznacza, że siła zależności jest na takim samym poziomie dla dwóch warunków ograniczających zadanych odmiennymi funkcjami  $C_{*0}$  i  $C_{*1}$ .



Rys. 1. Granice miary  $VaR$  dla przyjętych scenariuszy zależności

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem algorytmu Williamsona i Downsona w programie MATLAB.

Na rysunku 1 widać wpływ dodatkowej informacji o strukturze zależności na zakres zmienności miary  $VaR$  w odniesieniu od przyjętej wielkości  $\alpha$ . Wielkości parametru  $\alpha$  – są określone, począwszy od wielkości 0,95 do 0,99 z interwałem 0,005. Scenariusze (1)–(2), uwzględniające odpowiednio brak jakiejkolwiek informacji co do charakteru zależności pomiędzy zmiennymi  $X_1, X_2$ , oraz przypadek funkcji łączącej iloczynowej, odnoszący się do niezależnych zmiennych  $X_1, X_2$ , nie różnią się w dużej mierze od siebie i wyznaczają praktycznie ten sam zakres granic dla  $VaR$ . W przypadku uwzględnienia dodatkowej informacji wyrażonej przez funkcje łączące

Gaussa i Gumbela w scenariuszu (3), przy ograniczeniach postaci  $C \geq C_{\theta(CI)}^{CI}$  oraz  $\bar{C} \geq C_{\theta(Gu)}^{Gu}$ , widać jej natychmiastowy wpływ na zakres zmienności  $Var$ . Zachowanie się górnej i dolnej granicy w pewnym stopniu wynikało z własności Archimedesowskich parametrycznych funkcji łączących identyfikowanych przez wielkości  $\lambda_L$  i  $\lambda_U$ . Dla wielkości  $\tau = 0,9$  zakres granic  $Var$  zmniejszył się o ponad połowę. Uzyskany wynik demonstuje, jak istotne jest rozważenie zależności o nieklasycznej strukturze zależności, gdzie dodatkowa cząstkowa informacja zmniejsza zakres niepewności co do szacowanej wielkości ryzyka opisanego za pomocą miary  $Var$ .

W zagadnieniach ryzyka, w których dysponuje się jedynie niepełną informacją, istotne jest ustalenie faktycznych wielkości ponoszonego ryzyka lub przynajmniej częściowe zbliżenie się do tych wielkości, korzystając ze wszystkich dostępnych informacji. Ze względu na możliwe konsekwencje złej oceny profilu ryzyka, tj. niedoszacowania i przeszacowania faktycznej pozycji, zagadnienie to wydaje się istotne z praktycznego punktu widzenia.

W przyszłych badaniach istotne wydaje się zidentyfikowanie zasygnalizowanych problemów, takich jak przyjęcie zamiast rozwiązania dla funkcji dualnej ograniczenia dla funkcji łączącej przeżycia czy porównanie za pomocą metod symulacyjnych błędów wynikających z aproksymacji algorytmem Williamsona i Downsona w odniesieniu do innych metod przybliżonych lub analitycznych – jeśli są dostępne.

## Literatura

- Chernobai A., Rachev S., Fabozzi F. [2007], *Operational Risk. A guide to Basel II Capital Requirements, Models and Analysis*, John Wiley&Sons, New Jersey.
- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. [2006], *Copula methods in finance*, Wiley Finance, John Wiley&Sons, West Sussex.
- Denuit M., Genest C., Mareau E. [1999], *Stochastic bounds on sums of dependent risks*, "Insurance: Mathematics and Economics", 25, s. 85–104.
- Embrechts P., Hoing A., Juri A. [2003], *Using copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks*, "Finance and Stochastics", 7.
- Heilpern S. [2007], *Funkcje łączące*, Wyd. Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- Klugman S., Panjer H., Willmot G. [2008], *Loss Models. From data to decision*, John Wiley&Sons, New Jersey.
- Marcinkowska M. [2009], *Standardy kapitałowe banków*, Regan Press, Gdańsk.
- Piontek K., Papla D., *Zastosowanie rozkładów  $\alpha$ -stabilnych i funkcji powiązań (copula) w obliczaniu wartości zagrożonej (VaR)*, <http://www.kpiontek.ue.wroc.pl/>.

## **COPULA FUNCTIONS IN THE AGGREGATION OF INSURER RISK**

**Summary:** The article concerns the issue related to the aggregation of risk in case when its ingredients are characterized by heterogeneity of marginal distributions. Additionally, it has been assumed that the structure of dependencies among the risk factors can be described by means of copula functions, however, only partial information that allows to determine some limits for Value-at-Risk measure is available. In order to solve a hypothetical problem where the parameters of relevant distributions have been determined in advance, Williamson and Downson's algorithm (which allows to find an approximate solution) has been applied.

**Keywords:** copula functions, aggregation of risk, Williamson and Downson's algorithm.