

PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 415

Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2016

Redakcja wydawnicza: Jadwiga Marcinek
Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz
Korekta: Justyna Mroczkowska
Łamanie: Agata Wiszniowska
Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronach internetowych
www.pracnaukowe.ue.wroc.pl
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2016

ISSN 1899-3192
e-ISSN 2392-0041

ISBN 978-83-7695-571-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
ul. Komandorska 118/120, 53-345 Wrocław
tel./fax 71 36 80 602; e-mail: econbook@ue.wroc.pl
www.ksiegarnia.ue.wroc.pl

Druk i oprawa: TOTEM

Spis treści

Wstęp	9
Maria Balcerowicz-Szkutnik, Włodzimierz Szkutnik: Problemy ubezpieczeń społecznych i emerytalnych w Federacji Rosyjskiej / Social and pension insurance problem in Russian Federation	11
Teresa H. Bednarczyk: Mikroubezpieczenia – innowacja produktowa czy powrót do korzeni? / Microinsurance – product innovation or return to the roots?.....	23
Barbara Cieślik: UBI zamiast czy obok SBM? / UBI together with or instead of BMS?.....	33
Roman Garbiec: Financial Effects of Social Security System Reforms in Selected Countries of the European Community / Efekty finansowe reform publicznych systemów ubezpieczeń społecznych w wybranych państwach Unii Europejskiej	42
Aleksandra Hęcka, Krzysztof Łyskawa: Ubezpieczenia zagrożeń środowiskowych w gospodarstwie rolnym / Insurance of environmental risk in agricultural entity.....	55
Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa: <i>Underwriting</i> i polityka lokacyjna zakładów ubezpieczeń w kształtowaniu taryf na rynku ubezpieczeń majątkowych / Underwriting and investment policy of insurances companies in creating rates on the market of property insurance.....	68
Maria Kiedrowska: Ryzyko badania sprawozdania finansowego zakładu ubezpieczeń / Insurance company financial statement audit risk	83
Bożena Kołosowska, Angelika Kuligowska: Praktyczne stosowanie triggerów na przykładzie ubezpieczenia gminy / Practical application triggers on the example of municipalities insurance	94
Rafał Komorowski, Katarzyna Kubiszewska: Islamic Takaful: Has it successfully substituted conventional insurance? / Islamic Takaful: czy skutecznie zastąpił ubezpieczenia komercyjne?.....	104
Lech Kujawski, Agnieszka Pobłocka: Oszacowanie rezerwy IBNR bayesowskim modelem <i>chain ladder</i> w ubezpieczeniach majątkowych / Bayesian methods for calculation the best estimate of IBNR technical provision in non-life insurance	115
Agnieszka Kurdyś-Kujawska: Motywy zakupu dobrowolnych ubezpieczeń przez rolników Pomorza Środkowego / The motives of purchase voluntary insurances by farmers of the Middle Pomerania	124

Robert Kurek: Nadzór nad globalnie działającymi zakładami ubezpieczeń – wymogi kapitałowe / Supervision over the globally functioning insurance institutions – capital requirements	134
Sergiusz Lenhardt: Perspektywy dla rynku ubezpieczeń samochodów zabytkowych w Polsce / Perspectives for the classic cars insurance market in Poland	143
Jerzy Łańcucki: Mechanizm nadzoru nad grupą ubezpieczeniową w nowych regulacjach unijnych / Mechanism of insurance group supervision in new EU regulations	152
Beata Nowotarska-Romaniak: The marketing meaning of customers as users of insurance services / Marketingowe znaczenie klientów jako użytkowników usług ubezpieczeniowych	163
Sylvia Pieńkowska-Kamieniecka: Partycypacja osób młodych w dodatkowym systemie emerytalnym / The participation of young people in the additional pension scheme	171
Piotr Pisarewicz: Wynagrodzenia z tytułu sprzedaży ubezpieczeń jako wyznacznik strategii rozwoju banków opartych na modelu współpracy z zakładami ubezpieczeń / Insurance commissions as a determinant of banks' strategies based on co-operation with an insurance companies.....	182
Agnieszka Przybylska-Mazur: Wybrana metoda oszacowania ryzyka rachunków zdrowia / Selected method of estimating the risk of health accounts.....	194
Paweł Rozumek: Instrumenty zarządzania ryzykiem katastroficznym i niekatastroficznym w rolnictwie – analiza porównawcza ubezpieczeń tradycyjnych i indeksowych / Catastrophic and non-catastrophic risk management tools in agriculture – comparative analysis of traditional and index insurances	203
Ewa Spigarska: Bilans zakładów ubezpieczeń na potrzeby wymogów wypłacalności i do celów statutowych – podobieństwa i różnice / Balance sheet of insurance companies for solvency requirements and for statutory purposes – similarities and differences.....	214
Grzegorz Strupczewski: Identyfikacja kluczowych determinant zakupu dotowanego ubezpieczenia upraw rolnych i zwierząt gospodarskich / Identification of the key determinants of subsidized crop and livestock insurance purchase.....	225
Waldemar Truszkiewicz: Medyczna ocena następstw szkody osobowej w roszczeniach odszkodowawczych – wielowymiarowy, nowoczesny System HBT (Human Body Trauma) Index w miejsce jednowymiarowej tabeli ZUS / Replacement of one-dimensional ZUS (Social Insurance Institute) table with a multidimensional, advanced HBT (Human Body Trauma) system in Medical valuation of consequences of injuries on the person in compensation claims	241

Tatiana Verezubova: Rodzaje ubezpieczeń w strategii finansowej zakładów ubezpieczeniowych rekomendowane na podstawie analizy ryzyka i rentowności – metodologia wyboru / The method of selection of preferential insurance forms based on risk analysis and profitability in financial strategy of insurance companies.....	250
Alicja Wolny-Dominiak, Stanisław Wanat: Taryfikacja <i>a priori</i> z wykorzystaniem kopuli / On the use of copula in ratemaking	258

Wstęp

Ubezpieczenie jako urządzenie gospodarcze funkcjonuje od bardzo dawna. We współczesnych czasach w wielu krajach w ramach rynków finansowych działają rozwinięte w różnym stopniu rynki ubezpieczeniowe. Ryzyko, które towarzyszy człowiekowi od zarania dziejów i które dało początek zorganizowania instytucji ubezpieczenia, występuje ciągle i jednocześnie na skutek rozwoju cywilizacyjnego, rozwoju technologicznego oraz zmieniających się procesów demograficznych. Pojawiają się nowe kategorie ryzyka, które mogą być przedmiotem ubezpieczenia. Wobec zmieniającego się otoczenia rynek ubezpieczeniowy dostosowuje się i proponuje nowe produkty ubezpieczeniowe. Jednocześnie zakłady ubezpieczeń z obowiązku muszą dbać o bezpieczeństwo finansowe swoich klientów, aby nie podważyć podstawowej zasady realności ochrony ubezpieczeniowej. Wszystkie te zjawiska można zaliczyć do obszarów badawczych środowiska akademickiego zajmującego się problematyką ubezpieczeniową. Ponadto nowe tendencje, które pojawiają się w systemach emerytalnych, wywołane starzeniem się społeczeństw i niewydolnością repartycyjnego systemu emerytalnego, a równocześnie pojawiającymi się kryzysami na rynkach finansowych, generują cały szereg problemów badawczych, które są również w zasięgu zainteresowań wielu środowisk akademickich. Funkcjonujący w Polsce od kilkunastu lat nowy system emerytalny budzi różne kontrowersyjne dyskusje i skłania do wstępnej oceny, a zagadnienia te wiążą się z funkcjonowaniem systemu ubezpieczeń społecznych, w tym również z finansowaniem ochrony zdrowia.

Jak widać, tematyka badawcza obejmująca bardzo szeroko rozumiane ubezpieczenia od strony teoretycznej, jak również praktyki ubezpieczeniowej, jest niezwykle obszerna. Wszystkie te problemy są zawarte w przygotowanej pracy.

Zbiór zawiera artykuły, zaprezentowane na IX Międzynarodowej Konferencji „Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku”, która odbyła się w maju 2015 r. w Rydzynie. Konferencja jest organizowana z inicjatywy i w wyniku współpracy Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu i Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu. Biorą w niej udział osoby reprezentujące wszystkie czołowe krajowe środowiska akademickie zajmujące się problematyką ubezpieczeniową oraz przedstawiciele praktyki ubezpieczeniowej. Od kilku lat przyjeżdżają również uczestnicy z zagranicy, z takich państw, jak: Rosja, Ukraina, Białoruś, Słowacja, Czechy i Niemcy. Tematyka badawcza prezentowana na obradach koncentruje się wokół następujących zagadnień:

- Funkcjonowanie rynku ubezpieczeniowego w Polsce i w świecie
- Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach
- Gospodarka finansowa ubezpieczycieli

- Zastosowanie metod ilościowych w ubezpieczeniach
 - Problematyka prawna w ubezpieczeniach
- Artykuły opublikowane w tym opracowaniu dotyczą powyższych zagadnień.

Pragniemy wszystkim Autorom serdecznie podziękować za przygotowanie interesujących artykułów poruszających wiele ważnych, aktualnych problemów i mamy nadzieję, że publikacja ta wzbogaci literaturę ubezpieczeniową i będzie inspiracją do dalszych badań.

W imieniu Autorów i własnym wyrażamy głęboką wdzięczność recenzentom: Pani Profesor Marii Balcerowicz-Szkutnik, Pani Profesor Teresie Bednarczyk, Panu Profesorowi Jackowi Lisowskiemu, Panu Profesorowi Markowi Monkiewiczowi, Panu Profesorowi Kazimierzowi Ortyńskiemu, Pani Profesor Wandzie Sułkowskiej, Panu Profesorowi Włodzimierzowi Szkutnikowi, Panu Profesorowi Tadeuszowi Szumliczowi oraz Panu Profesorowi Adamowi Śliwińskiemu – za cenne uwagi, które pozwoliły nadać publikacji lepszy kształt.

Redaktorzy naukowii
Wanda Ronka-Chmielowiec
Patrycja Kowalczyk-Rólczyńska

Lech Kujawski, Agnieszka Pobłocka

Uniwersytet Gdański

e-mails: lech.kujawski@ug.edu.pl, agnieszka.poblocka@ug.edu.pl

OSZACOWANIE REZERWY IBNR BAYESOWSKIM MODELEM *CHAIN LADDER* W UBEZPIECZENIACH MAJĄTKOWYCH

BAYESIAN METHODS FOR CALCULATION THE BEST ESTIMATE OF IBNR TECHNICAL PROVISION IN NON-LIFE INSURANCE

DOI: 10.15611/pn.2016.415.10

Streszczenie: Rezerwa IBNR (*Incurring But Not Reported*) jest tworzona w celu pokrycia zaistniałych szkód ubezpieczonych, niezgłoszonych w zakładzie ubezpieczeń do dnia tworzenia rezerw techniczno-ubezpieczeniowych. Metody bayesowskie to nieklasyczne metody wnioskowania statystycznego, w których prawdopodobieństwo opisuje „stopień pewności lub przekonania danej osoby o prawdziwości danego osądu (*degree of belief*)”. W podejściu tym zakłada się, że zmienną losową opisującą badane zjawisko (np. rezerwę IBNR) można zdefiniować za pomocą danych empirycznych (np. historycznych danych szkodowych) oraz za pomocą informacji spoza próby (np. wiedzy i doświadczenia badacza). Projekt Wyłączalność II (Solvency II) wymaga, aby rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe dla potrzeb wypłacalności były tworzone według wartości rynkowej uwzględniającej zmienność rezerw. W artykule przedstawiono propozycje kalkulacji rezerwy IBNR przy wykorzystaniu bayesowskiej metody *chain ladder* i porównano uzyskane wyniki z klasyczną techniką *chain ladder*.

Słowa kluczowe: rezerwa IBNR, wnioskowanie bayesowskie, projekt Wyłączalność II, klasyczna i bayesowska metoda *chain ladder*.

Summary: Incurred but not reported reserves (in short IBNR) are very important reserves in non-life insurance. Bayesian methods belong to the non-classical methods of statistical inference, in which the probability is a measure of “degree of belief”. Solvency II project requires technical provisions to be calculated according to the principle of “best estimate” and to be increased by the risk margin. Unclassic Bayesian methods of estimate of IBNR technical provisions, which are an alternative for classic methods, will be presented in this article.

Keywords: IBNR reserve, Bayesian inference, Solvency II project, classical and Bayesian *chain ladder* method of evaluating the IBNR reserve in non-life insurance.

1. Wstęp

Zakłady ubezpieczeniowe i zakłady reasekuracji są zobowiązane, z punktu widzenia rachunkowości i dla potrzeb wypłacalności, tworzyć rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe (skrót: rezerwy TU, *technical provisions*). Środki te przeznaczone są na pokrycie bieżących i przyszłych zobowiązań, jakie mogą wystąpić w wyniku zawartych umów ubezpieczenia lub umów reasekuracji.

Głównym celem pracy jest prezentacja bayesowskiego modelu *chain ladder* rezerwy IBNR (*Incurred But Not Reported*) w ubezpieczeniach majątkowych. Dodatkowym celem artykułu jest adaptacja ww. modelu do rzeczywistych danych szkodowych oraz porównanie oszacowanej rezerwy IBNR z wynikami uzyskanymi deterministyczną (klasyczną) techniką *chain ladder*. W pracy zaprezentowane zostaną aktualne wytyczne dotyczące tworzenia rezerw TU w zakładach ubezpieczeniowych i zakładach reasekuracji według europejskiego projektu wypłacalności podmiotów rynku ubezpieczeniowego (Wypłacalność II, Solvency II). Do realizacji celów badania wykorzystano dane szkodowe opublikowane przez Taylora i Ashego [1983].

2. Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe

2.1. Projekt Solvency II

Rezerwy TU są tworzone, zgodnie z polskimi standardami rachunkowości, na potrzeby sprawozdawczości statutowej (i rachunkowości) według wartości księgowej. Zasady tworzenia rezerw TU zostały określone w następujących aktach prawnych: ustawie o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej [Ustawa z 22 maja 2003, Ustawa z 11 września 2015], ustawie o rachunkowości ubezpieczeniowej [Ustawa z 19 grudnia 1994] oraz rozporządzeniu Ministra Finansów w sprawie szczególnych zasad rachunkowości zakładów ubezpieczeń i zakładów reasekuracji [Ustawa z 28 grudnia 2009]. Zgodnie z [Rozporządzeniem Delegowanym Komisji (UE) 2015/35/UE z dnia 10 października 2014] od 1 stycznia 2016 r. – z dniem wdrożenia [Dyrektywy 2009/138/WE Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i wykonywania działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej – Wypłacalność II] – rezerwy TU są dodatkowo tworzone na potrzeby wypłacalności według wartości rynkowych (uwzględniających m.in. zmienność rezerw), zgodnie z międzynarodowymi standardami sprawozdawczości rachunkowej¹.

Rezerwy TU zgodnie z ww. Rozporządzeniem Delegowanym Komisji UE będą tworzone w ramach jednorodnych grup ryzyka i linii biznesowych (art. 22) i szacowane w sposób „wiarygodny”. Odzworowanie przepływów pieniężnych uznaje się za wiarygodne, jeżeli wyceny odpowiadają wiarygodnej wartości rynkowej. Informacje

¹ Wartość rezerw TU ma być ustalona na podstawie ceny rynkowej instrumentów finansowych (art. 40 pkt 4).

uznaje się za wiarygodne, jeśli można przedstawić dowody potwierdzające ich wiarygodność i przejrzystość metod ich generowania (art. 27). Jednakże cóż oznacza „przejrzystość metod ich generowania”? Czy będą preferowane metody prostsze (tzn. o prostszych założeniach), czy może łatwiejsze w implementacji? Zapewne nie będą to metody deterministyczne, gdyż rezerwy TU mają być sumą „najlepszego oszacowania” (*best estimate*) i „marginesu ryzyka” (*risk margin*). Być może kolejne wytyczne doprecyzują termin „wiarygodne oszacowanie rezerw”. Na razie art. 21 określa, że jeżeli dane statystyczne są niewystarczające do zastosowania wiarygodnej oceny, to można wykorzystać odpowiednie przybliżenie. Efektem tego zapisu może być stosowanie przybliżenia w szacowaniu rezerw TU przez zakłady ubezpieczeń i zakłady reasekuracji.

2.2. Podejście bayesowskie

Metody bayesowskie zaliczane są do nieklasycznych metod wnioskowania statystycznego [Szreder 1994], których rozwój nastąpił w połowie XX w. wraz z rozwojem ogólnej teorii decyzji statystycznych Walda. Metody te przyjmują, że prawdopodobieństwo to „miara stopnia przekonania co do prawdziwości danego stwierdzenia” (*degree of belief*)” [Pipień 1999, s. 155], a rozkład opisujący badane zjawisko (tzw. rozkład *a posteriori*) wyznacza się na podstawie obserwowanego zdarzenia z próby (tzw. rozkładu próbkowego) oraz rozkładu parametrów (tzw. rozkład *a priori*). Dodatkowo zakłada się, że parametry (stany natury) to zmienne losowe o rozkładzie prawdopodobieństwa szacowanym na podstawie dodatkowych informacji (np. wiedzy i doświadczeniu badacza) [Aczel 2000, s. 783]. W celu wykonania prognozy badanego zjawiska szacuje się predyktywny rozkład *a posteriori*². Zwolennicy podejścia bayesowskiego preferują metody bayesowskie, które według Rosenberg i Young [1999, s. 132] są proste dla aktuariuszy myślących w terminach rachunku prawdopodobieństwa.

Pod koniec XX w. (wraz z rozwojem informatyki i technik komputerowych) do analizy rezerwy IBNR zaczęto używać modeli bayesowskich, które w sposób „mechaniczny” pozwalają oszacować zmienność rezerw. Na uwagę zasługują prace Verralla [1990], Englanda i Verralla [2002] oraz Scollnika [2001]. Modele bayesowskie rezerwy IBNR są pewną alternatywą dla nieklasycznych modeli bootstrapowych, w których wyniki mogą być zaburzone zbyt małą liczbą „pseudodanych” lub ograniczoną liczbą kombinacji reszt używaną przy generowaniu „pseudodanych”.

² Podejście bayesowskie nie zawsze daje wyniki dokładniejsze niż podejście klasyczne. Jeżeli informacja *a priori* jest dokładna (tj. „wiarygodna”), to oszacowania będą dokładniejsze. Jednakże w innych przypadkach można uzyskać wyniki mniej dokładne niż w podejściu klasycznym. Jeżeli informacja *a priori* opiera się na wynikach z wcześniejszych badań, to jest traktowana jako obiektywna i raczej nie kwestionuje się jej zasadności. Jednak jeśli informacja opiera się na osobistych przekonaniach, intuicji i poglądach badacza, to jej charakter jest subiektywny i wtedy może być kwestionowana przez zwolenników teorii klasycznych; szerzej: [Aczel 2000, s. 784].

3. Metody estymacji rezerwy IBNR

3.1. Trójkąt szkód

Szacowanie rezerwy IBNR bazuje na historycznych danych szkodowych przedstawionych w tzw. trójkącie szkód (nieskumulowanym lub skumulowanym, *the run-off triangle of incremental losses* or *the run-off triangle of cumulative losses*), będącym (najczęściej) „trójkątną” macierzą szkód $[x_{i,j}]_{n \times n}$ lub $[c_{i,j} = \sum_{k=1}^j x_{i,k}]_{n \times n}$, gdzie $x_{i,j}$ to realizacje zmiennych losowych $X_{i,j}$ opisujących informacje o wypłaconej szkodzie (liczbie lub wartości) zgłoszonej w i -tym okresie wypadkowym (dane poziome) oraz rozliczonej z opóźnieniem o j okresów (dane pionowe), tj. do końca $i+j-1$ okresu kalendarzowego (dane na przekątnych). Jeżeli $x_{i,j}$ to wartości szkód, zakłada się, że są to wartości realne (uwzględniające inflację) sumy wypłaconych odszkodowań i świadczeń wraz z kosztami wypłat.

Tabela 1. Trójkąt szkód

Okres wystąpienia szkody (i)	Okres rozliczenia szkody (j)					
	1	2	3	...	n-1	n
1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$...	$x_{1,n-1}$	$x_{1,n}$
2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$...	$x_{2,n-1}$	
3	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	$x_{3,3}$			
⋮	⋮	⋮				
n-1	$x_{n-1,1}$	$x_{n-1,2}$				
N	$x_{n,1}$					

Legenda:

- $x_{i,j}$ – nieskumulowane szkody,
- i – okres wypadkowy szkody,
- j – okres rozliczenia szkody,
- $i+j-1$ – okres kalendarzowy.

Źródło: opracowanie własne.

Rezerwa IBNR jest interpretowana jako bieżące i przyszłe zobowiązania ubezpieczeniowe z tytułu zaistniałych szkód, niezgłoszonych w zakładach ubezpieczeń do dnia tworzenia rezerw TU. Rezerwa ta należy do rezerw na niewypłacone odszkodowania i świadczenia, tzw. rezerw szkodowych. Wartość rezerwy IBNR jest szacowana na podstawie brakujących danych w tablicy szkód przedstawionych w tabeli 1, zgodnie z wzorem:

$$\hat{R}^{IBNR} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i = \sum_{i=1}^n (\hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}), \quad (1)$$

gdzie: $C_{i,n-i+1}$ to skumulowane wartości szkód z $n-i+1$ -go okresu kalendarzowego (dane znajdujące się na przekątnej macierzy szkód), $\hat{C}_{i,j} = \hat{C}_{i,j-1} \cdot \hat{f}_{i,j}$ to prognozowane przyszłe szkody, $\hat{f}_{i,j}$ to estymatory współczynników rozwoju szkód. W wielu metodach przyjmuje się, że $\hat{C}_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}$.

3.2. Klasyczna metoda *chain ladder*

Deterministyczna metoda *chain ladder* (ozn. CL) jest jedną z najstarszych metod szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych, którą opisują m.in. [Harnek 1966; Taylor 2000; Wieteska 2004; Pobłocka 2008]. Opiera się ona na trójkącie skumulowanych szkód $[C_{i,j} = \sum_{k=1}^j X_{i,k}]_{n \times n}$, w którym współczynniki rozwoju szkód $f_{i,j}$ (*individual development factor*) definiowane są jako:

$$f_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} \quad \text{dla } j=2, 3, \dots, n; \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Współczynniki $f_{i,j}$ szacowane są najczęściej jako tzw. ważone współczynniki rozwoju szkód (*weighted development factor*):

$$\hat{f}_j = \hat{f}_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{n-j+1} C_{k,j}}{\sum_{k=1}^{n-j+1} C_{k,j-1}} \quad \text{dla } j = n-i+2, n-i+3, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Przyszłe skumulowane szkody wyznacza się z wzoru: $\hat{C}_{i,j} = \hat{C}_{i,j-1} \cdot \hat{f}_j = C_{i,n-i+1} \cdot \tilde{f}_j$, gdzie $\tilde{f}_j = \prod_{k=2}^j \hat{f}_k$, stąd metoda CL nazywana jest metodą łańcuchową. Łączna rezerwa IBNR jest szacowana zgodnie z wzorem (1). Mankamentem tej techniki jest niemożność oceny dokładności szacowanych rezerw, z tego powodu metoda ta nie spełnia wymogów projektu wypłacalności Solvency II. Jednakże na całym świecie oszacowania uzyskane techniką CL przyjmuje się za wiarygodne i są one wzorcem dla innych metod (nawet bardzo skomplikowanych).

3.3. Bayesowski model *chain ladder*

Bayesowski model *chain ladder* (ozn. BCL) jest zaliczany do bayesowskich, nieklasycznych metod estymacji rezerwy IBNR, który zaprezentowany został przez Scollnik [2001, s. 5-20] oraz Jadamus-Hacura [2006]³. Bazuje on na trójkącie skumulowanych szkód $[C_{i,j} = \sum_{k=1}^j X_{i,k}]$. Zakłada się, że współczynniki rozwoju szkód $f_{i,j}$ definiowane wzorem (2) są niezależnymi zmiennymi losowymi, których rozkład *a priori* (odzwierciedlający wiedzę badacza) jest rozkładem normalnym:

³ W pracach opisano bayesowski model *chain ladder* dla przykładowego trójkąta szkód (z macierzy o wymiarach [6 x 6]).

$$f_{i,j} \sim N(\theta_j, \tau_{i,j}) \quad \text{dla } i=1, \dots, n; j=2, \dots, n \quad (4)$$

$$\begin{cases} \theta_j \sim N(\mu_\theta, \tau_\theta): & \tau_\theta \sim \Gamma(0.001, 0.001), \quad \mu_\theta \sim N(1, \sqrt{1000}) \\ \tau_{i,j} = \tau \cdot w_{i,j}: & \tau \sim \Gamma(0.001, 0.001), \quad w_{i,j} = 1, \end{cases}$$

gdzie: θ_j to wartość oczekiwana współczynnika rozwoju szkód $f_{i,j}$, $\tau_{i,j}$ to precyzja (odwrotność wariancji) współczynnika $f_{i,j}$, która może być ustalona dla wszystkich danych w identyczny sposób, np. $\tau_{i,j} = \tau$ ($w_{i,j} = 1$) lub może być proporcjonalna do składki ubezpieczeniowej czy też liczby szkód.

Rozkład *a priori* zdefiniowany wzorem (4) to rozkład hierarchiczny, którego parametry to zmienne losowe posiadające rozkład prawdopodobieństwa z parametrami stałymi (tzw. dwustopniowy model hierarchiczny) lub parametrami będącymi zmiennymi losowymi (tzw. trzy- i więcej stopniowe modele hierarchiczne). W ten sposób można tworzyć nawet kilka poziomów hierarchii. W praktyce przyjmuje się, że na najniższym szczeblu hierarchii jest rozkład nieinformacyjny (tzw. rozproszony, *diffused prior*); najczęściej jest to rozkład gamma (np. rozkład gamma o średniej 1 i wariancji 1000, tj. $\Gamma(0.001, 0.001)$).

4. Wyniki badań

Estymację rezerwy IBNR wykonano klasyczną i bayesowską metodą *chain ladder* dla danych ubezpieczeniowych z tabeli 2, dotyczących wypłaconych odszkodowań i świadczeń z tytułu ubezpieczenia komunikacyjnego posiadaczy pojazdów mechanicznych, opublikowanych przez Taylora i Ashego [1983].

Tabela 2. Trójkąt szkód zawierający wartości nieskumulowane wypłaconych odszkodowań i świadczeń (dane w dolarach)

Okres wypadkowy (i)	Okres opóźnienia w wypłacie odszkodowania (j)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357 848	766 940	610 542	482 940	527 326	574 398	146 342	139 950	227 229	67 948
2	352 118	884 021	933 894	1 183 289	445 745	320 996	527 804	266 172	425 046	
3	290 507	1 001 799	926 219	1 016 654	750 816	146 923	495 992	280 405		
4	310 608	1 108 250	776 189	1 562 400	272 482	352 053	206 286			
5	443 160	693 190	991 983	769 488	504 851	470 639				
6	396 132	937 085	847 498	805 037	705 960					
7	440 832	847 631	1 131 398	1 063 269						

8	359 480	1 061 648	1 443 370						
9	376 686	986 608							
10	344 014								

Źródło: [Taylor, Ashe 1983, s. 37-61].

W badaniu za rozkład *a priori* współczynników rozwoju szkód przyjęto (inaczej niż w modelu Scollnika⁴) rozkład normalny o średniej równej ważonym współczynnikom rozwoju szkód, oszacowanym klasyczną metodą *chain ladder* z wzoru (2) i odchyleniu standardowym generowanym z rozkładu gamma z parametrami 0,001 i 0,001:

$$f_{i,j} \sim N(\theta_j, \tau_{i,j}), \quad \text{dla } i=1, \dots, n; j=2, 3, \dots, n$$

$$\text{gdzie } \tau_{i,j} = \tau \sim \Gamma(0.001, 0.001), \quad \theta_j \sim N(\hat{f}_j; \tau_\theta)$$

$$\tau_\theta \sim \Gamma(0.001, 0.001), \quad \hat{f}_j = \hat{f}_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{n-j+1} C_{k,j}}{\sum_{k=1}^{n-j+1} C_{k,j-1}} \quad \text{dla } j=2, 3, \dots, n.$$

Estymację rezerwy IBNR w modelu bayesowskim wykonano w programie R na podstawie 10 000 wylosowanych rozkładów *a priori* współczynników rozwoju szkód⁵. Dla każdego uzyskanego rozkładu *a priori* oszacowano rezerwę IBNR. Na koniec obliczono średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe z otrzymanych 10 000 oszacowanych rezerw, które zaprezentowano w tabeli 3.

Tabela 3. Oszacowane wartości rezerwy IBNR w klasycznej metodzie *chain ladder* (CL) oraz bayesowskim modelu CL (BCL)

Oszacowana rezerwa (błąd)	Okres wypadkowy									Łącznie
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
CL	94634	469511	709638	984889	1419459	2177641	3920301	4278972	4625811	18680856
BCL*	94479 (5247)	469744 (7284)	709740 (8777)	985067 (9221)	1419077 (10428)	2177025 (12907)	3919938 (15863)	4279101 (13847)	4626029 (12360)	18680201 (33093)

* BCL – prezentowane wyniki to średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe (błąd w nawiasie) oszacowanych rezerw dla 10 000 wylosowanych rozkładów *a priori*.

Źródło: opracowanie własne.

⁴ W modelu Scollnika za rozkład *a priori* współczynników rozwoju szkód przyjęto rozkład normalny o średniej równej średniej arytmetycznej z indywidualnych współczynników rozwoju szkód.

⁵ Jeżeli wygenerowane wartości różniły się o więcej niż 5 p.p. od wartości z poprzedniego badaniego okresu, to losowanie było powtarzane tak długo, aż warunek został spełniony. Założenie takie jest konieczne, aby spełniony był warunek stacjonarności.

Rezerwy IBNR otrzymane w bayesowskiej metodzie *chain ladder* są wynikiem przyjętych założeń i różnią się nieznacznie od oszacowań uzyskanych w deterministycznej technice *chain ladder* (tab. 3)⁶. Łączna rezerwa IBNR w metodzie CL jest równa 18 680 856, a w modelu BCL 18 680 201 (ostatnia kolumna tabeli 3).

Bayesowski model *chain ladder* rezerwy IBNR z założenia szacuje rezerwy w wartościach realnych [Skollnik 2001], prezentuje, dla zdefiniowanych współczynników inflacji oraz stopy zwrotu z aktywów stanowiących pokrycie rezerw, jak można oszacować rezerwy w wartościach nominalnych oraz w wartościach zaktualizowanych na moment ich tworzenia (tzw. wartość bieżąca rezerw, *Net Present Value*). Zakładając, że w każdym roku badanym stopa inflacji będzie na poziomie 2%, a stopa zwrotu z aktywów stanowiących pokrycie rezerw będzie na poziomie 1%, to wartość nominalna rezerwy IBNR będzie równa 26 908 310, a wartość rezerw zaktualizowana na moment ich tworzenia (wartość bieżąca NPV) będzie równa 22 157 162, co prezentuje tabela 4 (kolumny 3 i 4).

Tabela 4. Estymowane wartości rezerwy IBNR za pomocą bayesowskiego modelu *chain ladder*

Okres wypadkowy	Rezerwa IBNR oszacowana w wartościach		
	realnych	nominalnych	NPV
2	94479	105817	99827
3	469744	538711	501939
4	709740	870955	783405
5	985067	268904	112222
6	1419077	923642	1640678
7	2177025	63911	2559481
8	3919938	581308	4626330
9	4279101	340338	5142141
10	4626029	214725	5691139
łącznie	18680201	26908310	22157162

Stopa inflacji 2%, stopa zwrotu z aktywów stanowiących pokrycie rezerw 1%

Źródło: opracowanie własne.

5. Zakończenie

W pracy zaprezentowano bayesowski model *chain ladder* rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych i wykonano jego aplikację do rzeczywistych danych szko-

⁶ Wyniki estymacji w modelu BCL zależą od wygenerowanych rozkładów *a priori*. W badaniu zdarzało się, że estymowane rezerwy w modelu BCL były identyczne jak w metodzie CL. Dla prezentowanych wyników współczynnik zmienności łącznej rezerwy IBNR (mierzony jako odchylenie standardowe do średniej rezerwy) wyniósł tylko 0,2 p.p.

dowych. Dla przyjętych założeń uzyskano wyniki zbliżone do klasycznej deterministycznej techniki *chain ladder*, która niestety nie pozwala oszacować zmienności rezerw. Prezentowany model jest modelem hierarchicznym, który pozwala oszacować zmienność rezerw (mierzoną odchyleniem standardowym), przez co spełnia wymogi projektu Wyplacalność II i może znaleźć zastosowanie w praktyce ubezpieczeniowej. Jednak czy przyjęte założenia w opisywanym modelu bayesowskim można uznać za „wiarygodne” według Rozporządzenia Delegowanego Komisji (UE)? Odpowiedź na to pytanie autorzy pozostawiają czytelnikom. Przydatność innych modeli bayesowskich do szacowania rezerwy IBNR będzie przedmiotem kolejnych badań.

Literatura

- Aczel A.D., 2000, *Statystyka w zarządzaniu*, Wydawnictwo naukowe PWN SA, Warszawa.
- Dyrektywa 2009/138/WE Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 25 listopada w sprawie podejmowania i wykonywania działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej – Wyplacalność II, Dz.U. UE L 335 z 17.12.2009 r., s. 1 z późn. zm.
- England P., Verrall R., 2002, *Stochastic claims reserving in general insurance*, British Actuarial Journal 8, GIRO, s. 443-518.
- Harek R.F., 1966, *Formula Loss Reserves*, Insurance Accounting and Statistical Proceedings.
- Jadamus-Hacura M., 2006, *Metody bayesowskie szacowania rezerwy szkodowej*, [w:] Ostasiewicz W. (red.), *Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 1108, s. 286-292.
- Pipień M., 1999, *Calkowania numeryczne w analizie bayesowskiej: Monte Carlo z funkcją ważności*, Przegląd Statystyczny, tom 46 (2), s. 155-176.
- Pobłocka A., 2008, *Wybrane metody kalkulacji rezerwy IBNR*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 1197, red. Ronka-Chmielowiec W., s. 368-376.
- Rosenberg M.A., Young V.R., 1999, *A Bayesian Approach to understanding Time Series Data*, North American Actuarial Journal 3 (2), s. 130-143.
- Rozporządzenie Delegowane Komisji (UE) 2015/35UE z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające ww. dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady Wyplacalność II, Dz.U. UE L 12 z 17.01.2015 r.
- Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 28 grudnia 2009 r. w sprawie szczególnych zasad rachunkowości zakładów ubezpieczeń i zakładów reasekuracji, Dz.U. 2009, nr 226, poz. 1825 ze zm.
- Scollnik D., 2001, *Bayesian reserving Models Inspired by Chain Ladder Methods and Implemented Using WinBUGS*, s. 5-20.
- Szreder M., 1994, *Informacje a priori w klasycznej i bayesowskiej estymacji modeli regresji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Sopot.
- Taylor G.C., 2000, *Loss Reserving: An Actuarial Perspective*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
- Taylor G., Ashe F., 1983, *Second moments of estimates of outstanding claims*, Journal of Econometrics, no. 23, s. 37-61.
- Ustawa z dnia 29 września 1994 r. o rachunkowości, Dz.U. nr 121, poz. 591.
- Ustawa z dnia 22 maja 2003 r. o działalności ubezpieczeniowej, Dz.U. nr 124, poz. 1151 ze zm.
- Ustawa z dnia 11 września 2015 r. o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej, Dz.U. poz. 1844.
- Verrall R., 1990, *Bayesian and Empirical Bayes Estimation for Chain Ladder Model*, ASTIN Bulletin 20 (2), s. 217-243.
- Wieteska S., 2004, *Rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe zakładów ubezpieczeń majątkowo-osobowych*, Wydawnictwo Branta, Bydgoszcz–Łódź.
- Zellner A., 1971, *An Introduction to Bayesian interference in Econometrics*, J. Wiley, New York.